

UNIVERZITET CRNE GORE  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

**Irena Orović**

**VISOKO KONCENTRISANE VREMENSKO-  
FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE I NEKI ASPEKTI  
PRIMJENE**

**- Doktorska teza -**

Podgorica, 2009

15-414 7123

Mon IV 1416

50460

## PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANTU

Ime i prezime: **Irena Orović**

Datum i mjesto rođenja: **21. 02. 1983. godine, Podgorica, Crna Gora**

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka: **Računari, magistarski rad odbranjen 29. 12. 2006. godine**

## INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: **Doktorske studije elektrotehnike**

Naziv teze: **Visoko koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije i neki aspekti primjene**

Fakultet na kojem je disertacija odbranjena: **Elektrotehnički fakultet, Podgorica**

## UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave doktorske teze: **27.08.2008. godine**

Datum sjednice Senata Univerziteta na kojoj je prihvaćena teza: **02.10.2008. godine**

Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:

**Prof. dr Zdravko Uskoković**

**Prof. dr Srdjan Stanković**

**Doc. dr Miloš Daković**

Mentor: **Prof. dr Srdjan Stanković**

Komisija za ocjenu doktorske disertacije:

**Prof. dr Zdravko Uskoković**

**Prof. dr Srdjan Stanković**

**Prof. dr Branko Kovačević**

Komisija za odbranu doktorske disertacije:

**Prof. dr Zdravko Uskoković**

**Prof. dr Srdjan Stanković**

**Prof. dr Viktor Sučić**

**Doc. dr Miloš Daković**

**Prof. dr Cornel Ioana**

Datum odbrane: **19.02.2010.**

Datum promocije: \_\_\_\_\_

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr Srdjanu Stankoviću na svesrdnoj i dragocjenoj pomoći, podršci i ogromnom strpljenju, ukazancm povjerenju i svim korisnim savjetima, sugestijama i idejama pri izradi doktorske teze.

Zahvalnost dugujem i prof. dr Moennes Amin-u sa Univerziteta u Vilanovi (Filadelfija, Pensilvanija) koji mi je omogućio korišćenje radarskih signala snimljenih u njegovoj laboratoriji. Takođe, želim da se zahvalim i dr. Ervinu Sejdiću, sa istraživačkog instituta Bloorview Kids Rehab, na korisnim savjetima i biomedicinskim signalima korišćenim u eksperimentima. Zahvalnost dugujem dr. Cornel Ioana-i, na intenzivnoj naučno-istraživačkoj saradnji tokom rada na tezi.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr Zdravku Uskokoviću i prof. dr Ljubiši Stankoviću na pomoći i sugestijama prilikom pisanja naučnih radova na kojima je zasnovana doktorska teza.

Irena Orović

Podgorica, 11.12.2009.



## REZIME

U radu su predloženi novi pristupi vremensko-frekvencijskoj analizi nestacionarnih signala. Visoko-koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije za procjenu brzo-promjenljive trenutne frekvencije zasnovane su na kompleksnom vremenskom argumentu. Analizom efekata diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule, izvedena je generalizovana forma distribucija sa kompleksnim argumentom za proizvoljni red distribucije. Ova forma obezbjeđuje proizvoljno visoku koncentraciju u vremensko-frekvencijskom domenu. Takođe, definisana je i L-forma distribucije proizvoljnog reda sa kompleksnim argumentom. Kao odgovor na zahtjeve analize multikomponentnih signala predložena je i klasa distribucija sa kompleksnim argumentom izvedena iz ambiguity domena. U tu svrhu, definisana je ambiguity funkcija momenta proizvoljnog reda sa kompleksnim argumentom. Specijalni slučajevi predloženih distribucija su analizirani i upoređivani kroz različite aspekte, uključujući i robustnost na šumove. Poseban dio rada posvećen je distribucijama sa višestrukim prozorima, u okviru koga je predložen jednodimenzioni i dvodimenzioni Hermitski S-metod. Optimalni prozori su dobijeni korišćenjem Hermitskih funkcija različitog reda koje pokazuju niz dobrih osobina naročito u pogledu lokalizacije u vremensko-frekvencijskom domenu. Na taj način je obezbijedeno poboljšanje rezolucije standardnih kvadratnih distribucija (spektrograma i S-metoda), ne povećavajući red distribucije, čime se ne povećava značajno ni kompleksnost realizacije.

