

UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

Mr Janko Jovanović, dipl.maš.inž.

**BIOMEHANIČKI MODEL LJUDSKOG PRŠLJENA
BAZIRAN NA PROCESU ADAPTACIJE KOŠTANE
MATERIJE NA MEHANIČKO OPTEREĆENJE**

- doktorska disertacija -

Podgorica, 2006.

1553320061



Mun IV 798

23297

~~29668~~

Želim da izrazim posebnu zahvalnost mom prijatelju i mentoru prof. dr Miomiru Jovanoviću na sugestijama i podršci tokom ovog istraživanja. Inspirativni i sadržajni razgovori koje smo vodili o različitim aspektima ovog istraživanja predstavljali su dragocjen podsticaj za njegovu realizaciju. Takođe bih želio da se zahvalim prijatelju i kolegi prof. dr Radošu Bulatoviću na podršci koju sam od njega dobijao za sve profesionalne izbore koje sam pravio od prvog dana mog radnog angažmana na Mašinskom fakultetu u Podgorici. Posebnu zahvalnost dugujem i dr Ratku Radoviću na korisnim sugestijama, kao i beskrajnom strpljenju i pažnji sa kojom je pratio moj rad na ovom istraživanju.

Želim da izrazim zahvalnost doktoru Mladenu Radonjiću i medicinskom tehničaru Mišku Obradoviću sa Odjeljenja za Radiologiju Kliničkog Centra Crne Gore, kao i kolegici doc. dr Zorici Marković sa Metalurško-Tehnološkog fakulteta u Podgorici na dragocjenoj pomoći pri realizaciji eksperimentalnog dijela ovog istraživanja.

REZIME

Cilj ovog rada je razvoj biomehaničkog *FEM* modela ljudskog pršljena baziranog na procesu adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje. Mehaničko opterećenje, čijem je dejstvu kost izložena tokom svakodnevnih aktivnosti, je osnovni uzročnik strukture koštanog tkiva ljudskog skeleta. Proces adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, kroz razgradnju starog i formiranje novog koštanog tkiva, prilagođava strukturu koštanog tkiva uslovima mehaničkog opterećenja tokom čitavog ljudskog života. Aktuelni matematički modeli procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, *Nijmegen* i *Stanford* model, su razvijeni krajem osamdesetih godina prošlog vijeka, nakon čega su doživjeli veći broj modifikacija. Ovaj rad treba da dovede do razvoja originalnog modela adaptivnog procesa kroz modifikaciju i poboljšanje postojećih *Nijmegen* modela. Stoga su su definisani sledeći ciljevi:

- Istraživanje efekata varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces;
- Uključivanje ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva, utvrđene istraživanjem koje je 1999. godine sproveo *D. Ulrich* sa saradnicima [51], u model adaptivnog procesa.

Raspodjele koštanog tkiva pršljena dobijene originalnim modelom autora ovog rada i postojećim *Nijmegen* modelima, model *Xinghua*-e i model *Mullender*-a, će biti upoređene sa raspodjelom koštanog tkiva pršljena, određenom kvantitativnom kompjuterskom tomografijom, u cilju potvrde uspješnosti modeliranja adaptivnog procesa.

Biomehanički *FEM* model ljudskog pršljena u potpunosti određuju njegova geometrija i mehaničke karakteristike konačnih elemenata. U cilju povećanja efikasnosti procesa rekonstrukcije geometrije pršljena, u odnosu na postojeće metode, biće razvijen parametarski model za rekonstrukciju 3D geometrijskog modela pršljena. Numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa, baziranom na originalnom modelu autora ovog rada, će biti određena raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena. Na bazi korelativnih veza relativne gustine sa modulom elastičnosti, naponom na granici plastične deformacije i naponom na granici statičkog razaranja koštanog tkiva, utvrđenih brojnim istraživanjima, biće određene mehaničke karakteristike konačnih elemenata modela pršljena.

Najbitnija karakteristika biomehaničkog *FEM* modela pršljena baziranog na procesu adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje je mogućnost adaptacije mehaničkih karakteristika konačnih elemenata modela na uslove mehaničkog opterećenja usled kojih dolazi do pokretanja adaptivnog procesa. U slučaju znatnih promjena uslova mehaničkog opterećenja, kao što se događa nakon ugradnje implantata, dolazi do pokretanja adaptivnog procesa koji vodi promjeni raspodjele koštanog tkiva, a tim i mehaničkih karakteristika konačnih elemenata modela. Dakle, ovaj model omogućava da se tokom razvoja implantata istraži uticaj dimenzija i oblika implantata na promjenu raspodjele koštanog tkiva izazvanu adaptivnim procesom u postoperativnom periodu. Razvoj implantata baziran na ovom modelu omogućava izbor adekvatnog oblika i dimenzija implantata kojim bi se preduprijedila promjena raspodjele koštanog tkiva, koja bi uzrokovala pretjerano slabljenje strukture koštanog tkiva u postoperativnom periodu i neuspjeh implantacije usled oštećenja ili loma kosti.

ABSTRACT

The aim of this research is development of biomechanical FEM model of vertebra based on bone remodeling. Mechanical load acting upon bone, during regular daily activities, is the main cause of bone tissue structure of human skeleton. Bone remodeling adapts bone tissue structure, by resorption of old bone tissue and forming of new one, to mechanical load conditions during whole of the human life. The state of the art in mathematical models of bone remodeling, Nijmegen and Stanford model, were developed by the end of eighties of the previous century, afterwards these models underwent many modifications. This research is to contribute to development of an original model of bone remodeling by modifications and improvement of the existing Nijmegen models. Therefore the following aims are defined:

- Investigation of the effects of shape variation of spatial influence function on bone remodeling;
- Introduction of orthotropic nature of trabecular bone tissue in the model of bone remodeling, that was investigated by D.Urlich and his coworkers [51].

Biomechanical FEM model of human vertebra is entirely defined by its geometry and mechanical properties of finite elements. In order to improve the efficiency of geometric reconstruction of vertebra, in comparison with the existing methods, a parametric model will be developed for reconstruction of 3D geometric vertebra model. Distribution of apparent density of bone tissue of vertebra will be obtained by numerical modeling of bone remodeling based on the original model of the author of this research. Mechanical properties of finite elements of vertebra model will be obtained based on the correlation between apparent density and Young's modulus, yield stress and ultimate stress of bone tissue, confirmed by numerous researches.

The most important feature of biomechanical FEM model of vertebra based on bone remodeling is the adaptability of mechanical properties of model's finite elements to mechanical load conditions causing initiation of bone remodeling. In case of significant changes of mechanical load conditions, like the ones taking place after implantation, initiated bone remodeling causes changes in distribution of bone tissue and mechanical properties of finite elements as well. Therefore, this model could be used during implant design to investigate implant's shape and dimensions influence on changes in distribution of bone tissue during bone remodeling in post-operative period. By choice of adequate implant's shape and dimensions this approach prevents undesirable redistribution of bone tissue during bone remodeling in post-operative period, that could cause exaggerated weakening of bone tissue structure and failure of implantation because of damage or break of implanted bone.

SADRŽAJ

Poglavlje 1

UVOD	1
1.1 NAUČNI CILJ ISTRAŽIVANJA	7

Poglavlje 2

PREGLED ISTRAŽIVANJA I TEORIJSKE OSNOVE	8
2.1 ANATOMSKE OSNOVE LJUDSKOG TIJELA	8
2.1.1 Koordinatne ose i ravni ljudskog tijela	8
2.1.2 Ljudski skelet	8
2.1.3 Kičmeni stub	10
2.1.4 Geometrija, dimenzije i tkivo pršljena	11
2.2 MEHANIČKE KARAKTERISTIKE KOŠANOG TKIVA	13
2.2.1 Gustina	13
2.2.2 Modul elastičnosti	14
2.2.3 <i>Poisson</i> -ov koeficijent	15
2.2.4 Granica plastične deformacije u odnosu na pritisak	15
2.2.5 Granica statičkog razaranja u odnosu na pritisak	16
2.2.6 Granica zamornog razaranja u odnosu na pritisak	17
2.3 BIOMEHANIČKI MODELI KIČMENOG STUBA	18
2.3.1 Model za određivanje opterećenja u lumbosakralnom dijelu kičmenog stuba usled težine tijela	18
2.3.2 Modeli za određivanje opterećenja kičmenog stuba usled vibracija i udara	20
2.3.3 Modeli za analizu naponsko-deformacionog stanja djelova kičmenog stuba	23
2.3.4 Diskusija postojećih modela djelova kičmenog stuba	26
2.4 NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPTEREĆENJE	29
2.4.1 Matematički modeli procesa adaptacije koštanog tkiva	30
2.4.2 Lokalna optimizacija u procesu adaptacije koštanog tkiva	31
2.4.3 <i>Cowin</i> -ova teorija adaptivne elastičnosti	33
2.4.4 <i>Nijmegen</i> modeli	33
2.4.5 <i>Stanford</i> modeli	40
2.4.6 Eksperimentalna istraživanja procesa adaptacije koštanog tkiva	41
2.4.7 Cilj istraživanja u numeričkom modeliranju procesa adaptacije koštanog tkiva	43

Poglavlje 3

EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA	44
3.1 ISTRAŽIVANJA KOMPJUTERSKOM TOMOGRAFIJOM X-ZRACIMA	44
3.1.1 Fizički princip rada	44
3.1.2 Formiranje CT slike	45
3.1.3 Mjerna oprema	46
3.1.4 Određivanje raspodjele relativne gustine koštanog tkiva slabinskog pršljena L ₅	47
3.1.5 Određivanje dimenzija tijela slabinskog pršljena L ₅	55
3.2 ISTRAŽIVANJA VIBRACIJA MOSNE DIZALICE	56

Poglavlje 4

GEOMETRIJSKO MODELIRANJE LJUDSKOG PRŠLJENA	58
4.1 UVOD	58
4.2 PREGLED I ANALIZA METODA ZA GEOMETRIJSKO MODELIRANJE DIJELOVA LJUDSKOG SKELETA	59
4.3 PREDLOG METODA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA	61
4.3.1 Izbor i određivanje veličina parametara	62
4.3.2 Dekompozicija obvojne površine pršljena na elementarne površine	63
4.3.3 Parametarsko modeliranje graničnih krivih elementarnih površina	66
4.3.4 Modeliranje elementarnih površina	74
4.3.5 Generisanje 3D površinskog modela pršljena	75
4.4 PROCJENA USPJEŠNOSTI METODA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA	78
4.5 DISKUSIJA REZULTATA PARAMETARSKOG MODELIRANJA GEOMETRIJE PRŠLJENA	79

Poglavlje 5

NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠTANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPTEREĆENJE	80
5.1 UVOD	80
5.2 FEM MODEL SLABINSKOG PRŠLJENA L ₅	81
5.2.1 Mreža konačnih elemenata pršljena	81
5.2.2 Konačni elementi ligamenata	83
5.2.3 Karakteristike materijala konačnih elemenata	84
5.2.4 Algoritam za određivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametskog konačnog elementa	85
5.2.5 Algoritam za određivanje matrice krutosti FEM modela pršljena	89
5.2.6 Mehaničko opterećenje pršljena	91

5.2.7 Algoritam za određivanje ekvivalentnog opterećenja zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa.....	94
5.2.8 Određivanje parametara raspodjele kontaktnog pritiska tijela pršljena.....	97
5.2.9 Granični uslovi	97
5.2.10 Određivanje pomijeranja čvornih tačaka <i>FEM</i> modela pršljena	98
5.2.11 Algoritam <i>SOR</i> metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina.....	99
5.3 NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠTANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPETREĆENJE	100
5.3.1 Predlog modifikacije <i>Nijmegen</i> modela procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje.....	101
5.3.2 Algoritam za simulaciju procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje	103
5.3.3 Određivanje odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže.....	108
5.3.4 Rezultati numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje	110
5.3.5 Diskusija rezultata numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje.....	116
5.4 PRIMJER PRIMJENE BIOMEHANIČKOG <i>FEM</i> MODELA PRŠLJENA ZA ODREĐIVANJE NAPONSKOG STANJA PRŠLJENA RUKOVAOCA MOSNE DIZALICE	117

Poglavlje 6

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA.....	120
----------------------------	-----

Prilog A

MATEMATIČKE OSNOVE GEOMETRIJSKOG MODELIRANJA	123
A.1 UVOD	123
A.2 TEORIJSKA OSNOVA ZA MODELIRANJE KRIVIH LINIJA	123
A.2.1 Parametarski opis krivih linija	123
A.2.2 Oblici polinomskih krivih linija.....	124
A.2.3 B-splajn kriva linija	126
A.2.4 Racionalna B-splajn kriva linija	129
A.3 TEORIJSKA OSNOVA ZA MODELIRANJE POVRŠINA	129
A.3.1 <i>Bezier</i> -ova površina	129
A.3.2 <i>Coons</i> -ova površina	130
A.3.3 B-splajn površina.....	131

Prilog B

MEHANIČKE OSNOVE METODE KONAČNIH ELEMENATA	132
B.1 UVOD	132

B.2 OSNOVI TEORIJE ELASTIČNOSTI	132
B.2.1 Jednačine spoljašnje i unutrašnje ravnoteže.....	132
B.2.2 Uslovi kompatibilnosti.....	133
B.2.3 Veza deformacija i pomjeranja	133
B.2.4 Veza napona i deformacija.....	134
B.2.5 Ekvivalentni napon	135
B.2.6 Granični uslovi.....	135
B.3 METODA KONAČNIH ELEMENATA	135
B.3.1 Linijski izoparametarski konačni element u obliku štapa.....	136
B.3.2 Zapreminski linearni izoparametarski konačni element	137
B.3.3 Numeričko rešavanje višestrukih određenih integrala	139
B.3.4 Numeracija čvornih tačaka	140
B.3.5 Sastavljanje matrice krutosti tijela	141
B.3.6 Ekvivalentno opterećenje konačnog elementa.....	142
B.3.7 Uvod u nelinearne probleme.....	143
B.3.8 Matrica geometrijske krutosti	143
B.3.9 <i>Newton-Raphson</i> -ova metoda za rešavanje nelinearnih problema.....	145
B.3.10 Konjugovano gradijentna metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina sa aproximacijom matrice koeficijenata sistema jednačine.....	145
 Prilog C	
PREGLED REZULTATA ISTRAŽIVANJA GEOMETRIJSKIH DIMENZIJA SLABINSKIH PRŠLJENA	148
 Prilog D	
PREGLED IZABRANIH DIJELOVA RAZVIJENIH PROGRAMA.....	151
D.1 PROGRAM ZA IZDVAJANJE PODATAKA O CT BROJU IZ SLIKA U <i>DICOM</i> FORMATU DOBIJENIH KOMPJUTERSKOM TOMOGRAFIJOM	151
D.2 IZABRANI DIJELOVI PROGRAMA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA I GENERISANJE MREŽE KONAČNIH ELEMENATA TIJELA PRŠLJENA	153
D.3 IZABRANI DIJELOVI PROGAMA ZA NAPONSKO-DEFORMACIONU ANALIZU METODOM KONAČNIH ELEMENATA	157
LITERATURA	160

Pregled korišćenih skraćenica i pojmova

FEM	<i>(Finite Element Model) – Model generisan konačnim elementima</i>
FEA	<i>(Finite Element Analysis) – Analiza metodom konačnih elemenata</i>
FSD	<i>(Fully Stressed Design) – Konstruisanje prema maksimalnom ravnomjerno raspoređenom naponskom stanju</i>
ESO	<i>(Evolutionary Structural Optimization) – Evolutivna strukturna optimizacija</i>
CT	<i>(Computed Tomography) – Kompjuterska tomografija X-zracima</i>
WW	<i>(Window Width) – Širina prozora CT slike</i>
WL	<i>(Window Level) – Nivo prozora CT slike</i>
QCT	<i>(Quantitative Computer Tomography) – Kvantitativna kompjuterska tomografija</i>
DICOM	<i>(Digital Imaging and Communications in Medicine) - Standardizovani format za prenos medicinskih slika i podataka</i>
NURBS	<i>(Nonuniform Rational B Spline) – Neuniformni racionalni B splajn</i>
SOR	<i>(Successive Overrelaxation Method) – SOR metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina</i>

1

UVOD

Multidisciplinarni pristup u rešavanju zahtjeva koji se postavljaju pred savremenu medicinu, uzrokovan kompleksnom prirodom ljudskog organizma, je tokom prethodne dvije decenije doveo do ekspanzije naučnih istraživanja u oblastima poput biohemije, biofizike, biomehanike... Razvoj koštanih implantata kojim se substituišu djelovi ljudskog skeleta predstavlja aktuelnu istraživačku oblast u kojoj se prepliću raznorodna istraživanja koja za cilj imaju razvoj koštanih implantata optimalno prilagođenih ljudskom organizmu. Brojna istraživanja, koja se odvijaju širom svijeta, u domenu biomehanike, kada je riječ o razvoju koštanih implantata, imaju za cilj:

- Određivanje mehaničkih karakteristika koštanog tkiva;
- Matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, što bi omogućilo preoperativnu simulaciju procesa adaptacije koštanog tkiva u izmijenjenim uslovima mehaničkog opterećenja do kojih dolazi po ugradnji implantata.

Rezultati navedenih istraživanja se mogu koristiti i za razvoj biomehaničkog modela djelova ljudskog skeleta ili skeleta u cjelini sa mišićima, ligamentima, međupršljenskim diskovima i ostalim djelovima ljudskog tijela, koji u mehaničkom smislu, čine jednu funkcionalnu cjelinu. Ovaj model bi omogućio analizu uticaja mehaničkog opterećenja koje na rukovaoca mašine djeluje u različitim radnim režimima. Ovakva analiza sprovedena u fazi razvoja konstruktivnog rešenja bi omogućila razvoj mašina koje nisu uzročnik pojave profesionalnih oboljenja rukovaoca istih izazvanih mehaničkim opterećenjem koje je posljedica rada mašine.

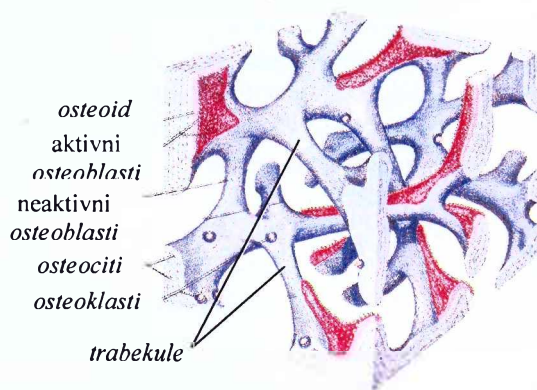
Tokom ljudskog života koštano tkivo prolazi kroz tri faze. Prva je faza rasta, kada se formira oko 90% koštane mase. Potom nastupa faza konsolidacije, u trajanju 10 do 15 godina, kada se koštana masa i dalje uvećava do dostizanja maksimuma od 20 do 30 godine života. Nakon faze konsolidacije nastupa faza involucije, koja traje do kraja života, tokom koje se koštana masa smanjuje. Okončanje faze rasta označava početak promjena koštanog tkiva, koje traju čitavog života, poznatih kao proces adaptacije koštanog tkiva. Živa kost nikad nije metabolički mirna, već se koštano tkivo, naprotiv, stalno mijenja adaptirajući se na fizičko okruženje u kojem se nalazi kroz procese razgradnje starog i formiranja novog koštanog tkiva. Kod odraslih osoba 5% kortikalnog i 25% spongioznog koštanog tkiva se promijeni svake godine kroz adaptivni proces [110]. Proces starenja sa sobom donosi neuravnoteženost procesa razgradnje i formiranja koštanog tkiva. Stoga se količina razgrađenog koštanog tkiva ne nadoknađuje adekvatnom količinom formiranog koštanog tkiva, što rezultira smanjenjem koštane mase. Ova neravnoteža, do koje dolazi nakon faze konsolidacije, je uzrokovana hormonalnim promjenama, promjenama u prehrani koštanog tkiva, kao i promjenama u načinu života [110].

U mehaničkom smislu skelet predstavlja “noseću konstrukciju” ljudskog tijela. Kao takav nosi težinu ljudskog tijela, predstavlja čvrsto hvatište za mišiće i ligamente i omogućava prenos sila, koje ostvaruju mišići, na zglobove tokom pokretanja dijelova ljudskog tijela. Građa kosti je uslovljena njihovom osnovnom, nosećom funkcijom. Stoga se unutrašnja struktura kosti, tkz. matriks tokom adaptivnog procesa prilagođava mehaničkom opterećenju koje trpi. Vjeruje se da je rezultat prilagođavanja matriksa mehaničkom opterećenju, kost čija je građa svedena na fiziološku granicu tako da sa minimumom koštane mase može odgovoriti osnovnoj, nosećoj funkciji [110,150]. Naponi u kosti ovakve građe odgovaraju naponima u stanju ravnoteže.

Ukoliko su naponi u kosti u stanju ravnoteže, adaptivnim procesom se ne mijenja struktura koštanog matriksa već se samo vrši obnavljanje koštanog tkiva kroz proces razgradnje starog koštanog tkiva i njegove zamjene novoformiranim koštanim tkivom. Kada se pri promjeni raspodjele napona u kosti, izazvanoj izmijenjenim uslovima mehaničkog opterećenja, naruši ravnotežno stanje dolazi do pokretanja adaptivnog procesa koji mijenja strukturu koštanog matriksa. Tokom adaptivnog procesa struktura matriksa se mijenja tako što dolazi do smanjenja koštane mase u područjima manjih i povećanja koštane mase u područjima većih napona. Ova promjena traje dok građa kosti ne bude takva da su naponi u kosti u stanju ravnoteže.

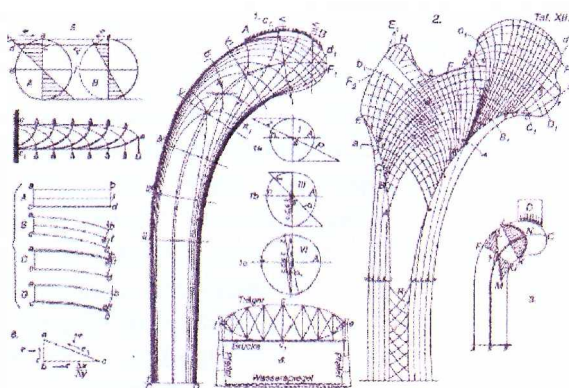
Proces adaptacije koštanog tkiva započinje fazom aktivacije u toku koje se formiraju *osteoklasti*, ćelije koje razgrađuju koštano tkivo, i koja traje oko tri dana. Novoformirani *osteoklasti* tokom naredne četiri sedmice razgrađuju koštano tkivo, nakon čega počinju aktivnosti *osteoblasta*, ćelija koje formiraju koštano tkivo. Aktivnost *osteoblasta* započinje formiranjem sloja mineralizovanog koštanog tkiva, a nastavlja se formiranjem *osteoida*, odnosno, organskog dijela koštanog tkiva koje se deponuje neposredno ispod prethodno formiranog mineralizovanog sloja. Ova faza traje oko tri mjeseca, pri čemu oko deset dana nakon njenog početka,

zapčinje proces mineralizacije *osteoida*, tokom kojeg se koštano tkivo obogaćuje mineralnim materijama i na taj način formira njegov neorganski dio. Oko 60% mineralnih materija koje sadrži novoformirano koštano tkivo se deponuje u toku nekoliko dana, a čitav proces se okončava za oko šest mjeseci. Tokom procesa mineralizacije organskog dijela koštanog tkiva *osteoblasti* postaju “zarobljenici” sopstvenog produkta, koštanog matriksa prikazanog na slici 1.1, transformišući se u *osteocite* tj. formirane koštane ćelije. Prva teorija o vezi mehaničkog opterećenja i adaptacije koštanog tkiva

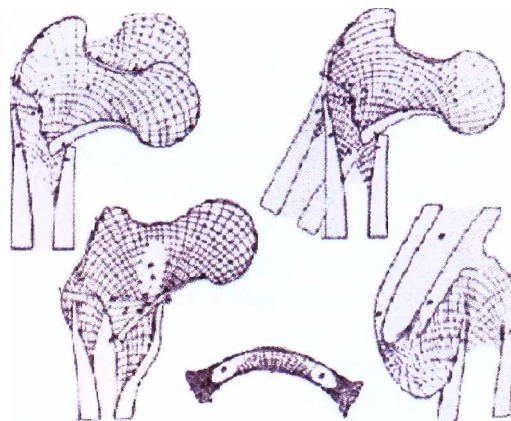


Slika 1.1 Spongiozno koštano tkivo

se javila sredinom devetnaestog vijeka. 1867. godine švajcarski anatom *Herman von Mayer* je u okviru istraživanja ljudskog skeleta proučavao i orijentaciju koštanog matriksa butne kosti. Proučavajući rezultate ovog istraživanja njemački građevinski inženjer *Karl Culmann* je uočio sličnost pravaca pružanja koštanog matriksa sa pravcima pružanja glavnih napona koje je, ranije razvijenom grafičkom metodom, odredio za *Fairbain* kranove, što je prikazano na slici 1.2 iz originalnog *Culmann*-ovog rada. Iz ovog opažanja je proistekla *Culmann-von Mayer*-ova teorija, poznata kao teorija trajektorija, po kojoj se koštani matriks pruža duž pravaca glavnih napona, pri čemu ova činjenica nije dovedena u vezu sa mehaničkim opterećenjem [110,111]. Korak dalje je načinio njihov savremenik njemački anatom i ortoped *Julius Wolff* koji je utvrdio da se orijentacija koštanog matriksa može mijenjati kao posljedica promjene uslova mehaničkog opterećenja. *Wolff* je dokaze za svoju teoriju pronašao u strukturi koštanog matriksa kosti srasle nakon loma, prikazane na slici 1.3 iz originalnog *Wolff*-ovog rada, kod koje se pravac pružanja koštanog matriksa promijenio u odnosu na stanje prije loma, što je *Wolff* doveo u vezu sa izmijenjenim uslovima mehaničkog opterećenja kosti nakon loma.



Slika 1.2 Pružanje koštanog matriksa butne kosti i pravaca glavnih napona Fairbain kрана



Slika 1.3 Pružanje koštanog matriksa butne kosti prije i nakon loma

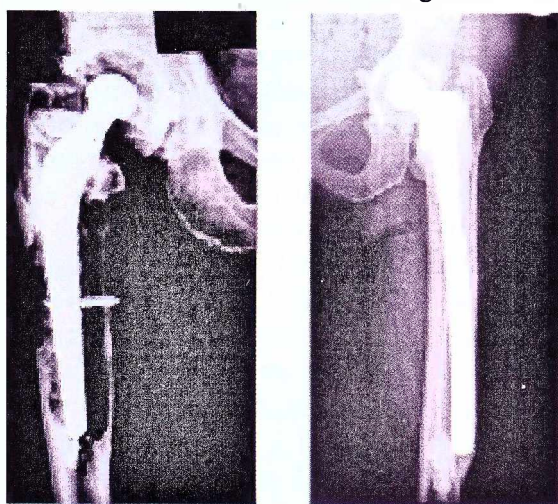
Svoje ideje o procesu adaptacije koštanog tkiva *Wolff* je detaljno obrazložio u knjizi *Das Gesetz der Transformation der Knochen* iz 1892. godine u kojoj je formulisao hipotezu, danas poznatu kao *Wolff-ov zakon*, koja glasi: *Svaka promjena u funkciji ili u obliku i funkciji kosti praćena je izvjesnim promjenama u strukturi koštanog tkiva u skladu sa matematičkim zakonom* [110,111]. Ovu hipotezu *Wolff* međutim, nikada nije pokušao da pretoči u matematičku teoriju.

Njemački hirurg *Wilhelm Roux* je 1895. godine uključio *Wolff*-ove ideje u svoju teoriju funkcionalne adaptacije bioloških struktura i organa. Prema *Roux*-u svi su organi građeni od minimuma tkiva koji im omogućava da mogu maksimalno odgovoriti funkcionalnim zahtjevima što predstavlja tkz. princip maksimum-minimum [150]. *Roux*-ova teorija predstavlja začetak i danas aktuelne ideje o tome da je adaptacija koštanog tkiva na mehaničko opterećenje optimalna pri čemu tkivo teži minimalnoj masi potrebnoj da nosi opterećenje. Zbog toga promjene u funkciji ili obliku i funkciji kosti, koje izazivaju promjenu uslova mehaničkog opterećenja kosti, izazivaju promjene u strukturi koštanog tkiva. Adaptivni proces tokom kojeg se ove promjene odigravaju traje toliko dugo dok se ne ostvari princip maksimum-minimum, tj. dok se sa minimumom koštanog tkiva ne postigne maksimum osnovne, noseće funkcije kosti. Organi potpuno prilagođeni funkciji imaju prema *Roux*-u funkcionalan oblik i strukturu i nalaze se u stanju ravnoteže. *Roux* je 1881. godine iznio i prvu ideju o mehanizmu koji pokreće proces adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje prema kojoj ćelije koštanog tkiva mogu "osjetiti" mehanički napon i reagovati na tu pobudu na ćelijskom nivou pokretanjem adaptivnog procesa [111].

Culmann-von Mayer-ova teorija trajektorija, *Wolff*-ov zakon i *Roux*-ova teorija funkcionalne adaptacije predstavljaju osnov savremenih matematičkih teorija o adaptaciji koštanog tkiva. I pored toga što je *Wolff* pretpostavio postojanje funkcionalne veze mehaničkog opterećenja i procesa adaptacije koštanog tkiva još krajem devetnaestog vijeka, prva matematička teorija koja opisuje ovu vezu je postavljena tek sedamdesetih godina dvadesetog vijeka. U nizu radova *Stephen Cowin* je sa saradnicima razvio teoriju adaptivne elastičnosti [105]. Prema *Cowin*-ovoj teoriji kost je modelirana kao dvofazna porozna materija koju čini porozna elastična struktura i fluid kojim je ova porozna struktura ispunjena. Pokazatelj naponsko-deformacionog stanja koštanog tkiva koji upravlja procesom adaptacije, prema modelu *Cowin*-a, je deformacija. Jednačina adaptacije u ovom modelu opisuje promjenu raspodjele koštane mase tokom adaptivnog procesa, koja je uslovljena razlikom trenutne veličine tenzora deformacija i veličine tenzora deformacija u stanju ravnoteže. Jednačinom adaptacije je obuhvaćen i tenzor elastičnih koeficijenata, koji se kao i tenzor deformacije u stanju ravnoteže određuje eksperimentalnim putem. Model *Cowin*-a se, iako je dokazano da može reprodukovati promjene koje se odigravaju tokom adaptivnog procesa, pokazao kao vrlo komplikovan zbog potrebe eksperimentalnog određivanja tenzora elastičnih koeficijenata i tenzora deformacije u stanju ravnoteže.

Deceniju nakon *Cowin*-ove teorije adaptivne elastičnosti, 1987. godine, razvijena su nezavisno jedan od drugog dva modela procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, sa ciljem prevazilaženja navedenog nedostatka *Cowin*-ovog modela. Prvi je razvio *Dennis Carter* sa saradnicima na univerzitetu *Stanford* u SAD-u tkz. *Stanford* model, a drugi *Rik Huiskes* sa saradnicima na univerzitetu u *Nijmegenu* u Holandiji tkz. *Nijmegen* model. *Stanford* i *Nijmegen* modeli, iako razvijeni nezavisno, imaju mnogo sličnosti. U oba modela se eksperimentalnim putem umjesto tenzorskih veličina, što je slučaj u *Cowin*-ovom modelu, određuju skalarnе veličine. Kao pokazatelj naponsko-deformacionog stanja koštanog tkiva koji upravlja procesom adaptacije u oba modela je izabrana skalarna veličina, gustina deformacione energije. U oba modela je integrisana metoda konačnih elemenata. Stoga je koštano tkivo, modelirano kao izotropni kontinuum, diskretizovan konačnim elementima. Takođe, u oba modela se adaptivni proces odigrava iterativno, pri čemu se na nivou konačnog elementa u svakoj iteraciji vrši upoređenje gustine deformacione energije u konačnom elementu i gustine deformacione energije u stanju ravnoteže. Ukoliko postoji razlika između ovih veličina na osnovu nje se određuje priraštaj relativne gustine koštanog tkiva u konačnom elementu, a ukoliko razlike nema adaptivni proces se u konačnom elementu okončava. Okončanjem adaptivnog procesa u svakom od konačnih elemenata okončava se i proces adaptacije na nivou kosti. Rezultati dobijeni simulacijom adaptivnog procesa prema oba modela su skoro identični.

Od publikovanja do danas oba modela su pretrpjela veći broj modifikacija u cilju poboljšanja rezultata koji se dobijaju pri njihovoj upotrebi u numeričkoj simulaciji procesa adaptacije koštanog tkiva. Modifikacije *Nijmegen* modela je predlagao *H.Weinans* sa saradnicima 1992. godine, *M.G.Mullender* sa saradnicima 1994. i 1995. godine i *Z.Xinghua* sa saradnicima 2002. godine. Modifikacije *Stanford* modela je predlagao *G.S.Beaupre* sa saradnicima 1990. godine, *B.C.Jacobs* sa saradnicima 1997. godine i 2000. godine. Osnovni razlog rasta interesovanja za



Slika 1.4 Snimci butnih kosti kod kojih je došlo do gubitka koštanog tkiva usled neželjenog adaptivnog procesa u postoperativnom periodu

matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje je postojanje potrebe za predviđanjem toka procesa adaptacije koštanog tkiva izazvanog izmijenjenim uslovima mehaničkog opterećenja nakon ugradnje implantata [110]. Ova vrsta kliničke intervencije dramatično mijenja fizičko okruženje u kojem se nalazi kost. Znatno veća krutost metala implantata od krutosti koštanog tkiva uzrokuje da uobičajno mehaničko opterećenje kosti dovodi do znatno manjih deformacija i napona u okolnom koštanom tkivu u odnosu na preoperativni period. Ova pojava izaziva pokretanje procesa adaptacije koštanog tkiva kojom se masa, a tim i nosivost kosti smanjuje. Promjena uslova mehaničkog opterećenja kosti izazvana ugradnjom implantata može dovesti do neželjene adaptacije koštanog tkiva, čak i u

slučaju da adaptivni mehanizam funkcioniše pravilno. U tom slučaju dolazi do gubitka funkcije implantata i moguće do loma kosti kao što je prikazano na slici 1.4. Troškovi liječenja lomova butne kosti samo u SAD-u iznose devet milijardi dolara godišnje [16,110].

S obzirom da se period trajanja adaptivnog procesa mjeri mjesecima, odnosno, godinama kompjuterske simulacije matematičkih modela nude jedinstven pristup proučavanju ovog dugotrajnog procesa. Na ovaj način se eliminiše i potreba za eksperimentima sa životinjama, koji su doskora bili jedini način za proučavanje uticaja promjene uslova mehaničkog opterećenja na adaptivni proces. Kompjuterske simulacije su pouzdan, jeftin i brz alat, koji omogućava

sistematično ispitivanje različitih optimizacionih ciljeva matematičkih modela adaptivnog procesa do ostvarenja vjerne reprodukcije strukture koštanog tkiva. Korišćenjem ovog alata moguće je već tokom razvoja implantata ispitivati uticaj oblika i dimenzija, kao i mehaničkih karakteristika materijala implantata na adaptivni proces do kojeg dolazi nakon ugradnje implantata. Na bazi tako dobijenih rezultata moguće je vršiti korekcije inicijalnog oblika i dimenzija implantata ili izmjenu materijala implantata čim bi se uticalo na tok adaptivnog procesa u postoperativnom periodu. Na taj način bi se izbjegao neuspjeh implantacije izazvan mogućim slabljenjem strukture koštanog tkiva tokom adaptivnog procesa u postoperativnom periodu koji može uzrokovati oštećenje ili lom kosti.

Na bazi matematičkog modela adaptivnog procesa je moguće odrediti i strukturu koštanog tkiva kosti osobe na kojoj nije vršena bilo kakva klinička intervencija. U ovom slučaju numerička simulacija adaptivnog procesa, bazirana na matematičkom modelu, počinje iz stanja u kojem je koštano tkivo ravnomjerno distribuirano, a kost izložena dejstvu opterećenja koje odgovara svakodnevnim aktivnostima. Tokom adaptivnog procesa dolazi do redistribucije koštanog tkiva tokom koje se dobija neravnomjerna distribucija koštanog tkiva slična realno postojećoj u kosti. Bilo da je numerička simulacija adaptivnog procesa bazirana na *Nijmegen* ili *Stanford* modelu kao pokazatelj distribucije koštanog tkiva se koristi distribucija relativne gustine koštanog tkiva. Dakle, rezultat numeričke simulacije adaptivnog procesa je *FEM* model kosti za koji je određena relativna gustina koštanog tkiva u svakom konačnom elementu. U nizu istraživanja je ustanovljeno postojanje korelativna veza relativne gustine koštanog tkiva sa modulom elastičnosti, naponom na granici tečenja i naponom na granici razaranja koštanog tkiva [40,58,76]. Stoga su određivanjem relativne gustine koštanog tkiva posredno određene i navedene mehaničke karakteristike svih konačnih elemenata *FEM* modela kosti.

Inicijalna ideja za ovaj rad je proistekla iz odnosa čovjek-mašina i njegove uloge u razvoju konstruktivnih rešenja mašina kojim bi se preduprijedio rizik od pojave profesionalnih oboljenja. Početna ideja je proučavanjem ove materije sužena i fokus je usmjeren ka profesionalnom oboljenju koje uzrokuje pojavu bola u slabinskom dijelu kičme, a do kojeg dolazi najčešće usled degenerativnih promjena na međupršljenskim diskovima. Razvoj informacionih tehnologija, bilo da je riječ o hardveru ili softveru, doveo je prethodnih decenija do izuzetne popularizacije metode konačnih elemenata koja je postala nezaobilazan inženjerski alat za analizu naponsko-deformacionog stanja kontinuuma. Sličan trend je evidentan zadnjih dvadesetak godina i u oblasti biomehanike. Brojna su istraživanja u kojim su kičmeni stub ili njegovi pojedinačni dijelovi modelirani konačnim elementima [4,6,12,33,35]. Kičmeni stub je kao funkcionalna cjelina jedan od najkompleksnijih dijelova ljudskog tijela sastavljen od pršljena, međupršljenskih diskova, ligamenata kojim su pršljeni povezani... Kičmeni stub predstavlja dio skeleta koji nosi težinu trupa i glave i preko kojeg se uglavnom prenosi mehaničko opterećenje izazvano spoljnjim uticajima na ljudsko tijelo. Stoga su pojedinačni dijelovi kičmenog stuba izloženi dejstvu promjenljivog mehaničkog opterećenja koje može dovesti do degenerativnih promjena koje uzrokuju pojavu bola. *FEM* modeli treba da omoguće analizu naponsko-deformacionog stanja kičmenog stuba, odnosno, pršljena u različitim uslovima mehaničkog opterećenja kako bi se utvrdila mogućnost pojave degenerativnih promjena. Mehaničke karakteristike *FEM* modela pršljena su, u navedenim radovima, određivane prema raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja je utvrđena eksperimentalno na bazi snimaka sa *CT* skenera. Ideja ovog rada je da se kroz varijaciju oblika funkcije prostornog uticaja i ugradnju ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva u *Nijmegen* model adaptivnog procesa poveća tačnost sa kojom se matematičkim modelom može odrediti raspodjela relativne gustine koštanog tkiva u odnosu na prethodno navedene modifikacije *Nijmegen* modela. Ovako razvijen originalni model adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje bi se koristio i za određivanje raspodjele relativne gustine koštanog tkiva pršljena na osnovu koje bi se određivale mehaničke karakteristike *FEM* modela pršljena.

Pored sopstvene težine i položaja tijela na opterećenje kičmenog stuba najveći uticaj imaju vibracije koje se sa radne mašine prenose i djeluju na tijelo rukovaoca mašine. Vibracije su prepoznate kao uzročnik opterećenja kičmenog stuba tokom dvadesetih i tridesetih godina prošlog vijeka uporedo sa ubrzanim širenjem mobilnih mašina poput poljoprivrednih traktora, motornih vozila i aviona. *Reiher* i *Meister* su 1931. godine sprovedli prvo istraživanje uticaja vibracija na kičmeni stub i u zaključku izveštaja sa ovog istraživanja se između ostalog spominje “poguban efekat vibracija tokom vožnje” [136].

Profesionalna oboljenja vozača poljoprivrednih traktora registrovana su u brojnim istraživanjima sprovedenim tokom pedesetih godina. U izveštaju istraživanja sprovedenog 1949. godine, *Paulson* navodi “...vožnja poljoprivrednih traktora može izazvati bolne simptome. Najčešći je bol u slabinskom dijelu kičmenog stuba, tkz. traktorska leđa” [136]. Ove navode potvrđuju i istraživanja koja su sprovedli *Fishbein* i *Salter* 1950. godine [109], *Haluzicky* i *Kubik* 1957. godine [108] koji su utvrdili postojanja degenerativnih promena na međupršljenskim diskovima L₄₋₅ i L₅S₁ kod 27% vozača traktora obuhvaćenih ispitivanjem, *Christ* i *Dupuis* 1968 godine [107], *Dupuis* i *Christ* 1972. godine [155], *Stayner* i *Bean* 1975. godine [153], *Lines* 1994. godine [136], *Bovenzi* i *Betta* 1994. godine [136].

Profesionalna oboljenja vozača građevinskih mašina izazvana uticajem vibracija predmet su istraživanja od 1969. godine kada su objavljeni rezultati istraživanja koje su sprovedli *Kunz* i *Meyer* [106]. Ovim istraživanjem su obuhvaćena 52 vozača teških građevinskih mašina, čijim je radiološkim ispitivanjem utvrđena pojava oštećenja međupršljenskih diskova u osam slučajeva. Jedno od najvažnijih istraživanja zdravstvenog stanja vozača građevinskih mašina sprovedeno je u rudnicima mrkog uglja u Zapadnoj Nemačkoj. Pojedine aspekte ovog istraživanja su objavili *Hilfert* 1981. godine [103], *Zerlett* 1986. godine [97], *Musch* 1987. godine [136] i *Dupuis* i *Zerlett* 1987. godine [95]. Rezultati ovog istraživanja pokazuju da je kod 70% vozača građevinskih mašina radiološkim ispitivanjem registrovano oštećenje međupršljenskih diskova.

Istraživanja profesionalnih oboljenja vozača drumskih vozila većinom potiču iz perioda prije pojave efikasnih sistema vješanja. U novijim istraživanjima koja su sprovedli *Anderson*, kao i *Bovenzi* i *Zadini* 1992. godine u transportnim firmama 85% odnosno 36% vozača je prijavilo pojavu bola u slabinskom dijelu kičmenog stuba. Rezultati ovih istraživanja pokazuju da su i pored primjene efikasnih sistema prigušenja vibracija, vozači autobusa u dužem periodu podložniji povredama u slabinskom dijelu kičmenog stuba [136].

Profesionalna oboljenja operatera mosnih dizalica izazvana uticajem vibracija predmet su istraživanja koja je sprovedla *P. Bongers* 1988. godine, a u kojem je napravljena uporedna analiza stanja kod 743 operatera mosne dizalice i 662 izvršioca drugih poslova [88, 89]. Ova analiza je pokazala znatno učestaliju pojavu oštećenja međupršljenskih diskova kod operatera mosnih dizalica nego kod drugih radnika. *Burdoff* i *Zonderfan* su 1990. godine sprovedli ispitivanje na uzorku od 33 operatera mosne dizalice i 30 izvršilaca drugih poslova [136]. Istraživanje je pokazalo da su problemi sa bolom u donjem delu kičmenog stuba dvostruko češći kod operatera mosnih dizalica.

Navedena istraživanja ukazuju na vibracije radnih mašina kao mogući uzročnik degenerativnih promjena u slabinskom dijelu kičmenog stuba rukovaoca istih što uzrokuje trajno prisustvo bola u tom dijelu kičmenog stuba. *FEM* modela kičmenog stuba bi omogućio analizu naponsko-deformacionog stanja međupršljenskih diskova, pršljena i kičmenog stuba u cjelini pod uticajem vibracija koje u radnim uslovima djeluju na rukovaoca mobilne mašine. U tom smislu bi *FEM* model pršljena, dobijen numeričkom simulacijom adaptivnog procesa baziranoj na matematičkom modelu, predstavljao samo jednu kariku *FEM* modela kičmenog stuba. Ovakav *FEM* model kičmenog stuba bi predstavljao osnovu za razvoj sistema za prigušenje vibracija koji bi vibracije radnih mašina svodili na nivo neškodljiv za ljudsko zdravlje.

1.1 NAUČNI CILJ ISTRAŽIVANJA

Cilj ovog istraživanja je da se:

- Ispita efekat varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces;
- *Nijmegen* model adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje dopuni uključivanjem ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva utvrđene istraživanjem koje je 1999. godine sproveo *D.Ulrich* sa saradnicima [51];
- Eksperimentalno, kvantitativnom kompjuterskom tomografijom, odredi raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena;
- Uporede eksperimentalni rezultati sa rezultatima dobijenim numeričkom simulacijom adaptivnog procesa modelima koje su predložili *M.G.Mullender* sa saradnicima 1994. godine [74], *Z.Xinghua* sa saradnicima 2002 godine [24] i originalnim modelom autora ovog rada;
- Razvije biomehanički *FEM* model ljudskog pršljena sa mrežom konačnih elemenata čije se mehaničke karakteristike određuju numeričkim modeliranjem procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje baziranom na originalnom modelu autora ovog rada.

Numerička simulacija navedenih modela adaptivnog procesa će biti izvršena na 3D modelu slabinskog pršljena L_5 . Ovo će, prema saznanju autora ovog rada, biti prva do sada izvedena numerička simulacije adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena. Navedeni ciljevi predstavljaju prirodan nastavak dosadašnjih istraživanja u domenu modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva što govori o njihovoj istraživačkoj aktuelnosti.

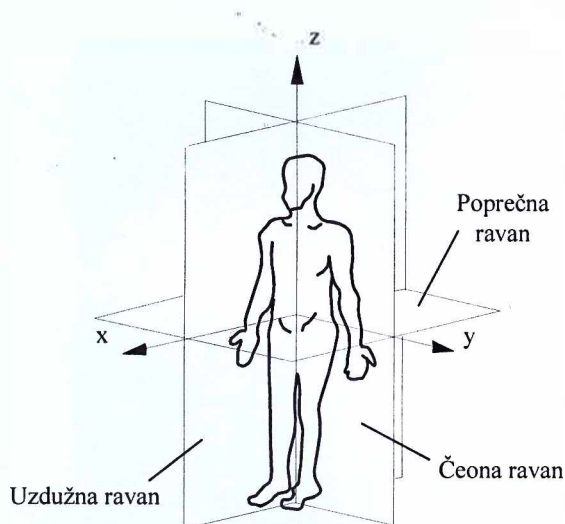
U cilju realizacije ovog istraživanja će biti riješen i čitav niz neophodnih podzadataka:

- Određivanje kalibracione karakteristike *CT* skenera na kojem će se realizovati eksperimentalna ispitivanja, u vidu korelativne veze *CT* broja i relativne gustine koštanog tkiva;
- Razvoj metoda za parametarsko modeliranje geometrije slabinskog pršljena L_5 ;
- Razvoj programa za automatsko generisanje 3D geometrijskog modela pršljena i mreže konačnih elemenata;
- Razvoj programa za *FEA* analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena i numeričko modeliranje adaptivnog procesa;
- Eksperimentalno određivanje veličine odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže.

PREGLED ISTRAŽIVANJA I TEORIJSKE OSNOVE

2.1 ANATOMSKE OSNOVE LJUDSKOG TIJELA

2.1.1 Koordinatne ose i ravni ljudskog tijela



Slika 2.1 Biomehanički koordinatni sistem prema standardu ISO 8727

Međunarodnim standardom o biomehaničkim koordinatnim sistemima ISO 8727 [134] iz 1997. godine, definisan je položaj osa ortogonalnih koordinatnih sistema vezanih za pojedine dijelove ljudskog tijela. Na slici 2.1 prikazana je orijentacija osa koordinatnog sistema vezanog za čitavo ljudsko tijelo u stojećem položaju i to prema navedenom standardu. U nastavku rada će biti usvojen ortogonalni koordinatni sistem sa orijentacijom osa prikazanom na slici 2.1, pri čemu će pozicija koordinatnog početka u pojedinačnim slučajevima biti uslovljena pogodnošću za vršenje mjerenja, odnosno modeliranja. Koordinatne ravni ljudskog tijela, prikazane na slici 2.1, anatomske su određene. Uzdužna tj. sagitalna ravan je vertikalna ravan koja dijeli ljudsko tijelo na lijevi i desni dio,

ukoliko pri tome prolazi kroz srednju liniju ljudskog tijela dijeleći ga na dvije jednake polovine tada je to srednja uzdužna ravan. Čeona ravan je vertikalna ravan koja je ortogonalna na uzdužnu ravan i dijeli ljudsko tijelo na prednji i zadnji deo. Poprečna ravan je ravan koja je paralelna sa tlom i dijeli ljudsko tijelo na gornji i donji deo.

2.1.2 Ljudski skelet

Skelet odraslog čovjeka, prikazan na slici 2.2, uobičajno se sastoji od 206 kosti. Osnovna podijela kosti, koje čine ljudski skelet, je na: kosti aksijalnog skeleta i kosti pridruženog skeleta.

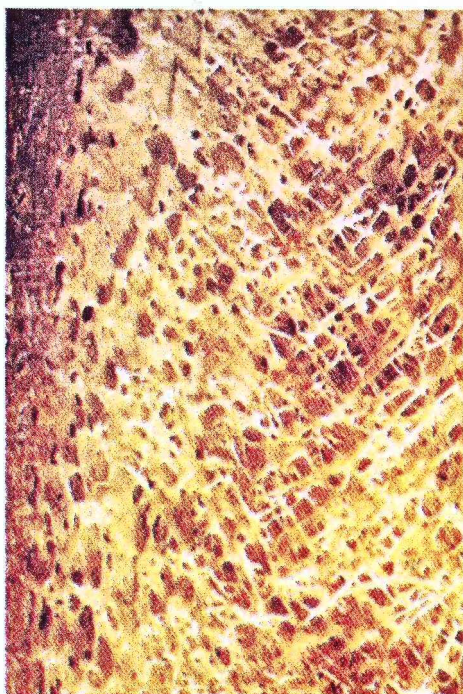
Aksijalni dio skeleta čine kosti koje leže oko uzdužne ose ljudskog tijela, poput: lobanje, kičmenog stuba i rebara. Pridruženi dio skeleta se sastoji od kosti ekstremiteta, kao i kosti ramena i karlice koje povezuju ekstremitete sa aksijalnim skeletom.



Slika 2.2 Ljudski skelet

Koštano tkivo se sastoji od ćelija, organskog dijela koštanog matriksa u vidu vezivnih vlakana, kao i neorganskog dijela koštanog matriksa koji čine međućelijska kalcificirana masa i voda. Ćelije u sastavu koštanog tkiva su *osteoblasti*, *osteoklasti* i *osteociti*. *Osteoblasti* su ćelije, veličine do 10 μm [110,143], koje sintetišu organski dio matriksa tkz. *osteoid* od kojeg su sastavljena vezivna vlakna matriksa. Po formiranju organskog dijela matriksa počinje proces njegove mineralizacije, koji traje nekoliko sedmica, tokom kojeg se matriks obogaćuje mineralnim materijama i na taj način formira neorganski dio koštanog tkiva. Tokom procesa mineralizacije organskog dijela matriksa *osteoblasti* postaju "zarobljenici" sopstvenog produkta, koštanog matriksa, transformišući se u formirane koštane ćelije *osteocite*.

Osteoklasti su ćelije, veličine (20÷100) μm [110,143], koje razgrađuju koštano tkivo.



Slika 2.3 Mikroskopski snimak koštanog tkiva

Organske supstance čine 30%, a neorganske 70% koštanog tkiva [143]. Gro organskog dijela koštanog tkiva, oko 95%, čini kolagen tipa I, dok ostatak čine različiti proteini. Neorganski dio koštanog tkiva čine uglavnom kristali kalcijum hidroksiapatita, $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$, i manja količina kalcijuma, natrijuma, magnezijuma i fosfora. Kost sadrži i vodu u količini koja predstavlja oko 25% mase kosti.

Koštano tkivo je izgrađeno od koštanih pločica, međusobno raspoređenih tako da obrazuju dvije vrste koštanog tkiva, kortikalno i spongiozno što je prikazano na slici 2.3. Kortikalno koštano tkivo se odlikuje kompaktnom strukturom niske poroznosti koja se nalazi u granicama (5÷10)%. Nasuprot kortikalnom, spongiozno koštano tkivo je znatno poroznije i njegova poroznost se nalazi u granicama (75÷95)% [110]. Kortikalno koštano tkivo čini 80% koštane mase,

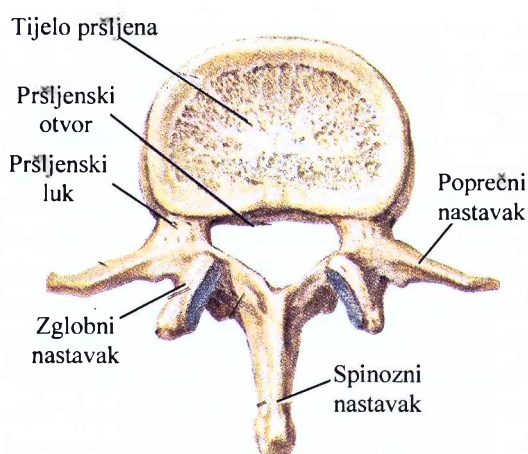
dok spongiozno koštano tkivo, koje je dominantno prisutno u metafizama dugih kosti, karlici, rebrima i u kičmenom stubu, čini 70% zapremine skeleta odrasle osobe [110]. Spoljašnji omotač ovih kosti je građen od kortikalnog, a unutrašnji dio kosti od spongioznog koštanog tkiva.

2.1.3 Kičmeni stub

Kičmeni stub sa grudnom kosti i rebrima čini skelet ljudskog trupa. Kičmeni stub odraslog čovjeka, prikazan na slici 2.4, se sastoji od: 7 vratnih, 12 leđnih i 5 slabinskih pršljenova, 5 sraslih pršljena koji formiraju krsnu kost i uobičajno od 4 srasla pršljena koji formiraju trtičnu kost. Kičmeni stub je noseći dio ljudskog tijela, koji istovremeno obezbjeđuje pokretljivost ljudskom tijelu i štiti kičmenu moždinu. Kičmeni stub nije prav već gradi nekoliko krivina. U predijelu vrata, kao i u slabinskom dijelu je ispupčen unaprijed, dok je u grudnom dijelu, kao i u krsno-trtičnom dijelu ispupčen unazad. Pored razlika u veličini, obliku i detaljima pršljena koji čine kičmeni stub, svi pršljeni su u osnovi slični. Tipičan pršljen, prikazan na slici 2.5, se sastoji od: tijela pršljena, pršljenskih lukova i nastavaka.



Slika 2.4 Kičmeni stub

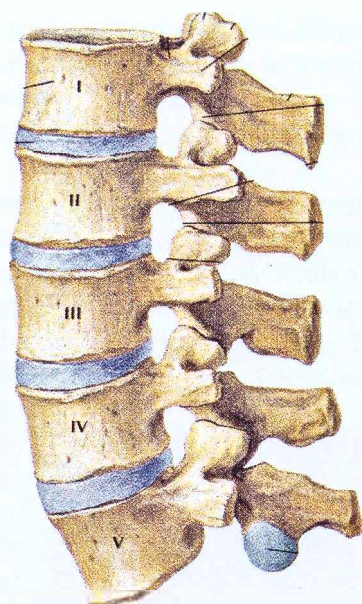


Slika 2.5 Slabinski pršljen

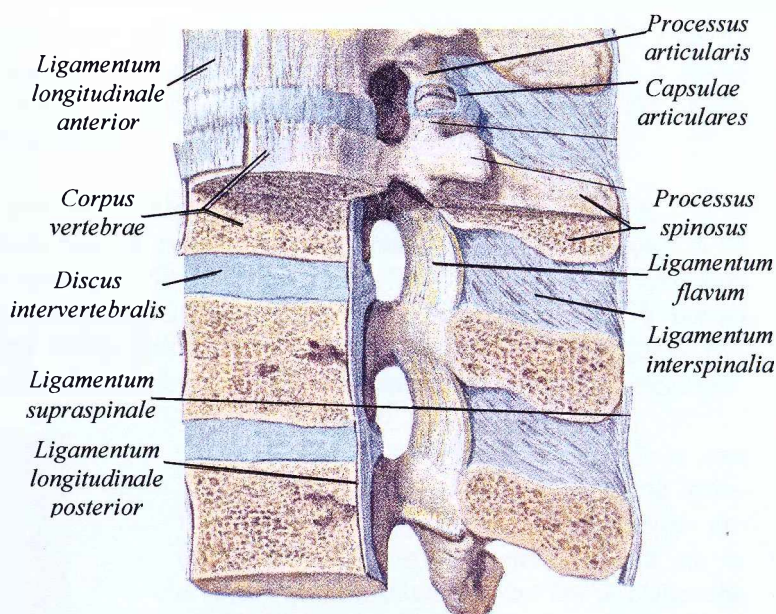
Svi navedeni dijelovi pršljena okružuju pršljenski otvor kroz koji prolazi kičmena moždina. Tijelo pršljena je debela kost u obliku diska koja predstavlja prednji i noseći dio pršljena. Njegova gornja i donja površina je oblikom prilagođena za spoj koji pršljen ostvaruje sa međupršljenskim diskom. Pršljenski lukovi se protežu od poledine tijela pršljena i spajaju formirajući spinozni nastavak koji štrči unazad. Poprečni nastavci se protežu bočno sa obje strane i sa spinoznim nastavkom formiraju spoj za koji se kače vezivni ligamenti. Po dva zglobna nastavka sa gornje i donje strane pršljena formiraju zglobni spoj sa susjednim pršljenima.

Krsna kost se nalazi ispod slabinskog dijela kičmenog stuba i bočno se spaja sa karličnim kostima. Ova kost izgrađuje zadnji dio karlične duplje. Njena prednja strana, koja je izdubljena, je okrenuta prema unutrašnjosti karlice. Cijela krsna kost je savijena unazad. Spojena je sa posljednjim slabinskim pršljenom i sa njim gradi ugao, koji iznosi oko 130° , čije tjeme štrči unaprijed u karličnu duplju i naziva se promontorijum.

Susedni pršljeni počevši od drugog vratnog pršljena do krsne kosti su zglobno povezani međupršljenskim diskovima, kao što je prikazano na slici 2.6. Međupršljenski disk čini spoljnji čvrst fibrozni prsten u kome se nalazi meko jedro. Poprečni presjek diska je nalik elipsi sa manjom osom u horizontalnoj ravni. Visina diskova zavisi od toga u kojem se dijelu kičmenog stuba nalaze, najmanja je u vratnom, a najveća u slabinskom dijelu kičmenog stuba. Odnos visine diska i tijela pršljena je važan faktor za pokretljivost kičmenog stuba, što je veći to je kičmeni stub pokretljiviji. Odnos visine diska i tijela pršljena je 2:5 u najpokretljivijem vratnom dijelu kičmenog stuba, 1:3 u slabinskom dijelu koji je po pokretljivosti odmah iza vratnog dijela i 1:5 u najnepokretnijem, leđnom dijelu kičmenog stuba. Međupršljenski diskovi formiraju čvrst zglobni spoj koji dozvoljava i najsloženija kretanja kičmenog stuba koja nastaju rotacijama oko sve tri ose.



Slika 2.6 Slabinski dio kičmenog stuba sa međupršljskim diskovima



Slika 2.7 Ligamenti koji povezuju pršljene kičmenog stuba

Na slici 2.7 su prikazani dinamičko-vertebralni segmenti koje čine po dva susjedna pršljena sa međupršljskim diskom i ligamentima koji ih vezuju. Tipičnu grupu ligamenata koji spajaju susjedne pršljene čine: *ligamentum longitudinale anterior* i *posterior*, *capsulae articulares*, *ligamentum flavum*, *ligamentum interspinalia*, *ligamentum supraspinale* i *ligamentum intertransversarium*. *Ligamentum longitudinale anterior* povezuju sa prednje strane tijelo pršljena i disk i sprečavaju razdvajanje pršljenova sa prednje strane. *Ligamentum longitudinale posterior* povezuju sa zadnje strane tijelo pršljena i disk i sprečavaju razdvajanje pršljenova sa zadnje strane. *Capsulae articulares* su povezani sa ivicama površina po kojim naliježu zglobovi nastavci i omogućavaju klizanje naliježućih površina zglobova susjednih pršljenova. Pršljenski lukovi susjednih pršljenova su povezani kratkim i debelim *ligamentum flavum*, čija su vlakna vrlo elastična i omogućavaju razdvajanja pršljenskih lukova pri savijanju. Postepenim razdvajanjem pršljenskih lukova pri savijanju oni sprječavaju oštećenje diskova. Istovremeno ovi ligamenti, pri savijanju tijela, djeluju poput nategnutih opruga pomažući pri vraćanju tijela u normalan položaj. *Ligamentum interspinalia* i *ligamentum supraspinale* spajaju spinozne nastavke susjednih pršljenova i opiru se razdvajanju ovih nastavaka pri savijanju, ali tek pri većim uglovima savijanja. *Ligamentum intertransversarium* povezuju susjedne poprečne nastavke i razdvajaju prednje i zadnje kičmene mišiće.

2.1.3 Geometrija, dimenzije i tkivo pršljena

Rezultati istraživanja geometrije i dimenzija pršljena kičmenog stuba su publikovani u nekoliko do danas objavljenih radova. S obzirom na objekat istraživanja ovog rada biće predstavljena samo istraživanja geometrije slabinskih pršljenova.

Pionirska istraživanja u ovoj oblasti je tokom 1992/93. godine sproveo *M. Panjabi* sa saradnicima [75,78]. Istraživanje geometrije i dimenzija slabinskih pršljenova je izveo na uzorku koji čini 60 pršljenova, osoba starosne dobi od 19 do 59 godina, mase od 54 do 85 kg i visine od 157 do 178 cm. Mjerenje pršljenova je izvedeno morfometrom, povezanim sa kompjuterom kojim su prikupljeni i potom obrađeni rezultati mjerenja. Na ovaj način dobijeni podaci su iskorišćeni za dobijanje tro-dimenzionog površinskog modela pršljenova, sa kojeg su potom očitane karakteristične dimenzije. S obzirom da su ovim istraživanjem postavljeni određeni standardi u izboru dimenzija pršljenova koje se premjeravaju, kojih su se kasnije pridržavali i drugi istraživači, to su detaljni rezultati ovog istraživanja dati u prilogu C.

Istraživanje geometrije i dimenzija slabinskih pršljena koje je 2000. godine sproveo *S.H.Zhou* sa saradnicima izvedeno je na uzorku koji čine kičmeni pršljeni 55 muškaraca i 71 žene, starosne dobi od 22 do 80 godina [46]. Mjere pršljena su određene prema snimcima dobijenim kompjuterskom tomografijom na CT skeneru.

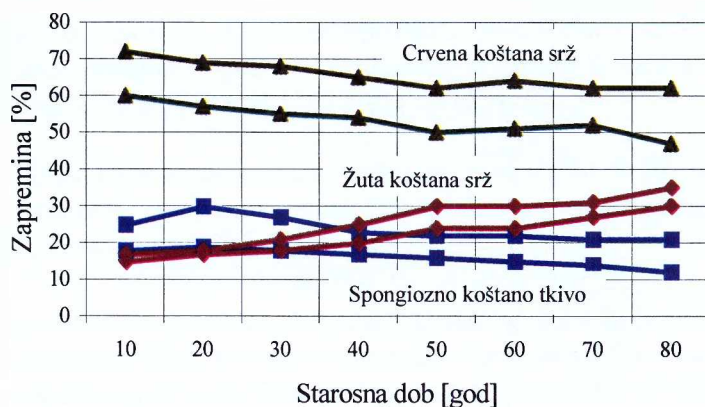
Istraživanje geometrije i dimenzija slabinskih pršljena koje je 2001. godine sproveo *S.H.Tan* sa saradnicima izvedeno je na uzorku koji čine kičmeni pršljeni 12 muškaraca, starosne dobi od 56 do 77 godina, mase od 50 do 69 kg i visine od 159 do 172 cm [39]. Mjerenje pršljena je izvedeno tro-dimenzionim digitajzerom, povezanim sa kompjuterom kojim su prikupljeni i potom obrađeni rezultati mjerenja. Na ovaj način dobijeni podaci su iskorišćeni za dobijanje tro-dimenzionog površinskog modela pršljena, sa kojeg su potom očitane karakteristične dimenzije.



Slika 2.8 Histološki prikaz sastava spongioznog tkiva pršljena

Spoljnji omotač pršljena, debljine (2÷3) mm [46], građen je od kortikalnog koštanog tkiva. Unutrašnji dio pršljena koji predstavlja gro tkiva istog čini spongiozno koštano tkivo, crvena i žuta koštana srž kao što je prikazano na slici 2.8. Po rođenju unutrašnji dio pršljena čini samo spongiozno koštano tkivo i crvena koštana srž [28]. Međutim, tokom godina se pojavljuje i uvećava količina žute koštane srži, a smanjuje količina spongioznog koštanog tkiva i crvene koštane srži.

Upravo je ovaj proces bio predmet istraživanja koja je 2001. godine sproveo *J.Justesen* sa saradnicima [36]. Ovo istraživanja na uzorku koji je činila grupa od 53 zdrave osobe oba pola i starosne dobi od 20 do 100 godina je potvrdilo postojanje veze povećanja starosne dobi sa smanjenjem učešća spongioznog koštanog tkiva i crvene koštane srži i povećanjem učešća žute koštane srži. Dio rezultata ovog istraživanja prikazan je na dijagramu na slici 2.9.



Slika 2.9 Dijagram promjene učešća spongioznog koštanog tkiva, crvene i žute koštane srži sa povećanjem starosne dobi

U radu [73] su prikazani rezultati istraživanja koje je *M.M.Goodsitt* sa saradnicima sproveo 1994. godine sa ciljem određivanja sastava žute i crvene koštane srži. Prema rezultatima ovog istraživanja žuta koštana srž sadrži: $(71 \div 92)\%$ masti, $(1 \div 2)\%$ proteina, $(7 \div 26)\%$ vode i $(0.2 \div 0.4)\%$ minerala, dok crvena koštana srž sadrži $(3 \div 6)\%$ masti, $(6 \div 8)\%$ proteina, $(82 \div 86)\%$ vode i $(0.5 \div 1)\%$ minerala.

Detaljno istraživanje sastava masti koje se nalaze u žutoj i crvenoj koštanoj srži je predmet istraživanja koje je 1992. godine sproveo *P.K.Lund* sa saradnicima [79]. Prema ovom istraživanju, koje je sprovedeno na uzorcima dobijenim od 12 osoba oba pola i starosne dobi od 1 do 78 godina, $(96 \div 98)\%$ sadržaja ovih masti predstavljaju trigliceridi, dok ostatak čini kolesterol i slobodne masne kiseline. Gro triglicerida čine oleinska i palmitinska kiselina, 46% i 26% respektivno, dok ostatak otpada na miristinsku, palmitoleinsku, stearinsku i linolnu kiselinu.

2.2 MEHANIČKE KARAKTERISTIKE KOŠTANOG TKIVA

U ovom dijelu poglavlja će biti dat pregled istraživanja mehaničkih karakteristika koštanog tkiva pršljena neophodnih za matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva i za analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena. Većina do danas spovedenih ispitivanja mehaničkih karakteristika koštanog tkiva pršljena je vršena u odnosu na pritisak. Pritisak je dominantan oblik opterećenja kojem su pršljeni izloženi pri svim ljudskim aktivnostima, dok su drugi vidovi opterećenja poput savijanja, uvijanja ili smicanja po intezitetu uglavnom zanemarljivi u odnosu na pritisak.

2.2.1 Gustina

Pršljeni spadaju u kosti sa spoljnim omotačem relativno kompaktne strukture, koji posjeduje visoku krutost i čvrstoću. Unutrašnjost pršljena je sa druge strane porozne strukture i nalik na sunder sačinjen od koštanog tkiva niže krutosti i čvrstoće od spoljnog omotača. Prema istraživanju koje je sproveo *H.Yamada* sa saradnicima gustina kortikalnog koštanog tkiva iznosi 2000 kg/m^3 , dok je gustina spongioznog koštanog tkiva 1000 kg/m^3 [53].

Istraživanje gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena koje je 1988. godine sproveo *P.Brinckmann* sa saradnicima, koristeći kompjutersku tomografiju, pokazuje da je spongiozno koštano tkivo pršljena nešto gušće u odnosu na podatke *H.Yamada*-e. Prema ovom istraživanju gustina spongioznog koštanog tkiva pršljena je u granicama $(1020 \div 1190) \text{ kg/m}^3$ [87].

U brojnim literaturnim izvorima, kao i prospektima proizvođača uređaja za kalibraciju CT skenera, može se naći podatak o gustini kortikalnog koštanog tkiva od 1609 kg/m^3 i gustini spongioznog koštanog tkiva pršljena od 1161 kg/m^3 [115, 120].

U istraživanjima mehaničkih karakteristika koštanog tkiva često se koristi pojam relativne ili prividne gustine. Relativna gustina ρ_a predstavlja proizvod gustine koštanog tkiva ρ i učešća zapremine koštanog tkiva u zapremini uzorka V_a :

$$\rho_a = \rho \cdot V_a \quad (2.1)$$

Rezultati ispitivanja relativne gustine kortikalnog koštanog tkiva koje je 2001. godine sproveo *N.J.Wachter* sa saradnicima [38], koristeći kompjutersku tomografiju, pokazuju da se relativna gustina kortikalnog koštanog tkiva pršljena nalazi u granicama $(939 \div 1345) \text{ kg/m}^3$.

Prema pregledu istraživanja mehaničkih karakteristika spongioznog koštanog tkiva koji je dao *T.M.Keaveny*, učešće zapremine koštanog tkiva u zapremini spongiozne tkiva se kreće od 0.05 do 0.6 [76].

2.2.2 Modul elastičnosti

Prema istraživanju koje je sproveo *H.Yamada* sa saradnicima modul elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva iznosi 11 GPa, dok je modul elastičnosti spongioznog koštanog tkiva 1.1 GPa [53].

Istraživanje modula elastičnosti koštanog tkiva pršljena koja je 1996. godine sproveo *M.Roy* sa saradnicima na uzorcima načinjenim seciranjem spoljnog omotača pršljena pokazuju znatna odstupanja u odnosu na podatke *H.Yamada*-e. Ispitni uzorci koje je pri tom koristio *M.Roy* dobijeni su odsjecanjem tkiva pršljena u različitim pravcima. U tabeli 2.1 su pored rezultata ovog istraživanja, koji pokazuju odstupanje u veličini modula elastičnosti uzoraka dobijenih isjecanjem iz kortikalnog koštanog tkiva pršljena u različitim pravcima, navedene i karakteristike ispitnih uzoraka [65].

Tabela 2.1 Modul elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva

Dio pršljena od kojeg je načinjen uzorak	Pravac ispitivanja	Broj uzoraka	Modul elastičnosti [GPa]	
			Srednja vrijednost	Standardna devijacija
Gornji deo spoljnog omotača	Uzdužni	37	18.07	2.87
Gornji deo spoljnog omotača	Tangencijalni	48	16.67	2.86
Prednja strana spoljnog omotača	Uzdužni	36	18.06	2.66
Prednja strana spoljnog omotača	Tangencijalni	22	16.91	3.20

Podaci *J.F.Shackelford*-a o modulu elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva pršljena takođe ukazuju na njegovu anizotropnost i dati su u tabeli 2.2 [128].

Tabela 2.2 Modul elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva

Pravac merenja	Modul elastičnosti [GPa]	
	Srednja vrijednost	Standardna devijacija
Uzdužni	18.2	0.9
Poprečni	11.7	1.0

Tokom istraživanja koje je 1999. godine sproveo *D.Ulrich* sa saradnicima utvrđeno je da je spongiozno koštano tkivo pršljena ortotropno. Dobijene vrijednosti odnosa modula elastičnosti za vertikalnu osu i modula elastičnosti za ostale ose, kao i o odnosu modula elastičnosti za vertikalnu osu i modula klizanja do kojih se došlo tokom ovog istraživanja su dati u tabeli 2.3 [51].

Tabela 2.3 Koeficijenti ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva

Odnos	Koeficijent ortotropnosti	Odnos	Koeficijent ortotropnosti
E_z	1	G_{xy}/E_z	0.153
E_x/E_z	0.42	G_{xz}/E_z	0.131
E_y/E_z	0.287	G_{yz}/E_z	0.183

Istraživanje koje je 1998. godine sproveo *D.L.Kopperdahl* sa saradnicima je za cilj imalo proveru postojanja korelativne veze modula elastičnosti i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena. Vrijednosti modula elastičnosti dobijene tokom ovog istraživanja se nalaze u granicama 301 ± 100 MPa [58]. Statističkom obradom dobijenih rezultata ustanovljeno je postojanje korelativne veze relativne gustine i modula elastičnosti spongioznog koštanog tkiva koja se može izraziti kako u linearnoj, tako i u eksponencijalnoj formi:

$$\begin{aligned} E &= 2100 \cdot \rho_a \\ E &= 2350 \cdot \rho_a^{1.2} \end{aligned} \quad (2.2a,b)$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina i E [MPa] modul elastičnosti.

Prema pregledu istraživanja mehaničkih karakteristika spongioznog koštanog tkiva koji je dao *T.M.Keaveny* veza relativne gustine i modula elastičnosti je izražena na sljedeći način [76]:

$$E = 613 \cdot \rho_a^{1.44} \quad (2.3)$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina i E [MPa] modul elastičnosti.

2.2.3 Poisson-ov koeficijent

Prema istraživanju koje je sproveo *H.Yamada* sa saradnicima *Poisson*-ov kortikalnog koštanog tkiva iznosi 0.3, dok je *Poisson*-ov spongioznog koštanog tkiva 0.45 [53].

Tokom istraživanja koje je 1999. godine sproveo *D.Ulrich* sa saradnicima utvrđeno je da je spongiozno koštano tkivo pršljena ortotropno. Dobijene vrijednosti *Poisson*-ovog koeficijenta do kojih se došlo tokom ovog istraživanja su dati u tabeli 2.4 [51].

Tabela 2.4 *Poisson*-ov koeficijent spongioznog koštanog tkiva

	ν_{xy}	ν_{zx}	ν_{zy}
<i>Poisson</i> -ov koeficijent	0.226	0.399	0.381

2.2.4 Granica plastične deformacije u odnosu na pritisak

Istraživanjem koje je 2001. godine sprovela *E.Morgan* sa saradnicima utvrđeni su kvantitativni pokazatelji granice plastične deformacije spongioznog i kortikalnog koštanog tkiva pršljena u odnosu na pritisak dati u tabeli 2.5 [38].

Tabela 2.5 Granica plastične deformacije koštanog tkiva u odnosu na pritisak

Spongiozno koštano tkivo		
	Srednja vrijednost	Standardna devijacija
ρ_a [g/cm ³]	0.18	0.05
ε_T [%]	0.77	0.06
σ_T [MPa]	2.02	0.92
Kortikalno koštano tkivo		
	Srednja vrijednost	Standardna devijacija
ρ_a [g/cm ³]	0.58	0.11
ε_T [%]	0.85	0.10
σ_T [MPa]	17.45	6.15

Statističkom obradom dobijenih rezultata ustanovljeno je postojanje korelativne veze relativne gustine i granice plastične deformacije koštanog tkiva u odnosu na pritisak koja se može izraziti u eksponencijalnoj formi. Za spongiozno koštano tkivo ova veza je sledećeg oblika:

$$\sigma_T = 37.1 \cdot \rho_a^{1.74} \quad (2.4a)$$

,a za kortikalno koštano tkivo:

$$\sigma_T = 38.5 \cdot \rho_a^{1.48} \quad (2.4b)$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina i σ_T [MPa] napon na granici plastične deformacije.

Istraživanje koje je 1998. godine sproveo *D.L.Kopperdahl* sa saradnicima je za cilj imalo provjeru postojanja korelativne veze napona i deformacije na granici plastične deformacije u odnosu na pritisak i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena. Vrijednosti napona na granici plastične deformacije dobijene tokom ovog istraživanja se nalaze u granicama 1.92 ± 0.84 MPa, a deformacije na granici plastične deformacije u granicama 0.84 ± 0.06 % [58]. Statističkom obradom dobijenih rezultata ustanovljeno je postojanje korelativne veze relativne gustine i napona odnosno deformacije na granici plastične deformacije u odnosu na pritisak

spongioznog koštanog tkiva koja se može izraziti kako u linearnoj, tako i u eksponencijalnoj formi:

$$\varepsilon_T = 0.66 + 1.09 \cdot \rho_a \quad (2.5a,b)$$

$$\sigma_T = -1.40 + 19.6 \cdot \rho_a$$

$$\varepsilon_T = 1.24 \cdot \rho_a^{0.21} \quad (2.6a,b)$$

$$\sigma_T = 32.6 \cdot \rho_a^{1.60}$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina, ε_T [%] deformacija na granici plastične deformacije i σ_T [MPa] napon na granici plastične deformacije.

2.2.5 Granica statičkog razaranja u odnosu na pritisak

Istraživanje koje je 1988. godine sproveo *P.Brinckmann* sa saradnicima imalo je za cilj određivanje veličine granice statičkog razaranja pršljena u odnosu na pritisak. Uzorci za ovo ispitivanje su dobijeni dijeljenjem kičmenog stuba na segmente koje čine po dva susjedna pršljena sa diskom koji se nalazi između njih i ligamentima koji ih povezuju. Rezultati ovog istraživanja su dati u tabeli 2.6 [87].

Tabela 2.6 Granica statičkog razaranja pršljena u odnosu na pritisak

Ispitni uzorak	T _{10/11}	T _{11/12}	T _{12L1}	L _{1/2}	L _{2/3}	L _{3/4}	L _{4/5}
Granica razaranja [kN]	2.1÷5.2	3.2÷6.8	2.8÷9.2	2.7÷7.8	3.8÷9.6	4.6÷6.2	2.6÷8.8

Podaci *J.F.Shackelford*-a o granici statičkog razaranja kortikalnog koštanog tkiva pršljena u odnosu na pritisak ukazuju na njenu anizotropnost i dati su u tabeli 2.7 [128].

Tabela 2.7 Granica statičkog razaranja kortikalnog koštanog tkiva u odnosu na pritisak

Pravac merenja	Granica statičkog razaranja u odnosu na pritisak [MPa]	
	Srednja vrijednost	Standardna devijacija
Uzdužni	105	17
Poprečni	131	21

Istraživanje koje je 1998. godine sproveo *D.L.Kopperdahl* sa saradnicima je za cilj imalo provjeru postojanja korelativne veze napona na granici statičkog razaranja u odnosu na pritisak i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena. Vrijednosti napona na granici statičkog razaranja spongioznog koštanog tkiva dobijene tokom ovog istraživanja se nalaze u granicama 2.23±0.95 MPa [58]. Statističkom obradom dobijenih rezultata ustanovljeno je postojanje korelativne veze relativne gustine i napona na granici statičkog razaranja u odnosu na pritisak spongioznog koštanog tkiva koja se može izraziti kako u linearnoj, tako i u eksponencijalnoj formi:

$$\sigma_{ST} = -1.46 + 21.9 \cdot \rho_a \quad (2.7a)$$

$$\sigma_{ST} = 33.2 \cdot \rho_a^{1.53} \quad (2.7b)$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina i σ_{ST} [MPa] napon na granici statičkog razaranja.

Prema pregledu istraživanja mehaničkih karakteristika spongioznog koštanog tkiva koji je dao *T.M.Keaveny*, u većem broju nezavisnih istraživanja je utvrđeno postojanje korelativne veza između granice statičkog razaranja u odnosu na pritisak i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena [76]. Prema ovom pregledu korelativna veza koju je utvrdio *J.Galante* je izražena na sljedeći način:

$$\sigma_{ST} = 12.6 \cdot \rho_a - 0.68 \quad (2.8)$$

dok je prema istraživanju koje je sproveo *T.H.Hansson* ta veza data u sljedećem obliku:

$$\sigma_{ST} = 85.3 \cdot \rho_a^{2.24} \quad (2.9)$$

gde su ρ_a [g/cm³] relativna gustina i σ_{ST} [MPa] napon na granici statičkog razaranja.

Prema NIOSH (*American National Institute for Occupational Safety and Health*) maksimalna preporučena veličina sile pritiska koja djeluje na segment kičmenog stuba L₅S₁ ne treba da prelazi 3400 N, pri čemu se procjenjuje da je sila pritiska od 3400 N veća od granice statičkog razaranja segmenta L₅S₁ kod 21% ukupne populacije [87].

2.2.6 Granica zamornog razaranja u odnosu na pritisak

Određivanje granice zamornog razaranja pršljena kičmenog stuba u odnosu na pritisak, za razliku od ispitivanja granice statičkog razaranja, predmet je relativno malog broja istraživanja. Razloge za takvo stanje je teško objasniti, naročito s obzirom na činjenicu da je ljudski organizam danas više nego ikada izložen dejstvu promjenljivog opterećenja kako tokom radnih, tako i tokom slobodnih aktivnosti. Upravo iz tog razloga mehanizmi zamora materijala, inače nezaobilazni u objašnjenju pojava razaranja uzrokovanih promjenljivim opterećenjima, moraju biti uključeni i u razmatranja vezana za razaranja do kojih dolazi u ljudskom organizmu.

Pri eksperimentalnim ispitivanjima zamornog razaranja koštanog tkiva pršljena kičmenog stuba, s obzirom da je reč o živom tkivu, postoje određena ograničenja koja nisu prisutna u sličnim ispitivanjima drugih materijala. Inicijalne mikropukotine koje se javljaju kao posljedica djelovanja promjenljivog opterećenja na pršljene kičmenog stuba, a koje vremenom dovode do razaranja s obzirom da je riječ o živom tkivu zacjeljuju za oko dvije sedmice. Istraživanja koja je sproveo *Chaffin* na industrijskim radnicima, kao i *Grosser* na aktivnim sportistima pokazala su da u toku dvije sedmice kičmeni stub akumulira oko 5000 ciklusa promjene opterećenja [87, 136]. Stoga se u ispitivanjima zamornog razaranja pršljena ovaj broj ciklusa promjene opterećenja koristi kao gornja granica za broj ciklusa za koji se određuje granična sila koja dovodi do zamornog razaranja.

Najobimnije ispitivanje granice zamornog razaranja pršljena u odnosu na pritisak izveo je 1988. godine *P. Brinckmann* sa saradnicima [87]. Ispitivanje granice zamornog razaranja pršljena u odnosu na pritisak je sprovedeno tako što je ispitni uzorak prethodno, u trajanju od 15 minuta, opterećen silom od 700 N. Sila od 700 N predstavlja srednje opterećenje kičmenog stuba u stojećem položaju prema *Nachemson*-u [87, 136]. Nakon 15 minuta statičkog opterećenja uzorak je izložen dejstvu dodatnog promjenljivog opterećenja, čiji je intezitet postepeno povećavan u vremenskom periodu od 2 s do maksimalne vrednosti da bi potom u periodu od 2 s intezitet promjenljivog opterećenja opao na nulu. Ovakva frekvencija promjenljivog opterećenja odgovara prirodi opterećenja kojem je kičmeni stub izložen pri podizanju i spužtanju tereta. Ispitivanje je prekidano nakon što bi broj ciklusa promjene opterećenja dostigao 5005 ciklusa ili u slučaju da deformacija uzorka dostigne 4 mm, što se događalo samo kod uzoraka kod kojih se već pojavila pukotina kao posljedica zamornog opterećenja. U tabeli 2.8 su dati rezultati ovog ispitivanja u vidu vjerovatnoće razaranja usled zamora za određeni broj ciklusa promjene opterećenja, pri čemu je intezitet promjenljivog opterećenja izražen posredstvom granice statičkog razaranja.

Tabela 2.8 Granica zamornog razaranja u odnosu na pritisak

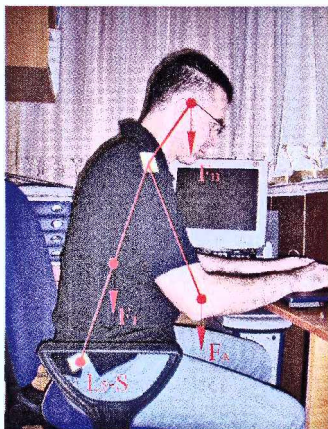
Granica zamornog razaranja [% granica statičkog razaranja]	Vjerovatnoća razaranja nakon određenog broja ciklusa				
	10	100	500	1000	5000
60÷70	0.10	0.55	0.80	0.95	1
50÷60	0	0.40	0.65	0.80	0.90
40÷50	0	0.25	0.45	0.60	0.70
30÷40	0	0	0.10	0.20	0.25
20÷30	0	0	0	0	0.10



2.3 BIOMEHANIČKI MODELI KIČMENOG STUBA

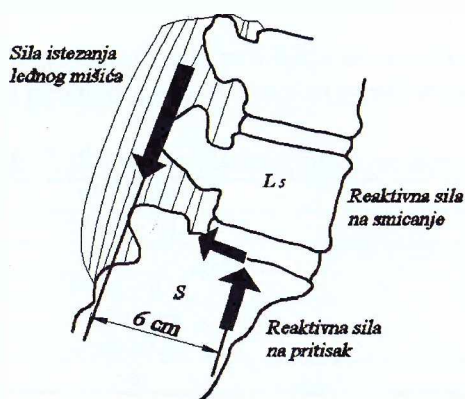
U ovom dijelu poglavlja će biti dat pregled aktuelnih biomehaničkih modela kičmenog stuba od kojih će pojedini biti korišćeni za određivanje veličina potrebnih za matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva.

2.3.1 Model za određivanje opterećenja u lumbosakralnom dijelu kičmenog stuba usled težine tijela

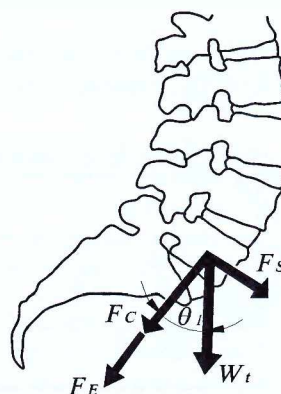


Slika 2.10 Model za određivanje opterećenja u lumbosakralnom dijelu kičmenog stuba usled težine tijela

Tokom istraživanja opterećenja lumbosakralnog dijela kičmenog stuba koje je 2003. godine sproveda *T.Newell* je koristila biomehnički model za određivanje opterećenja u lumbosakralnom dijelu kičmenog stuba u sjedećem položaju prikazan na slici 2.10 [114]. Na lumbosakralni dio kičmenog stuba u sjedećem položaju djeluju sljedeće unutrašnje sile: F_T -težina trupa, F_A -težina ruku i F_H -težina glave. Spoljašnja sila F_E koja djeluje na lumbosakralni dio kičmenog stuba je izazvana istezanjem leđnih mišića koji održavaju u ravnoteži gornji dio tijela tokom savijanja kao što je prikazano na slici 2.11. Sila pritiska i smičuća sila koje predstavljaju rezultante unutrašnjih i spoljašnjih sila koja djeluju na lumbosakralni dio kičmenog stuba su prikazane na slici 2.12.



Slika 2.11 Sile koje djeluju na lumbosakralni dio kičmenog stuba



Slika 2.12 Rezultantna sila pritiska i smičuća sila koja djeluje na lumbosakralni dio kičmenog stuba

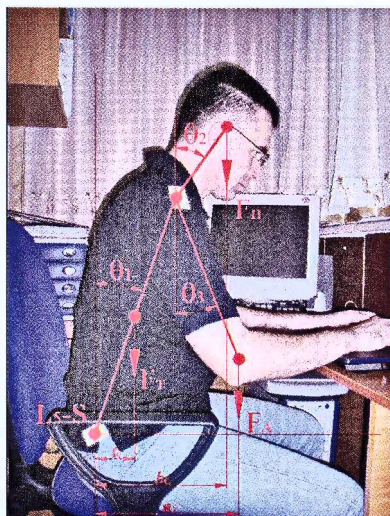
Ukupna težina W_t gornjeg dijela tijela predstavlja zbir težina trupa, ruku i glave, θ_1 predstavlja ugao savijanja trupa u odnosu na vertikalnu osu. Rezultantna sila pritiska i smičuća sila se određuju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F_C &= W_t \cdot \cos \theta_1 + F_E \\ F_S &= W_t \cdot \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Težine pojedinih dijelova tijela se određuju relativno u odnosu na ukupnu težinu tijela i to prema podacima koji su rezultat istraživanja *S.J.Hall*-a datim u tabeli 2.9 [114, 138].

Tabela 2.9 Težina dijelova tijela izražena relativno u odnosu na ukupnu težinu tijela

Dio tijela	Muškarci [%]	Žene [%]
Glava	8.26	8.20
Trup	46.84	45.00
Ruka	5.77	4.97
Nadlaktica	3.25	2.90
Podlaktica	1.87	1.57
Šaka	0.65	0.50


Slika 2.13 Rastojanja težišta dijelova tijela od lumbosakralnog dijela kičmenog stuba

S obzirom da sve spoljašnje sile koje djeluju na lumbosakralni dio kičmenog stuba daju moment savijanja u istom smjeru mora postojati sila koja će dati moment istog inteziteta i suprotnog smjera kako bi bio zadovoljen uslov ravnoteže. Ovo je silu koju ostvaruju leđni mišići koji obezbjeđuje održavanje ravnoteže gornjeg dijela tijela pri savijanju. Sila u leđnim mišićima djeluje duž uzdužne ose kičmenog stuba na rastojanju od 6 cm od lumbosakralnog dijela kičmenog stuba kao što je prikazano na slici 2.11 [114,138]. Dakle, sila u leđnim mišićima se određuje iz uslova ravnoteže, koji je izveden prema modelu prikazanom na slici 2.13:

$$F_E = \frac{F_T \cdot t_c + F_A \cdot a_c + F_H \cdot h_c}{6\text{cm}} \quad (2.11)$$

gdje su t_c , a_c i h_c rastojanja težišta trupa, ruke i glave od lumbosakralnog dijela kičmenog stuba kao što je prikazano na slici 2.13

Dužine pojedinih dijelova tijela se određuju relativno u odnosu na ukupnu visinu tijela BH i to prema podacima koji su rezultat istraživanja *S.J.Hall*-a datim u tabeli 2.10 [114, 138].

Tabela 2.10 Dužina dijelova tijela izražena relativno u odnosu na ukupnu visinu tijela

Dio tijela	Muškarci [%]	Žene [%]
Glava – HL	10.75	10.75
Trup – TL	30.00	29.00
Ruka – AL	38.65	39.05
Nadlaktica	17.20	17.30
Podlaktica	15.70	16.00
Šaka	5.75	5.75

Pozicije težišta pojedinih dijelova tijela se određuju relativno u odnosu na njihovu dužinu i to prema podacima koji su rezultat istraživanja *S.J.Hall*-a datim u tabeli 2.11 [114,138].

Tabela 2.11 Pozicija težišta dijelova tijela izražena procentualno u odnosu na njihovu dužinu

Dio tijela	Muškarci [%]	Žene [%]
Glava – HCL	45.0	45.0
Trup – TCL	37.0	43.1
Ruka – ACL	44.4	45.3
Nadlaktica	43.6	45.8
Podlaktica	43.0	43.4
Šaka	46.8	46.8

Rastojanja težišta trupa, ruke i glave od lumbosakralnog dijela kičmenog stuba se, prema modelu sa slike 2.13, mogu odrediti prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} t_c &= TCL \cdot TL \cdot BH \cdot \sin \theta_1 \\ h_c &= BH \cdot [HCL \cdot HL \cdot \sin \theta_2 + TL \cdot \sin \theta_1] \\ a_c &= BH \cdot [ACL \cdot AL \cdot \sin \theta_3 + TL \cdot \sin \theta_1] \end{aligned} \quad (2.12a,b,c)$$

2.3.2 Modeli za određivanje opterećenja kičmenog stuba usled vibracija i udara

Vertikalne vibracije i udari, koji djeluju na čitavo ljudsko tijelo, i njihov uticaj na kičmeni stub predmet je niza istraživanja izvedenih zadnjih decenija. Realizovana su brojna eksperimentalna istraživanja na ljudima kako bi se došlo do dinamičkih karakteristika kičmenog stuba izloženog dejstvu vertikalnih vibracija ili udara. Uporedo sa eksperimentalnim istraživanjima tekao je i razvoj matematičkih modela kojim bi se simuliralo ponašanje kičmenog stuba izloženog dejstvu vertikalnih vibracija. Osnovni ciljevi ovih matematičkih modela su:

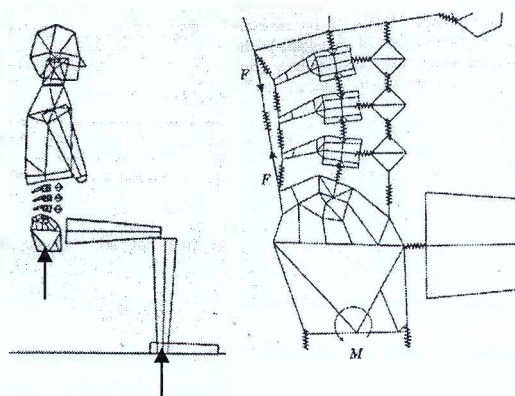
- Teorijsko sagledavanje fenomena prethodno proučavanih u realnim ili laboratorijskim uslovima;
- Mogućnost predviđanja ponašanja modela u različitim situacijama poput onih koje zbog mogućnosti narušavanja zdravlja ljudi nije moguće iz sigurnosnih i etičkih razloga simulirati u laboratorijskim uslovima.

Zahvaljujući primjeni informacionih tehnologija omogućen je razvoj vrlo složenih modela ljudskog tijela modeliranog konačnim elementima koji vjerno opisuju uticaj ljudske anatomije na dinamičko ponašanje ljudskog tijela. Elementi ovakvih modela predstavljaju dijelove ljudskog tijela poput pršljena, ligamenata, mišića... Ovi modeli ne omogućavaju analitičko rešavanje jednačina ravnoteže, već se jednačine ravnoteže rešavaju numeričkim putem.

Trodimenzionalne, diskretne modele ljudskog tijela u sjedećem položaju u nekoliko nivoa složenosti prvi je razvio *T.Belytschko* samostalno, a potom i zajedno sa *E.Privitzer*-om, a potom i sa *J.L.Williams*-om [140]. U najsloženijem među njegovim modelima ljudsko tijelo je modelirano do nivoa pojedinačnih dijelova tijela modeliranih konačnim elementima. Dijelovi skeleta su modelirani krutim elementima, međupršljenski diskovi grednim elementima sa aksijalnom, torzionom i savojnom krutošću, ligamenti pomoću aksijalnih opruga, hidrodinamički elementi sa linearnom karakteristikom pritisak-dilatacija, linearnom viskoznošću i deformacijom samo u aksijalnom pravcu korišćeni su za modeliranje unutrašnjih organa. Preostalo vezivno tkivo takođe je modelirano deformabilnim elementima. Prvi model koji je 1976. godine razvio *T.Belytschko* tkz. ILS model (*isolated ligamentous spine model*) korišćen je za simulaciju i modalnu analizu kako bi se ispitalo dinamičko ponašanje kičmenog stuba pod dejstvom vrlo intenzivnih vibracija i nije verifikovan rezultatima eksperimentalnih ispitivanja. Model koji su 1978. godine razvili zajedno *T.Belytschko* i *E.Privitzer* tkz. ILSV model (*isolated ligamentous spine model with viscera*) korišćen je za dobijanje rezultata o mehaničkom otporu tačke prenosa vibracija na ljudsko tijelo, koji su potom upoređeni sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja koja je sproveo *H.L.Vogt*. Maksimalne vrijednosti mehaničkog otpora dobijene korišćenjem modela i tokom eksperimentalnog istraživanja su registrovane na sličnim frekvencijama, dok se sam oblik krive zavisnosti frekvencija-mehanički otpor prilično razlikovao. Modeli koje su 1981. i 1983. godine razvili *T.Belytschko* i *J.L.Williams* modifikacija su prethodnih modela kojom su podaci o geometriji i krutosti glave i vratnih pršljenova dopunjeni uz istovremeno proširenje modela konačnim elementima kojim je modelirano mišićno tkivo.

Dvodimenzionalni model koji je 1994. godine razvio *S.Kitazaki* predstavlja ljudsko tijelo, modelirano konačnim elementima, u srednjoj uzdužnoj ravni [140]. Ovaj model je korišćen za simulaciju, modalnu i frekventnu analizu kako bi se ispitalo dinamičko ponašanje kičmenog stuba pod dejstvom vibracija i odredile sopstvene frekvencije, oblici oscilovanja, kao i opterećenje koje djeluje na pojedine dijelove kičmenog stuba. Kičmeni stub, od prvog do posljednjeg pršljena, je modeliran grednim elementima kojim su predstavljeni međupršljenski

diskovi. Maseni elementi koji odgovaraju masi torza su vezani za svaki od pršljena. Ispod desetog leđnog pršljena maseni elementi vezani za pojedine pršljene podijeljeni su na masene elemente koji odgovaraju masi torza i one koji odgovaraju masi unutrašnjih organa. Veza masenih elemenata koji odgovaraju masi torza sa odgovarajućim pršljenima je realizovana krutim grednim elementima, dok su maseni elementi koji odgovaraju masi unutrašnjih organa međusobno i sa pršljenima vezani oprugama. Butine su modelirane grednim elementima i dozvoljavaju rotaciono i napred-nazad kretanje karlice, koja je kao i glava modelirana krutim elementima. Model je razvijen za tri položaja kičmenog stuba i to za položaj kičmenog stuba u kojem je tijelo potpuno ispravljeno, opušteno i savijeno unapred. Karakteristike elemenata koji čine model su djelimično rezultat prethodnih istraživanja, a većim dijelom rezultat ispitivanja koje je sproveo *Kitazaki* upoređujući podatke o sopstvenoj frekvenciji i sopstvenim oblicima oscilovanja modela sa rezultatima sopstvenih mjerenja. Karakteristike prigušenja modela su uzete u obzir kroz koeficijente modalnog prigušenja koji su određeni upoređenjem prividne mase tačke prenosa vibracija na ljudsko tijelo određene pomoću modela i odgovarajućim mjerenjima koja je izveo *Kitazaki*.



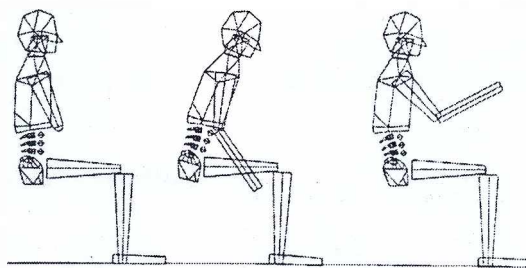
Slika 2.14 Biomehanički model ljudskog tijela *S.Pankoke*-a

Dvodimenzionalni model koji je 1998. godine razvio *S.Pankoke* sa saradnicima, prikazan na slici 2.14, predstavlja ljudsko tijelo, modelirano konačnim elementima, u srednjoj uzdužnoj ravni [56]. Ovaj model je korišćen za simulaciju, modalnu i frekventnu analizu kako bi se ispitalo dinamičko ponašanje kičmenog stuba pod dejstvom vibracija i odredile sopstvene frekvencije, oblici oscilovanja, kao i opterećenje koje djeluje na pojedine dijelove u slabinskom dijelu kičmenog stuba. S obzirom da je model razvijen zbog određivanja opterećenja u slabinskom dijelu kičmenog stuba i to između

pršljena L_3 i L_5 samo je taj dio kičmenog stuba detaljno modeliran, što je prikazano na slici 2.14.

Pršljeni u slabinskom dijelu kičmenog stuba L_3 - L_5 modelirani su krutim elementima. Krutost kičmenih segmenata T_{12}/L_1 - L_2/L_3 je kombinovana sa krutošću međupršljenskog diska segmenta L_2/L_3 modeliranog aksijalnom oprugom. Inercijalne karakteristike kičmenih segmenata T_{12}/L_1 - L_2/L_3 su uključene u inercijalne karakteristike koncentrisane mase kojom je modeliran torzo. Unutrašnji organi smješteni u stomačnoj duplji su modelirani sa tri identične koncentrisane mase koje su u međusobno, kao i sa odgovarajućim pršljenom, odnosno, trupom i karlicom spojeni aksijalnim oprugama. Međupršljenski diskovi, kao i leđni mišići i ligamenti koji povezuju pršljene su takođe modelirani aksijalnim oprugama. Krutost opruge kojom su modelirni leđni mišići predstavlja krutost svih leđnih mišića u području između gornjeg dijela trupa i karlice. Konstantna sila F_E predstavlja silu u leđnim mišićima koja održava u ravnoteži gornji dio tijela. Pored ove sile na održavanje ravnoteže gornjeg dijela tijela utiče i moment M_E koji djeluje na karlicu i koji predstavlja stabilizirajući uticaj svih mišića ispod karlice. Veličine sile F_E i momenta M_E su takve da održavaju u stanju ravnoteže model na koji djeluju samo sopstvene težine pojedinih dijelova tijela. Ostali dijelovi tijela poput gornjeg dijela trupa, vrata, glave, nadlaktice, podlaktice, karlice, butina, podkoljenice i stopala su modelirani krutim elementima, a njihove međusobne veze aksijalnim i torzionim oprugama.

Model je razvijen za tri položaja kičmenog stuba, prikazana na slici 2.15, i to za položaj kičmenog stuba u kojem je tijelo potpuno ispravljeno, opušteno i savijeno unapred. Inercijalne karakteristike modela za osobu visine 1742 mm i mase od 74.97 kg date su u tabeli 2.12.



Slika 2.15 Položaji ljudskog tijela u modelu koji je razvio S.Pankoke

Tabela 2.12 Inercijalne karakteristike modela ljudskog tijela

Dio tijela	Masa [kg]	Moment inercije mase 10^2 [kgm ²]	Položaj težišta u različitim položajima tijela					
			Ispravljeno		Savijeno unapred		Opušteno	
			x [mm]	z [mm]	x [mm]	z [mm]	x [mm]	z [mm]
Glava	4.42	2.96	24.2	632.2	236.6	583.9	33.9	627.3
Vrat	0.88	0.429	18.3	585.3	215.2	541.7	24.0	581.6
Trup	18.00	27.20	4.6	331.0	116.5	306.9	-11.2	329.3
Nadlaktica	6.67	4.95	74.4	307.6	151.9	262.0	104.2	328.5
Podlaktica	2.74	3.05	142.3	147.4	236.7	-53.0	376.2	293.8
Butine	15.07	17.4	246.1	-62.0	225.8	89.6	249.5	-55.4
Podkoljenica	6.65	11.6	477.8	-271.3	459.8	-301.6	480.8	-270.3
Stopalo	2.14	1.33	561.0	-534.4	535.8	-566.9	565.4	-533.0
Karlica	10.24	2.63	-11.5	-20.0	-16.0	-30.4	-11.1	-18.8
Unutrašnji organi	8.00	-	-	-	-	-	-	-
Slabinski dio kičme	0.17	-	-	-	-	-	-	-
Ukupno	74.94	-	-	-	-	-	-	-

Karakteristike opruga kojim su modelirane veze dijelova tijela, kao i međupršljenski diskovi, ledni mišići i ligamenti su date u tabeli 2.13.

Tabela 2.13 Krutosti opruga u modelu ljudskog tijela

Veza	Krutost opruge [N/m]		Torziona krutost [Nm/rad]
	Aksijalna	Poprečna	
Glava-vrat (dvije opruge)	120000	∞	1200
Vrat-trup (dvije opruge)	120000	∞	1200
Trup-nadlaktica	66650	75740	-
Nadlaktica-podlaktica	∞	∞	0
Trup-podlaktica (dodir)	100000	0	-
Trup-L ₃ , disk	266000	66000	-
Trup-L ₃ , ligamenti	12800	0	-
Međupršljenski disk	800000	200000	-
Ligamenti	38000	0	-
Ledni mišići	10000	0	-
Unutrašnji organi-trup	32000	22000	-
Unutrašnji organi-međusobna veza	32000	22000	-
Unutrašnji organi-kičmeni stub	22000	1000	-
Unutrašnji organi-karlica	32000	22000	-
Karlica-butine	∞	∞	0
Butine-podkoljenica	∞	∞	0
Karlica-sjedište (dvije opruge)	64000	132000	147.4

Karakteristike prigušenja modela uzete su u obzir kroz koeficijente modalnog prigušenja, koji predstavljaju udio odgovarajuće sopstvene frekvencije u prigušenju modela, date su u tabeli 2.14.

Tabela 2.14 Koeficijenti modalnog prigušenja modela

Sopstveni oblik oscilovanja	1	2	3	4	5	6	7	>8
Koeficijent modalnog prigušenja	0.1	0.35	0.26	0.2	0.05	0.1	0.1	0.15

Predloženi model je moguće prilagoditi konkretnoj osobi za koju se želi odrediti opterećenje u slabinskom dijelu kičmenog stuba. U tom cilju *S.Pankoke* je uveo korektivne faktore čija se veličina određuje na osnovu visine i mase te osobe. Korektivni faktor za visinu f_{BH} i masu f_{BM} se određuju prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} f_{BH} &= \frac{BH}{1.742} \\ f_{BM} &= \frac{BM}{74.97} \cdot \frac{1}{f_{BH}^2} \end{aligned} \quad (2.13a,b)$$

gdje je BH [m] visina, a BM [kg] masa osobe. Korektivnim faktorom f_{BH} se proporcionalno mijenjaju koordinate težišta, a faktorom f_{BM} masa i moment inercije mase dati u tabeli 2.12. Osim inercijalnih karakteristika modela korektivni faktori utiču i na veličinu sile u leđnim mišićima i momenta koji djeluje na karlicu, koji se mogu odrediti prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} F_E &= f_{BH}^2 \cdot f_{BM} \cdot F_{E,0} \\ M_E &= f_{BH}^3 \cdot f_{BM} \cdot M_{E,0} \end{aligned} \quad (2.14a,b)$$

gdje su F_0 i M_0 veličine sile u leđnom mišiću i momenta na karlici koje odgovaraju modelu sa inercijalnim karakteristikama datim u tabeli 2.12. Veličine ove sile i momenta zavise od položaja tijela i date su u tabeli 2.15.

Tabela 2.15 Sila u leđnim mišićima i moment na karlici

Položaj tijela	$F_{E,0}$ [N]	$M_{E,0}$ [Nm]
Ispravljeno	218	9
Savijeno unapred	605	45
Opušteno	317	10

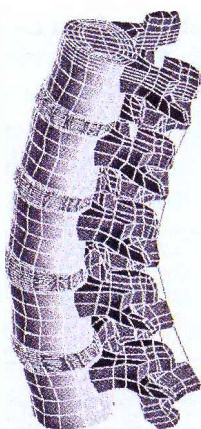
Opterećenje koje djeluje na slabinski dio kičmenog stuba tj. na međupršljenske diskove i pršljene osobe na koju se vibracije prenose kao što je prikazano na slici 2.14 se određuje u dva koraka. U prvom koraku se određuje opterećenje izazvano sopstvenom težinom i silom u leđnim mišićima, odnosno, momentom na karlici, a u drugom opterećenje izazvano dejstvom vibracija. Superpozicijom ovih opterećenja se određuje ukupno opterećenje u slabinskom dijelu kičmenog stuba.

2.3.3 Modeli za analizu naponsko-deformacionog stanja dijelova kičmenog stuba

Modeli za analizu naponsko-deformacionog stanja dijelova kičmenog stuba razvijeni posljednjih godina bazirani su isključivo na modeliranju kičmenog stuba konačnim elementima. Sa aspekta modeliranja mehaničkih karakteristika koštano tkiva moguće ih je podijeliti u dvije kategorije:

- Modeli u kojim je koštano tkivo pršljena modelirano kao izotropno;
- Modeli u kojem je koštano tkivo pršljena modelirano kao ortotropno.

Model slabinskog dijela kičmenog stuba koji je 2001. godine razvio *C.S.Chen* sa saradnicima pripada grupi modela u kojoj je koštano tkivo pršljena modelirano kao izotropna i linearno elastično [35]. Model je razvijen sa ciljem upoređenja naponsko-deformacionog stanja međupršljenskih diskova i pršljena slabinskog dijela kičmenog stuba prije i nakon izvršene fiksacije kičmenog stuba kod kojeg je usled oboljenja došlo do kompresije nerava i gubitka stabilnosti kičmenog stuba. Model koji je razvio *C.S.Chen* obuhvata pet pršljena i četiri međupršljenska diska od pršljena L_1 do pršljena L_5 . Geometrijsko modeliranje slabinskog dijela kičmenog stuba je izvedeno na osnovu snimaka dobijenih, kompjuterskom tomografijom kičmenog stuba zdrave devetnaestogodišnje osobe. Kompjuterskom tomografijom su načinjeni snimci ekvidistantnih poprečnih presjeka tijela pršljena na rastojanju od 3 mm. Model slabinskog dijela kičmenog stuba, prikazan na slici 2.16, osim pršljena i međupršljenskih diskova obuhvata i ligamente koji povezuju susjedne pršljene.



Slika 2.16 FEM model slabinskog dijela kičme

Ligamenti i fibrozna materija anulusa međupršljenskog diska, koji prenose samo istežanje, su modelirani tkz. kabl elementima. Trodimenzionalni kontaktne površine zglobnih nastavaka, dok je ostatak slabinskog dijela kičmenog stuba modeliran linearnim izoparametarskim zapreminskim elementima sa osam čvorova u tjemenu konačnog elementa. U tabeli 2.16 je dat pregled cjelina slabinskog dijela kičmenog stuba, konačnih elemenata kojim su te cjeline modelirane, kao i broj konačnih elemenata i čvorova.

Tabela 2.16 Pregled konačnih elemenata kojim je modeliran slabinski dio kičmenog stuba

Cjelina		Konačni element	Broj konačnih elemenata
Tijelo pršljena	Kortikalno koštano tkivo	Solid element sa 8 čvorova	1030
	Spongiozno koštano tkivo		1320
Pršljenski luk i nastavci		Solid element sa 8 čvorova	678
Međupršljenski disk	<i>Nucleus pulposus</i>	Solid element sa 8 čvorova	2433
	<i>Anulus fibrosus</i>	Kabl elementi sa 2 čvora	3070
Kontaktne površine zglobnih nastavaka		Kontaktne elemente	192
Ligamenti	<i>Lig. longitudinale anterior</i>	Kabl elementi sa 2 čvora	40
	<i>Lig. longitudinale posterior</i>		40
	<i>Lig. intertransversarium</i>		16
	<i>Lig. flavum</i>		20
	<i>Lig. interspinalia</i>		12
	<i>Lig. supraspinale</i>		4
	<i>Capsulae articulares</i>		16
Ukupan broj elemenata			8870
Ukupan broj čvorova			7603

Karakteristike konačnih elemenata koji su modelirane pojedine cjeline slabinskog dijela kičmenog stuba su date u tabeli 2.17.

Tabela 2.17 Karakteristike konačnih elemenata kojim je modeliran slabinski dio kičmenog stuba

Cjelina		Modul elastičnosti [MPa]	Poisson-ov koeficijent	Poprečni presjek [mm ²]
Tijelo pršljena	Kortikalno koštano tkivo	12000	0.3	
	Spongiozno koštano tkivo	100	0.2	
Pršljenski luk i nastavci		3500	0.25	
Međupršljenski disk	<i>Nucleus pulposus</i>	1 (4.2)	0.5 (0.45)	
	<i>Anulus fibrosus</i>	175		0.76
Ligamenti	<i>Lig. longitudinale anterior</i>	7.8 za $\epsilon < 12\%$; 20 za $\epsilon > 12\%$		63.7
	<i>Lig. longitudinale posterior</i>	10 za $\epsilon < 11\%$; 20 za $\epsilon > 11\%$		20
	<i>Lig. intertransversarium</i>	15 za $\epsilon < 6.2\%$; 19.5 za $\epsilon > 6.2\%$		40
	<i>Lig. flavum</i>	10 za $\epsilon < 18\%$; 58.7 za $\epsilon > 18\%$		1.8
	<i>Lig. interspinalia</i>	7.5 za $\epsilon < 25\%$; 32.9 za $\epsilon > 25\%$		30
	<i>Lig. supraspinale</i>	10 za $\epsilon < 14\%$; 11.6 za $\epsilon > 14\%$		40
	<i>Capsulae articulares</i>	8 za $\epsilon < 20\%$; 15 za $\epsilon > 20\%$		30
Koštani umetak		3500	0.25	

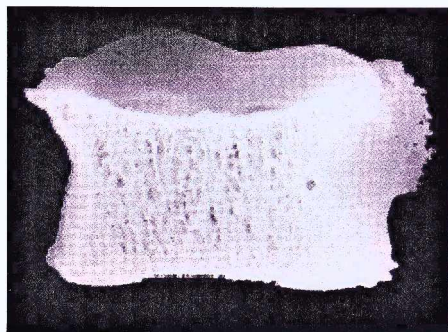
Prethodno opisani model predstavlja model slabinskog dijela kičmenog stuba zdrave osobe čijom se modifikacijom dobija model koji odgovara stanju nakon obavljenog fiksiranja kičmenog stuba. Modifikovani model je dobijen zamjenom nekog od međupršljenskih diskova koštanim umetkom čvrsto povezanim sa susjednim pršljenima čim se preko umetka omogućava prenos kako pritiska tako i istezanja. Čvornim tačkama na donjoj površini tijela pršljena L_5 su graničnim uslovima oduzeti svi stepeni slobode, dok je opterećenje zadato na gornjoj površini tijela pršljena L_1 .

Model tijela slabinskog pršljena koji je 2000. godine razvio *N.Langrana* sa saradnicima pripada grupi modela u kojoj je koštano tkivo pršljena modelirano kao izotropno i linearno elastično [50]. Model je razvijen radi analiziranja lomova tijela pršljena nastalih usled osteoporotskih promjena. Kortikalno i spongiozno koštano tkivo tijela pršljena je modelirano heksagonalnim konačnim elementima. Karakteristike konačnih elemenata kojim je modelirano kortikalno i spongiozno koštano tkivo tijela pršljena su date u tabeli 2.18.

Tabela 2.18 Karakteristike konačnih elemenata kojim je modelirano tijela pršljena

Cjelina		Modul elastičnosti [MPa]	Poisson-ov koeficijent
Tijelo pršljena	Kortikalno koštano tkivo	7000	0.3
	Spongiozno koštano tkivo	60	0.2

Model tijela slabinskog pršljena koji je 2004. godine razvio *J.Homminga* sa saradnicima pripada grupi modela u kojoj je koštano tkivo pršljena modelirano kao izotropno i linearno elastično [4]. Model je razvijen radi naponsko-deformacione analize tijela pršljena i upoređenja dobijenih rezultata za zdrave osobe i osobe sa osteoporozom u uslovima opterećenja koje odgovara uobičajnim dnevnim aktivnostima, kao i onom koje se javlja u situacijama izuzetnog opterećenja kičmenog stuba pri savijanju unapred, prodizanju velikog tereta...



Slika 2.17 FEM model tijela pršljena

Detaljni podaci za modeliranje tijela slabinskog pršljena su dobijeni, kompjuterskom tomografijom tijela pršljena sa i bez osteoporoze *in vitro*. Snimanje tijela pršljena je obavljeno na posljednjoj generaciji μCT skenera koja omogućava snimanje ekvidistantnih poprečnih presjeka tijela pršljena na rastojanju od 60 μm sa rezolucijom piksela od 60 μm /piksel. Kompjuterska tomografija pri ovakvoj rezoluciji omogućava jasnu identifikaciju svih dijelića u

strukturi tkiva tijela pršljena koji predstavljaju koštano tkivo, a tim i generisanje strukture spongioznog koštanog tkiva na nivou *trabekula*. Tijelo pršljena je modelirano linearnim izoparametarskim zapreminskim elementima sa osam čvorova u tjemenu konačnog elementa. Model tijela pršljena zdrave osobe, prikazan na slici 2.17, je modeliran sa 33 miliona konačnih elemenata, a osobe sa osteoporozom sa 25 miliona konačnih elemenata. Kortikalno i spongiozno koštano tkivo je modelirano kao izotropno i linearno elastično sa modulom elastičnosti od 18 GPa i *Poisson*-ovim koeficijentom 0.3. Korišćene mehaničke karakteristike koštanog tkiva su rezultat istraživanja koje je 1999. godine sproveo *C.H.Turner* sa saradnicima i pri tome utvrdio, koristeći se akustičkom mikroskopijom sa rezolucijom od $(30 \pm 60) \mu m$, da su karakteristike kortikalnog i spongioznog tkiva na nivou uzoraka ove veličine skoro identične [52].

Naponsko-deformaciona analiza izvedena ovim modelom je realizovana na superkompjuteru SGI Origin 3800, američkog proizvođača *Silicon Graphics*, sa paralelnom procesorskom arhitekturom koju čine 16 paralelno povezanih procesora. Za realizaciju ove analize je bilo potrebno nepunih 8 sedmica, odnosno, 20000 časova procesorskog vremena.

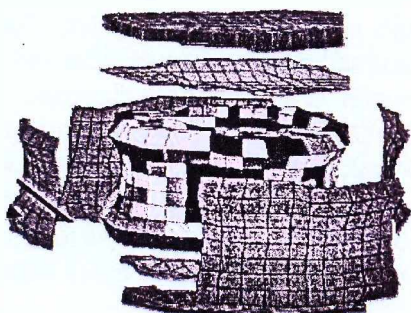
Model tijela slabinskog pršljena koji je 2003. godine razvio *M.Liebschner* sa saradnicima pripada grupi modela u kojoj je koštano tkivo pršljena modelirano kao ortotropno i linearno elastično [12]. Model je razvijen kao alat za određivanja čvrstoće koštanog tkiva tijela pršljena čije bi karakteristike bile određivane kompjuterskom tomografijom. Detaljni podaci za geometrijsko modeliranje tijela pršljena, kao i za određivanje relativne gustine spongioznog koštanog tkiva su dobijeni *in vitro*. Kompjuterskom tomografijom su načinjeni snimci ekvidistantnih poprečnih presjeka tijela slabinskih pršljena, bez znaka degenerativnih promjena ili posljedica prethodnih oboljenja, i to na rastojanju od 1.5 mm sa rezolucijom piksela od 0.25 mm/piksel i rezolucijom CT snimaka od 512x512 piksela.

Nakon snimanja uzoraka na CT skeneru obavljeno je ispitivanje granice statičkog razaranja tijela pršljena u odnosu na pritisak. Čeone površine tijela pršljena su poravnate ispunjavanjem konkavnog ulegnuća polimetil metakrilatom. Na taj način je omogućeno da se sila sa ploča prese tokom mehaničkog ispitivanja prenosi na čitavu gornju i donju površinu tijela pršljena. Rezultati ovog ispitivanja su iskorišćeni za određivanje mehaničkih karakteristika kortikalnog koštanog tkiva.

Unutrašnjost pršljena od spongioznog koštanog tkiva je modelirana linearnim izoparametarskim zapreminskim elementima sa čvorovima u svim tjemenu i središnjim tačkama svih strana konačnog elementa. Spongiozno koštano tkivo je modelirano kao ortotropno. Modul elastičnosti u odnosu na vertikalnu osu je određen na osnovu relativne gustine spongioznog koštanog tkiva prema izrazu koji je rezultat istraživanja koje je 2002. godine sproveo *D.L.Kopperdahl* [29]:

$$E_z = -81.9 + 3850 \cdot \rho_a \quad (2.15)$$

gdje su ρ_a [g/cm³] relativna gustina spongiozne koštane materije i E [MPa] modul elastičnosti. Preostale elastične karakteristike spongioznog koštanog tkiva su određene prema rezultatima istraživanja koja je sproveo *D.Urlich* sa saradnicima datim u tabelama 2.3 i 2.4.



Slika 2.18 FEM model tijela pršljena

Spoljni omotač tijela pršljena, debljine 0.35 mm, od kortikalnog koštanog tkiva je modeliran takođe linearnim izoparametarskim zapreminskim elementima sa čvorovima u svim tjemenu i središnjim tačkama svih strana konačnog elementa. Kortikalno koštano tkivo je modelirano kao izotropno sa *Poisson*-ovim koeficijentom koji iznosi 0.3. Modul elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva je dobijen na osnovu upoređenja rezultata pomenutih ispitivanja granice statičkog

razaranja i onih dobijenih FEM modelom prikazanim na slici 2.18. FEM model tijela pršljena je dopunjen slojem linearnih izoparametarskih zapreminskih elemenata sa karakteristikama polimetil metakrilata koji se oslanja na čeone površine tijela pršljena kako bi se simulirali uslovi u kojim je izvedeno eksperimentalno ispitivanje. Modul elastičnosti kortikalnog koštanog tkiva određen na ovaj način iznosi 457 MPa.

2.3.4 Diskusija postojećih modela dijelova kičmenog stuba

Postojeći FEM modeli pršljena se mogu prema veličini konačnih elemenata kojim je modelirano koštano tkivo podijeliti u sljedeće kategorije [110]:

- Modeli koji odgovaraju nivou kontinuuma ili nivou kosti kao organa. U ovu kategoriju spadaju modeli koje čine konačni elementi veličine iznad 0.5 mm, što odgovara redu veličina na čijem se nivou koštano tkivo dijeli prema nivou poroznosti na kortikalno i spongiozno i na kojem se ne razlikuju sastavni elementi ovih tkiva;

- Modeli koji odgovaraju nivou tkiva. U ovu kategoriju spadaju modeli koje čine konačni elementi veličine iznad 50 μm , što odgovara redu veličina na čijem se nivou razlikuju sastavni elementi kortikalnog i spongioznog tkiva. Ovom redu veličina odgovaraju *osteoni*, čiji je prečnik (150÷300) μm , i *Havers-ovi* kanali, čiji je prečnik oko 50 μm , kod kortikalnog koštanog tkiva, odnosno *trabekule*, čija je debljina oko 150 μm , kod spongioznog koštanog tkiva.

Veličina konačnih elemenata modela pršljena na nivou kontinuuma je takva da odgovarajući dijelovi spongioznog tkiva pršljena sadrže spongiozno koštano tkivo, žutu i crvenu koštanu srž i to u različitim odnosima. Stoga, relativna gustina koštanog tkiva u pojedinačnim konačnim elementima modela pršljena na nivou kontinuuma nije ista, što uzrokuje i razliku u mehaničkim karakteristikama konačnih elemenata kojim je modelirano koštano tkiva na ovom nivou. Veličina konačnih elemenata modela pršljena na nivou tkiva je takva da su odgovarajući dijelovi tkiva pršljena uglavnom samo sa sadržajem koštanog tkiva ili bez prisustva istog. Stoga model pršljena na nivou tkiva čine oni konačni elementi kojim odgovaraju dijelovi pršljena koji sadrže samo koštano tkivo, usled čega su relativna i fizička gustina koštanog tkiva, zbog potpune ispunjenosti konačnog elementa koštanim tkivom, jednake. Zbog toga su mehaničke karakteristike konačnih elemenata, kojim je modelirano koštano tkivo u modelima pršljena na nivou tkiva, konstantne. Od prethodno opisanih modela u prvu kategoriju spadaju modeli koje su razvili *C.S.Chen* [35], *N.Langrana* [50] i *M.Liebschner* [12], dok drugoj kategoriji pripada model koji je razvio *J.Homminga* [4].

Konačni elementi kojim je modelirano kortikalno odnosno spongiozno koštano tkivo pršljena u modelima koje su razvili *Chen* i *Langrana* su konstantnih mehaničkih karakteristika, što odgovara ravnomjernoj raspodijeli koštanog tkiva unutar pršljena koja bi rezultirala istom količinom koštanog tkiva u svakom konačnom elementu. Međutim, u realno postojećim uslovima na nivou kontinuuma to nije slučaj. Stoga ovakvi modeli ne mogu biti korišćeni za analizu naponsko-deformacionog stanja dijelova kičmenog stuba koja bi bila individualizovana i odnosila se na određenu osobu. Dakle, svrha ovakvih modela bi bila da posluže donošenju generalnih zaključaka o ponašanju dijelova kičmenog stuba u određenim uslovima, koji ne moraju biti tačni za svaku individuu ponaosob, ali su približno tačni na nivou šire populacije. Na primjer, rezultati modela koji je razvio *Chen*, sa ciljem upoređenja naponsko-deformacionog stanja međupršljenskih diskova i pršljena slabinskog dijela kičmenog stuba prije i nakon izvršene fiksacije kičmenog stuba, mogu pokazati da ugradnja implantata ne izaziva ozbiljnije promjene naponsko-deformacionog stanja koje bi izazivale postoperativne zdravstvene probleme. Međutim, ovakav zaključak ne mora biti tačan za svaku pojedinačnu osobu koja bi bila podvrgnuta ovom tipu kliničke intervencije.

Navedeni nedostatak modela poput onih koje su razvili *Chen* i *Langrana* predstavlja osnovni ograničavajući faktor za primjenu istih u medicini. Mogućnost razvoja individualizovanih modela kosti kojom se prevazilazi nedostatak navedenih modela zasnovana je na primjeni kompjuterske tomografije, čiji će principi rada biti detaljnije objašnjeni u narednom poglavlju. Ova metoda omogućava određivanje raspodjele relativne gustine koštanog tkiva unutar kosti, a tim posredno i raspodjele mehaničkih karakteristika koštanog tkiva koje se, kako je već u prethodnom dijelu ovog poglavlja prikazano, mogu odrediti na osnovu relativne gustine koštanog tkiva. Individualizovano modeliranje kosti, danas je uglavnom zasnovano na primjeni kompjuterske tomografije [4, 6, 12, 42, 43].

Konačni elementi kojim je modelirano koštano tkivo pršljena u modelu koji je razvio *M.Liebschner* su različitih mehaničkih karakteristika. Ovakav model odgovara realno postojećoj, neravnomjernoj raspodijeli koštanog tkiva unutar pršljena koja rezultira različitom količinom koštanog tkiva u svakom konačnom elementu. Raspodijela relativne gustine koštanog tkiva, na osnovu koje su određene i mehaničke karakteristike svakog konačnog elementa, je određena

kvantitativnom kompjuterskom tomografijom na *CT* skeneru. Kvantitativna kompjuterska tomografija predstavlja vodeću tehnologiju koja se danas primjenjuje za generisanje *FEM* modela dijelova skeleta. Međutim, ni ovakvi modeli nisu idealni. Jedan od osnovnih nedostataka ovih modela je posljedica ograničenja savremenih *CT* skenera kojim je moguće snimati ekvidistantne presjke dijelova skeleta na rastojanju ne manjem od 0.5 mm, što uslovljava da su modeli generisani na ovaj način nivoa kontinuuma. Osim toga i sama kvantitativna kompjuterska tomografija postavlja ograničenja u tačnosti sa kojom se može na nivou kontinuuma odrediti raspodijela relativne gustine koštanog tkiva, a tim i mehaničke karakteristike istog, o čemu će biti riječi u narednom poglavlju.

Nedavna pojava μCT skenera visoke rezolucije omogućila je snimanje ekvidistantnih presjeka dijelova skeleta na rastojanju manjem od 0.5 mm. Primjena skenera posljednje generacije je stvorila pretpostavka za generisanja *FEM* modela dijelova skeleta koji odgovaraju nivou tkiva primjenom kompjuterske tomografije. Model tijela pršljena koji je razvio *J. Homminga* je generisan upravo prema podacima sa μCT skenera sa rezolucijom piksela od 60 μm /piksel uz snimanje ekvidistantnih presjeka pršljena na rastojanju od 60 μm . Kompjuterska tomografija realizovana μCT skenerom, kada je riječ o generisanju *FEM* modela dijelova skeleta, eliminiše nedostatke konvencionalnih *CT* skenera koji su rezultat nemogućnosti generisanja *FEM* modela sa detaljnijom strukturom od onih koji odgovaraju nivou kontinuuma. Ova tehnologija omogućava omogućava preciznu identifikaciju i separaciju dijelova spongioznog tkiva pršljena koji predstavljaju koštano tkivo od onih koji predstavljaju žutu i crvenu koštanu srž. Ovim se eliminiše potreba za određivanjem raspodjele relativne gustine koštanog tkiva kvantitativnom kompjuterskom tomografijom jer konačni elementi *FEM* modela odgovaraju samo onim dijelovima pršljena koji su od koštanog tkiva. Stoga su relativna i fizička gustina koštanog tkiva u konačnom elementu ovako generisanog *FEM* modela iste i konstantne za sve elemente modela, kao i mehaničke karakteristike. Osnovni nedostatak ovih modela je posljedica ograničenja savremenih μCT skenera uzrokovanih etičkim razlozima. Naime, doza zračenja kojem bi bila izložena osoba čiji bi kičmeni stub bio sniman na μCT skeneru je znatno iznad one koja ne bi ugrozila njeno zdravlje. Stoga je ova metoda za sada primjenljiva samo *in vitro*.

Matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, koji određuje način raspoređivanja koštanog tkiva u unutrašnjosti kosti, bi moglo predstavljati put ka prevazilaženju nedostataka navedenih modela dijelova kičmenog stuba. *FEM* model pršljena, čiji bi konačni elementi posjedovali mehaničke karakteristike određene na osnovu rasporeda koštanog tkiva koji je rezultat matematičkog modela adaptivnog procesa, bi mogao po potrebi odgovarati nivou kontinuuma ili nivou tkiva i istovremeno biti prilagođen konkretnoj osobi. Postojeći modeli dijelova kičmenog stuba koji odgovaraju konkretnoj osobi odslikavaju trenutno stanje tkiva te osobe i mogu se koristiti za analizu naponsko-deformacionog stanja čiji su rezultati validni trenutno, ali ne i za duži vremenski period. U slučaju potrebe za ponavljanjem analize naponsko-deformacionog stanja dijelova kičmenog stuba nakon dužeg perioda, potrebno je ponoviti snimanje kičmenog stuba na *CT* skeneru i generisati *FEM* model prema podacima sa ponovljenog snimanja, što je prikazano u radu iz 2004. godine *A. Templeton*-a i njegovih saradnika [6]. Ova činjenica je naročito značajna u slučaju ugradnje koštanih implantata. Ugradnja koštanih implantata uzrokuje dramatičnu promjenu uslova mehaničkog opterećenja kosti koja dovodi do promjene raspodjele napona u kosti i narušavanja ravnotežnog stanja. Posljedica narušavanja ravnotežnog stanja u kosti je adaptivni proces kojim se mijenja struktura koštanog matriksa. Dakle, kada je riječ o preoperativnoj analizi naponsko-deformacionog stanja kosti u postoperativnom periodu koji može trajati mjesecima nakon ugradnje koštanog implantata, ona je jedino moguća primjenom *FEM* modela generisanih prema matematičkom modelu adaptivnog procesa kojim je moguće predvidjeti strukturu koštanog matriksa u postoperativnom periodu.

2.4 NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠTANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPTEREĆENJE

Nakon što su se u drugoj polovini devetnaestog vijeka pojavile *Culmann-von Mayer*-ova teorija trajektorija, *Wolff*-ov zakon i *Roux*-ova teorija funkcionalne adaptacije, koje su osnov savremenih matematičkih teorija o adaptaciji koštanog tkiva na mehaničko opterećenje i koje su predstavljene u uvodnom poglavlju ovog rada, sve do šezdesetih godina dvadesetog vijeka skoro i da nije bilo značajnih istraživanja ovog procesa.

Američki anatom *J.C. Kosh* je tokom 1917. godine izvršio naponsko-deformacionu analizu butne kosti i uporedio raspodjelu napona smicanja sa raspodjelom gustine koštanog tkiva, kao i pravce pružanja matriksa koštanog tkiva sa pravcima pružanja glavnih napona. Rezultati njegovog istraživanja, predstavljeni u radu *The laws of bone architecture*, su potvrdili *Wolff*-ove zaključke i pokazali da je gustina koštanog tkiva najveća u područjima najvećih napona smicanja [110]. Krajem tridesetih i početkom četrdesetih godina prošlog vijeka engleski istraživač *Glucksman* je eksperimentalno potvrdio da je adaptacija koštanog tkiva povezana sa mehaničkim opterećenjem. Dokaz za ovu tvrdnju je izveo na osnovu rezultata eksperimentalnog ispitivanja koje je sproveo na organskim uzorcima koje je u toku rasta podvrgnuo različitim nivoima mehaničkog opterećenja u vidu savijanja. Proces formiranja koštanog tkiva na istim mjestima kod različitih uzoraka bio je znatno intenzivniji na uzorcima izloženim mehaničkom opterećenju većeg inteziteta [112].

Prvi značajni iskorak u razumijevanju fizioloških mehanizama adaptacije koštanog tkiva načinio je, šezdesetih godina prošlog vijeka, američki hirurg ortoped *H.Frost*. Istražujući fiziološke mehanizme promjene strukture koštanog tkiva *Frost* je utvrdio vezu mehaničkog opterećenja i aktivnosti koštanih ćelija, *osteoblasta* i *osteoklasta*, koje formiraju odnosno razgrađuju koštano tkivo tokom adaptivnog procesa. *Frost* je prvi istakao i razliku između adaptacije koštanog tkiva kod odraslih i osoba u razvoju, široko prihvaćenu danas, po kojoj je adaptacija koštanog tkiva odraslih i osoba u razvoju različita pri istom mehaničkom opterećenju [112].

Tokom istraživanja koja je 1981. i 1984. godine sproveo *D.Carter* sa saradnicima utvrđeno je da tokom procesa adaptacije kortikalnog koštanog tkiva odraslih osoba mehaničko opterećenje odnosno odgovarajuća deformacija, koja je uzročnik adaptivnog procesa, ne dovodi uvijek do adaptivnog procesa kojim se mijenja struktura koštanog matriksa. Ovaj fenomen je prisutan sve dok je veličina deformacije, kao pokazatelja naponsko-deformacionog stanja, unutar područja koje je *Carter* nazvao "mrtva" zona. Prema ovim istraživanjima normalna deformacija manja od 0.3% leži unutar "mrtve" zone [100, 147]. Teorijski model za predviđanje početka adaptivnog procesa kojim se mijenja struktura koštanog matriksa, koji je 1987. godine predložio *H.Frost* pretpostavlja da je područje normalne deformacija koje odgovara "mrtvoj" zoni $(0.02 \div 0.25)\%$ u odnosu na pritisak, a $(0.02 \div 0.15)\%$ u odnosu na istezanje [98].

Tokom istraživanja koja su tokom 1982. godine sproveli *C.Rubin* i *L.Lanyon*, mjereći normalnu deformaciju kosti pri uobičajnim dnevnim aktivnostima odraslih primjeraka pasa i konja, utvrđeno je da se izmjerene vrijednosti nalazi u opsegu $(0.085 \div 0.3)\%$ [102]. Ovo zapažanje ih je navelo na zaključak da veličina deformacija kosti izazvanih mehaničkim opterećenjem, koje je posljedica uobičajnih dnevnih aktivnosti, kako kod odraslih ljudi tako i kod životinja odgovara području *Carter*-ove "mrtve" zone. Eksperimentalno istraživanje koje je 1998. godine sproveo *R.B.Martin* sa saradnicima mjereći linijsku deformaciju ljudskih kosti je pokazalo da se tokom skakanja može dostići maksimalna deformacija kosti koja takođe iznosi oko 0.3% [131]. Tokom istraživanja koja su sproveli 1984. godine, *C.Rubin* i *L.Lanyon* su otkrili da mehaničko opterećenje statičke prirode vodi ka smanjenju gustine koštanog tkiva i da je za njeno održavanje potrebno da mehaničko opterećenje bude dinamičke prirode sa minimalno četiri ciklusa

promjene opterećenja dnevno pri uzdužnoj deformaciji od 0.2% ili sto ciklusa dnevno pri uzdužnoj deformaciji od $(0.05 \pm 0.1)\%$ [102].

Istraživanja koja su sproveli 1984. godine *I. Binderman* sa saradnicima [99], 1990. godine *A.J. El Haj* sa saradnicima [84] i 1991. godine *S.C. Cowin* sa saradnicima [81] su pokazala da su *osteociti*, formirane koštane ćelije, osjetljive na dejstvo mehaničkog opterećenja koje utiče na njihov metabolizam. S obzirom na njihov ravnomjeran raspored u koštanom tkivu pretpostavili su da bi upravo *osteociti* mogli imati ulogu ćelija senzora koje “procjenjuju” intezitet mehaničkog signala nastalog dejstvom opterećenja. Na osnovu ove “procjene” *osteociti* šalju signal *osteoblastima* i *osteoklastima* da formiraju odnosno razgrađuju koštano tkivo.

2.4.1 Matematički modeli procesa adaptacije koštanog tkiva

Većina matematičkih modela adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, razvijenih do danas, pripada kategoriji fenomenoloških modela. Fenomenološkim modelima se pokušava uspostaviti kvantitativna veza mehaničkog uzroka i odgovarajuće posledice koja se ogleda u morfološkoj adaptaciji koštanog tkiva. Struktura koštanog tkiva koja se dobija numeričkom simulacijom adaptivnog procesa, baziranoj na fenomenološkim modelima, je adekvatnija realno postojećoj u odnosu na onu koja se dobija simulacijom adaptivnog procesa baziranoj na optimizacionim modelima [110]. Shodno tome u nastavku će biti riječi samo o modelima koji pripadaju kategoriji fenomenoloških, kojoj pripada i originalni model autora ovog rada koji će biti prikazan u narednim poglavljima.

I pored toga što je postojanje funkcionalne veze mehaničkog opterećenja i procesa adaptacije koštanog tkiva pretpostavljeno već krajem devetnaestog vijeka, prva matematičku teoriju koja opisuje ovu vezu je postavljena skoro čitav vijek kasnije, 1976. godine, kada su *S.C. Cowin* i *H.D. Hegedus* razvili teoriju adaptivne elastičnosti [105]. Osnovni koncept svih matematičkih modela koji opisuju proces adaptacije koštanog tkiva zasnovan je na jednačini adaptacije. Jednačinom adaptacije se uspostavlja kvantitativna veza mehaničkog opterećenja i pokazatelja adaptacije strukture koštanog tkiva na dejstvo tog opterećenja. Kao pokazatelj naponsko-deformacionog stanja, izazvanog dejstvom mehaničkog opterećenja na koštano tkivo, u postojećim fenomenološkim modelima adaptivnog procesa je korišćen čitav niz različitih veličina. Napon je korišćen u modelu *Adachi*-a i saradnika iz 1997. godine [64], deformacija u modelima *Cowin* i *Hegedus*-a iz 1976. godine [105] i *Carter*-a iz 1981. i 1984. godine [100,147], brzina deformacije u modelu *Mosley* i *Lanyon*-a iz 1998. godine [61], efektivni napon u modelima *Carter*-a i saradnika iz 1989. [85] i *Beaupre*-a i saradnika iz 1990. godine [82,83], gustina deformacione energije u modelima *Fyhrie* i *Carter*-a iz 1986. godine [96], *Huiskes*-a i saradnika iz 1987. godine [92], *Weinans*-a i saradnika iz 1992. godine [77], *Mullender*-a i saradnika iz 1994. godine [74], *Mullender* i *Huiskes*-a iz 1995. godine [70] i *Xinghua* i saradnika iz 2002. godine [24], brzina gustine deformacione energije u modelima *Huiskes*-a i saradnika iz 2000. godine [47] i *Ruimermana*-a i saradnika iz 2003. godine [13]. Izbor pokazatelja naponsko-deformacionog stanja, korišćenih u navednim modelima, mada intuitivan pokazao se kao konzistentan sa opšte prihvaćenim hipotezama o adaptaciji koštanog tkiva na mehaničko opterećenje. Kao pokazatelj strukture koštanog tkiva u ovim modelima je uglavnom korišćena relativna gustina koštanog tkiva. Jednačina adaptacije koštanog tkiva opisuje trenutno stanje strukture koštanog tkiva na bazi prethodnog stanja i mehaničkog opterećenja koje djeluju na koštano tkivo, što se može izraziti na sledeći način:

$$\rho_a(t + \Delta t) = f(\rho_a(t), \sigma_{ij}(t), \varepsilon_{ij}(t)) \quad (2.16)$$

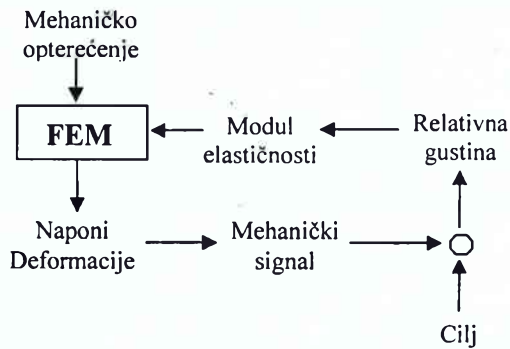
gdje $\rho_a(t + \Delta t)$ predstavlja trenutnu, a $\rho_a(t)$ prethodnu veličinu relativne gustine koštanog tkiva, dok su $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ redom tenzori napona i deformacija u trenutku t . Promjenom strukture koštanog tkiva, odnosno, raspodijele relativne gustine istog, mijenjaju se i njegove mehaničke karakteristike što se opisuje strukturno-funkcionalnom jednačinom:

$$K = K(K_i, M(\rho_a(t + \Delta t))) \quad (2.17)$$

gdje K predstavlja krutost koštanog tkiva koja zavisi od mikrostrukturne krutosti istog K_i i rasporeda koštanog tkiva različite krutosti određenog matricom M koja je funkciju relativne gustine koštanog tkiva u trenutku $t + \Delta t$. Promjena mehaničkih karakteristika koštanog tkiva, uslovljava i promjenu naponsko-deformaciono stanje koštanog tkiva, čak i u slučaju konstantnog opterećenja. Pokazatelji izmijenjenog naponsko-deformacionog stanja koštanog tkiva se određuje iz jednačina statičke ravnoteže:

$$f(K, R, t) \Rightarrow \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \quad (2.18)$$

gdje R predstavlja spoljašnje opterećenje kosti. Dakle, ove tri jednačine fiziološki oponašaju proces adaptacije koštanog tkiva. Mehaničko opterećenje, koje pokreće adaptivni mehanizam, se prostire hijerarhijski kroz koštano tkivo do ćelijskog nivoa. Čelije, koje imaju ulogu senzora, "procjenjuju" da li je izabrani pokazatelj naponsko-deformacionog stanja unutar područja *Carter*-ove "mrtve" zone. Ukoliko nije, ćelije senzori pokreću adaptivni mehanizam koji mijenja strukturu koštanog tkiva. Ova promjena strukture koštanog tkiva se ogleda u promjeni raspodjele relativne gustine koštanog tkiva na način određen jednačinom adaptacije. Promjena strukture koštanog tkiva dovodi i do promjene mehaničkih karakteristika istog na način definisan strukturno-funkcionalnom jednačinom. Izmijenjene mehaničke karakteristike koštanog tkiva za posljedicu imaju promijenu veličine izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja koja se određuje na osnovu jednačina statičke ravnoteže. Na osnovu ovako izmijenjene veličine izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja ćelije senzori "procjenjuju" da li da nastave adaptivni proces ili da ga okončaju.



Slika 2.19 Shematski prikaz toka adaptivnog procesa

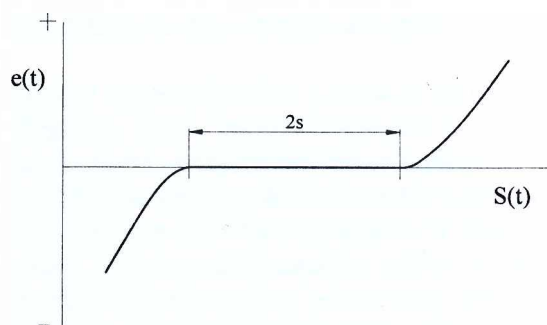
Unazad dvije decenije, 1987. godine nezavisno jedan od drugog *D.Carter* [93] i *R.Huiskes* [92] su u matematičke modele adaptivnog procesa uveli numeričko modeliranje zasnovano na metodi konačnih elemenata. Ovaj pristup je opšte prihvaćen u savremenim matematičkim modelima adaptivnog procesa. Numerička simulacija procesa adaptacije koštanog tkiva zasnovana na ovom pristupu se odvija iterativno do okončanja procesa u svim konačnim elementima, kojim je modelirano koštano tkivo, što je shematski prikazano na slici 2.19.

2.4.2 Lokalna optimizacija u procesu adaptacije koštanog tkiva

Polazna hipoteza fenomenoloških modela adaptivnog procesa je da se tokom adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje struktura koštanog tkiva mijenja sa ciljem da veličina mehaničkog signala, koji upravlja adaptivnim procesom, postane jednaka nuli. U opštem slučaju mehanički signal e se može definisati kao po dijelovima linearna funkcija razlike trenutne veličine izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja $S(t)$ i veličine tog istog pokazatelja u stanju ravnoteže S^* , koje karakteriše odsustvo promjena u strukturi koštanog tkiva koje su posljedica adaptivnog procesa:

$$e(t) = \begin{cases} S(t) - (1+s) \cdot S^* & \text{ako } S(t) > (1+s) \cdot S^* \\ 0 & \text{ako } (1+s) \cdot S^* \leq S(t) \leq (1-s) \cdot S^* \\ S(t) - (1-s) \cdot S^* & \text{ako } S(t) < (1-s) \cdot S^* \end{cases} \quad (2.19a)$$

gdje $2 \cdot s$ predstavlja širinu ravnotežnog područja koje odgovara *Carter*-ovoj "mrtvoj" zoni kao što je prikazano na slici 2.20.



Slika 2.20 Carter-ova "mrtva" zona

U slučaju da je $s=0$ jednačina (2.19a) se pojednostavljuje i prelazi u:

$$e(t) = S(t) - S^* \quad (2.19b).$$

Kada se u strukturnom modelu kosti povećava relativna gustina koštanog tkiva ρ_{ai} na i -toj diskretnoj lokaciji to uzrokuje smanjenje izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja S_i na toj istoj lokaciji i obratno. Dakle, funkcionalna veza izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja i promjene relativne gustine koštanog tkiva je

monotona i obrnuto proporcionalna. Polazna hipoteza fenomenoloških modela je ekvivalentna formulaciji konstruisanja prema maksimalnom ravnomjerno raspoređenom naponskom stanju (*Fully Stressed Design - FSD*) koja glasi: *Pri optimalnom konstruisanju svaki dio konstrukcije koji nije minimalnih dimenzija je maksimalno napregnut u uslovima mehaničkog opterećenja koji odgovaraju makar jednom od projektovanih stanja konstrukcije* [110,142]. Optimalnost *FSD* metode je razmatrana u istraživanju koje su sprovedi 1998. godine *S.N.Patnaik* i *D.A.Hopkins* [133]. Problemi konstruisanja prema maksimalnom ravnomjerno raspoređenom naponskom stanju spadaju u probleme lokalne optimizacije. Ova kategorija optimizacionih problema se rešava iterativnom metodom evolutivne strukturne optimizacije (*Evolutionary Structural Optimization - ESO*) [3]. Problem lokalne optimizacije koštanog tkiva u slučaju adaptivnog procesa se može formulisati na sljedeći način [110]:

$$\begin{aligned} \min_{\rho_{ai}} \quad & \rho_{ai} \\ \text{ako} \quad & e_i = 0 \quad \text{ i } \quad 0 \leq \rho_{ai} \leq \rho_{cb} \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdje ρ_a predstavlja relativnu gustinu koštanog tkiva, a ρ_{cb} gustinu kortikalnog koštanog tkiva. Uobičajni pristup u modelima adaptivnog procesa je da se promjena relativne gustine koštanog tkiva izražava jednačinom adaptacije, koja predstavlja linearnu funkciju mehaničkog signala:

$$\frac{d\rho_{ai}(t)}{dt} = \text{kons tan ta} \cdot e_i(t) \quad (2.21).$$

Rešavanjem problema lokalne optimizacije koštanog tkiva u slučaju adaptivnog procesa je obuhvaćen *FEM* model kosti i raspodjela relativne gustine koštanog tkiva kao pokazatelja prisustva koštanog tkiva u konačnim elementima *FEM* modela. Algoritam *ESO* metoda za rešenje ovog problema se sastoji u sljedećim koracima:

1. Definisanje početne raspodjele koštanog tkiva *FEM* modela kosti;
 2. Definisanje opterećenja i graničnih uslova *FEM* modela kosti;
 3. Određivanje mehaničkih karakteristika *FEM* modela kosti strukturno-funkcionalnom jednačinom (2.17);
 4. Određivanje naponsko-deformacionog stanja rešavanjem jednačine statičke ravnoteže (2.18) *FEA* analizom;
 5. Određivanje priraštaja relativne gustine koštanog tkiva konačnih elemenata jednačinom adaptacije (2.21);
 6. Promjena relativne gustine koštanog tkiva konačnih elemenata aktivnih u adaptivnom procesu za veličinu priraštaja određenog u koraku 5. Aktivnim, u adaptivnom procesu, se smatraju oni konačni elementi u kojim nije okončan proces promjene relativne gustine koštanog tkiva;
 7. Identifikacija konačnih elemenata koji zadovoljavaju ograničenja problema lokalne optimizacije (2.20) i stoga postaju neaktivni u daljem toku adaptivnog procesa;
 8. Ukoliko ima konačnih elemenata aktivnih u adaptivnom procesu ponavljaju se koraci 3÷7.
- Ovako dobijena raspodjela koštanog tkiva predstavlja lokalni optimum koji ne mora ujedno biti i globalni optimum, tj. najbolje rešenje optimizacionog problema, ali predstavlja bolje rešenje od bilo kojeg drugog rešenja u blizini početno pretpostavljene raspodjele koštanog tkiva.

2.4.3 Cowin-ova teorija adaptivne elastičnosti

U nizu radova *Stephen Cowin* je sa saradnicima razvio teoriju adaptivne elastičnosti (*Cowin i Hegedus* 1976. godine; *Hegedus i Cowin* 1976. godine; *Cowin i Nachlinger* 1978. godine) baziranu na opštim principima mehanike kontinuuma [105]. Prema *Cowin*-ovom modelu kost je modelirana kao dvofazna porozna materija, koju čini porozna elastična struktura i fluid kojim je ova porozna struktura ispunjena. Pokazatelj naponsko-deformacionog stanja koštanog tkiva u ovom modelu je deformacija. Jednačina adaptacije u ovom modelu opisuje promjenu raspodjele koštane mase m tokom adaptivnog procesa uslovljenu mehaničkim signalom koji je posljedica razlike trenutne veličine tenzora deformacija ε_{ij} i veličine tenzora deformacija u stanju ravnoteže ε_{ij}^* :

$$\frac{dm}{dt} = c_{ij} \cdot (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \quad (2.22).$$

Jednačinom adaptacije je obuhvaćen i tenzor elastičnih koeficijenata c_{ij} , koji se kao i tenzor deformacija u stanju ravnoteže određuje eksperimentalnim putem. Model *Cowin*-a se, iako je dokazano da može reprodukovati promjene koje se odigravaju tokom adaptivnog procesa, pokazao kao vrlo komplikovan zbog potrebe eksperimentalnog određivanja tenzora elastičnih koeficijenata i tenzora deformacija u stanju ravnoteže.

2.4.4 Nijmegen modeli

Rik Huiskes je sa saradnicima sa univerziteta u *Nijmegenu* u Holandiji, 1987. godine, u cilju prevazilaženja nedostataka *Cowin*-ovog modela za pokazatelj naponsko-deformacionog stanja predložio skalarnu veličinu, gustinu deformacione energije U [92]. Ova veličina je za elastični materijal definisana na sljedeći način:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^T \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.23a)$$

gdje σ_{ij} i ε_{ij} predstavljaju redom tenzore napona i deformacija diskretne lokacije za koju se određuje veličina gustine deformacione energije. Uvrštavanjem veze napona i deformacija, izražene *Hooke*-ovim zakonom, u izraz (2.23a) se dobija:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ij}^T \cdot c_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.23b)$$

gdje c_{ij} predstavlja tenzor elastičnih koeficijenata.

Huiskes je u model adaptacije koštanog tkiva takođe uveo i koncept *Carter*-ove “mrtve” zone uvođenjem intervala gustine deformacione energije unutar kojeg nema pojave adaptacije koštanog tkiva. Primjenom koncepta “mrtve” zone jednačina adaptacije koštanog tkiva u modelu *Huiskes*-a, poznatom kao *Nijmegen* model, dobija sljedeći oblik:

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} B \cdot (U(t) - (1+s) \cdot U^*) & \text{ako } U(t) > (1+s) \cdot U^* \\ 0 & \text{ako } (1+s) \cdot U^* \leq U(t) \leq (1-s) \cdot U^* \\ B \cdot (U(t) - (1-s) \cdot U^*) & \text{ako } U(t) < (1-s) \cdot U^* \end{cases} \quad (2.24)$$

gdje E predstavlja modul elastičnosti, U^* veličinu gustine deformacione energije u stanju ravnoteže, B konstanti koeficijent adaptacije koštanog tkiva, $2 \cdot s$ širinu “mrtve” zone, a t vrijeme simulacije. Koštano tkivo je modelirano kao izotropno i linearno elastično. Skalarne veličine U^* i B , kao i širina “mrtve” zone se određuju eksperimentalnim putem. Za slučaj jednoosnog deformacionog stanja gustina deformacione energije se određuje prema izrazu:

$$U = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \quad (2.25)$$

gdje ε predstavlja normalnu deformaciju.

Rezultati istraživanja, koja su već prikazana u prethodnom dijelu ovog poglavlja, i to *Rubin* i *Lanyon*-a, po kojem se normalna deformacija kosti pri svakodnevnim aktivnostima nalazi u opsegu $(0.085 \pm 0.3)\%$, i *Turner*-a, po kojem modul elastičnosti koštanog tkiva iznosi 18 GPa, omogućavaju da se prema proceduri koju je predložio *Huiskes* odredi širina *Carter*-ove “mrtve” zone i veličina gustine deformacione energije u stanju ravnoteže. Uvrštavanjem navedenih veličina normalne deformacije i modula elastičnosti u izraz (2.25) se dobija da *Carter*-ova “mrtva” zona odgovara području $U=(0.007 \pm 0.081)$ MPa. Dakle širina *Carter*-ove “mrtve” zone iznosi $2 \cdot s=0.074$ MPa, dok gornja granica ove zone odgovara gustini deformacione energije u stanju ravnoteže $U^*=0.081$ MPa.

Huiskes je kao i *Cowin* diferencijalnu jednačinu adaptacije koštanog tkiva transformisao u vremensku integracionu shemu sa konstantnim vremenskim korakom Δt , čim se izraz (2.24) transformiše u jednačinu sljedećeg oblika:

$$E(t + \Delta t) = \begin{cases} E(t) + \Delta t \cdot B \cdot (U(t) - (1+s) \cdot U^*) & \text{ako } U(t) > (1+s) \cdot U^* \\ E(t) & \text{ako } (1+s) \cdot U^* \leq U(t) \leq (1-s) \cdot U^* \\ E(t) + \Delta t \cdot B \cdot (U(t) - (1-s) \cdot U^*) & \text{ako } U(t) < (1-s) \cdot U^* \end{cases} \quad (2.26)$$

Huiskes je takođe prvi uveo i pristup praćenju toka adaptivnog procesa zasnovan na korišćenju metode konačnih elemenata. Numerička simulacija toka adaptivnog procesa zasnovana na ovom pristupu se odvija iterativno do okončanja procesa u svim konačnim elementima, kojim je modelirano koštano tkivo, što je shematski prikazano na slici 2.19. Proces adaptacije koštanog tkiva se prema ovom modelu okončava u konačnom elementu kada se trenutna veličina gustine deformacione energije izjednači sa veličinom gustine deformacione energije u stanju ravnoteže $U(t)=U^*$.

Wolff-ov zakon i *Roux*-ova teorija funkcionalne adaptacije sadrže i pretpostavku o samo-optimizujućoj prirodi procesa adaptacije koštanog tkiva, koje je sposobno da prilagođava sopstvenu strukturu i gustinu zahtjevima nosivosti. *Fyhrie* i *Carter* su 1986. godine predložili model kojim se opisuje samo-optimizujuća priroda adaptivnog procesa [96]. Prema ovom modelu relativna gustina koštanog tkiva se lokalno adaptira na mehaničko opterećenje uz ograničavanje naponskog stanja nekom graničnom vrijednošću. *Fyhrie* i *Carter* su naknadno, 1990. godine, modifikovali ovaj model uvodeći umjesto napona kao ograničavajuću veličinu odnos gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva. Ovim modelom je u obzir uzeta i moguća promjenljivost mehaničkog opterećenja kroz određivanje prosječne veličine gustine deformacione energije U_a , čime se formira pokazatelj naponsko-deformacionog stanja sljedećeg oblika:

$$U_a = \frac{1}{n_L} \cdot \sum_{i=1}^{n_L} \left(\frac{U_i}{\rho_a} \right) = \text{const} \quad (2.27)$$

gdje je U_i gustina deformacione energije za i -to stanje mehaničkog opterećenja, ρ_a relativna gustina koštanog tkiva i n_L broj različitih stanja mehaničkog opterećenja.

H. Weinans sa saradnicima je 1992. godine prethodno obrazloženu ideju *Fyhrie* i *Carter*-a, o odnosu gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva kao pokazatelju naponsko-deformacionog stanja, ugradio u *Nijmegen* model adaptivnog procesa [77]. Osim navedenog *Weinans* je pretpostavio i da je širina *Carter*-ove “mrtve” zone $s=0$. Jednačina adaptacije koštanog tkiva se u tom slučaju može izraziti u sljedećem obliku:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = B \cdot \left(\frac{U_a}{\rho_a} - k^* \right), \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (2.28)$$

gdje B predstavlja konstanti koeficijent adaptacije koštanog tkiva, k^* odnos gustine deformacione energije i gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže, a t vrijeme simulacije. Koštano tkivo je

modelirano kao izotropno i linearno elastično, pri čemu je za gustinu kortikalnog koštanog tkiva *Weinans* usvojio da iznosi $\rho_{cb}=1.74 \text{ g/cm}^3$. Skalarne veličine k^* i B se određuju eksperimentalnim putem.

Prema već obrazloženoj proceduri *Huiskes*-a, korišćenjem rezultata istraživanja *Rubin* i *Lanyon*-a, odnosno *Turner*-a moguće je odrediti širinu područja koje odgovara svakodnevnom opterećenju kosti, izraženu odnosom gustine deformacione energije i gustine koštanog tkiva, i to prema izrazu:

$$k^* = \left(\frac{U_a}{\rho_{cb}} \right)^* = \frac{\frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2}{\rho_{cb}} \quad (2.29).$$

Uvrštavanjem podataka o normalnoj deformaciji i modulu elastičnosti, koji su rezultat navedenih istraživanja, u izraz (2.29) dobija se da je ovo područje unutar sljedećih granica $k^*=(0.0037 \div 0.0466) \text{ J/g}$. Dakle, očekivana veličina odnosa gustine deformacione energije i gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* bi trebala biti reda veličina koji odgovara ovom području. Koeficijent adaptacije prema *Weinans*-u iznosi $B=1 \text{ (g/cm}^3\text{)}^2\text{/(MPa} \cdot \text{vrem. jedinica)}$.

Diferencijalnu jednačinu adaptacije koštanog tkiva *Weinans* je transformisao u vremensku integracionu shemu sa konstantnim vremenskim korakom Δt , čim se izraz (2.28) transformiše u jednačinu sljedećeg oblika:

$$\Delta \rho_a = \Delta t \cdot B \cdot \left(\frac{U_a}{\rho_a} - k^* \right) \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (2.30).$$

Proces adaptacije u svakom konačnom elementu diskretnog modela kosti, prema modelu *Weinans*-a, ima tri mogućnosti da konvergira i dostigne ravnotežno stanje:

- Odnos gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva dostiže vrijednost u stanju ravnoteže;
- Koštano tkivo u konačnom elementu se u potpunosti razgrađuje;
- Gustina koštanog tkiva u konačnom elementu dostiže gustinu kortikalnog koštanog tkiva.

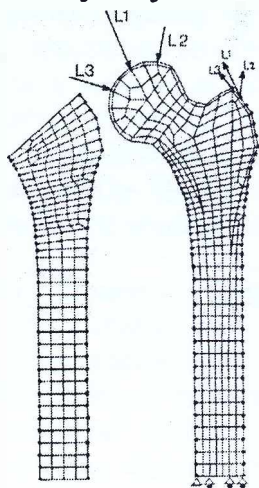
Navedeni uslovi se mogu izraziti na sljedeći način:

$$d\rho_a/dt = 0 \Rightarrow U_a/\rho_a = k^* \text{ ili } \rho_a = 0.01 \text{ g/cm}^3 \text{ ili } \rho_a = \rho_{cb} \quad (2.31).$$

Weinans je za praćenje konvergencije adaptivnog procesa koristio funkciju sljedećeg oblika:

$$f_{con} = \frac{1}{n_{FE}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{FE}} \left| \frac{U_{a,i}}{\rho_{a,i}} - k^* \right| \quad (2.32)$$

gdje n_{FE} predstavlja broj konačnih elemenata u kojim adaptivni proces nije okončan.

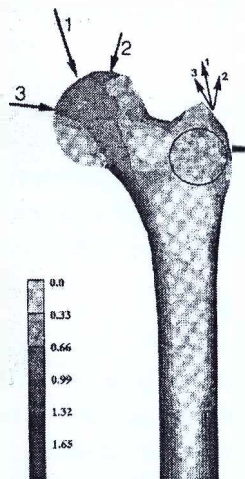


Slika 2.21 FEM model butne kosti

Weinans je izvršio testiranje modela numeričkom simulacijom procesa adaptacije koštanog tkiva butne kosti. Simulacija je realizovana na dvodimenzionalnom modelu butne kosti koja je modelirana konačnim elementima kao što je prikazano na slici 2.21. Za modeliranje butne kosti su korišćeni linearni izoparametarski konačni elementi sa čvorovima u tjemnim tačkama. Koštano tkivo konačnih elemenata je modelirano kao izotropno, sa *Poisson*-ovim koeficijentom $\nu=0.3$. Za odnos gustine deformacione energije i gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže je usvojeno da iznosi $k^*=0.004 \text{ J/g}$, što prema ranijim radovima *Weinans*-a vodi

realističnoj krajnjoj strukturi koštanog tkiva. Za strukturno-funkcionalnu jednačinu koja povezuje modul elastičnosti E i relativnu gustinu koštanog tkiva *Weinans* je usvojio izraz koji je rezultata istraživanja koje su 1977. godine sprovedi *D.Carter* i *W.Hayes* [104]:

$$E = 3790 \cdot \rho_a^3 \quad (2.33).$$



Slika 2.22 Raspodijela relativne gustine koštanog tkiva dobijena simulacijom adaptivnog procesa modelom *Weinans*-a [83]

Numerička simulacija adaptivnog procesa počinje iz stanja u kojem relativna gustina, uniformno distribuiranog, koštanog tkiva iznosi $\rho_a = 0.8 \text{ g/cm}^3$. Prevelika veličina vremenskog koraka integracione sheme uzrokuje dobijanje krajnje strukture koštanog tkiva koja znatno odstupa od realno postojeće, a premala nepotrebno usporava konvergenciju adaptivnog procesa. S obzirom na tu činjenicu *Weinans* je na osnovu rezultata numeričke simulacije adaptivnog procesa dobijenih variranjem vremenskog koraka usvojio da vremenski korak iznosi $\Delta t = 30$ vremenskih jedinica. Unutar svakog konačnog elementa *FEM* modela butne kosti se, prema modelu *Weinans*-a, nalazi ćelija senzora smještena u težištu elementa. Ova ćelija ima ulogu *osteocita* koji registruje mehaničko

opterećenje koje djeluje na butnu kost i šalje mehanički signal koji uzrokuje mijenjanje relativne gustine koštanog tkiva isključivo unutar elementa u kom se ćelija senzor nalazi. Ispunjavanje jednog od uslova ravnoteže (2.31) na lokaciji ćelije senzora dovodi do okončanja adaptivnog procesa u konačnom elementu unutar kojeg se ćelija nalazi. Rezultati simulacije adaptivnog procesa butne kosti prema modelu *Weinans*-a su prikazani na slici 2.22. U preostalim primjerima na kojim je *Weinans* testirao model adaptivnog procesa korišćena je kao strukturno-funkcionalna jednačina veza modula elastičnosti E i relativnu gustinu koštanog tkiva koja je rezultat nezavisnih istraživanja, koja su 1988. godine sprovedi *S.Currey* [91] i *J.Rice* sa saradnicima [90]:

$$E = C \cdot \rho^\gamma \quad (2.34)$$

gdje konstante redom iznose $C = 100 \text{ MPa/(g/cm}^3)^2$ i $\gamma = 2$.

Osnovni nedostatak modela *Weinans*-a je posljedica činjenice da simulacija adaptacije koštanog tkiva po ovom modelu najčešće vodi ka samo jednom stabilnom rešenju, i to onom kod kojeg relativna gustina koštanog tkiva u konačnim elementima odgovara minimalno odnosno maksimalno dopuštenoj veličini. Proces adaptacije koštanog tkiva u takvom slučaju vodi ka pojavi prekida u koštanoj strukturi što se kosi sa uslovom neprekidnosti na kojem je bazirana metoda konačnih elemenata. Posljedica ovakve strukture koštanog tkiva je pojava numeričkih nestabilnosti u modelu koje dovode do netačnih rezultata pri određivanju napona i deformacija izazvanih mehaničkim opterećenjem kosti, a tim i do numeričke simulacije adaptivnog procesa koja vodi formiranju strukture koštanog tkiva koja se razlikuje od realno postojeće.