Na kraju, značajan dio rada je posvećen nekim od aktuelnih aspekti primjene vremensko-frekvencijskih distribucija i to: primjene u analizi radarskih signala (jednodimenzionih i dvodimenzionih), zaštiti multimedijalnih podataka watermarking tehnikama u vremensko-frekvencijskom domenu, primjene u analizi i klasifikaciji specifične vrste biomedicinskih signala.

## ABSTRACT

This work proposes some novel and generalized approaches in the time-frequency analysis of non-stationary signals. The highly concentrated distributions for the fast varying instantaneous frequency analysis are based on the complex-lag argument. The effects of Cauchy integral formula discretization on the concentration of time-frequency distribution are analyzed. As a result of this discretization, the new forms of complex-lag distribution with an arbitrary order are produced. Additionally, by using multiple successive integrations, the L-form of distributions is obtained. By extending the introduced concepts within the ambiguity domain, a class of time-frequency distributions with complex-lag argument is proposed. It is based on the ambiguity domain representations of real and complex lag moment, combined to provide a cross-terms free representation for multicomponent signals. A new form of the  $N$ -th order complex-lag time-frequency distribution follows as a two-dimensional inverse Fourier transform of the proposed ambiguity domain representation. More generally, by considering various existing kernels, the entire class of complex-lag distributions is defined. The proposed distributions are compared with respect to different aspects, including the robustness to noise. Furthermore, a part of this work is dedicated to the multiwindow time-frequency distributions, where the Hermite S-method has been proposed. The optimal windows are obtained by using Hermite functions of different orders. These functions show a number of desirable properties such as good time-frequency localization property. The proposed distribution improves the resolution of standard quadratic distributions (e.g. spectrogram and S-method), without increasing distribution order and hence, preserving low calculation complexity.

Finally, some interesting and actual applications of time-frequency distributions are proposed and analyzed. Particularly, we focus on the following applications: time-frequency analysis of one-dimensional and two-dimensional radar signals, digital watermarking for multimedia data protection based on the time-frequency analysis and biomedical signal analysis and classification.

# SADRŽAJ

UVOD .....	1
<b>1 VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA SIGNALA.....</b>	<b>4</b>
1.1 LINEARNE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE TRANSFORMACIJE.....	6
1.1.1 <i>Kratkotrajna Fourier-ova Transformacija</i> .....	6
1.2 KVADRATNE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE .....	10
1.2.1 <i>Spektrogram</i> .....	10
1.2.2 <i>Wigner-ova distribucija</i> .....	12
1.2.3 <i>Pseudo Wigner-ova distribucija</i> .....	16
1.2.4 <i>S-metod</i> .....	16
1.3 COHEN-OVA KLASA KVADRATNIH VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA .....	18
1.4 VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE SA KOMPLEKSNIM VREMENSKIM ARGUMENTOM.....	21
<b>2 GENERALIZOVANA FORMA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM.....</b>	<b>24</b>
2.1 INTERPRETACIJA I POBOLJŠANJE KONCENTRACIJE U VREMENSKO-FREKVENCIJSKOM DOMENU.....	25
2.1.1 <i>Uticaj diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule na trenutnu frekvenciju signala</i> .....	25
2.1.2 <i>Analiza tačnosti procjene trenutne frekvencije signala</i> .....	26
2.2 UTICAJ ŠUMA NA ESTIMACIJU TRENUTNE FREKVENCIJE .....	32
2.3 REALIZACIJA DISTRIBUCIJE SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM ZA SLUČAJ MULTIKOMPONENTNIH SIGNALA.....	35
<b>3 KLASA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA BAZIRANA NA AMBIGUITY DOMENU .....</b>	<b>39</b>
3.1 GENERALNA FORMA AMBIGUITY FUNKCIJE; KLASA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM.....	41
3.1.1 <i>Kompleksnost proračuna distribucija iz predložene klase</i> .....	42