Prema *M.G.Mullender*-u i njegovim saradnicima razlog za to leži u činjenici da po modelu *Weinans*-a ćelije senzori, *osteociti*, koje pokreću i regulišu adaptivni proces utiču na tok adaptivnog procesa samo unutar konačnog elementa kojem pripadaju bez uticaja na proces van njegovih granica, što ne odgovara stvarnom stanju. *Mullender* sa saradnicima je 1994. godine predložio "fiziološki" pristup rešenju navedenog nedostatka modela *Weinans*-a [74]. Ovim pristupom se uticaj mehaničkog signala koji *osteociti* šalju *osteoklastima* i *osteoblastima* u okruženju, kako bi se započeo proces razgradnje odnosno formiranja koštanog tkiva, prostire i van granica konačnih elemenata unutar kojih se *osteociti* nalaze. Efekat mehaničkog signala na

osteoklaste i *osteoblaste* opada sa povećanjem udaljenosti istih od lokacije *osteocita*. Dakle, *Mullender* je u proces adaptacije koštanog tkiva uključio uticaj svih ćelija senzora srazmjerno njihovoj udaljenosti od lokacije na kojoj se odigrava adaptivni proces. Ovu pretpostavku *Mullender* je u model adaptivnog procesa ugradio kroz funkciju prostornog uticaja $f_i(x)$ koja fizički oponaša uticaj ćelija senzora na koštano tkivo u okruženju:

$$f_i(x) = e^{-\frac{d_i(x)}{D}} \quad (2.35)$$

gdje d_i [mm] predstavlja udaljenost lokacije x od i -te ćelije senzora, D [mm] koeficijent brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju. Parametar D predstavlja prema izrazu (2.35) rastojanje na kojem se mehanički signal koji šalje ćelija senzor smanjuje na e^{-1} tj. 36.8% inteziteta koji signal ima na lokaciji same ćelije senzora. Jednačina adaptacije koštanog tkiva se prema modelu *Mullender*-a u tom slučaju može izraziti na sljedeći način:

$$\frac{d\rho_{a,i}}{dt} = B \cdot \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot \left[\frac{U_{a,i}}{\rho_{a,i}} - k^* \right], \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (2.36).$$

gdje $U_{a,i}$ predstavlja gustinu deformacione energije u i -toj ćeliji senzoru, $\rho_{a,i}$ relativnu gustinu koštanog tkiva konačnog elementa unutar kojeg i -ta ćelija senzor nalazi i n_c predstavlja broj ćelija senzora. Koštano tkivo je modelirano kao izotropno i linearno elastično. Veličine gustine kortikalnog koštanog tkiva ρ_{cb} i konstantnog koeficijenta adaptacije B , *Mullender* je usvojio prema modelu *Weinans*-a. Skalarna veličina k^* se određuju eksperimentalnim putem.

Diferencijalnu jednačinu adaptacije koštanog tkiva (2.36) *Mullender* je transformisao u vremensku integracionu shemu sa konstantnim vremenskim korakom Δt , čim je dobio izraz sljedećeg oblika:

$$\Delta\rho_a = \Delta t \cdot B \cdot \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot \left[\frac{U_{a,i}}{\rho_{a,i}} - k^* \right], \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (2.37)$$

U predloženom modelu adaptivnog procesa *Mullender* je koristio istu jednačinu strukturno-funkcionalne veze kao i *Weinans*, koja je data izrazom (2.34).

U slučaju da je svakom konačnom elementu pridružena jedna ćelija senzor, kao što je to slučaj u modelu *Weinans*-a, veličina parametra D treba biti reda veličine konačnog elementa. Na taj način se ostvaruje preklapanje područja uticaja susjednih ćelija senzora što prouzrokuje njihov zajednički uticaj na adaptivni proces u okruženju. U suprotnom se model *Mullender*-a svodi na model *Weinans*-a u kojem svaka ćelija senzor ima uticaj na adaptivni proces koji se odigrava isključivo unutar konačnog elementa u kojem se nalazi. Pristup u kojem se svakom konačnom elementu pridružuje jedna ćelija senzor, čini model zavisnim od gustine mreže konačnih elemenata, tj. sa njenim povećanjem raste i broj ćelija senzora i obratno. Promjena gustine mreže konačnih elemenata utiče i na veličinu koeficijenta brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju D čija je veličina, kao što je već rečeno, uslovljena veličinom konačnih elemenata. Dakle, vezivanje broja ćelija senzora za broj konačnih elemenata za posljedicu ima promjenljivost veličine područja uticaja ćelije senzora, *osteocita*, na adaptivni proces u okruženju što očigledno ne može odgovarati stvarnosti. Kako bi model učinio nezavisnim od gustine konačnih elemenata *Mullender* je “fiziološkim” pristupom prevazilaženju nedostataka modela *Weinans*-a, kroz pojam gustine ćelija senzora uveo u model ravnomjernu distribuciju ćelija senzora unutar kosti.

Mullender je predloženi model testirao na teorijskom primjeru kvadratne ravanske ploče opterećene neravnomjrnim kontinualnim opterećenjem duž jedne ivice, koji je kao uporedni primjer za testiranje modela adaptivnog procesa korišćen u većem broju radova [24,74,77]. Gustina ćelija senzora je definisana brojem ćelija po kvadratnom milimetru. Testiranjem modela je utvrđeno da se sa povećanjem gustine ćelija senzora, do određene granice, povećava i tačnost dobijenih rezultata. Za veličinu parametra $D=0.025$ mm je utvrđeno da granična veličina gustine

čelija senzora iznosi oko 1000 čelija/mm². Takođe je utvrđeno i da se sa porastom veličine parametra D smanjuje granična gustina čelija senzora. Parametar D određuje rastojanje na kojem se osjeća uticaj čelija senzora na okruženje, tj. na susjedne čelije senzore i čelije koje učestvuju u razgradnji i formiranju koštanog tkiva. *Osteociti*, za koje se pretpostavlja da predstavljaju čelije senzore, se nalaze unutar koštanog matriksa, a *osteoblasti* i *osteoklasti*, čelije koje formiraju i razgrađuju koštano tkivo, na površini *trabekula* koje čine koštani matriks i čija je debljina oko 0.15 mm [77, 110]. Razmatrajući fizičku suštinu parametra D , s obzirom na navedene činjenice Mullender je pretpostavio da bi red veličine parametra D trebao da odgovara debljini *trabekula*.

Struktura koštanog tkiva dobijena simulacijom adaptivnog procesa modelom Mullender-a odgovara očekivanoj i pokazuje visok stepen sličnosti sa realno postojećom [77, 110].

Pristup koji je korišćen u *Nijmegen*, kao i drugim modelima adaptivnog procesa, da se promjena relativne gustine koštanog tkiva izražava jednačinom adaptacije koja predstavlja linearnu funkciju mehaničkog signala nema čvrsto fizičko uporište. U tom smislu je *Z.Xinghua* sa saradnicima 2002. godine predložio da se promjena relativne gustine koštanog tkiva izražava jednačinom adaptacije, koja predstavlja nelinearnu funkciju mehaničkog signala [24]. *Xinghua* je takođe predložio i uvođenje promjenljivog koeficijenta adaptacije $B(t)$ kojim bi se ubrzala konvergencija adaptivnog procesa. *Xinghua* je za promjenljivi koeficijent adaptacije $B(t)$ koristio eksponencijalno opadajući izraz sljedećeg oblika:

$$B(t) = (B_0 - B_T) / e^{0.02t} + B_T \quad (2.38).$$

Za maksimalnu veličinu koeficijenta adaptacije *Xinghua* je usvojio veličinu konstantnog koeficijenta adaptacije iz modela *Weinans*-a $B_0=1$ (g/cm³)²/(MPa·vremenska jedinica), dok je za minimalnu veličinu predložio da iznosi $B_T=0.01$ (g/cm³)²/(MPa·vremenska jedinica). Proširenjem *Nijmegen* modela predlozima *Xinghua*-e dobija se jednačina adaptacije sljedećeg oblika:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = B(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot (\beta_i^\alpha - 1) \right), \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (2.39)$$

$$\beta_i = \frac{U_{a,i}}{\rho_{a,i} \cdot k^*} \quad (2.40)$$

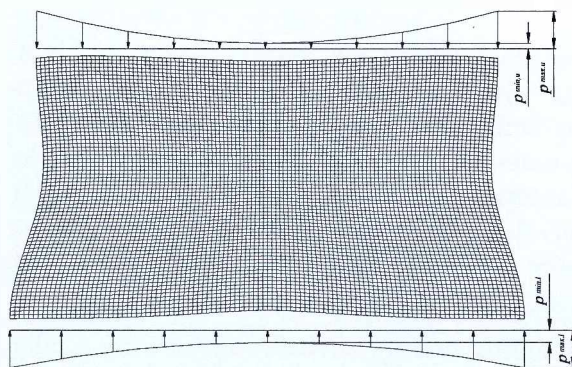
gdje β_i predstavlja uporedni koeficijent, a α stepen nelinearnosti jednačine adaptacije. Koštano tkivo je modelirano kao izotropno i linearno elastično. Veličinu gustine kortikalnog koštanog tkiva *Xinghua* je usvojio prema modelu *Weinans*-a. Skalarna veličina k^* se određuju eksperimentalnim putem.

Diferencijalnu jednačinu adaptacije koštanog tkiva (2.39) *Xinghua* je transformisao u vremensku integracionu shemu sa konstantnim vremenskim korakom Δt , čim se dobija izraz sljedećeg oblika:

$$\Delta\rho_a = \Delta t \cdot B(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot (\beta_i^\alpha - 1) \right) \quad (2.41)$$

U predloženom modelu adaptivnog procesa *Xinghua* je koristio istu jednačinu strukturno-funkcionalne veze kao i *Weinans*, koja je data izrazom (2.34).

Promjenljivi koeficijent adaptacije $B(t)$ i stepen nelinearnosti jednačine adaptacije koštanog tkiva α u različitim starosnim dobima i na različitim anatomskim mjestima prema *Xinghua*-i ne moraju biti isti. *Xinghua* je izvršio testiranje modela numeričkom simulacijom procesa adaptacije koštanog tkiva slabinskog pršljena. Numerička simulacija je realizovana na dvodimenzionalnom modelu slabinskog pršljena. Granična kontura srednjeg čeonog presjeka pršljena je dobijena na osnovu CT snimaka. Na skeneru je izvršeno snimanje slabinskog pršljena 10 osoba. Statističkom



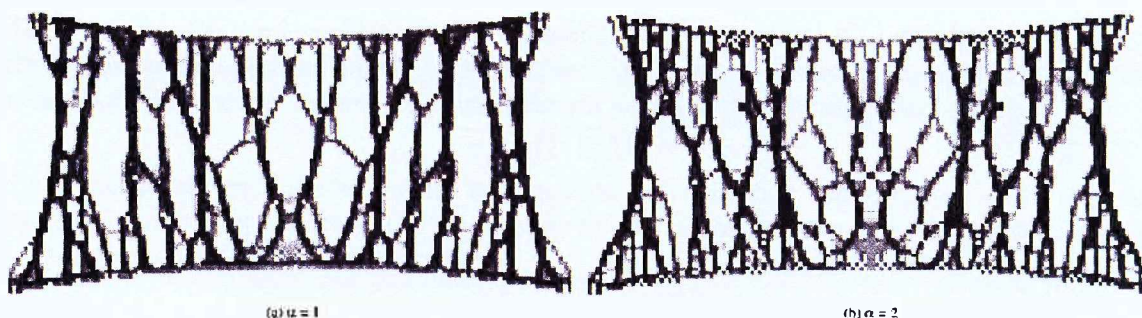
Slika 2.23 FEM model slabinskog pršljena

zadato u vidu kontaktnog pritiska koji dijeluje na obje čone površine, kao što je prikazano na slici 2.23. Prema eksperimentalnim ispitivanjima koja je sproveo oblik raspodjele kontaktnog pritiska koji dijeluje na čone površine slabinskog pršljena odgovara konkavnoj paraboli, a intezitet $p_{max}=3.5 \text{ N/mm}^2$ i $p_{min}=0.3 \text{ N/mm}^2$. Za odnos gustine deformacione energije i gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže je usvojeno da iznosi $k^*=0.2 \text{ J/g}$. Simulacija adaptivnog procesa je započeta iz stanja u kojem je relativna gustina koštanog tkiva uniformno distribuirana $\rho_a=0.8 \text{ g/cm}^3$. Unutar svakog konačnog elementa FEM modela pršljena se, kao i u modelu Weinans-a, nalazi po jedna ćelija senzor smještena u težištu elementa.

Rezultati numeričke simulacije adaptivnog procesa prema modelu Xinghua-e za slučaj linearne jednačine adaptacije $\alpha=1$, što uz konstantan koeficijent adaptacije odgovara modelu Mullender-a, i slučaj nelinearne jednačine adaptacije $\alpha=2$ su prikazani na slici 2.24. Krajnja masa koštanog tkiva dobijena simulacijom adaptivnog procesa u ova dva slučaja se razlikuje za 2.8%. Dakle, nelinearnost jednačine adaptacije utiče neznatno na promjenu krajnje mase koštanog tkiva. Struktura koštanog tkiva dobijena numeričkom simulacijom prema nelinearnoj jednačini adaptacije je međutim sličnija realno postojećoj od one koja se dobija numeričkom simulacijom adaptivnog procesa prema linearnoj jednačini adaptacije. Xinghua je za međusobno poređenje raspodijela koštanog tkiva, dobijenih za različite veličine stepena nelinearnosti jednačine adaptacije, koristio i indikator krutosti definisan na sljedeći način:

$$\bar{K} = \frac{1}{W \cdot m} \quad (2.42)$$

gdje W predstavlja rad spoljnog opterećenja i m masu koštanog tkiva. Indikator krutosti pokazuje efikasnost iskorišćenja koštanog tkiva dobijene koštane strukture. Dobijena veličina indikatora krutosti pokazuje da je koštana struktura dobijena prema nelinearnoj jednačini adaptacije veće krutosti od one koja se dobija prema linearnoj jednačini adaptacije.



Slika 2.24 Raspodijela relativne gustine koštanog tkiva dobijena simulacijom adaptivnog procesa modelom Xinghua-a za stepen nelinearnosti jednačine adaptacije $\alpha=1$ i $\alpha=2$ [24]

2.4.5 Stanford modeli

Wolff-ov zakon i Roux-ova teorija funkcionalne adaptacije sadrže i pretpostavku o samo-optimizujućoj prirodi procesa adaptacije koštanog tkiva, koje je sposobno da prilagođava sopstvenu strukturu i gustinu zahtjevima nosivosti. D.Fyhrie i D.Carter su 1986. godine predložili model kojim bi se opisala samo-optimizujuća priroda procesa adaptacije koštanog tkiva. Prema ovom modelu relativna gustina koštanog tkiva se lokalno adaptira na mehaničko opterećenje, pri čemu je ovaj proces uslovljen ograničavanjem veličine izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja koštanog tkiva maksimalno dozvoljenom veličinom [96]:

$$S(\rho_a, \sigma_{ij}, \theta) \leq S_{\max} \quad (2.43)$$

gdje ρ_a predstavlja relativnu gustinu koštanog tkiva, σ_{ij} tenzor napona, θ pokazatelj orijentacije koštanog tkiva, S pokazatelj naponsko-deformacionog stanja, za koji su Fyhrie i Carter usvojili Von Mises-ov napon, i S_{\max} maksimalno dozvoljena veličina pokazatelja naponsko-deformacionog stanja. Za strukturno-funkcionalnu jednačinu Fyhrie i Carter su usvojili oblik dat izrazom (2.34). Razvojem uslova (2.43) u Taylor-ov red i naknadnim transformacijama dobijenog izraza Fyhrie i Carter su dobili vezu relativne gustine koštanog tkiva i pokazatelja naponsko-deformacionog stanja u sljedećem obliku:

$$\rho_a = \left(\frac{\{\sigma_p\}^T \cdot [C_{FC}] \cdot \{\sigma_p\}}{2 \cdot \sigma_{Mises, \max}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.44)$$

gdje $\{\sigma_p\}$ predstavlja vektor glavnih napona, $[C_{FC}]$ matricu konstanti, $\sigma_{Mises, \max}$ maksimalno dozvoljenu veličinu Von Mises-ovog napona i γ eksponent strukturno-funkcionalne jednačine. Oblik matrice $[C_{FC}]$ zavisi od veličine koja predstavlja pokazatelj napona u predloženom modelu i u slučaju da je to Von Mises-ov napon sljedećeg je oblika:

$$[C_{FC}] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45).$$

Denis Carter je sam i sa saradnicima sa univerziteta u Stanfordu u SAD-u (Carter 1987. godine [93] i Carter sa saradnicima 1989. godine [85]) proširio ovaj rad u model adaptivnog procesa, danas poznat kao Stanford model. Prema Carter-u struktura koštanog tkiva ne može biti rezultat konstantnih uslova mehaničkog opterećenja. Stoga je on pretpostavio vezu relativne gustine koštanog tkiva i efektivnog napona $\bar{\sigma}$ sljedećeg oblika:

$$\rho_a = K_C \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_L} n_{c,i} \cdot \bar{\sigma}_i \right)^{\frac{1}{2M_C}} \quad (2.46)$$

gdje n_L predstavlja broj različitih stanja mehaničkog opterećenja, a K_C i M_C konstante koje se određuju eksperimentalnim putem. U prethodnom izrazu $n_{c,i}$ predstavlja broj ciklusa i -tog stanja mehaničkog opterećenja kojem odgovara efektivni napon definisan na sljedeći način:

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{2 \cdot E \cdot U_i} \quad (2.47)$$

gdje E predstavlja modul elastičnosti, a U_i gustinu deformacione energije koja odgovara i -tom stanju mehaničkog opterećenja. Carter je istovremeno sa Huiskes-om u modeliranje adaptivnog procesa uveo metodu konačnih elemenata.

G.Beaupre sa saradnicima je 1990. godine transformisao model Carter-a u vremenski zavisnu adaptivnu teoriju po kojoj se adaptivni proces aktivira kao posledica razlike izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja i veličine tog istog pokazatelja u stanju ravnoteže [82, 83]. Za pokazatelj naponsko-deformacionog stanja u modelu adaptivnog procesa Beaupre je

predložio pokazatelj dnevnog naprezanja ψ koji je, po uzoru na model *Carter*-a, definisao na sljedeći način:

$$\psi = \left(\sum_{\text{dan}} n_{c,i} \cdot \bar{\sigma}_i^\xi \right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (2.48)$$

gdje $n_{c,i}$ predstavlja dnevni broj ciklusa i -tog stanja mehaničkog opterećenja kojem odgovara efektivni napon $\bar{\sigma}_i$ definisan izrazom (2.47) i ξ konstantni eksponent koji se određuje eksperimentalnim putem. Mehanički signal koji upravlja adaptivnim procesom *Beaupre*-a je definisao na sljedeći način:

$$e = \left(\frac{\rho_{cb}}{\rho_a} \right)^2 \cdot \psi - \left(\frac{\rho_{cb}^*}{\rho_a^*} \right)^2 \cdot \psi^* \quad (2.49)$$

gdje ρ_{cb} predstavlja gustinu kortikalnog koštanog tkiva, a ρ_a^* i ψ^* redom relativnu gustinu koštanog tkiva i veličinu pokazatelja dnevnog naprezanja u stanju ravnoteže. Jednačina adaptacije zasnovana na mehaničkom signalu datom izrazom (2.49) koju je predložio *Beaupre* je definisana kao po dijelovima linearna funkcija:

$$\frac{dm}{dt} = \begin{cases} c \cdot (e + s) & \text{ako } e < -s \\ 0 & \text{ako } -s \leq e \leq s \\ c \cdot (e - s) & \text{ako } e > s \end{cases} \quad (2.50)$$

gdje m predstavlja masu koštanog tkiva, c konstantu koja se određuje eksperimentalnim putem, $2 \cdot s$ širinu *Carter*-ove "mrtve" zone, a t vrijeme simulacije. Parametri modela prema *Beaupre*-u iznose redom $c=0.02(\mu\text{m/dan}) \cdot (\text{MPa/dan})$ i $s=5 \text{ Pa}$ [82].

2.4.6 Eksperimentalna istraživanja procesa adaptacije koštanog tkiva

Proces adaptacija koštanog tkiva, izazvan ugradnjom vještačkog kuka, je najčešći predmet numeričkih simulacija baziranih na matematičkim modelima adaptivnog procesa [71, 80, 92]. Nažalost, evidentan je nedostatak kliničkih podataka kojim bi se rezultati navedenih numeričkih simulacija verificovali.

M. Lengsfeld sa saradnicima je sproveo istraživanje u toku kojeg su u periodu od dvije godine, zaključno sa 2002. godinom, prikupljeni podaci o promjeni gustine koštanog tkiva izazvanoj adaptivnim procesom nakon ugradnje vještačkog kuka [22]. Prema *Lengsfeld*-u ovo su prvi *in vivo* prikupljeni podaci o adaptaciji koštanog tkiva izazvanoj ugradnjom vještačkog kuka koji se mogu koristiti za upoređenje sa rezultatima dobijenim teorijskim simulacijama adaptivnog procesa. *Lengsfeld* je sproveo istraživanje na uzorku koji je činilo sedam pacijenata ženskog pola starosne dobi od 55 do 71 godine. Predoperativnim ispitivanjima, koja su prethodila ugradnji vještačkog kuka, je utvrđeno da pacijenti ne boluju od osteoporoze, tumora koštanog tkiva i sl. Model vještačkog kuka ugrađen pacijentima je *Marburg system* švajcarskog proizvođača *Sulzer Orthopedics Ltd*. Materijal od kojeg je vještački kuk izrađen je legura titanijuma. Tok adaptivnog procesa je praćen periodičnim snimanjem pacijenata na CT skeneru koje je vršeno odmah nakon operacije, nakon 3, 6, 12 i 24 mjeseca od operativnog zahvata. CT skenerom su snimani ekvidistantni poprečni presjeci kukova pacijenata na rastojanju od 2 mm. Rezultati dobijeni tokom ovog istraživanja pokazuju da je gustina koštanog tkiva butne kosti, na kojoj je izvršena hirurška intervencija, tokom postoperativnog perioda, kao što je i očekivano, smanjena u odnosu na stanje neposredno nakon same intervencija. U slučaju butne kosti na kojoj nije izvršena hirurška intervencija gustina koštanog tkiva tokom istog perioda je čak i povećana.

Prenos opterećenja na butnu kost prije i nakon ugradnje vještačkog kuka, kao i u postoperativnom periodu tokom kojeg se koštano tkivo adaptira na izmijenjene uslove

mehaničkog opterećenja predmet su istraživanja koje je 2003. godine sproveo *V.Waida* sa saradnicima [11]. Istraživanje je realizovano *in vitro* na uzorcima kod kojih su ugrađena dva različita modela vještačkog kuka i to *Lubinius SPII* njemačkog proizvođača *Waldemark Link GmbH* i *Muller-Curved* engleskog proizvođača *JRI Ltd*. Model vještačkog kuka *Lubinius SPII* je prema statističkim pokazateljima klinički uspješniji od modela *Muller-Curved*. Cilj ovog istraživanja je da se utvrdi da li adaptacija koštanog tkiva dovodi do:

- Kritičnih naponsko-deformacionih uslova za butnu kost;
- Razlike u raspodijeli napona i deformacija butne kosti prije i nakon ugradnje vještačkog kuka;
- Razlike u raspodijeli napona i deformacija butne kosti u slučaju ugradnje *Lubinius SPII* odnosno *Muller-Curved* modela vještačkog kuka.

Uzorak na kojem je izvršeno istraživanje se sastojao od dvanaest butnih kosti na koje je, prije ugradnje vještačkog kuka, postavljeno deset mjernih traka, rozete, koje mjere deformaciju u tri pravca. Potom je svaki od uzoraka opterećivan silom određenog inteziteta kako bi se utvrdilo naponsko-deformaciono stanje butne kosti prije ugradnje vještačkog kuka. Nakon ovog ispitivanja je izvršena ugradnja vještačkog kuka i to po šest primjerka modela *Lubinius SPII* i modela *Muller-Curved*. Prije ugradnje su na vještačke kukove postavljene rozete kako bi se tokom ispitivanja koje će uslijediti nakon ugradnje pratilo i naponsko-deformaciono stanje na kontaktnoj površini vještačkog kuka i kosti. Potom je svaki od uzoraka opterećivan silom istog inteziteta, kao i u slučaju opterećivanja butne kosti prije ugradnje vještačkog kuka, kako bi se utvrdilo naponsko-deformaciono stanje butne kosti nakon ugradnje vještačkog kuka.

Eksperimentalno modeliranje smanjenja koštane mase butne kosti nakon ugradnje vještačkog kuka, izazvano adaptivnim procesom, je bazirano na rezultatima istraživanja koje je 1996. godine sproveo *W.J.Maloney* sa saradnicima [67]. Ovo istraživanje je izvršeno *in vitro* na uzorku od 13 pacijenata kojima je uspješno izvršena ugradnja vještačkog kuka. Od ugradnje vještačkog kuka do njihove smrti je prosječno proteklo 7.9 godina. Rezultati istraživanja koje je sproveo *Maloney* su obezbijedili vrijednosti koje predstavljaju prosječne veličine izabranih parametara koje su posljedica adaptivnog procesa koji se dogodio nakon uspješne ugradnje vještačkog kuka. Parametri koje je *Maloney* ispitivao su prosječna procentualna promjena debljine spoljnog omotača od kortikalnog koštanog tkiva, površina poprečnog presjeka omotača od kortikalnog koštanog tkiva i gustina koštanog tkiva. Prema ovim podacima je *Waida* izvršio dodatnu pripremu svih uzoraka, na taj način što je mašinskom obradom skinuo sloj koštanog tkiva određene debljine sa uzoraka čim je simuliran uticaj adaptivnog procesa na koštano tkivo. Na ovaj način su dobijeni uzorci butne kosti sa ugrađenim vještačkim kukom koji odgovaraju postoperativnom stanju nakon 7.9 godina od ugradnje kuka. Potom je svaki od uzoraka opterećivan silom istog inteziteta, kao i u prethodnim slučajevima, kako bi se utvrdilo naponsko-deformaciono stanje butne kosti nakon ugradnje vještačkog kuka i adaptivnog procesa koji je uslijedio u postoperativnom periodu.

Rezultati ovog ispitivanja su pokazali da se nakon adaptivnog procesa na kontaktnoj površini vještačkog kuka i kosti mogu pojaviti kritični naponsko-deformacioni uslovi. Takođe je utvrđeno da se raspodijela napona i deformacija nakon adaptivnog procesa razlikuje od one prije izvršene ugradnje vještačkog kuka. Raspodijele napona i deformacija se nakon adaptivnog procesa, u slučaju ugradnje *Lubinius SPII* odnosno *Muller-Curved* modela vještačkog kuka, razlikuju. Promjena deformacija između susjednih rozeta kod modela *Lubinius SPII* je znatno postepenija nego u slučaju modela *Muller-Curved*. Na osnovu dobijenih rezultata se može zaključiti da adaptacija koštanog tkiva može biti pokazatelj za procjenu kliničke uspješnosti ugrađenog vještačkog kuka.

2.4.7 Cilj istraživanja u numeričkom modeliranju procesa adaptacije koštanog tkiva

Cilj ovog istraživanja je da se kroz modifikaciju *Nijmegen* modela razvije originalni model adaptivnog procesa. Numeričko modeliranje adaptivnog procesa bazirano na razvijenom modelu bi za rezultat imalo raspodjelu koštanog tkiva sličniju realno postojećoj raspodjeli u odnosu na raspodjele dobijene numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na postojećim *Nijmegen* modelim. U tom smislu su definisani sljedeći ciljevi:

- Istraživanje efekata varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces;
- Uključivanje ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva, utvrđene istraživanjem koje je 1999. godine sproveo *D. Ulrich* sa saradnicima [51], u model adaptivnog procesa.

Raspodjele koštanog tkiva dobijene numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa, baziranim na originalnom modelu autora ovog rada i modelima *Mullender*-a i *Xinghua*-e, će biti upoređene sa eksperimentalno određenom raspodjelom koštanog tkiva, kako bi se procijenila sličnost teorijski dobijenih raspodjela koštanog tkiva sa realno postojećom i izvršilo njihovo međusobno poređenje. Testiranje modela adaptivnog procesa će biti realizovano na 3D modelu slabinskog pršljena L_5 . Ovo će biti prvo testiranje nekog od modela adaptivnog procesa na 3D modelu kosti uopšte.

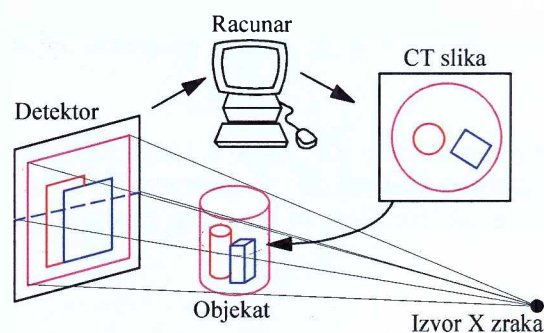
Eksperimentalno određivanje raspodjele koštanog tkiva ljudskih pršljena izvršiće se snimanjem slabinskog pršljena L_5 na *CT* skeneru i to na uzorku od deset osoba. Na osnovu dobijenih *CT* snimaka će kvantitativnom kompjuterskom tomografijom biti određena raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena. *CT* snimci pršljena će ujedno poslužiti i kao osnova za generisanje 3D geometrijskog modela pršljena za svih deset osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.

EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA

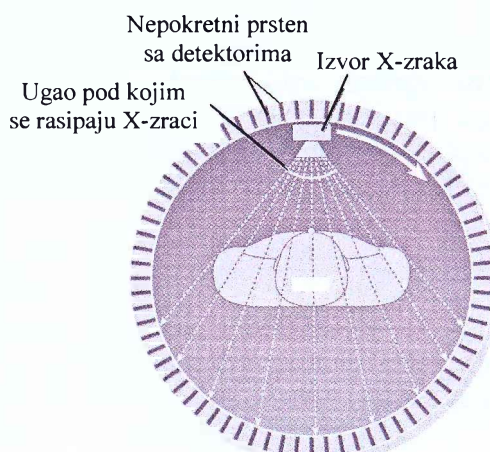
3.1 ISTRAŽIVANJA PRIMJENOM KOMPJUTERSKE TOMOGRAFIJE X-ZRACIMA

3.1.1 Fizički princip rada

Kompjuterska tomografija X-zracima (*Computed Tomography – CT*) je nedestruktivna metoda za istraživanja unutrašnjosti objekata koja je široko prihvaćena u medicini, industriji, geologiji [139]. Engleski fizičar *Geoffrey Hounsfield* je tokom 1972. godine razvio ovu metodu i ujedno rukovodio projektom razvoja prvog uređaja čiji je princip rada zasnovan na kompjuterskoj tomografiji X-zracima. Rezultat ovog projekta je prvi *CT* skener namijenjen medicinskim istraživanjima. Kompjuterskom tomografijom se generišu dvodimenzionalne *CT* slike presjeka objekta koji se dobija presjecanjem objekta po ravni slike, kao što je prikazano na slici 3.1. Kontrast slike je rezultat razlike u apsorpciji X-zraka pojedinih oblasti presjeka snimanog objekta. Skup *CT* slika se može dobiti sukcesivnim mjerenjem intenziteta radijalnog snopa ravanskih X-zraka usmjerenih na objekat odnosno ljudsko tijelo u potrebnom broju presjeka. Na ovaj način se dobija prostorni prikaz unutrašnjosti objekta odnosno ljudskog tijela. Na slici 3.2 je prikazan *CT* skener četvrte generacije.



Slika 3.1 Princip rada *CT* skenera sa x-zracima



Slika 3.2 *CT* skener četvrte generacije

Ljudsko tijelo se nalazi na stolu koji je unutar nepokretnog prstena na kojem su postavljeni detektori, a po kojem se kružno kreće izvor X-zraka. Slika presjeka se formira nakon obrtanja izvora X-zraka za 360°. Sto na kojem se nalazi ljudsko tijelo se zatim aksijalno pomjera i pravi se snimak novog presjeka.

Intenzitet apsorpcije X-zraka je opisan *Beer*-ovim zakonom koji povezuje intenzitet X-zraka nakon I i prije I_0 prolaska kroz objekat debljine d duž putanje zraka [120, 139]:

$$I = I_0 \cdot e^{\int_0^d -\mu(r) \cdot dr} \quad (3.1)$$

U izrazu (3.1) nepoznata vrijednost $\mu(r)$ predstavlja koeficijent apsorpcije u tački na pravcu X-zraka. Obrtanjem izvora X-zraka oko objekta postiže se da svaka tačka objekta bude ozračena više puta iz različitih pravaca. Postavljanjem jednačine (3.1) za proizvoljnu tačku objekta, za sve pravce duž kojih su kroz tačku emitovani X-zraci, i rješavanjem po $\mu(r)$ dobija se odgovarajuća vrijednost koeficijenta apsorpcije u toj tački. Koeficijent apsorpcije zavisi od energije X-zraka i materijala objekta kroz koji X-zraci prolaze:

$$\mu = \mu(E_{x-ray}, \rho_e, Z) \quad (3.2)$$

gdje E_{x-ray} predstavlja energiju X-zraka, ρ_e elektronsku gustinu i Z atomski broj [33]. Elektronska gustina se određuje prema izrazu:

$$\rho_e = N_A \cdot \rho \cdot \frac{n_e}{A} \quad (3.3)$$

gdje N_A predstavlja *Avogadro*-v broj, ρ gustinu, n_e broj elektrona u molekulu i A molekularnu težinu [34, 139]. Ako objekat čini više različitih materijala onda se atomski broj Z određuje prema izrazu:

$$Z = \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_{e,i}}{N} \cdot Z_i^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.4)$$

, gdje $N_{e,i}$ predstavlja broj elektrona i -tog materijala sa atomskim brojem Z_i , a N ukupan broj elektrona [33,137].

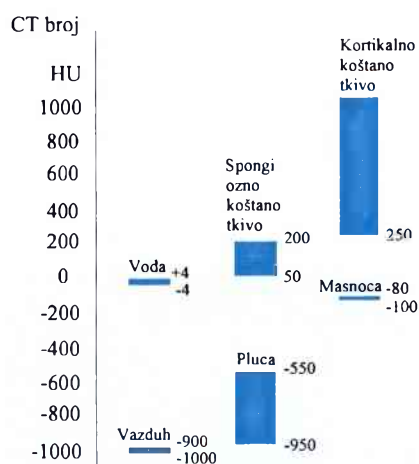
Osjetljivost *CT* skenera se postiže velikom energijom koju imaju X-zraci. Za eksperimentalno određivanje koeficijenta apsorpcije sa preciznošću od 0.1% potrebno je da X-zraci posjeduju energiju od najmanje 100 keV [122, 139]. Za veću preciznost potrebno je emitovati X- zrake veće energije.

3.1.2 Formiranje *CT* slike

Unošenjem vrijednosti koeficijenata apsorpcije, određenih kompjuterskom tomografijom za svaku tačku presjeka objekta tačnije elementarnu zapreminu tj. *voksel*, u matricu dobija se raspodjela gustine po presjeku objekta. Raspodjela gustine po presjeku se formira na način analogan formiranju rasterske slike tj. dodjeljivanjem odgovarajuće gustine, izražene u *Hounsfield*-ovim jedinicama, *vokselima* sa različitim vrijednostima koeficijenta apsorpcije. Većina mekih tkiva u ljudskom tijelu ima koeficijent apsorpcije približno jednak koeficijentu apsorpcije vode. Stoga se *Hounsfield*-ova jedinica odnosno *CT* broj određuje prema izrazu:

$$HU = 1000 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_{H_2O}} - 1 \right) \quad (3.5)$$

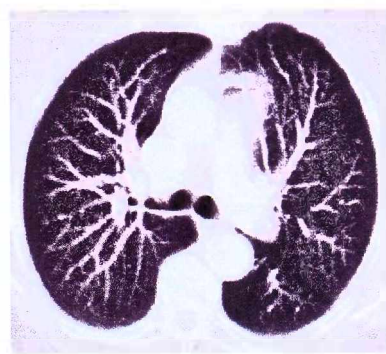
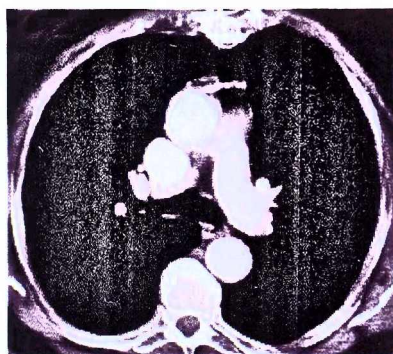
gde μ predstavlja prosječnu vrijednost koeficijenta apsorpcije materijala u *vokselu*, a μ_{H_2O} koeficijent apsorpcije vode [34, 139]. Na *Hounsfield*-ovoj skali postoje dvije konstantne vrijednosti, koje ne zavise od energije X-zraka, a to su $HU=-1000$ za vazduh i $HU=0$ za vodu. Na slici 3.3 je prikazan položaj različitih ljudskih tkiva na *Hounsfield*-ovoj skali.



Slika 3.3 Hounsfield-ova skala

Da bi se dobila slika raspodjela gustine po presjeku objekta svaki od *CT* brojeva se na slici predstavlja nekom od vrijednosti sa monohromatske skale. Za 8-bitne slike to su vrijednosti iz intervala $(0 \div 255)$. Svijetli regioni na slici predstavljaju oblasti sa velikim koeficijentom apsorpcije, odnosno, oblasti velike gustine, dok tamni djelovi slike predstavljaju oblasti sa malim koeficijentom apsorpcije, odnosno, oblasti male gustine. Opseg *CT* broja skenera za medicinske namjene je $(-1000 \div 3000)$. Kada bi se svi *CT* brojevi predstavili različitim nijansama sive boje, ljudsko oko ne bi bilo u stanju da ih razlikuje. Stoga se na slici prikazuje samo dio opsega *CT* broja. Klinički upotrebljiva slika

skeniranog ljudskog tijela se dobija podešavanjem parametara prozora koji određuje područje sa *Hounsfield*-ove skale koje će na slici biti predstavljeno vrijednostima sa monohromatske skale. Parametri prozora su nivo prozora (*Window Level*) *WL* i širina prozora (*Window Width*) *WW*. Parametar *WL* predstavlja središnju vrijednost intervala, čija je širina određena parametrom *WW*, kojim je obuhvaćeno područje sa *Hounsfield*-ove skale unutar kojeg se nalaze sva tkiva interesantna za proučavanje. Svi *CT* brojevi koji se nalaze unutar intervala određenog parametrima *WL* i *WW* se na slici prikazuju nijansama sive boje, dok se preostali *CT* brojevi prikazuju bijelom odnosno crnom bojom. Na slici 3.4 je prikazana *CT* slika istog presjeka sa različitim vrijednostima parametara prozora.

Slika 3.4 *CT* slika ljudskog tijela u istom presjeku sa parametrima prozora $WL=40$ HU i $WW=350$ HU, odnosno, $WL=-600$ HU i $WW=1500$

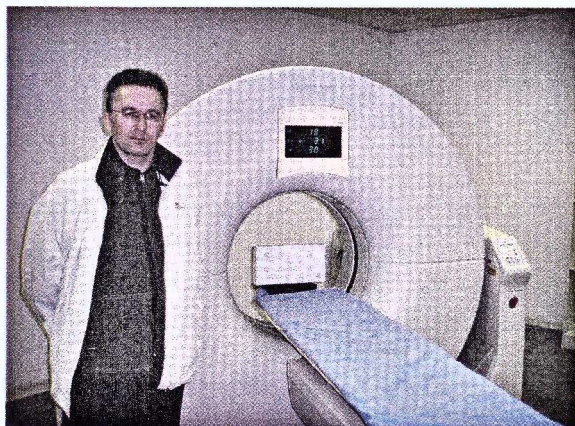
3.1.3 Mjerna oprema

Eksperimentalna istraživanja, neophodna za realizaciju ovog rada, su obavljena u Kliničkom centru Crne Gore u Podgorici. U tabeli 3.1 su date tehničke karakteristike mjerne opreme, dok su na slikama 3.5 i 3.6 prikazani *CT* skener i upravljačka konzola.

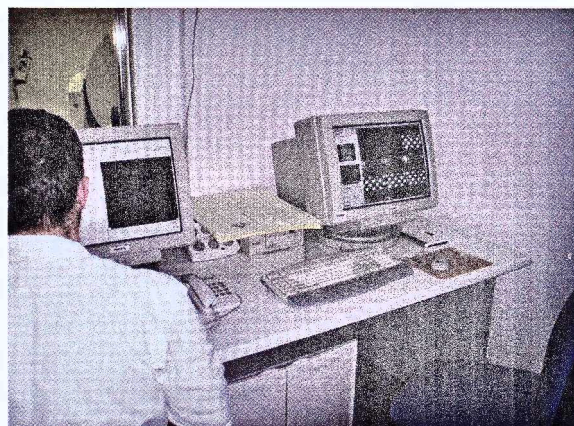
Tabela 3.1 Tehničke karakteristike *CT* skenera Aura 1.3

Tehničke karakteristike	
Proizvođač	Philips Medical Systems
Godina proizvodnje	2000
Tip izvora X-zraka	GS 2083
Ugao rasipanja X-zraka [$^{\circ}$]	52
Tip detektora X-zraka	ClearView Solid State
Broj detektora X-zraka	696

Snaga izvora napajanja [kW]	30
Debljina skeniranih presjeka [mm]	1, 2, 3, 5, 7, 10
Energija X-zraka [keV]	100, 120, 130, 140
mA podešavanje [mA]	od 15 do 50 na svakih 5 mA od 50 do 100 na svakih 10 mA 120, 140, 160, 170, 180
Rezolucija slike	512x512
Dimenzije skenera [mm]	2095x864x1862



Slika 3.5 CT skener Aura 1.3



Slika 3.6 Upravljačka konzola CT skenera

3.1.4 Određivanje raspodjele relativne gustine koštanog tkiva slabinskog pršljena L₅

Nedostatak dosadašnjih istraživanja u oblasti numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje se ogleda u odsustvu kvantitativnih pokazatelja razlike teorijski dobijene i realno postojeće raspodjele koštanog tkiva. Ocjene uspješnosti modeliranja adaptivnog procesa su kvalitativne i govore o manjoj ili većoj sličnosti teorijski dobijene sa realno postojećom raspodjelom koštanog tkiva, poput onih koje su date za teorijski dobijenu raspodjelu koštanog tkiva butne kosti u radu *Weinans-a* [77], odnosno pršljena u radu *Xinghua-e* [24]. Kvantitativni pokazatelji kojim se ocjenjuje uspješnost modeliranja adaptivnog procesa poput indikatora krutosti i krajnje mase koštanog tkiva u radu *Xinghua-e* su korišćeni za međusobno poređenje teorijski dobijenih raspodjela koštanog tkiva.

Procjena uspješnosti numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva pršljena na mehaničko opterećenje u ovom istraživanju će se vršiti upoređenjem teorijskih raspodjela koštanog tkiva dobijenih prema modelima *Mullender-a* i *Xinghua-e*, kao i originalnom modelu autora ovog rada sa realno postojećom raspodjelom koštanog tkiva tijela pršljena. Prema saznanju autora ovog rada, rezultati ove procjene će predstavljati prve do danas dobijene kvantitativne pokazatelje razlike teorijski dobijene i realno postojeće raspodjele koštanog tkiva. Dakle, eksperimentalno određivanje raspodjele gustine koštanog tkiva slabinskog pršljena L₅ predstavlja jedan od postavljenih ciljeva ovog istraživanja.

Metode za mjerenje gustine koštanog tkiva *in vivo* koje se danas koriste u kliničkoj praksi su: *QUS* metoda (*Quantitative Ultrasonometry*), *RA* metoda (*Radiographic Absorptiometry* ili *Photodensitometry*), *DEXA* metoda (*Dual Energy X-Ray Absorptiometry*) i *QCT* metoda (*Quantitative Computer Tomography*), tj. kvantitativna kompjuterska tomografija [16]. *QUS* i *RA* metoda omogućavaju prilično tačno mjerenje gustine koštanog tkiva perifernih djelova skeleta, dok je tačnost mjerenja gustine koštanog tkiva centralnih djelova skeleta, poput pršljena, nezadovoljavajuća. *DEXA* metoda omogućava vrlo tačno mjerenje gustine koštanog tkiva svih djelova skeleta. *QUS*, *RA* i *DEXA* metoda su međutim ograničene samo na određivanje površinske gustine koštanog tkiva i pri tome ne omogućavaju razdvajanje kortikalnog od

spongioznog koštanog tkiva. Kvantitativna kompjuterska tomografija omogućava vrlo tačno mjerenje gustine koštanog tkiva svih djelova skeleta uz visoku rezoluciju dobijenih snimaka koja omogućava prepoznavanje i najsitnijih dijelova snimljene kosti. Ovo je jedina metoda koja omogućava mjerenje zapreminske gustine koštanog tkiva uz mogućnost razdvajanja kortikalnog od spongioznog koštanog tkiva. Kada je riječ o određivanju gustine i mehaničkih karakteristika humanog tkiva *in vivo* kvantitativna kompjuterska tomografija je danas dominantno korišćena metoda [4,6,7,8,12,27,29,38,60,61,87]. Dakle, zbog prethodno navedenih ograničenja savremenih metoda za određivanje gustine koštanog tkiva, određivanje zapreminske raspodjele gustine koštanog tkiva pršljena koje predstavlja jedan od ciljeva ovog istraživanja je moguće realizovati jedino kvantitativnom kompjuterskom tomografijom.

Uzorak za eksperimentalno određivanje raspodjele relativne gustine koštanog tkiva predstavlja 10 odraslih osoba oba pola, čiji su osnovni podaci dati u tabeli 3.2. Starosna dob osoba, koje čine uzorak na kojem je izvršeno istraživanje, je od 34 do 54 godine, visina od 163 do 192 cm, a masa od 58 do 103 kg. Izbor osoba koje predstavljaju uzorak za eksperimentalno istraživanje je izvršen među redovnim pacijentima Kliničkog centra Crne Gore. Izabrane osobe nemaju, niti su prethodno imale oboljena kičmenog stuba usled kojih bi koštano tkivo pršljena bilo izloženo značajnim degenerativnim promjenama i u tom smislu odgovaraju prosječno zdravim osobama. Uzorak za eksperimentalno istraživanje predstavljaju osobe srednje starosne dobi kod kojih je faza rasta i konsolidacije koštanog tkiva okončana.

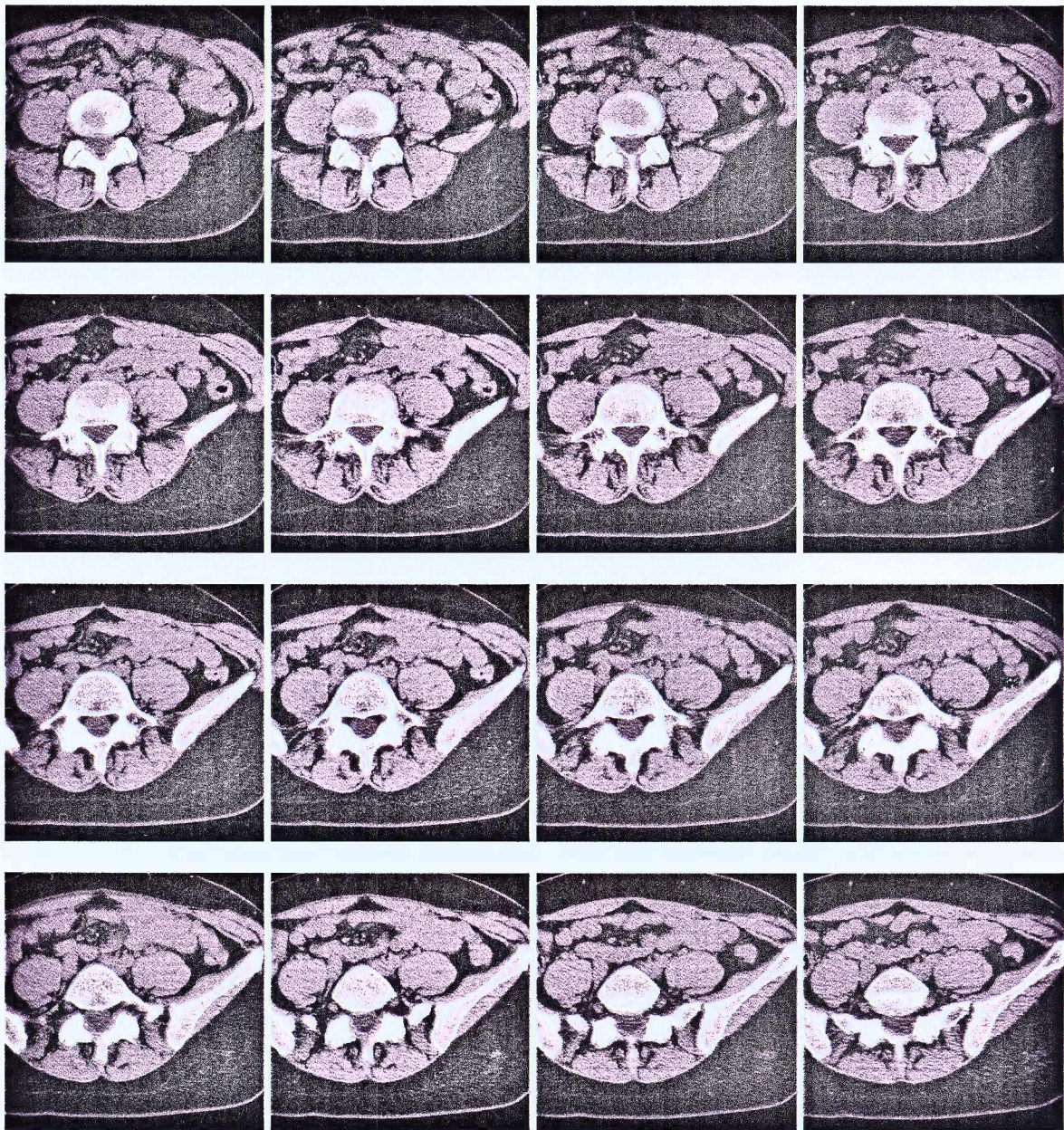
Tabela 3.2 Podaci o osobama koje predstavljaju uzorak za eksperimentalno istraživanje

Redni broj	Pol	Datum rođenja	Starosna dob [god]	Visina [cm]	Masa [kg]
1	M	10.11.1966.	38	183	88
2	Ž	01.11.1961.	43	170	72
3	Ž	24.11.1969.	35	163	58
4	M	21.11.1960.	44	178	81
5	Ž	03.05.1966.	38	173	70
6	M	16.01.1958.	46	192	103
7	M	22.02.1950.	54	185	96
8	M	05.11.1970.	34	181	78
9	M	04.08.1965.	39	189	100
10	M	04.01.1966.	38	187	91

Snimanje slabinskog pršljena L_5 osoba koje predstavljaju uzorak za istraživanje je izvršeno X-zracima energije 130 keV u ekvidistantnim poprečnim presjecima na rastojanju od 2 mm. Kao reprezent dobijenih rezultata je izdvojena grupa snimaka poprečnih presjeka slabinskog dijela kičmenog stuba u području pršljena L_5 jedne od osoba iz istraživačkog uzorka, koja je prikazana na slici 3.7.

Kontrast *CT* slike je rezultat razlike u apsorpciji X-zraka pojedinačnih *voksela* snimanog presjeka. Razlika u apsorpciji X-zraka je uzrokovana razlikama u fizičkoj i elektronskoj gustini, kao i atomskom broju materije kojom su pojedinačni *vokseli* snimanog presjeka ispunjeni, a kvantitativno je izražena koeficijentom apsorpcije, odnosno, odgovarajućim *CT* brojem. Slike koje se dobijaju snimanjem nekog objekta *CT* skenerom su u *DICOM* formatu (*Digital Imaging and Communications in Medicine*) [115]. *DICOM* je standardizovani format za prenos medicinskih slika i podataka koji su 1985. godine ustanovili *ACR* (*American College in Radiology*) i *NEMA* (*National Electrical Manufacturers Association*)¹, na čijem je sajtu moguće naći detaljne podatke o ovom formatu. *CT* slika u ovom formatu, između ostalog, sadrži i podatke o *CT* broju pojedinačnih *voksela* snimanog presjeka.

¹ <http://medical.nema.org/>



Slika 3.7 Serija CT snimaka slabinskog dijela kičmenog stuba u području pršljena L₅

Kvantitativnom kompjuterskom tomografijom se na osnovu snimaka sa CT skenera može rekonstruisati raspodjela gustine materije objekta. Da bi to bilo moguće potrebno je prethodno odrediti kalibracionu karakteristiku CT skenera koja predstavlja korelativnu vezu CT broja i gustine materije snimane CT skenerom. Na osnovu određene kalibracione karakteristike CT skenera je moguće vršiti konverziju CT broja pojedinačnih *voksela* snimanih presjeka objekta u gustinu materije i na taj način odrediti raspodjelu iste. Dakle, da bi se realizovao cilj ovog eksperimentalnog istraživanja potrebno je odrediti kalibracionu karakteristiku CT skenera na kojem je obavljeno snimanje pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.

Kalibraciona karakteristika CT skenera se određuje snimanjem uzoraka poznatog sastava X-zracima poznate energije. Fizička i elektronska gustina, kao i atomski broj materije uzoraka je isti ili sličan humanom tkivu koje uzorak substituiše. Određivanje korelativne veze CT broja sa relativnom gustinom spongioznog odnosno kortikalnog koštanog tkiva jedan je od rezultata istraživanja koje je sproveo *J.Y.Rho* sa saradnicima 1995. godine [69], *B.Couteau* sa saradnicima 1998. godine [60] i *W.R.Taylor* sa saradnicima 2002. godine [27].

Izuzimajući tanak spoljni omotač, tkivo pršljena čini spongiozno koštano tkivo, crvena i žuta koštana srž. Dakle, *CT* broj dobijen snimanjem spongioznog tkiva pršljena predstavlja rezultat apsorpcije X-zraka pri prolasku kroz *voksel* koji sadrži kombinaciju tri navedene materije. Određivanje relativne gustine košanog tkiva u *vokselima* snimanog presjeka pršljena uređajem koji automatski određuje kalibracionu karakteristiku i na osnovu iste relativnu gustinu košanog tkiva korišćeno je u radovima [6, 7, 8, 12, 87]. Uređaji koji su korišćeni u ovim radovima za određivanje kalibracione karakteristike koriste kao zamjenu za spongiozno tkivo uzorke vodenog rastvora di-kalijum hidrogen fosfata K_2HPO_4 u različitim odnosima. U tabeli 3.3 su date karakteristike spongioznog košanog tkiva i žute koštane srži od kojih zavisi koeficijent apsorbcije [34, 115].

Tabela 3.3 Karakteristike spongioznog košanog tkiva i žute koštane srži

	Elektronska gustina 10^{23} [elektrona/cm ³]	Gustina [g/cm ³]	Atomski broj
Spongiozno koštano tkivo	3.73	1.160	10.07
Žuta koštana srž	3.18	0.967	6.77

S obzirom da oko 85% sastava crvene koštane srži čini voda u literaturnim izvorima se usvaja da su njene karakteristike identične karakteristikama vode datim u tabeli 3.4. Kao zamjena za spongiozno koštano tkivo koristi se vodeni rastvor di-kalijum hidrogen fosfata u odnosu datom u tabeli 3.4, dok se kao zamjena za crvenu i žutu koštanu srž koristi voda. U tabeli 3.4 su date karakteristike substituenata spongioznog košanog tkiva, crvene i žute koštane srži.

Tabela 3.4 Karakteristike substituenata za spongiozno koštano tkivo, crvenu i žutu koštanu srž

	Elektronska gustina 10^{23} [elektrona/cm ³]	Gustina [g/cm ³]	Atomski broj
317 [mg/ml] vodeni rastvor K_2HPO_4	3.78	1.160	10.50
Voda H_2O	3.34	1.000	7.43
0.19 [ml/ml] vodeni rastvor C_2H_6O	3.24	0.967	7.30

Tačnost kvantitativne kompjuterske tomografije, kao metode za određivanje gustine koštane materije *in vivo*, je uslovljena razlikama karakteristika substituenata, koji se koriste za određivanje kalibracione karakteristike *CT* skenera, i humanog tkiva koje zamjenjuju. Kada se kao substituent za spongiozno tkivo koristi vodeni rastvor di-kalijum hidrogen fosfata greška metode je (5÷14)%, a raste sa povećanjem količine žute koštane srži [16]. Ovom metodom se za rezultat dobija nešto manji sadržaj košanog tkiva u kosti od realno postojećeg. U nizu radova se, kao mogućnost za povećanje tačnosti metode, predlaže korišćenje vodenog rastvora etanola C_2H_6O kao zamjene za žutu koštanu srž [15, 34]. U tabeli 3.4 su takođe date i karakteristike vodenog rastvora etanola u odnosu koji predstavlja zamjenu za žutu koštanu srž.

U cilju određivanja korelativne veze *CT* broja i relativne gustine spongioznog košanog tkiva pripremljeni su kalibracioni uzorci koji po karakteristikama odgovaraju spongioznom tkivu sa različitim učešćem košanog tkiva i koštane srži. Pripremljene su dvije grupe uzoraka, pri čemu je kod prve grupe uzoraka i crvena i žuta koštana srž substituisana vodom, dok je u drugoj crvena koštana srž substituisana vodom, a žuta vodenim rastvorom etanola. Za odnos substituenata crvene i žute koštane srži u drugoj grupi uzoraka je pri tome usvojen odnos 3:1, koji približno odgovara odnosu ova dva tkiva u pršljenu odrasle osobe. Uzorci su pripremljeni



Slika 3.8 Priprema uzoraka

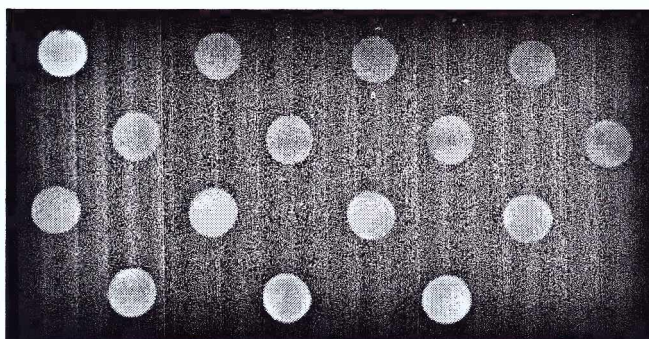
u laboratoriji Metalurško-Tehnološkog fakulteta u Podgorici, što je prikazano na slici 3.8, i smješteni u polietilenske boce od 10 ml. U tabeli 3.5 su data zapreminska učešća substituenata pojedinih tkiva u pripremljenim uzorcima.

Tabela 3.5 Zapreminski sastav uzoraka koji substituišu spongiozno tkivo pršljena

Prva grupa uzoraka			Druga grupa uzoraka			
Kalibracioni uzorak	K [%]	C+Z [%]	Kalibracioni uzorak	K [%]	C [%]	Z [%]
1	0	100	9	10	67.5	22.5
2	10	90	10	20	60	20
3	20	80	11	40	45	15
4	40	60	12	50	37.5	12.5
5	50	50	13	60	30	10
6	60	40	14	80	15	5
7	80	20	15	100	0	0
8	100	0				

Napomena: K-spongiozno koštano tkivo, C-crvena koštana srž i Z-žuta koštana srž

Pripremljeni uzorci su umetnuti u nosač od stiropora, prikazan na slici 3.5, koji je u toku snimanja na CT skeneru bio smješten u cilindričnu polietilensku posudu ispunjenu vodom [16, 115, 120]. Snimanje kalibracionih uzoraka je izvršeno pod uslovima pod kojim je obavljeno i snimanje slabinskog pršljena L₅. Obradom CT slike uzoraka, prikazane na slici 3.9, određena je prosječna veličina CT broja za voksele koji čine presjeke pojedinačnih uzoraka, a dobijeni rezultati su dati u tabeli 3.6.



Slika 3.9 CT slika grupe uzoraka

Tabela 3.6 Rezultati ispitivanja uzoraka koji substituišu spongiozno tkivo pršljena

Prva grupa uzoraka			Druga grupa uzoraka		
Kalibracioni uzorak	CT broj [HU]	ρ_a [g/cm ³]	Kalibracioni uzorak	CT broj [HU]	ρ_a [g/cm ³]
1	27	0	9	74	0.116
2	76	0.116	10	121	0.232
3	122	0.232	11	204	0.464
4	215	0.464	12	247	0.580
5	260	0.580	13	283	0.696
6	308	0.696	14	386	0.928
7	378	0.928	15	479	1.160
8	479	1.160			

U istraživanjima koja su sproveli *Rho* sa saradnicima [69], *Couteau* sa saradnicima [60] i *Taylor* sa saradnicima [27] je pokazano postojanje jake korelativne veze CT broja i relativne gustine koštanog tkiva u linearnom obliku:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x \quad (3.6).$$

gdje x predstavlja nezavisno promjenljivu veličinu, tj. CT broj [HU], a y zavisno promjenljivu veličinu, tj. relativnu gustinu spongioznog koštanog tkiva ρ_a [g/cm³]. Stoga je i u ovom istraživanju korelativna veza CT broja i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva potražena

upravo u linearnom obliku. Koeficijenti linearne regresione jednačine se nalaze iz sistema jednačina dobijenog metodom najmanjih kvadrata [152]:

$$n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.7)$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

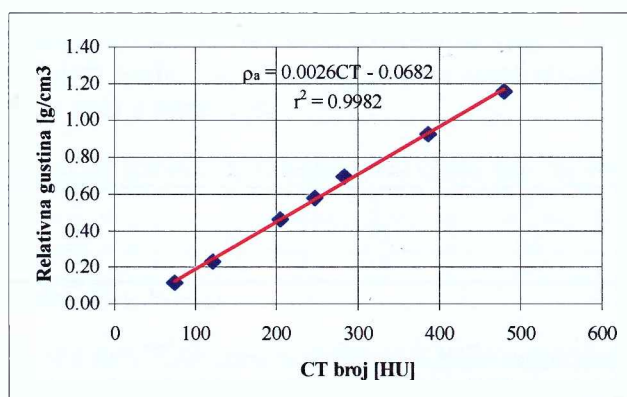
gdje n predstavlja broj kalibracionih uzoraka, za prvu grupu uzoraka je to osam, a za drugu sedam. Uvrštavanjem podataka iz tabele 3.6 u jednačine (3.7) su određeni koeficijenti regresione jednačine. Dobijena regresiona jednačina, koja predstavlja kalibracionu karakteristiku CT skenera za određivanje raspodjele relativne gustine spongioznog koštanog tkiva, je prema prvoj grupi uzoraka sljedećeg oblika:

$$\rho_a = -0.0829 + 0.0026 \cdot CT \quad (3.8)$$

dok je prema drugoj grupi uzoraka oblik regresione jednačine:

$$\rho_a = -0.0682 + 0.0026 \cdot CT \quad (3.9).$$

Prema radovima [15, 34] tačnost kvantitativne kompjuterske tomografije se povećava ukoliko se umjesto kalibracione karakteristike date jednačinom (3.8) koristi kalibraciona karakteristika data jednačinom (3.9) i dobija sadržaj koštanog tkiva u kosti koji je približniji realno postojećem. Stoga će raspodjela relativne gustine spongioznog koštanog tkiva pršljena u ovom istraživanju biti određivana prema kalibracionoj karakteristici izraženoj jednačinom (3.9). Regresiona jednačina (3.9) i disperzija eksperimentalno određenih podataka su prikazani na slici 3.10.



Slika 3.10 Regresiona jednačina kojom je izražena korelativna veza CT broja i relativne gustine spongioznog koštanog tkiva

Kao pokazatelj mjere jačine korelativne veze uobičajno se koristi koeficijent korelacije koji se određuje prema izrazu [152]:

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{s_y^2}} \quad (3.10)$$

gdje S_y predstavlja rezidijumsku disperziju koja pokazuje mjeru rasturanja eksperimentalno određenih podataka y_i oko regresione prave, tj. u odnosu na odgovarajuće vrijednosti određene regresionom jednačinom $y_{r,i}$ i određuje se prema izrazu:

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y_{r,i})^2 \quad (3.11)$$

a s_y ukupnu disperziju koja pokazuje mjeru rasturanja eksperimentalno određenih podataka y_i oko aritmetičke sredine i određuje se prema izrazu:

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (3.12)$$

gdje \bar{y} predstavlja aritmetičku sredinu koja se određuje prema izrazu:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.13).$$

Uvrštavanjem podataka iz tabele 3.6 u prethodne izraze određena je veličina koeficijenta korelacije veze izražene regresionom jednačinom (3.9) koji iznosi $r=0.9991$.

Spoljni omotač pršljena čini kortikalno koštano tkivo. CT broj dobijen snimanjem kortikalnog tkiva pršljena predstavlja rezultat apsorpcije X-zraka pri prolasku kroz *voksel* koji sadrži kortikalno koštano tkivo sa određenim sadržajem vode. U slučaju kortikalnog koštanog tkiva, za određivanje kalibracione karakteristike CT skenera takođe se koristi vodeni rastvor di-kalijum hidrogen fosfata K_2HPO_4 u različitim odnosima. Kao zamjena za kortikalno koštano tkivo, gustine standardizovane od strane proizvođača kalibracionih uređaja [115], koristi se vodeni rastvor di-kalijum hidrogen fosfata u odnosu datom u tabeli 3.7. U tabeli 3.7 su date karakteristike kortikalnog koštanog tkiva od kojih zavisi koeficijent apsorpcije [34, 115], kao i odgovarajuće karakteristike substituenta.

Tabela 3.7 Karakteristike kortikalnog koštanog tkiva i odgovarajućeg substituenta

	Elektronska gustina 10^{23} [elektrona/cm ³]	Gustina [g/cm ³]	Atomski broj
Kortikalno koštano tkivo	5.05	1.609	13.47
1934 [mg/ml] vodeni rastvor K_2HPO_4	4.98	1.609	13.68

U cilju određivanja korelativne veze CT broja i relativne gustine kortikalnog koštanog tkiva pripremljeni su kalibracioni uzorci koji po karakteristikama odgovaraju kortikalnom koštanom tkivu sa različitim sadržajem vode. Zapreminsko učešće kortikalnog koštanog tkiva i vode u pripremljenim uzorcima je dato u tabeli 3.8.

Tabela 3.8 Zapreminski sastav uzoraka koji substituišu kortikalno tkivo pršljena

Kalibracioni uzorak broj	1	2	3	4	5	6
K [%]	50	60	70	80	90	95
V [%]	50	40	30	20	10	5

Napomena: K-kortikalno koštano tkivo, V-voda

Snimanje ove grupe uzoraka na CT skeneru je izvršeno u istim uslovima pod kojim su snimljeni i uzorci koji substituišu spongiozno tkivo. Obradom CT slike uzoraka je određena prosječna veličina CT broja za voksele koji čine presjek pojedinačnih uzoraka, a dobijeni rezultati su dati u tabeli 3.9.

Tabela 3.9 Rezultati ispitivanja uzoraka koji substituišu kortikalno tkivo pršljena

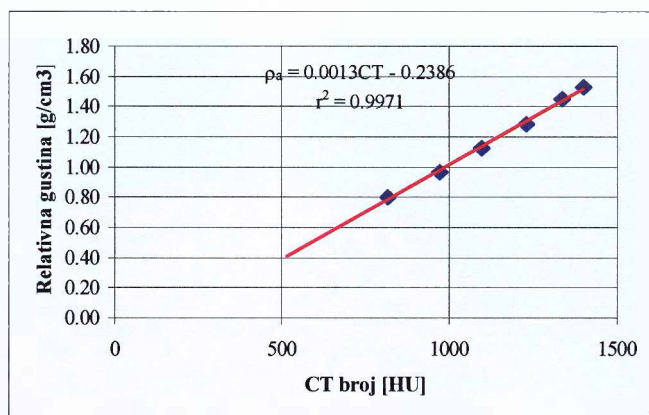
Uzorak broj	1	2	3	4	5	6
CT broj [HU]	816	970	1095	1228	1336	1399
ρ_a [g/cm ³]	0.805	0.965	1.126	1.287	1.448	1.529

Korelativna veza CT broja i relativne gustine kortikalnog koštanog tkiva, datih u prethodnoj tabeli, je takođe potražena u linearnom obliku. Uvrštavanjem podataka iz tabele 3.9 u jednačine (3.7) su određeni koeficijenti regresione jednačine:

$$\rho_a = -0.2386 + 0.0013 \cdot CT \quad (3.14)$$

Regresiona jednačina (3.14) i disperzija eksperimentalno određenih podataka su prikazani na slici 3.11.

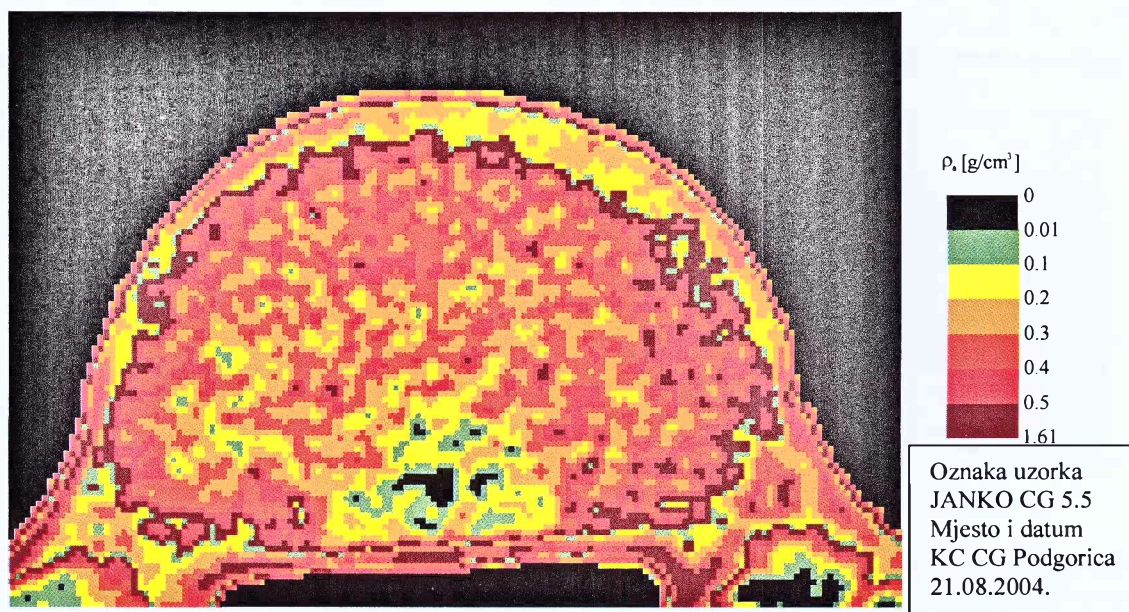
Uvrštavanjem podataka iz tabele 3.9 u izraze (3.10-3.13) određena je veličina koeficijenta korelacije veze izražene regresionom jednačinom (3.14) koji iznosi $r=0.9985$.



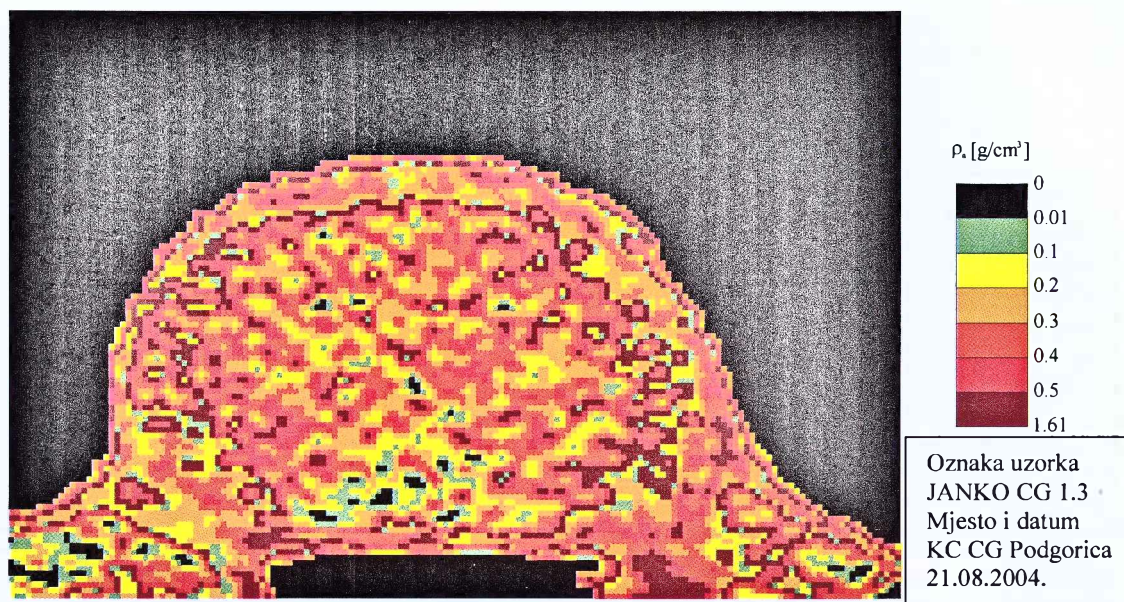
Slika 3.11 Regresiona jednačina kojom je izražena korelativna veza *CT* broja i relativne gustine kortikalnog koštanog tkiva

Dobijene veličine koeficijenta korelacije govore o postojanju vrlo jake korelativne veze *CT* broja i relativne gustine spongioznog, odnosno, kortikalnog koštanog tkiva koja skoro da prelazi u funkcionalnu vezu ($r=1$). Ovakve veličine koeficijenta korelacije potvrđuju kvalitet izabranog oblika korelativne veze *CT* broja i relativne gustine koštanog tkiva koja predstavlja kalibracionu karakteristiku *CT* skenera. Dakle, određene kalibracione karakteristike *CT* skenera omogućavaju konverziju *CT* broja u relativnu gustinu koštanog tkiva sa visokim stepenom tačnosti. Stoga će ove kalibracione karakteristike biti korišćene tokom određivanja raspodjele relativne gustine koštanog tkiva slabinskog pršljena L_5 .

Obradom *CT* slika slabinskog pršljena L_5 , osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, kojom je izvršena konverzija *CT* broja pojedinačnih *voksela* snimanih presjeka pršljena u relativnu gustinu koštanog tkiva prema kalibracionim karakteristikama (3.9 i 3.14) izvršena je rekonstrukcija raspodjele relativne gustine koštanog tkiva svih snimljenih presjeka pršljena. Kao reprezentivi dobijenih rezultata na slikama 3.12 i 3.13 su prikazane raspodjele relativne gustine koštanog tkiva jednog od poprečnih presjeka tijela pršljena osoba 5 i 1 iz tabele 3.2.



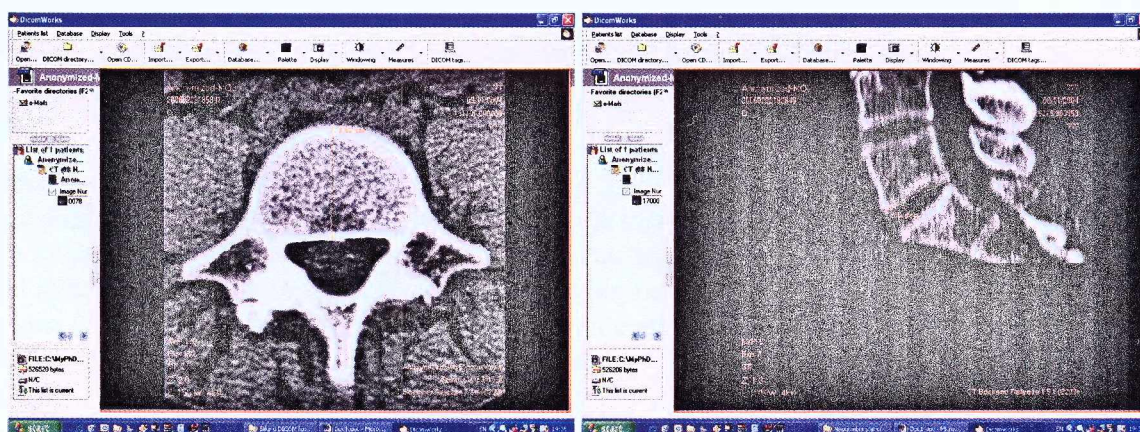
Slika 3.12 Distribucija relativne gustine koštanog tkiva u poprečnom presjeku tijela pršljena L_5



Slika 3.13 Distribucija relativne gustine koštanog tkiva u poprečnom presjeku tijela pršljena L_5

3.1.5 Određivanje dimenzija tijela slabinskog pršljena L_5

Snimanjem objekata *CT* skenerom istovremeno se vrši i mjerenje njegovih geometrijskih dimenzija, koje predstavljaju sastavni dio *CT* slika u *DICOM* formatu. Tačnost mjerenja izvršenog kompjuterskom tomografijom zavisi od veličine geometrijskih dimenzija snimanog objekta i kreće se u rasponu $(0.1 \div 0.2)\%$ mjerene dimenzije [122]. U prethodnom poglavlju ovog rada je predstavljeno mjerenje geometrijskih dimenzija pršljena kompjuterskom tomografijom koje je sproveo *S.H.Zhou* sa saradnicima [46]. Dakle, *CT* slike slabinskog pršljena L_5 na osnovu kojih je izvršena rekonstrukcija raspodjele relativne gustine koštanog tkiva u sebi sadrže i podatke o geometrijskim dimenzijama snimanog pršljena. Rezolucija *CT* slika pršljena dobijenih snimanjem na *CT* skeneru, tokom ovog istraživanja, iznosi 512×512 piksela uz rezoluciju piksela od 0.5 mm/piksel .



Slika 3.14 Alatk za očitavanje dužinskih i ugaonih veličina programa *DicomWorks 1.3.5*

Jedan od ciljeva ovog istraživanja je i razvoj metoda za parametarsko modeliranje geometrije slabinskog pršljena L_5 . S obzirom na tu činjenicu *CT* slike pršljena su iskorišćene kako bi se sa njih očitale veličine dimenzija pršljena koje predstavljaju parametre za modeliranje njegove geometrije. Način izbora parametara za modeliranje geometrije pršljena će biti detaljno obrazložen u narednom poglavlju ovog rada. Za očitavanje geometrijskih dimenzija pršljena je

korišćen program *DicomWorks 1.3.5* autora *Philippe Puech*-a i *Loic Boussel*-a koji je dostupan svim zainteresovanim na sajtu autora². Na slici 3.14 su prikazane alatke ovog programa za očitavanje dužinskih i ugaonih veličina, dok su u tabeli 3.10 date dimenzije tijela pršljena koje predstavljaju parametre za modeliranje geometrije istog.

Tabela 3.10 Dimenzije tijela pršljena osoba iz tabele 3.2

Redni broj	EPWu [mm]	EPWl [mm]	EPDu [mm]	EPDI [mm]	VBHa [mm]	VBHp [mm]	r [mm]	Cth [mm]	EPItu [°]	EPItl [°]
1	52.1	53.5	38.2	40.8	30.6	28.1	1.0	2.1	6.0	9.1
2	47.1	52.4	32.3	33.4	28.7	28.1	0.9	1.8	2.2	3.2
3	50.0	51.6	35.1	35.6	27.9	25.8	1.0	2.0	4.0	7.3
4	49.6	51.3	33.4	34.1	30.2	28.3	0.9	2.1	4.0	7.1
5	48.4	51.6	35.6	37.7	32.1	29.9	0.9	1.9	5.8	8.8
6	58.7	59.2	40.6	40.0	31.3	29.4	1.2	2.3	3.9	6.7
7	54.7	57.8	39.2	38.6	31.3	29.5	1.1	2.2	5.0	7.9
8	53.1	54.7	33.3	37.9	30.7	27.9	1.0	2.2	4.7	8.3
9	56.3	59.5	40.5	41.4	31.0	28.3	1.2	2.3	2.7	6.4
10	51.6	53.0	38.5	42.0	33.7	31.1	0.9	2.0	3.1	6.4

Napomena: Radijus prelaznog zaobljenja čeonih i bočnih površina tijela pršljena r je mjereno u srednjem sagitalnom presjeku tijela pršljena. Debljina spoljnog omotača tijela pršljena od kortikalnog koštanog tkiva Cth predstavlja prosječnu vrijednost debljine omotača dobijenu mjerenjem u deset izabranih tačaka jednog od poprečnih presjeka tijela pršljena.

Procjena uspješnosti numeričkog modeliranja adaptivnog procesa će, kao što je već istaknuto, biti izvršena upoređenjem teorijski dobijene sa realno postojećom raspodjelom koštanog tkiva tijela pršljena. S obzirom na ovu činjenicu, odnos gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* će biti određen upravo iz uslova jednakosti mase koštanog tkiva tijela pršljena određene teorijski i na osnovu rezultata eksperimentalnih istraživanja izvršenih kvantitativnom kompjuterskom tomografijom. Stoga je na osnovu podataka o širini snimanih presjeka pršljena i rezoluciji piksela dobijenih CT slika, kao i dobijenih raspodjela relativne gustine koštanog tkiva snimljenih presjeka određena masa koštanog tkiva tijela pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, a dobijeni podaci su dati u tabeli 3.11.

Tabela 3.11 Masa koštanog tkiva tijela pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak

Redni broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m [g]	18.3	13.8	16.0	14.4	17.0	21.7	18.2	18.5	21.5	20.2

3.2 ISTRAŽIVANJA VIBRACIJA MOSNE DIZALICE

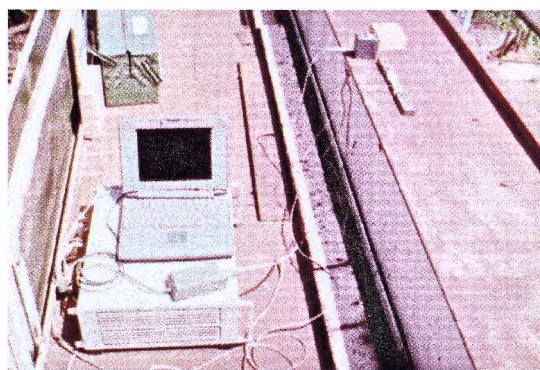
Svakodnevna izloženost dejstvu radnih vibracija rukovaoca transportnih uređaja je jedan od značajnih uzročnika pojave profesionalnih oboljenja kičmenog stuba istih [88, 89]. S obzirom na ovu činjenicu identifikovana je mosna dizalica, elastične konstrukcije koja u toku rada vibrira vrlo intenzivno, kako bi se na realnoj mašini odredile radne vibracije. Mosna dizalica, prikazana na slici 3.15, koja je izabrana kao objekat na kojem će biti izvršeno eksperimentalno istraživanje vibracija nalazi se u MIN-ovoj fabrici u Nišu. Raspon glavnog nosača mosne dizalice iznosi 30 m, a nosivost 5 t.

Mjerna oprema za mjerenje vibracija mosne dizalice, prikazana na slici 3.17, se sastoji od: senzora ubrzanja HBM B12 klase tačnosti 05, mjernog pojačivača HBM 9012 C i laptop računara sa programom za akviziciju podataka dobijenih tokom istraživanja.

² <http://dicom.online.fr/>

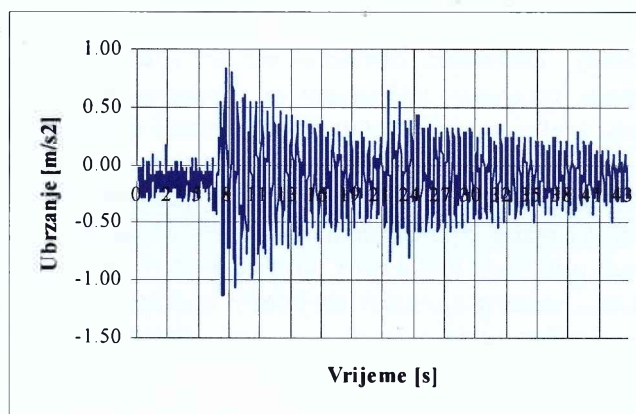


Slika 3.15 Mosna dizalica na kojoj je izvršeno istraživanje vibracija

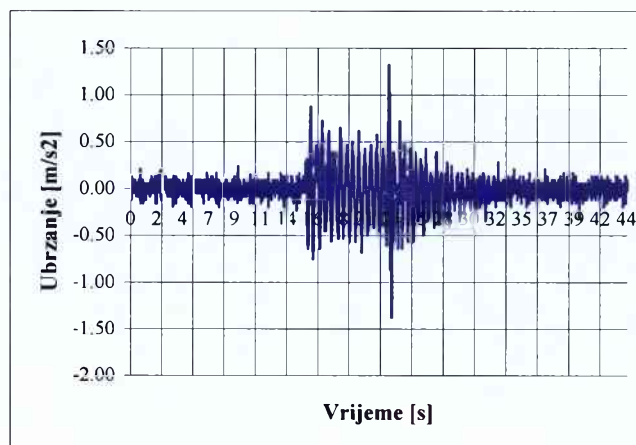


Slika 3.16 Mjerna oprema korišćena za istraživanje vibracija mosne dizalice

Istraživanje vertikalnih vibracija mosne dizalice je izvršeno u različitim radnim režimima dizalice, a dio rezultata ovog istraživanja je prikazan na slikama 3.17 i 3.18. Obradom rezultata ovog istraživanja, prema metodologiji propisanoj standardom ISO 2631-1 [133], M.Jovanović i J.Jovanović su utvrdili da je dužina maksimalno dozvoljene dnevne izloženosti rukovaoca dizalice dejstvu radnih vibracija kraća od trajanja radnog vremena [19]. Dakle, svakodnevna izloženost dejstvu radnih vibracije ove mosne dizalice, prema standardu ISO 2631-1, predstavlja potencijalni uzročnik pojave oboljenja kičmenog stuba rukovaoca dizalice. Stoga će razvijeni biomehanički *FEM* model ljudskog pršljena biti iskorišćen kako bi se utvrdilo naponsko-deformaciono stanje slabinskog pršljena L_5 rukovaoca mosne dizalice pod dejstvom maksimalnog identifikovanog opterećenja izazvanog radnim vibracijama dizalice.



Slika 3.17 Vertikalne vibracije registrovane pri podizanju tereta od 4 t



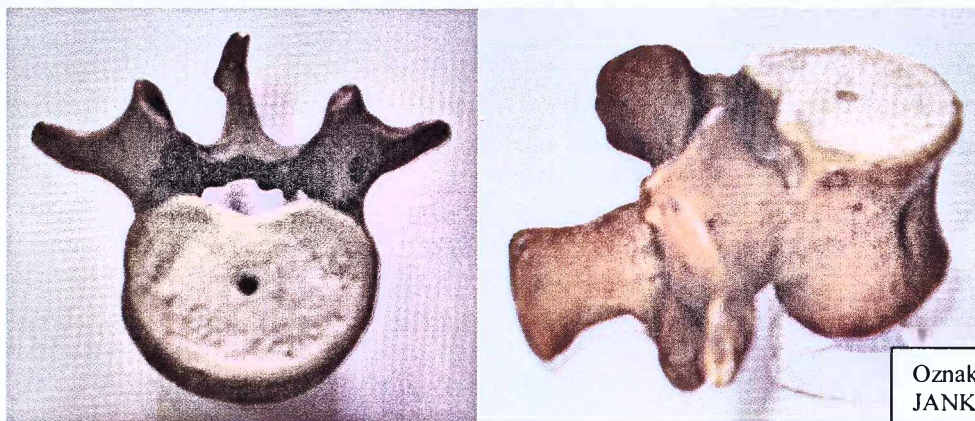
Slika 3.18 Vertikalne vibracije registrovane pri spuštanju tereta od 4 t na tlo

GEOMETRIJSKO MODELIRANJE LJUDSKOG PRŠLJENA

4.1 UVOD

Generisanje trodimenzionalnog - 3D geometrijskog modela ljudskog pršljena predstavlja prvi korak u razvoju biomehaničkog *FEM* modela pršljena. 3D geometrijski model pršljena predstavlja osnovu za generisanje mreže konačnih elemenata, kojom se vrši diskretizacija pršljena i stvaraju polazne pretpostavke za numeričku simulaciju procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje bazirane na matematičkom modelu adaptivnog procesa. Prema matematičkim modelima, adaptivnim procesom upravlja neki od pokazatelja naponsko-deformacionog stanja pršljena, koji se za poznate uslove mehaničkog opterećenja određuje metodom konačnih elemenata. Numeričkom simulacijom adaptivnog procesa se od početne ravnomjerne dolazi do krajnje neravnomjerne raspodjele koštanog tkiva pršljena nalik realno postojećoj. Na ovaj način se određuje raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena, a na osnovu nje i mehaničke karakteristike koštanog tkiva svakog pojedinačnog konačnog elementa *FEM* modela pršljena.

Jedan tipičan slabinski pršljen, prikazan na slici 4.1, čine tijelo pršljena sa čije se zadnje strane pružaju nastavci koji oblik pršljena čine vrlo složenim.

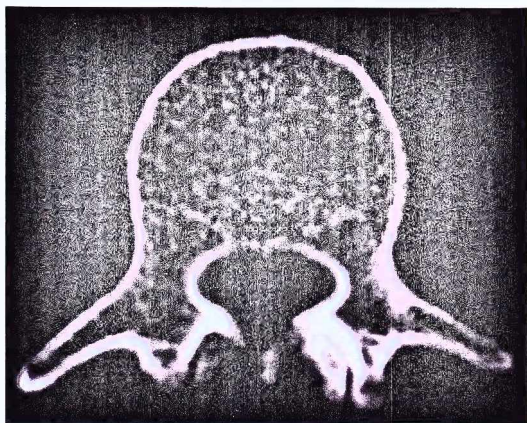


Slika 4.1 Slabinski pršljen

Geometrijsko modeliranje pršljena se uobičajno vrši rekonstrukcijom geometrije pršljena prema podacima sa digitalizovanih slika dobijenih snimanjem pršljena *in vivo* kompjuterskom tomografijom ili magnetnom rezonancom. Podaci za rekonstrukciju geometrije pršljena se osim sa digitalizovanih slika mogu dobiti i *in vitro* očitavanjem koordinata tačaka sa površine pršljena pomoću preciznih digitajzera.

4.2 PREGLED I ANALIZA METODA ZA GEOMETRIJSKO MODELIRANJE DIJELOVA LJUDSKOG SKELETA

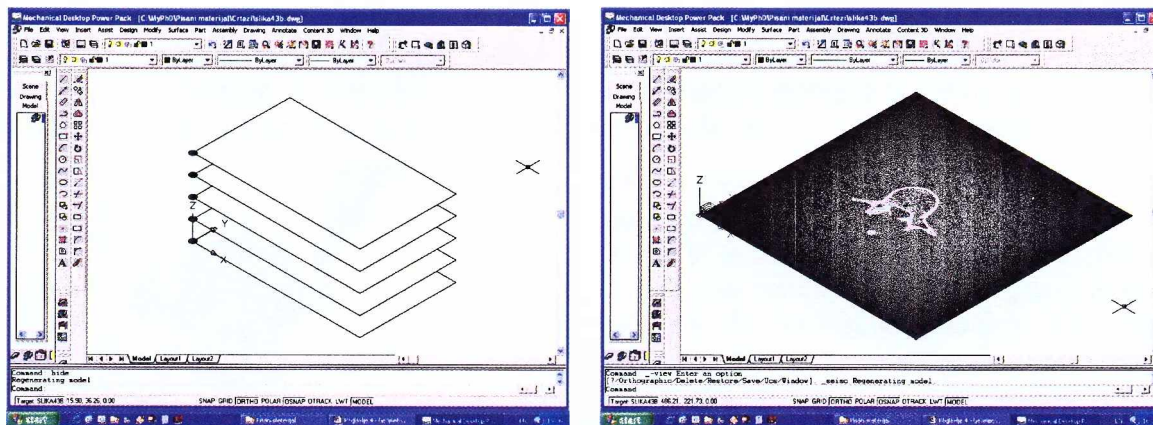
Geometrijsko modeliranje djelova ljudskog skeleta se uobičajno vrši rekonstrukcijom geometrije prema podacima sa digitalizovanih slika dobijenih kompjuterskom tomografijom ili magnetnom rezonancom. Ovaj metod se koristi za geometrijsko modeliranje pršljena u većini radova koji istražuju naponsko-deformaciono stanje dijelova kičmenog stuba odnosno kičmenog stuba u cjelini metodom konačnih elemenata [6,7,12,35]. Kratak prikaz metodologije geometrijskog modeliranja prema podacima sa digitalizovanih slika je zasnovan na rezultatima istraživanja koje je 2001. godine sproveo *C.S.Chen* sa saradnicima [35] i rezultatima istraživanja koje je 2002. godine sproveo *Q.Sun* sa saradnicima [32]. Podaci o geometriji pršljena se dobijaju snimanjem ljudskog kičmenog stuba *CT* skenerom u ekvidistantnim poprečnim presjecima. U istraživanju koje je sproveo *Chen*, kičmeni stub je sniman u ekvidistantnim poprečnim presjecima na rastojanju od 3 mm. Na ovaj način se dobija niz *CT* slika poprečnih presjeka pršljena na osnovu kojih je moguće rekonstruisati geometriju pršljena. U cilju rekonstruisanja geometrije pršljena sa *CT* slika je potrebno izdvojiti granične konture pršljena u snimanim presjecima. Da bi graničnu konturu poprečnog presjeka pršljena bilo moguće precizno izdvojiti sa *CT* slike prethodno se vrši podešavanje parametara prozora *CT* slike, na način detaljno objašnjen u prethodnom poglavlju ovog rada, čim se omogućava jasna identifikacija granične konture poprečnog presjeka pršljena. Na slici 4.2 je prikazana *CT* slika jednog od poprečnih presjeka pršljena dobijena tokom eksperimentalnog istraživanja autora ovog rada sa parametrima prozora $WL=350$ i $WW=150$, koji omogućavaju jasnu identifikaciju granične konture poprečnog presjeka pršljena.



Slika 4.2 *CT* slika slabinskog pršljena

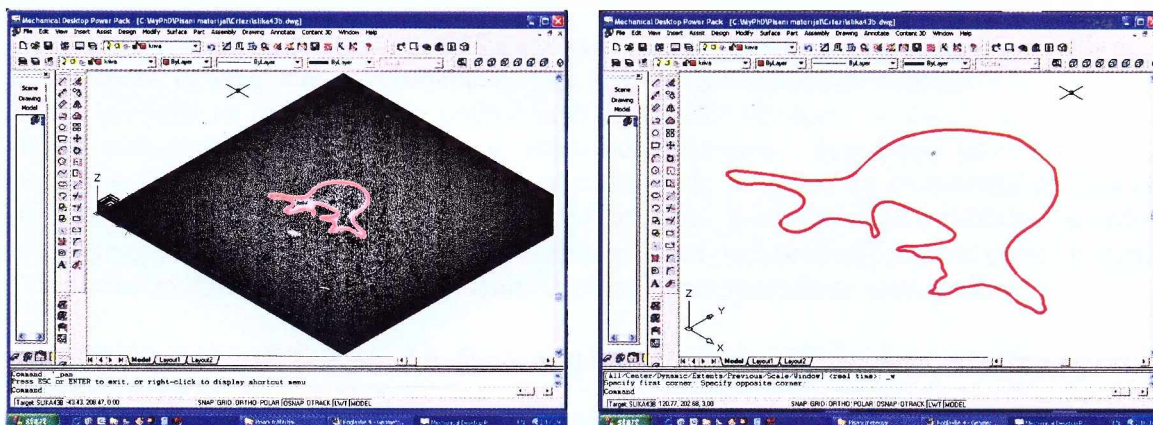
CT slike poprečnih presjeka pršljena prikazane u izabranom prozoru čuvaju se u vidu bitmapiranih slika (formati *bmp*, *jpg*, *tif*). Ovako dobijene slike se koriste za izdvajanje graničnih kontura poprečnih presjeka pršljena potrebnih za rekonstrukciju geometrije pršljena. Rekonstrukcija geometrije pršljena vrši se u nekom od komercijalnih geometrijskih modelera. U geometrijskom modeleru se generiše niz referentnih tačaka u ekvidistantnim xOy ravnima modelera na rastojanju koje odgovara rastojanju ekvidistantnih poprečnih presjeka pršljena snimljenih *CT* skenerom kao što je prikazano

na slici 4.3. Broj referentnih tačaka odgovara broju snimljenih poprečnih presjeka pršljena. Slike poprečnih presjeka pršljena se importuju u geometrijski modeler pri čemu se donja desna tačka svake slike poravnava prema odgovarajućoj referentnoj tački kako bi se obezbijedilo da se importovane slike nalaze u međusobno odgovarajućem položaju kao što je prikazano na slici 4.3. Pri importovanju slika poprečnih presjeka pršljena u geometrijski modeler vrši se istovremeno i njihovo skaliranje. Na ovaj način se obezbjeđuje da fizička veličina poprečnog presjeka pršljena sa importovane slike bude tačno predstavljena u geometrijskom modeleru. Faktor skaliranja se određuje na osnovu rezolucije piksela i rezolucije *CT* slike. Rezolucija *CT* slika dobijenih snimanjem na *CT* skeneru, tokom ovog istraživanja, iznosi 512x512 piksela uz rezoluciju piksela od 0.5 mm/piksel. Dakle, fizička veličina snimaka iznosi 256x256 mm.



Slika 4.3 Poravnavanje importovanih slika poprečnih presjeka pršljena

Konture poprečnih presjeka pršljena se potom generišu markiranjem niza tačaka sa graničnih kontura sa importovanih slika kroz koje se provlače B-splajn krive kao što je prikazano na slici 4.4. Na ovaj način se formira zatvoreni niz B-splajn krivih koje leže u ekvidistantnim ravnima i koje u potpunosti određuju geometriju pršljena. Provlačenjem B-splajn površina kroz konturne krive poprečnih presjeka konačno se generiše 3D površinski model pršljena koji se naknadno po potrebi može prevesti u 3D solid model istog.

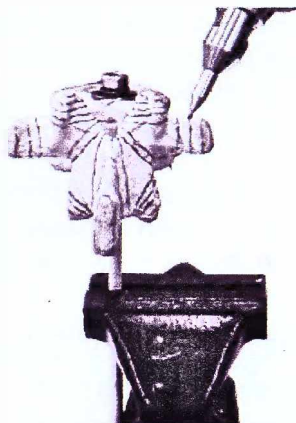


Slika 4.4 Generisanje konture poprečnog presjeka pršljena na bazi importovane slike

Pored prethodno navedenog metoda, geometrijsko modeliranje djelova ljudskog skeleta je moguće vršiti i rekonstrukcijom njihove geometrije prema podacima dobijenim očitavanjem koordinata tačaka sa obvojnih površina djelova skeleta pomoću digitajzera. Prema istraživanju koje je 2002. godine sproveo *K.K.Lee* sa saradnicima geometrijski modeli pršljena generisani ovom metodom tačnije opisuju složenu geometriju pršljenskih nastavaka od modela dobijenih prema podacima sa *CT* snimaka [33].

Kratak prikaz metodologije geometrijskog modeliranja prema geometrijskim podacima dobijenim očitavanjem koordinata tačaka sa obvojnih površina pršljena pomoću digitajzera je zasnovan na istraživanju *Lee*-a [33]. Uzorak pršljena na osnovu kojeg se vrši geometrijsko modeliranje se dobija posthumno. Da bi se dobili geometrijski podaci na osnovu kojih će se generisati tačan geometrijski model pršljena pažljivim proučavanjem geometrije pršljena se identifikuju poprečni presjeci bitni za uspješno modeliranje. Po izvršenoj identifikaciji vrši se označavanje konturnih krivih izabranih poprečnih presjeka na uzorku pršljena. Nakon izvršenog označavanja poprečnih presjeka uzorak pršljena i digitajzer se fiksiraju i pristupa se očitavanju koordinata tačaka sa konturnih krivih izabranih poprečnih presjeka kao što je prikazano na slici 4.5. Podaci o koordinatama tačaka sa konturnih krivih dobijenih na prethodno opisani način se

potom importuju u neki od geometrijskih modelera. Kroz tačke koje leže na svakoj od pojedinačnih konturnih krivih linija se potom provlači zatvorena B-splajn kriva linija. Provlačenjem B-splajn površina kroz konturne krive poprečnih presjeka konačno se generiše 3D površinski model pršljena koji se naknadno po potrebi može prevesti u 3D solid model istog.



Slika 4.5 Očitavanje koordinata tačaka sa konturnih krivih izabranih poprečnih presjeka pršljena pomoću digitajzera

Oba metoda omogućavaju generisanje geometrijskih modela pršljena visoke tačnosti. Metoda u kojoj se geometrijski podaci potrebni za generisanje geometrijskog modela pršljena obezbjeđuju očitavanjem koordinata tačaka sa obvojnih površina pršljena pomoću digitajzera omogućava generisanje modela veće tačnosti u području pršljenskih nastavaka u odnosu na metodu baziranu na geometrijskim podacima dobijenim sa snimaka sa CT skenera ili magnetne rezonance. Upotrebna vrijednost ove metode je međutim, ograničena njenom neprimjenljivošću u slučaju potrebe za generisanjem geometrijskog modela pršljena konkretne ljudske jedinice *in vivo*. Zbog

prethodno navedenog razloga metoda u kojoj se geometrijski podaci potrebni za generisanje geometrijskog modela pršljena obezbjeđuju sa snimaka pršljena dobijenih kompjuterskom tomografijom ili magnetnom rezonancom ima znatno širu upotrebnu vrijednost u odnosu na metodu baziranu na geometrijskim podacima dobijenim očitavanjem pomoću digitajzera. Kao osnovni nedostatak ove metode može se istaći komplikovana i dugotrajna procedura obrade snimaka sa CT skenera ili magnetne rezonance tokom koje se dolazi do geometrijskih podataka prema kojim se vrši rekonstrukcija geometrije pršljena. S obzirom na prethodno navedene razloge geometrijsko modeliranje pršljena, koje se u ovom radu realizuje *in vivo*, će biti bazirano na podacima sa digitalizovanih slika pršljena dobijenih kompjuterskom tomografijom.

4.3 PREDLOG METODA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA

Ideja o razvoju novog metoda za geometrijsko modeliranje pršljena, baziranog na podacima o geometriji pršljena sa digitalizovanih slika dobijenih kompjuterskom tomografijom, je proistekla iz potrebe da se:

- Izvrši što veći stepen automatizacije geometrijskog modeliranja pršljena u cilju povećanja efikasnosti modeliranja;
- Stvore neophodne pretpostavke za razvoj automatizovanog generatora mreže konačnih elemenata tijela pršljena.

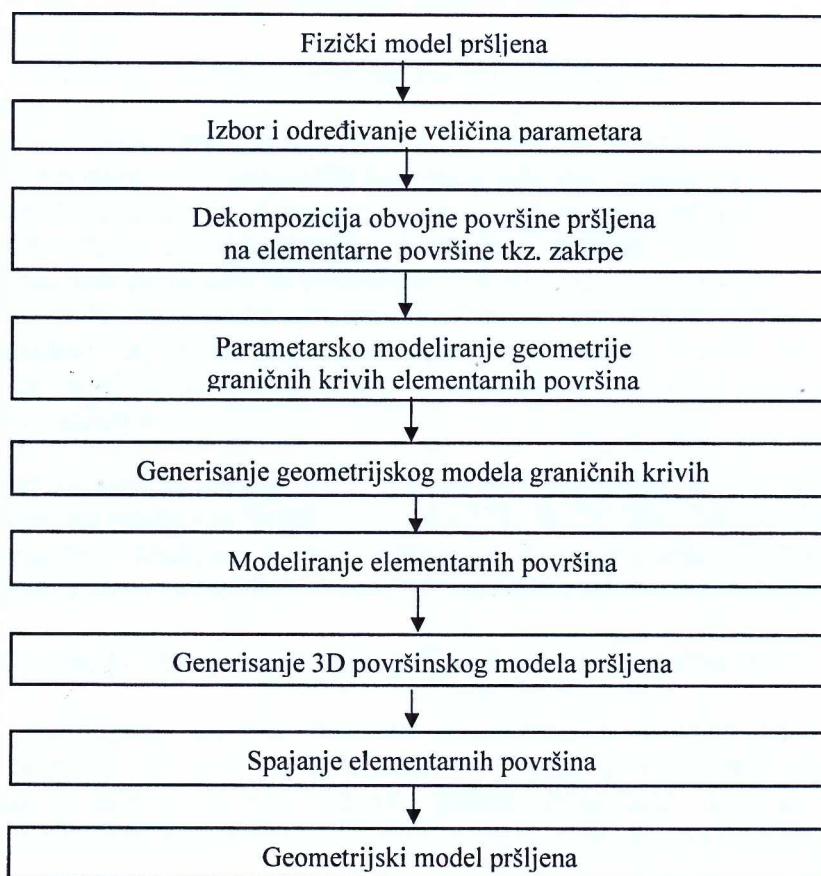
Put za ostvarivanje prethodno navedenih ciljeva je potražen u parametarskom modeliranju geometrije pršljena. Parametarski prilaz geometrijskom modeliranju je široko prisutan u svim inženjerskim oblastima. Suština parametarskog prilaza geometrijskom modeliranju se sastoji u izražavanju geometrije pršljena kroz određeni broj izabranih geometrijskih karakteristika koje predstavljaju parametre na osnovu kojih se vrši modeliranje cjelokupne geometrije pršljena. Razlozi za ovakvo opredeljenje su sljedeći:

- Ljudski pršljeni su u osnovi istog oblika, te kao takvi posjeduju geometrijske karakteristike koje su zajedničke za pršljen svake ljudske jedinice. Ove geometrijske karakteristike mogu predstavljati parametre za geometrijsko modeliranje kojim bi se na pouzdan način uopštila geometrija svakog pojedinačnog pršljena;

- Parametarski prilaz modeliranju geometrije pršljena predstavlja osnovu za razvoj programa za geometrijsko modeliranje pršljena čim se ostvaruje automatizacija modeliranja. Razvoj programa za automatizaciju geometrijskog modeliranja pršljena je moguće realizovati u okruženju većine savremenih komercijalnih geometrijskih modelera čiji sastavni dio predstavlja jedan ili više programskih jezika;
- Parametarski prilaz modeliranju geometrije pršljena omogućava kroz varijaciju parametara vrlo jednostavnu izmjenu geometrije pršljena.

Ovakav prilaz geometrijskom modeliranju je opšteg karaktera i kao takav se može primijeniti i na ostale djelove ljudskog skeleta.

Početna pretpostavka predloženog metoda je da je pršljen simetričan u odnosu na srednju uzdužnu, tj. sagitalnu ravan. Metod za geometrijsko modeliranje pršljena se, kao što je prikazano na slici 4.6, sastoji od sedam faza kroz koje se od fizičkog dolazi do geometrijskog modela pršljena.



Slika 4.6 Shematski prikaz predloženog metoda za geometrijsko modeliranje pršljena

4.3.1 Izbor i određivanje veličina parametara

Prva faza predloženog metoda obuhvata izbor i određivanje veličina parametara za geometrijsko modeliranje pršljena. Izbor parametara za geometrijsko modeliranje pršljena je izvršen na bazi rezultata dosadašnjih istraživanja geometrijskih dimenzija slabinskih pršljena, detaljno prikazanih u drugom poglavlju ovog rada [39, 46, 75, 78]. Autori ovih istraživanja su se pridržavali metodologije koju je u pionirskim radovima iz ove oblasti ustanovio *M.M.Panjabi*. Stoga su u svim radovima istraživane iste geometrijske dimenzije pršljena, prikazane na slikama datim u dodatku C. U navedenim radovima su istraživane sljedeće geometrijske dimenzije pršljena:

- EPW_l i EPW_u - širina donje i gornje površine tijela pršljena;
- EPD_l i EPD_u - dužina donje i gornje površine tijela pršljena;
- VBH_a i VBH_p - visina prednjeg i zadnjeg djela tijela pršljena;
- SCD i SCW - dužina i širina pršljenskog kanala;
- PDH i PDW - visina i širina korijena pršljenskog luka;
- SPL - dužina spinoznog nastavka;
- TPW - raspon poprečnih nastavaka;
- EPI_u i EPI_l - ugao koji gornja i donja površina tijela pršljena gradi sa poprečnom ravni;
- PDI_s i PDI_t - ugao koji korijen pršljenskog luka gradi sa uzdužnom i poprečnom ravni;
- FCW_s i FCH_s - širina i visina gornjeg zglobnog nastavka;
- FCW_l i FCH_l - širina i visina donjeg zglobnog nastavka;
- IFW_s i IFW_l - rastojanje gornjih i donjih zglobnih nastavaka;
- IFH - rastojanje gornjeg i donjeg zglobnog nastavka;
- T_s i S_s - ugao koji kontaktna površina gornjeg zglobnog nastavka gradi sa poprečnom i uzdužnom ravni;
- T_l i S_l - ugao koji kontaktna površina donjeg zglobnog nastavka gradi sa poprečnom i uzdužnom ravni.

Prethodne geometrijske karakteristike slabinskih pršljena, prema navedenim radovima, na adekvatan način predstavljaju geometriju slabinskih pršljena. S obzirom da je ovo pionirski rad na parametarskom modeliranju geometrije slabinskih pršljena ovaj stav je usvojen kao polazište za izbor parametara za modeliranje geometrije pršljena. Navedenim geometrijskim karakteristikama, kao parametar, je pridružena i veličina radijusa zaobljenja kojim je izveden prelaz sa čeonih na bočne površine tijela pršljena. Veličine parametara za modeliranje geometrije slabinskog pršljena L_5 , osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, su određene tokom eksperimentnog istraživanja predstavljenog u prethodnom poglavlju ovog rada, a dio ovih podataka je dat u tabeli 3.10.

Dodatni razlog za ovakvo opredjeljenje pri izboru parametara je u mogućnosti korišćenja podataka o njihovim veličinama datim u radovima [39, 46, 75, 78]. Geometrijski model pršljena generisan prema ovim podacima se može koristiti za analize biomehaničkog ponašanja pršljena odnosno kičmenog stuba na bazi kojih bi se došlo do opštih zaključaka na nivou šire populacije.

4.3.2 Dekompozicija obvojne površine pršljena na elementarne površine

Druga faza predloženog modela obuhvata dekompoziciju obvojne površine pršljena na elementarne površine, tkz. zakrpe¹. S obzirom da je predmet ovog rada slabinski pršljen L_5 prikaz metoda se odnosi na peti slabinski pršljen. Procedura koja će biti obrazložena primjenljiva je, međutim, i za geometrijsko modeliranje ostalih dijelova ljudskog skeleta.

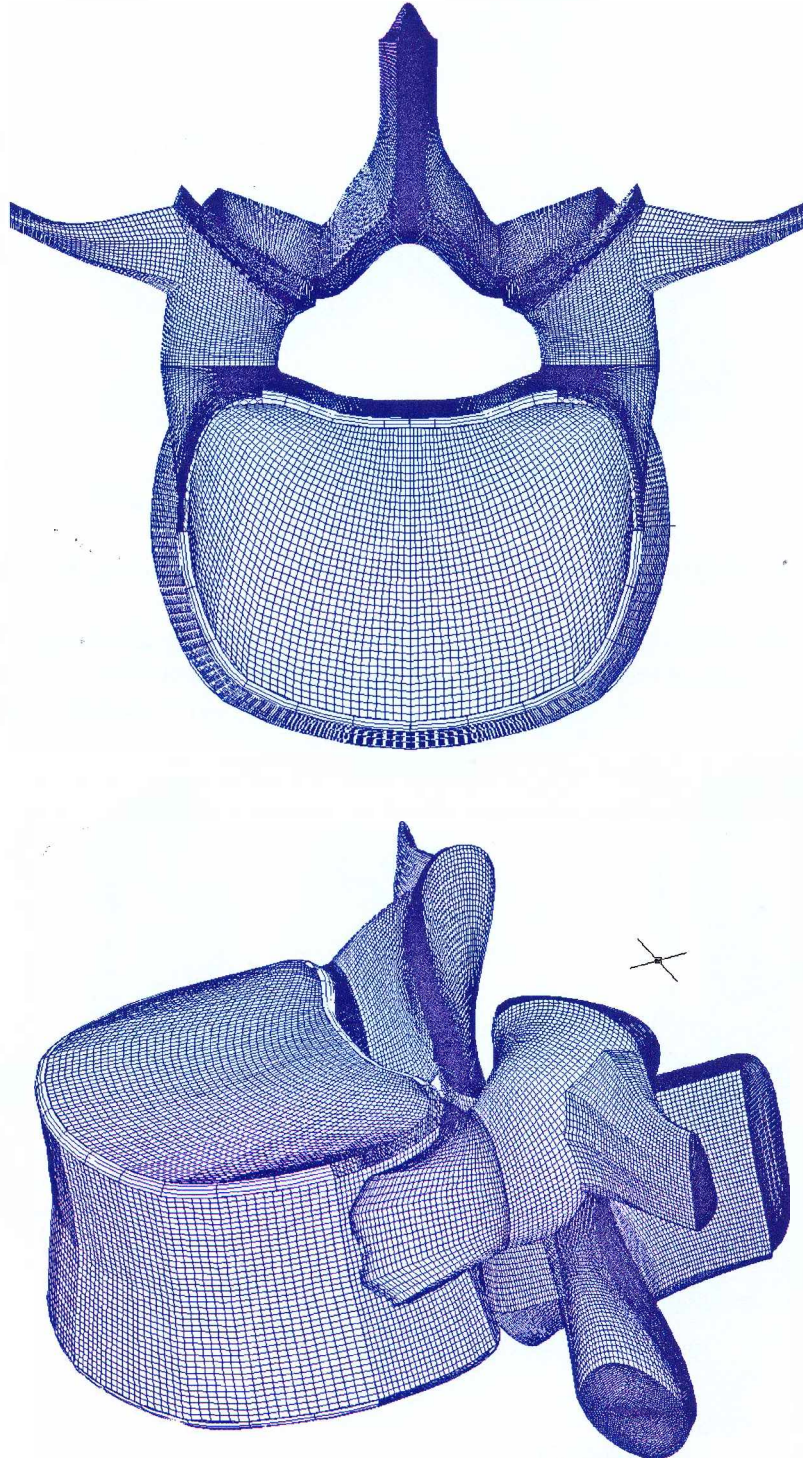
Geometrija pršljena za četiri od ukupno deset osoba, koje predstavljaju istraživački uzorak, je rekonstruisana prema podacima sa digitalizovanih slika dobijenih kompjuterskom tomografijom klasičnom metodom koja je već objašnjena u prethodnom dijelu ovog poglavlja. Kao rezultat ove rekonstrukcije, izvršene u okruženju komercijalnog geometrijskog modelera *Mechanical Desktop 6*, dobijena su četiri površinska modela pršljena od kojih je jedan prikazan na slici 4.7. Ciljevi ovako izvedene rekonstrukcije geometrije pršljena je da se istovremeno sa generisanjem površinskog modela pršljena formira:

- Predlog za dekompoziciju obvojne površine pršljena na elementarne površine;
- Predlog broja i položaja geometrijskih čvorova, kao i smjerova tangenti u krajnjim tačkama *NURBS* krivih linija kojim bi se modelirale granične krive elementarnih površina;

¹ Zakrpa potiče od engleskog izraza za elementarnu aproksimativnu površinu *patch*

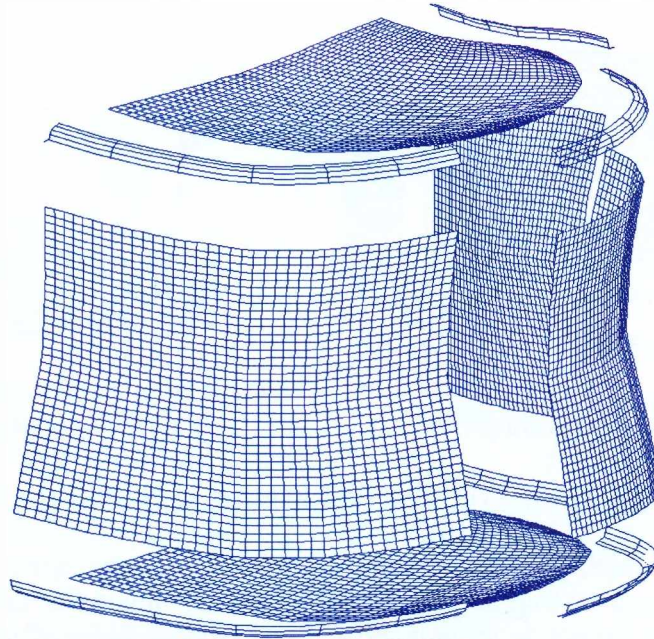
- Geometrijski model pršljena koji bi bio osnova za razvoj metoda za parametarsko modeliranje geometrije pršljena i procjenu njegove uspješnosti.

Tokom rekonstrukcije geometrije pršljena su korišćena iskustva iz istraživanja na rekonstrukciji geometrije djelova ljudskog tijela koje su sproveli 2003. godine *F.Murgia* sa saradnicima [18,119] i 2004. godine *H.Lemacker* sa saradnicima [113]. Potrebno vrijeme za rekonstrukciju geometrije pršljena je znatno prevazilazilo početna očekivanja autora ovog rada što predstavlja dodatnu potvrdu potrebe za razvojem efikasnije metode za modeliranje geometrije pršljena. Predlog dekompozicije obvojne površine pršljena koji je proistekao tokom ovog procesa je prikazan na slikama 4.8÷4.12.



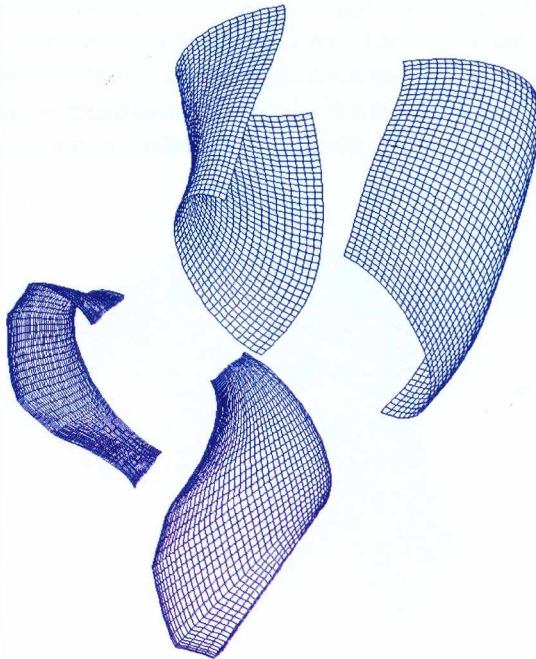
Slika 4.7 Površinski model slabinskog pršljena L₅

Dekompozicija obvojne površine pršljena je, prema početnoj pretpostavci o simetriji pršljena u odnosu na srednju sagitalnu ravan, izvršena rastavljanjem obvojne površine desne polovine pršljena na 37 elementarnih površina. Obvojna površina polovine tijela pršljena je rastavljena na 11 elementarnih površina kojim su predstavljeni čeone i bočne površine tijela pršljena, kao i prelazna zaobljenja između ovih površina što je prikazano na slici 4.8.

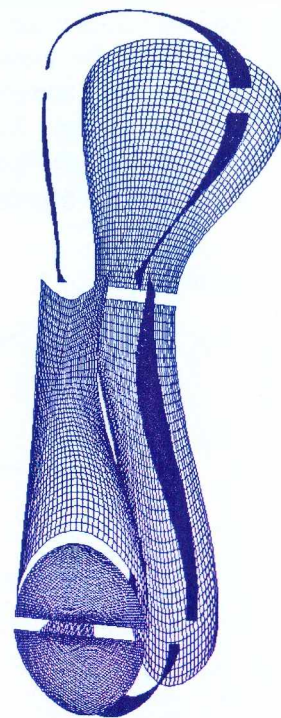


Slika 4.8 Dekompozicija obvojne površine desne polovine tijela pršljena

Obvojna površina pršljenskog luka je rastavljena na 4 elementarne površine kao što je prikazano na slici 4.9, a obvojna površina gornjeg i donjeg zglobnog nastavka na 10 elementarnih površina kao što je prikazano na slici 4.10.

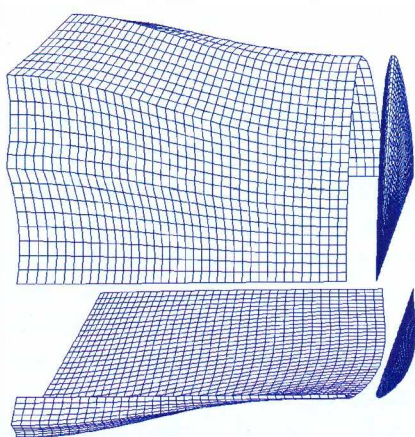


Slika 4.9 Dekompozicija obvojne površine pršljenskog luka

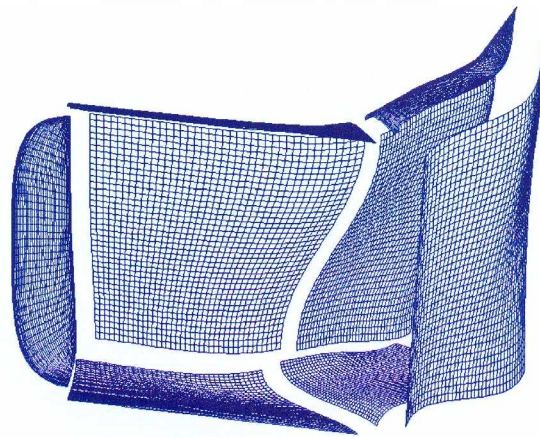


Slika 4.10 Dekompozicija obvojne površine desnog gornjeg i donjeg zglobnog nastavka

Obvojna površina poprečnog nastavka je rastavljena na 4 elementarne površine kao što je prikazano na slici 4.11, a obvojna površina desne polovine spinoznog nastavka na 8 elementarnih površina kao što je prikazano na slici 4.12.



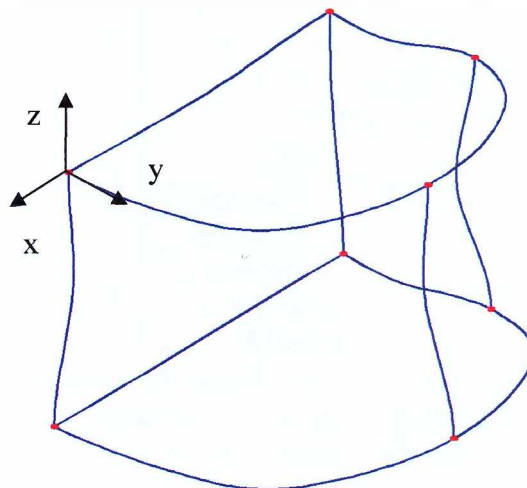
Slika 4.11 Dekompozicija obvojne površine desnog poprečnog nastavka



Slika 4.12 Dekompozicija obvojne površine desne polovine spinoznog nastavka

4.3.3 Parametarsko modeliranje graničnih krivih elementarnih površina

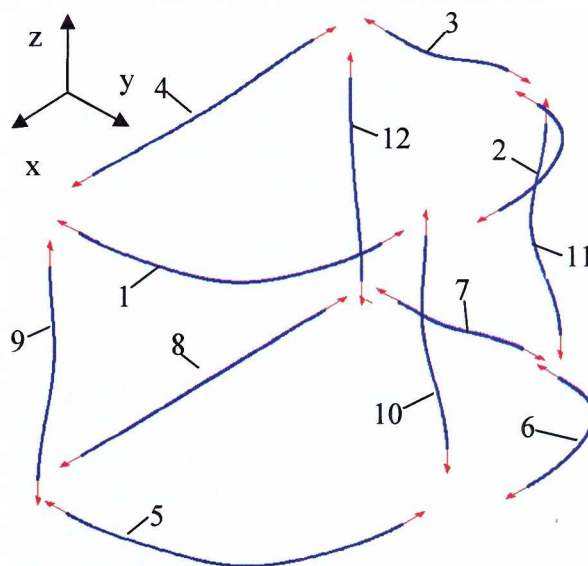
Treća faza predloženog modela obuhvata parametarsko modeliranje graničnih krivih elementarnih površina dobijenih dekompozicijom obvojne površine pršljena. Ukupan broj graničnih krivih u predloženom modelu je 71. S obzirom na obimnost predloga parametarskog modela svih graničnih krivih u nastavku ovog poglavlja će biti detaljno predstavljen samo predlog parametarskog modela graničnih krivih elementarnih površina tijela pršljena. Tijelo pršljena je izabrano kao dio pršljena na kojem će biti testirana uspješnost modeliranja adaptacije koštanog tkiva pršljena na mehaničko opterećenje kroz upoređenje teorijski dobijene i realno postojeće raspodjele relativne gustine koštanog tkiva tijela pršljena. Na slici 4.13 je prikazan površinski model desne polovine tijela jednog od pršljena, dobijen rekonstrukcijom geometrije pršljena prema digitalizovanim slikama dobijenim kompjuterskom tomografijom. Površinski model polovine tijela pršljena je na istoj slici pored prikaza sa skrivenim nevidljivim ivicama dat i u žičanom prikazu sa istaknutim tjemnim tačkama elementarnih površina. U žičanom prikazu površinskog modela se vide samo konturne ivice tijela pršljena koje predstavljaju granične krive elementarnih površina na koje je rastavljena obvojna površina polovine tijela pršljena.



Slika 4.13 Površinski model desne polovine tijela pršljena

Tokom rekonstrukcije geometrije pršljena, prema digitalizovanim slikama dobijenim kompjuterskom tomografijom, obvojna površina polovine tijela pršljena je rastavljena na elementarne površine kao što je prikazano na slici 4.8. Pri tome su za tjemene tačke elementarnih površina, prikazane na žičanom modelu na slici 4.13, izabrane tačke u kojim su tangente graničnih krivih elementarnih površina paralelne sa osama biomehaničkog koordinatnog sistema. Na slici 4.14 je dat prikaz graničnih krivih elementarnih površina polovine tijela pršljena sa naznačenim smjerovima pružanja tangenti u krajnjim tačkama krivih, koje ujedno predstavljaju i tjemene tačke elementarnih površina. Broj i položaj graničnih krivih elementarnih površina, kao i smjer tangenti u njihovim krajnjim tačkama predstavljaju dio predloga autora ovog rada za modeliranje geometrije

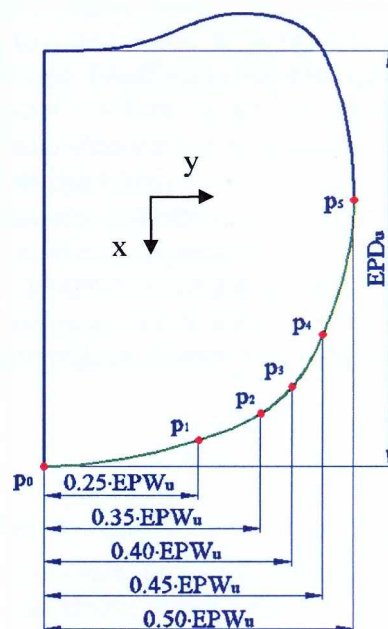
pršljena. Geometrijsko modeliranje graničnih krivih je tokom rekonstrukcije geometrije pršljena izvedeno kubnim *NURBS* krivim linijama, stepena $k=3$, čija je teorijska podloga data u dodatku A. Za veličine težinskih koeficijenata kontrolnih tačaka *NURBS* krivih linija je usvojena vrijednost $w_i=1$. Rekonstrukcija geometrije pršljena četiri osobe, koje predstavljaju dio istraživačkog uzorka, je rezultirala i predlogom broja i položaja geometrijskih čvorova *NURBS* krivih linija kojim se na vjeran način modelira geometrija graničnih krivih elementarnih površina. Položaj referentnog biomehaničkog koordinatnog sistema u odnosu na koji je izvršeno modeliranje graničnih krivih elementarnih površina je prikazan na slici 4.13.



Slika 4.14 Granične krive elementarnih površina desne polovine tijela pršljena

Tokom rekonstrukcije geometrije pršljena pokazalo se da je geometriju granične krive 1, u slučaju da su vektori tangenti prikazani na slici 4.14 u početnoj i krajnjoj tački granične krive redom $T_p=(0,-1,0)$ i $T_k=(-1,0,0)$, moguće vjerno modelirati *NURBS* krivom linijom koja interpolira šest geometrijskih čvorova. Prvi p_0 i zadnji p_5 geometrijski čvor *NURBS* krive linije se poklapaju sa početnom i krajnjom tačkom granične krive. Položaj geometrijskih čvorova, koji obezbjeđuje vjerno modeliranje geometrije granične krive 1, prikazan je na slici 4.15. Korišćenjem alata *Mechanical Desktop*-a sa granične krive 1 su očitani podaci o koordinatama geometrijskih čvorova za četiri pršljena rekonstruisana klasičnom metodom prema podacima sa digitalizovanih slika dobijenih kompjuterskom tomografijom.

Navedeni elementi korišćeni tokom rekonstrukcije geometrije granične krive 1, prema podacima sa CT slika, predstavljaju osnovu predloga parametarskog modela krive.



Slika 4.15 Granične krive gornje površine polovine tijela pršljena sa geometrijskim čvorovima granične krive 1

Geometrijske karakteristike koje su izabrane za parametre prema kojim će se modelirati geometrija pršljena obuhvataju kako dužinske, tako i ugaone veličine. Dakle, sam izbor parametara nameće predlog parametarskog modela u nelinearnom obliku. Položaj geometrijskih čvorova *NURBS* krivih linija u parametarskom modelu je izražen parametrima koji prirodno određuju oblik i dimenzije krive. Predlog veze položaja geometrijskih čvorova i izabranih parametara za cilj ima i da ta veza bude što je moguće jednostavnijeg oblika.

Parametri koji određuju oblik i dimenzije granične krive 1, koja predstavlja dio granične konture gornje površine tijela pršljena, su:

- EPD_u - dužina gornje površine tijela pršljena;
- EPW_u - širina gornje površine tijela pršljena;
- EPI_u - ugao koji gornja površina tijela pršljena gradi sa poprečnom xOy ravni duž pravca koji se proteže od prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena.

Dužina i širina gornje površine tijela pršljena su parametri koji uslovljavaju položaj tačaka sa gornje površine tijela pršljena u odnosu na x odnosno y koordinatnu osu, kao što je prikazano na slici 4.15. Gornja površina tijela pršljena je blago uzdignuta u odnosu na poprečnu xOy ravan posmatrano sa prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena, tj. po dužini gornje površine tijela pršljena. Dakle, ugao koji gornja površina tijela pršljena gradi sa poprečnom xOy ravni duž pravca koji se proteže od prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena uslovljava položaj tačaka sa gornje površine tijela pršljena u odnosu na z koordinatnu osu. Na osnovu prethodno rečenog je proistekao predlog veze koordinata geometrijskih čvorova granične krive 1 i navedenih parametara u sledećem obliku:

$$x_p = a \cdot EPD_u \quad (4.1a)$$

$$y_p = b \cdot EPW_u \quad (4.1b)$$

$$z_p = c \cdot EPD_u \cdot \tan(EPI_u) \quad (4.1c)$$

gdje su: a , b i c koeficijenti parametarskog modela krive.

Optimalne veličine koeficijenata parametarskog modela granične krive 1 se određuju iz uslova najbolje aproksimacije svih graničnih krivih 1 dobijenih tokom rekonstrukcije geometrije pršljena klasičnom metodom prema podacima sa digitalizovanih slika, koja je u ovom radu izvršena za četiri od ukupno deset osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, graničnom krivom 1 dobijenom predloženim parametarskim modelom. U tom se smislu geometrijski čvorovi granične krive 1, dobijene rekonstrukcijom klasičnom metodom prema podacima sa *CT* slika, smatraju uporednim tačkama. Dakle, položaj geometrijskih čvorova p_i se u predloženom parametarskom modelu određuje traženjem najbolje aproksimacije položaja uporednih tačaka $k_{i,j}$. Ova aproksimacija je zasnovana na minimizaciji sume rastojanja, pojedinačnih geometrijskih čvorova p_i i odgovarajućih uporednih tačaka $k_{i,j}$, metodom najmanjih kvadrata. Ovakav pristup je u istraživanju posvećenom geometrijskom modeliranju srednjeg uha iz 2002. godine koristio *Q.Sun* sa saradnicima [32]. Suma rastojanja i -tog geometrijskog čvora p_i i odgovarajućih uporednih tačaka $k_{i,j}$ definisana je na sljedeći način:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n_k} \|p_i - k_{i,j}\|^2 \quad (4.2)$$

gdje je $\| \cdot \|$ norma vektora, a n_k broj uporednih tačaka. Broj uporednih tačaka, koje odgovaraju pojedinačnim geometrijskim čvorovima parametarski modeliranih graničnih krivih, odgovara broju pršljena čija je geometrija rekonstruisana klasičnom metodom i iznosi $n_k=4$.

Kao što je već navedeno, korišćenjem alata *Mechanical Desktop*-a sa granične krive 1 su očitani podaci o koordinatama geometrijskih čvorova za četiri pršljena rekonstruisana klasičnom metodom. Na ovaj način je određen položaj uporednih tačaka potrebnih za određivanje optimalnih veličina koeficijenata parametarskog modela granične krive 1. Ovako određene

koordinate uporednih tačaka i odgovarajuće veličine parametara EPD_u , EPW_u i EPI_{tu} , datih u tabeli 3.10 za osobe čiji je pršljen rekonstruisan klasičnom metodom prema podacima sa CT slika, su uvršćene u izraze (4.1a,b,c) kako bi se odredile uporedne veličine koeficijenata parametarskog modela granične krive 1. Dobljene uporedne veličine koeficijenata parametarskog modela granične krive 1 su date u tabeli 4.1.

Tabela 4.1 Uporedne veličine koeficijenata a , b i c određene sa granične krive 1 dobijene prema podacima sa CT slika

Uporedna tačka	Osoba broj	a	b	c
k_0	1	0	0	0
	2			
	3			
	4			
k_1	1	-0.068	0.25	0.036
	2	-0.065		0.033
	3	-0.060		0.024
	4	-0.062		0.025
k_2	1	-0.133	0.35	0.071
	2	-0.129		0.065
	3	-0.123		0.054
	4	-0.125		0.061
k_3	1	-0.199	0.40	0.104
	2	-0.195		0.098
	3	-0.187		0.086
	4	-0.189		0.091
k_4	1	-0.328	0.45	0.135
	2	-0.322		0.127
	3	-0.311		0.117
	4	-0.320		0.124
k_5	1	-0.652	0.50	0.166
	2	-0.639		0.162
	3	-0.629		0.149
	4	-0.636		0.151

Uvrštavanjem jednačina (4.1a,b,c) u izraz (4.2) se dobija izraz sledećeg oblika:

$$f_i = \sum_{j=1}^4 \left[\begin{aligned} &(a_i \cdot EPD_{u,j} - a_{i,j} \cdot EPD_{u,j})^2 + \\ &(b_i \cdot EPW_{u,j} - b_{i,j} \cdot EPW_{u,j})^2 + \\ &(c_i \cdot EPD_{u,j} \cdot \tan(EPI_{tu,j}) - c_{i,j} \cdot EPD_{u,j} \cdot \tan(EPI_{tu,j}))^2 \end{aligned} \right] \quad (4.3)$$

Minimizacija funkcije f_i se vrši izjednačavanjem parcijalnih izvoda funkcije po koeficijentima a , b i c sa nulom, čim se dobijaju sljedeći izrazi:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^4 EPD_{u,j} \cdot (a_i \cdot EPD_{u,j} - a_{i,j} \cdot EPD_{u,j}) = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^4 EPW_{u,j} \cdot (b_i \cdot EPW_{u,j} - b_{i,j} \cdot EPW_{u,j}) = 0 \quad (4.4b)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^4 EPD_{u,j} \cdot \tan(EPI_{tu,j}) \cdot (c_i \cdot EPD_{u,j} \cdot \tan(EPI_{tu,j}) - c_{i,j} \cdot EPD_{u,j} \cdot \tan(EPI_{tu,j})) = 0 \quad (4.4c)$$

Uvrštavanjem uporednih veličina koeficijenata $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ i $c_{i,j}$ iz tabele 4.1 i odgovarajućih veličina parametara EPD_u , EPW_u i EPI_{tu} iz tabele 3.10 u jednačine (4.4a,b,c) određene su veličine koeficijenata a , b i c parametarskog modela granične krive 1, date u tabeli 4.2.

Tabela 4.2 Veličine koeficijenta a , b i c u parametarskom modelu granične krive 1

Geometrijski čvor	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Koeficijent a	0	-0.064	-0.128	-0.193	-0.321	-0.640
Koeficijent b	0	0.250	0.350	0.400	0.450	0.500
Koeficijent c	0	0.031	0.065	0.097	0.128	0.159

Definisan položaj geometrijskih čvorova u potpunosti određuju *NURBS* krivu, tj. veličinu parametara krive na krajevima segmenata krive, vektor čvorova, kao i položaj kontrolnih tačaka krive. U cilju ilustracije navedenog biće dat kratak prikaz rezultata parametarskog modeliranja granične krive 1 pršljena, osobe pod rednim brojem 2 u tabeli 3.10. Uvrštavanjem odgovarajućih veličina parametara EPD_u , EPW_u i EPI_{lu} , datih u tabeli 3.10, i veličina koeficijenata parametarskog modela, datih u tabeli 4.2, u izraz (4.1a,b,c) određen je položaj geometrijskih čvorova granične krive 1, dat u tabeli 4.3

Tabela 4.3 Položaj geometrijskih čvorova određen parametarskim modelom granične krive 1

Geom. čvor	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
(x,y,z) [mm]	0,0,0	-2.07,11.78,0.04	-4.13,16.49,0.08	-6.20,18.84,0.12	-10.34,21.20,0.16	-20.67,23.55,0.20

Veličine parametra krive $u_{s,j}$ na krajevima segmenata *NURBS* krive, koji se poklapaju sa položajem geometrijskih čvorova, se određuju prema izrazu (A.22). Uvrštavanjem koordinata geometrijskih čvorova u navedeni izraz se dobija vektor $u_s = [0, 2.01, 2.88, 3.41, 4.21, 6]$. Broj kontrolnih tačaka kubne B-splajn krive je, kao što je pokazano u dodatku A, za dva veći od broja geometrijskih čvorova. Stoga je u slučaju granične krive 1 koja interpolira šest geometrijskih čvorova broj kontrolnih tačaka osam ($r_0 \div r_7$). Broj članova vektora čvorova *NURBS* krive $u = (u)_0^{n+k+1}$ je određen stepenom krive k i brojem kontrolnih tačaka, tj. maksimalnom veličinom indeksa kontrolne tačke n kao što je pokazano u dodatku A. Dakle, u slučaju granične krive 1, predstavljene kubnom *NURBS* krivom sa osam kontrolnih tačaka, broj članova vektora čvorova *NURBS* krive iznosi dvanaest. Vektor čvorova se formira proširivanjem vektora u_s na taj način što se za jednu polovinu nedostajućih čvorova usvoji veličina minimalnog, a za drugu maksimalnog člana vektora u_s . Na ovaj način je formiran vektor čvorova granične krive 1 $u = (u)_0^{11} = [0, 0, 0, 0, 2.01, 2.88, 3.41, 4.21, 6, 6, 6, 6]$. Za vektor čvorova se može usvojiti i bilo koji drugi vektor koji predstavlja proizvod izabrane skalarne veličine i vektora čvorova određenog na prethodno opisan način. Položaj kontrolnih tačaka r_i se određuje iz uslova da se geometrijski čvorovi nalaze na *NURBS* krivoj definisanoj izrazom (A.27):

$$p_j = r(u_{s,j}) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot r_i \cdot N_i^k(u_{s,j})}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_i^k(u_{s,j})}, \quad j = \overline{0, n_g} \quad (4.5)$$

Uz početnu pretpostavku o vektoru težinskih koeficijenata w_i , kao i poznatom broju geometrijskih čvorova i kontrolnih tačaka granične krive 1 prethodni se izraz može zapisati u sljedećem obliku:

$$p_j = \frac{\sum_{i=0}^7 r_i \cdot N_i^k(u_{s,j})}{\sum_{i=0}^7 N_i^k(u_{s,j})}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (4.6)$$

Iz prethodnog izraza se formiraju dvije jednačine manje od broja nepoznatih veličina. Stoga, se dvije dodatne jednačine nalaze iz uslova koji proističe iz zadatog položaja tangenti na *NURBS* krivu u početnom i krajnjem geometrijskom čvoru:

$$T_p = \frac{dr(u_{s,0})}{du} = \frac{d}{du} \left(\frac{\sum_{i=0}^7 r_i \cdot N_i^k(u_{s,0})}{\sum_{i=0}^7 N_i^k(u_{s,0})} \right) \quad i \quad T_k = \frac{dr(u_{s,5})}{du} = \frac{d}{du} \left(\frac{\sum_{i=0}^7 r_i \cdot N_i^k(u_{s,5})}{\sum_{i=0}^7 N_i^k(u_{s,5})} \right) \quad (4.7)$$

Prema izrazima (4.6) i (4.7) je određen i položaj kontrolnih tačaka granične krive 1, a dobijene veličine koordinata kontrolnih tačaka su date u tabeli 4.4.

Tabela 4.4 Položaj kontrolnih tačaka određen parametarskim modelom granične krive 1

Kontrolna tačka	r_0	r_1	r_2	r_3
(x,y,z) [mm]	0,0,0	0,3.99,0	-1.20,9.65,0.03	-3.56,16.04,0.07
Kontrolna tačka	r_4	r_5	r_6	r_7
(x,y,z) [mm]	-6.46,19.39,0.13	-12.07,22.15,0.17	-17.14,23.55,0.20	-20.67,23.55,0.20

Predlog parametarskog modela, postupak određivanja broja i položaja geometrijskih čvorova, kao i optimalne veličine koeficijenata predloženog parametarskog modela preostalih graničnih krivih gornje površine tijela pršljena je istovjetan sa prethodno obrazloženim za graničnu krivu 1. Da bi se izbjeglo višestruko i detaljno prikazivanje istog postupka u narednoj tabeli će biti dati dobijeni rezultati o položaju geometrijskih čvorova parametarskog modela preostalih graničnih krivih gornje površine tijela pršljena.

Tabela 4.5 Pregled položaja geometrijskih čvorova parametarskog modela graničnih krivih gornje površine tijela pršljena

Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 2			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(1,0,0)		(0,-1,0)
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	-0.640	0.500	0.159
p_1	-0.954	0.463	0.488
p_2	-1.044	0.426	1.147
p_3	-1.089	0.316	1.806
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 3			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(0,1,0)		(0,-1,0)
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	-1.089	0.316	1.806
p_1	-1.071	0.253	1.645
p_2	-1.053	0.221	1.484
p_3	-1.018	0.158	1.161
p_4	-1	0	1
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 4			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(1,0,0)		(-1,0,0)
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	0	0	0
p_1	-0.640	0	0.157
p_2	-1	0	1

Parametri koji određuju oblik i dimenzije graničnih krivih donje površine tijela pršljena su:

- EPD_l - dužina donje površine tijela pršljena;
- EPW_l - širina donje površine tijela pršljena;
- EPI_{ll} - ugao koji donja površina tijela pršljena gradi sa porečnom xOy ravni duž pravca koji se proteže od prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena;
- VBH_a - visina prednjeg dijela tijela pršljena u srednjoj sagitalnoj ravni.

Dužina i širina donje površine tijela pršljena su parametri koji uslovljavaju položaj tačaka sa donje površine tijela pršljena u odnosu na x odnosno y koordinatnu osu. Donja površina tijela pršljena je blago uzdignuta u odnosu na poprečnu xOy ravan posmatrano sa prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena tj. po dužini donje površine tijela pršljena. Visina prednjeg dijela tijela pršljena određuje rastojanje gornje i donje površine tijela pršljena u srednjoj sagitalnoj ravni duž z koordinatne ose. Dakle, ugao koji donja površina tijela pršljena gradi sa poprečnom xOy ravni duž pravca koji se proteže od prednje ka zadnjoj strani tijela pršljena, kao i visina prednjeg dijela tijela pršljena uslovljavaju položaj tačaka sa donje površine tijela pršljena u odnosu na z koordinatnu osu. Na osnovu prethodno rečenog je proistekao predlog veze koordinata geometrijskih čvorova graničnih krivih donje površine tijela pršljena i navedenih parametara u sljedećem obliku:

$$x_p = a \cdot EPD_1 \quad (4.8a)$$

$$y_p = b \cdot EPW_1 \quad (4.8b)$$

$$z_p = c \cdot EPD_1 \cdot \tan(EPI_n) - VBH_a \quad (4.8c)$$

gdje su: a , b i c koeficijenti parametarskog modela krivih.

Postupak određivanja broja i položaja geometrijskih čvorova, kao i optimalne veličine koeficijenata predloženog parametarskog modela graničnih krivih donje površine tijela pršljena je istovjetan sa prethodno obrazloženim postupkom za graničnu krivu 1. Da bi se izbjeglo višestruko i detaljno prikazivanje istog postupka, u narednoj tabeli će biti dati dobijeni rezultati o položaju geometrijskih čvorova parametarskog modela graničnih krivih donje površine tijela pršljena.

Tabela 4.6 Pregled položaja geometrijskih čvorova parametarskog modela graničnih krivih donje površine tijela pršljena

Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 5			
Vektor tangente	Početna tačka granične krive T_p (0,-1,0)	Krajnja tačka granične krive T_k (-1,0,0)	
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	0.018	0	0
p_1	-0.044	0.250	0.001
p_2	-0.112	0.350	0.003
p_3	-0.177	0.400	0.003
p_4	-0.300	0.450	0.005
p_5	-0.611	0.500	0.005
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 6			
Vektor tangente	Početna tačka granične krive T_p (1,0,0)	Krajnja tačka granične krive T_k (0,-1,0)	
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	-0.611	0.500	0.005
p_1	-0.933	0.456	0.199
p_2	-1.016	0.412	0.401
p_3	-1.061	0.280	0.598
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 7			
Vektor tangente	Početna tačka granične krive T_p (0,1,0)	Krajnja tačka granične krive T_k (0,-1,0)	
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	-1.061	0.280	0.598
p_1	-1.043	0.224	0.681
p_2	-1.026	0.196	0.801
p_3	-0.989	0.140	0.907
p_4	-0.982	0	1

Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 8			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(1,0,0)		(-1,0,0)
Geometrijski čvor	Koeficijent a	Koeficijent b	Koeficijent c
p_0	0.018	0	0
p_1	-0.622	0	0.579
p_2	-0.982	0	1

Parametri koji određuju oblik i dimenzije graničnih krivih bočnih površina tijela pršljena su:

- EPD_u , EPD_l - dužina gornje i donje površine tijela pršljena;
- EPW_u , EPW_l - širina gornje i donje površine tijela pršljena;
- VBH_a , VBH_p - visina prednjeg i zadnjeg dijela tijela pršljena u srednjoj sagitalnoj ravni.

Dužina i širina gornje i donje površine tijela pršljena su parametri koji uslovljavaju položaj tačaka sa bočnih površina tijela pršljena u odnosu na x odnosno y koordinatnu osu. Visina prednjeg i zadnjeg dijela tijela pršljena uslovljavaju položaj tačaka sa bočnih površina tijela pršljena u odnosu na z koordinatnu osu. Na osnovu prethodno rečenog je proistekao predlog veze koordinata geometrijskih čvorova graničnih krivih bočnih površina tijela pršljena i navedenih parametara u sljedećem obliku:

$$x_p = a_1 \cdot EPD_u + a_2 \cdot EPD_l \quad (4.9a)$$

$$y_p = b_1 \cdot EPW_u + b_2 \cdot EPW_l \quad (4.9b)$$

$$z_p = c_1 \cdot VBH_a + c_2 \cdot VBH_p \quad (4.9c)$$

gdje su: a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 i c_2 koeficijenti parametarskog modela krivih.

Postupak određivanja broja i položaja geometrijskih čvorova, kao i optimalne veličine koeficijenata predloženog parametarskog modela graničnih krivih bočnih površina tijela pršljena je istovjetan sa prethodno obrazloženim postupkom za graničnu krivu 1. Da bi se izbjeglo višestruko i detaljno prikazivanje istog postupka, u narednoj tabeli će biti dati dobijeni rezultati o položaju geometrijskih čvorova parametarskog modela graničnih krivih bočnih površina tijela pršljena.

Tabela 4.7 Pregled položaja geometrijskih čvorova parametarskog modela graničnih krivih bočnih površina tijela pršljena

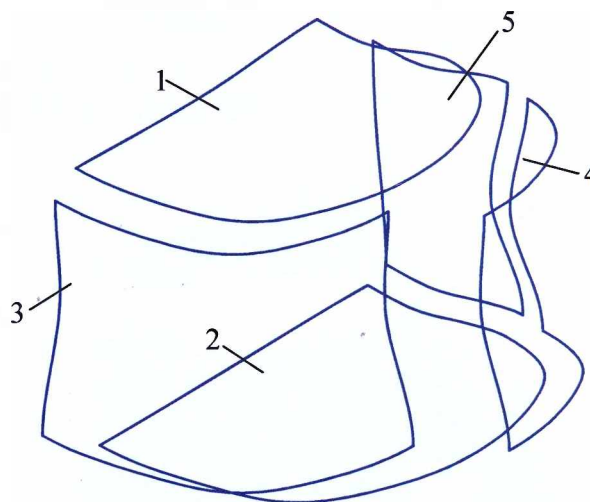
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 9			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(0,0,1)		(0,0,-1)
Geometrijski čvor	Koeficijenti a_1 / a_2	Koeficijenti b_1 / b_2	Koeficijenti c_1 / c_2
p_0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
p_1	0.015 / 0	0 / 0	-0.500 / 0
p_2	0 / 0.018	0 / 0	-1 / 0
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 10			
	Početna tačka granične krive T_p		Krajnja tačka granične krive T_k
Vektor tangente	(0,0,1)		(0,0,-1)
Geometrijski čvor	Koeficijenti a_1 / a_2	Koeficijenti b_1 / b_2	Koeficijenti c_1 / c_2
p_0	-0.640 / 0	0.500 / 0	0.013 / 0.010
p_1	-0.625 / 0	0.436 / 0	-0.238 / -0.257
p_2	0 / -0.611	0 / 0.500	-0.479 / -0.525

Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 11			
	Početna tačka granične krive T_p	Krajnja tačka granične krive T_k	
Vektor tangente	(0,0,1)	(0,0,-1)	
Geometrijski čvor	Koeficijenti a_1 / a_2	Koeficijenti b_1 / b_2	Koeficijenti c_1 / c_2
p_0	-1.089 / 0	0.316 / 0	0.058 / 0.099
p_1	-1.074 / 0	0.310 / 0	-0.192 / -0.188
p_2	0 / -1.061	0 / 0.280	-0.257 / -0.683
Položaj geometrijskih čvorova parametarskog modela granične krive 12			
	Početna tačka granične krive T_p	Krajnja tačka granične krive T_k	
Vektor tangente	(0,0,1)	(0,0,-1)	
Geometrijski čvor	Koeficijenti a_1 / a_2	Koeficijenti b_1 / b_2	Koeficijenti c_1 / c_2
p_0	-1 / 0	0 / 0	0.036 / 0.050
p_1	-0.985 / 0	0 / 0	-0.197 / -0.188
p_2	0 / -0.982	0 / 0	-0.421 / -0.436

4.3.4 Modeliranje elementarnih površina

Po izvršenom modeliranju graničnih krivih elementarnih površina stvorene su pretpostavke i za modeliranje samih površina. Polovina tijela pršljena je modelirana sa pet čeonih i bočnih površina koje su ujedno i osnova za modeliranje površina koje predstavljaju prelazna zaobljenja između čeonih i bočnih površine. Na slici 4.16 su prikazane granične krive koje predstavljaju osnovu za modeliranje elementarnih površina dobijenih dekompozicijom obvojne površine polovine tijela pršljena. Elementarne površine su modelirane kubnim neuniformnim racionalnim B-splajn površinama tj. kubnim *NURBS* površinama, stepena $k=l=3$, definisanim izrazom (A.36). Za veličine težinskih koeficijenata kontrolnih tačaka *NURBS* površina je usvojena vrijednost $w_{ij}=1$. *NURBS* površine su, kao što je objašnjeno u dodatku A, u potpunosti određena sa četiri granične krive i to:

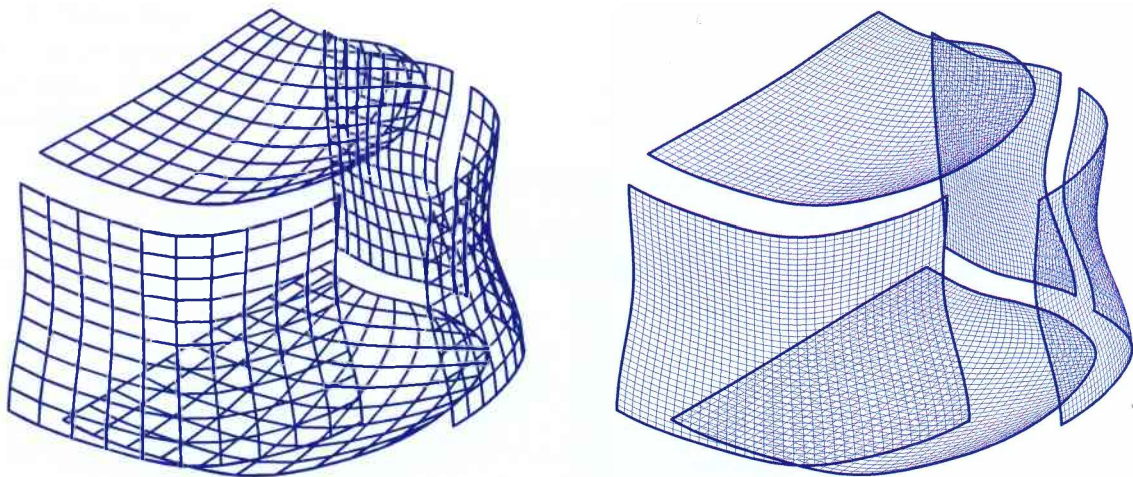
- površina 1 graničnim krivim 1, 2, 3 i 4;
- površina 2 graničnim krivim 5, 6, 7 i 8;
- površina 3 graničnim krivim 1, 5, 9 i 10;
- površina 4 graničnim krivim 2, 6, 10 i 11;
- površina 5 graničnim krivim 3, 7, 11 i 12.



Slika 4.16 Granične krive elementarnih površina polovine tijela pršljena

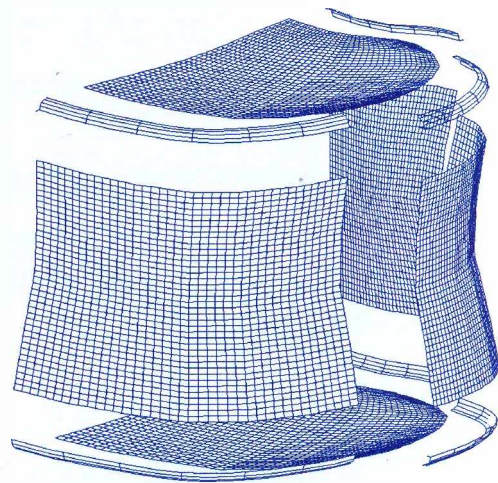
Način generisanja mreže kontrolnih tačaka r_{ij} *NURBS* površine je uslovljen idejom iz koje je i proistekao predlog metode za parametarsko modeliranje geometrije pršljena. Dakle, potrebom da se omogući automatizacija modeliranja pršljena u okruženju izabranog komercijalnog geometrijskog modelera kroz stvaranje osnove, u vidu parametarskog modela pršljena, za razvoj programa za geometrijsko modeliranje. Za realizaciju ovog cilja je izabran geometrijski modeler *Mechanical Desktop 6*, proizvod američke kompanije *AutoDesk Inc*, jedan od najpopularnijih komercijalnih modelera. Izbor okruženja u kojem će se izvršiti automatizacija geometrijskog modeliranja pršljena, tačnije raspoloživi alati izabranog geometrijskog modelera su uslovili opredeljenje da mreža kontrolnih tačaka *NURBS* površine leži na *Coons*-ovoj površini. *Coons*-ova površina je definisana izrazom (A.34) i u potpunosti je, kao što je objašnjeno u dodatku A,

određena sa četiri granične krive. U ovom slučaju to su četiri granične krive *NURBS* površine čija mreža kontrolnih tačaka leži na *Coons*-ovoj površini.



Slika 4.17 Mreže kontrolnih tačaka i *NURBS* površine kojim su modelirane čeon i bočne površine polovine tijela pršljena

Na slici 4.17 su prikazane mreže kontrolnih tačaka čeonih i bočnih elementarnih površina koje leže na *Coons*-ovoj površini i *NURBS* površine generisane prema tako formiranoj mreži kontrolnih tačaka. Na bazi modeliranih *NURBS* površina, prikazanih na slici 4.17, izvršeno je i modeliranje površina koje predstavljaju prelazna zaobljenja između čeonih i bočnih površina polovine tijela pršljena. Ovo modeliranje je izvršeno korišćenjem alata geometrijskog modelera pri čemu su veličine radijusa zaobljenja modeliranih prelaznih površina date u tabeli 3.10. *NURBS* površine kojim je modelirana polovina tijela pršljena su prikazane na slici 4.18



Slika 4.18 *NURBS* površine kojim je modelirana polovina tijela pršljena

4.3.5 Generisanje 3D površinskog modela pršljena

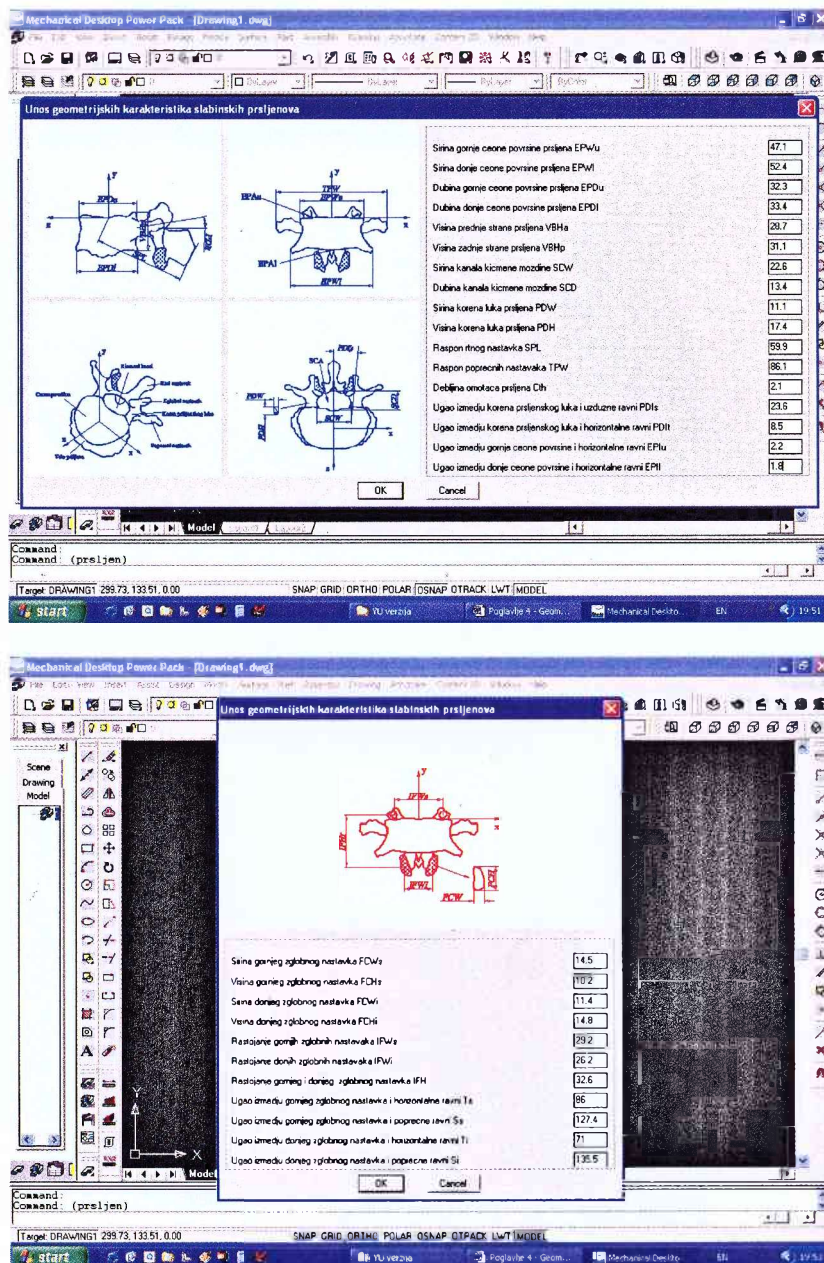
Predloženi model za parametarsko modeliranje geometrije pršljena predstavlja osnovu za automatizaciju procesa rekonstrukcije geometrije pršljena. Automatizacija procesa rekonstrukcije geometrije pršljena je realizovana razvojem odgovarajućeg programa koji na osnovu veličina izabranih geometrijskih karakteristika pršljena generiše 3D površinski model pršljena. Razvoj programa za generisanje 3D površinskog modela pršljena je izvršen u okruženju komercijalnog geometrijskog modelera *Mechanical Desktop 6*. Razvoj programa u okruženju postojećeg geometrijskog modelera omogućava niz pogodnosti poput:

- Korišćenja grafičkog okruženja modelera;
- Korišćenja alata modelera kao biblioteke funkcija koje se po potrebi koriste tokom razvoja programa;
- Mogućnosti čuvanju generisanog 3D površinskog modela pršljena u poznatom formatu koji omogućava jednostavnu razmjenjivost modela sa drugim komercijalnim programima.

Razvojni alati koji su korišćeni tokom razvoja programa za automatizaciju geometrijskog modeliranja pršljena su:

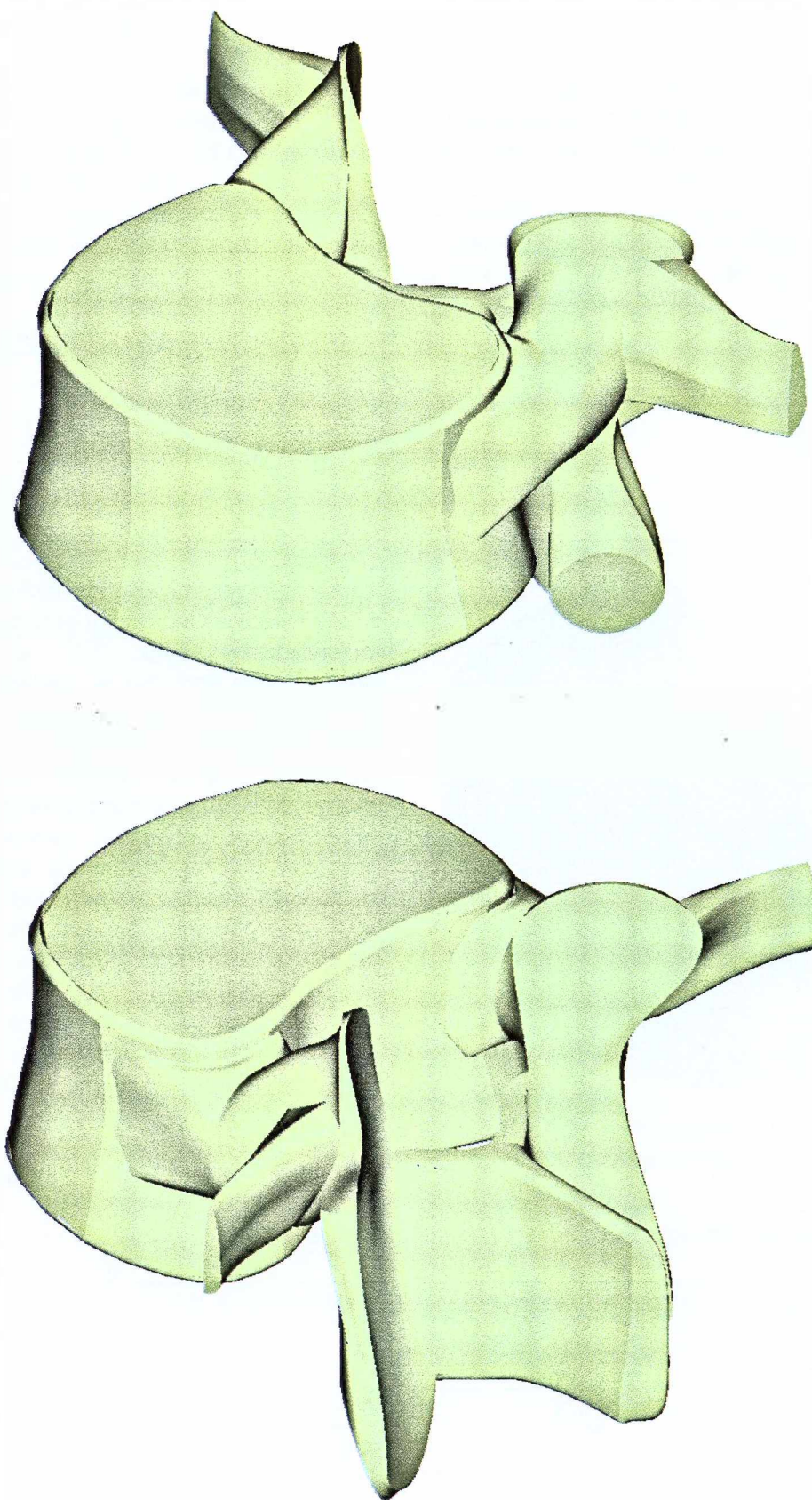
- *DCL* i
- *Visual Lisp*.