3.1.2. Grupno kašnjenje .....	43
3.2 PRIMJERI.....	45
3.3 VIRTUELNI INSTRUMENT ZA VISOKO-KONCENTRISANE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE.....	51
3.3.1. Opis virtuelnog instrumenta .....	52
3.3.2. Primjena virtuelnog instrumenta .....	56
<b>4 VISOKO-KONCENTRISANE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE SA VIŠESTRUKIM PROZORIMA (MULTIWINDOW).....</b>	<b>59</b>
4.1 S-METOD SA VIŠESTRUKIM PROZORIMA BAZIRAN NA KORIŠĆENJU HERMITSKIH FUNKCIJA .....	60
4.1.1 Optimalni prozori – Hermitske funkcije .....	60
4.1.2 Spektrogram sa višestrukim prozorima .....	61
4.1.3 S-metod sa višestrukim prozorima .....	64
4.2 DVODIMENZIONNI HERMITSKI S-METOD .....	68
4.2.1 Dvodimenzioni S-metod baziran na Hermitskim funkcijama.....	69
<b>5 NEKI ASPEKTI PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE ANALIZE SIGNALA .....</b>	<b>73</b>
5.1 ANALIZA RADARSKIH SIGNALA.....	73
5.1.1 Primjena jednodimenzionog Hermitskog S-metoda za analizu radarskih signala.....	73
5.1.2 Primjena Hermitskog S-metoda za karakterizaciju kretanja čovjeka – Procedura klasifikacije načina kretanja .....	77
5.1.3 Primjena dvodimenzionog Hermitskog S-metoda u ISAR aplikacijama.....	85
5.2 PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE ANALIZE U DIGITALNOM WATERMARKING-U .....	96
5.2.1 Digitalni watermarking.....	96
5.2.2 Jedan generalizovani pristup watermarking-u multimedijalnih podataka korišćenjem multidimenzione vremensko-frekvencijske analize .....	98
5.3 PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA ZA ANALIZU BIOMEDICINSKIH SIGNALA .....	114
5.3.1 Procedura klasifikacije .....	115
5.3.2 Eksperimentalni rezultati .....	118
<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>122</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>125</b>
<b>LISTA REFERENCI MR IRENE OROVIĆ .....</b>	<b>136</b>

## UVOD

Vremensko-frekvencijska analiza je uvedena kao efikasno rješenje za karakterizaciju i obradu signala sa vremenski promjenljivim spektralnim sadržajem. Imajući u vidu široku rasprostranjenost nestacionarnih signala, vremensko-frekvencijska analiza se intenzivno razvijala tokom protekle dvije decenije, omogućavajući pri tome čitav niz primjena. Danas, gotovo da ne postoji oblast u obradi signala u kojoj ona nije našla svoju primjenu. U teorijskom smislu, predložene su brojne vremensko-frekvencijske distribucije, koje u zavisnosti od signala, ispunjavaju različite zahtjeve u pogledu njihove analize. U praktičnom smislu, značajno je proširen broj aplikacija u kojima vremensko-frekvencijska analiza ima krucijalnu ulogu. Ono što je bitno napomenuti je da ne postoji vremensko-frekvencijska distribucija koja bi bila podesna za analizu svih vrsta signala. Na primjer, većina postojećih distribucija, ne može da obezbijedi zadovoljavajuću koncentraciju za signale sa izrazito brzim varijacijama trenutne frekvencije. Međutim, kako su signali sa naglašenom nestacionarnošću trenutne frekvencije čest slučaj u realnom svijetu (signali odbijeni od rotirajućih djelova radarske mete, signali vibrirajućih struktura, brzo vibrirajući tonovi muzičkih instrumenata i sl.), neophodno je za njih obezbijediti adekvatno vremensko-frekvencijsko predstavljanje.

U ovom radu su predložene visoko-koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije za analizu signala sa brzo promjenljivom trenutnom frekvencijom. Pri tome su korišćena dva različita pristupa, pa se i rezultujuće distribucije svrstavaju u dvije različite kategorije. U prvu kategoriju spadaju vremensko-frekvencijske distribucije sa kompleksnim argumentom vremena. Polazeći od osnova kompleksne analize, poboljšanje koncentracije se postiže povećanjem broja tačaka prilikom diskretizacije distribucije ili povećavanjem broja integracija kroz nepromijenjen broj tačaka. Kao rezultat ove analize definisan je opšti oblik distribucije sa kompleksnim argumentom, za proizvoljni red distribucije  $N$ . Ujedno, definisana je i opšta  $L$ -forma distribucija sa kompleksnim argumentom. U nastavku rada, koncept korišćenja kompleksnog argumenta signala uveden je i u okviru ambiguity domena. Naime, definisana je ambiguity funkcija sa kompleksnim argumentom, koja u konvoluciji sa postojećom ambiguity funkcijom realnog argumenta, daje rezultatnu funkciju  $N$ -tog reda. Dvodimenzionom Fourier-ovom

transformacijom proizvoda rezultatne funkcije i funkcija jezgra, definiše se klasa vremensko-frekvencijskih distribucija reda  $N=2,4,6$ , itd. Kao specijalan slučaj, za distribucije drugog reda, ova klasa u sebi sadrži Cohen-ovu klasu kvadratnih distribucija. Preciznije rečeno, predložena klasa sadrži čitav niz podklasa, pri čemu je svaka podklasa vezana za određeni red distribucija. Sve predložene distribucije sa kompleksnim argumentom su implementirane u okviru virtuelnog instrumenta za analizu nestacionarnih signala.