DCL je programski jezik koji se u okruženju *Mechanical Desktop*-a koristi za razvoj grafičkog interfejsa. Grafički interfejs programa za unos parametara na osnovu kojih se generiše 3D površinski model pršljena, razvijen u *DCL* jeziku, je prikazan je na slici 4.19.



Slika 4.19 Grafički interfejs programa za parametarsko modeliranje geometrije pršljena

Visual Lisp je jedan od programskih jezika koji se u okruženju *Mechanical Desktop*-a koristi za razvoj sopstvenih funkcija i čitavih programa koji se izvršavaju u okruženju modelera. Ovaj programski jezik je korišćen kao alat za razvoj programa za automatizaciju geometrijskog modeliranja pršljena. Izabrani dijelovi ovog programa su dati u prilogu D. Na narednoj slici je prikazan 3D površinski model generisan na bazi parametarskog modela pršljena autora ovog rada.



Slika 4.20 3D površinski model pršljena

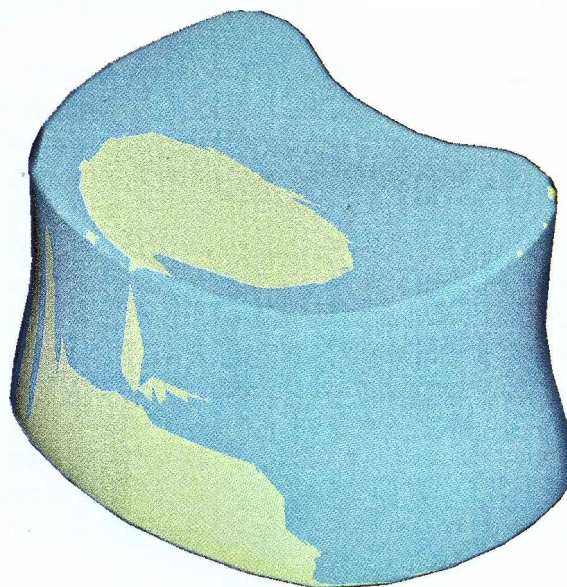
4.4 PROCJENA USPJEŠNOSTI METODA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA

Procjena uspješnosti metoda za parametarsko modeliranje geometrije pršljena je izvršena upoređenjem geometrijskih modela pršljena dobijenih klasičnom metodom na osnovu podataka sa CT slika i modela dobijenih parametarskim modeliranjem geometrije pršljena za osobe pod rednim brojem 1÷4 iz tabele 3.10. Modeli pršljena dobijeni na oba načina su, alatom *Mechanical Desktop*-a za spajanje elementarnih površina, iz površinskih transformisani u solid modele kako bi se mogle odrediti fizičke karakteristike istih. Na osnovu dobijenih solid modela pršljena su određene zapremine tijela pršljena i čitavog pršljena, date u tabeli 4.8, prema oba modela.

Tabela 4.8 Zapremina pršljena određena na osnovu solid modela pršljena

Osoba redni broj	Parametarski model pršljena		Model pršljena rekonstruisan klasičnom metodom	
	Tijelo pršljena [mm ³]	Pršljen [mm ³]	Tijelo pršljena [mm ³]	Pršljen [mm ³]
1	50964	66248	51371	68993
2	39142	52496	39259	54183
3	35509	46213	35707	47820
4	39153	53527	39349	55053

Kvalitet aproksimacije geometrijskog modela pršljena dobijenog klasičnom metodom prema podacima sa CT slika parametarskim modelom pršljena je potvrđen određivanjem zajedničke zapremine ova dva modela. Na slici 4.21 su prikazani preklapljeni solid modeli tijela pršljena dobijeni klasičnom metodom prema podacima sa CT slika, na slici prikazan plavom bojom, i parametarskim modeliranjem geometrije pršljena, na slici prikazan zelenom bojom. Alatom *Mechanical Desktop*-a za traženje presjeka dva solid modela je određena zajednička zapremina tijela pršljena, kao i čitavog pršljena. Upoređenjem ovako određene zajedničke zapremine sa podacima o zapremini tijela pršljena i čitavog pršljena datim u tabeli 4.8 se došlo do podataka o relativnom učešću zajedničke zapremine u pojedinačnim zapreminama koje je dato u tabeli 4.9.



Slika 4.21 Preklapljeni solid modeli tijela pršljena

Tabela 4.9 Relativno učešće zajedničke zapremine u pojedinačnim zapreminama tijela pršljena i čitavog pršljena

Osoba redni broj	Parametarski model pršljena		Model pršljena rekonstruisan klasičnom metodom	
	Tijelo pršljena [%]	Pršljen [%]	Tijelo pršljena [%]	Pršljen [%]
1	99.95	96.94	99.16	93.08
2	99.98	95.32	99.68	94.35
3	99.91	95.89	99.36	93.67
4	99.92	96.02	99.42	93.36

4.5 DISKUSIJA REZULTATA PARAMETARSKOG MODELIRANJA GEOMETRIJE PRŠLJENA

Na osnovu rezultata upoređenja geometrijskih modela pršljena dobijenih klasičnom metodom na osnovu podataka sa *CT* slika i parametarskim modeliranjem geometrije pršljena datih u tabelama 4.8 i 4.9 moguće je donijeti valjanu procjenu uspješnosti parametarskog modeliranja geometrije pršljena. Očigledno je da je parametarsko modeliranje geometrija tijela pršljena izvedeno vrlo uspješno, s obzirom da zajednička zapremina tijela pršljena, određena presjekom odgovarajućih geometrijskih modela dobijenih navedenim metodama, predstavlja više od 99% pojedinačnih zapremina geometrijskih modela tijela pršljena. Parametarsko modeliranje geometrije čitavog pršljena izvedeno je sa nešto manje uspjeha, s obzirom da zajednička zapremina pršljena, određena presjekom odgovarajućih geometrijskih modela dobijenih navedenim metodama, predstavlja (93÷97)% pojedinačnih zapremina geometrijskih modela pršljena. Ovakva razlika geometrijskih modela pršljena je u najvećem dijelu posljedica odstupanja u području spinoznog i poprečnih nastavaka. Naime, zajednička zapremina pršljena bez spinoznog i poprečnih nastavaka, određena presjekom odgovarajućih geometrijskih modela dobijenih navedenim metodama, predstavlja više od 98% pojedinačnih zapremina geometrijskih modela pršljena bez spinoznog i poprečnih nastavaka.

Razlog za manju uspješnost parametarskog modeliranja geometrije čitavog pršljena u odnosu na tijelo pršljena treba tražiti u sljedećim razlozima:

- Složenosti geometrije pršljenskih nastavaka i neadekvatnom broju parametara modela koji odgovaraju geometrijskim karakteristikama spinoznog i poprečnih nastavaka. Naime, parametarskim modelom geometrije pršljena su obuhvaćena svega dva parametra koja odgovaraju geometrijskim karakteristikama spinoznog i poprečnih nastavaka, i to: dužina spinoznog nastavka i raspon poprečnih nastavaka;
- Polaznoj pretpostavci parametarskog modela o simetriji pršljena u odnosu na srednju sagitalnu ravan, zbog čega je parametarski modelirana samo desna polovina pršljena, dok je lijeva polovina generisana ravanski simetričnim preslikavanjem u odnosu na srednju sagitalnu ravan. Ova pretpostavka je, na osnovu dobijenih rezultata, dovoljno tačna za tijelo pršljena, ali ne i za pršljenske nastavke čija se geometrija znatnije razlikuje na suprotnim stranama srednje sagitalne ravni.

Dakle, moguće pravci daljih istraživanja u cilju povećanja uspješnosti parametarskog modeliranja geometrije pršljena bi trebali biti usmjereni ka:

- Uvođenju dodatnih parametara kojim bi se na logičniji način parametarski izrazila geometrija spinoznog i poprečnih nastavaka;
- Zasebnom parametarskom modeliranju geometrije pršljenskih nastavaka sa obje strane srednje sagitalne ravni.

Kako bi se stekla jasnija predstava o povećanju efikasnosti geometrijskog modeliranja predloženim parametarskim modeliranjem geometrije pršljena i njegovom automatizacijom u odnosu na modeliranje geometrije pršljena prema podacima sa *CT* slika, biće dati i neki vremenski pokazatelji koji su rezultat ličnog iskustva autora ovog rada. Za modeliranje geometrije pršljena klasičnom metodom prema podacima sa *CT* slika autoru ovog rada je u prosjeku bilo potrebno oko 15 sati efektivnog rada, a za parametarsko modeliranje geometrije pršljena oko pola sata efektivnog rada u slučaju da je određivana i veličina parametara sa *CT* slika. U slučaju korišćenja podataka o veličinama parametara iz literaturnih izvora, modeliranje geometrije pršljena ne bi trajalo duže od nekoliko minuta.

NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠTANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPETREĆENJE

ENJ

5.1 UVOD

Parametarski model ljudskog pršljena, prikazan u prethodnom poglavlju, definiše geometriju biomehaničkog *FEM* modela ljudskog pršljena čiji se dalji razvoj odvija kroz sljedeće korake:

- Generisanje mreže konačnih elemenata;
- Definisanje mehaničkog opterećenja pršljena;
- Matematičko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje;
- Određivanje raspodjele koštanog tkiva pršljena numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na matematičkom modelu i metodi konačnih elemenata, kojom se za poznato mehaničko opterećenje određuju pokazatelji naponsko-deformacionog stanja pršljena koji upravljaju adaptivnim procesom;
- Određivanje mehaničkih karakteristika (modula elastičnosti, napona na granici plastične deformacije, napona na granici statičkog razaranja) svakog pojedinačnog konačnog elementa *FEM* modela pršljena na osnovu formirane raspodjele koštanog tkiva pršljena.

Numeričko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, kojim se određuje raspodjela koštanog tkiva, će biti realizovana na 3D modelu slabinskog pršljena *L5*. Prema saznanju autora ovog rada to će biti po prvi put izvedeno numeričko modeliranje adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena. Numeričko modeliranje raspodjele koštanog tkiva pršljena će biti bazirano na *Nijmegen* modelu adaptivnog procesa. Pri tome će modeliranje adaptivnog procesa, u cilju upoređenja, biti realizovana modifikacijama ovog modela koje je predložio *M.G.Mullender* sa saradnicima 1994. godine [74], *Z.Xinghua* sa saradnicima 2002. godine [24] i modifikaciji ovog modela koja predstavlja originalni predlog autora ovog rada.

Prema ideji autora ovog rada *Nijmegen* model adaptivnog procesa će biti modifikovan uvođenjem dodatnog koeficijenta, u vidu eksponenta, u funkciju prostornog uticaja. Na ovaj način će biti omogućeno ispitivanje efekta varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces u okruženju. U cilju što realnijeg modeliranja koštanog tkiva *Nijmegen* model će biti modifikovan i uvođenjem ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva u model. Pokazatelji

ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva koji će pri tome biti korišćeni su rezultat istraživanja koje je 1999. godine sproveo *D. Ulrich* sa saradnicima [51].

Nedostatak eksperimentalne verifikacije matematičkih modela adaptivnog procesa je manjkavost većine istraživanja koja se bave matematičkim modeliranjem ovog procesa. U pojedinim istraživanjima, poput istraživanja *Mullender*-a [74], testiranje predloženog modela i njegovo upoređenje sa drugim modelima se vrši isključivo na teorijskom primjeru. U istraživanjima, poput onih koja su sprovedi *Weinans* [77] i *Xinghua* [24], testiranje predloženog modela i njegovo upoređenje sa drugim modelima se takođe vrši na teorijskom primjeru. Međutim, raspodjela koštanog tkiva dobijena modelom *Weinans*-a na primjeru 2D modela butne kosti, odnosno *Xinghua*-e na primjeru 2D modela tijela slabinskog pršljena se upoređuje i sa *CT* snimcima butne kosti, odnosno slabinskog pršljena. Za strukturu koštanog tkiva dobijenu simulacijom adaptivnog procesa se u oba slučaja konstatuje da je topološki vrlo slična realno postojećoj. Ovaj zaključak nije, međutim, potkrepljen bilo kakvim kvantitativnim pokazateljem proisteklim iz upoređenja eksperimentalno utvrđene strukture koštanog tkiva i one dobijene numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa. Stoga se kvantitativno upoređenje eksperimentalnih rezultata i onih dobijenih numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena, u vidu raspodjele relativne gustine koštanog tkiva, koje će biti realizovano tokom ovog istraživanja, na istraživačkom uzorku koji čini deset osoba navedenih u tabeli 3.2, nameće kao značajan iskorak u pravcu prevazilaženja ovog nedostatka.

5.2 FEM MODEL SLABINSKOG PRŠLJENA L_5

Mehaničke karakteristike koštanog tkiva koje predstavlja materijal konačnih elemenata kojim se modelira pršljen će biti određene na osnovu raspodjele relativne gustine koštanog tkiva koja se određuje numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa. Adaptacijom koštanog tkiva na mehaničko opterećenje u matematičkim modelima adaptivnog procesa upravlja neki od pokazatelja naponsko-deformacionog stanja, tj. razlika trenutne veličine izabranog pokazatelja naponsko-deformacionog stanja i veličine istog u stanju ravnoteže. U *Nijmegen* modelima adaptivnog procesa kao pokazatelj naponsko-deformacionog stanja je izabrana gustina deformacione energije. Naponsko-deformaciona analiza kojom se određuje raspodjela gustine deformacione energije će biti izvedena metodom konačnih elemenata. U cilju realizacije navedenih koraka, kojim se određuju mehaničke karakteristike konačnih elemenata pršljena, će biti razvijen program za *FEA* analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena i numeričko modeliranje adaptivnog procesa. Razlozi za razvoj sopstvenog programa su sljedeći:

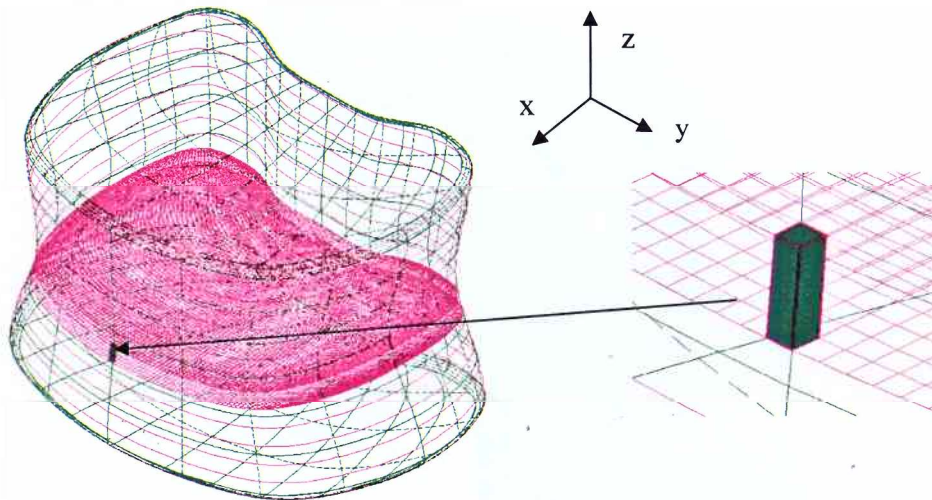
- Numeričko modeliranje adaptivnog procesa se odvija iterativno pri čemu se mehaničke karakteristike konačnih elemenata tokom adaptivnog procesa mijenjaju i iste su za sve elemente samo u početnoj iteraciji. Broj konačnih elemenata kojim se modelira pršljen se mjeri stotinama hiljada elemenata;
- Na osnovu podataka o gustini deformacione energije, dobijenih *FEA* analizom, i jednačine adaptacije treba odrediti priraštaje relativne gustine koštanog tkiva u konačnim elementima modela pršljena, kao i odgovarajuće promjene mehaničkih karakteristika istog.

Stoga će u nastavku ovog poglavlja biti prikazani i izabrani algoritmi, zasnovani na teorijskoj podlozi datoj u dodatku B ovog rada, koji predstavljaju osnovu za razvoj pojedinih funkcija navedenog programa.

5.2.1 Mreža konačnih elemenata pršljena

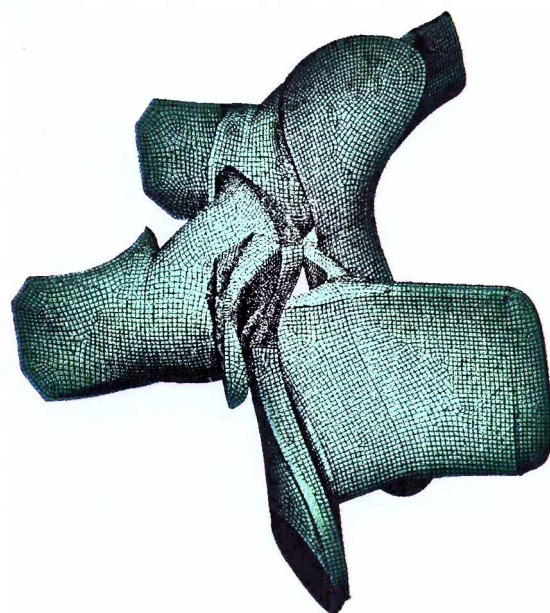
Mrežu konačnih elemenata, kojom se vrši diskretizacija pršljena odnosno odgovarajućeg 3D geometrijskog modela generisanog na način opisan u prethodnom poglavlju ovog rada, čine zapreminski linearni izoparametarski konačni elementi. Detaljna teorijska podloga za ovaj tip konačnog elementa je data u prilogu B ovog rada. Ova vrsta konačnog elementa se uobičajno koristi za *FEM* modele pršljena [24, 74, 77].

Način generisanja mreže konačnih elemenata je uslovljen jednim od ciljeva ovog rada, tj. namjerom da se raspodjela relativne gustine koštanog tkiva tijela pršljena dobijena numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena uporedi sa eksperimentalno određenom raspodjelom relativne gustine koštanog tkiva. Shodno tome, usvojena veličina konačnog elementa, kojim se diskretizuje tijelo pršljena, je takva da konačni element dimenzijama odgovara elementarnoj zapremini skeniranog presjeka, tj. *vokselu*. Dimenzije *vokselu* zavise od uslova pod kojim je vršeno snimanje pršljena na CT skeneru, i to širine snimanih presjeka i rezolucije *piksela*. S obzirom da su CT slike pršljena tokom istraživanja, čiji su rezultati prikazani u trećem poglavlju ovog rada, pravljene u ekvidistantnim poprečnim presjecima širine 2 mm pri rezoluciji *piksela* od 0.5 mm/*piksel* dimenzije konačnog elementa, prikazanog na slici 5.1, iznose 0.5×0.5×2 mm.



Slika 5.1 Mreža čvornih tačaka jednog sloja konačnih elemenata tijela pršljena

Konačni elementi koji formiraju tijelo pršljena osim veličinom moraju i položajem odgovarati *vokselima* snimanih presjeka tijela pršljena. Ova činjenica isključuje mogućnost korišćenja automatizovanih generatora mreže konačnih elemenata komercijalnih *FEA* programa. Shodno tome u okviru programa za automatsko generisanje geometrijskog modela pršljena koji je razvio autor ovog rada, a o kojem je već bilo riječi u prethodnom poglavlju, razvijen je i modul za automatsko generisanja mreže konačnih elemenata tijela pršljena prilagođene dimenzijama i položaju *vokselu* snimanih presjeka pršljena. Formirana mreža čvornih tačaka jednog sloja ovako generisanih konačnih elemenata je prikazana na slici 5.1. Generisanje mreže konačnih elemenata pršlenskog luka sa nastavcima je izvršeno komercijalnim *FEA* programom *ALGOR 15* američke kompanije *Algor Inc.* S obzirom da na tržištu postoji priličan broj *FEA* programa opredeljujući faktor za izbor

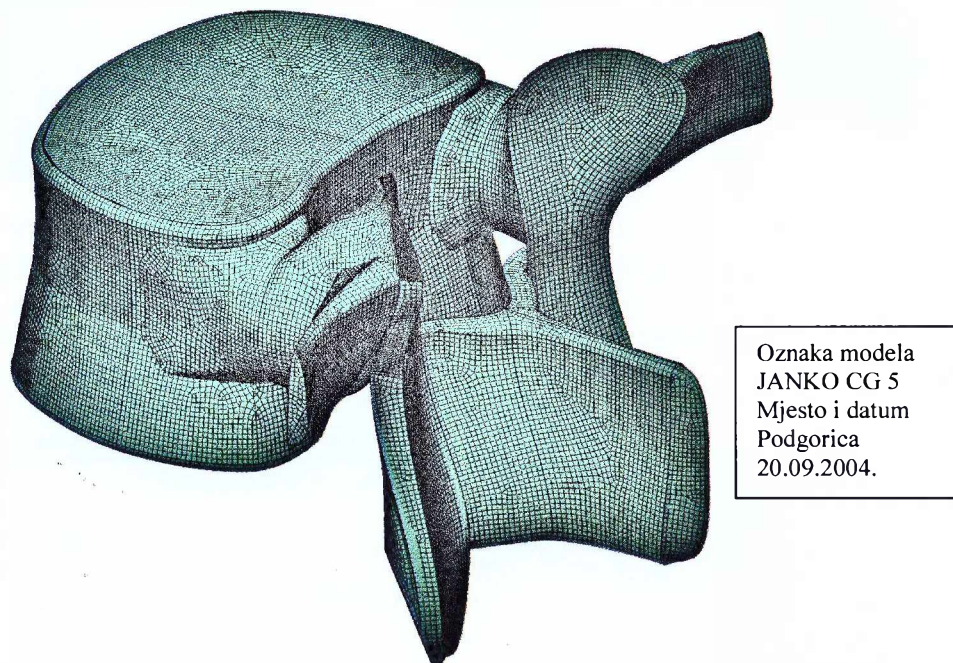


Slika 5.2 Mreža konačnih elemenata pršlenskog luka sa nastavcima

ALGOR-a je bio partnerski odnos koji postoji između proizvođača ovog programa i kompanije *AutoDesk Inc.* čiji je geometrijski modeler *Mechanical Desktop 6* korišćen za generisanje 3D

modela pršljena. S obzirom na ovu činjenicu razmjena podataka između ovih programa se uobičajno izvodi bez poteškoća. Pored navedenog *ALGOR* posjeduje i izuzetne mogućnosti za eksportovanje podataka o generisanom *FEM* modelu u *ASCII* fajlove kojim se naknadno može jednostavno manipulirati. 3D geometrijski model pršljena je iz *Mechanical Desktop*-a eksportovan u *ALGOR*, u *IGES* formatu, i iskorišćen za automatsko generisanje mreže konačnih elemenata pršljenkog luka sa nastavcima prikazane na slici 5.2.

Na prethodno opisan način je generisana mreža konačnih elemenata biomehaničkog *FEM* modela za pršljene svih osoba, navedenih u tabeli 3.2, koje predstavljaju istraživački uzorak. Formirana mreža konačnih elemenata jednog od pršljena je prikazana na slici 5.3.



Slika 5.3 Mreža konačnih elemenata biomehaničkog *FEM* modela pršljena

Podaci o položaju čvornih tačaka, indeksima čvornih tačaka i konačnih elemenata, kao i pripadnosti čvornih tačaka konačnim elementima tijela pršljena, prikazanim na slici 5.1, i pršljenkog luka sa nastavcima, prikazanim na slici 5.2, su eksportovani u *ASCII* fajl u cilju naknadnog korišćenja. U tabeli 5.1 su dati podaci o broju konačnih elemenata i stepena slobode *FEM* modela pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.

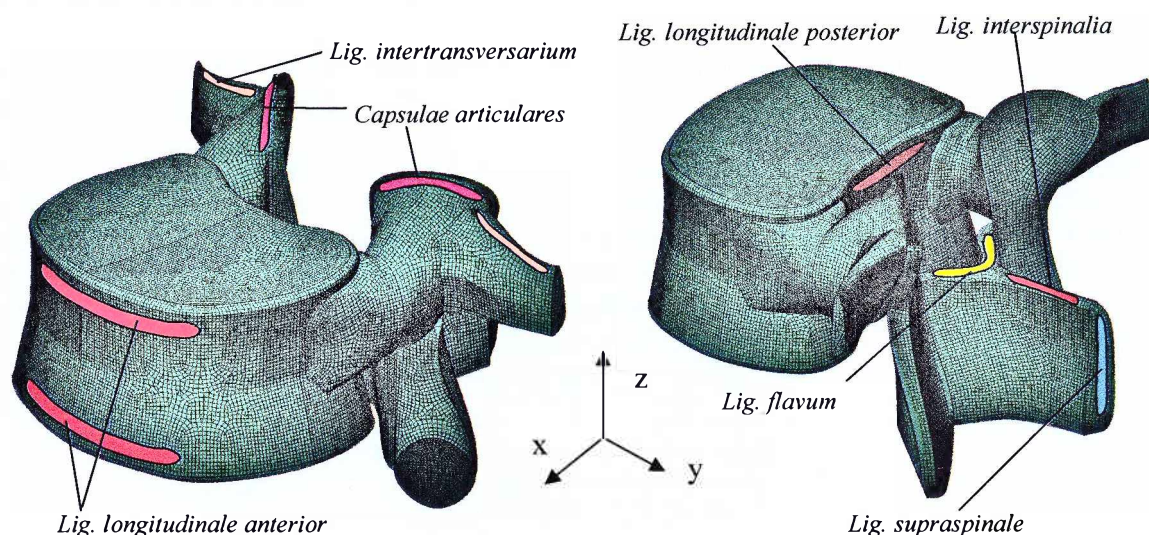
Tabela 5.1 Karakteristike *FEM* modela pršljena

Redni broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Br.konačnih elemenata	133564	105999	96409	106242	130561	166250	153740	129705	164627	155717
Br.stepena slobode	454572	347004	319119	350307	427971	545292	503982	426903	536205	506946

5.2.2 Konačni elementi ligamenata

Ligamenti kojim je pršljen vezan sa susjednim pršljenima su, po uzoru na *FEM* model slabinskog dijela kičmenog stuba koji je razvio *Chen* [35], modelirani kabl konačnim elementima. Detaljna teorijska podloga za ovaj tip konačnog elementa je data u prilogu B ovog rada. Ovi elementi, postavljeni duž *z* koordinatne ose, jednim krajem su vezani za pršljen, a drugim za nepokretni oslonac. Karakteristike kabl konačnih elemenata, kojim su modelirani

različiti ligamenti, su date u tabeli 2.17. Položaj tačaka vezivanja kabl konačnih elemenata za pršljen je prikazan na slici 5.4.



Slika 5.4 Položaj tačaka vezivanja kabl konačnih elemenata za pršljen

U tabeli 5.2 su dati podaci o broju kabl konačnih elemenata kojim su modelirani ligamenti koji je usvojen prema podacima iz tabele 2.16.

Tabela 5.2 Broj konačnih elemenata ligamenta

Ligamenti	Konačni element	Broj konačnih elemenata
<i>Lig. longitudinale anterior</i>	Kabl element sa 2 čvora	20
<i>Lig. longitudinale posterior</i>		20
<i>Lig. intertransversarium</i>		8
<i>Lig. flavum</i>		10
<i>Lig. interspinalia</i>		6
<i>Lig. supraspinale</i>		2
<i>Capsulae articulares</i>		8

5.2.3 Karakteristike materijala konačnih elemenata

Mreža konačnih elemenata pršljena, formirana na prethodno opisani način, se koristi za numeričko modeliranje adaptivnog procesa prema modelima *Mullender-a*, *Xinghua-e* i originalnom modelu autora ovog rada. Koštano tkivo pršljena, koje predstavlja materijal konačnih elemenata, je sledećih karakteristika:

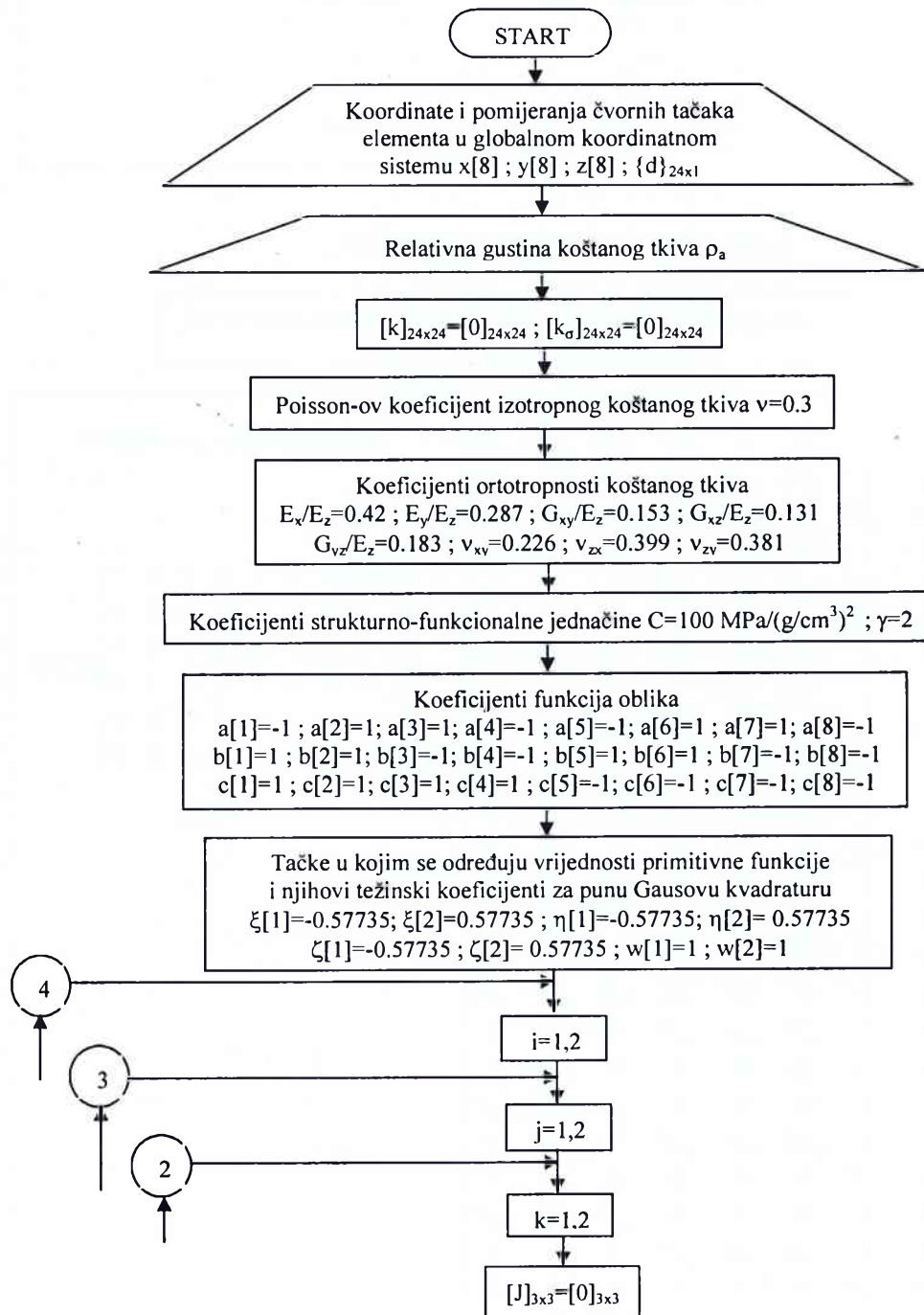
- U modelu *Mullender-a* i *Xinghua-e* je izotropno sa *Poisson*-ovim koeficijentom $\nu=0.3$, dok se modul elastičnosti određuje prema izrazu (2.34);
- U originalnom modelu autora ovog rada je, tokom ispitivanja efekta varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces, takođe izotropno sa *Poisson*-ovim koeficijentom $\nu=0.3$, a modul elastičnosti se određuje prema izrazu (2.34);
- U originalnom modelu autora ovog rada se, nakon utvrđenog efekta varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces, uvodi ortotropnost spongioznog koštanog tkiva utvrđena istraživanjem *Ulrich-a* [51]. Veličine *Poisson*-ovog koeficijenta utvrđene tokom ovog istraživanja su date u tabeli 2.4. Modul elastičnosti u pravcu z ose se određuje prema izrazu (2.34), dok se veličine modula elastičnosti u pravcima preostalih osa, kao i veličine modula klizanja određuju prema koeficijentima ortotropnosti datim u tabeli 2.3.

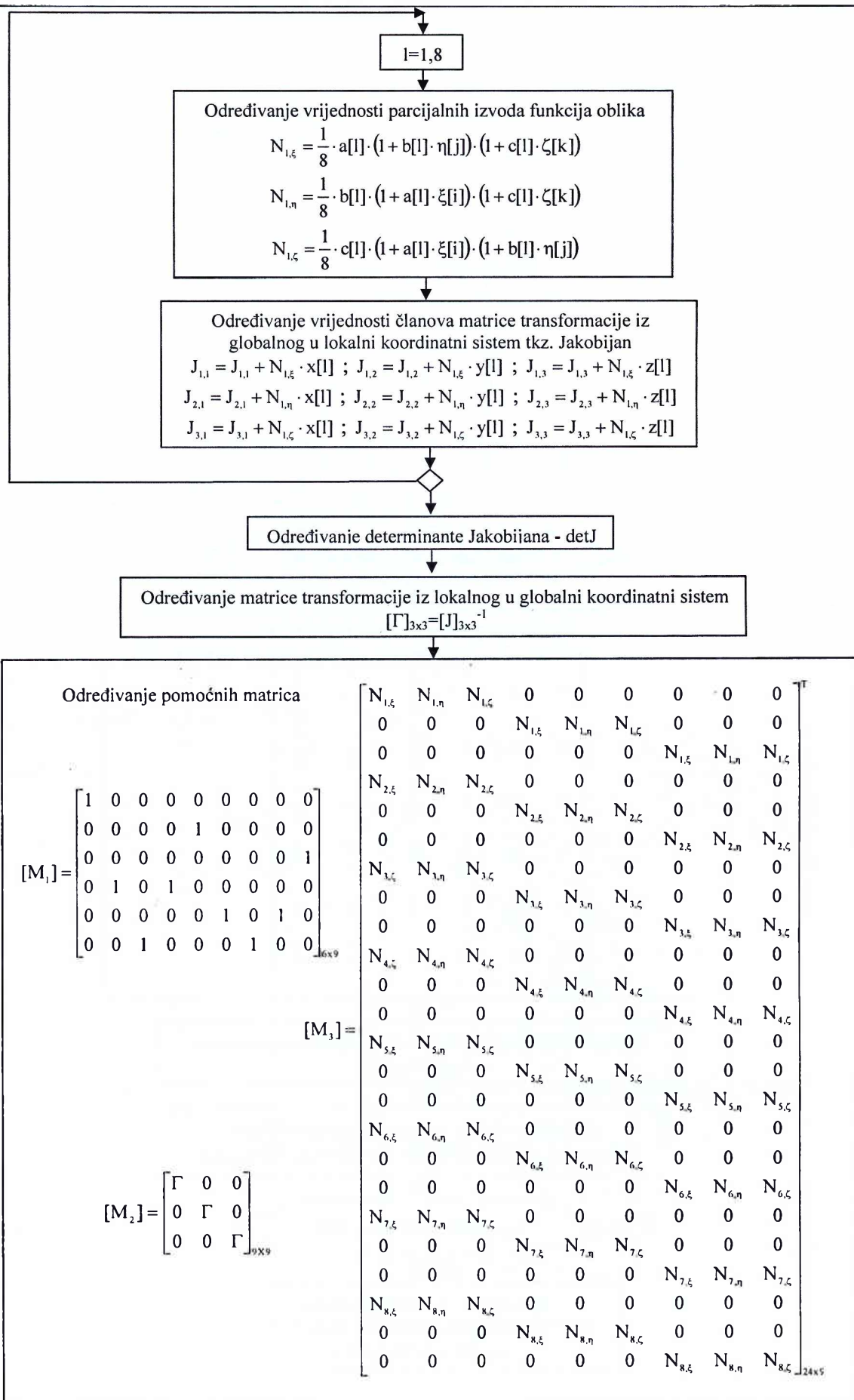
Početna raspodjela relativne gustine koštanog tkiva je ravnomjerna sa relativnom gustinom koja iznosi $\rho_a=0.8 \text{ g/cm}^3$.

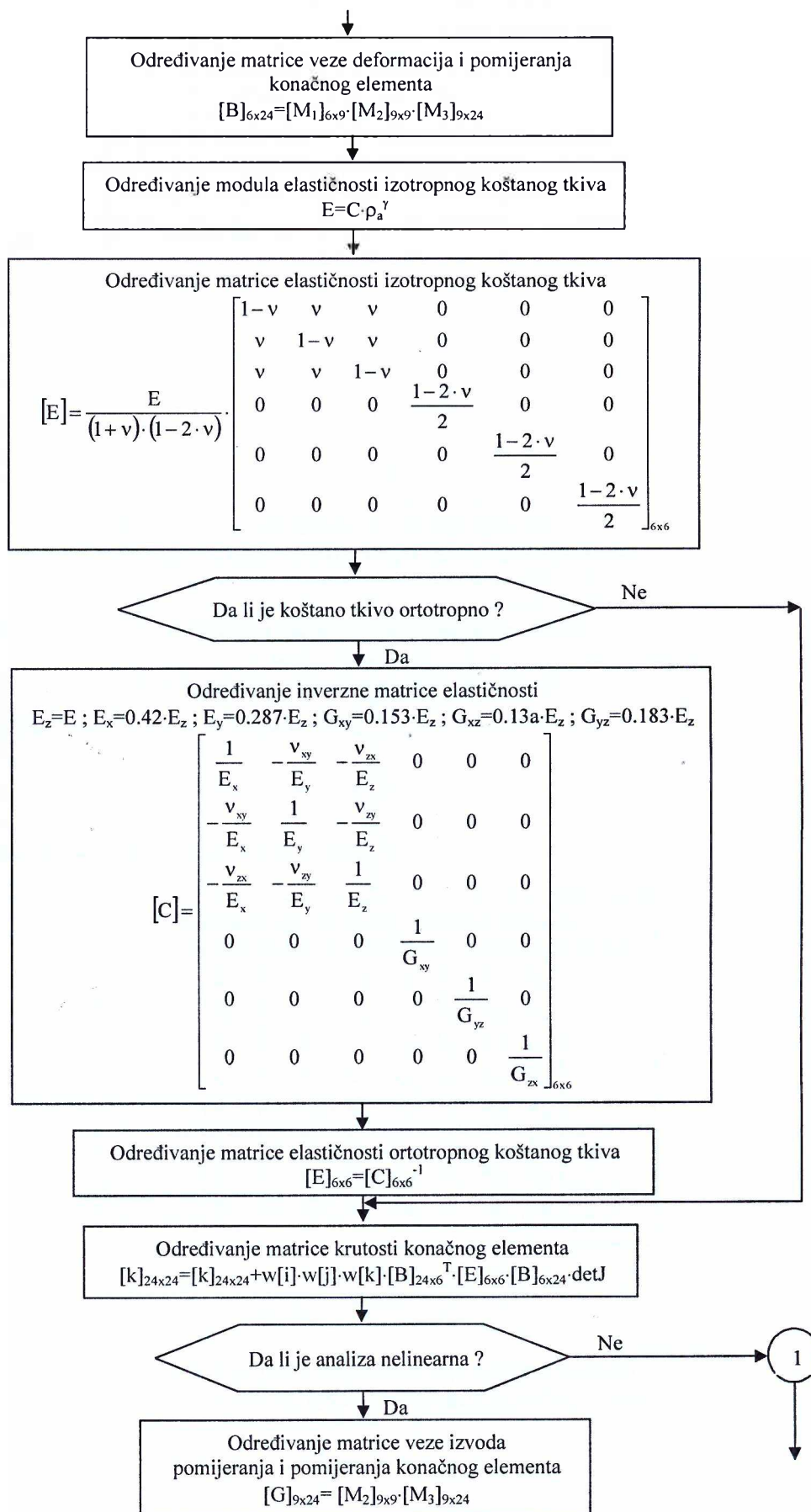
Tkivo ligamenata koje predstavlja materijal kabl konačnih elemenata je modelirano kao izotropno. Modul elastičnosti tkiva ligamenata se određuje na osnovu funkcionalne veze deformacije i modula elastičnosti date u tabeli 2.17.

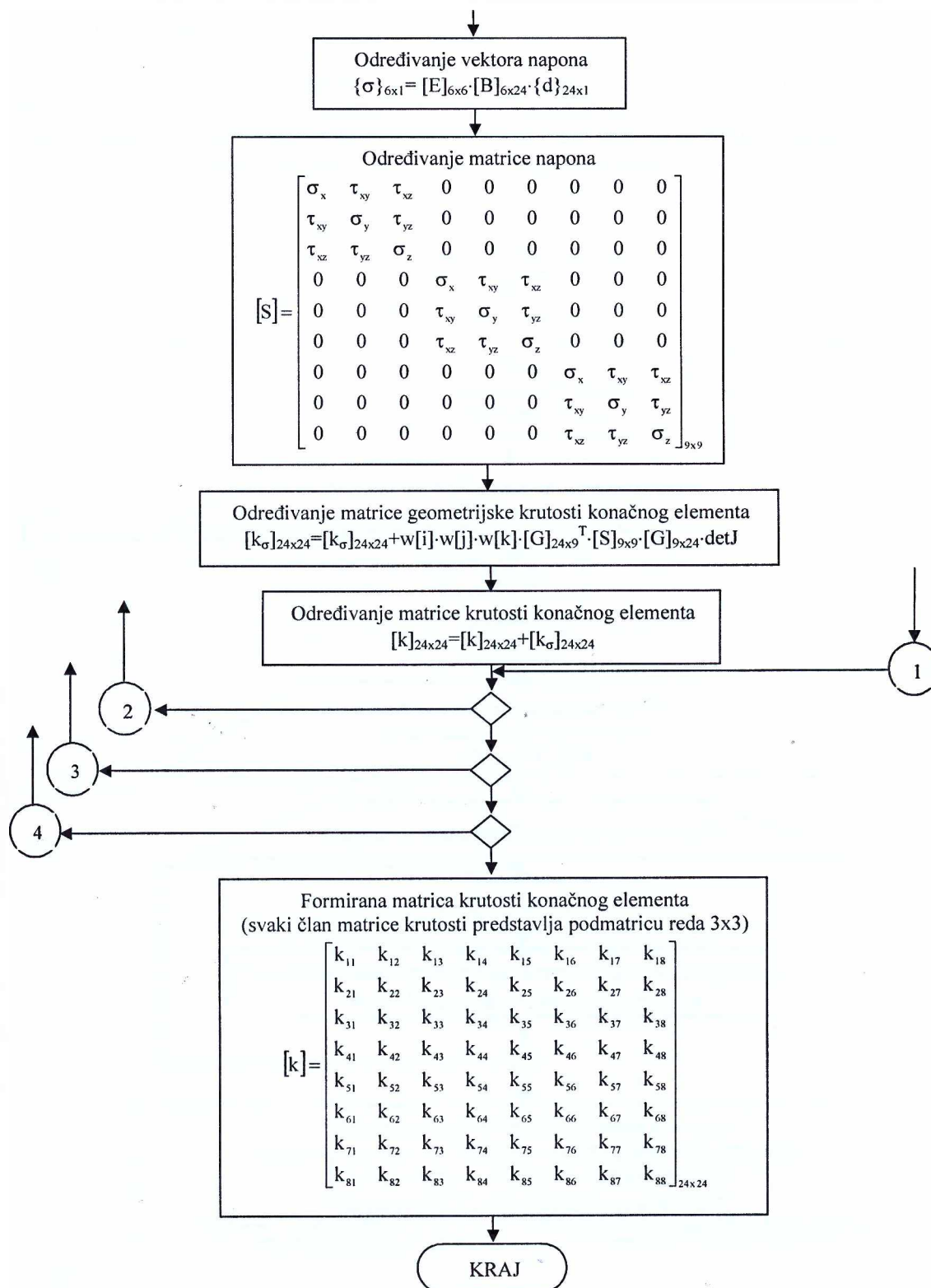
5.2.4 Algoritam za određivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa

Na bazi teorijske podloge, date u prilogu B ovog rada, razvijen je algoritam za određivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa. Algoritam, prikazan na slici 5.5, je iskorišćen kao osnova za razvoj programskog modula **MKI** za određivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa, koji je sastavni dio programa razvijenog za simulaciju adaptivnog procesa.





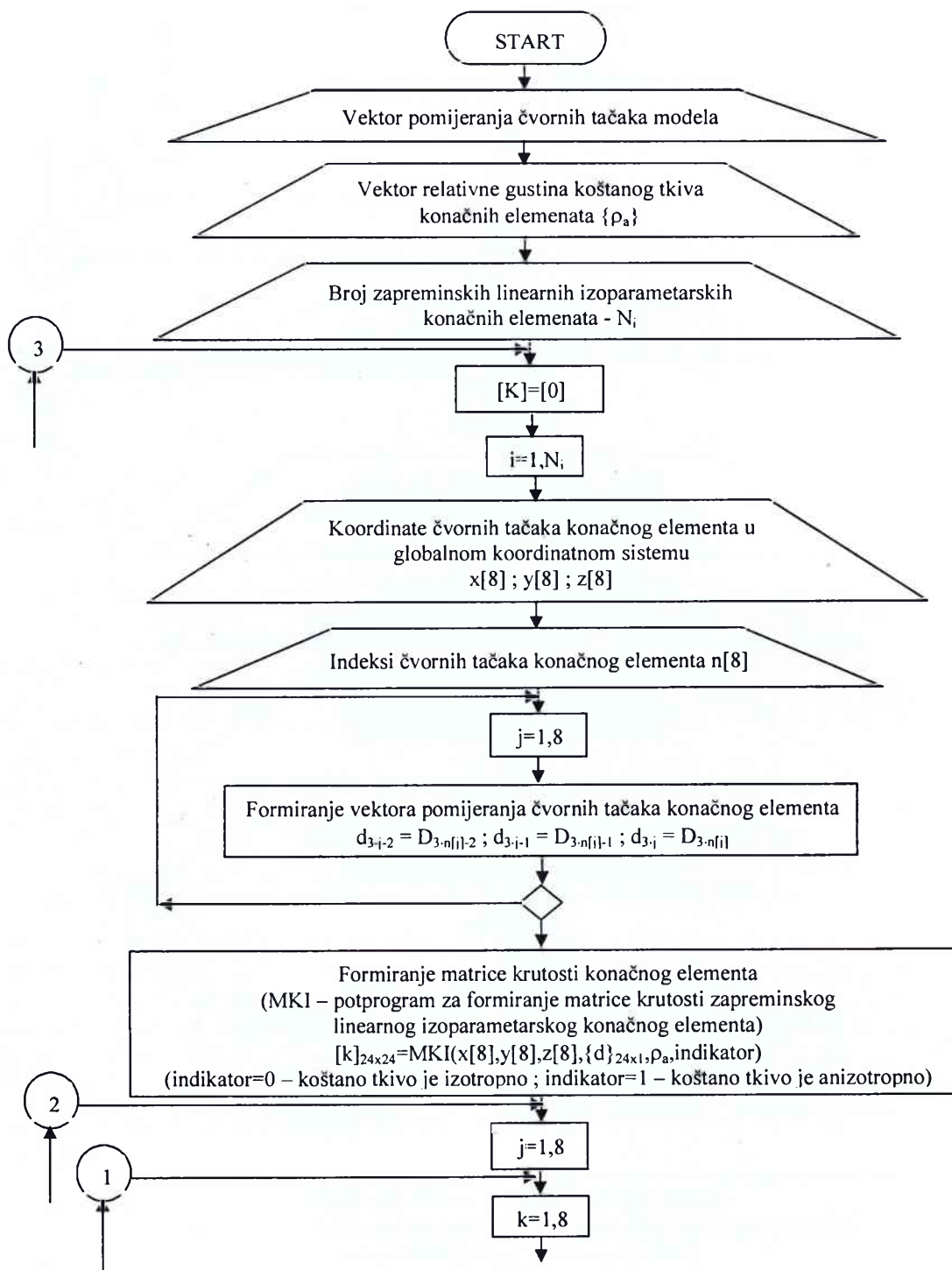


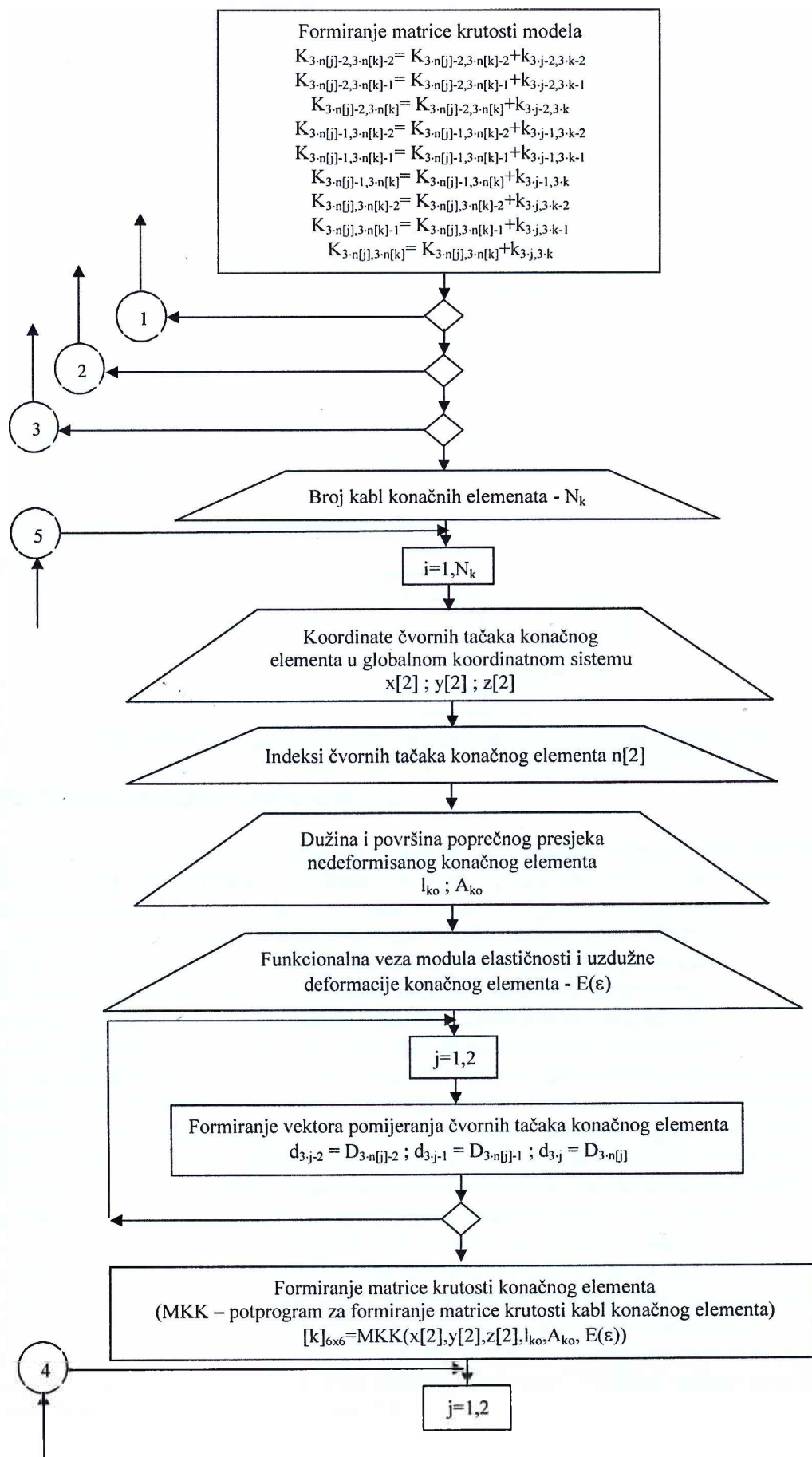


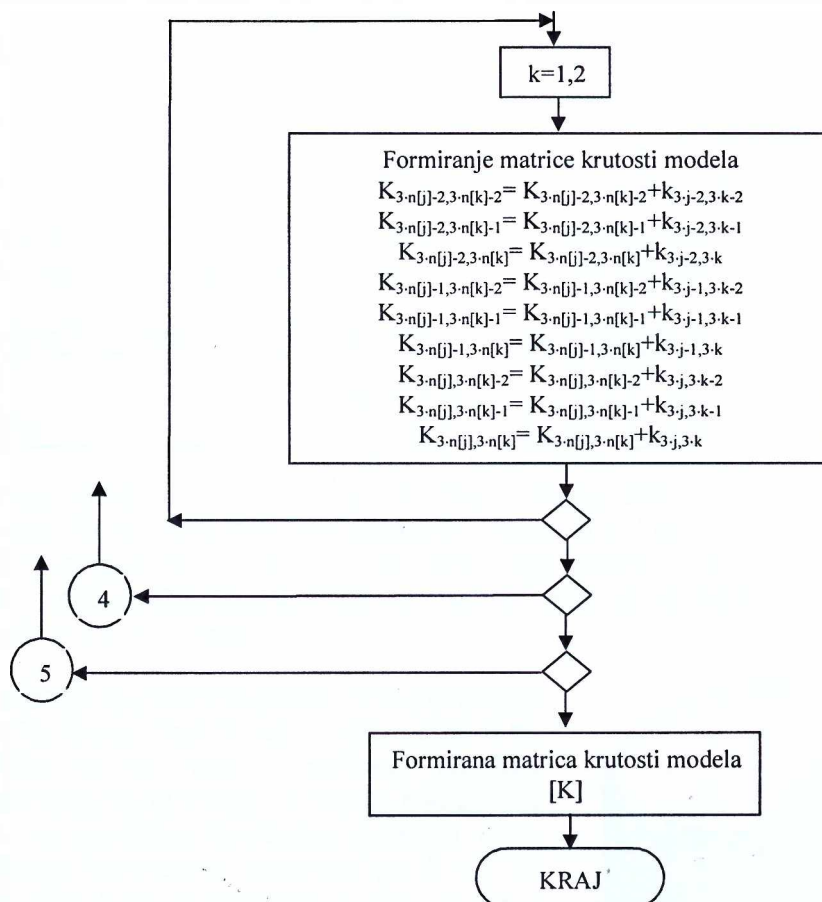
Slika 5.5 Algoritam za određivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa

5.2.5 Algoritam za određivanje matrice krutosti *FEM* modela pršljena

Na bazi teorijske podloge, date u prilogu B ovog rada, razvijen je algoritam za određivanje matrice krutosti *FEM* modela pršljena. Algoritam, prikazan na slici 5.6, je iskorišćen kao osnova za razvoj programskog modula **MKM** za određivanje matrice krutosti *FEM* modela pršljena, koji je sastavni dio programa razvijenog za simulaciju adaptivnog procesa.






 Slika 5.6 Algoritam za određivanje matrice krutosti *FEM* modela pršljena

5.2.6 Mehaničko opterećenje pršljena

Osnovni uzročnik opterećenja pršljena je težina tijela. Opterećenje pršljena izazvano težinom tijela, u vidu sile pritiska i smičuće sile koje djeluju na pršljen, je određeno modelom, prikazanim na slici 2.13. U cilju identifikacije položaja tijela u toku dnevnih aktivnosti izvršeno je snimanje položaja tijela autora ovog rada u toku radnog dana. Identifikacija položaja tijela tokom dnevnih aktivnosti je izvršena po uzoru na istraživanje koje je sprovedla *T.Newell* u cilju utvrđivanja opterećenje kičmenog stuba stomatologa [114]. Snimanje je izvršeno digitalnom kamerom, pri čemu je tajmer podešen tako da kamera pravi snimak na svakih deset minuta. Snimci su potom importovani u program *Mechanical Desktop 6* u kojem su određene veličine uglova, naznačenih na slici 2.13, koji u korišćenom modelu određuju položaj tijela. Dobijeni rezultati o veličinama uglova, koji određuju položaj tijela, se nalaze u granicama rezultata dobijenih tokom istraživanja *Newell*. Na osnovu ovako određenih uglova, koji definišu položaj tijela, i podataka o masi i visini osoba iz tabele 3.2, koje predstavljaju istraživački uzorak, je određeno opterećenje pršljena. Analizom dobijenih rezultata su identifikovani snimljeni položaji tijela kojim odgovara minimalno i maksimalno opterećenje pršljena, kao i dva položaja tijela kojim odgovara opterećenje pršljena čiji je intezitet približno jednak srednjoj vrijednosti intervala definisanog minimalnim i maksimalnim opterećenjem pršljena snimljenih položaja tijela. Ovim položajima su dodata i dva, po procjeni autora ovog rada, ekstremna položaja tijela pri kojim je u sjedećem položaju moguć rad, a koji bi odgovarali minimalnom i maksimalnom opterećenju pršljena. Na ovaj način je definisano šest položaja tijela na osnovu kojih je određeno prosječno opterećenje pršljena u toku dnevnih aktivnosti. Veličine uglova koji definišu šest izabranih položaja tijela su date u tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Veličine uglova koje određuju izabrane položaje tijela tokom dnevnih aktivnosti

Položaj tijela	1	2	3	4	5	6
θ_1 [°]	18.8	16.2	15.1	19.3	5.0	25.5
θ_2 [°]	35.3	32.3	29.2	35.4	15.5	36.0
θ_3 [°]	21.5	22.0	22.2	21.2	25.5	20.0

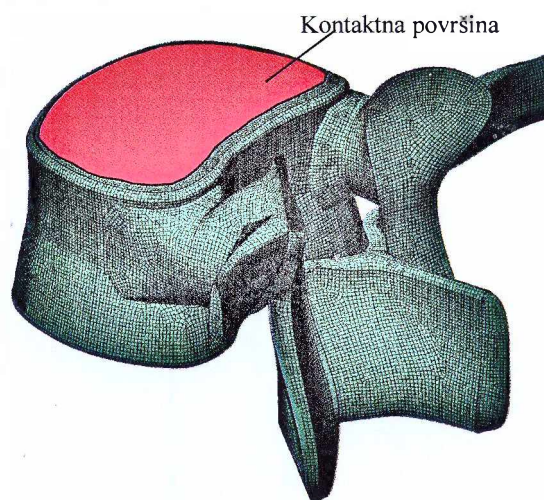
U tabeli 5.3 su date prosječne veličine sile pritiska FC i smičuće sile FS koje djeluju na pršljen, u toku dnevnih aktivnosti, za svih deset osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.

Tabela 5.3 Prosječno opterećenje pršljena u toku dnevnih aktivnosti

Redni broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FC [N]	1345	1051	826	1217	1033	1624	1478	1184	1561	1411
FS [N]	152	124	101	140	121	178	166	135	173	158

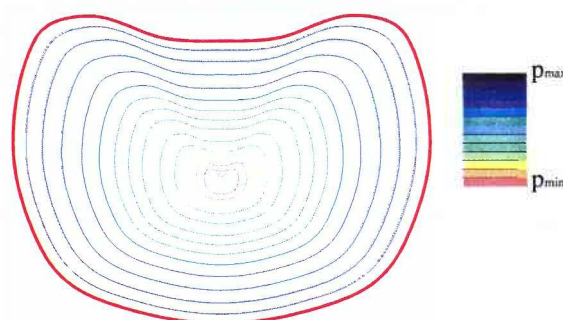
Ovako određeno opterećenje se na pršljen prenosi preko kontaktnih površina tijela pršljena i kontaktnih površina zglobnih nastavaka. Prema *W.C.Fan*-u 82% od ukupne sile pritiska se na pršljen prenosi preko kontaktnih površina tijela pršljena, dok se preostalih 18% od sile pritiska, kao i smičuća sila prenose preko kontaktnih površina zglobnih nastavaka [137]. Ovaj odnos je korišćen i u ovom radu.

Posljedica dejstva sile pritiska kojoj je pršljen izložen u toku dnevnih aktivnosti, a koja se na pršljen prenosi preko kontaktnih površina tijela pršljena, je kontaktni pritisak koji djeluje na ove površine. Kontaktna površina tijela pršljena predstavlja površinu po kojoj se odigrava kontakt međupršljenskog diska i tijela pršljena. Prema preporukama *Z.Xinghua* [24], kao i na osnovu analize sopstvenih *CT* snimaka pršljena, granice kontaktne površine su u odnosu na spoljnu ivicu gornje i donje površine tijela pršljena uvučene za 2 mm kao što je prikazano na slici 5.7. Oblik raspodjele kontaktnog pritiska je usvojen u skladu sa preporukama *Xinghua*-e, koje su rezultat njegovih eksperimentalnih istraživanja, a korišćene su tokom modeliranja adaptivnog



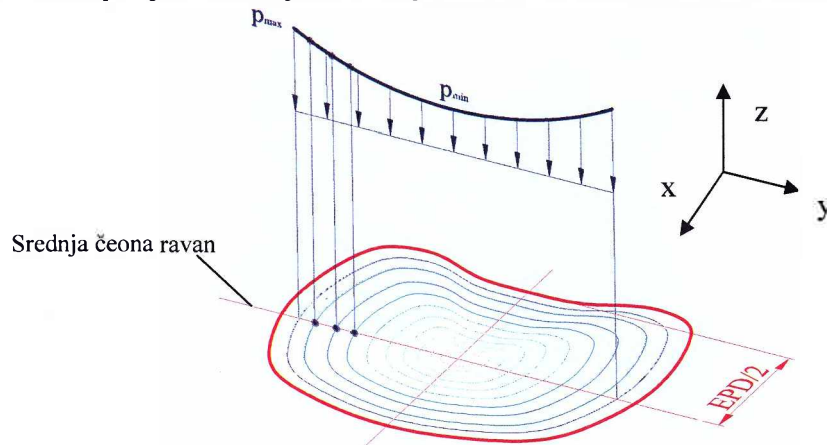
Slika 5.7 Kontaktna površina pršljena i međupršljenskog diska

procesa na 2D modelu srednjeg čeonog presjeka tijela slabinskog pršljena. Oblik raspodjele kontaktnog pritiska u srednjoj čeonoj ravni tijela pršljena, prikazan na slici 2.23, prema *Xinghua*-i odgovara konkavnoj paraboli sa odnosom maksimalnog i minimalnog kontaktnog pritiska $p_{max}:p_{min}=3.5:0.3$ [24]. Na bazi preporuka *Xinghua*-e je formirana 3D raspodjela kontaktnog pritiska čiji intezitet opada od spoljnje ivice ka središtu gornje odnosno donje površine tijela pršljena. Za odnos maksimalnog i minimalnog kontaktnog pritiska je korišćen odnos koji je koristio i *Xinghua*. Na ovaj način su dobijene izolinijske kontaktne površine tijela pršljena, prikazane na slici 5.8. Oblik izolinijske kontaktne površine je određen oblikom granične konture donje i gornje površine tijela pršljena. Način određivanja



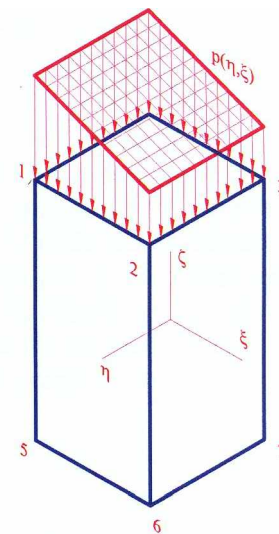
Slika 5.8 Izolinijske kontaktne površine

splajn krivih koje definišu oblik granične konture donje i gornje površine tijela pršljena je obrazložen u prethodnom poglavlju ovog rada. Raspodjela kontaktnog pritiska koji djeluje na tijelo pršljena u srednjoj čeonj ravni, prikazana na slici 5.9, je oblika kakav je koristio i *Xinghua* i u potpunosti određuje 3D raspodjelu kontaktnog pritiska koji djeluje na donju i gornju površinu tijela pršljena. Veličine kontaktnog pritiska na izolinijama se određuju prema kontaktnom pritisku u tački presjeka izolinije sa srednjom čeonom ravni kao što je prikazano na slici 5.9.



Slika 5.9 Oblik raspodjele kontaktnog pritiska u srednjoj čeonj ravni tijela pršljena

U okruženju geometrijskog modelera *Mechanical Desktop 6* je razvijen program kojim se automatizuje nalaženje presječnih tačaka srednje čeone ravni i izolinija kontaktnog pritiska koje prolaze kroz čvorne tačke konačnih elemenata koje se nalaze na kontaktnoj površini tijela pršljena. Na ovaj način se određivanje kontaktnog pritiska u čvornim tačkama konačnih elemenata na kontaktnoj površini svodi na određivanje kontaktnog pritiska u odgovarajućim tačkama srednje čeone ravni. Raspodjela kontaktnog pritiska po stranici konačnog elementa, prikazana na slici 5.10, koja predstavlja dio kontaktne površine tijela pršljena je opisana kombinacijom vrijednosti kontaktnog pritiska u čvornim tačkama stranice i odgovarajućih funkcija oblika [130]:



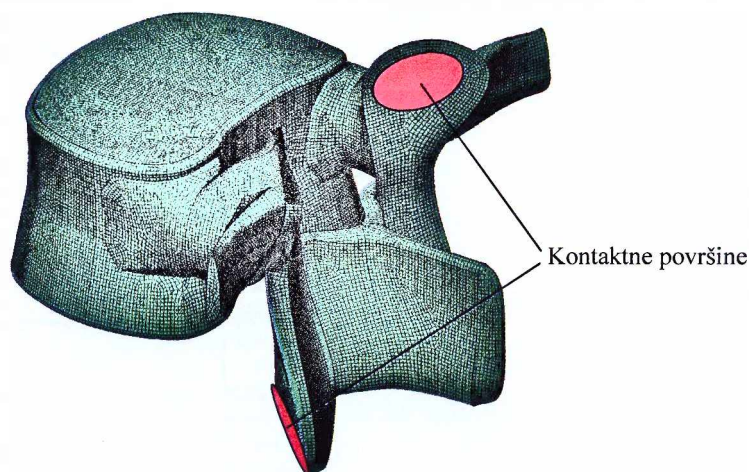
Slika 5.10 Raspodjela kontaktnog pritiska na stranici konačnog elementa koja predstavlja dio kontaktne površine

$$\begin{aligned} p(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 p_i \cdot N_i(\xi, \eta) \quad , \text{za } \zeta = 1 \\ p(\xi, \eta) &= \sum_{i=5}^8 p_i \cdot N_i(\xi, \eta) \quad , \text{za } \zeta = -1 \end{aligned} \quad (5.1).$$

Funkcije oblika u prethodnom izrazu su za zapreminski linearni izoparametarski konačni element defmisane izrazom (B.38).

Posljedica dejstva opterećenja kojem je pršljen izložen u toku dnevnih aktivnosti, a koja se na pršljen prenosi preko kontaktnih površina zglobnih nastavaka, je kontaktni pritisak koji djeluje na ove površine. Kontaktna površina zglobnih nastavaka predstavlja površinu po kojoj se odigrava kontakt zglobnih nastavaka susjednih pršljena. Publikovana istraživanja opterećenja

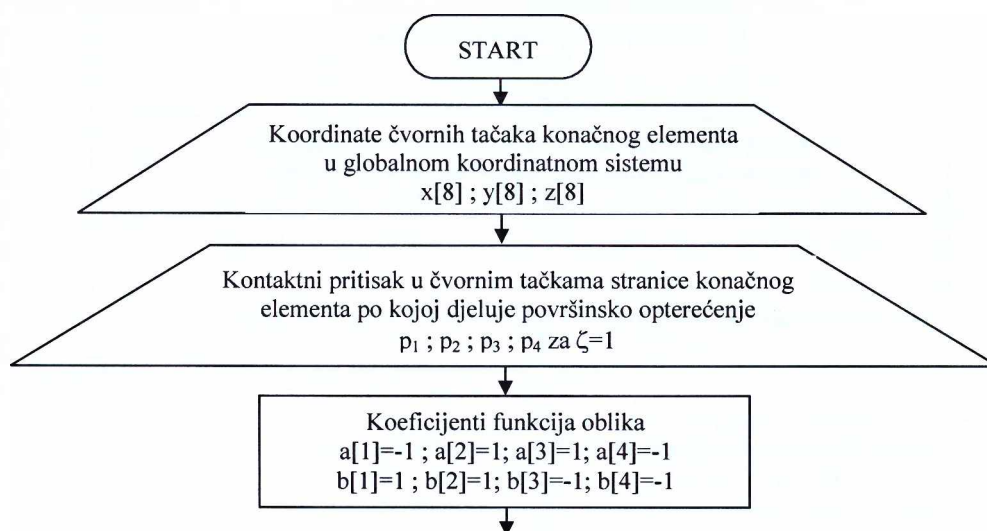
pršljena ne sadrže bilo kakve podatke o obliku raspodjele kontaktnog pritiska koji se na pršljen prenosi preko zglobnih nastavaka. Stoga je, autor ovog rada, aproksimativno usvojio da se opterećenje, u vidu sile pritiska i smičuće sile, koje se prenosi preko zglobnih nastavaka pršljena ravnomjerno raspodjeljuje na prethodno identifikovane čvorne tačke konačnih elemenata koje se nalaze na kontaktnim površinama gornjih i donjih zglobnih nastavaka prikazanim na slici 5.11.

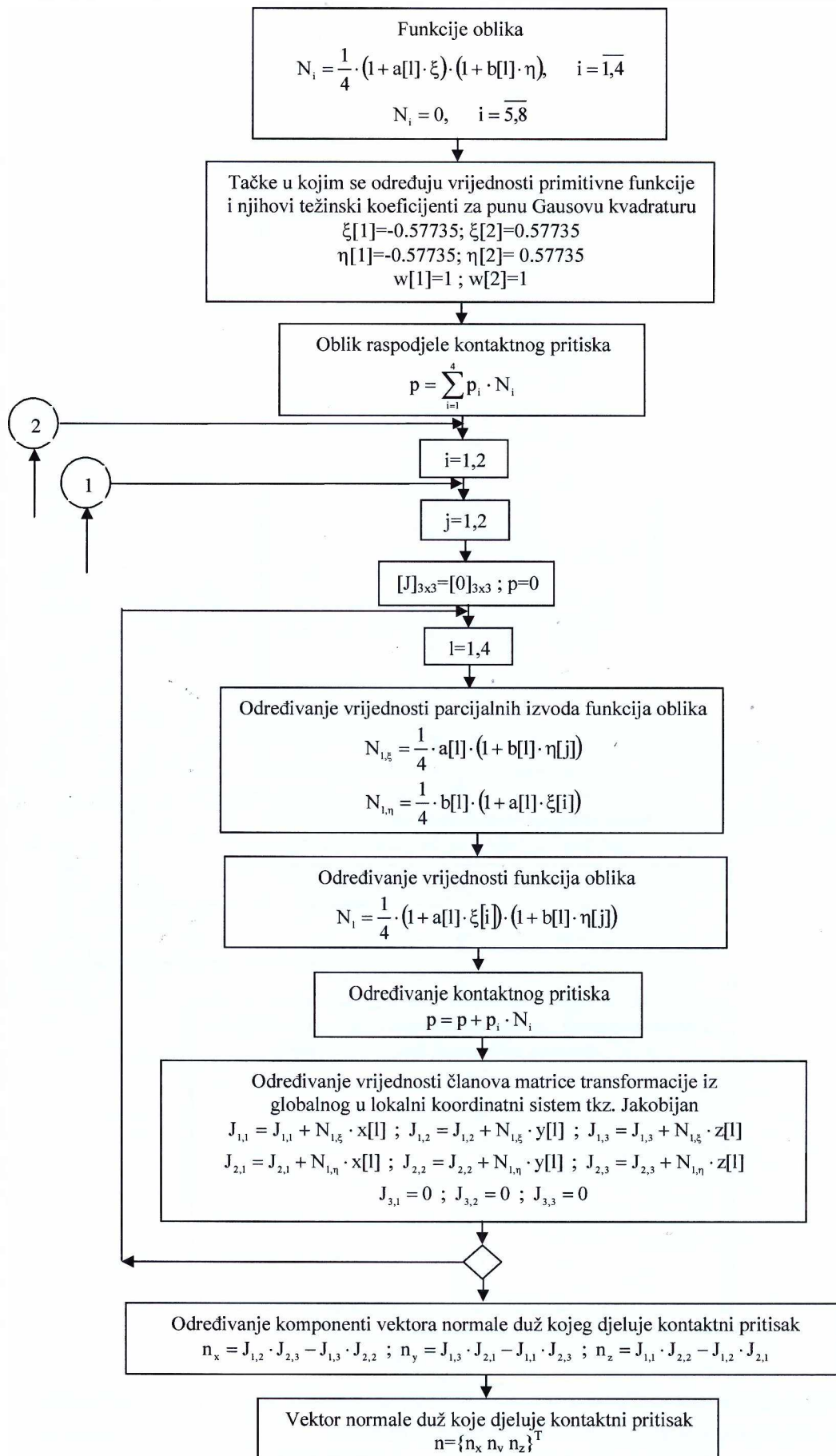


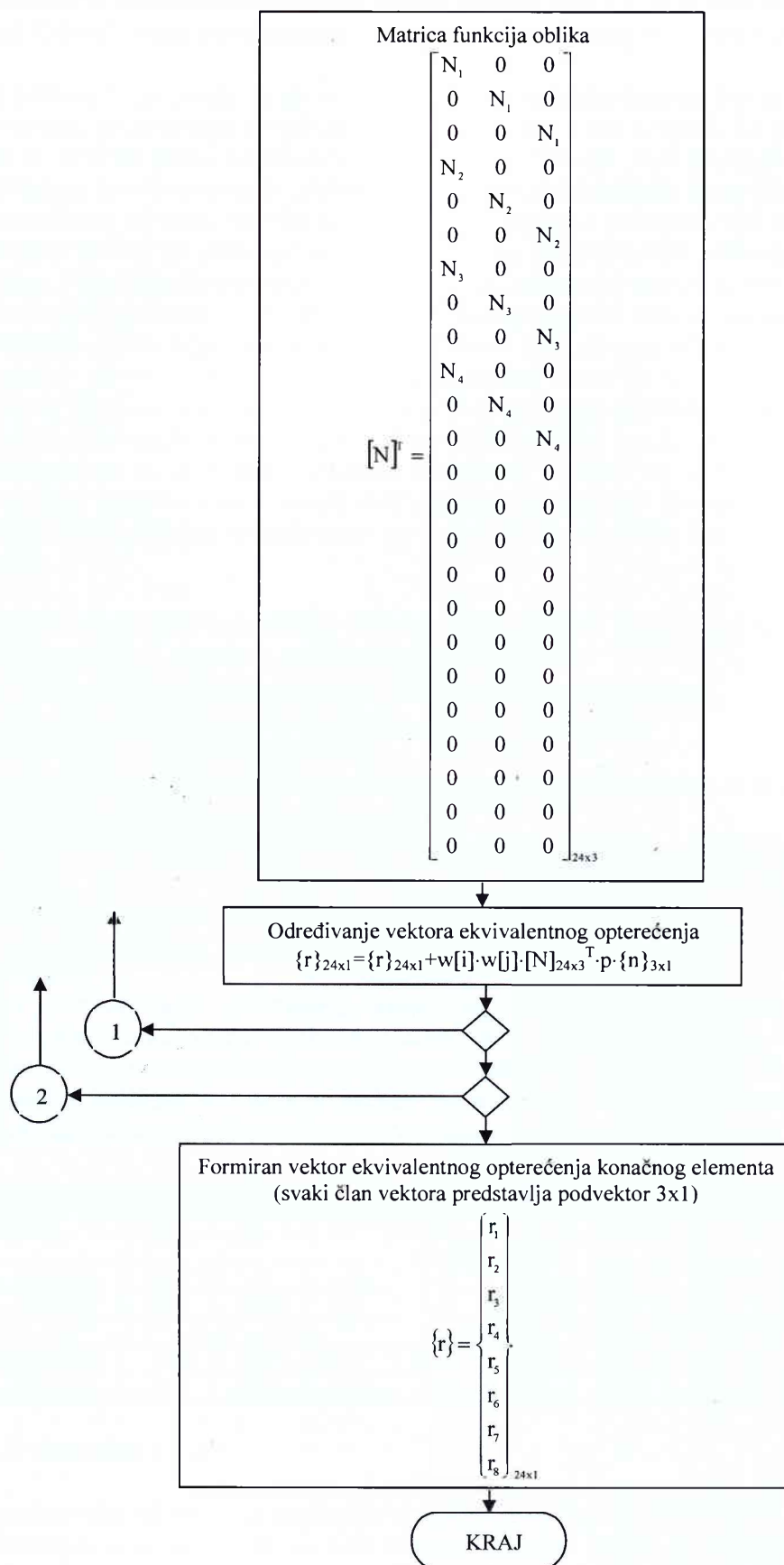
Slika 5.11 Kontaktne površine zglobnih nastavaka

5.2.7 Algoritam za određivanje ekvivalentnog opterećenje zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa

Kontaktni pritisak, koji predstavlja površinsko opterećenje, se u metodi konačnih elemenata svodi na ekvivalentno opterećenje koje u vidu koncentrisanih sila djeluje u čvorovima konačnog elementa. Ekvivalentno opterećenje se određuje iz uslova jednakosti virtuelnih radova koje površinsko i ekvivalentno opterećenje vrše pri pomijeranju čvornih tačaka konačnog elementa. Na bazi teorijske podloge, date u prilogu B ovog rada, razvijen je algoritam za određivanje ekvivalentnog opterećenja zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa. Algoritam, prikazan na slici 5.12, je iskorišćen kao osnova za razvoj programskog modula **EQF** za određivanje ekvivalentnog opterećenja, koji je sastavni dio programa razvijenog za simulaciju adaptivnog procesa.







Slika 5.12 Algoritam za određivanje ekvivalentnog opterećenja zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa opterećenog kontaktnim pritiskom po stranici $\zeta=1$

5.2.8 Određivanje parametara raspodjele kontaktnog pritiska tijela pršljena

Sila pritiska koja djeluje na gornju i donju površinu tijela pršljena čiji je intezitet, za svaku od osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, određen i dat u tabeli 5.3 predstavlja opterećenje koje se prenosi preko kontaktnih površina tijela pršljena. Kao posljedica dejstva ove sile na kontaktnim površinama tijela pršljena se javlja kontaktni pritisak. Raspodjela kontaktnog pritiska po kontaktnoj površini, kao što je istraživanje *Xinghua*-e pokazalo, nije ravnomjerna. Naprotiv, kontaktni pritisak se smanjuje od spoljnih ivica ka središtu gornje odnosno donje površine tijela pršljena. Neravnomjernost raspodjele kontaktnog pritiska za posledicu ima povećano opterećenje djelova tijela pršljena bližih spoljnjem omotaču pršljena u odnosu na one koji se nalaze bliže središnjem dijelu tijela pršljena. Ova činjenica ima za posledicu da adaptivni proces kod prosječno zdrave osobe vodi raspodjeli koštanog tkiva tijela pršljena kod koje je gustina koštanog tkiva povećana u dijelovima tijela pršljena bližim spoljnjem omotaču pršljena u odnosu na one koji se nalaze bliže središnjem dijelu tijela pršljena, kao što se vidi na slikama 3.12 i 3.13. S obzirom na uticaj oblika raspodjele kontaktnog pritiska na formiranje raspodjele koštanog tkiva tijela pršljena tokom adaptivnog procesa određeni su parametri raspodjele kontaktnog pritiska tijela pršljena, pojedinačno za svaku od deset osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.

Parametri raspodjele kontaktnog pritiska tijela pršljena p_{max} i p_{min} se određuju iterativnim postupkom, čiji se algoritam sastoji u sledećim koracima:

1. U početnoj iteraciji usvojiti $p_{max,0}=3.5 \text{ N/mm}^2$ i $p_{min,0}=0.3 \text{ N/mm}^2$
2. Usvojiti priraštaj kontaktnog pritiska, npr. $\Delta p=0.05 \text{ N/mm}^2$
3. **For** $i=0,1,...$ do konvergencije **Do**
4. Odrediti veličine kontaktnog pritiska p_i u svim čvornim tačkama konačnih elemenata koje se nalaze na kontaktnoj površini tijela pršljena
5. Odrediti ekvivalentno opterećenje konačnih elemenata $\{r\}_i$ kojim se aproksimira kontaktni pritisak
6. Odrediti sumu ekvivalentnih opterećenja konačnih elemenata
7. $p_{max,i+1} = p_{max,i} \pm \Delta p$; $p_{min,i+1} = (p_{max,i+1}/p_{max,i}) \cdot p_{min,i}$
8. **EndDo**

Uslov konvergencije prikazanog iterativnog postupka je ostvarivanje jednakosti sume ekvivalentnih opterećenja konačnih elemenata i ukupne sile pritiska koja djeluje na tijelo pršljena, koja je za osobe koje predstavljaju istraživački uzorak data u tabeli 5.3. Maksimalna i minimalna veličina kontaktnog pritiska tijela pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, dobijena prethodno opisanim postupkom, je data u tabeli 5.4.

Tabela 5.4 Parametri raspodjele kontaktnog pritiska tijela pršljena

Redni broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gornja površina										
$p_{e,max} [\text{N/mm}^2]$	2.20	2.43	1.56	2.51	2.00	2.12	2.20	2.28	2.18	2.38
$p_{e,min} [\text{N/mm}^2]$	0.19	0.21	0.13	0.22	0.17	0.18	0.19	0.20	0.19	0.20
Donja površina										
$p_{d,max} [\text{N/mm}^2]$	1.97	2.05	1.43	2.38	1.74	2.18	2.15	2.05	1.97	1.97
$p_{d,min} [\text{N/mm}^2]$	0.17	0.18	0.13	0.20	0.15	0.19	0.18	0.18	0.17	0.17

5.2.9 Granični uslovi

U prethodnom dijelu ovog poglavlja, u kojem se govori o modeliranju ligamenata konačnim elementima, istaknuto je da su kabl konačni elementi kojim su modelirani ligamenti jednim krajem vezani za pršljen, a drugim za nepokretni oslonac. Pomijeranja čvornih tačaka modela u kojim su postavljeni nepokretni oslonci su jednaka nuli, dok se kao nepoznate veličine u ovim čvorovima javljaju reakcije koje imaju karakter spoljašnjeg opterećenja. Pogodnom numeracijom

čvornih tačaka *FEM* modela moguće je čvorove u kojim su postavljeni nepokretni oslonci grupisati i na taj način ih, kada je riječ o vektorima opterećenja i pomijeranja modela, odvojiti od preostalih čvornih tačaka modela. Vektori opterećenja i pomijeranja čvornih tačaka modela se u tom slučaju mogu izraziti na sljedeći način [151]:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_I \\ R_{II} \end{Bmatrix} ; \{D\} = \begin{Bmatrix} D_I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

gdje $\{R_I\}$ i $\{D_I\}$ predstavljaju vektore opterećenja i pomijeranja čvornih tačaka modela izuzimajući čvorne tačke u kojim su postavljeni nepokretni oslonci, a $\{R_{II}\}$ i $\{0\}$ predstavljaju vektore opterećenja i pomijeranja čvornih tačaka modela u kojim su postavljeni nepokretni oslonci.

5.2.10 Određivanje pomijeranja čvornih tačaka *FEM* modela pršljena

Matrica krutosti kabl konačnog elementa, kojim su u *FEM* modelu pršljena modelirani ligamenti, zavisi od pomijeranja čvornih tačaka elementa koja prethodno nisu poznata. Stoga, ovi elementi unose nelinearnost u *FEM* model pršljena. Vektor pomijeranja čvornih tačaka nelinearnog *FEM* modela pršljena je određen *Newton-Raphson*-ovom metodom. Detaljna teorijska podloga ove metode je data u prilogu B ovog rada. Ovom metodom se kroz iterativni proces tokom kojeg se određuje priraštaj vektora pomijeranja čvornih tačaka, sa zadatom tačnošću, dolazi do vektora pomijeranja čvornih tačaka modela. Analiza metodom konačnih elemenata je realizovana primjenom *Lagrange*-ove mreže konačnih elemenata [146]. Dakle, mreže konačnih elemenata koja se u svakoj iteraciji prilagođava trenutnom obliku deformisane strukture modela. Primjena *Lagrange*-ove mreže konačnih elemenata uslovljava da se nakon svake iteracije određuje položaj čvornih tačaka deformisane strukture modela, tj. nove veličine globalnih koordinata čvornih tačaka modela, kao i matrice krutosti elemenata odnosno modela koje odgovaraju položaju deformisane strukture modela. Pri tome je korišćen *Euler*-ov pristup prema kojem se lokalni koordinatni sistem vezuje za konačni element i tokom deformisanja prati njegovo kretanje [146].

Jednačine ravnoteže *FEM* modela pršljena zapisane u matričnom obliku u slučaju nelinearne analize za *i*-tu iteraciju su sljedećeg oblika:

$$[K] \cdot \{\Delta D\}_{i+1} = \{\Delta R\}_i \quad (5.3).$$

Jednačine ravnoteže u matričnom obliku se, u slučaju grupisanja čvornih tačaka modela u kojim su postavljeni nepokretni oslonci kao što je prethodno pokazano na primjeru vektora opterećenja i pomijeranja čvornih tačaka modela (5.2), mogu izraziti na sljedeći način [149]:

$$\begin{bmatrix} K_I & C_I \\ C_{II} & K_{II} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} \Delta D_I \\ 0 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \Delta R_I \\ \Delta R_{II} \end{Bmatrix}_i \quad (5.4).$$

Razvojem izraza (5.4) se dobija:

$$\begin{aligned} [K_I] \cdot \{\Delta D_I\}_{i+1} &= \{\Delta R_I\}_i \\ [C_{II}] \cdot \{\Delta D_I\}_{i+1} &= \{\Delta R_{II}\}_i \end{aligned} \quad (5.5).$$

Rešavanjem prve od jednačina (5.5) se određuje priraštaj vektora pomijeranja čvornih tačaka modela u (*i*+1)-oj iteraciji, izuzimajući čvorne tačke u kojim su postavljeni nepokretni oslonci. Na osnovu ovako dobijenog vektora priraštaja pomijeranja se određuje vektor pomijeranja čvornih tačaka modela u (*i*+1)-oj iteraciji:

$$\{D_I\}_{i+1} = \{D_I\}_i + \{\Delta D_I\}_{i+1} \quad (5.6).$$

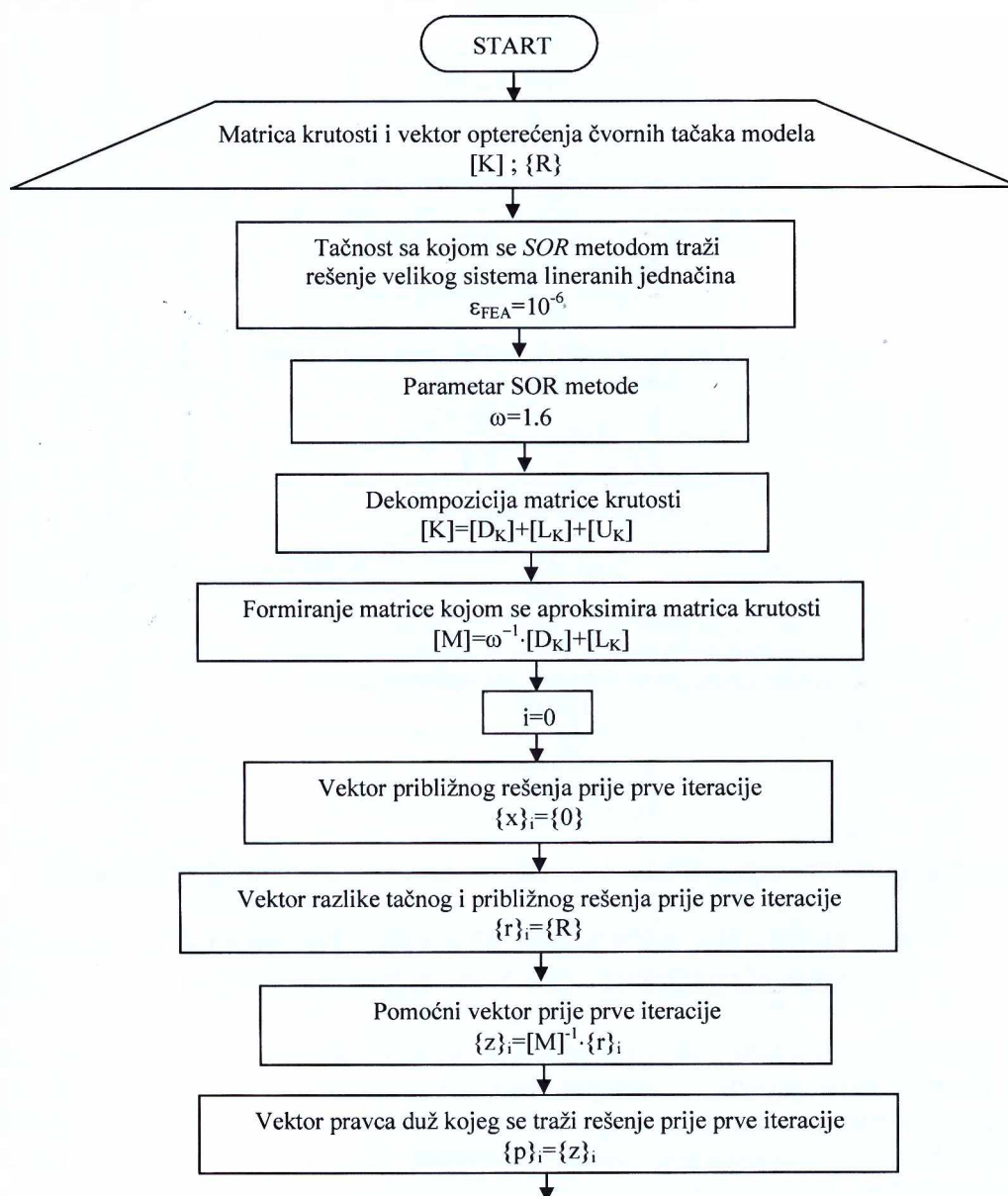
Sistem linearnih jednačina, predstavljen u matričnoj formi, prvom od jednačina (5.5) je rešavan indirektnom metodom. Testiranjem nekoliko varijanti konjugovano-gradijentne metode sa aproksimacijom matrice krutosti za rešavanje velikih sistema lineranih jednačina je izabrana *SOR* metoda kao metoda koja u najkraćem vremenu dovodi do rešenja problema koji je predmet ovog rada. Detaljna teorijska podloga ove metode je data u prilogu B ovog rada. Kriterijum

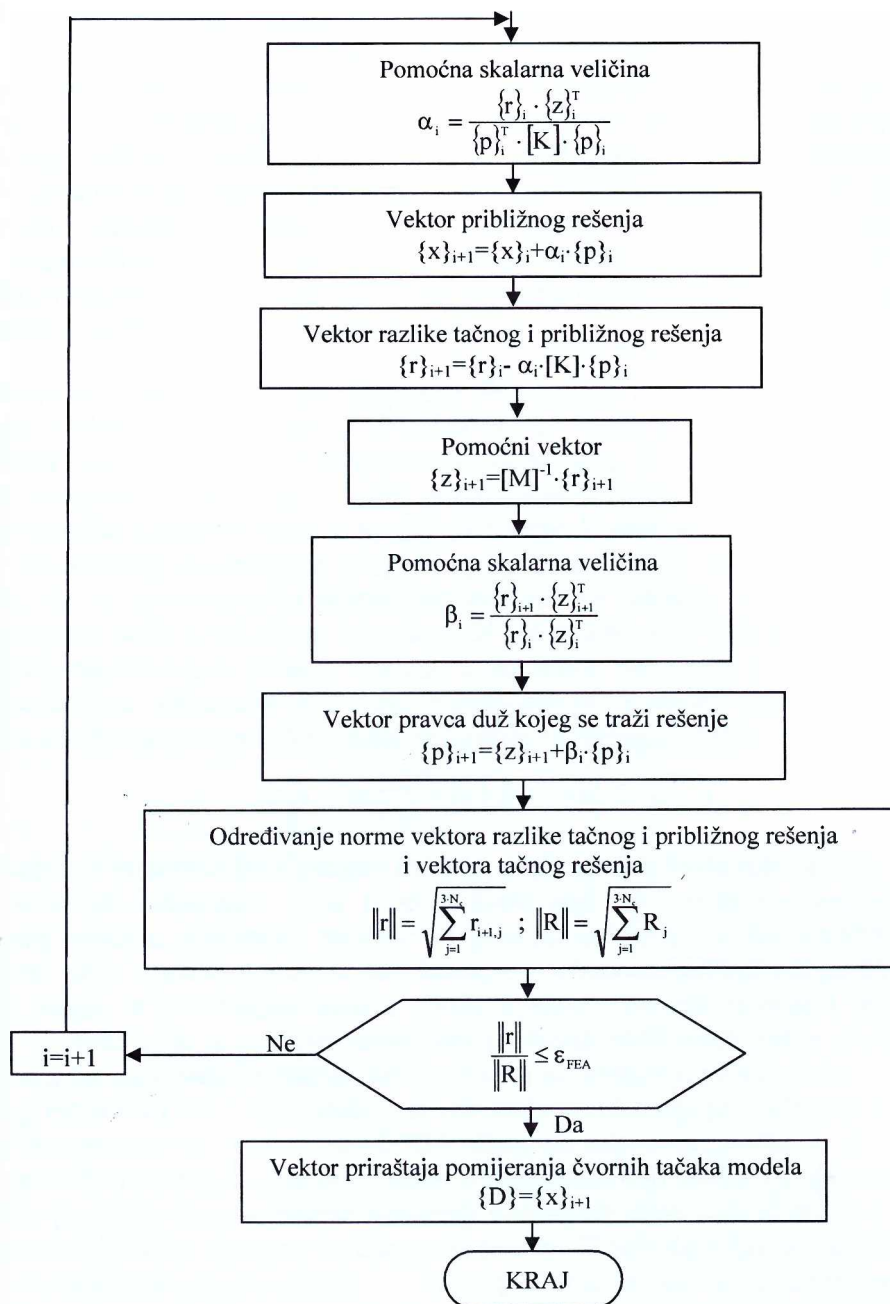
korišćen za praćenje konvergencije procesa rešavanja sistema linearnih jednačina, *SOR* metodom, je određen izrazom (B.86). Usvojena tačnost sa kojom je traženo rešenje je $\epsilon_{FEA}=10^{-6}$ [146].

Kriterijum korišćen za praćenje konvergencije procesa određivanja vektora pomijeranja čvornih tačaka modela, *Newton-Raphson*-ovom metodom, je određen izrazom (B.67). Usvojena tačnost sa kojom je traženo rešenje je $\epsilon_{NR}=10^{-6}$ [146].

5.2.11 Algoritam *SOR* metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina

Na bazi teorijske podloge, date u prilogu B ovog rada, razvijen je algoritam za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina *SOR* metodom. Algoritam, prikazan na slici 5.13, je iskorišćen kao osnova za razvoj programskog modula **SOR** za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina *SOR* metodom, koji je sastavni dio programa razvijenog za simulaciju adaptivnog procesa.





Slika 5.13 Algoritam SOR metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina

5.3 NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA ADAPTACIJE KOŠTANOG TKIVA NA MEHANIČKO OPTEREĆENJE

Numeričko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje ima za cilj da se od, početno pretpostavljene, ravnomjerne raspodjele koštanog tkiva dođe do raspodjele koštanog tkiva koja, u poznatim uslovima mehaničkog opterećenja, odgovara realno postojećoj u kostima ljudskog skeleta. Numeričko modeliranje adaptivnog procesa se pri tome može zasnivati kako na nekom od postojećih matematičkih modela adaptivnog procesa, koji su predstavljeni u drugom poglavlju ovog rada, tako i na sopstvenom predlogu matematičkog modela adaptivnog procesa.

5.3.1 Predlog modifikacije *Nijmegen* modela adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje

U drugom poglavlju ovog rada je detaljno obrazložena ideja na kojoj je zasnovan *Nijmegen* model adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, kao i njegov razvoj od 1987. godine i inicijalnog predloga modela *Huiskes*-a [92], do 2002. godine i predloga modela *Xinghua*-e [24]. Autor ovog rada se opredijelio za nelinearni oblik jednačine adaptacije, s obzirom da je *Xinghua* pokazao da je struktura koštanog tkiva dobijena numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa prema nelinearnoj jednačini adaptacije sličnija realno postojećoj od one koja se dobija numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa prema linearnoj jednačini adaptacije korišćenoj u prethodnim modifikacijama *Nijmegen* modela.

Eksponencijalni oblik koeficijenta adaptacije $B(t)$, koji je u modelu adaptivnog procesa koristio *Xinghua*, uveden je s namjerom da se ubrza proces konvergencije adaptivnog procesa i na taj način skрати vreme trajanja numeričkog modeliranja istog. Tokom numeričkog modeliranja koje je autor ovog rada realizovao u cilju određivanja odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* testirana je i opravdanost ove ideje u slučaju numeričkog modeliranja adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena. Pokazalo se, međutim, da se konvergencija adaptivnog procesa ne ubrzava značajnije bilo da se koristi eksponencijalni oblik koeficijenta adaptacije ili konstantni oblik kakav je korišćen u prethodnim modifikacijama *Nijmegen* modela. Shodno tome, autor ovog rada se opredijelio za konstantni oblik koeficijenta adaptacije B u cilju pojednostavljenja oblika jednačine adaptacije. Dakle, jednačina adaptacije koju predlaže autor ovog rada sljedećeg je oblika:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = B \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot (\beta_i^\alpha - 1) \right), \quad 0 < \rho_a \leq \rho_{cb} \quad (5.7)$$

Sve dosadašnje modifikacije *Nijmegen* modela, osim modela *Mullender*-a [73], zavise od gustine mreže konačnih elemenata *FEM* modela kosti koji se koristi za numeričko modeliranje adaptivnog procesa. Zavisnost modela od gustine mreže konačnih elemenata je uslovljena činjenicom da je svakom pojedinačnom konačnom elementu pridružena po jedna ćelija senzor, *osteocit*. Stoga, sa povećanjem gustine mreže konačnih elemenata raste i broj ćelija senzora i obratno. U slučaju da je svakom konačnom elementu pridružena jedna ćelija senzor veličina koeficijenta brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D treba biti reda veličine konačnog elementa [74]. U tom slučaju se ostvaruje preklapanje područja uticaja susjednih ćelija senzora što prouzrokuje njihov zajednički uticaj na adaptivni proces u okruženju i odsustvo pojave prekida u koštanoj strukturi. Dakle, u modelima koji zavise od gustine mreže konačnih elemenata promjena gustine mreže konačnih elemenata utiče i na veličinu koeficijenta brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces. Koeficijent brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces određuje veličinu područja unutar kojeg ćelije senzori imaju uticaj na adaptivni proces. S obzirom na fizičko značenje koeficijenta brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces očigledno je da veličina ovog parametra modela ne treba biti uslovljena gustom mreže konačnih elemenata *FEM* modela kosti koji se koristi za numeričko modeliranje adaptivnog procesa. Dakle, veličina područja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces ne treba biti promjenljiva i uslovljena veličinom konačnih elemenata, naprotiv veličina ovog područja treba biti stalna. Shodno tome, autor ovog rada se opredijelio za pristup koji je koristio *Mullender*.

Prema *Mullender*-u koeficijent brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D određuje rastojanje na kojem se osjeća uticaj ćelija senzora na okruženje, tj. na susjedne ćelije senzore i ćelije koje učestvuju u razgradnji i formiranju koštanog tkiva. *Osteociti*, za koje se pretpostavlja da predstavljaju ćelije senzore, se nalaze unutar koštanog matriksa, a *osteoblasti* i *osteoklasti*, ćelije koje formiraju i razgrađuju koštano tkivo, na površini *trabekula* koje čine koštani matriks i čija je debljina oko 0.15 mm [77,110]. Razmatrajući fizičku suštinu parametra

D, Mullender je pretpostavio da bi red veličine ovog parametra trebao da odgovara debljini trabekula. Stoga je autor ovog rada, prema ideji Mullender-a, usvojio konstantnu veličinu ovog parametra, koja odgovara debljini trabekula, $D=0.15$ mm.

Umjesto jedne ćelije senzora koja se nalazi unutar konačnog elementa, prema ideji Mullender-a, formira se mreža ćelija senzora čija gustina nije uslovljena gustom mreže konačnih elemenata FEM modela kosti koji se koristi za simulaciju adaptivnog procesa. Gustina mreže ćelija senzora, tj. njihovo međusobno rastojanje određeno je na osnovu rezultata istraživanja Mullender-a [74]. Prema ovom istraživanju povećanjem gustine ćelija senzora, do određene granice, povećava se i sličnost koštane strukture koja se dobija numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa sa realno postojećom strukturom koštanog tkiva. Mullender je utvrdio da za veličinu parametra $D=0.025$ mm granična veličina površinske gustine ćelija senzora iznosi oko 1000 ćelija/mm². Ovoj gustini ćelija senzora odgovara kvadratna mreža od oko 31x31 ćelija senzora koje se nalaze na međusobnom rastojanju od 0.033 mm. Mullender je utvrdio i da se sa porastom veličine parametra D smanjuje granična gustina ćelija senzora. Autor ovog rada je, na osnovu ovih podataka, proporcijom odredio međusobno rastojanje ćelija senzora koje, za veličinu parametra $D=0.15$ mm, iznosi oko 0.2 mm. Granična veličina zapreminske gustine ćelija senzora određena prema ovom rastojanju, korišćena u modelu autora ovog rada za simulaciju adaptivnog procesa na 3D modelu pršljena, iznosi 216 ćelija senzora/mm³.

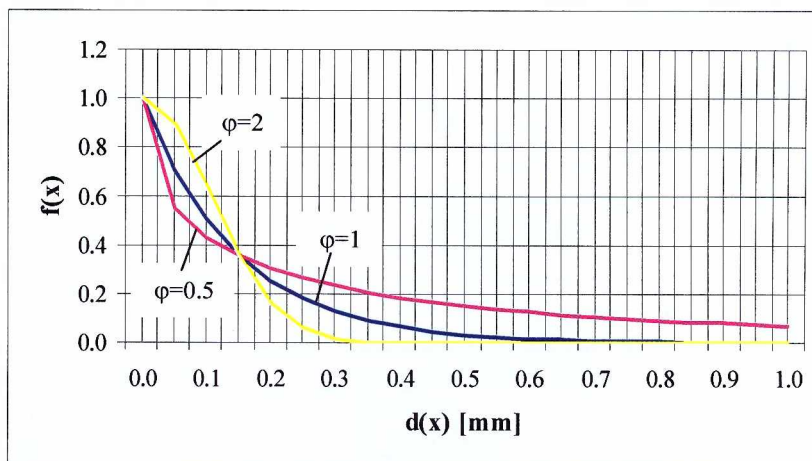
Prema Mullender-u uticaj ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju opada sa povećanjem udaljenosti ćelije senzora od lokacije na kojoj se odigrava adaptivni proces. Na bazi ove pretpostavke Mullender je u proces adaptacije koštanog tkiva uključio uticaj svih ćelija senzora srazmjerno njihovoj udaljenosti od lokacije na kojoj se odigrava adaptivni proces. Ovu pretpostavku Mullender je u model adaptivnog procesa ugradio kroz funkciju prostornog uticaja $f_i(x)$, koja fizički oponaša uticaj ćelija senzora na koštano tkivo u okruženju, definisane izrazom (2.35). Mullender je funkciju prostornog uticaja definisao u eksponencijalnom obliku. Koeficijent brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D , koji predstavlja parametar funkcije prostornog uticaja, određuje rastojanje na kojem se mehanički signal koji šalje ćelija senzor smanjuje na e^{-1} , tj. 36.8% inteziteta koji signal ima na lokaciji same ćelije senzora.

Nakon što je na prethodno opisani način defmisao funkciju prostornog uticaja Mullender, kao ni Xinghua nakon njega, nisu ispitivali efekte varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces. S obzirom na značaj oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces ovo svakako predstavlja manjkavost navedenih Nijmegen modela procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje. Izbor eksponencijalne funkcije, u monotono opadajućem obliku, predstavlja fizički logičan izbor oblika za funkciju prostornog uticaja, s obzirom da uticaj ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju opada sa povećanjem udaljenosti ćelije senzora od lokacije na kojoj se odigrava adaptivni proces. Osim potrebe da funkcija prostornog uticaja bude monotono opadajuća, svi ostali elementi kojim Mullender u potpunosti definiše oblik funkcije prostornog uticaja nemaju očigledno fizičko uporište. Da li je uticaj ćelija senzora na adaptivni proces unutar, odnosno, van područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D adekvatno određen funkcijom prostornog uticaja, oblika definisanog izrazom (2.35), pitanje je na koje nije moguće odgovoriti bez ispitivanja efekta varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces.

U cilju ispitivanja uticaja ćelija senzora na adaptivni proces u okruženju autor ovog rada predlaže uvođenje eksponenta φ u funkciju prostornog uticaja čim bi se omogućilo ispitivanje efekata varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces. Funkcija prostornog uticaja bi u tom slučaju bila izražena na sljedeći način:

$$f_i(x) = e^{-\left(\frac{d_i(x)}{D}\right)^\varphi} \quad (5.8)$$

Usvajanjem različitih veličina eksponenta φ mijenja se uticaj ćelija senzora na adaptivni proces unutar, odnosno, van područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju. Na slici 5.14 je prikazan oblik funkcije prostornog uticaja za različite veličine eksponenta φ .



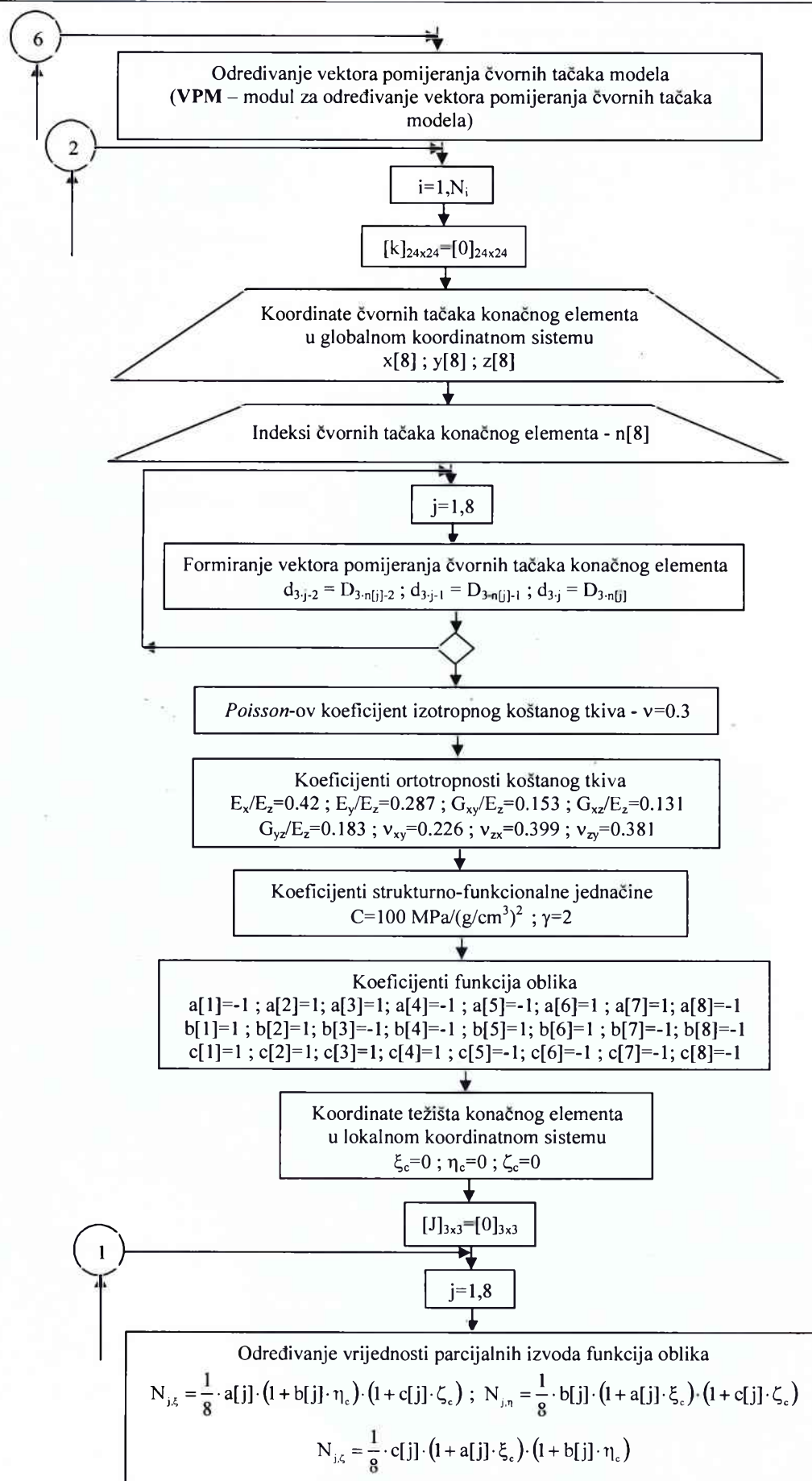
Slika 5.14 Funkcija prostornog uticaja za $D=0.15$ mm i različite veličine eksponenta φ

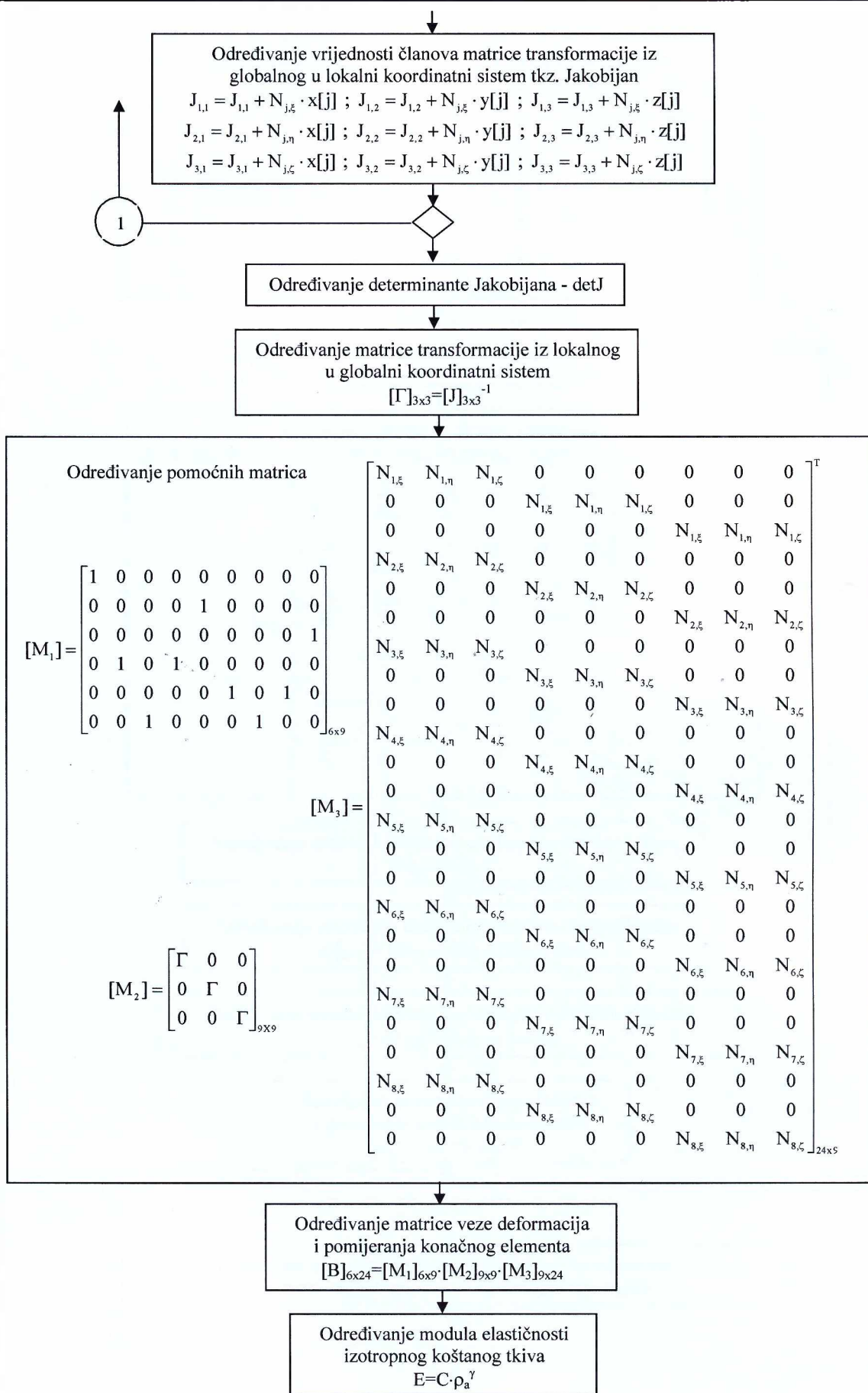
Koštano tkivo je u svim *Nijmegen* modelima adaptivnog procesa modelirano kao izotropno. Međutim, brojna istraživanja mehaničkih karakteristika koštanog tkiva, predstavljena u drugom poglavlju ovog rada, ukazuju na ortotropnu prirodu istog. Do danas je, i pored ove činjenice, sprovedeno samo jedno detaljno istraživanje pokazatelja ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva. Rezultati tog istraživanja, koje je 1999. godine sproveo *Ulrich* su prikazani u tabelama 2.3 i 2.4 [51]. Autor ovog rada se, u cilju što vjernijeg modeliranja koštanog tkiva, opredijelio da spongiozno koštano tkivo u *FEM* modelu pršljena modelira kao ortotropno, koristeći pri tome pokazatelje dobijene tokom istraživanja *Ulrich*-a. Zbog nedostatka detaljnijih podataka o ortotropnosti kortikalnog koštanog tkiva isto je u *FEM* modelu pršljena modelirano kao izotropno. *FEM* model pršljena, korišćen za simulaciju adaptivnog procesa, sa ugrađenom ortotropnom prirodom spongioznog koštanog tkiva je generisan na način opisan u prethodnom poglavlju ovog rada. Pri tome je, prema podacima datim u tabeli 3.10, usvojeno da debljina spoljnog omotača pršljena od kortikalnog koštanog tkiva iznosi prosječno 2 mm.

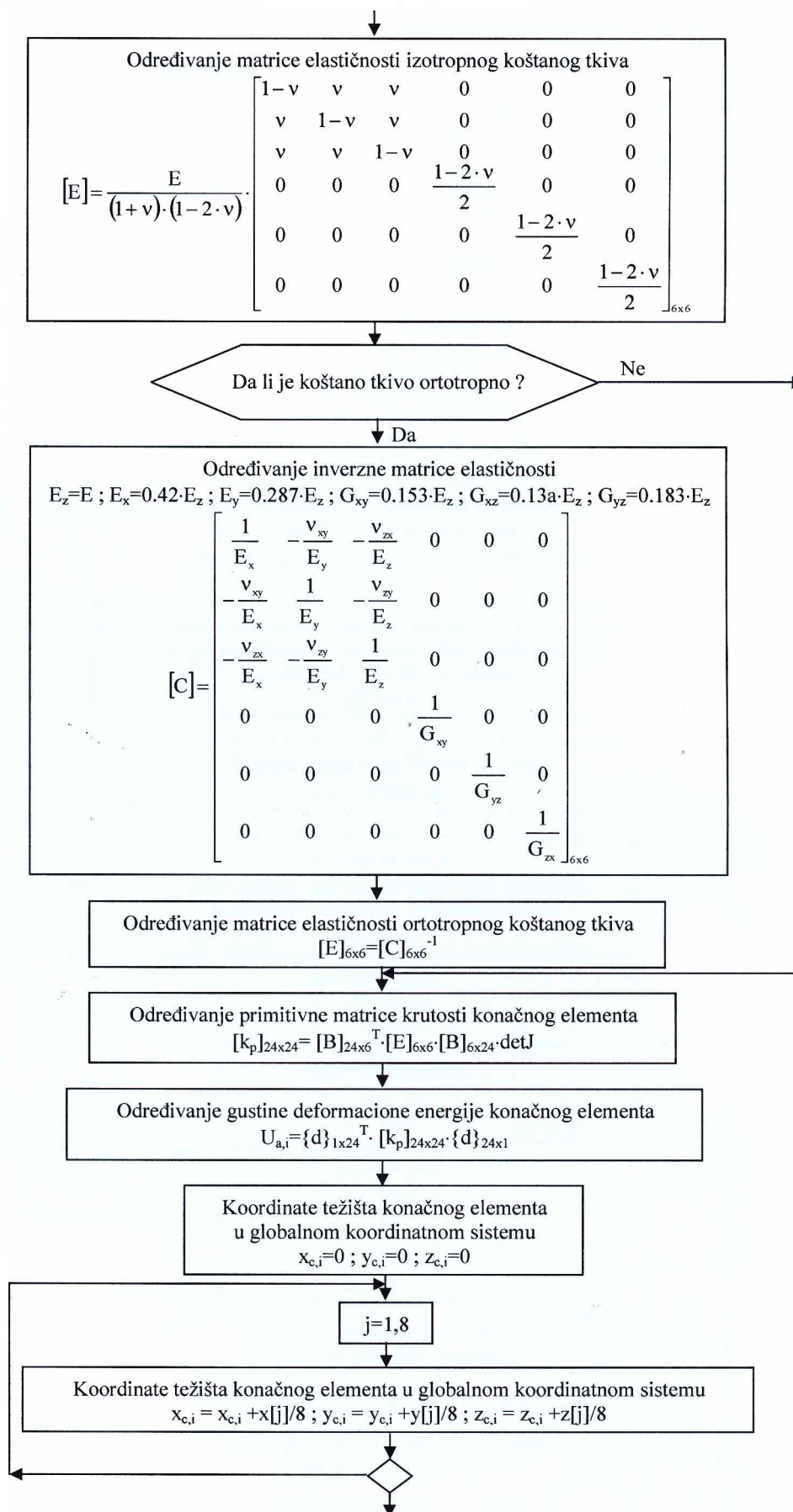
5.3.2 Algoritam za simulaciju procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje

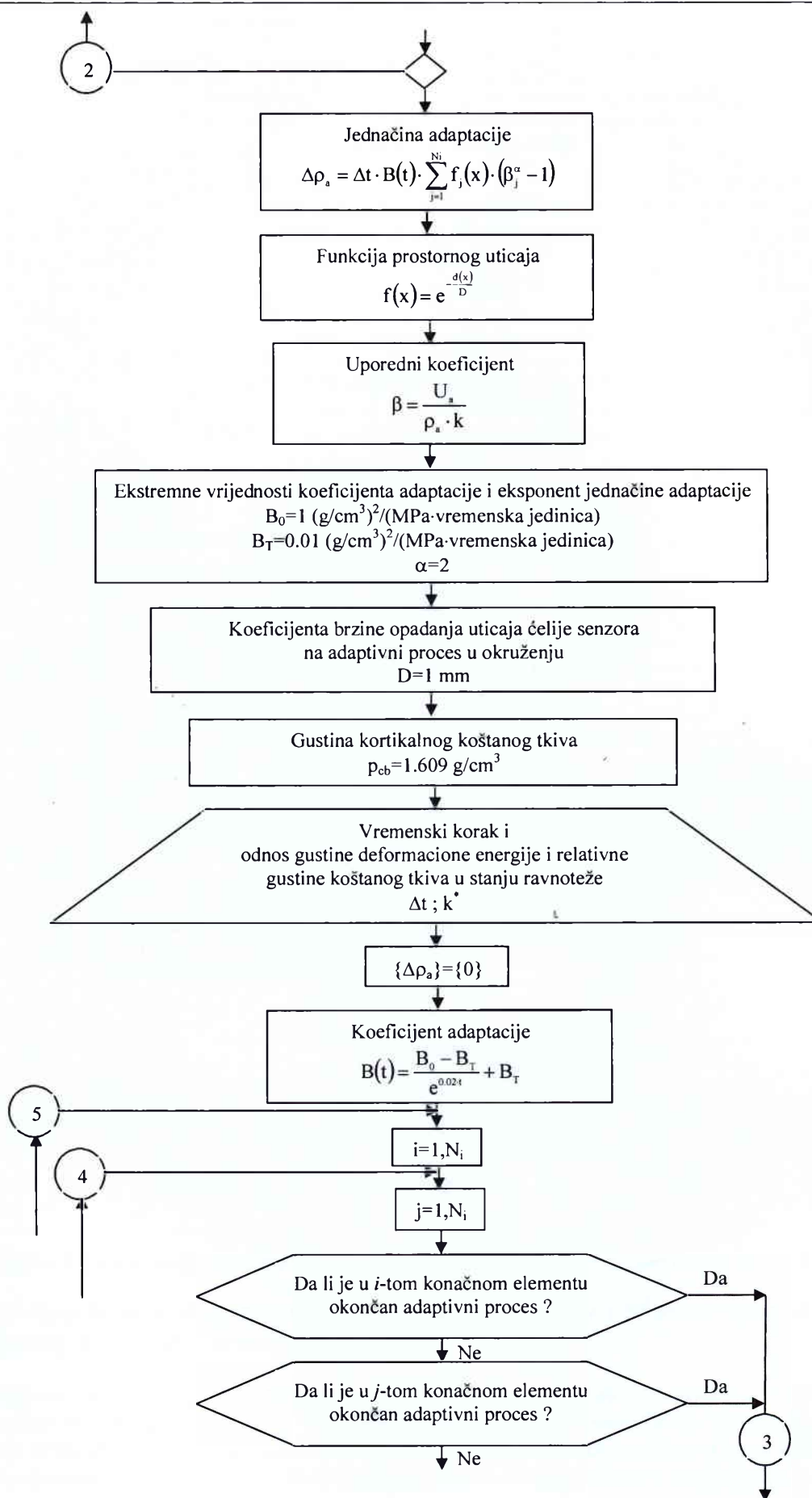
Na bazi teorijske podloge, date u drugom i petom poglavlju ovog rada, razvijeni su algoritmi za simulaciju toka adaptivnog procesa bazirani na modelima *Mullender*-a, *Xinghua*-e, kao i prethodno obrazloženom originalnom modelu autora ovog rada. Algoritam, prikazan na slici 5.15, je iskorišćen kao osnova za razvoj programskog modula **AP** za simulaciju adaptivnog procesa.

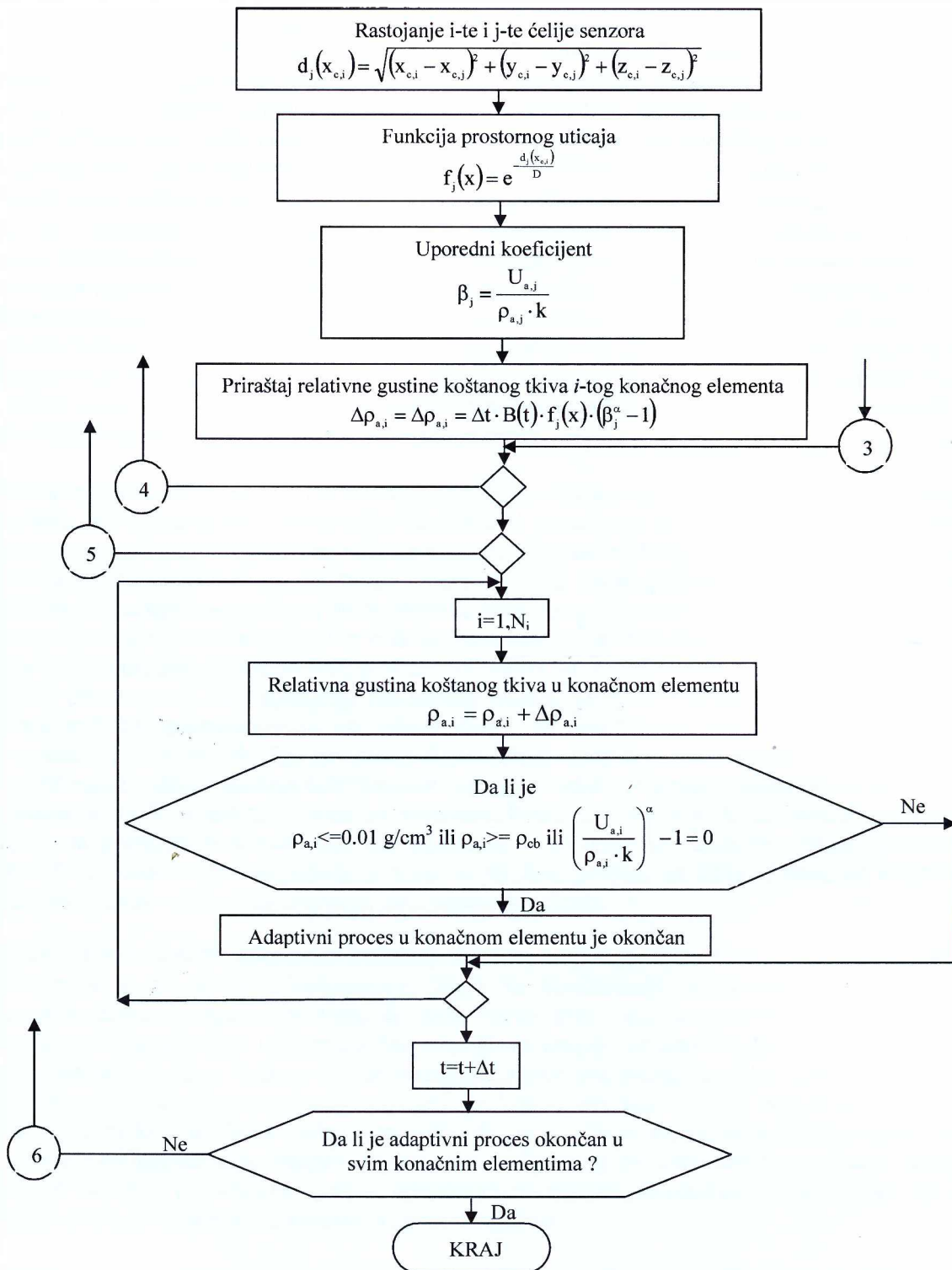












Slika 5.15 Algoritam za simulaciju toka adaptivnog procesa baziran na modelu *Xinghua*-e

5.3.3 Određivanje odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže

Stanje ravnoteže u procesu adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje odgovara stanju u kojem je raspodjela koštanog tkiva adekvatna uslovima mehaničkog opterećenja. Stoga, u stanju ravnoteže adaptivni proces, tokom kojeg se razgrađuje staro i formira novo koštano tkivo, nema za rezultat promjenu raspodjele koštanog tkiva već samo njegovo obnavljanje.

Određivanju odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* je prethodila provjera uticaja razlike geometrijskih modela pršljena, dobijenih parametarskim modeliranjem i klasičnom metodom na osnovu podataka sa *CT* slika, na rezultate analize naponsko-deformacionog stanja pršljena. Na prethodno opisan način su generisani *FEM* modeli pršljena prema oba geometrijska modela i to za osobu iz istraživačkog uzorka kod koje je odstupanje ovih geometrijskih modela bilo najveće. *FEA* analiza je realizovana na modelima pršljena sa ravnomjernom distribucijom izotropnog koštanog tkiva relativne gustine od $\rho_a=0.8$ g/cm³ i *Poisson*-ovim koeficijentom $\nu=0.3$. Analiza dobijenih rezultata pokazuje da je razlika gustine deformacione energije u konačnim elementima tijela pršljena parametarski modelirane geometrije i gustine deformacione energije u odgovarajućim konačnim elementima tijela pršljena dobijenog klasičnom metodom prema podacima sa *CT* slika manja od 0.1% druge od navedenih veličina. Dakle, može se konstatovati da je uticaj korišćenog geometrijskog modela pršljena na dobijenu veličinu gustine deformacione energije u konačnim elementima tijela pršljena neznatan, tj. *FEM* model pršljena parametarski modelirane geometrije omogućava analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena zadovoljavajuće tačnosti.

Određivanje odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* , osoba koje predstavljaju istraživački uzorak, je izvršeno na osnovu rezultata simulacije adaptivnog procesa bazirane na modelu *Xinghua*-e (2.39). Uslov koji je korišćen pri određivanju parametra k^* je da masa koštanog tkiva tijela pršljena dobijena numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa bude jednaka eksperimentalno utvrđenoj masi koštanog tkiva tijela pršljena datoj u tabeli 3.11. Do veličine parametra k^* se dolazi kroz iterativno ponavljanje numeričkog modeliranja adaptivnog procesa, pri čemu se u svakoj iteraciji vrši prilagođavanje veličine parametra k^* , do ispunjenja navedenog uslova. Ovaj je postupak realizovan na *FEM* modelu pršljena, generisanom na već opisan način, sa desetak puta manjim brojem konačnih elemenata od *FEM* modela čije su karakteristike date u tabeli 5.1. Na ovaj način je omogućeno da određivanje odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* bude izvedeno u realnom vremenu. Rezultati *FEA* analize na ovakvom modelu pršljena sa grubljim mrežama konačnih elemenata i oni dobijeni naknadno, tokom konačnog numeričkog modeliranja adaptivnog procesa na modelu pršljena sa finijom mrežom konačnih elemenata, su iskorišćeni i za testiranje konvergencije rešenja.

Diferencijalna jednačina adaptacije koštanog tkiva se u svim modifikacijama *Nijmegen* modela transformiše u vremensku integracionu šemu sa konstantnim vremenskim korakom Δt . Vremenski korak integracije ne treba da bude isuviše mali kako se konvergencija adaptivnog procesa ne bi nepotrebno usporavala bez uticaja na krajnji rezultat i numeričko modeliranje trajala nepotrebno dugo. S druge strane vremenski korak integracije ne treba da bude ni isuviše veliki što vodi brzom konvergenciji procesa uz krajnji rezultat koji ne odgovara raspodjeli koštanog tkiva koja je slična realno postojećoj. Stoga je, tokom određivanja veličine parametra k^* , numeričko modeliranje adaptivnog procesa realizovano uz istovremeno testiranje uticaja različitih veličina vremenskog koraka integracije na rezultat adaptivnog procesa kako bi se odredila pogodna veličina vremenskog koraka integracije.

Korišćeni uslovi konvergencije adaptivnog procesa u konačnom elementu se u odnosu na model *Xinghua*-e razlikuju samo u veličini maksimalne gustine kortikalnog koštanog tkiva, za koju je usvojeno da iznosi $\rho_{cb}=1.609$ g/cm³. Podatak o maksimalnoj gustini kortikalnog koštanog tkiva, korišćen i tokom eksperimentalnih istraživanja, standardizovan je od strane proizvođača uređaja za određivanje kalibracione karakteristike *CT* skenera [115].

Svakom konačnom elementu u modelu *Xinghua*-e je pridružena jedna ćelija senzor. Veličina koeficijenta brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces u okruženju *D* je usvojena prema preporukama *Mullender*-a [74]. Prema *Mullender*-u veličina parametra *D* treba biti reda veličine konačnog elementa. Stoga, usvojena veličina parametra *D*, korišćena tokom numeričkog

modeliranja adaptivnog procesa na osnovu čijih je rezultata određivan parametar k^* , iznosi 2 mm. Prema preporukama *Xinghua*-e za eksponent jednačine adaptacije je usvojena veličina $\alpha=2$. Ostale pojedinosti o modelu *Xinghua*-e su detaljno obrazložene u drugom poglavlju ovog rada.

Veličina konstantnog vremenskog koraka integracije koja se pokazala kao odgovarajuća za numeričko modeliranje adaptivnog procesa opisanim modelom iznosi $\Delta t=2$. Dobijene veličine odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* osoba koje predstavljaju istraživački uzorak su date u tabeli 5.5.

Tabela 5.5 Odnos gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže osoba koje predstavljaju istraživački uzorak

Redni broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^* [10^{-1} \cdot J/g]$	0.16	0.20	0.16	0.19	0.18	0.19	0.22	0.15	0.19	0.17

5.3.4 Rezultati numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje

Numeričko modeliranje procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje je realizovano na *FEM* modelu pršljena, generisanom na već opisani način, karakteristika datih u tabeli 5.1. U cilju upoređenja rezultata numeričkog modeliranja procesa adaptacije baziranog na postojećim *Nijmegen* modelima i originalnom predlogu modifikacije *Nijmegen* modela autora ovog rada, kako međusobnom tako i sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja raspodjele relativne gustine koštanog tkiva, modeliranje je realizovano prema:

- Model 1 : Model *Xinghua*-e sa veličinom parametra $D=1$ mm i eksponentom $\alpha=2$;
- Model 2 : Model *Mullender*-a sa veličinom parametra $D=0.15$ mm i gustinom ćelija senzora koja iznosi 216 ćelija senzora/mm³;
- Model autora ovog rada.

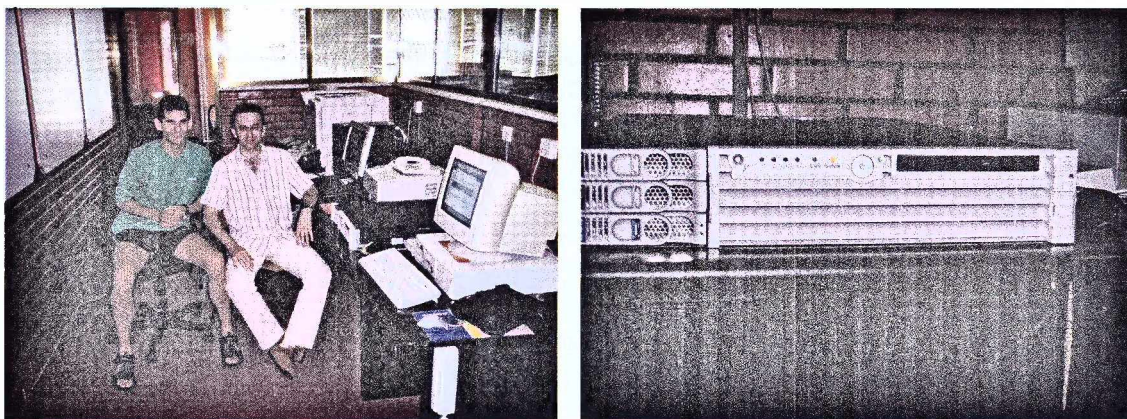
U cilju ispitivanja efekata varijacije oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces, unutar, odnosno, van područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D , modeliranje bazirano na modelu autora ovog rada je realizovano prema:

- Model 3 : Model autora ovog rada sa veličinama eksponenata $\varphi=0.5$ i $\alpha=2$;
- Model 4 : Model autora ovog rada sa veličinama eksponenata $\varphi=2$ i $\alpha=2$.

Konačno u cilju ispitivanja uticaja ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva na rezultate numeričkog modeliranja adaptivnog procesa modeliranje je realizovano i prema:

- Model 5 : Model autora ovog rada sa veličinama eksponenata $\varphi=2$ i $\alpha=2$ i uvođenjem ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva u *FEM* model pršljena.

Numeričko modeliranje, prema navedenim modelima, je realizovano za svih deset osoba koje predstavljaju istraživački uzorak.



Slika 5.16 Server *HP Integrity rx2600-2* na kojem je realizovana simulacija

Tabela 5.6 Karakteristike servera *HP Integrity rx2600-2*

Procesor	2 Intel® Itanium® 2 procesora, 1.3GHz; bas magistrala 6.4 GB/s
Cashe memorija	L3 cache -- 3MB (1.3MHz)
RAM	Bas magistrala -- 8.5GB/s RAM -- PC2100 ECC , DDR266A SDRAM Kapacitet -- 24GB Max Memorijski slot -- 12 DIMM slots
HDD	SCSI disk -- 36GB (15K rpm),
Operativni sistem	Microsoft® Windows Server 2003 Enterprise Edition for 64-bit Itanium 2 systems Debian Linux 3.0 Wudy

Program, autora ovog rada, za *FEA* analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena i numeričko modeliranje adaptivnog procesa, koji je dijelom baziran na prethodno prikazanim algoritmima, razvijen je u programskom jeziku *C*. Numeričko modeliranje adaptivnog procesa je realizovano u CIS-u Univerziteta Crne Gore na serveru *HP Integrity rx2600-2*¹ prikazanom na slici 5.16, karakteristika datih u tabeli 5.6.

Da bi se omogućilo praćenje konvergencije adaptivnog procesa formirana je, po uzoru na *Weinans*-a (2.32), funkcija cilja sljedećeg oblika:

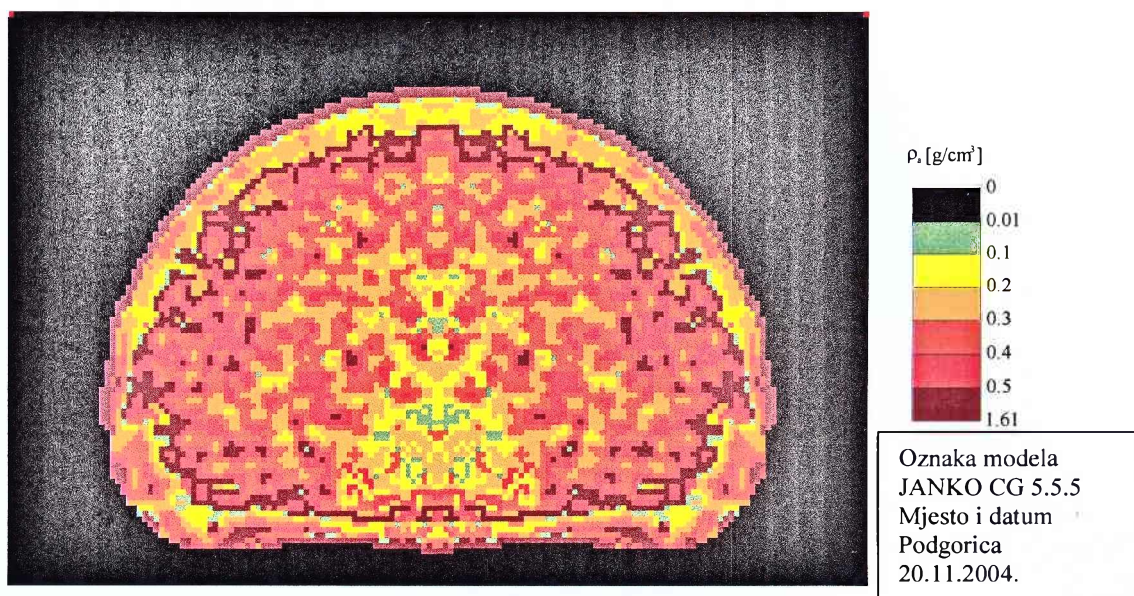
$$\theta = \frac{1}{n_{FE}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{FE}} \left| \sum_{j=1}^{n_{FE}} f_i(x) \cdot (\beta_i^\alpha - k) \right| \quad (5.9)$$

gdje n_{FE} predstavlja broj ćelija senzora u konačnim elementima u kojim adaptivni proces nije okončan. Konvergencija adaptivnog procesa je, bez obzira na model korišćen za numeričko modeliranje, ostvarivana nakon 180 do 200 iteracija. Na slici 5.17 je prikazana jedna tipična promjena funkcije cilja kojom se prati konvergencija adaptivnog procesa.

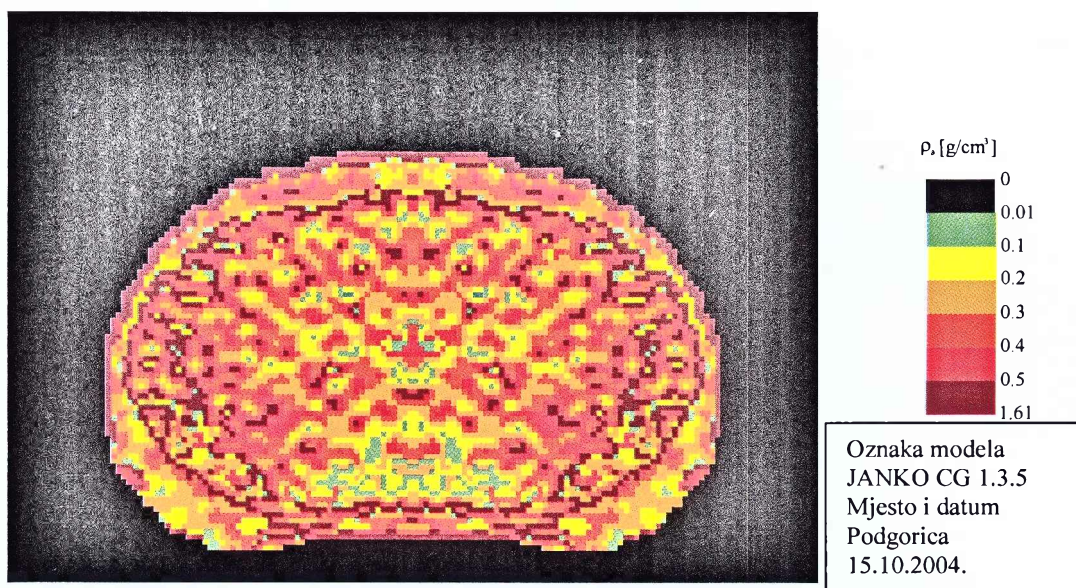
**Slika 5.17** Promjena funkcije cilja tokom adaptivnog procesa

Numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa je određena raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak i to prema svih pet navedenih modela. Kao reprezentativni dobijenih rezultata na slikama 5.18 i 5.19 su prikazane raspodjele relativne gustine koštanog tkiva u poprečnim presjecima tijela pršljena, dobijene simulacijom adaptivnog procesa prema modelu 5. Eksperimentalno određene raspodjele relativne gustine koštanog tkiva ova dva poprečna presjeka su prikazane u trećem poglavlju ovog rada na slikama 3.12 i 3.13.

¹ http://www.hp.com/products1/servers/integrity/entry_level/rx2600/specifications.html

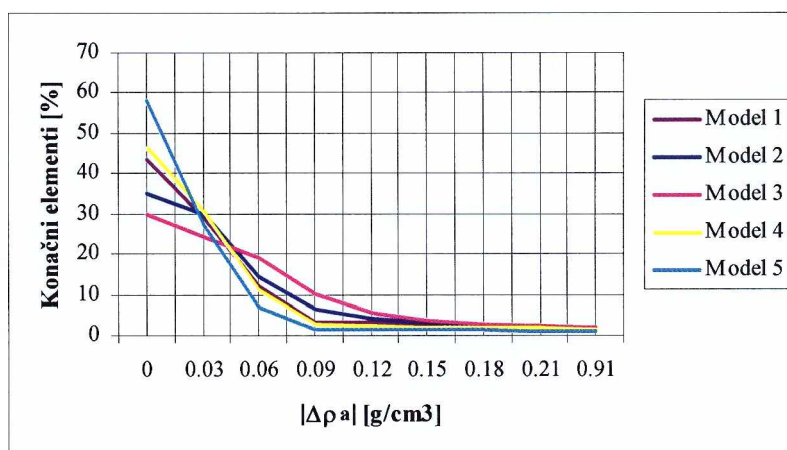


Slika 5.18 Distribucija relativne gustine koštanog tkiva u poprečnom presjeku tijela pršljena L_5 dobijena numeričkom simulacijom prema modelu 5

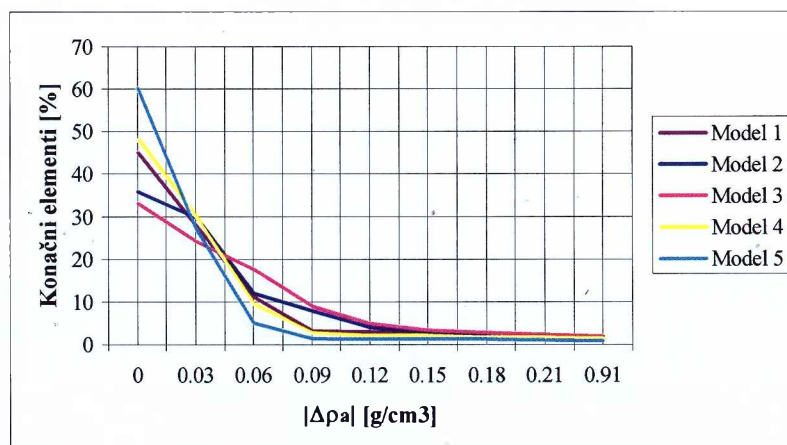


Slika 5.19 Distribucija relativne gustine koštanog tkiva u poprečnom presjeku tijela pršljena L_5 dobijena numeričkom simulacijom prema modelu 5

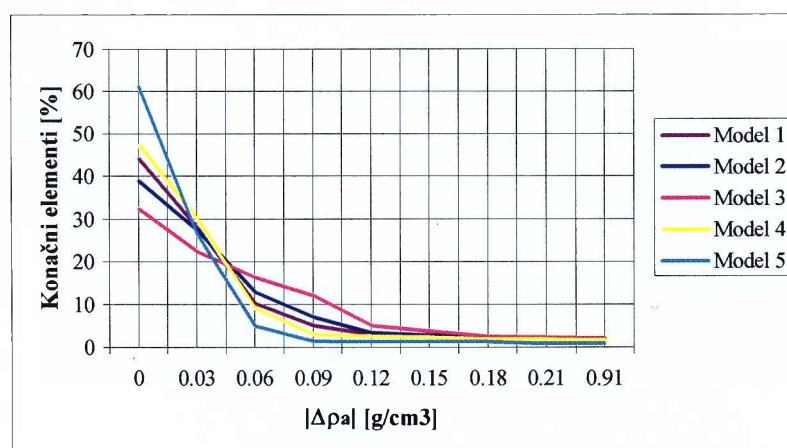
U cilju upoređenja rezultata dobijenih numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranom na navedenim modelima određena je, kao pokazatelj odstupanja eksperimentalno i teorijski dobijene raspodjele koštanog tkiva, apsolutna veličina razlike eksperimentalno utvrđene relativne gustine koštanog tkiva i one dobijene numeričkim modeliranjem pojedinim modelima $|\Delta\rho_a|$. Ovaj pokazatelj odstupanja eksperimentalno i teorijski dobijene raspodjele koštanog tkiva je određen za sve konačne elementa *FEM* modela pršljena koji čine tijelo pršljena. S obzirom na broj konačnih elemenata koji čine tijelo pršljena, dobijeni rezultati su statistički obrađeni i prikazani na narednim dijagramima u vidu raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva $|\Delta\rho_a|$.



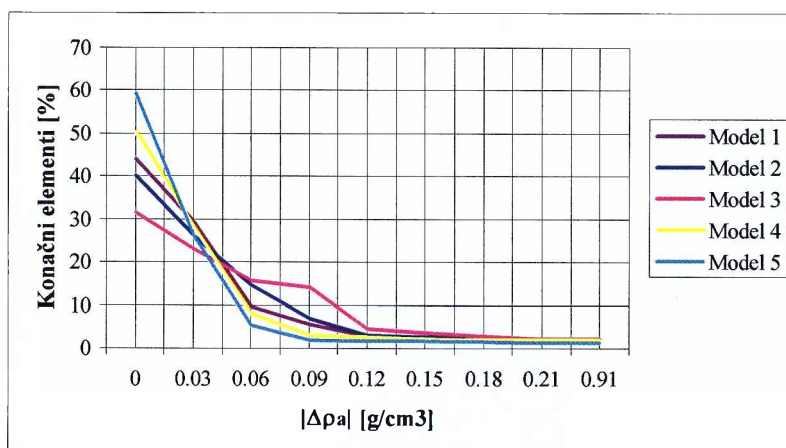
Slika 5.20 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 1 iz tabele 3.2



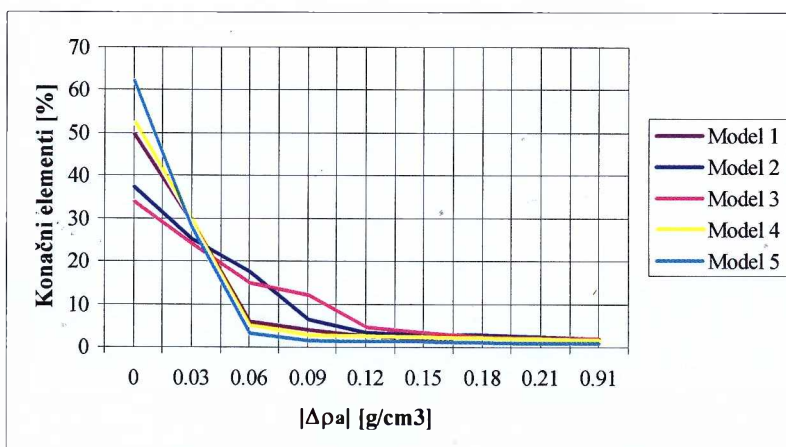
Slika 5.21 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 2 iz tabele 3.2



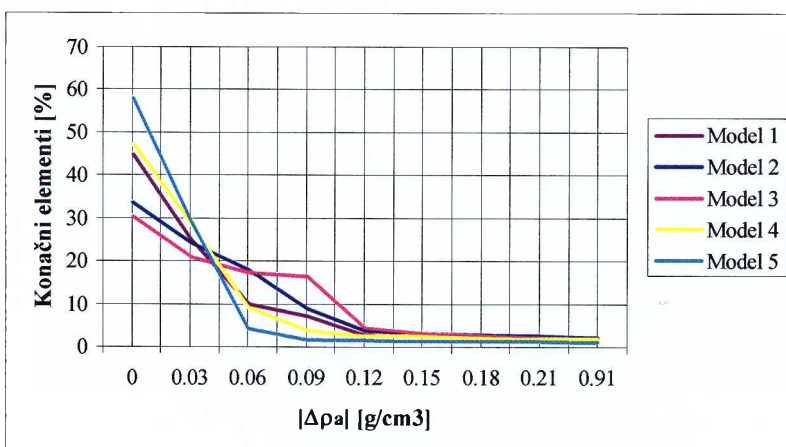
Slika 5.22 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 3 iz tabele 3.2



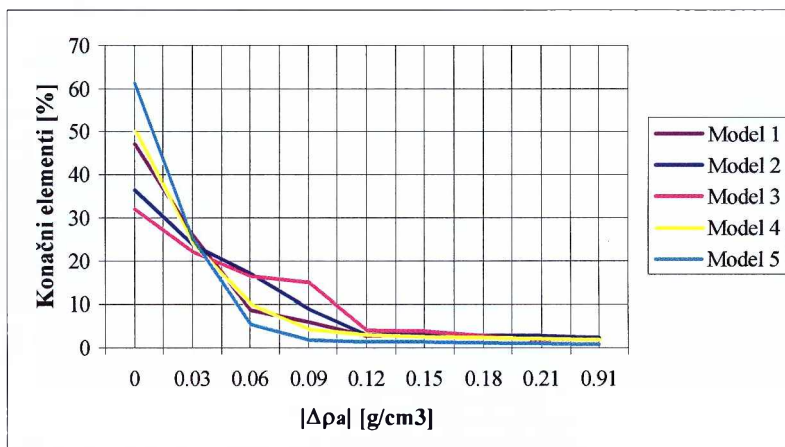
Slika 5.23 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 4 iz tabele 3.2



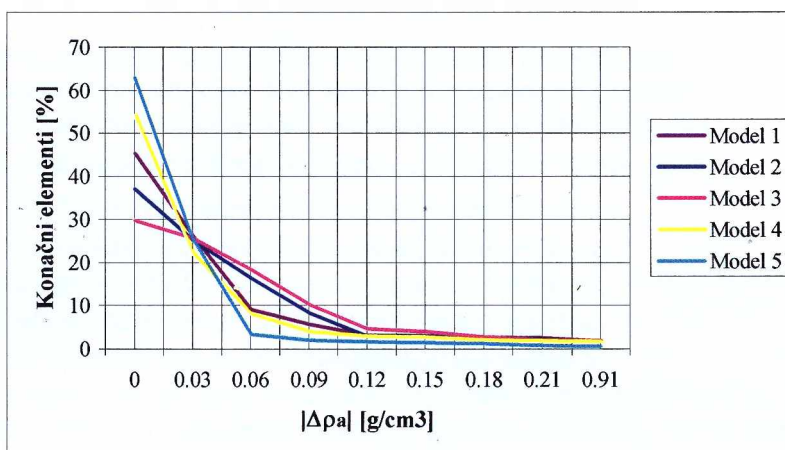
Slika 5.24 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 5 iz tabele 3.2



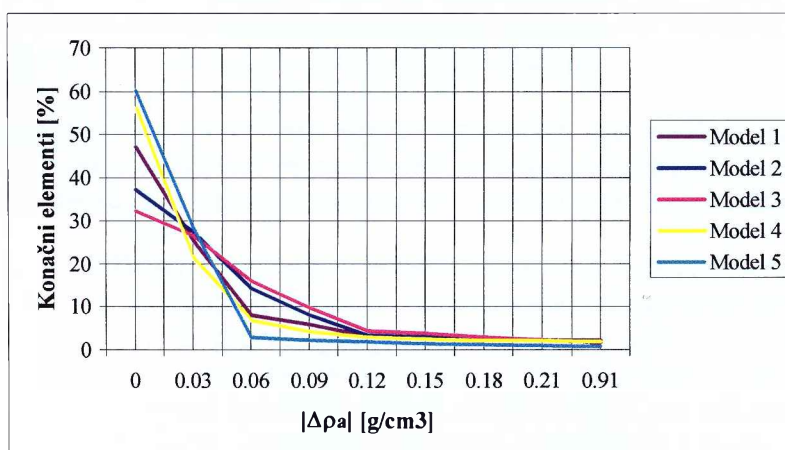
Slika 5.25 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 6 iz tabele 3.2



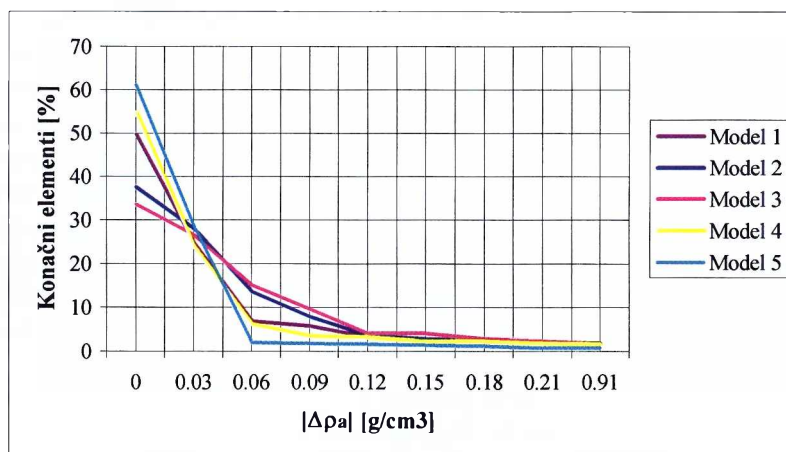
Slika 5.26 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 7 iz tabele 3.2



Slika 5.27 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 8 iz tabele 3.2



Slika 5.28 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 9 iz tabele 3.2



Slika 5.29 Raspodjela apsolutne veličine razlike eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva osobe 10 iz tabele 3.2

5.3.5 Diskusija rezultata numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje

Analiza rezultata dobijenih numeričkim modeliranjem procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje pokazuje da broj konačnih elemenata tijela pršljena za koje je teorijski određena relativna gustina koštanog tkiva bez odstupanja u odnosu na eksperimentalno određenu relativnu gustinu koštanog tkiva konačnog elementa $|\Delta\rho_a|=0$ iznosi:

- Model 1 - (43.2÷49.8)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 2 - (33.9÷40.0)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 3 - (29.8÷34.0)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 4 - (46.1÷56.0)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 5 - (57.8÷63.0)% konačnih elemenata tijela pršljena.

Takođe se pokazuje i da je broj konačnih elemenata tijela pršljena kod kojih je razlika eksperimentalno i teorijski određene relativne gustine koštanog tkiva konačnog elementa $0 < |\Delta\rho_a| < 0.03$ g/cm³ iznosi:

- Model 1 - (70.1÷78.8)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 2 - (58.3÷66.6)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 3 - (51.5÷60.2)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 4 - (74.0÷81.4)% konačnih elemenata tijela pršljena;
- Model 5 - (85.1÷90.0)% konačnih elemenata tijela pršljena.

Dobijeni rezultati numeričkog modeliranja adaptivnog procesa, dati u vidu dijagrama na slikama 5.20÷5.29, pokazuju da se adaptivni proces modelira znatno uspješnije nelinearnim modelima (modeli 1, 4 i 5) u odnosu na linearne modele (model 2) što predstavlja potvrdu stava *Xinghua-e*.

Rezultati dobijeni numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima 1, 2, 3 i 4, dati u vidu dijagrama na slikama 5.20÷5.29, jasno pokazuju efekte promjene oblika funkcije prostornog uticaja na adaptivni proces. Usvajanjem eksponenta $\varphi=0.5$ u originalnom modelu autora ovog rada - model 3, opada uticaj ćelija senzora na adaptivni proces unutar područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D u poređenju sa modelom *Xinghua-e* - model 1 i modelom *Mullender-a* - model 2, dok van ovog područja raste kao što je prikazano na slici 5.14. Analiza rezultata numeričkog modeliranja adaptivnog procesa pokazuje da numeričko modeliranje bazirano na modelu 3 vodi raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja znatnije odstupa od eksperimentalno određene raspodjele u

poređenju sa raspodjelama relativne gustine koštanog tkiva koje se dobijaju numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima 1 i 2. Usvajanjem eksponenta $\varphi=2$ u originalnom modelu autora ovog rada - model 4, raste uticaj ćelija senzora na adaptivni proces unutar područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D u poređenju sa modelom *Xinghua-e* - model 1 i modelom *Mullender-a* - model 2, dok van ovog područja opada kao što je prikazano na slici 5.14. Analiza rezultata numeričkog modeliranja adaptivnog procesa pokazuje da numeričko modeliranje bazirano na modelu 4 vodi raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja pokazuje bolje poklapanje sa eksperimentalno određenom raspodjelom u poređenju sa raspodjelama relativne gustine koštanog tkiva koje se dobijaju numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima 1 i 2.

Dobijeni rezultati numeričkog modeliranja adaptivnog procesa, dati u vidu dijagrama na slikama 5.20÷5.29, pokazuju da se adaptivni proces opisuje znatno uspješnije originalnim modelom autora ovog rada u kojem je spongiozno koštano tkivo modelirano kao ortotropno (model 5) u odnosu na modele u kojim se spongiozno koštano tkivo modelira kao izotropno (modeli 1, 2, 3 i 4). Dakle, numeričko modeliranje adaptivnog procesa bazirano na modelu 5 vodi raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja znatno manje odstupa od eksperimentalno određene raspodjele u poređenju sa raspodjelama relativne gustine koštanog tkiva koje se dobijaju numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima 1, 2, 3 i 4.

Upoređenjem raspodjela relativne gustine koštanog tkiva dobijenih eksperimentalno i numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa navedenim modelima uočava se sljedeće:

- Raspodjele dobijene numeričkim modeliranjem su, s obzirom na pretpostavljenju simetričnost geometrije i opterećenja pršljena u odnosu na srednju sagitalnu ravan, simetrične za razliku od eksperimentalno određene raspodjele;
- Raspodjele dobijene numeričkim modeliranjem pokazuju znatnije odstupanje u odnosu na eksperimentalno određenu raspodjelu u području sa zadnje strane tijela pršljena u kojem krvni sudovi koji prehranjuju pršljen ulaze u tijelo pršljena. Eksperimentalno određena raspodjela pokazuje da je relativna gustina koštanog tkiva u ovom području vrlo niska, čak toliko da ga u pojedinim *vokselima* skeniranih presjeka tijela pršljena i nema. Raspodjele dobijene numeričkim modeliranjem pokazuju manjkavost matematičkih modela koji opisuju adaptivni proces koja se ogleda u nedostatku unutrašnjeg mehanizma ugrađenog u modele, kojim bi bila definisana određena ograničenja kada je u pitanje raspodjela koštanog tkiva u ovakvim specifičnim područjima pršljena odnosno bilo koje druge kosti čija bi raspodjela koštanog tkiva bila predmet numeričkog modeliranja.

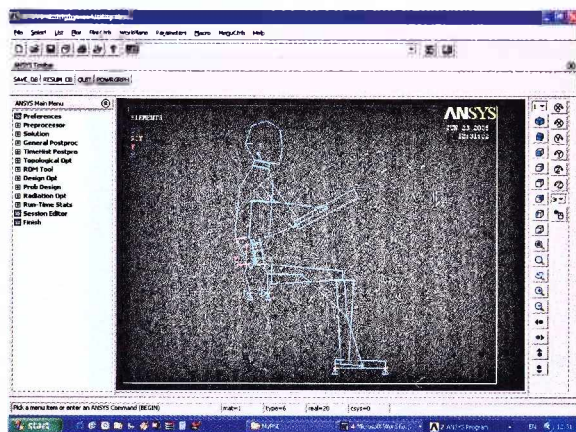
5.4 PRIMJER PRIMJENE BIOMEHANIČKOG *FEM* MODELA PRŠLJENA ZA ODREĐIVANJE NAPONSKOG STANJA PRŠLJENA RUKOVAOCA MOSNE DIZALICE

Numeričkim modeliranjem procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje je određena raspodjela relativne gustine koštanog tkiva pršljena osoba koje predstavljaju istraživački uzorak. Korelativne veze relativne gustine i mehaničkih karakteristika koštanog tkiva utvrđene brojnim istraživanjima, koja su detaljno predstavljena u drugom poglavlju ovog rada, omogućavaju da se na osnovu raspodjela relativne gustine odrede i mehaničke karakteristike koštanog tkiva konačnih elemenata *FEM* modela pršljena. Dobijeni *FEM* model pršljena može biti iskorišćen, između ostalog, i za analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena izazvanog kako sopstvenom težinom, tako i opterećenjem pršljena uzrokovanim različitim spoljnjim uticajima.

U tom smislu je izvršeno mjerenje vibracija mosne dizalice u različitim radnim režimima, čiji su rezultati dati u trećem poglavlju ovog rada na slikama 3.17 i 3.18, kako bi se identifikovalo

opterećenje izazvano vibracijama koje u toku rada djeluje na kičmeni stub rukovaoca dizalice. Na osnovu rezultata mjerenja vibracija mosne dizalice je određeno opterećenje slabinskog pršljena L_5 rukovaoca dizalice i prema njemu izvršena analiza naponskog stanja pršljena.

Opterećenje slabinskog pršljena L_5 , izazvano vibracijama mosne dizalice, je određeno *FEM* modelom ljudskog tijela *Pankoke*-a [56], čije su karakteristike date u drugom poglavlju ovog rada. Karakteristike ovog modela se mogu prilagođavati individualnim karakteristikama, tj. visini i težini rukovaoca dizalice. Stoga je model prilagođen visini i težini osobe 5 iza tabele 3.2. Opterećenje pršljena je određeno za položaj tijela koji je *Pankoke* definisao kao opušteni položaj tijela. *FEM* model ljudskog tijela, prikazan na slici 5.30, je pripremljen u komercijalnom *FEA* softveru *ANSYS 8.0*. Model je iskorišćen za vremensku analizu kojom je određena promjena opterećenja pršljena usled radnih vibracija mosne dizalice registrovanih tokom istraživanja. Vremenskom analizom se određuju pomijeranja, naponi, deformacije i opterećenje dinamičkog modela nastale pod dejstvom spoljašnjih vremenski promjenljivih radnih sila.



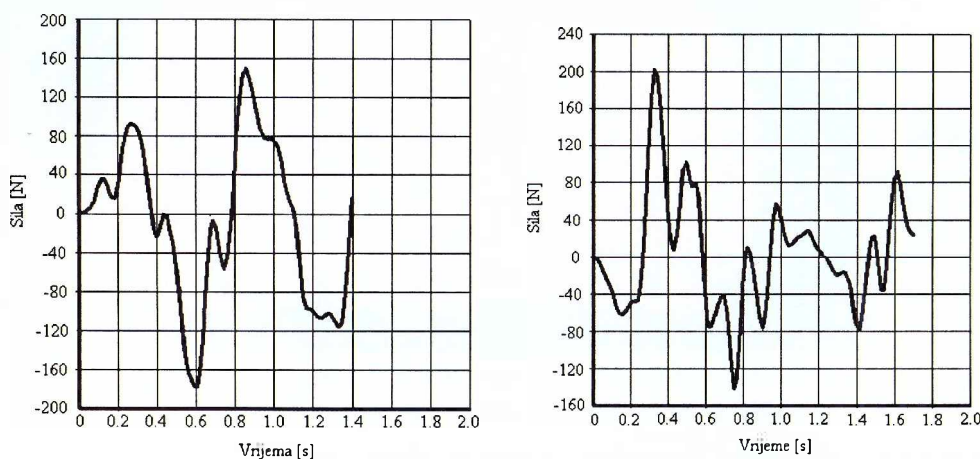
Slika 5.30 *FEM* model ljudskog tijela pripremljen u *FEA* softveru *ANSYS 8.0*

Metoda za sprovođenje vremenske analize koja je korišćena u ovom radu je metoda superpozicije oblika oscilovanja koja je detaljno obrazložena u istraživanju *S.Kitazaki*-ja [140]. Za sprovođenje vremenske analize ovom metodom potrebno je poznavanje sopstvenih frekvencija modela. Stoga je modelom *Pankoke*-a prethodno izvršena modalna analiza, a dobijene vrijednosti sopstvenih frekvencija modela su date u tabeli 5.7. Potom je izvršena vremenska analiza i to za vremenski interval u trajanju kraćem od dvije sekunde unutar kojeg se nalaze maksimalne amplitude vibracija mjerenih u radnim režimima podizanja sa tla i spuštanja

na tlo tereta od 40 kN prikazanim na slikama 3.17 i 3.18. Dobijeni rezultati o opterećenju pršljena L_5 rukovaoca mosne dizalice, izazvanom vibracijama, u vremenskom intervalu u kojem su registrovane vibracije najvećeg inteziteta, u navedenim radnim režimima, su date na slici 5.31.