Druga grupa visoko-koncentrisanih vremensko-frekvencijskih distribucija odnosi se na distribucije sa višestrukim prozorima. Pokazano je da se umjesto uvođenja kompleksnog argumenta i povećavanja reda distribucije, poboljšanje koncentracije može postići i povećavanjem broja prozora kod postojećih distribucija. Na bazi standardnog S-metoda, koji je široko primjenjivan u mnogim aplikacijama, uveden je Hermitski S-metod. Ova distribucija je definisana korišćenjem određenog broja Hermitskih funkcija koje imaju ulogu prozora. Hermitski S-metod je definisan za slučaj jednodimenzionih i dvodimenzionih signala.

U posljednjem dijelu rada su predloženi i prezentovani neki aspekti primjene vremensko-frekvencijske analize. Razmatrana je primjena u analizi radarskih signala i to: analiza i klasifikacija kretanja čovjeka na osnovu vremensko-frekvencijske analize radarskih signala, kao i poboljšanje rezolucije radarskih slika. Zatim je predložena generalizovana watermarking procedura u vremensko-frekvencijskom domenu. Na kraju je razmatrana primjena vremensko-frekvencijskih distribucija za analizu biomedicinskih signala gutanja.

Prvo poglavlje sadrži kratak uvod u vremensko-frekvencijsku analizu signala i pregled nekih osnovnih distribucija. U drugom poglavlju je predložena generalizovana forma vremensko-frekvencijskih distribucija sa kompleksnim argumentom. U trećem poglavlju predložena je klasa distribucija sa kompleksnim argumentom u ambiguity domenu. Četvrto poglavlje je posvećeno vremensko-frekvencijskim distribucijama sa višestrukim prozorima i u okviru njega je predložen jednodimenzioni i dvodimenzioni Hermitski S-metod. U petom poglavlju predloženi su neki interesantni aspekti primjene vremensko-frekvencijskih distribucija. Primjenom Hermitskog S-metoda na radarske signale kretanja čovjeka, definisana je procedura za analizu i klasifikaciju tri načina



kretanja: kretanje bez pomjeranja ruku, kretanje sa pomjeranjem jedne i sa pomjeranjem obje ruke. Izoštavanje radarske slike mete za slučaj neuniformnog kretanja, je obezbijeđeno korišćenjem dvodimenzione forme Hermitskog S-metoda. U poređenju sa tehnikama dobijanja radarskih slika, zasnovanim na periodogramu i standardnom S-metodu, postignuti rezultati za Hermitski S-metod pokazuju poboljšanje kvaliteta i rezolucije radarskih slika. U cilju zaštite digitalnih multimedijalnih podataka, definisana je generalizovana watermarking procedura zasnovana na multidimenzionoj vremensko-frekvencijskoj analizi. Za razliku od većine postojećih watermarking procedura, predloženi pristup ne zavisi od vrste i dimenzionalnosti multimedijalnih signala, te se primjenjuje za audio/govorne signale i sliku. Realizacija u vremensko-frekvencijskom domenu pruža veći stepen fleksibilnosti u pogledu postizanja kompromisa između neperceptibilnosti watermarka i njegove robustnosti na atake (filtriranje, kompresiju, šumove, itd). Vremensko-frekvencijska analiza je efikasno primijenjena i za klasifikaciju biomedicinskih signala gutanja. Naime, predložena procedura klasifikacije, zasnovana na kombinaciji vremensko-frekvencijske analize i Hermitskog projekcionog metoda, obezbjeđuje jasno razlikovanje regiona gutanja od regiona sa vibracijama drugačijeg tipa (glasovne vibracije, mikrofoniju, šumove i sl.), koje postoje u okviru signala registrovanog senzorom za akcelerometriju gutanja.