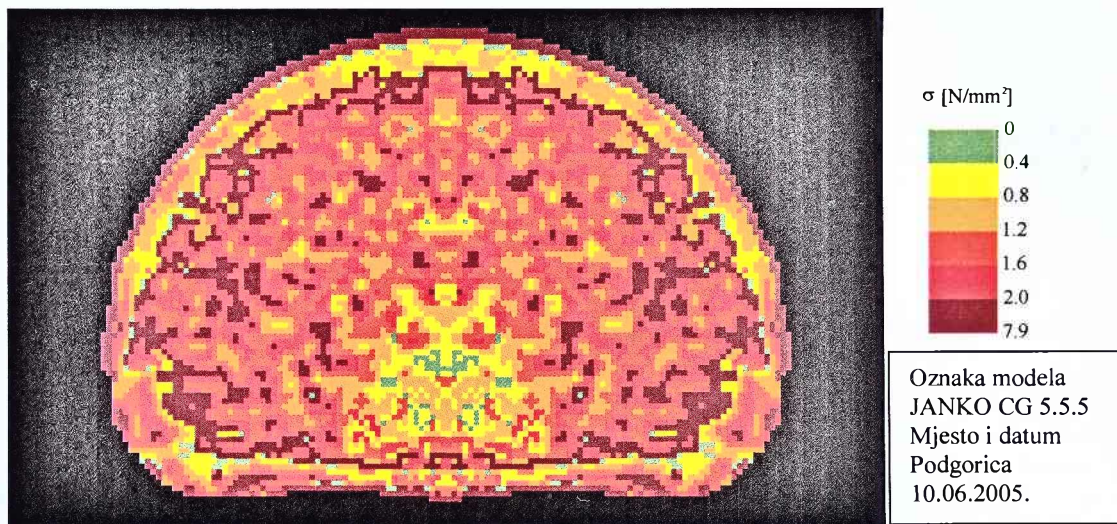
Tabela 5.7 Sopstvene frekvencije modela *Pankoke*-a

Mod	1	2	3	4	5	6	7	8
[Hz]	0.6	2.9	4.8	7.9	11.7	14.7	15.6	18.8



Slika 5.31 Sila pritiska na tijelo pršljena L_5 izazvana vertikalnim vibracijama pri
a) podizanju tereta od 4 t sa tla b) spuštanju tereta od 4 t na tlo

Maksimalna sila pritiska kojom je usled dejstva vibracija dodatno opterećeno tijelo pršljena L_5 rukovaoca mosne dizalice se javlja, kada je riječ o ispitivanim radnim režimima dizalice, tokom podizanja tereta od 40 kN sa tla i iznosi 177 N. Program koji je autor ovog rada razvio za analizu naponsko-deformacionog stanja pršljena i simulaciju adaptivnog procesa omogućava određivanje naponskog stanja pršljena koje je posljedice ne samo sopstvene težine tijela, već i dodatnog opterećenja izazvanog spoljnjim uzročnicima. U tom smislu je sila pritiska koja, kao posljedica vibracija koje djeluju na rukovaoca mosne dizalice, dodatno opterećuje pršljen, u *FEM* model unijeta kao dodatno opterećenje kontaktnih površina tijela pršljena. Naponsko stanje pršljena L_5 rukovaoca mosne dizalice, koje je posljedica opterećenja izazvanog sopstvenom težinom i vibracijama dizalice, u jednom od poprečnih presjeka pršljena je dato na slici 5.32.



Slika 5.32 Raspodjela *Von Mises*-ovih napona u jednom od poprečnih presjeka pršljena rukovaoca mosne dizalice

Na osnovu raspodjele realativne gustine koštanog tkiva, u izabranom poprečnom presjeku pršljena, određena je raspodjela napona na granici plastične deformacije u odnosu na pritisak i to korišćenjem korelativne veze, koju je utvrdila *E.Morgan*, date izrazima (2.4a i 2.4b) za spongiozno, odnosno, kortikalno koštano tkivo. Dobijena raspodjela je prikazana na slici 5.33.



Slika 5.37 Raspodjela napona na granici plastične deformacije u poprečnom presjeku pršljena rukovaoca dizalice

Upoređenjem raspodjele *Von Mises*-ovih napona u izabranom poprečnom presjeku pršljena rukovaoca mosne dizalice i raspodjele napona na granici plastične deformacije može se zaključiti da su naponi u području elastičnosti.

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Tokom istraživanja na razvoju biomehaničkog *FEM* modela pršljena baziranog na procesu adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje nastali su sljedeći zaključci:

- Predloženi metod za razvoj biomehaničkog *FEM* modela ljudskog pršljena predstavlja prirodan nastavak dosadašnjih istraživanja u oblasti numeričkog modeliranja procesa adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje. Rezultati istraživanja *Huiskes-a*, *Weinans-a*, *Mullender-a* i *Xinghua-e* na razvoju *Nijmegen* modela adaptivnog procesa su dopunjeni predlozima na bazi kojih je razvijen originalni model adaptivnog procesa. Proces adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, koji je u dosadašnjim istraživanjima numerički modeliran isključivo na 2D *FEM* modelima ljudskih kosti, je po prvi put numerički modeliran na 3D *FEM* modelu ljudskog pršljena. Rezultati numeričkog modeliranja adaptivnog procesa su upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima dobijenim kvantitativnom kompjuterskom tomografijom pršljena;
- Rezultati dobijeni tokom određivanja kalibracione karakteristike *CT* skenera u vidu korelativne veze *CT* broja sa relativnom gustinom spongioznog, odnosno, kortikalnog koštanog tkiva predstavljaju potvrdu postojanja jake korelativne veze ovih veličina u linearnom obliku. Veličina koeficijenata korelacije ove veze ukazuje na korelativnu vezu koja skoro da prelazi u funkcionalnu;
- Razvijeni parametarski model za geometrijsko modeliranje ljudskog pršljena omogućava modeliranje geometrije pršljena sa zadovoljavajućom tačnošću. Najveće odstupanje geometrijskog modela pršljena, dobijenog parametarskim modeliranjem geometrije istog, se javlja u području spinoznog i poprečnih nastavaka, što je uslovljeno složenošću geometrije pršljenskih nastavaka i neadekvatnim brojem parametara modela koji odgovaraju geometrijskim karakteristikama spinoznog i poprečnih nastavaka, kao i početnom pretpostavkom parametarskog modela o simetriji pršljena u odnosu na srednju sagitalnu ravan;
- Izabrano okruženje, komercijalnog geometrijskog modelera *Mechanical Desktop 6*, za implementaciju razvijenog parametarskog modela predstavlja dobar izbor, s obzirom na raspoloživost brojnih alata za geometrijsko modeliranje, standardnih formata za razmjenu geometrijskih modela sa drugim komercijalnim softverima, kao i integrisanih razvojnih alata. Razvijeni model za parametarsko modeliranje geometrije pršljena predstavlja efikasniji alat za rekonstrukciju geometrije pršljena, koji znatno skraćuje vrijeme potrebno za generisanje geometrijskog modela pršljena, u odnosu na klasičnu metodu koja se zasniva na podacima sa digitalizovanih slika;

- Veličina odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže, određena tokom istraživanja za osobe koje predstavljaju istraživački uzorak, se kreće u granicama $k^*=(0.015\div0.022)$ J/g. Dobijene veličine odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže predstavljaju potvrdu pretpostavke *Rubin* i *Lanyon*-a po kojoj ravnotežno stanje odgovara normalnoj deformaciji kosti izazvanoj svakodnevnim aktivnostima;
- Rezultati dobijeni numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa pokazuju da se adaptivni proces modelira uspješnije nelinearnim nego linearnim modelima adaptivnog procesa;
- Originalni predlog kojim se funkcija prostornog uticaja definiše izrazom (5.8) omogućava varijaciju oblika funkcije prostornog uticaja, usvajanjem različitih veličina eksponenta φ , i ispitivanje efekata iste na adaptivni proces. Usvajanje veličine eksponenta $\varphi>1$ vodi rastu uticaja ćelija senzora na adaptivni proces unutar područja određenog koeficijentom brzine opadanja uticaja ćelije senzora na adaptivni proces D u odnosu na modele *Xinghua*-e i *Mullender*-a, a smanjenju van ovog područja. Rezultati dobijeni numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa pokazuju da originalni model u ovom slučaju vodi raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja pokazuje bolje poklapanje sa eksperimentalno određenom raspodjelom u poređenju sa raspodjelama relativne gustine koštanog tkiva koje se dobijaju numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima *Xinghua*-e i *Mullender*-a;
- Rezultati dobijeni numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa pokazuju da uvođenje ortotropnosti spongioznog koštanog tkiva, utvrđene istraživanjem koje je 1999. godine sproveo *Ulrich* sa saradnicima, u originalni model vodi raspodjeli relativne gustine koštanog tkiva koja pokazuje znatno bolje poklapanje sa eksperimentalno određenom raspodjelom u poređenju sa raspodjelama relativne gustine koštanog tkiva koje se dobijaju numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa baziranim na modelima u kojim je spongiozno koštano tkivo modelirano kao izotropno.

Tokom istraživanja na razvoju biomehaničkog *FEM* modela pršljena baziranog na procesu adaptacije koštanog tkiva na mehaničko opterećenje otvorio se i čitav niz pitanja koja određuju pravce budućih istraživanja:

- Rezultati parametarskog modeliranja geometrije ljudskog pršljena ukazuju na potrebu daljeg poboljšanja parametarskog modela. Pravci daljih istraživanja bi trebali biti usmjereni ka uvođenju dodatnih parametara kojim bi se na logičniji način parametarski izrazila geometrija spinoznog i poprečnih nastavaka, kao i daljem razvoju parametarskog modela geometrije pršljena koji za polazište ne bi imao početnu pretpostavku parametarskog modela autora ovog istraživanja o simetriji pršljena u odnosu na srednju sagitalnu ravan;
- Analiza veličine odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* određene tokom istraživanja za osobe koje predstavljaju istraživački uzorak, date u tabeli 5.5, i njihove starosne dobi, date u tabeli 3.2, pokazuje da parametar k^* raste sa porastom starosne dobi. Ovo ukazuje na moguće postojanje korelativne veze odnosa gustine deformacione energije i relativne gustine koštanog tkiva u stanju ravnoteže k^* i starosne dobi osobe koje bi trebalo istražiti na većem uzorku;
- Granična veličina zapreminske gustine ćelija senzora, korišćena u originalnom modelu autora ovog istraživanja iznosi 216 ćelija senzora/mm³, i određena je na osnovu preporuke *Mullender*-a za graničnu veličinu površinske gustine ćelija senzora. Istraživanje uticaja promjene veličine zapreminske gustine ćelija senzora na adaptivni proces bi trebalo da pokaže da li je ovako određena granična veličina zapreminske gustine ćelija senzora adekvatna ili se njenom promjenom povećava sličnost koštane strukture koja se dobija numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa na 3D *FEM* modelu kosti sa realno postojećom strukturom koštanog tkiva;

- Detaljna istraživanja efekata varijacije oblika funkcije prostornog uticaja (5.8) na adaptivni proces za različite veličine eksponenta $\varphi > 1$ bi trebalo da omoguće određivanje veličine eksponenta φ koja vodi koštanoj strukturi, dobijenoj numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa na 3D modelu kosti, koja je najslbližnja realno postojećoj strukturi koštanog tkiva;
- Upoređenje raspodjele koštanog tkiva pršljena dobijene numeričkim modeliranjem adaptivnog procesa sa eksperimentalno određenom raspodjelom koštanog tkiva ukazuje na znatnije odstupanje teorijski i eksperimentalno dobijene raspodjele koštanog tkiva sa zadnje strane tijela pršljena u kojem krvni sudovi koji prehranjuju pršljen ulaze u tijelo pršljena. Ovo odstupanje je posljedica nedostatka unutrašnjeg mehanizma ugrađenog u matematičke modele adaptivnog procesa kojim bi bila definisana određena ograničenja kada je u pitanje raspodjela koštanog tkiva u specifičnim područjima pršljena odnosno bilo koje druge kosti čija bi raspodjela koštanog tkiva bila predmet numeričkog modeliranja. Budućim istraživanjima bi trebalo definisati ograničenja modela za svaku pojedinu kost ljudskog skeleta, kojim bi u model bila uvedena posebnost pojedinih područja u kosti.



MATEMATIČKE OSNOVE GEOMETRIJSKOG MODELIRANJA

A.1 UVOD

Matematičke osnove geometrijskog modeliranja, kakvo danas poznajemo, postavljene su početkom šezdesetih godina dvadesetog vijeka. *S.Coons* (MIT), *J.Ferguson* (Boeing) i *P.Bezier* (Renault) skoro istovremeno definišu parametarske opise slobodnih površina. Površine opisuju polinomskim funkcijama dvaju parametara (u,v) koji predstavljaju krivolinijske koordinate tačaka sa površine. Sa matematičke tačke gledišta njihove metode su veoma bliske, a razlikuju se samo po korišćenom polinomskom bazu, pri čemu je moguća konverzija iz jednog oblika u drugi. *Coons* površinu opisuje u funkciji graničnih krivih linija i izvoda (tangenti) u smjeru poprečnom na te linije, *Ferguson* u funkciji diskretnih geometrijskih i diferencijalnih svojstava površine u njenim tjemnim, a *Bezier* preko tačaka, tkz. kontrolnog poliedra.

Početkom sedamdesetih godina u geometrijsko modeliranje se uvodi novi bazis zasnovan na B-splajn funkcijama. Matematičke osnove B-splajn funkcija je originalno postavio *Schoenberg* 1946. godine. Međutim, tek 1972. godine zahvaljujući radovima *de Boor*-a i *Cox*-a koji pronalaze rekurentnu relaciju i razvijaju efikasne algoritme za računsku implementaciju B-splajn funkcija, dolazi do njihove široke primjene u geometrijskom modeliranju. Ova familija funkcija se pokazala kao vrlo efikasno sredstvo za rešavanja problema integracije površinskog i zapreminskog modeliranja. Tako nastaje novi bazis za opis geometrijskih elemenata dat u obliku racionalnih polinomskih funkcija, a geometrija definisana nad tim bazisom dobija popularan naziv NURBS (*Non Uniform Rational B-Spline*) geometrija.

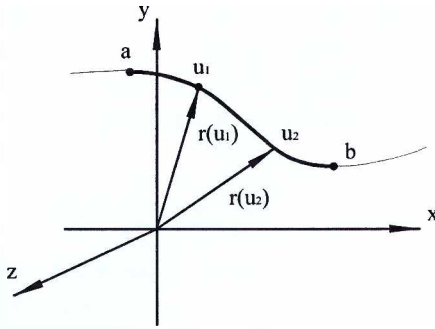
A.2 TEORIJSKA OSNOVA ZA MODELIRANJE KRIVIH LINIJA

A.2.1 Parametarski opis krivih linija

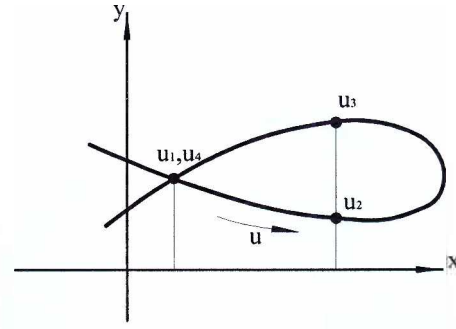
Parametarski opis krive linije je opis pomoću vektorske funkcije skalarne promjenljive. Kriva se u trodimenzionalnom prostoru može posmatrati kao trajektorija neprekidne vektorske funkcije:

$$\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)), \quad u \in [a, b] \quad (\text{A.1})$$

Položaj tačaka sa krive je određen parametrom u , kao što je prikazano na slici A.1.



Slika A.1 Kriva u parametarskom obliku



Slika A.2 Kriva koja se sječe

Pojedine komponente (x, y, z) vektorske funkcije predstavljaju skalarne funkcije promjenljive u , i uobičajno su date u eksplisitnom obliku, npr. $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$. Parametarski opis krive eliminiše mogućnost višestruke pojave iste vrijednosti jer u slučaju zatvorenih krivih, čak i kad se kriva sječe, kao u slučaju krive na slici A.2, pojedine komponentne funkcije su jednoznačne jer parametar u stalno raste, odnosno, opada. Tangenta na krivu se takođe dobija u komponentnom obliku:

$$\frac{d}{du} \mathbf{r}(u) = (x'(u), y'(u), z'(u)), \quad u \in [a, b] \quad (\text{A.2}).$$

Funkcije $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ mogu biti proizvoljnog oblika. Najpraktičnijim se, međutim, pokazuju polinomske funkcije zbog jednostavnosti izračunavanja vrijednosti funkcije, razrađenih metoda za rešavanje algebarskih jednačina, jednostavnosti diferenciranja i integracije.

A.2.2 Oblici polinomskih krivih linija

Standardni oblik polinomske krive stepena $\leq n$ definiše se na sljedeći način:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot u + \dots + \mathbf{a}_n \cdot u^n, \quad u \in [a, b] \quad (\text{A.3})$$

Ograničavajući parametar u na interval $u \in [a, b]$ bira se željeni segment krive. *Ferguson* je, 1963. godine, u nešto drugačijem obliku i za slučaj kubnog polinoma definisao krivolinijski segment određujući koeficijente a_i na osnovu poznatih vrijednosti $\mathbf{r}(u)$ i $d\mathbf{r}(u)/du$ na krajevima intervala $u \in [a, b]$ normalizovanog na jediničnu dužinu. Prema izrazu (A.3), za $n=3$ se dobija:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot u + \mathbf{a}_2 \cdot u^2 + \mathbf{a}_3 \cdot u^3, \quad u \in [0, 1] \quad (\text{A.4})$$

diferenciranjem izraza (A.4) dobija se prvi izvod kubnog polinoma:

$$\frac{d\mathbf{r}(u)}{du} = \dot{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{a}_1 + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot u + 3 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot u^2, \quad u \in [0, 1] \quad (\text{A.5})$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti položaja $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ i $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(1)$ i izvoda $\mathbf{s}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0)$ i $\mathbf{s}_1 = \dot{\mathbf{r}}(1)$ na krajevima intervala dobijaju se izrazi za određivanje koeficijenata a_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{a}_2 &= 3 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - 2 \cdot \mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{s}_0, & \mathbf{a}_3 &= 2 \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u jednačinu (A.4) i pogodnim grupisanjem dobija se *Ferguson*-ov kubni segment [135]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u) &= \mathbf{r}_0 \cdot (1 - 3 \cdot u^2 + 2 \cdot u^3) + \mathbf{r}_1 \cdot (3 \cdot u^2 - 2 \cdot u^3) + \\ &+ \mathbf{s}_0 \cdot (u - 2 \cdot u^2 + u^3) + \mathbf{s}_1 \cdot (-u^2 + u^3), \quad u \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Polinomi:

$$\begin{aligned} h_0(u) &= 1 - 3 \cdot u^2 + 2 \cdot u^3, & h_1(u) &= 3 \cdot u^2 - 2 \cdot u^3 \\ h_2(u) &= u - 2 \cdot u^2 + u^3, & h_3(u) &= -u^2 + u^3 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

predstavljaju *Hermite*-ove interpolacione funkcije [135].

Veoma popularan metod za definisanje polinomskih segmenata krivih linija razvio je *P. Bezier*. *Bezier* je, 1970. godine, definisao krivolinijski polinomski segment u sljedećem obliku [135]:

$$r(u) = \sum_{i=0}^n r_i \cdot B_i^n(u), \quad u \in [0,1] \quad (A.9).$$

Ovako definisana kriva interpolira samo krajnje tačke r_0 i r_1 , dok oblik kontrolnog poligona (r_0, r_1, \dots, r_n) , prikazan na slici A.3, grubo opisuje oblik krive.

Bezier-ov krivolinijski segment koristi *Bernstein*-ov polinomski bazis, koji je sljedećeg oblika:

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (A.10)$$

za skup svih polinoma stepena $\leq n$. To znači da se svaki polinom stepena n može izraziti kao linearna kombinacija $n+1$ *Bernstein*-ovog polinoma istog stepena. Za slučaj kubnih polinoma *Bernstein*-ov bazis, određen prema izrazu (A.10), sljedećeg je oblika:

$$\begin{aligned} B_0^3(u) &= (1-u)^3, & B_1^3(u) &= 3 \cdot u \cdot (1-u)^2 \\ B_2^3(u) &= 3 \cdot u^2 \cdot (1-u), & B_3^3(u) &= u^3 \end{aligned} \quad (A.11)$$

Bernstein-ovi polinomi su definisani na cijeloj brojnoj osi. Međutim, geometrijsko modeliranje krive linije se sa proizvoljnog intervala normalizacijom uvijek svodi na jedinični interval $[0,1]$. Na takvom, normalizovanom intervalu *Bernstein*-ovi polinomi posjeduju osobine korisne za konstrukciju krive. Najvažnije su sljedeće:

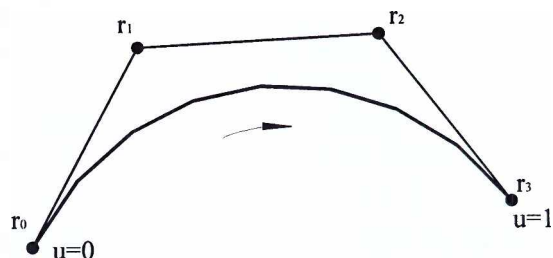
- Dijeljenje jedinice: $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \equiv 1$;
- Pozitivnost: $B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0,1]$;
- Rekurzija: $B_i^n(u) = (1-u) \cdot B_i^{n-1}(u) + u \cdot B_{i-1}^{n-1}(u)$.

Pored prethodno navedenih osobina *Bernstein*-ovi polinomi posjeduju neprekidnost reda n . Drugim riječima, neprekidni su, kao i svi njihovi izvodi reda $\leq n$.

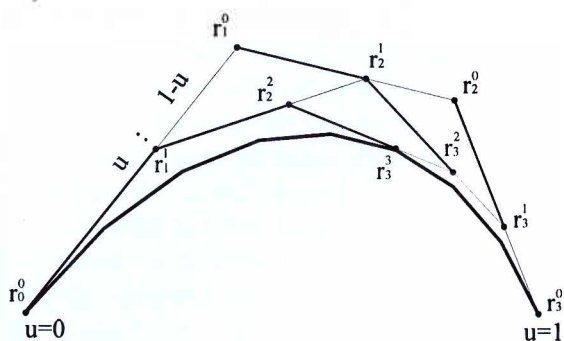
Bezier-ova kriva određena je vektorskim koeficijentima tačaka r_0, r_1, \dots, r_n i *Bernstein*-ovim polinomima $B_0^n(u), \dots, B_n^n(u)$. Poligon $r_0 r_1 \dots r_n$, prikazan na slici A.3, predstavlja karakteristični ili kontrolni poligon jer određuje oblik krive, a *Bernstein*-ovi polinomi $B_i^n(u)$ predstavljaju prelazne funkcije. Vrijednost prelazne funkcije $B_i^n(u)$ predstavlja uticaj i -te tačke r_i na vrijednost tj. položaj krive za određenu veličinu parametra u . Za manje vrijednosti parametra veći je uticaj početnih tačaka na oblik krive, za srednje vrijednosti srednjih tačaka itd. S obzirom da samo $B_0^n(u)$ i $B_n^n(u)$ mogu poprimiti vrijednost 1 slijedi da *Bezier*-ova kriva prolazi samo kroz tačke r_0 (za $u=0$) i r_n (za $u=1$). *Bernstein*-ovi polinomi $B_i^n(u)$ se često nazivaju i težinskim funkcijama, jer predstavljaju doprinose, težine, pojedinih tačaka obliku *Bezier*-ove krive.

Sva svojstva *Bezier*-ove krive proističu iz svojstava *Bernstein*-ovog polinomskog bazisa nad kojim je kriva i konstruisana. Tako iz svojstava dijeljenja jedinice i pozitivnosti *Bernstein*-ovih polinoma proističe da tačke *Bezier*-ove krive predstavljaju konveksnu kombinaciju tačaka kontrolnog poligona. Ova činjenica ima za posljedicu:

- Veza između krive i kontrolnih *Bezier*-ovih tačaka je invarijantna pod afnim transformacijama;
- *Bezier*-ove kriva leži u konveksnoj ljusci svojih kontrolnih tačaka, slika A.3.



Slika A.3 *Bezier*-ov krivolinijski segment



Slika A.4 Grafički prikaz Kasteljanovog algoritma

Svojstvo rekurzije *Bernstein*-ovih polinoma može se iskoristiti za konstrukciju *Bezier*-ove krive pomoću uzastopne linearne interpolacije iz čega slijedi Kasteljanov algoritam. Kasteljanov algoritam se sastoji u uvođenju pomoćnih kontrolnih tačaka na sljedeći način:

$$r_i^k(u) = (1-u) \cdot r_{i-1}^{k-1} + u \cdot r_i^{k-1} \quad (\text{A.12})$$

gdje je $r_i^0 = r_i$ lako se pokazuje da tačku sa *Bezier*-ove krive dobijamo kao:

$$r(u) = r_n^n(u) \quad (\text{A.13})$$

Grafička interpretacija Kasteljanovog algoritma data je na slici A.4. Izvodi *Bezier*-ove krive se takođe mogu izraziti *Bernstein*-ovim polinomima nižeg reda.

Izvod *Bernstein*-ovih polinoma po parametru t sljedećeg je oblika:

$$\frac{dB_i^n(u)}{du} = n \cdot [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)] \quad (\text{A.14})$$

Koristeći se prethodnom jednačinom jednostavno se dolazi do izraza za izvod *Bezier*-ove krive, koji geometrijski predstavlja vektor tangente na krivu:

$$\frac{dr(u)}{du} = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta r_i \cdot \frac{dB_i^{n-1}(u)}{du} \quad (\text{A.15})$$

pri čemu je $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$. Ponavljajući prethodni postupak dobijaju se izrazi i za izvode višeg reda. Tako se za izvod k -tog reda dobija:

$$D_u^k r(u) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k r_i \cdot \frac{dB_i^{n-k}(u)}{du} \quad (\text{A.16})^1$$

pri čemu je $\Delta^k r_i = \Delta^{k-1} r_{i+1} - \Delta^{k-1} r_i$. Vrijednosti prvih izvoda *Bezier*-ove krive za $u=0$ i $u=1$ su:

$$\dot{r}(0) = n \cdot (r_1 - r_0) \quad , \quad \dot{r}(1) = n \cdot (r_n - r_{n-1}) \quad (\text{A.17})$$

što geometrijski znači da su tangente na *Bezier*-ovu krivu u početnoj i krajnjoj tački poklapaju sa prvom i posljednjom stranom kontrolnog poligona. Vrijednosti drugih izvoda *Bezier*-ove krive za $u=0$ i $u=1$ su:

$$\ddot{r}(0) = n \cdot (n-1) \cdot (r_0 - 2 \cdot r_1 + r_2) \quad , \quad \ddot{r}(1) = n \cdot (n-1) \cdot (r_n - 2 \cdot r_{n-1} + r_{n-2}) \quad (\text{A.18})$$

na osnovu čega proističe da zakrivljenost krive u početnoj i krajnjoj tački određuju prve odnosno zadnje tri tačke kontrolnog poligona. Ovi se izrazi koriste kada se pri sastavljanju kompozitne *Bezier*-ove krive žele zadovoljiti uslovi neprekidnosti tangente i/ili zakrivljenosti. Uslovi neprekidnosti krive mogu se prevesti u uslove koje moraju zadovoljiti kontrolni poligoni susjednih *Bezier*-ovih krivolinijskih segmenata.

A.2.3 B-splajn kriva linija

Ma koji od navedenih polinomskih bazisa bio upotrijebljen problem sa neželjenim oscilacijama krive linije će se pojaviti kad god se jedinstvenom krivom interpolira, odnosno, aproksimira veći niz tačaka. Problem neželjenih oscilacija pri interpolaciji većeg broja tačaka jedinstvenom polinomskom funkcijom rješava se uspješno interpolacijom splajnovima. Splajn kriva je po djelovima polinomska kriva, sastavljena iz polinomskih segmenata na čijim su granicama postignuti određeni uslovi neprekidnosti. Najčešće korišćena kubna splajn kriva ima po djelovima kubne segmente i neprekidna je zaključno sa drugim izvodom na cijeloj oblasti

¹ D_u^k -oznaka za izvod k -tog reda po promjenljivoj u

definisano. Stoga, kubni splajn ispunjava osnovne zahtjeve koji se postavljaju pri geometrijskom modeliranju:

- Ima vizuelnu neprekidnost, naime, vizuelno se može osjetiti najviše prekid zakrivljenosti, kojeg nema zbog neprekidnosti drugog izvoda;
- Nema skoka centrifugalne sile alata NC mašina pri izradi elementa, geometrije modelirane splajnovima, jer nema prekida zakrivljenosti;
- Moguće modeliranje 3D geometrije, npr. četiri tačke kontrolnog poligona *Bezier*-ove krive ne moraju ležati u ravni.

S obzirom na osobine koje ih izdvajaju po pogodnosti za geometrijsko modeliranje, danas je u najširoj upotrebi familija B-splajn krivih linija. B-splajn kriva linija je definisana kao po djelovima polinomska vektorska funkcija na B-splajn bazu u obliku [135]:

$$r(u) = \sum_{i=0}^n r_i \cdot N_i^k(u), \quad u_k \leq u \leq u_{n+1} \quad (A.19)$$

Tačke r_i formiraju tzv. *de Boor*-ov kontrolni poligon. Broj ovih tačaka jednak je broju stepeni slobode B-splajn bazisa, stepena k , definisanog nad vektorom čvorova $u = (u_i)_0^{n+k+1}$. Dakle, B-splajn kriva linija stepena k je jednoznačno određena sa:

- nizom r_0, r_1, \dots, r_n kontrolnih tačaka i

- vektorom čvorova $u = (u_i)_0^{n+k+1}$.

Ako je rastojanje čvorova jednako B-splajn kriva je uniformna, u suprotnom B-splajn kriva je neuniformna.

Matematičke osnove B-splajn funkcija, koje predstavljaju bazis za B-splajn krive linije, je originalno postavio *Schoenberg* 1946. godine. Međutim, tek 1972. godine zahvaljujući radovima *de Boor*-a i *Cox*-a koji su utvrdili svojstvo rekurzije B-splajn funkcija u sljedećem obliku:

$$N_i^k(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} \cdot N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1}^{k-1}(u) \quad (A.20a)$$

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{za } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{u protivnom} \end{cases} \quad (A.20b)$$

i razvili efikasne algoritme za računsku implementaciju B-splajn funkcija, dolazi do njihove široke primjene u geometrijskom modeliranju. Svojstva B-splajn funkcija značajna za geometriju B-splajn krive linije su:

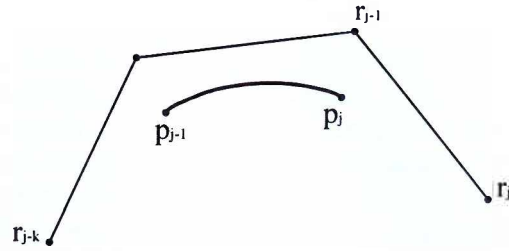
- Ima mali (lokalni) nosač: $N_i^k(t) = 0, \quad u \notin [u_i, u_{i+k+1}]$;
- Dijeljenje jedinice: $\sum_{i=j-k}^j N_i^k(u) \equiv 1, \quad t_j \leq u \leq u_{j+1}$;
- Pozitivnost: $N_i^k(u) > 0, \quad u \in [u_i, u_{i+k+1}]$.

Mali nosač je svojstvo koje je izdvojilo B-splajn funkcije i učinilo ih superiornim u odnosu na druge familije funkcija kada je riječ o geometrijskom modeliranju. Mali nosač, tj. mali interval na kojem je veličina B-splajn funkcija različita od nule, uslovljava da ma koje dužine bio vektor čvorova u svakoj linearnoj kombinaciji nad ovim bazisom će učestvovati, za pojedine vrijednosti promjenljive u , konačan i relativno mali broj B-splajn funkcija. Ujedno ova osobina uslovljava da uticaj čvornih tačaka kontrolnog poligona na oblik B-splajn krive linije bude lokalna, tj. da određeni čvor utiče na oblik krive samo u sopstvenoj okolini, a ne po čitavoj dužini krive.

Očigledna je analogija odgovarajućih svojstava *Bernstein*-ovih polinoma i B-splajn funkcija, pa samim tim i *Bezier*-ove i B-splajn krive. Dakle, na osnovu drugog i trećeg svojstva B-splajn funkcija slijedi da B-splajn kriva predstavlja konveksnu kombinaciju svojih kontrolnih tačaka pa prema tome leži u konveksnoj ljusci tih tačaka. Preciznije, na osnovu prvog svojstva B-splajn funkcija slijedi:

$$r(u) = \sum_{i=j-k}^j r_i \cdot N_i^k(u), \quad u_j \leq u \leq u_{j+1} \quad (A.21).$$

Stoga, svaki pojedinačni segment B-splajn krive leži u konveksnoj ljusci onih kontrolnih tačaka koje učestvuju u njegovoj definiciji, slika A.5, dakle tačaka r_{j-k}, \dots, r_j za $u \in [u_j, u_{j+1}]$. Pod segmentom se podrazumijeva dio krive koji odgovara intervalu parametra između dva čvora $[u_j, u_{j+1}]$ za neko $j = \overline{k, n}$. Tačke na krivoj koje su granice segmenta, tj. tačke p_{j-1} i p_j nazivaju se geometrijskim čvorovima. Svaka od kontrolnih tačaka nema svoj geometrijski čvor, a kod kubne splajn krive broj geometrijskih čvorova je za dva manji od broja kontrolnih tačaka. Veličine parametra u na krajevima segmenata B-splajn krive, koji odgovaraju položaju geometrijskih čvorova, definisani su odnosom stranica poligona koji formiraju geometrijski čvorovi i mogu se odrediti prema sljedećim izrazima:



Slika A.5 Segment B-splajn krive i dio kontrolnog poligona koji mu određuje oblik

$$u_{s,0} = 0$$

$$u_{s,j} = (n_g + 1) \cdot \frac{\sum_{k=0}^{j-1} \|p_{(k+1) \bmod (r+1)} - p_k\|}{\sum_{k=0}^{r-1} \|p_{(k+1) \bmod (r+1)} - p_k\|}, \quad j = \overline{1, n_g} \quad (A.22)$$

gdje je: $n_g + 1$ broj geometrijskih čvorova.

Po ideji Kasteljanovog algoritma za određivanje položaja tačaka *Bezier*-ove krive linije, *de Boor* je razvio analogan algoritam za određivanje položaja tačaka B-splajn krive linije. Ovaj algoritam omogućava određivanje vrijednosti krive u tački posredstvom uzastopnih linearnih kombinacija kontrolnih tačaka koje učestvuju u definiciji segmenta kojem tačka pripada. Matematička formulacija ovog algoritma data je sljedećim izrazom:

$$r(u) = \sum_i r_i^k \cdot N_i^0(u) \quad (A.23a)$$

gdje je

$$r_i^j = (1 - \alpha_i^j) \cdot r_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j \cdot r_i^{j-1} \quad (A.23b)$$

$$\alpha_i^j = \frac{u - u_i}{u_{i+k-j+1} - u_i} \quad (A.23c)$$

Izvod B-splajn krive, koji geometrijski predstavlja vektor tangente na krivu može se izraziti na sljedeći način:

$$\frac{dr(u)}{du} = \sum_{i=j-k+1}^j k \cdot \frac{r_i - r_{i-1}}{u_{i+k} - u_i} \cdot N_i^{k-1}(u), \quad u_j \leq u \leq u_{j+1} \quad (A.24)$$

Analogno *Bezier*-ovoj krivoj liniji i kod B-splajn krive tangente u početnoj i krajnjoj tački poklapaju se sa prvom i posljednjom stranom kontrolnog poligona. Ponavljanjem prethodne jednačine dobijaju se izrazi i za izvode višeg reda. Tako se za izvod r -tog reda dobija:

$$D_u^r r(t) = \sum_{i=j-(k-r)}^j \alpha_i^r \cdot N_i^{k-r}(u) \quad (A.25)^2$$

gdje je

² D_u^r -oznaka za izvod r -tog reda po promjenljivoj u

$$\alpha_i^r = (k - r + 1) \cdot \frac{\alpha_i^{r-1} - \alpha_{i-1}^{r-1}}{u_{i+k-r+1} - u_i} \quad (\text{A.26}).$$

A.2.4 Racionalna B-splajn kriva linija

Neracionalni oblici krivih linija, o kojima je bilo riječi u prethodnom dijelu ovog priloga, su pogodni za modeliranje slobodne, odnosno neanalitičke geometrije. Međutim, u inženjerskim konstrukcijama analitički oblici poput pravaca, krugova i ostalih koničnih presjeka jednako su značajni kao i slobodna geometrija. Kubna B-splajn kriva linija može, odgovajućim odabirom kontrolnih tačaka, egzaktno opisati pravolinijski i parabolični segment. Krug, međutim, ne može biti tačno opisan upotrebom ovih neracionalnih izraza, već se mora aproksimirati dijeljenjem na dovoljan broj manjih segmenata. Alternativni pristup koji obezbjeđuje egzaktnu polinomsku predstavu kruga kao i drugih koničnih presjeka bazira se na upotrebi racionalnih polinomskih krivih linija. U slučaju da se koriste B-splajn funkcije N_i^k dobija se racionalna B-splajn kriva linija sljedećeg oblika [135]:

$$r(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot r_i \cdot N_i^k(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_i^k(u)} \quad (\text{A.27})$$

gdje su: w_i težinski koeficijenti, r_i kontrolne tačke. Racionalna B-splajn kriva linija posjeduje sva pozitivna svojstva neracionalne B-splajn krive linije, a dodatno se odlikuje i sljedećim pozitivnim karakteristikama:

- Nudi opšti matematički oblik za precizan opis standardnih analitičkih oblika (pravaca, krugova, koničnih presjeka, ravni i površina drugog reda) kao i slobodne geometrije;
- Nudi dodatne stepene slobode, kroz težinske koeficijente, koji se mogu iskoristiti za generisanje široke lepeze oblika;
- Predstavlja uopštavanje neracionalne B-splajn krive linije i većina svojstava i algoritama razvijenih za neracionalne varijante se jednostavno prenose i na racionalne.

A.3 TEORIJSKA OSNOVA ZA MODELIRANJE POVRŠINA

Slično kao i kod krivih linija, parametarski opis je jedino rješenje za složene i slobodne površine. Parametarski opis površina je ustvari vektorska funkcija dva skalarna parametra, koja tačku iz ravni preslikava u prostor. Parametarski opis i kod površina ima niz prednosti u odnosu na druge vidove opisa površina, poput eksplicitnog, implicitnog itd., koje se ogledaju u jednostavno izračunavanju tačaka, kao i izoparametarskih linija sa površine, eliminisanju problema sa višestrukim vrijednostima.

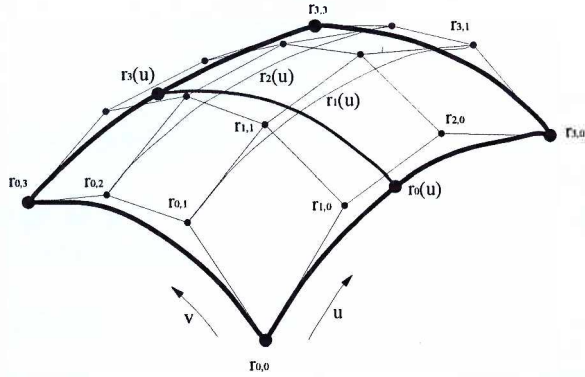
A.3.1 Bezier-ova površina

Parametri koji opisuju Bezier-ovu površinu slično istoimenoj krivoj liniji su tjemena kontrolnog poliedra, a težinske funkcije koje ih povezuju su Bernstein-ovi polinomi. Površina se definiše u obliku tenzorskog proizvoda dvaju Bernstein-ovih polinomskih bazisa [135]:

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r_{ij} \cdot B_i^n(u) \cdot B_j^m(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (\text{A.28})$$

I u ovom slučaju je parametarska ravan normalizovana na jedinični kvadrat da bi se iskoristila sva pozitivna svojstva Bernstein-ovih polinoma na jediničnom intervalu. Na slici A.6 dat je primjer bikubne Bezier-ove površine. Oblik kontrolnog poliedra, mada predstavlja grubu aproksimaciju površine, daje intuitivno dobru predstavu o njenom obliku. Samo četiri kontrolne tačke r_{00} , r_{30} , r_{03} i r_{33} leže na površini, a po četiri kontrolne tačke duž svake ivice kontrolnog poliedra definišu ivice, tj. granične krive površine u obliku Bezier-ove krive linije. Četiri

unutrašnje tačke, susjedne nekoj ivici poliedra, određuju izvode u smjeru poprečnom na tu ivicu utičući tako na prirodu interpolacije u unutrašnjosti površine. Drugim rječima, parcijalna derivacija u smjeru poprečnom na granice površine zavisi samo od prve dvije vrste, odnosno, kolone kontrolnih tačaka. Naime, linije $u=u_0=\text{const.}$, takozvane v linije, predstavljaju Bezier-ove krive linije stepena m sa kontrolnim poligonom:



Slika A.6 Bezier-ova bikubna površina

$$r_j(u_0) = \sum_{i=0}^n r_{ij} \cdot B_i^n(u), \quad j = \overline{1, m} \quad (\text{A.29})$$

Dakle, položaj tačke na toj liniji zavisi samo od parametra v :

$$r(u_0, v) = \sum_{j=0}^n r_j(u_0) \cdot B_j^m(v), \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (\text{A.30})$$

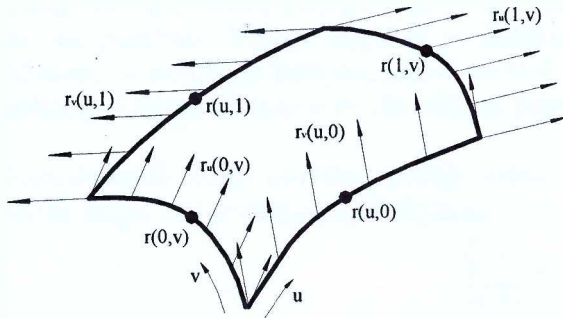
Prvi parcijalni izvod u smjeru poprečnom na graničnu krivu liniju je u tom slučaju:

$$\frac{\partial}{\partial v} r(u_0, v) = m \cdot \sum_{i=0}^n (r_{i,1} - r_{i,0}) \cdot B_i^n(u_0) \quad (\text{A.31})$$

Sva svojstva Bezier-ove krive linije prenose se i na istoimenu površinu. Konfiguracija kontrolnog poliedra daje dobru indicaciju o opštem obliku površine i pomjeranje kontrolnih tačaka izaziva intuitivno očekivanu izmjenu. Ovo, naravno, važi u slučaju slobodnog kreiranja geometrije, a ne geometrije strogo definisane mrežom interpolacionih tačaka.

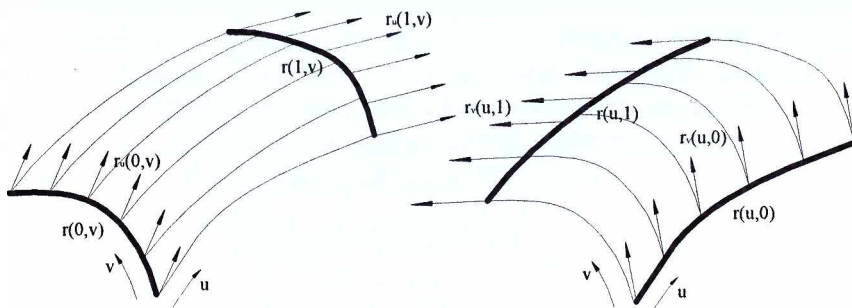
A.3.2 Coons-ova površina

Coons-ova metoda za definisanje topološki pravougaone površine polazi od graničnih krivih linija i izvoda u smjeru poprečnom na te krive linije r_u i r_v , prikazanih na slici A.7. Coons je problem definisanja površine sveo na pronalaženje odgovarajuće funkcije $r=r(u, v)$ $0 \leq u, v \leq 1$ koja interpolira podatke na granicama, tj. koja za $u=0, u=1, v=0$ i $v=1$ daje korektne granične krive linije i tangente. Ova metoda spada u transfiniitne, što znači da se ovom metodom interpolira beskonačan broj tačaka sa granica površine. Coons je do funkcije $r(u, v)$ došao interpolacijom parova graničnih krivih linija, uz primjenu Hermite-ovih interpolacionih funkcija, čim je dobio dvije površine prikazane na slici A.8 [135]:



Slika A.7 Coons-ova površina

$$\begin{aligned} r_1(u, v) &= r(0, v) \cdot h_0(u) + r(1, v) \cdot h_1(u) + r_u(0, v) \cdot h_2(u) + r_u(1, v) \cdot h_3(u) \\ r_2(u, v) &= r(u, 0) \cdot h_0(v) + r(u, 1) \cdot h_1(v) + r_v(u, 0) \cdot h_2(v) + r_v(u, 1) \cdot h_3(v) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$



Slika A.8 Coons-ove površine dobijene prema izrazima (A.32)

Potom je izveo zbrajanje ovih površina čim se nije dobila tražena površina. Međutim, pokazalo se da se očekivana površina dobija kada se od zbirne površine $r_1(u,v)+r_2(u,v)$ oduzme treća površina $r_3(u,v)$ koja nastaje kada se interpolaciona metoda primijeni samo na tjemena površine:

$$r_3(u,v) = \begin{bmatrix} h_0(u) \\ h_1(u) \\ h_2(u) \\ h_3(u) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix} \quad (A.33)$$

gdje r_{uv} predstavlja mješoviti izvod. Površina:

$$r(u,v) = r_1(u,v) + r_2(u,v) - r_3(u,v) \quad (A.34)$$

daje za $u=0$, $u=1$, $v=0$ i $v=1$ granične krive linije i granične izводе, tj. korektno interpolira polazne podatke.

A.3.3 B-splajn površina

B-splajn površina je definisana tenzorskim proizvodom dvije B-splajn funkcije [135]:

$$r(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r_{ij} \cdot N_i^k(u) \cdot N_j^l(v) \quad (A.35)$$

gdje su:

- r_{ij} , $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$ tačke kontrolnog poliedra;
- k i l stepeni površine u pravcu u i v ;
- $N_i^k(u)$, $i = \overline{0, n}$ B-splajn funkcije u pravcu u , stepena k , sa vektorom čvorova $u = (u_r)_0^{n+k+1}$;
- $N_j^l(v)$, $j = \overline{0, m}$ B-splajn funkcije u pravcu v , stepena l , sa vektorom čvorova $v = (v_s)_0^{m+l+1}$.

Veza između kontrolnih tačaka, stepena B-splajn funkcije i vektora čvorova data je već u paragrafu A.2.3 ovog priloga gdje je obrađena B-splajn kriva linija i primjenjuje se na u i v pravac posebno. Vektor čvorova je jedinstven za svaki "red" tačaka kontrolnog poliedra, odnosno, u kontrolni poligon, kao i za svaku "kolonu" kontrolnih tačaka odnosno v kontrolni poligon. Svojstva B-splajn krivih linija se prenose direktno na B-splajn površine.

Racionalna B-splajn površina nastaje jednostavnim proširenjem koncepta racionalnih B-splajn krivih linija, čim se dobija sljedeći izraz:

$$r(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} \cdot r_{ij} \cdot N_i^k(u) \cdot N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} \cdot N_i^k(u) \cdot N_j^l(v)} \quad (A.36)$$

gdje su w_{ij} , $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$ težinski koeficijenti tačaka kontrolnog poliedra. Značaj ovih koeficijenata je u činjenici da u kombinaciji sa odgovarajuće odabranim kontrolnim tačkama i vektorima čvorova mogu omogućiti racionalnu predstavu svih površina drugog reda (cilindar, sfera, konus...). U literaturi ovaj tip B-splajn površina se uobičajno naziva neuniforma racionalna B-splajn površina, odnosno, *NURBS* (*Non Uniform Rational B-Spline*) površina. Pri izračunavanju tačaka sa *NURBS* površine, kao i kod krivih linija ne moramo izračunavati sve B-splajn funkcije već samo one koje su na datom intervalu vektora čvorova različite od nule. Stoga se izraz (A.36) može zapisati u sljedećem obliku [135]:

$$r(u,v) = \frac{\sum_{i=r-k}^r \sum_{j=s-l}^s w_{ij} \cdot r_{ij} \cdot N_i^k(u) \cdot N_j^l(v)}{\sum_{i=r-k}^r \sum_{j=s-l}^s w_{ij} \cdot N_i^k(u) \cdot N_j^l(v)} \cdot \begin{cases} u_r \leq u \leq u_{r+1} \\ v_s \leq v \leq v_{s+1} \end{cases} \quad (A.37)$$

B

MEHANIČKE OSNOVE METODE KONAČNIH ELEMENATA

B.1 UVOD

Analitičko rešavanje diferencijalnih jednačina ravnoteže koje bi zadovoljilo poznate granične uslove je moguće u slučaju jednostavnih struktura. Međutim, u praksi se uobičajno sreću strukture složene geometrije, često sastavljene od većeg broja različitih materijala za koje nije moguće dobiti analitička rešenja jednačina ravnoteže koja zadovoljavaju granične uslove. U ovakvim slučajevima se uobičajno pribjegava numeričkom rešavanju jednačina ravnoteže metodom konačnih elemenata. Metodom konačnih elemenata struktura se složene geometrije diskretizuje i predstavlja skupom određenog broja konačnih elemenata. Matrice u jednačinama ravnoteže strukture se u tom slučaju formiraju jednostavnim spajanjem odgovarajućih matrica dobijenih za pojedine konačne elementa uz očuvanje graničnih geometrijskih uslova.

B.2 OSNOVI TEORIJE ELASTIČNOSTI

Poznavanje osnovnih pojmova teorije elastičnosti neophodno je radi cjelovitog razumijevanja metode konačnih elemenata. Cilj teorije elastičnosti jeste određivanje polja pomijeranja, deformacija i napona opterećenog i oslonjenog tijela. Pomijeranje predstavlja promjenu dimenzije tijela pod dejstvom opterećenja i sa $\{u \ v \ w\}^T$ se mogu označiti komponente pomijeranja za tri međusobno ortogonalna pravca. Deformacija je relativno pomijeranje tj. pomijeranje podijeljeno sa početnom dimenzijom, a sastoji se od linijskih i ugaonih komponenti $\{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$. Napon predstavlja unutrašnju silu po jedinici površine posmatranog presjeka tijela, a čine ga normalne i smičuće komponente $\{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$.

B.2.1 Jednačina spoljašnje i unutrašnje ravnoteže

Jednačine spoljašnje ravnoteže čine sume svih aktivnih (spoljašnjih) i reaktivnih (otpori oslonaca) sila i momenata za tri međusobno ortogonalne ose x, y i z koje u uslovima ravnoteže moraju biti jednake nuli. Za proizvoljan prostorni slučaj postoji ukupno šest jednačina spoljašnje ravnoteže:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0 \quad (\text{B.1})$$

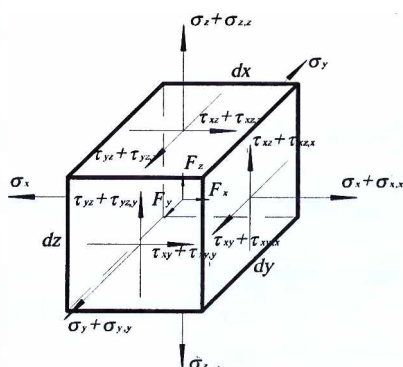
Na slici B.1 prikazan je elementarni dio zapremine tijela, na koji djeluju zapreminske sile $\{F_x, F_y, F_z\}^T$ koje su posljedica uticaja gravitacije, ubrzanja ili magnetnog polja na posmatrano tijelo. Zapreminske sile koje djeluju na elementarnu zapreminu, $dV=dx \cdot dy \cdot dz$, izazivaju ukupnu silu $\{F_x \cdot dV, F_y \cdot dV, F_z \cdot dV\}^T$. Pored zapreminskih sila na elementarnu zapreminu djeluju i naponi $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ u vidu unutrašnjih sila koje djeluju po površinama posmatrane elementarne zapremine. Jednačine unutrašnje ravnoteže, definisane za elementarnu zapreminu, glase: zbir unutrašnjih zapreminskih sila i priraštaja napona za odgovarajuće ose jednak je nuli [144]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (B.2)$$

Jednačina unutrašnje ravnoteže zapisana u matricnoj formi sljedećeg je oblika:

$$[L]^T \cdot \{\sigma\} + \{F\} = 0 \quad (B.3)$$

gdje je $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ vektor napona, $\{F\} = \{F_x, F_y, F_z\}^T$ vektor zapreminskih sila, a $[L]$ matrica diferencijalnih operatora sljedećeg oblika:



Slika B.1 Zapreminske sile i naponi elementarne zapremine

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

B.2.2 Uslovi kompatibilnosti

Zbog kontinualnosti tijela na koje djeluje spoljašnje opterećenje i polje pomijeranja mora biti kontinualno što obezbjeđuju uslovi kompatibilnosti. Uslovi kompatibilnosti dati izrazima [146]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \cdot \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \cdot \partial x} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \cdot \partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \quad (B.5)$$

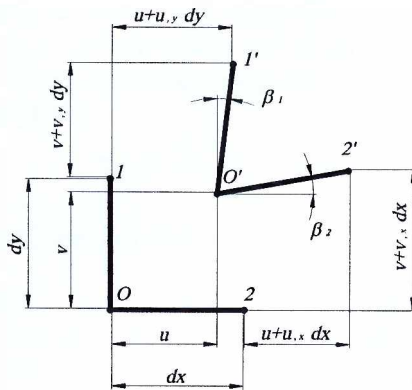
predstavljaju dopunske jednačine za rešavanje diferencijalnih jednačina unutrašnje ravnoteže.

B.2.3 Veza deformacija i pomijeranja

Deformacije opterećenog tijela mogu se izraziti preko pomijeranja $\{u, v, w\}^T$ pri čemu se uvodi pretpostavka da su deformacije male i da linearno zavise od pomijeranja. Po definiciji linijska deformacija predstavlja odnos promjene dužine i početne dužine, što se za primjer dat na slici B.2 može predstaviti sljedećim izrazom [146]:

$$\epsilon_x = \frac{L_{02}' - L_{02}}{L_{02}} = \frac{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) - u \right]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (B.6)$$

Ugaona deformacija predstavlja promjenu pravog ugla elementa sa slike B.2, s obzirom da su uglovi β_1 i β_2 mali važi $\beta_1 \approx \tan \beta_1$ i $\beta_2 \approx \tan \beta_2$, te se ugaona deformacija može izraziti na sljedeći način:



Slika B.2 Deformacija malog elementa

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 \approx \tan \beta_1 + \tan \beta_2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy\right) - u}{dy} + \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx\right) - v}{dx}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

Analogno izrazima (4.7) i (4.8) mogu se izvesti i izrazi za preostale linijske i ugaone komponente deformacije, te se veza deformacija i pomijeranja u matričnoj formi može zapisati:

$$\{\epsilon\} = [L] \cdot \{f\} \quad (\text{B.8})$$

gdje je $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$ vektor deformacija, a $\{f\} = \{u \ v \ w\}^T$ vektor pomijeranja.

B.2.4 Veza napona i deformacija

Za linearno elastično izotropno tijelo veza napona i deformacija je definisana *Hooke*-ovim zakonom koji glasi [146]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot \mu' \cdot \epsilon_x & \tau_{xy} &= \mu' \cdot \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot \mu' \cdot \epsilon_y & \tau_{yz} &= \mu' \cdot \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot \mu' \cdot \epsilon_z & \tau_{zx} &= \mu' \cdot \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

gdje je $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ zapreminska deformacija, a μ' i λ *Lamé*-ove konstante koje se određuju prema sljedećem izrazu:

$$\mu' = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (\text{B.10})$$

gdje je G modul klizanja, E modul elastičnosti i ν *Poisson*-ov koeficijent. *Poisson*-ov koeficijent ν određuje deformaciju u poprečnim pravcima izazvanu naponom u uzdužnom pravcu, tako na primjer napon σ_z izaziva deformaciju $\epsilon_z = \sigma_z / E$, $\epsilon_x = -\nu \epsilon_z$ i $\epsilon_y = -\nu \epsilon_z$. Zapisom izraza (B.9) u matričnoj formi dobija se:

$$\{\epsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\} \quad \text{ili} \quad \{\sigma\} = [E] \cdot \{\epsilon\} \quad (\text{B.11})$$

gdje je $[C]$ matrica elastičnih koeficijenata materijala, a $[E]$ matrica elastičnosti materijala sa članovima:

$$[E] = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

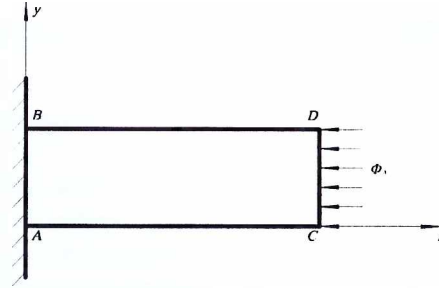
B.2.5 Ekvivalentni napon

Ekvivalentni ili uporedni napon je fiktivni napon koji odgovara uzdužnom, a kojim se zamjenjuje napon koji odgovara složenom naprezanju. Izračunavanje ekvivalentnog napona se uobičajno izvodi prema nekoj od hipoteza o lomu, a najčešće korišćena je hipoteza najvećeg specifičnog deformacionog rada prema kojoj se određuje tkz. *Von Mises*-ov napon i to prema izrazu [146]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \sigma_z + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (B.13)$$

B.2.6 Granični uslovi

Granični uslovi se mogu odnositi na pomijeranja, posredstvom kojih se izražava postojanje oslonaca tijela, i napone, posredstvom kojih se definišu postojeća spoljašnja opterećenja tijela. Granični uslovi za ukliještenu ploču, prikazanu na slici B.3, bili bi: granični uslov pomijeranja po kojem je duž ivice AB pomijeranje $u=v=0$ i granični uslov napona po kojem je duž ivica AC i BD $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ i duž ivice CD $\sigma_x = -\Phi_x$ i $\tau_{xy} = 0$.



Slika B.3 Uklještena ploča

B.3 METODA KONAČNIH ELEMENATA

Koncept ideje na kojoj je zasnovana metoda konačnih elemenata prvi je u svom radu iz 1943. godine iznio *Courant* prepoznavši u njoj *Rayleigh-Ritz*-ovo rešenje varijacionog problema. Osnovna ideja metode konačnih elemenata sastoji se u diskretizaciji kontinualnog tijela i njegovoj podjeli na sitnije konačne elemente, najčešće pravilnih geometrijskih oblika, spojene u zajedničkim čvornim tačkama. Polje pomijeranja, deformacija i napona čvornih tačaka diskretizovanog tijela određuje se iz jednačina ravnoteže, dok se polja pomijeranja, deformacija i napona tačaka unutar konačnog elementa određuju približno interpolacionim funkcijama oblika definisanim prema vrijednostima promjenljivih u čvornim tačkama. Polje pomijeranja tačaka unutar konačnog elementa, za poznate funkcije oblika, može biti izraženo preko pomijeranja čvornih tačaka konačnog elementa na sljedeći način [127, 130, 146]:

$$\{f\} = [N] \cdot \{d\} \quad (B.14)$$

gdje je $[N]$ matrica funkcija oblika, a $\{d\}$ vektor pomijeranja čvornih tačaka. Uvrštavanjem izraza (B.14) u izraz (B.8) koji predstavlja vezu deformacija i pomijeranja dobija se:

$$\{\epsilon\} = [L] \cdot [N] \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} \quad (B.15)$$

gdje $[B]$ predstavlja matricu veze deformacija i pomijeranja.

Potencijalna energija diskretizovanog tijela sastavljenog od n konačnih elemenata sada može biti izražena na sljedeći način:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_1^n \{d\}^T \cdot [k] \cdot \{d\} - \sum_1^n \{d\}^T \cdot \{r\} - \{D\}^T \cdot \{P\} \quad (B.16)$$

gdje je $[k]$ matrica krutosti konačnog elementa, $\{r\}$ vektor zapreminskih i površinskih sila, $\{D\}$ vektor pomijeranja čvornih tačaka tijela, a $\{P\}$ vektor koncentrisanih sila koje djeluju na tijelo:

$$[k] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot dV \quad (B.17)$$

$$\{r\} = \int_V [N]^T \cdot \{F\} \cdot dV + \int_S [N]^T \cdot \{\Phi\} \cdot dS \quad (B.18)$$

gdje je V zapremina, a S površina konačnog elementa.

Članovi vektora pomijaranja $\{d\}$ svih konačnih elementa čine vektor pomijaranja čvornih tačaka tijela $\{D\}$, te izraz (B.16) posmatran na nivou tijela može biti zapisan:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \cdot \{D\}^T \cdot [K] \cdot \{D\} - \{D\}^T \cdot \{R\} \quad (B.19)$$

, gdje je:

$$[K] = \sum_1^n [k] \quad i \quad \{R\} = \{P\} + \sum_1^n \{r\} \quad (B.20)$$

Nalaženjem minimuma potencijalne energije, izraz (B.19), dolazi se do jednačina statičke ravnoteže:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_i} = 0 \Rightarrow [K] \cdot \{D\} = \{R\} \quad (B.21)$$

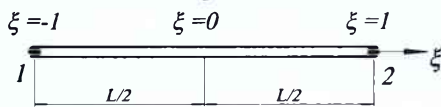
Na osnovu jednačine (B.16) moguće je doći i do izraza za deformacionu energiju konačnog elementa:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot [k] \cdot \{d\} = \int_V (\text{gustina_deformacione_energije}) \cdot dV \quad (B.22)$$

Za modeliranje pršljena u ovom radu će biti korišćeni konačni elementi u izoparametarskoj formulaciji. Karakteristično za ovu familiju konačnih elemenata je to da se polja pomijaranja i deformacija opisuju istim funkcijama oblika. Stranice izoparametarskih konačnih elemenata mogu biti proizvoljnog oblika i u proizvoljnom međusobnom položaju. Izoparametarski konačni elementi su pogodni za modeliranje struktura sa zakrivljenim površinama, kao i za postepeni prelaz od grubljih ka finijim mrežama konačnih elemenata sastavljenim od četvorostranih, kao i konačnih elemenata u obliku paralelopipeda.

B.3.1 Linijski izoparametarski konačni element u obliku štapa

Linijski izoparametarski konačni element u obliku štapa, prikazan na slici B.4, je sa dva čvora u krajnjim tačkama elementa i sa tri stepena slobode u svakom od čvorova, translacijom u pravcu x , y i z ose globalnog koordinatnog sistema. Ose lokalnog koordinatnog sistema ξ , η i ζ vezanog za element, koje prolaze kroz središnju tačku elementa, ne moraju biti paralelne sa osama x , y i z globalnog koordinatnog sistema. Orijentacija ξ koordinatne ose, koja predstavlja uzdužnu osu elementa, zavisi od indeksa dodijeljenih čvornim tačkama elementa. Čvoru sa indeksom 1 odgovara koordinata $\xi=-1$, a čvoru sa indeksom 2 koordinata $\xi=1$. U slučaju da su ose ξ i x



Slika B.4 Linijski izoparametarski konačni element u obliku štapa

paralelne, globalne koordinate i pomijaranja tačaka unutar konačnog elementa definisani su na sljedeći način [127, 130, 146]:

$$x = [N] \cdot \{c\}, \quad u = [N] \cdot \{d\} \quad (B.23)$$

, gdje je $\{c\}$ vektor koordinata, a $\{d\}$ vektor

pomijaranja čvornih tačaka:

$$\{c\} = \{x_1 \quad x_2\}^T \quad \{d\} = \{u_1 \quad u_2\}^T \quad (B.24)$$

, $[N] = [N_1 \quad N_2]$ predstavlja matricu funkcija oblika sa članovima definisanim na sljedeći način:

$$N_i = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \quad (B.25)$$

gdje i predstavlja indeks funkcije oblika i važi $\xi_i = [-1, 1]$ za $i=1, 2$.

Matrica veze deformacija i pomijaranja $[B]$ konačnog elementa se određuje iz izraza za uzdužnu deformaciju konačnog elementa datu izrazom:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = [B] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{d}{dx} [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (B.26)$$

S obzirom da je dužina konačnog elementa $x_2 - x_1 = L$ slijedi veza sljedećeg oblika:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} [N] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \quad (\text{B.27})$$

koja predstavlja koeficijent transformacije – Jakobijan iz globalnog xyz u lokalni $\xi\eta\zeta$ koordinatni sistem $J=L/2$. Uvrštavanjem izraza (B.27) u jednačinu (B.26) se dobija:

$$[B] = \frac{d}{dx} [N] = \frac{1}{J} \cdot \frac{d}{d\xi} [N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Matrica krutosti linijskog izoparametarskog konačnog elementa u obliku štapa u lokalnom koordinatnom sistemu se može konačno odrediti prema izrazu:

$$[k] = \int_{-1}^1 [B]^T \cdot A \cdot E \cdot [B] \cdot J \cdot d\xi = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

gdje A predstavlja površinu poprečnog presjeka konačnog elementa, a E modul elastičnosti. U opštem slučaju kada ose lokalnog i globalnog koordinatnog sistema elementa nisu paralelne, matrica krutosti konačnog elementa data izrazom (B.29) predstavlja kondenzovanu formu matrice krutosti linijskog izoparametarskog elementa čiji je proširena forma u lokalnom koordinatnom sistemu data sljedećim izrazom:

$$[k] = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30}).$$

Matrica transformacije iz globalnog u lokalni koordinatni sistem se formira na sljedeći način:

$$[T] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

gdje $[\Lambda]$ predstavlja matricu koeficijenta pravaca koordinatnih osa lokalnog u odnosu na globalni koordinatni sistem:

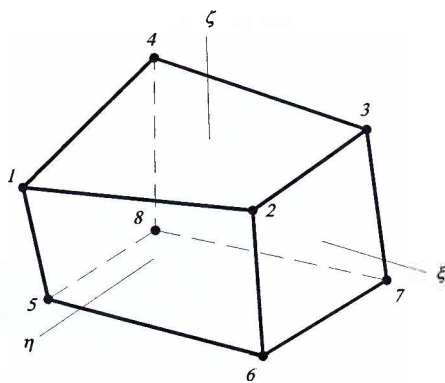
$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.32}).$$

Konačno se matrica krutosti konačnog elementa u globalnom koordinatnom sistemu dobija na sljedeći način:

$$[k] = [T]^T \cdot [k] \cdot [T] \quad (\text{B.33}).$$

B.3.2 Zapreminski linearni izoparametarski konačni element

Zapreminski linearni izoparametarski konačni element, prikazan na slici B.5, oblika je proizvoljnog paralelopipeda sa pravolinijskim stranicama, sa osam čvorova u tjemnim tačkama elementa i sa tri stepena slobode u svakom od čvorova, translacijom u pravcu x , y i z ose globalnog koordinatnog sistema. Ose lokalnog koordinatnog sistema ξ , η i ζ vezanog za element, koje prolaze kroz središnje tačke naspramnih stranica ne moraju biti ortogonalne, niti paralelne sa osama x , y i z globalnog koordinatnog sistema. Orijentacija ξ , η i ζ koordinatnih osa zavisi od indeksa dodijeljenih čvornim tačkama elementa. Čvoru sa indeksom 1 odgovaraju koordinate $\xi=\eta=\zeta=1$, a čvoru sa indeksom 8 koordinate $\xi=\eta=\zeta=-1$. U lokalnom koordinatnom sistemu $\xi\eta\zeta$ stranice ovog elementa se mogu predstaviti izrazima $\xi, \eta, \zeta = \pm 1$.



Slika B.5 Zapreminski linearni izoparametarski konačni element

Globalne koordinate i pomijeranja tačaka unutar konačnog elementa definisani su na sljedeći način [127, 130, 146]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{c\}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\} \quad (\text{B.34})$$

gdje je $\{c\}$ vektor koordinata čvornih tačaka, $\{d\}$ vektor pomijeranja čvornih tačaka:

$$\{c\} = \{x_1 \ y_1 \ z_1 \ \dots \ x_8 \ y_8 \ z_8\}^T \quad (\text{B.35})$$

$$\{d\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8\}^T$$

, a $[N]$ matrica funkcija oblika:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

Ponekad je umjesto matričnog zapisa globalnih koordinata i pomijeranja tačaka unutar konačnog elementa, izraz (B.34), za korišćenje pogodniji izraz sljedećeg oblika:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot x_i \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot y_i \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot z_i \quad (\text{B.37})$$

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot u_i \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot v_i \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot w_i$$

Funkcije oblika su definisane na sljedeći način:

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot (1 + \zeta_i \cdot \zeta) \quad (\text{B.38})$$

gdje i predstavlja indeks funkcije oblika i važi $\xi_i = [-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1]$, $\eta_i = [1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1]$ i $\zeta_i = [1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]$ za $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Matricu veze deformacija i pomijeranja $[B]$ konačnog elementa nije moguće izraziti u globalnom, ali jeste u lokalnom koordinatnom sistemu. Stoga je potrebno pribjegavati transformacijama iz globalnog u lokalni koordinatni sistem i obratno. Da bi to bilo moguće prethodno je potrebno odrediti matrice transformacije iz globalnog u lokalni i iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Matrica transformacije iz globalnog u lokalni koordinatni sistem – Jakobijan se određuje prema izrazu:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.39}).$$

Inverzna matrica Jakobijana predstavlja matricu transformacije iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$[\Gamma] = [J]^{-1} \quad (\text{B.40})$$

Članovi matrice transformacije – Jakobijana za transformaciju koordinata tačaka unutar zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa određeni prema izrazu (B.37) sljedećeg su oblika:

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i & J_{12} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot y_i & J_{13} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot z_i \\
 J_{21} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i & J_{22} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot y_i & J_{23} &= \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot z_i \\
 J_{31} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot x_i & J_{32} &= \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot y_i & J_{33} &= \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot z_i
 \end{aligned} \quad (B.41)$$

Parcijalni izvodi funkcija oblika, potrebni za određivanje članova matrice transformacije, određuju se prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{8} \cdot \xi_i \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{8} \cdot \eta_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8} \cdot \zeta_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i)
 \end{aligned} \quad (B.42)$$

Vektor deformacija $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$ tačaka unutar konačnog elementa može se odrediti prema izrazu (B.15), koji se u razvijenom obliku može zapisati kao:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (B.43)$$

pri čemu proizvod tri uzastopne matrice u izrazu (B.43) predstavlja matricu veze deformacija i pomijeranja $[B]$ konačnog elementa.

Matrica krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa može se konačno odrediti prema izrazu:

$$[k] = \iiint [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (B.44)$$

gdje je J determinanta matrice transformacije – Jakobijana. Integracija izraza (B.44) s obzirom na oblik podintegralne funkcije mora biti izvršena numeričkim putem.

B.3.3 Numeričko rešavanje višestrukih određenih integrala

U metodi konačnih elemenata se isključivo koristi *Gaus*-ova numerička metoda za rešavanje višestrukih određenih integrala. Približno određivanje vrijednosti integrala

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) \cdot d\xi \quad (B.45)$$

moгуće je određivanjem proizvoda vrijednosti podintegralne funkcije u središnjoj tački intervala integracije i širine intervala. Rezultat dobijen na ovaj način tačan je ukoliko je podintegralna funkcija linearna, u suprotnom dobijena vrijednost je približno tačna. Generalizacijom prethodne ideje dolazi se do izraza sljedećeg oblika [127, 130, 146]:

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) \cdot d\xi \approx w_1 \cdot \phi(\xi_1) + w_2 \cdot \phi(\xi_2) + \dots + w_n \cdot \phi(\xi_n) \quad (B.46)$$

u kojem se približna vrijednost integrala dobija na osnovu vrijednosti podintegralne funkcije u određenom broju tačaka $\phi(\xi_i)$, unutar intervala integracije, pomnoženih odgovarajućim težinskim faktorima w_i . *Gaus*-ovom metodom se za prethodno odabran broj tačaka omogućava izbor upravo onih koje će za rezultat dati najpribližniju vrijednost tačnoj vrijednosti određenog integrala. Položaj tačaka u kojim se određuje vrijednost podintegralne funkcije je simetričan u odnosu na sredinu intervala integracije, pri čemu simetrično postavljenim tačkama odgovara ista vrijednost težinskog koeficijenta. Položaj tačaka za koje se određuje vrijednost podintegralne funkcije po *Gaus*-ovoj metodi, kao i odgovarajući težinski faktori dati su u tabeli B.1.

Koristeći se principom objašnjenim na primjeru jednostrukog određenog integrala, dobijaju se izrazi za približno određivanje vrijednosti dvostrukih i trostrukih određenih integrala:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \phi(\xi_i, \eta_j) \quad (B.47)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot \phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (B.48)$$

Tabela B.1. Tačke i težinski koeficijenti za *Gaus*-ovu metodu

Broj tačaka n	Položaj ξ_i	Težinski koeficijent w_i
1	0.00000	2.00000
2	± 0.57735	1.00000
3	± 0.77459 0.00000	0.55555 0.88888
4	± 0.86113 ± 0.33998	0.34785 0.65214
5	± 0.90617 ± 0.53846 0.00000	0.23692 0.47862 0.56888
6	± 0.93246 ± 0.66120 ± 0.23861	0.17132 0.36076 0.46791

U opštem slučaju tačna vrijednost integrala funkcije date u vidu polinoma stepena $2n-1$ određuje se *Gaus*-ovom metodom pomoću n tačaka. Tačna vrijednost integrala (B.48) zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa se određuje pomoću osam tačaka.

B.3.4 Numeracija čvornih tačaka

Matrica je “trakasta” ukoliko su svi nenulti članovi nagomilani oko glavne dijagonale. Dakle, svi neophodni podaci o “trakastim” matricama leže unutar pojasa određene širine oko glavne dijagonale matrice tkz. bend matrice. Matrica krutosti tijela $[K]$ predstavlja primjer “trakaste” matrice koja je uz to i simetrična što znači da su neophodni podaci o ovoj matrici smješteni na i iznad glavne dijagonale unutar pojasa koji odgovara polovini širine benda matrice uobičajno obelježenoj sa B . Ovo znači da je broj neophodnih podataka o matrici krutosti reda $N \times N$, koja sadrži $N \cdot N$ članova, $N \cdot B$ pri čemu je $B \ll N$. Broj nenulatih članova u matrici krutost tijela $[K]$ nezavisan je od načina numerisanja čvornih tačaka. Međutim, promjena u numeraciji čvornih tačaka utiče na raspored nenulatih članova u matrici krutost tijela, a na taj način i na širinu benda

matrice. Veličina polovine širine benda matrice B određuje se na sljedeći način: Neka je L broj stepeni slobode čvorne tačke konačnog elementa ($L=2$ za ravanski, $L=3$ za prostorni konačni element), a I_{\min} i I_{\max} najmanji i najveći indeks čvorne tačke konačnog elementa. U tom slučaju se polovina širine benda b_M matrice krutosti konačnog elementa $[k]$ određuje na sljedeći način [146]:

$$b_M = L \cdot (I_{\max} - I_{\min} + 1) \quad (\text{B.49})$$

Maksimalna vrednost polovine širine benda matrice krutosti konačnih elemenata koji čine tijelo predstavlja polovinu širine benda matrice krutosti tijela B_M .

$$B_M = \max b_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{B.50})$$

Širina benda matrice krutosti $[K]$ utiče na:

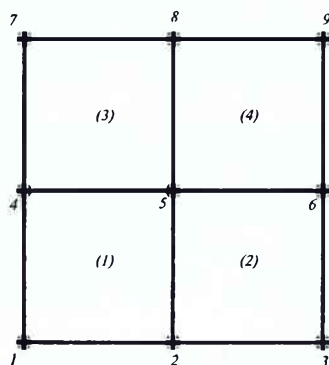
- utrošeno vrijeme rada računara na rešavanju nepoznatih pomijeranja koje se drastično uvećava sa uvećanjem širine benda (minimalno sa kvadratom povećanja)
- potreban memorijski prostor za smještanje matrice krutosti koji se povećava linearno.

Zbog svega navedenog pri numeraciji čvornih tačaka treba voditi računa o tome da širina benda matrice krutosti bude što je moguće manja.

B.3.5 Sastavljanje matrice krutosti tijela

Matrica krutosti tijela se formira sastavljanjem matrica krutosti pojedinačnih elemenata. Opšta shema sastavljanja matrice krutosti tijela će biti objašnjena na primjeru strukture, prikazane na slici B.6, koja je podjeljena na četiri konačna elementa u obliku kvadrata i to:

- element (1) sa čvornim tačkama 1,2,4 i 5;
- element (2) sa čvornim tačkama 2,3,5 i 6;
- element (3) sa čvornim tačkama 4,5,7 i 8;
- element (4) sa čvornim tačkama 5,6,8 i 9.



Slika B.6 Struktura podjeljena na četiri konačna elementa

Matrice krutosti pojedinačnih elemenata strukture sa slike B.6 sljedećeg su oblika [151]:

$$[k]_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{15} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{25} & k_{24} \\ k_{51} & k_{52} & k_{55} & k_{54} \\ k_{41} & k_{42} & k_{45} & k_{44} \end{bmatrix}; [k]_2 = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{26} & k_{25} \\ k_{32} & k_{33} & k_{36} & k_{35} \\ k_{62} & k_{63} & k_{66} & k_{65} \\ k_{52} & k_{53} & k_{56} & k_{55} \end{bmatrix}$$

$$[k]_3 = \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} & k_{48} & k_{47} \\ k_{54} & k_{55} & k_{58} & k_{57} \\ k_{84} & k_{85} & k_{88} & k_{87} \\ k_{74} & k_{75} & k_{78} & k_{77} \end{bmatrix}; [k]_4 = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} & k_{59} & k_{58} \\ k_{65} & k_{66} & k_{69} & k_{68} \\ k_{95} & k_{96} & k_{99} & k_{98} \\ k_{85} & k_{86} & k_{89} & k_{88} \end{bmatrix}$$

svaki od članova matrica krutosti elemenata predstavlja matricu reda 2x2. Matrica krutosti strukture sa slike B.6 dobija se u sledećem obliku [151]:

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{11}]_{(1)} & [k_{12}]_{(1)} & 0 & [k_{14}]_{(1)} & [k_{15}]_{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [k_{21}]_{(1)} & \sum [k_{22}]_{(1),(2)} & [k_{23}]_{(2)} & [k_{24}]_{(1)} & \sum [k_{25}]_{(1),(2)} & [k_{26}]_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{32}]_{(2)} & [k_{33}]_{(2)} & 0 & [k_{35}]_{(2)} & [k_{36}]_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ [k_{41}]_{(1)} & [k_{42}]_{(1)} & 0 & \sum [k_{44}]_{(1),(3)} & \sum [k_{45}]_{(1),(3)} & 0 & [k_{47}]_{(3)} & [k_{48}]_{(3)} & 0 \\ [k_{51}]_{(1)} & \sum [k_{52}]_{(1),(2)} & [k_{53}]_{(2)} & \sum [k_{54}]_{(1),(3)} & \sum [k_{55}]_{(1),(2),(3),(4)} & \sum [k_{56}]_{(2),(4)} & [k_{57}]_{(3)} & \sum [k_{58}]_{(3),(4)} & [k_{59}]_{(4)} \\ 0 & [k_{62}]_{(2)} & [k_{63}]_{(2)} & 0 & \sum [k_{65}]_{(2),(4)} & \sum [k_{66}]_{(2),(4)} & 0 & [k_{68}]_{(4)} & [k_{69}]_{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & [k_{74}]_{(3)} & [k_{75}]_{(3)} & 0 & [k_{77}]_{(3)} & [k_{78}]_{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_{84}]_{(3)} & \sum [k_{85}]_{(3),(4)} & [k_{86}]_{(4)} & [k_{87}]_{(3)} & \sum [k_{88}]_{(3),(4)} & [k_{89}]_{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [k_{95}]_{(4)} & [k_{96}]_{(4)} & 0 & [k_{98}]_{(4)} & [k_{99}]_{(4)} \end{bmatrix}$$

Pri sastavljanju matrice krutosti tijela, matrice za pojedinačne konačne elemente moraju biti date za isti koordinatni sistem.

B.3.6 Ekvivalentno opterećenje konačnog elementa

Uticaj dejstva površinskog ili zapreminskog opterećenja na konačni element, izraz (B.18), se u obzir uzima posredstvom ekvivalentnog opterećenja. Ekvivalentno opterećenje konačnog elementa čine sile koje djeluju u čvornim tačkama elementa i koje vrše isti virtuelni rad na pomijeranju čvornih tačaka kao i površinsko, odnosno, zapreminsko opterećenje koje zamjenjuju.

S obzirom da se u ovom radu kao površinsko opterećenje pršljena javlja kontaktni pritisak, koji djeluje na gornju i donju površinu tijela pršljena, pažnja će biti posvećena samo određivanju ekvivalentnog opterećenja za taj slučaj. Tijelo pršljena je modelirano zapreminskim linearnim izoparametarskim konačnim elementom prikazanim na slici B.5. U slučaju da kontaktni pritisak p djeluje po stranici elementa $\zeta=1$ vektori tangenti koji uslovljavaju položaj stranice se određuju prema izrazima [127, 130, 146]:

$$\begin{aligned} V_1 &= (J_{11} \cdot i + J_{12} \cdot j + J_{13} \cdot k) \cdot d\varepsilon \\ V_2 &= (J_{21} \cdot i + J_{22} \cdot j + J_{23} \cdot k) \cdot d\eta \end{aligned} \quad (B.51)$$

gdje i, j i k predstavljaju jedinične vektore globalnog koordinatnog sistema xyz , a J_{ij} članove matrice transformacije – Jakobijana (B.39). Jedinični vektor normale n_p , duž koje djeluje kontaktni pritisak, na stranicu elementa $\zeta=1$ se određuje prema sljedećem izrazu:

$$\{n_p\} = \frac{V_1 \times V_2}{|V_1 \times V_2|} = \frac{V_1 \times V_2}{dS} = \begin{Bmatrix} J_{12} \cdot J_{23} - J_{13} \cdot J_{22} \\ J_{13} \cdot J_{21} - J_{11} \cdot J_{23} \\ J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \end{Bmatrix} \cdot \frac{d\varepsilon \cdot d\eta}{dS} \quad (B.52).$$

Uvrštavanjem jednačine (B.52) u jednačinu (B.18) se dobija izraz za određivanje ekvivalentnog opterećenja kontaktnog pritiska p u sljedećem obliku:

$$\begin{Bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ r_{zi} \end{Bmatrix} = \int_S [N]^T \cdot \{ \Phi \} \cdot dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \cdot p \cdot \begin{Bmatrix} J_{12} \cdot J_{23} - J_{13} \cdot J_{22} \\ J_{13} \cdot J_{21} - J_{11} \cdot J_{23} \\ J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \end{Bmatrix} \cdot d\varepsilon \cdot d\eta \quad (B.53)$$

gdje $i=1, 2, 3$ i 4 indeksi čvornih tačaka na stranici konačnog elementa $\zeta=1$.

B.3.7 Uvod u nelinearne probleme

Pojava nelinearnosti u problemu koji je predmet ovog rada izazvana je geometrijskim nelinearnostima. Osnovna karakteristika geometrijskih nelinearnosti je da jednačine ravnoteže zavise od geometrije deformisane strukture koja nije poznata unapred. Nelinearnost u ponašanje FEM modela pršljena unose kabl konačni elementi kojim su modelirani ligamenti. Kabl konačni elementi su linijski izoparametarski konačni elementi u obliku štapa, koji, međutim, prenose istezanje, ali ne i pritisak. Dakle, uticaj kabl konačnih elemenata na jednačine statičke ravnoteže zavisi od geometrije deformisane strukture.

Rešenje nelinearnih problema se traži rešavanjem niza linearnih problema, pri čemu se jednačine statičke ravnoteže zadaju u inkrementalnom obliku:

$$[K] \cdot \{\Delta D\} = \{\Delta R\} \quad (\text{B.54}).$$

Matrica krutosti strukture $[K]$ u ovom slučaju je funkcija pomijaranja $\{D\}$ pošto je problem nelinearan. Pomijaranja $\{D\}$ se dobijaju kao zbir inkrementalnih pomijaranja $\{\Delta D\}$ dobijenih rešavanjem niza linearnih problema. Trenutni oblik matrice krutosti strukture u ovom slučaju se naziva tangentnom matricom krutosti i koristi se pri određivanju inkrementalnog pomijaranja u narednom iterativnom koraku traženja rešenja nelinearnog problema.

Za rešavanje nelinearnih problema metodom konačnih elemenata uobičajno se koristi *Lagrange*-ova mreža konačnih elemenata, tj. mreža konačnih elemenata koja se u svakoj iteraciji prilagođava trenutnom obliku deformisane strukture. Izuzetak su problemi u kojim se javljaju velike deformacije, najčešće u problemima strujanja fluida, u kojim bi primjena *Lagrange*-ove mreže dovela do značajnog deformisanja početnog oblika konačnih elemenata što znatno utiče na tačnost dobijenih rezultata. Nelinearni problemi se mogu analizirati u *Lagrange*-ovim i *Euler*-ovim koordinatama. U slučaju korišćenja *Lagrange*-ovih koordinata lokalni koordinatni sistem je tokom rešavanja problema vezan za položaj nedeformisane strukture. U ovom se slučaju sa rastom pomijaranja strukture, u uzastopnim iterativnim koracima traženja rešenja nelinearnog problema, matrici krutosti $[K]$ dodaju i matrice koje predstavljaju uticaj pomijaranja na promjenu krutosti. Prvo, matrica koja predstavlja linearni uticaj pomijaranja na promjenu krutosti $[K_\sigma]$, a potom se sa rastom pomijaranja dodaju i matrice koje predstavljaju uticaje višeg reda pomijaranja na promjenu krutosti. U slučaju korišćenja *Euler*-ovih koordinata lokalni koordinatni sistem je tokom rešavanja problema vezan za konačni element i tokom pomijaranja prati njegovo kretanje. U ovom slučaju su pomijaranja uvijek mala tako da se matrici krutosti $[K]$ dodaje samo matrica koja predstavlja linearni uticaj pomijaranja na promjenu krutosti $[K_\sigma]$. U literaturi se za matricu $[K_\sigma]$ koristi veći broj različitih naziva, među kojim je i matrica geometrijske krutosti koji će se koristiti i u ovom radu.

B.3.8 Matrica geometrijske krutosti

Deformacije u nelinearnim problemima se mogu odrediti prema sljedećem izrazu [127,130,146]:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} \quad (\text{B.55})$$

gdje $\{\varepsilon_L\}$ predstavlja deformacije određene prema izvodima pomijaranja prvog reda, izrazi (B.6 i B.7), a $\{\varepsilon_{NL}\}$ deformacije određene prema izvodima pomijaranja višeg reda. Ukupna deformaciona energija U se u tom slučaju može izraziti na sljedeći način:

$$U = U_L + U_{NL} = \int_V \{\varepsilon_L\}^T \cdot \{\sigma_0\} \cdot dV + \int_V \{\varepsilon_{NL}\}^T \cdot \{\sigma_0\} \cdot dV \quad (\text{B.56})$$

gdje $\{\sigma_0\} = \{\sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \sigma_{z0} \ \tau_{xy0} \ \tau_{yz0} \ \tau_{zx0}\}$ predstavlja napon izazvan deformacijom $\{\varepsilon\}$. Do jednačine za određivanje matrice geometrijske krutosti se dolazi na osnovu izraza za određivanje deformacione energije U_{NL} koji predstavlja funkciju deformacija određenih prema izvodima pomijaranja višeg reda. Dakle, u slučaju rešavanja nelinearnih problema u obzir se uzimaju i izvodi pomijaranja višeg reda te se linijske i ugaone deformacije određuju prema izrazima:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x,L} + \varepsilon_{x,NL} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy,L} + \gamma_{xy,NL} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (B.57).$$

Da bi se prethodne jednačine izrazile u matricnoj formi, definiše se matrica $[G]$ čiji su članovi parcijalni izvodi funkcija oblika. Za zapreminski linearni izoparametarski konačni element ova se matrica dobija kao proizvod druge i treće matrice u izrazu (B.43). U tom se slučaju vektor parcijalnih izvoda pomijeranja $\{\delta\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$ može izraziti na sljedeći način:

$$\{\delta\} = [G] \cdot \{d\} \quad (B.58)$$

Takođe se definiše i matrica sledećeg oblika:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (B.59).$$

Konačno se izraz (B.55) može zapisati kao:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} = \{\varepsilon_L\} + \frac{1}{2} \cdot [Q] \cdot [G] \cdot \{d\} \quad (B.60).$$

Pomijeranja u , v i w su funkcije koordinata x , y i z koje određuju poziciju tačaka nedeformisane strukture. Deformacije definisane izrazom (B.60) se uobičajno nazivaju *Green*-ovim deformacijama. Na osnovu izraza (B.56) i (B.60) se dobija:

$$U_{NL} = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot \int_V [G]^T \cdot [Q]^T \cdot \{\sigma_0\} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot \int_V [G]^T \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \cdot \{\delta\} \cdot dV \quad (B.61)$$

gdje $[s]$ predstavlja matricu formiranu na sljedeći način:

$$[s] = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} & \tau_{zx0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} & \tau_{yz0} & \sigma_{z0} \end{bmatrix} \quad (B.62).$$

Uvrštavanje jednačine (B.58) u izraz (B.61) se konačno dobija jednačina za određivanje matrice geometrijske krutosti:

$$[k_\sigma] = \int_V [G]^T \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \cdot [G] \cdot dV \quad (B.63).$$

Matrice geometrijske krutosti kabl konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sistemu određena prema prethodno obrazloženoj proceduri je sljedećeg oblika:

$$[k_\sigma] = \frac{F}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.64})$$

gdje F predstavlja aksijalnu silu u kabl konačnom elementu.

B.3.9 Newton-Raphson-ova metoda za rešavanje nelinearnih problema

Jedna od najpopularnijih metoda za rešavanje nelinearnih problema je *Newton-Raphson*-ova metoda. Ovom metodom se kroz iterativni proces tokom kojeg se određuje priraštaj vektora pomijeranja čvornih tačaka, sa zadatom tačnošću, dolazi do vektora pomijeranja čvornih tačaka modela. Jednačine ravnoteže zapisane u matičnom obliku u slučaju nelinearne analize za i -tu iteraciju su sljedećeg oblika [127, 130, 146]:

$$[K] \cdot \{\Delta D\}_{i+1} = \{\Delta R\}_i \quad (\text{B.64})$$

vektor opterećenja čvornih tačaka modela u i -toj iteraciji se određuje kao razlika spoljašnjih i unutrašnjih sila:

$$\{\Delta R\}_i = \{R\}_i - \sum [k] \cdot \{d\}_i \quad (\text{B.65})$$

Rešavanjem jednačine (B.64) se određuje priraštaj vektora pomijeranja čvornih tačaka modela u $(i+1)$ -oj iteraciji. Na osnovu ovako dobijenog vektora priraštaja pomijeranja se određuje vektor pomijeranja čvornih tačaka modela u $(i+1)$ -oj iteraciji:

$$\{D\}_{i+1} = \{D\}_i + \{\Delta D\}_{i+1} \quad (\text{B.66})$$

Kriterijum za praćenje konvergencije procesa određivanja vektora pomijeranja čvornih tačaka strukture, *Newton-Raphson*-ovom metodom, je zasnovan na upoređenju normi vektora priraštaja pomijeranja i vektora pomijeranja čvornih tačaka strukture:

$$\frac{\|\Delta D\|}{\|D\|} \leq \varepsilon_{NR} \quad (\text{B.67})$$

gdje ε_{NR} predstavlja tačnost sa kojom se traži rešenje nelinearnog problema.

Dakle, algoritam *Newton-Raphson*-ova metode se sastoji u sljedećim koracima:

1. U početnoj iteraciji usvojiti $\{D\}_0=0$
2. **For** $i=0,1,\dots$ **do** konvergencije **Do**
3. Odrediti matrice krutosti $[k]_i$ konačnih elemenata u lokalnim koordinatama kao zbir konvencionalne i geometrijske matrice krutosti
4. Transformisati matrice krutosti konačnih elemenata u globalne koordinate i formirati matricu krutosti strukture $[K]_i$
5. Odrediti pomijeranja čvornih tačaka konačnih elemenata $\{d\}_i$
6. Odrediti unutrašnje sile $[k]_i \cdot \{d\}_i$
7. Riješiti $[K]_i \cdot \{\Delta D\}_{i+1} = \{\Delta R\}_i$ po $\{\Delta D\}_{i+1}$
8. Dodati $\{\Delta D\}_{i+1}$ vektoru pomijeranja $\{D\}_{i+1} = \{D\}_i + \{\Delta D\}_{i+1}$
9. **EndDo**

B.3.10 Konjugovano gradijentna metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina sa aproksimacijom matrice koeficijenata sistema jednačina

Konjugovano gradijentna metoda sa aproksimacijom matrice koeficijenata sistema linearnih jednačina (*Preconditioned Conjugate Gradient Method – PCG Method*) je najpopularnija

iterativna metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina. Sistem linearnih jednačina se u opštem obliku i matricnoj formi može zapisati na sljedeći način [144]:

$$[A] \cdot \{x\} = \{b\} \quad (B.68).$$

Da bi sistem linearnih jednačina bilo moguće riješavati *PCG* metodom, matrica koeficijenata $[A]$ mora biti simetrična i pozitivno definitna. Matrica $[A]$ je simetrična ukoliko su odgovarajući članovi matrice sa suprotnih strana glavne dijagonale matrice jednaki $A_{ij}=A_{ji}$. Da bi matrica $[A]$ bila pozitivno definitna, mora postojati trougaona matrica $[L_M]$ koja zadovoljava sljedeći uslov:

$$[A] = [L_M] \cdot [L_M]^T \quad (B.69)$$

S obzirom da matrica krutosti tijela zadovoljava prethodno navedene uslove, *PCG* metoda se može koristiti za rešavanje sistema jednačina statičke ravnoteže datog izrazom (B.21).

Ideja aproksimacije matrice koeficijenata sistema linearnih jednačina je da se pri rešavanju jednačine (B.68) izbjegne traženje njene inverzne matrice $[A]^{-1}$. To se ostvaruje uvođenjem matrice aproksimacije $[M]$ čiji je oblik takav da omogućava jednostavnu inverziju. Veza ovih matrica je data sljedećim izrazom:

$$[A] = [M] - [N] \quad (B.70).$$

Uvođenjem ove veze u jednačinu (B.68) omogućava se iterativno traženje rešenja sistema jednačina uspostavljanjem veza k -te i $(k+1)$ iteracije na sljedeći način:

$$[M] \cdot \{x\}_{k+1} = [N] \cdot \{x\}_k + \{b\} \quad (B.71).$$

Množenjem jednačine (B.71) sa $[M]^{-1}$ dobija se:

$$\{x\}_{k+1} = [M]^{-1} \cdot [N] \cdot \{x\}_k + [M]^{-1} \cdot \{b\} \quad (B.72)$$

pošto je:

$$[M]^{-1} \cdot [N] = [I] - [M]^{-1} \cdot [A] \quad (B.73)$$

to se uvrštavanjem ove relacije u jednačinu (B.72) dobija:

$$\begin{aligned} \{x\}_{k+1} &= ([I] - [M]^{-1} \cdot [A]) \cdot \{x\}_k + [M]^{-1} \cdot \{b\} = \{x\}_k + [M]^{-1} \cdot (\{b\} - [A] \cdot \{x\}_k) \\ \{x\}_{k+1} &= \{x\}_k + [M]^{-1} \cdot \{r\}_k = \{x\}_k + \{z\}_k \end{aligned} \quad (B.74).$$

PCG metoda se bazira na prethodno izloženoj ideji aproksimacije matrice $[A]$ i na njoj baziranom iterativnom traženju rešenja sistema jednačina (B.68). Rekurentni izraz koji povezuje k -tu i $(k+1)$ iteraciju rešenja dobijenog ovom metodom sljedećeg je oblika:

$$\{x\}_{k+1} = \{x\}_k + \alpha_k \cdot \{p\}_k \quad (B.75)$$

gdje je α_k realan broj, a $\{p\}_k$ vektor pravca duž kojeg se traži rešenje. Traženje rešenja uobičajno se počinje sa vektorom $\{x\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$ i u tom slučaju je:

$$\{r\}_0 = \{b\} - [A] \cdot \{x\}_0 = \{b\}, \quad \{z\}_0 = [M]^{-1} \cdot \{r\}_0, \quad \{p\}_0 = \{z\}_0 \quad (B.76).$$

Vektor razlike tačnog i približnog rešenja u dve uzastopne iteracije zadovoljava sljedeći rekurentni izraz:

$$\{r\}_{k+1} = \{r\}_k - \alpha_k \cdot [A] \cdot \{p\}_k \quad (B.77).$$

Da bi vektori $\{r\}_k$ za svako k bili međusobno ortogonalni, mora biti zadovoljen sljedeći uslov:

$$\alpha_k = \frac{\{r\}_k \cdot \{z\}_k}{[A] \cdot \{p\}_k \cdot \{z\}_k} \quad (B.78).$$

Svaki naredni vektor pravca duž kojeg se traži rešenje $\{p\}_{k+1}$ predstavlja linearnu kombinaciju $\{z\}_{k+1}$ i $\{p\}_k$, što je izraženo narednom jednačinom:

$$\{p\}_{k+1} = \{z\}_{k+1} + \beta_k \cdot \{p\}_k \quad (B.79)$$

gdje je β_k realan broj. Posljedica ove veze je da imenilac u izrazu (B.78) može biti zapisan kao:

$$[A] \cdot \{p\}_k \cdot \{z\}_k = [A] \cdot \{p\}_k \cdot (\{p\}_k - \beta_{k-1} \cdot \{p\}_{k-1}) = [A] \cdot \{p\}_k \cdot \{p\}_k \quad (B.80)$$

pošto je $[A] \cdot \{p\}_{k-1}$ ortogonalno sa $\{p\}_{k-1}$ zbog čega je $[A] \cdot \{p\}_k \cdot \{p\}_{k-1} = 0$. Uvrštavanjem izraza (B.80) u jednačinu (B.78) dobija se:

$$\alpha_k = \frac{\{r\}_k \cdot \{z\}_k}{[A] \cdot \{p\}_k \cdot \{p\}_k} \quad (B.81).$$

Pored toga zbog ortogonalnosti $[A] \cdot \{p\}_k$ i $\{p\}_{k+1}$ slijedi:

$$\{p\}_{k+1} \cdot [A] \cdot \{p\}_k = (\{z\}_{k+1} + \beta_k \cdot \{p\}_k) \cdot [A] \cdot \{p\}_k = 0 \quad (B.82)$$

i stoga važi sljedeća jednakost:

$$\beta_k = -\frac{\{z\}_{k+1} \cdot [A] \cdot \{p\}_k}{\{p\}_k \cdot [A] \cdot \{p\}_k} \quad (B.83).$$

Iz jednačine (B.77) slijedi:

$$[A] \cdot \{p\}_k = -\frac{1}{\alpha_k} \cdot (\{r\}_{k+1} - \{r\}_k) \quad (B.84)$$

uvrštavanjem izraza (B.84) i (B.79) u jednačinu (B.83) dobija se:

$$\beta_k = \frac{\{r\}_{k+1} \cdot \{z\}_{k+1}}{\{r\}_k \cdot \{z\}_k} \quad (B.85).$$

Dakle, algoritam *PCG* metode bi se sastojao u sljedećim koracima:

1. Izabrati $\{x\}_0$, a potom odrediti $\{r\}_0$, $\{z\}_0$ i $\{p\}_0$
2. **For** $k=0,1,...$ do konvergencije **Do**
3. $\alpha_k = \frac{\{r\}_k \cdot \{z\}_k}{[A] \cdot \{p\}_k \cdot \{p\}_k}$
4. $\{x\}_{k+1} = \{x\}_k + \alpha_k \cdot \{p\}_k$
5. $\{r\}_{k+1} = \{r\}_k - \alpha_k \cdot [A] \cdot \{p\}_k$
6. $\{z\}_{k+1} = [M]^{-1} \cdot \{r\}_{k+1}$
7. $\beta_k = \frac{\{r\}_{k+1} \cdot \{z\}_{k+1}}{\{r\}_k \cdot \{z\}_k}$
8. $\{p\}_{k+1} = \{z\}_{k+1} + \beta_k \cdot \{p\}_k$
9. **EndDo**

Uobičajni uslov za konvergenciju rešenja iterativnih metoda je sljedećeg oblika:

$$\frac{\{r\}_k^T \cdot \{r\}_k}{\{b\}^T \cdot \{b\}} \leq \varepsilon_{FEA}^2 \quad (B.86)$$

gdje je ε_{FEA} tačnost sa kojom se traži rešenje.

S obzirom na način formiranja matrice aproksimacije $[M]$ postoji nekoliko različitih varijanti *PCG* metode: *Jacobi* metoda, *Gauss-Siedel* metoda, *SOR* metoda (*Successive overrelaxation*), *SSOR* metoda (*Simetric successive overrelaxation*), *ILU* metoda (*Incomplete LU factorization*), *IC* metoda (*Incomplete Cholesky factorization*). Testiranjem navedenih metoda utvrđeno je da je za rešavanje problema koji je predmet ovog rada najefikasnija *SOR* metoda. Matrica koeficijenta sistema linearnih jednačina se može zapisati u sljedećem obliku:

$$[A] = [D_A] + [L_A] + [U_A] \quad (B.87)$$

gdje je $[D_A]$ dijagonalna matrica koja sadrži članove sa glavne dijagonale matrice $[A]$, $[L_A]$ i $[U_A]$ donja, odnosno, gornja trougaona matrica koja sadrži članove koji se nalaze ispod odnosno iznad glavne dijagonale matrice $[A]$. Matrica aproksimacije se u *SOR* metodi formira na sljedeći način:

$$[M] = \omega^{-1} \cdot [D_A] + [L_A] \quad (B.88)$$

gdje $\omega=(0 \div 2)$ predstavlja parametar čija je najpogodnija veličina uobičajno $\omega=1.6$ [146]. Matrica aproksimacije $[M]$ dobijena *PCG* metodama je trougaona, čime se izbjegava invertovanje ove matrice navedeno u koraku 6 prethodno datog algoritma *PCG* metode. Određivanja vektora $\{z\}$ se umjesto invertovanja matrice $[M]$ i nalaženja proizvoda tako invertovane matrice sa vektorom razlike tačnog i približnog rešenja $\{r\}$ svodi na određivanje vektora $\{z\}$ kroz zamjenu-unaprijed.



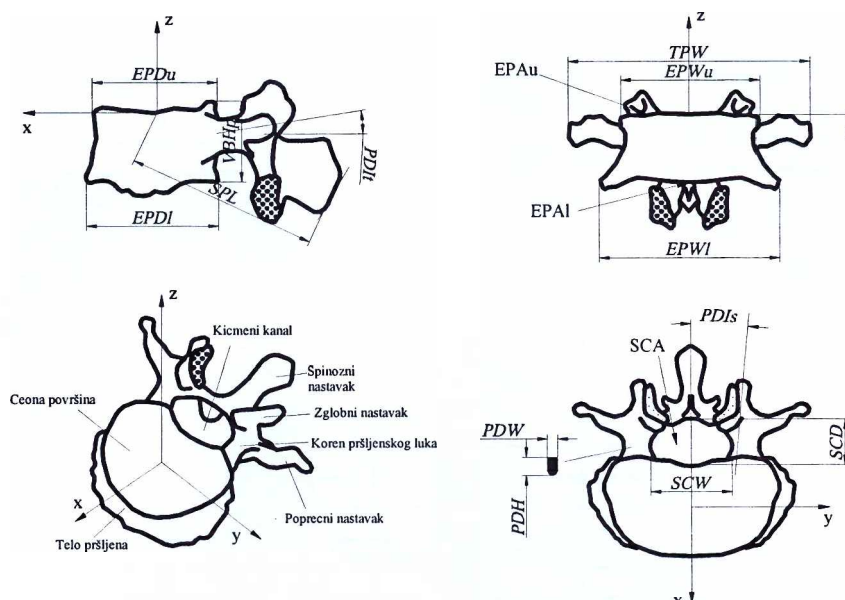
PREGLED REZULTATA ISTRAŽIVANJA GEOMETRIJSKIH DIMENZIJA SLABINSKIH PRŠLJENA

Rezultati istraživanja geometrije i dimenzija slabinskih pršljena, prikazanih na slici C.1, koje je 1992. godine sproveo *M.Panjabi* sa saradnicima [78] su dati u tabeli C.1.

Tabela C.1 Dimenzije slabinskih pršljena

	Slabinski pršljenovi				
	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
Dužinske dimenzije [mm]					
EPW _u	41.2±1.03	42.6±0.74	44.1±0.88	46.6±1.20	47.3±1.20
EPW _l	43.3±0.78	45.5±1.10	48.0±1.24	49.5±1.38	49.4±1.41
EPD _u	34.1±1.34	34.6±1.10	35.2±1.10	35.5±0.88	34.7±1.17
EPD _l	35.3±1.27	34.9±0.74	34.8±1.24	33.9±0.85	33.2±0.92
VBH _u	23.8±1.03	24.3±0.95	23.8±1.10	24.1±1.10	22.9±0.95
SCW	23.7±0.92	23.8±0.71	24.3±0.64	25.4±0.49	27.1±0.88
SCD	19.0±0.67	18.2±0.53	17.5±0.53	18.6±0.71	19.7±0.49
PDH _l	15.8±0.74	14.9±0.53	14.6±0.60	15.2±0.46	19.5±0.99
PDH _r	15.9±0.81	15.0±0.53	14.2±0.64	15.7±0.57	19.6±0.74
PDW _l	9.2±0.88	8.7±0.78	10.1±0.53	14.7±0.46	19.2±1.03
PDW _r	8.0±0.95	7.8±0.57	10.2±0.67	13.4±0.18	18.0±1.03
SPL	67.7±1.24	71.7±1.70	71.7±1.77	70.1±1.17	68.3±1.63
TPW	71.2±1.66	76.1±1.48	85.7±2.44	79.4±3.78	92.5±3.68
Površinske dimenzije [mm ²]					
EPA _u	1057±60.78	1136±61.84	1194±55.19	1239±58.41	1237±58.48
EPA _l	1117±49.00	1197±51.41	1290±64.35	1273±51.72	1218±59.43
SCA	320±18.10	281±15.38	280±14.64	290±15.17	330±21.21
PDA _l	88.5±11.74	83.6±8.87	95.3±9.37	112.3±7.53	158.7±10.82
PDA _r	86.4±11.42	83.3±8.94	62.9±7.71	102.8±6.65	143.9±9.55
Ugaone dimenzije [°]					
EPI _{tu}	2.7±0.77	3.5±1.50	1.7±0.43	4.7±1.10	2.2±0.54
EPI _{tl}	4.0±0.84	2.1±0.40	2.7±1.10	2.7±0.69	1.8±0.42
PDI _{sl}	12.4±1.87	11.2±2.02	17.1±1.56	14.7±2.16	23.2±2.51
PDI _{sr}	16.5±5.02	17.1±3.75	19.8±2.33	18.4±1.66	25.9±1.73
PDI _{tl}	2.9±0.74	2.1±0.64	2.4±0.67	3.0±1.17	5.7±1.48
PDI _{tr}	2.2±0.67	3.3±0.67	2.9±1.06	4.8±1.06	5.2±1.80

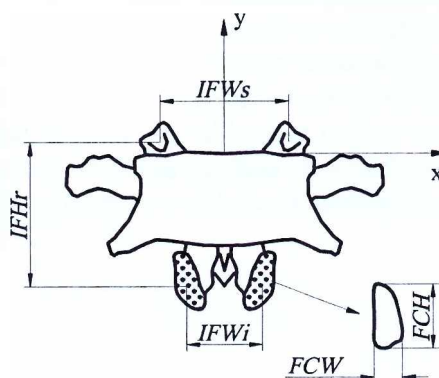




Slika C.1 Prikaz geometrije pršljena sa oznakama karakterističnih dimenzija

Oznake navedene u prethodnoj tabeli: EPW_l -širina donje površine tijela pršljena, EPW_u -širina gornje površine tijela pršljena, EPD_l -dužina donje površine tijela pršljena, EPD_u -dužina gornje površine tijela pršljena, VBH_a -visina prednjeg djela tijela pršljena, VBH_p -visina zadnjeg djela tijela pršljena, SCD -dužina pršljenskog kanala, SCW -širina pršljenskog kanala, PDH_l -visina korijena lijevog pršljenskog luka, PDH_r -visina korijena desnog pršljenskog luka, PDW_l -širina korijena lijevog pršljenskog luka, PDW_r -širina korijena desnog pršljenskog luka, SPL -dužina spinoznog nastavka, TPW -raspon poprečnih nastavaka, EPA_l -površina donje površine tijela pršljena, EPA_u -površina gornje površine tijela pršljena, SCA -površina pršljenskog kanala, PDA_l -površina presjeka korijena lijevog pršljenskog luka, PDA_r -površina presjeka korijena desnog pršljenskog luka, EPI_{lu} -ugao koji gornja čeona površina zaklapa sa poprečnom ravni, EPI_{lr} -ugao koji donja čeona površina zaklapa sa poprečnom ravni, PDI_{sl} -ugao koji korijen lijevog pršljenskog luka zaklapa sa uzdužnom ravni, PDI_{sr} -ugao koji korijen desnog pršljenskog luka zaklapa sa uzdužnom ravni, PDI_{ll} -ugao koji korijen lijevog pršljenskog luka zaklapa sa poprečnom ravni, PDI_{lr} -ugao koji korijen desnog pršljenskog luka zaklapa sa poprečnom ravni.

Rezultati istraživanje geometrije i dimenzija kontaktnih površina zglobnih nastavaka slabinskih pršljena, prikazanih na slici C.2, koje je 1993. godine sproveo *M.Panjabi* sa saradnicima [75] su dati u tabeli C.2.



Slika C.2 Prikaz geometrije kontaktne površine zglobnih nastavaka pršljena sa oznakama karakterističnih dimenzija

Tabela C.2 Dimenzije kontaktne površine zglobnih nastavaka slabinskih pršljena

	Slabinski pršljenovi				
	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
	Dužinske dimenzije [mm]				
FCW _{sr}	10.2±0.6	11.1±0.7	13.8±0.9	14.1±1.0	16.3±0.7
FCW _{sl}	10.5±0.6	11.4±1.0	13.9±0.7	15.3±0.6	14.9±0.6
FCH _{sr}	12.7±0.3	14.6±0.6	16.0±0.8	16.1±0.5	17.4±0.7
FCH _{sl}	12.2±0.7	14.6±0.7	15.9±0.8	17.3±0.7	17.5±0.7
FCW _{ir}	12.4±0.7	12.7±0.7	13.8±0.4	14.7±0.5	15.6±0.9
FCW _{il}	10.7±0.5	12.7±0.8	13.4±0.4	14.1±0.6	16.1±0.9
FCH _{ir}	15.3±0.7	16.0±0.6	15.7±0.3	16.2±0.7	18.4±1.0
FCH _{il}	15.7±0.6	16.3±0.6	16.4±0.5	15.6±0.7	17.3±1.0
IFW _s	26.2±0.6	26.4±0.9	28.6±1.0	31.4±1.6	35.0±2.1
IFW _i	24.8±0.8	26.6±0.9	29.1±1.5	34.8±1.7	40.6±2.0
IFH _r	32.5±0.5	33.0±0.7	32.4±0.9	28.5±1.0	26.1±1.8
IFH _l	31.8±1.0	32.4±0.6	31.6±0.7	28.3±1.3	26.4±1.5
	Površinske dimenzije [mm ²]				
	FCA _{sr}	96.7±6.2	138.0±11.4	170.3±13.1	175.0±7.0
	FCA _{sl}	99.2±11.4	148.2±12.8	164.4±12.0	194.3±11.0
	FCA _{ir}	127.9±7.5	150.9±9.8	159.8±4.8	182.1±15.6
	FCA _{il}	125.9±6.9	153.6±10.1	167.9±9.7	167.9±11.8
	Ugaone dimenzije [°]				
	T _{sr}	82.9±1.4	85.7±0.9	81.9±1.6	81.2±1.6
	S _{sr}	-139.1±8.9	-135.4±9.2	-131.5±9.0	-120.8±3.7
	T _{sl}	81.3±2.7	83.8±1.3	84.1±1.5	81.3±2.5
	S _{sl}	134.2±8.2	139.7±9.0	133.1±5.5	123.6±3.1
	T _{ir}	81.4±1.6	82.8±2.5	75.6±4.1	70.5±6.7
	S _{ir}	-152.1±5.8	-142.5±5.1	-130.6±6.3	-112.7±7.1
	T _{il}	81.8±1.9	78.7±4.0	77.8±3.3	80.3±1.2
	S _{il}	154.8±6.3	136.7±8.1	123.3±3.3	114.7±4.9

Oznake navedene u prethodnoj tabeli: FCW_{sr} -širina desnog gornjeg zglobnog nastavka, FCW_{sl} -širina lijevog gornjeg zglobnog nastavka, FCH_{sr} -visina desnog gornjeg zglobnog nastavka, FCH_{sl} -visina lijevog gornjeg zglobnog nastavka, FCW_{ir} -širina desnog donjeg zglobnog nastavka, FCW_{il} -širina lijevog donjeg zglobnog nastavka, FCH_{ir} -visina desnog donjeg zglobnog nastavka, FCH_{il} -visina lijevog donjeg zglobnog nastavka, IFW_s -rastojanja gornjih zglobnih nastavaka, IFW_i -rastojanja donjih zglobnih nastavaka, IFH_r -rastojanja desnog gornjeg i donjeg zglobnog nastavka, IFH_l -rastojanja lijevog gornjeg i donjeg zglobnog nastavka, T_{sr} -ugao koji kontaktna površina gornjeg lijevog zglobnog nastavka zaklapa sa poprečnom ravni, T_{sl} -ugao koji kontaktna površina gornjeg desnog zglobnog nastavka zaklapa sa poprečnom ravni, S_{sr} -ugao koji kontaktna površina gornjeg lijevog zglobnog nastavka zaklapa sa uzdužnom ravni, S_{sl} -ugao koji kontaktna površina gornjeg desnog zglobnog nastavka zaklapa sa uzdužnom ravni, T_{ir} -ugao koji kontaktna površina donjeg lijevog zglobnog nastavka zaklapa sa poprečnom ravni, T_{il} -ugao koji kontaktna površina donjeg desnog zglobnog nastavka zaklapa sa poprečnom ravni, S_{ir} -ugao koji kontaktna površina donjeg lijevog zglobnog nastavka zaklapa sa uzdužnom ravni, S_{il} -ugao koji kontaktna površina donjeg desnog zglobnog nastavka zaklapa sa uzdužnom ravni.

D

PREGLED IZABRANIH DIJELOVA RAZVIJENIH PROGRAMA

D.1 PROGRAM ZA IZDVAJANJE PODATAKA O CT BROJU IZ SLIKA U DICOM FORMATU DOBIJENIH KOMPJUTERSKOM TOMOGRAFIJOM

U trećem poglavlju ovog rada je dat pregled sopstvenih eksperimentalnih istraživanja autora rada. Veći dio ovih istraživanja se odnosi na snimanje slabinskog pršljena L₅ kompjuterskom tomografijom, u cilju određivanja raspodjele relativne gustine koštanog tkiva pršljena. U tom smislu dobijene CT slike pršljena, u DICOM formatu, služe kao izvor podataka o raspodjeli CT broja snimljenog presjeka pršljena. Nakon određivanja kalibracione karakteristike CT skenera, na osnovu raspodjele CT broja je moguće odrediti i raspodjelu relativne gustine koštanog tkiva snimljenog presjeka pršljena. U cilju izdvajanja podataka o raspodjeli CT broja iz slika u DICOM formatu, dobijenih kompjuterskom tomografijom, autor ovog rada je razvio, u programskom jeziku C, sljedeći program:

```

/* Reading CT number of each pixel of picture in DICOM format */
/* and writing it in output file. First and second line of the file */
/* represent the number of rows and columns of pixels */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

main()
{
    FILE *inFile, *outFile;
    /* Each value type is defined by a group and element */
    int read_group_id;
    int read_element_id;
    /* Used to read length of information for each element_id/group_id */
    int element_length = 0;
    /* Used to describe value type in the DICOM header */
    int tag_dictionary = 0;
    /* Used to read "DICOM" letters */
    int temp_check_word_dicom = 0;

```

```

/* Pertinent informations of a DICOM image */
int rows, columns;
/* Used to transfer pixel data on CT number to output file */
int CTNo, HU;

char buffer[196];
char value[1000][300];
int i = 0;
int j = 0;

/* DICOM file to be read */
inFile = fopen ("000070.dcm", "rb");
/* The first 128 bytes are not important */
fread (buffer, 1, 128, inFile);
/* Reads the "DICOM" letters */
fread (&temp_check_word_dicom, 4, 1, inFile);
/* Check to see which format to use. If DICOM was not read correctly, it means there is no 128 blank bits. */
/* The hex number 0x4D434944 is the ascii code for the letters DICOM... */
if (temp_check_word_dicom != 0x4D434944)
    fseek (inFile, 0, SEEK_SET);
/* Read information up to the pixel data (beginning of the pixels is hex code 0x7FE0) */
/* While loop break before actually, there is a break if == 0x7FE0 after reading read_element_id */
while (tag_dictionary != 0x7FE00010)
{
    read_group_id=0;
    read_element_id=0;
    tag_dictionary=0;
/* Reading groups and elements */
    fread (&read_group_id, 1, 2, inFile);
    fread (&read_element_id, 1, 2, inFile);
/* Creating a tag to be identified afterward */
    tag_dictionary = read_group_id * 0x10000 + read_element_id;
    if (temp_check_word_dicom != 0x4D434944)
    {
/* Reading length of the information */
        fread (&element_length, 4, 1, inFile);
        if (tag_dictionary == 0x7FE00010)
            break;
        fread (&value[i], element_length, 1, inFile);
    }
    else
    {
        fread (&element_length, 1, 2, inFile);
/* If value representation (VR) is OB, OW, SQ, UN, the next length is 32 bits */
        if (element_length == 16975 || element_length == 22351 ||
            element_length == 20819 || element_length == 20053)
        {
/* skip 2 reserved "bytes" */
            fread (buffer, 1, 2, inFile);
/* Reading length of the information */
            fread (&element_length, 4, 1, inFile);
            if (tag_dictionary == 0x7FE00010)
                break;
/* (BIG) buffer : "value" */
            fread (&value[i], element_length, 1, inFile);
        }
        else // lenght is 16 bits :
        {
            fread (&element_length, 1, 2, inFile);

            if (tag_dictionary == 0x7FE00010)
                break;
        }
    }
}

```



```

        fread (&value[i], element_length, 1, inFile);
    }
}
if (tag_dictionary == 0x00280010)    // Number of rows
    rows = *(int *) & value[i];
if (tag_dictionary == 0x00280011)    // Number of columns
    columns = *(int *) & value[i];
i++;
}
/* Output file containing pixel data on HU */
outFile = fopen ("HU.dat", "w");
fprintf(outFile, "%i\n%i\n", rows, columns);
/* Reading CT number of each pixel */
for (j = 1; j <= rows; j++)
    for (i = 1; i <= columns; i++)
    {
        fread (&CTNo, 1, 2, inFile);
        HU = CTNo - 1000;
        fprintf(outFile, "%i\n", HU);
    }
fclose(inFile);
fclose(outFile);
return 0;
}

```

D.2 IZABRANI DIJELOVI PROGRAMA ZA PARAMETARSKO MODELIRANJE GEOMETRIJE PRŠLJENA I GENERISANJE MREŽE KONAČNIH ELEMENATA TIJELA PRŠLJENA

U četvrtom i petom poglavlju ovog rada je predstavljen predlog metoda za parametarsko modeliranje geometrije slabinskog pršljena L_5 , kao i način formiranja mreže konačnih elemenata tijela pršljena. U nastavku će biti dati dijelovi programa, koje je autor ovog rada razvio za automatsko generisanje 3D površinskog modela pršljena na bazi predloženog modela i za generisanje mreže konačnih elemenata tijela pršljena.

Dio grafičkog interfejsa programa razvijen u *DCL* jeziku:

```

//Dialog box
prsljen : dialog
{label = "Unos geometrijskih karakteristika slabinskih prsljenova";
:column
    {:image
        {key = "slika_prsljena5";
        width = 10;
        height = 20;
        }
    :boxed_column
        {:edit_box
            {label = "Sirina gornjeg zglobnog nastavka FCWs";
            key = "no1";
            edit_width = 5;
            }
        :edit_box
            {label = "Visina gornjeg zglobnog nastavka FCHs";
            key = "no2";
            edit_width = 5;
            }
        :edit_box
            {label = "Sirina donjeg zglobnog nastavka FCWi";
            key = "no3";
            }
    }
}

```

```

        edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Visina donjeg zglobnog nastavka FCHi";
     key = "no4";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Rastojanje gornjih zglobnih nastavaka IFWs";
     key = "no5";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Rastojanje donjih zglobnih nastavaka IFWi";
     key = "no6";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Rastojanje gornjeg i donjeg zglobnog nastavka IFH";
     key = "no7";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Ugao izmedju gornjeg zglobnog nastavka i horizontalne ravni Ts";
     key = "no8";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Ugao izmedju gornjeg zglobnog nastavka i poprecne ravni Ss";
     key = "no9";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Ugao izmedju donjeg zglobnog nastavka i horizontalne ravni Ti";
     key = "no10";
     edit_width = 5;
    }
    :edit_box
    {label = "Ugao izmedju donjeg zglobnog nastavka i poprecne ravni Si";
     key = "no11";
     edit_width = 5;
    }
    }
    }
    ok_cancel;
}

```

Funkcija koja generiše graničnu krivu 1 razvijena u jeziku *Visual Lisp*:

```

(defun draw_spline1(EPDu EPWu EPItu)
;Definition of geometric knots and tangent vectors of spline
  (setq p0 (list (* 0. EPDu)
                 (* 0. EPWu)
                 (* (* 0. EPDu) (atan (rad EPItu)))
                )
        p1 (list (* -0.064 EPDu)
                 (* 0.25 EPWu)
                 (* (* 0.031 EPDu) (atan (rad EPItu)))
                )
        p2 (list (* -0.128 EPDu)
                 (* 0.35 EPWu)
                 (* (* 0.065 EPDu) (atan (rad EPItu)))
                )
  )

```

```

p3 (list (* -0.193 EPDu)
      (* 0.4 EPWu)
      (* (* 0.097 EPDu) (atan (rad EPItu)))
    )
p4 (list (* -0.321 EPDu)
      (* 0.45 EPWu)
      (* (* 0.128 EPDu) (atan (rad EPItu)))
    )
p5 (list (* -0.64 EPDu)
      (* 0.5 EPWu)
      (* (* 0.159 EPDu) (atan (rad EPItu)))
    )
Tp "@0,-1,0"
Tk "@-1,0,0"
)
(command "SPLINE"
  p0
  p1
  p2
  p3
  p4
  p5
  ""
  Tp
  Tk
)
(setq curve1 (ssadd)
  entity (entlast)
  curve1 (ssadd entity curve1)
)
(list curve1)
)

```

Funkcija koja generiše elementarne površine razvijena u jeziku *Visual Lisp*:

```

(defun draw_surface(curve1 curve2 curve3 curve4)
;Variables defining knot density of control polyhedron of NURBS surface
  (setvar "SURFTAB1" 10)
  (setvar "SURFTAB2" 10)
;Generating Coons surface representing control polyhedron of NURBS surface
  (command "EDGESURF"
    curve1
    curve2
    curve3
    curve4
  )
  (setq surface (ssadd)
    entity (entlast)
    surface (ssadd entity surface)
  )
;Generating NURBS surface from control polyhedron
  (command "PEDIT"
    surface
    "S"
    ""
    "_AM2SF"
    ""
    surface
    ""
  )
  (list surface)
)

```


Funkcija koja generiše granične krive slojeva konačnih elemenata tijela pršljena razvijena u jeziku *Visual Lisp*:

```
(defun Boundary_Curves(entity1 entity2 surface3 surface4 surface5 SliceTickness)
```

```
;Finding the highest point on upper endplate of vertebra
```

```
  (setq entity (entnext entity1))
  entity_list (entget entity)
  entity_name (cdr (assoc 0 entity_list))
  entity_point (cdr (assoc 10 entity_list))
  PointOnUpperPlane entity_point
  zmax (caddr entity_point)
)
(while (equal entity_name "VERTEX")
  (setq entity (entnext entity))
  entity_list (entget entity)
  entity_name (cdr (assoc 0 entity_list))
  entity_point (cdr (assoc 10 entity_list))
)
(if (< zmax (caddr entity_point))
  (setq PointOnUpperPlane entity_point
    zmax (caddr entity_point))
)
)
```

```
;Finding the lowest point on lower endplate of vertebra
```

```
  (setq entity (entnext entity2))
  entity_list (entget entity)
  entity_name (cdr (assoc 0 entity_list))
  entity_point (cdr (assoc 10 entity_list))
  PointOnLowerPlane entity_point
  zmin (caddr entity_point)
)
(while (equal entity_name "VERTEX")
  (setq entity (entnext entity))
  entity_list (entget entity)
  entity_name (cdr (assoc 0 entity_list))
  entity_point (cdr (assoc 10 entity_list))
)
(if (> zmin (caddr entity_point))
  (setq PointOnLowerPlane entity_point
    zmin (caddr entity_point))
)
)
```

```
(command "-LAYER"
  "M"
  "BoundaryCurves"
  "S"
  "BoundaryCurves"
  ""
)
```

```
(setvar "CECOLOR" "1")
```

```
;Generating boundary curves of slices of finite elements of vertebral body
```

```
(command "UCS"
  "W"
  "-AMSECTION"
  surface3
  surface4
  surface5
  ""
)
```

```

        "TYPE"
        "P"
        "PLANE"
        "U"
        PointOnLowerPlane
        PointOnUpperPlane
        SliceThickness
        "Y"
        ""
    )
)

```

D.3 IZABRANI DIJELOVI PROGRAMA ZA NAPONSKO-DEFORMACIONU ANALIZU METODOM KONAČNIH ELEMENATA

U petom poglavlju ovog rada je prikazan niz algoritama koji predstavljaju osnovu za razvoj programa za naponsko-deformacionu analizu metodom konačnih elemenata. U nastavku će biti dati dijelovi ovog programa koji je autor rada razvio u programskom jeziku C.

/ Dio programa kojim se formira matrica krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa */*

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
.....
.....
/* Matrica elastičnosti */
double ME [6] [6];
/* Matrica transformacije Jakobijan i odgovarajuća inverzna matrica */
double MJ [3] [3];
double MG [3] [3];
/* Parcijalni izvodi funkcija oblika */
double Nksi [8];
double Neta [8];
double Npsi [8];
/* Vektori koji se koriste za Gausovu kvadraturu */
/* Koordinate tačaka potrebnih za kvadraturu u lokalnom koordinatnom sistemu */
double ksi [2];
double eta [2];
double psi [2];
/* Težinski koeficijenti */
double w [2];
/* Koeficijenti funkcija oblika */
double wa [8];
double wb [8];
double wc [8];
/* Pomoćne matrice za određivanje matrice deformacija-pomijeranja */
double M1 [6] [9];
double M2 [9] [9];
double M3 [9] [24];
.....
.....
main()
{
    FILE *inFile;
    .....
    .....
    /* Matrica krutosti konačnog elementa */
    double MKE [24] [24];
    /* Matrica deformacija-pomijeranja i odgovarajuća transponovana */
    double MB [6] [24];

```

```

double TB [24] [6];
/* Pomoćne matrice za određivanje matrice deformacija-pomijeranja */
double M4 [6] [9];
double M5 [24] [6];
/* Vektori koordinata i indeksa čvornih tačaka konačnog elementa [mm] */
double x [8], y [8], z [8];
int l [8];
/* Vektor modula elastičnosti konačnih elemenata [N/mm2] */
double *E;
/* Determinanta Jakobijana */
double detJ;
/* Poisson-ov koeficijent */
double ni=0.33333;
/* Broj konačnih elemenata */
int NoFE;
.....
.....
E=((double *) malloc(NoFE*sizeof(double)));
/* Funkcija koja inicijalizuje konstantni dio matrice elastičnosti */
/* koji naknadno treba pomnožiti modulom elastičnosti - za izotropan materijal */
InitME(ni);
/* Funkcija koja inicijalizuje vektore potrebne za Gausovu kvadraturu */
/* i koeficijente funkcija oblika w, ksi, eta, psi, wa, wb, wc */
InitGaus();
.....
.....
/* Učitavanje koordinata i indeksa čvornih tačaka konačnih elemenata iz spoljnog fajla */
inFile = fopen("FEM_Mesh.dat", "r");
for (tmp_i=1; tmp_i<=8; tmp_i++)
    fscanf(inFile, "%d %lf %lf %lf", &l[tmp_i-1], &x[tmp_i-1], &y[tmp_i-1], &z[tmp_i-1]);
/* Inicijalizacija matrice krutosti konačnog elementa */
for (tmp_i=1; tmp_i<=24; tmp_i++)
    for (tmp_j=1; tmp_j<=24; tmp_j++)
        MKE[tmp_i-1][tmp_j-1] = 0.;
/* Određjivanje matrice transformacije i njene inverzne matrice */
for (tmp_i=1; tmp_i<=2; tmp_i++)
    for (tmp_j=1; tmp_j<=2; tmp_j++)
        for (tmp_k=1; tmp_k<=2; tmp_k++)
            { /*3 tmp_k*/
                for (tmp_ii=1; tmp_ii<=3; tmp_ii++)
                    for (tmp_jj=1; tmp_jj<=3; tmp_jj++)
                        MJ[tmp_ii-1][tmp_jj-1] = 0.;
                for (tmp_kk=1; tmp_kk<=8; tmp_kk++)
                    {
                        Nksi[tmp_kk-1] = wa[tmp_kk-1]*(1+wb[tmp_kk-1]*eta[tmp_j-1])*(1+wc[tmp_kk-1]*psi[tmp_k-1])/8.;
                        Neta[tmp_kk-1] = wb[tmp_kk-1]*(1+wa[tmp_kk-1]*ksi[tmp_i-1])*(1+wc[tmp_kk-1]*psi[tmp_k-1])/8.;
                        Npsi[tmp_kk-1] = wc[tmp_kk-1]*(1+wa[tmp_kk-1]*ksi[tmp_i-1])*(1+wb[tmp_kk-1]*eta[tmp_j-1])/8.;
                        MJ[0][0] = MJ[0][0]+Nksi[tmp_kk-1]*x[tmp_kk-1];
                        MJ[0][1] = MJ[0][1]+Nksi[tmp_kk-1]*y[tmp_kk-1];
                        MJ[0][2] = MJ[0][2]+Nksi[tmp_kk-1]*z[tmp_kk-1];
                        MJ[1][0] = MJ[1][0]+Neta[tmp_kk-1]*x[tmp_kk-1];
                        MJ[1][1] = MJ[1][1]+Neta[tmp_kk-1]*y[tmp_kk-1];
                        MJ[1][2] = MJ[1][2]+Neta[tmp_kk-1]*z[tmp_kk-1];
                        MJ[2][0] = MJ[2][0]+Npsi[tmp_kk-1]*x[tmp_kk-1];
                        MJ[2][1] = MJ[2][1]+Npsi[tmp_kk-1]*y[tmp_kk-1];
                        MJ[2][2] = MJ[2][2]+Npsi[tmp_kk-1]*z[tmp_kk-1];
                    }
            }
/* Det3() funkcija koja određuje determinantu matrice Jakobijana */
detJ = Det3();
MG[0][0] = (MJ[1][1] * MJ[2][2] - MJ[1][2] * MJ[2][1])/detJ;
MG[0][1] = -(MJ[0][1] * MJ[2][2] - MJ[0][2] * MJ[2][1])/detJ;
MG[0][2] = (MJ[0][1] * MJ[1][2] - MJ[0][2] * MJ[1][1])/detJ;
MG[1][0] = -(MJ[1][0] * MJ[2][2] - MJ[1][2] * MJ[2][0])/detJ;

```



```

MG [1] [1] = (MJ [0] [0] * MJ [2] [2] - MJ [0] [2] * MJ [2] [0])/detJ;
MG [1] [2] = -(MJ [0] [0] * MJ [1] [2] - MJ [0] [2] * MJ [1] [0])/detJ;
MG [2] [0] = (MJ [1] [0] * MJ [2] [1] - MJ [1] [1] * MJ [2] [0])/detJ;
MG [2] [1] = -(MJ [0] [0] * MJ [2] [1] - MJ [0] [1] * MJ [2] [0])/detJ;
MG [2] [2] = (MJ [0] [0] * MJ [1] [1] - MJ [0] [1] * MJ [1] [0])/detJ;
/* Funkcija koja inicijalizuje pomoćne matrice potrebne za određivanje matrice deformacije-pomijeranja */
InitM1M2M3();
/* Određjivanje matrice deformacije-pomijeranja i odgovarajuće transponovane matrice */
for (tmp_ii=1;tmp_ii<=6;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=9;tmp_jj++)
    M4 [i-1] [j-1] = 0.;
for (tmp_ii=1;tmp_ii<=6;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=9;tmp_jj++)
for (tmp_kk=1;tmp_kk<=9;tmp_kk++)
    M4 [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] += M1 [tmp_ii-1] [tmp_kk-1]*M2 [tmp_kk-1] [tmp_jj-1];

for (tmp_ii=1;tmp_ii<=6;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=24;tmp_jj++)
    MB [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] = 0.;
for (tmp_ii=1;tmp_ii<=6;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=24;tmp_jj++)
for (tmp_kk=1;tmp_kk<=9;tmp_kk++)
    MB [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] += M4 [tmp_ii-1] [tmp_kk-1]*M3 [tmp_kk-1] [tmp_jj-1];

for (tmp_ii=1;tmp_ii<=6;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=24;tmp_jj++)
    TB [tmp_jj-1] [tmp_ii-1] = MB [tmp_ii-1] [tmp_jj-1];

/* Određjivanje matrice krutosti zapreminskog linearnog izoparametarskog konačnog elementa */
for (tmp_ii=1;tmp_ii<=24;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=6;tmp_jj++)
    M5 [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] = 0.;
for (tmp_ii=1;tmp_ii<=24;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=6;tmp_jj++)
for (tmp_kk=1;tmp_kk<=6;tmp_kk++)
    M5 [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] += TB [tmp_ii-1] [tmp_kk-1]*ME [tmp_kk-1] [tmp_jj-1];

for (tmp_ii=1;tmp_ii<=24;tmp_ii++)
for (tmp_jj=1;tmp_jj<=24;tmp_jj++)
for (tmp_kk=1;tmp_kk<=6;tmp_kk++)
    MKE [tmp_ii-1] [tmp_jj-1] += w [tmp_i-1]*w [tmp_j-1]*w [tmp_k-1]*detJ*
    M5 [tmp_ii-1] [tmp_kk-1]*MB [tmp_kk-1] [tmp_jj-1];
} /*3 tmp_k*/
for (tmp_i=1;tmp_i<=24;tmp_i++)
for (tmp_j=1;tmp_j<=24;tmp_j++)
    MKE [tmp_i-1] [tmp_j-1] = E [i]*MKE [tmp_i-1] [tmp_j-1];
.....
.....
}

```

LITERATURA

- [1] Xinghua, Z.; He, G.; Bingzhao, G., The application of topology optimization on the quantitative description of the external shape of bone structure; *Journal of Biomechanics*; 38:1612-1620; 2005.
- [2] Ruimerman, R.; Hilbers, P.; Van Rietbergen, B.; Huiskes, R., A theoretical framework for strain-related trabecular bone maintenance and adaptation; *Journal of Biomechanics*; 38:931-941; 2005.
- [3] Cunningham, J.L.; Clement, P.J.; Kim, H., Bone as fully stressed design; *Trans. 51st Annual Meeting of the ORS*; 2005.
- [4] Homminga, J.; Van Rietbergen, B.; Lochmuller, E.M.; Weinans, H.; Eckstein, F.; Huiskes, R., The osteoporotic vertebral structure is well adapted to the loads of daily life, but not to infrequent "error" loads; *Bone* 34:510-516; 2004.
- [5] Dumas, R.; Le Bras, A.; Champain, N.; Savidan, M.; Mitton, D.; Kalifa, G.; Steib, J.P.; de Guise, J.A.; Skalli, W., Validation of the relative 3D orientation of vertebrae reconstructed by bi-planar radiography; *Medical Engineering & Physics*; 26:415-422; 2004.
- [6] Templeton, A.; Cody, D.; Liebschner, M., Updating a 3-D vertebral body finite element model using 2-D images; *Medical Engineering & Physics*; 26:329-333; 2004.
- [7] Taddei, F.; Pancanti, A.; Viceconti, M., An improved method for the automatic mapping of computed tomography numbers onto finite element models; *Medical Engineering & Physics*; 26:61-69; 2004.
- [8] Wong, J.H.D.; Ng, K.H.; Chan, K.Y.; Dowsett, D.J., Bone mineral density information from reconstructed colour mapped computed tomographic data; *Australasian Physical & Engineering Science in Medicine* 27(2); 2004.
- [9] Cervantes, G.C.; Mejia, C.S., Precondicionamiento de metodos iterativos; *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias* 28(106):49-55; 2004.
- [10] Jovanović, J.; Jovanović, M., Biomechanical model of vertebra based on bone remodeling; *Facta Universitatis: Series Medicine and Biology* 11(1):35-39; 2004.
- [11] Waide, V.; Cristofolini, L.; Stolk, J.; Verdonchot, N.; Toni, A., Experimental investigation of bone remodelling using composite femurs; *Clinical Biomechanics* 18:523-536; 2003.
- [12] Liebschner, M.A.K.; Kopperdahl, D.L.; Rosenberg, W.S.; Keaveny, T.M., Finite element modeling of the human thoracolumbar spine; *Spine* 28(6):559-565; 2003.
- [13] Ruimerman, R.; Van Rietbergen, B.; Hilbers, P.; Huiskes, R., A 3-dimensional computer model to simulate trabecular bone metabolism; *Biorheology*; 40(1-3):315-320; 2003.
- [14] Minns, R.J.; Bibb, R.; Banks, R.; Sutton, R.A., The use of a reconstructed three-dimensional solid model from CT to aid the surgical management of a total knee arthroplasty: a case study; *Medical Engineering & Physics*; 25:523-526; 2003.
- [15] Kanematsu, N.; Kanai, T.; Minohara, S.; Endo, M.; Asakura, H., A CT calibration method based on the polybinary tissue model for radiotherapy treatment planning; *Physics in Medicine and Biology* 48(8):1053-1064; 2003.
- [16] Wilson, C.R., Essentials of bone densitometry for the medical physicist; 45th Annual meeting AAPM, American Association of Physicists in Medicine; San Diego; 2003.
- [17] Hakulinen, M.A.; Saarakkala, S.; Toyra, J.; Kroger, H.; Jurvelin, J.S., Dual energy x-ray laser measurement of calcaneal bone mineral density; *Physics in Medicine and Biology* 48:1741-1752; 2003.
- [18] Pili, P.; Murgia, F.; Puseddu, G.; Franzoni, G., Physical lumen carotid reconstruction: life-size models by rapid prototyping; *Physiology and function: methods, systems and applications – Medical imaging 2003*, Proceedings of SPIE, v.5031, 2003.
- [19] Jovanović, M.; Jovanović, J., Frequency response of crane operator's spinal column to random vibrations; *Facta Universitatis: Series Mechanical Engineering* 1(10):1299-1310; 2003.
- [20] Jovanović, J.; Jovanović, M., Investigation of bone remodeling after implantation of pedicle screw; *Glasnik odjeljenja prirodnih nauka; Crnogorska akademija nauka i umjetnosti* 15:197-210; 2003.

- [21] Jovanović, J.; Jovanović, M., Geometrijsko modeliranje slabinskih pršljenova; Informacione tehnologije IT'03; Žabljak; 2003.
- [22] Lengsfeld, M.; Gunther, D.; Pressel, T.; Leppeck, R.; Schmitt, J.; Griss, P., Validation data for periprosthetic bone remodelling theories; *Journal of Biomechanics*; 35:1553-1564; 2002.
- [23] Tsubota, K.; Adachi, T.; Tomita, Y., Functional adaptation of cancellous bone in human proximal femur predicted by trabecular surface remodeling simulation toward uniform stress state; *Journal of Biomechanics*; 35:1541-1551; 2002.
- [24] Xinghua, Z.; He, G.; Dong, Z.; Bingzhao, G., A study of the effect of non-linearities in the equation of bone remodeling; *Journal of Biomechanics*; 35:951-960; 2002.
- [25] Wang, X.; Dumas, G.A., Simulation of bone adaptive remodeling using a stochastic process as loading history; *Journal of Biomechanics*; 35:375-380; 2002.
- [26] Miller, Z.; Fuchs, M.B.; Arcan, M., Trabecular bone adaptation with an orthotropic material model; *Journal of Biomechanics*; 35:247-256; 2002.
- [27] Taylor, W.R.; Roland, E.; Ploeg, H.; Hertig, D.; Klabunde, R.; Warner, M.D.; Hobatho, M.C.; Rakotomanana, L.; Clift, S.E., Determination of orthotropic bone elastic constants using FEA and modal analysis; *Journal of Biomechanics*; 35:767-773; 2002.
- [28] Compston, J.E., Bone marrow and bone: a functional unit; *J. of Endocrinology* 173:387-394; 2002.
- [29] Kopperdahl, D.L.; Morgan, E.F.; Keaveny, T.M., Quantitative computed tomography estimates of the mechanical properties of human vertebral trabecular bone; *Journal of Orthopaedic Research* 20:801-805; 2002.
- [30] Miller, Z.; Fuchs, M.B.; Arcan, M., Trabecular bone adaptation with an orthotropic material model; *Journal of Biomechanics* 35:247-256; 2002.
- [31] Doblare, M.; Garcia, J.M., Anisotropic bone remodeling model based on a continuum damage-repair theory; *Journal of Biomechanics* 35:1-17; 2002.
- [32] Sun, Q.; Chang, K.H.; Dormer, K.J.; Dyer, R.K.; Gan, R.Z., An advanced computer-aided geometric modeling and fabrication method for human middle ear; *Medical Engineering & Physics*; 24:595-606; 2002.
- [33] Lee, K.K.; Qui, T.X.; Teo, E.C., 3-D finite element modeling of lumbar spine (L₂/L₃) using digitizer; http://www.ntu.edu.sg/home/mecteo/3DD_2002.pdf; 2002.
- [34] Martinez, L.C.; Rodriguez, C.; Munoz, C.; Lopez, A., Un metodo para la conversion del numero Hounsfield en densidad electronica y para la obtencion de la energia efectiva en los escaneres CT; *Revista de Fisica Medica*; 31(1):19-25; 2002.
- [35] Chen, C.S.; Cheng, C.K.; Liu, C.L.; Lo, W.H., Stress analysis of the disc adjacent to interbody fusion in lumbar spine; *Medical Engineering & Physics* 23:483-491; 2001.
- [36] Justesen, J.; Stenderup, K.; Ebbesen, E.N.; Mosekilde, L.; Steiniche, T.; Kassem, M., Adipocyte tissue volume in bone marrow is increased with aging and in patients with osteoporosis; *Biogerontology* 2:165-171; 2001.
- [37] Pankoke, S.; Hofmann, J.; Wolfel, H.J., Determination of vibration-related spinal loads by numerical simulation; *Clinical Biomechanics* 16 (suppl. 1); 2001.
- [38] Wachter, N.J.; Augat, P.; Krischak, G.D.; Sarkar, M.R.; Mentzel, M.; Kinzl, L.; Claes, L., Prediction of strength of cortical bone in vivo by microcomputed tomography; *Clinical Biomechanics* 16:252-256; 2001.
- [39] Tan, S.H.; Teo, E.C.; Chua, H.C., Quantitative three dimensional anatomy of lumbar vertebrae in Singaporean Asians; *European Spine Journal*; 2001.
- [40] Morgan, E.F.; Keaveny, T.M., Dependence of yield strain of human trabecular bone on anatomic site; *Journal of Biomechanics* 34:569-577; 2001.
- [41] Adachi, T.; Tsubota, K.; Tomita, Y., Trabecular surface remodeling simulation for cancellous bone using microstructural voxel finite element models; *Journal of Biomechanical Engineering* 123:403-409; 2001.
- [42] Whyne, C.M.; Hu, S.S.; Lotz, J.C., Parametric finite element analysis of vertebral bodies affected by tumors; *Journal of Biomechanics*; 34:1317-1324; 2001.
- [43] Mootanah, R.; Ingle, P.; Dowell, J.; Cheah, K.; Shelton, J.C., An accurate three dimensional finite element model of the pelvic bone with geometry and material properties retrieved from CT-scan data; VIII International Symposium – Computer Simulation in Biomechanics; 81-84; Italy; 2001.
- [44] Tsubota, K.; Adachi, T.; Tomita, Y., Cancellous bone adaptation in proximal femur predicted by trabecular surface remodeling simulation; *Bioengineering Conference ASME* 2001; v50:299-300; 2001.

- [45] Jovanović, J.; Jovanović, M.; Bulatović, R.; Šekularac, S., Influence of bridge crane vibration on dynamic behaviour of operator's spinal column; ASME – Greek Section First National Conference on Recent Advances in Mechanical Engineering; Patras; Greece; 2001.
- [46] Zhou, S.H.; McCarthy, I.D.; McGregor, A.H.; Coombs, R.R.H.; Hughes, S.P.F., Geometrical dimensions of the lower lumbar vertebrae – analysis of data from digitised CT images; *European Spine Journal* 9(3):242-248; 2000.
- [47] Huiskes, R.; Ruimerman, R.; Van Lenthe, G.H.; Janssen, J.D., Effects of mechanical forces on maintenance and adaptation of form in trabecular bone; *Nature* 405:704-706; 2000.
- [48] Keyserling, W.M., Workplace risk factors and occupational musculoskeletal disorders, part 1: A review of biomechanical and psychophysical research on risk factors associated with low-back pain, Aihaj; Fairfax; 2000.
- [49] Garcia, J.M.; Doblare, M.; Cueto, E., Simulation of bone internal remodeling by means of the α -shape-based natural element method; *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000*; Barcelona; Spain; 2000.
- [50] Langrana, N.; Cuitino, A., A nonlinear three-dimensional foam model for vertebral trabecular bone; <http://www.caip.rutgers.edu/~dclin/spine/bone-dave.html>; 2000.
- [51] Ulrich, D.; van Rietbergen, B.; Laib, A., The ability of three-dimensional structural indices to reflect mechanical aspects of trabecular bone; *Bone* 25:55-60; 1999.
- [52] Turner, C.H.; Rho, J.; Takano, Y.; Tsui, T.Y.; Pharr, G.M., The elastic properties of trabecular and cortical bone tissue are similar: results from two microscopic measurement techniques; *Journal of Biomechanics* 32(4):437-441; 1999.
- [53] Iwamoto, M.; Miki, K.; Yang, K.; King, A., Development of a finite element model of the human shoulder; *Ameri-pam* 99; 1999.
- [54] Benzi, M.; Tuma, M., A comparative study of sparse approximate inverse preconditioners; *Applied Numerical Mathematics* 30:305-340; 1999.
- [55] Samareh, J.A., A survey of shape parameterization techniques; *CEAS/AIAA/ICASE/NASA Langley International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*; Williamsburg; USA; 1999.
- [56] Pankoke, S.; Buck, B.; Wolfel, H.P., Dynamic FE Model of sitting man adjustable to body height, body mass and posture, used for calculating internal forces in the lumbar vertebral disks; *Journal of Sound and Vibration* 215 (4):827-839; 1998.
- [57] Ulrich, D.; Reitbergen, B.; Weinans, H.; Rueggsegger, P., Finite element analysis of trabecular bone structure: a comparison of image-based meshing techniques; *Journal of Biomechanics*; 31:1187-1192; 1998.
- [58] Kopperdahl, D.L.; Keaveny, T.M., Yield strain behaviour of trabecular bone; *Journal of Biomechanics* 31:601-608; 1998.
- [59] Levenston, M.E.; Carter, R.D., An energy dissipation-based model for damage stimulated bone adaptation; *Journal of Biomechanics* 31:5791-586; 1998.
- [60] Couteau, B.; Hobatho, M.C.; Darmana, R.; Brignola, J.C.; Arlaud, J.Y., Finite element modelling of the vibrational behaviour of the human femur using CT-based individualized geometrical and material properties; *Journal of Biomechanics*; 31:383-386; 1998.
- [61] Mosley, J.R.; Lanyon, L.E., Strain rate as a controlling influence on adaptive modelling in response to dynamic loading in the ulna in growing male rats; *Bone* 23(4):313-318; 1998.
- [62] Siedel, H.; Bluthner, R.; Hinz, B.; Schust, M., On the health risk of the lumbar spine due to whole-body vibration – Theoretical approach, experimental data and evaluation of whole-body vibration; *Journal of Sound and Vibration* 215(4):723-741; 1998.
- [63] Lang, T.; Augat, P.; Majumdar, S.; Ouyang, X.; Genant, H.K., Noninvasive assesment of bone density and structure using computed tomography and magnetic resonance; *Bone* 22(5):149S-153S; 1998.
- [64] Adachi, T.; Tomita, Y.; Sakaue, H.; Tanaka, M., Simulaton of trabecular surface remodeling based on local stress nonuniformity; *JSME Int.J.* 40C(4):782-792; 1997.
- [65] Roy, M.; Rho, J.Y.; Tsui, T.; Pharr, G., Variation of Young's modulus and hardness in human lumbar vertebrae measured by nanoindentation; *ASME Bioengineering Conference*; Atlanta, 1996.
- [66] Chao, E.Y.S., Orthopaedic biomechanics: The past, present and future; *International Orthopaedics* 20:239-243; 1996.
- [67] Maloney, W.J.; Sychterz, C.; Bragdon, C.; McGovern, T.; Jasty, M.; Engh, C.A., Skeletal response to well fixed femoral components inserted with andd without cement; *Clinical Orthopaedics and Related Research* 333:15-26; 1996.

- [68] Benzi, M.; Meyer, C.D.; Tuma, M., A sparse approximate inverse preconditioner for the conjugate gradient method; *J.Sci.Comput.* 17(5):1135-1149; 1996.
- [69] Rho, J.Y.; Hobatho, M.C.; Ashman, R.B., Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone; *Medical Engineering Physics* 17:347-355; 1995.
- [70] Mullender, M.G.; Huiskes, R., Proposal for the regulatory mechanism of Wolff's law; *Journal of Orthopaedic Research*; 13(4):503-512; 1995.
- [71] Huiskes, R.; Van Rietbergen, B., Preclinical testing of the total hip stems; *Clinical Orthopaedics*; 319:64-76; 1995.
- [72] Shapiro, V.; Vossler, D.L., What is parametric family of solids ? Third ACM Symposium on solid model and applications; Salt Lake City; USA; 1995.
- [73] Goodsitt, M.M.; Hoover, P., Veldee, M.S., Hsueh, S.L., The composition of bone marrow for a dual-energy quantitative computed tomography technique. A cadaver and computer simulation study; *Invest. Radiology* 29(7):695-704; 1994.
- [74] Mullender, M.G.; Huiskes, R.; Weinans, H., A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process; *Journal of Biomechanics*; 27:1389-1394; 1994.
- [75] Panjabi, M.M.; et al, Articular facets of the human spine: Quantitative three-dimensional anatomy; *Spine* 18(10):1298-1310; 1993.
- [76] Keaveny, T.M.; Hayes, W.C., A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone; *Journal of Biomechanical Engineering* 115:534-542; 1993.
- [77] Weinans, H.; Huiskes, R.; Grootenboer, H.J., The behavior of adaptive bone remodeling simulation models; *Journal of Biomechanics*; 12:1425-1441; 1992.
- [78] Panjabi, M.M.; et al, Human lumbar vertebrae: Quantitative three-dimensional anatomy; *Spine* 17(3):299-306; 1992.
- [79] Lund, M.M.; Abadi, D.M.; Mathies, J.C., Lipid composition of normal human bone marrow as determined by column chromatography; *Journal of Lipid Research* 3:95-98; 1992.
- [80] Huiskes, R.; Weinans, H.; Van Rietbergen, B., The relationship between stress shielding and bone resorption around total hip stems and the effects of flexible materials; *Clinical Orthopaedics*; 274:124-134; 1992.
- [81] Cowin, S.C.; Moss-Salentijn, L.; Moss, M.L., Candidates for the mechanosensory system in bone; *Journal of Biomechanical Engineering*; 113:191-197; 1991.
- [82] Beaupre, G.S.; Orr, T.E.; Carter, D.R., An approach for time-dependent bone modeling and remodeling-application: a preliminary remodeling simulation; *Journal of Orthopaedic Research*; 8:662-670; 1990.
- [83] Beaupre, G.S.; Orr, T.E.; Carter, D.R., An approach for time-dependent bone modeling and remodeling-theoretical development; *Journal of Orthopaedic Research*; 8:651-661; 1990.
- [84] El Haj, A.J.; Minter, S.L.; Rawlinson, S.C.; Suswillo, R.; Lanyon, L.E., Cellular responses to mechanical loading in vitro; *Journal of Bone Mineral Research*; 5:923-932; 1990.
- [85] Carter, D.R.; Orr, T.E.; Fyhrie, D.P., Relationship between loading history and femoral cancellous bone architecture; *Journal of Biomechanics*; 22(3):231-244; 1989.
- [86] Turner, C.H., Three rules for bone adaptation to mechanical stimuli; *Bone*; 23(5):399-407; 1988.
- [87] Brinckmann, P.; Biggemann, M.; Hilweg, D., Fatigue fracture of human lumbar vertebrae; *Clinical Biomechanics* 3(suppl. 1):1-38; 1988.
- [88] Bongers, P.M.; Boshuizen, H.C.; Hulshof, C.T.J.; Koerneester, A.P., Long-term sickness absence due to back disorders in crane operators exposed to whole-body vibration; *Int. Arch. Occup. Environ. Health* 61:59-64; 1988.
- [89] Bongers, P.M.; Boshuizen, H.C.; Hulshof, C.T.J.; Koerneester, A.P., Exposure to vibration and back disorders in crane operators; *Int. Arch. Occup. Environ. Health* 60:129-137; 1988.
- [90] Rice, J.C.; Cowin, S.C.; Bowman, J.A., On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density; *Journal of Biomechanics*; 21:155-168; 1988.
- [91] Currey, S.C., The effect of porosity and mineral content on the young's modulus of elasticity of compact bone; *Journal of Biomechanics*; 21:131-139; 1988.
- [92] Huiskes, R.; Weinans, H.; Grootenboer, J.; Dalstra, M.; Fudala, M.; Sloof, T.J., Adaptive bone remodeling theory applied to prosthetic-design analysis; *Journal of Biomechanics*; 20:1135-1150; 1987.
- [93] Carter, D.R., Mechanical loading history and skeletal biology; *Journal of Biomechanics*; 20:1095-1105; 1987.
- [94] Carter, D.R.; Fyhrie, D.P.; Whalen, R.T., Trabecular bone density and loading history: Regulation of connective tissue biology by mechanical energy; *Journal of Biomechanics*; 20:785-794; 1987.

- [95] Dupuis, H.; Zerlett, G., Whole-body vibration and disorders of the spine; *Int. Arch. Occup. Environ. Health* 59:323-336; 1987.
- [96] Fyhrie, D.P.; Carter, D.R., A unifying principle relating stress to trabecular bone morphology; *Journal of Orthopaedic Research*; 4:304-317; 1986.
- [97] Zerlett, G., Relationship between whole-body vibration and disorders of the backbone diagnosed on operators of earth-moving machinery; Backache and Back Discomfort; AGARD Conference Proceedings No.378 Paper 2; 1986.
- [98] Frost, H.M., Bone "mass" and the "mechanostat": a proposal; *Ant.Rec.*; 219:1-9; 1987.
- [99] Binderman, I.; Shimshoni, Z.; Somjen, D., Biochemical pathways involved in the translation of physical stimulus to biological message; *Calc.Tissue Int.*; 36(Suppl.1):S82-S85; 1984.
- [100] Carter, D.R., Mechanical loading histories and cortical bone remodeling; *Calcif.Tissue International*; 36(Suppl.1):S19-S24; 1984.
- [101] Rubin, C.T.; Lanyon, L.E., Regulation of bone formation by applied dynamic loads; *Journal of Bone Joint Surgery*; 66A:397-402; 1984.
- [102] Rubin, C.T.; Lanyon, L.E., Limb mechanics as a function of speed and gait: a study of functional strains in the radius and tibia of horse and dog; *Journal of Experimental Biology*; 101:187-211; 1982.
- [103] Hilfert, R.; Kohne, G.; Toussaint, R.; Zerlett, G., Probleme der Ganzkörperschwingung-belastung von Erdbaummaschinenführern; *Arbeitsschutz und Prophylaxe* 31:199-206; 1981.
- [104] Carter, D.R.; Hayes, W.C., The behaviour of bone as a two-phase porous structure; *Journal of Bone Jt. Surg.*; 59-A:954-962; 1977.
- [105] Cowin, C.S.; Hegedus, D.H., Bone remodeling I: A theory of adaptive elasticity; *Journal of Elasticity*; 6:313-326; 1976.
- [106] Kunz, F.; Meyer, H.R., Rückenbeschwerden und Wirbelsäulenbefunde bei Führern schwerer Baummaschinen; *Zeit Unfallmed Berufskr* 62:178-189; 1969.
- [107] Christ, W.; Dupuis, H., Untersuchung der Möglichkeit von gesundheitlichen Schädigungen im Bereich der Wirbelsäule bei Schlepperfahren; *Medizinische Welt* 19:1969-1972; 1968.
- [108] Haluzicky, M.; Kubik, S., Myalgie a bolesti v krizoch u traktoristov; *Pracovni lekarstvi* 9:121-124; 1957.
- [109] Fishbein, W.I.; Salter, L.C., The relationship between truck and tractor driving and disorders of the spine and supporting structures; *Ind. Medicine and Surgery* 19:444-445; 1950.
- [110] Tovar, A., Bone remodeling as a hybrid cellular automaton optimization process, Thesis [Ph.D.], University Notre Dame, Indiana, USA, 2004.
- [111] Hollister, S.J., Biomechanics; Biomedical Engineering, University of Michigan, USA, <http://www.engin.umich.edu/class/bme456/>, 2004.
- [112] Hollister, S.J., Computational modeling of biological tissue; Biomedical Engineering, University of Michigan, USA, <http://www.engin.umich.edu/class/bme506/>, 2004.
- [113] Lamecker, H.; Lange, T.; Seebass, M., Segmentation of the liver using a 3D statical shape model, ZIB Report 04-09, Konrad Zuse centrum für informationstechnik, Berlin, Germany, 2004.
- [114] Newell, T., Comparison of instantaneous and cumulative loads of the low back and neck in orthodontists, Thesis [M.Sc.]—Department of Human Work Science, Lulea University of Technology, Sweden, 2003.
- [115] CIRS – Computerized Imaging Reference System, <http://www.cirsinc.com/>, 2003.
- [116] Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM Standard Part 1+Part 15), National Electrical Manufacturers Association, Rosslyn, USA, 2003.
- [117] Kaye, G.W.C.; Laby, T.H., Tablice fizičkih i hemijskih konstanti, Velarta, Beograd, 2003.
- [118] Moaveni, S., Finite element analysis – Theory and application with ANSYS, Pearson Education, New Jersey, USA, 2003.
- [119] Murgia, F.; Puseddu, G.; Franzoni, G.; Pili, P.; Tuveri, M., Anatomical shape reconstruction and manufacturing: solving topological changes of lumen vessel through geometric approach, Technical Report CRS4 TR 03/78, Center for advanced studies, research and development in Sardinia, Cagliari, Italy, 2003.
- [120] Wu, J., QA procedures for the treatment planning system at MBPCC, Thesis [M.Sc.]—Department of Physics and Astronomy, Louisiana State University, USA, 2002.
- [121] Hoffmann, C.M.; Arinyo, R.J., Parametric modeling, Purdue University, USA, www.cs.purdue.edu/homes/cmh/distribution/CAGDhandbook.ps, 2002.
- [122] Šaletić, S., Razvoj integralnog automatizovanog sistema za reinženjering složenih geometrijskih oblika primjenom tehnike 3D laserskog skeniranja, Magistarski rad, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2002.

- [123] Shapiro, V., Solid modeling, Spatial automation laboratory - Technical report 2001-2, University of Wisconsin, USA, 2001.
- [124] Stayner, R.M., Whole-body vibration and shock: A literature review, RMS Vibration test laboratory, Ludlow, United Kingdom, 2001.
- [125] Mechanical Desktop 6 – User's guide, AutoDesk Inc., San Rafael, USA, 2001.
- [126] Lačković, V.; Bumbaširević, V.; Vuzevski, V.D., Histološki atlas, Nauka, Beograd, 2000.
- [127] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L., The Finite Element Method, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000.
- [128] Shackelford, J.F., Bioceramics: Application of Ceramic and Glass Materials in Medicine, Trans Tech Publications Ltd., 1999.
- [129] He, M., Application of X-ray tomography to measurement of fractures in rocks, Thesis [M.Sc.]—Department of Petroleum Engineering, Stanford University, USA, 1998.
- [130] Belytschko, T., Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures, Northwestern University, USA, 1998.
- [131] Martin, R.B.; Burr, D.B.; Sharkey, N.A., Skeletal Tissue Mechanics, Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [132] Patnaik, S.N.; Hopkins, D.A., Optimality of fully stressed design, Report No. TM-1998-207411, NASA Lewis research Center, Cleveland, Ohio, USA, 1998.
- [133] International Organization for Standardization: Evaluation of human exposure to whole-body vibration. Part 1. General requirements. (ISO 2631-1). Geneva: ISO, 1997.
- [134] International Organization for Standardization: Mechanical vibration and shock. Human exposure. Biodynamic coordinate systems. (ISO 8727). Geneva: ISO, 1997.
- [135] Jakanović, S., Istraživanje mogućnosti razvoja problemski orijentisanih CAD/CAM sistema za dijelove sa složenim površinama, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1997.
- [136] Griffin, M.J., Handbook of Human Vibration, London: Academic Press, 1996.
- [137] Fan, W.C., Finite element analysis on vertebral lumbar bone: A parametric study, Thesis [M.Sc.], Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Rutgers University, N.Y., USA, 1996.
- [138] Hall, S.J., Basic biomechanics 2-nd edition, Mosby, St. Louis, USA, 1995.
- [139] Sandborg, M., Computed tomography: Physical principles and biohazards, Report 81, ISSN 1102-1799, Linköping University, Sweden, 1995.
- [140] Kitazaki, S., Modelling mechanical responses to human whole-body vibration, Thesis [Ph.D.], University of Southampton, UK, 1994.
- [141] Ammeraal, L., C++ for programmers, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.
- [142] Haftka, R.T.; Gurdal, Z.; Kamat, M.P., Elements of structural optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1990.
- [143] Clinical Symposia, Pharmaceuticals Division CIBA-GEIGY Corporation, New Jersey, USA, 1987.
- [144] Radović, R., Degenerativne promjene u slabinskom dijelu kičmenog stuba (komparativna studija), Doktorska disertacija, Medicinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1984.
- [145] Broch, J.T., Mechanical vibrations and shock measurements, Glostrup: K.Larson & son, 1984.
- [146] Cook, R.D., Concept and application of finite element analysis 2-nd edition, John Wiley & Sons, New York, USA, 1981.
- [147] Carter, D.R.; Harris, W.H.; Vasu, R.; Caler, W.E., The mechanical and biological response of cortical bone to in vivo strain histories; Mechanical Properties of Bone; ASME; 1981.
- [148] Meirovitch, L., Computational methods in structural dynamics, Rockville: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [149] Kiss, F.; Szentagothai, J., Atlas of human anatomy, Akademiai Kiado, Budapest, 1980.
- [150] Ruszkowski, I., Ortopedija, Jumea, Zagreb, 1979.
- [151] Kalajdžić, M., Metod konačnih elemenata, Institut za alatne mašine, Beograd, 1978.
- [152] Vukadinović, S.V., Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1978.
- [153] Stayner, R.M.; Bean, A.G.M., Review of measurement of tractor suspension seats; Interim report DN/TE/214/445 National Institute of Agricultural Engineering; Bedford UK; 1975.
- [154] Mitrović, D.S.; Đoković, D.Ž., Polinomi i matrice, ICS, Beograd, 1975.
- [155] Dupuis, H.; Christ, W., Untersuchung der Möglichkeit von Gesundheitsschädigungen im Bereich der Wirbelsäule bei Schlepperfahren; Max Planck Institut für Landarbeit und Landtechnik Heft A 72/2; 1972.



PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Janko Jovanović

Godina rođenja 1966

E-mail janko@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore

Mašinski fakultet

Naslov doktorske disertacije

Biomehanički model ljudskog pršljena baziran na procesu adaptacije koštane materije na mehaničko opterećenje

Prevod naslova na engleski jezik

Biomechanical model of human vertebra based on bone remodeling

Datum odbrane

Avgust 2006

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci¹

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

¹ Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Biomechanical model of human vertebra based on bone remodeling

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Prof. dr Miomir Jovanović

Prof. dr Radoš Bulatović

Prof. dr Dragan Domazet

Dr Ratko Radović, naučni savjetnik

Doc. dr Sreten Savićević

Sažetak *

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

Ključne riječi pršljen, adaptacija koštanog tkiva na mehaničko opterećenje, FEM model

Ključne riječi na engleskom jeziku vertebra, bone remodeling, finite element model

Naučna oblast/uža naučna oblast

Biomehanika

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

Biomechanics

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Biomehanički model ljudskog pršljena baziran na procesu adaptacije koštane materije na r

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

☒ Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima


Potpis doktoranda

U Podgorici

24.09.2018

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.