# GLAVA 1

## VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA SIGNALA

Tokom dvije protekle decenije, značajna pažnja istraživača je bila usmjerena na proučavanje i obradu signala sa vremenski promjenljivim spektralnim sadržajem. U ovu klasu spadaju govorni signali, biomedicinski i radarski signali, signali iz domena sonara, seizmičke analize i slično. Vremenski oblik signala pruža informaciju o trajanju i obliku signala. Sa druge strane, frekvencijske karakteristike signala dobijaju se primjenom Fourier-ove transformacije, koja obezbjeđuje preslikavanje signala iz vremenskog u frekvencijski domen. Fourier-ova transformacija i njena inverzna forma definišu se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Fourier-ova transformacija ili spektar pruža informacije o frekvencijama koje su sadržane u signalu, kao i o odgovarajućim amplitudama i fazama, ali ne i o trenucima pojavljivanja frekvencijskih komponenti. Dakle, spektar signala ne pruža nikakvu informaciju o prostiranju frekventnog sadržaja u vremenu. Informacija o vremenskim trenucima u kojima se pojavljuju spektralne komponente sadržana je zapravo u fazi Fourier-ove transformacije. Ukoliko se faza signala  $s(t)$  može predstaviti funkcijom  $\phi(t)$ , tada se trenutna frekvencija  $\omega(t)$ , može definisati kao prvi izvod faze [1]:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}. \tag{1.2}$$



Ovdje se podrazumijeva da je  $s(t)$  signal sa kompleksnim vrijednostima. U slučaju realnih signala potrebno je koristiti njihovu analitičku formu, dobijenu analitičkim proširenjem realnog signala  $s(t)$ , [2]:  $s_a(t) = s(t) + jHT(s(t))$ , gdje je  $HT(s(t))$  Hilbert-ova transformacija signala  $s(t)$ . Slično, ukoliko je  $\theta(t)$  faza Fourier-ove transformacije analitičkog signala  $s(t)$ , tada se njegovo grupno kašnjenje može definisati kao prvi izvod funkcije  $\theta(t)$  [2]:

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df}. \quad (1.3)$$

Međutim, za pomenutu klasu signala trenutna frekvencija i grupno kašnjenje ne mogu adekvatno da opišu lokalizaciju spektralnih komponenti u vremenu. Naime, trenutna frekvencija kao funkcija vremena, podrazumijeva da u nekom vremenskom trenutku postoji samo jedna frekvencijska komponenta. Slično važi i za grupno kašnjenje, gdje se podrazumijeva da je određena frekvencijska komponenta skoncentrisana oko jednog vremenskog trenutka. Stoga, u slučaju multikomponentnih signala, kod kojih u istom vremenskom trenutku postoje komponente na više različitih frekvencija, ili se ista frekvencija pojavljuje u više različitih vremenskih trenutaka, rezultati dobijeni korišćenjem koncepta trenutne frekvencije i grupnog kašnjenja ne pružaju jasne i dovoljne informacije.

Da bi se odgovorilo zahtjevima u pogledu analize nestacionarnih signala, uvedeno je združeno vremensko-frekvencijsko predstavljanje, koje jednodimenzioni signal preslikava u dvodimenzionu funkciju vremena i frekvencije [1]-[5]. Kombinujući vremenski i frekvencijski domen, vremensko-frekvencijska analiza nastoji da obezbijedi što jasniju sliku o vremenskoj lokalizaciji spektralnih komponenti signala.

U zavisnosti od vrste signala, razvijen je čitav niz vremensko-frekvencijskih transformacija [1]-[3]. Gotovo da je nemoguće ostvariti idealno vremensko-frekvencijsko predstavljanje, koje bi bilo optimalno za bilo koju klasu signala i za bilo koju praktičnu aplikaciju. Vremensko-frekvencijske transformacije signala se mogu klasifikovati u tri kategorije:

- Linearne vremensko-frekvencijske transformacije,
- Kvadratne vremensko-frekvencijske distribucije,
- Vremensko-frekvencijske distribucije višeg reda.

## 1.1 LINEARNE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE TRANSFORMACIJE

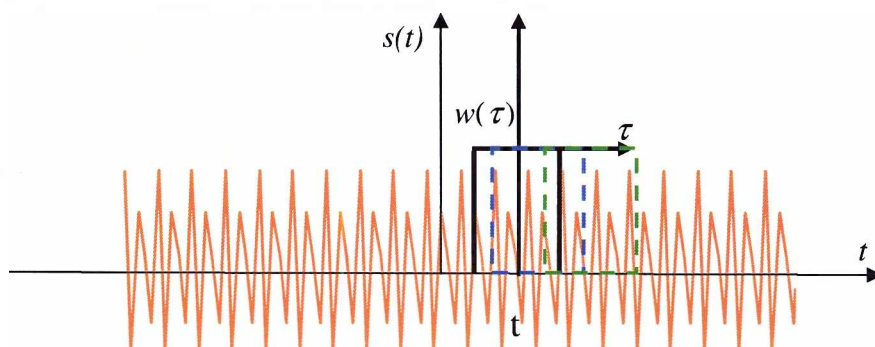
Sve linearne vremensko-frekvencijske transformacije - TFR (time-frequency representation), zadovoljavaju princip linearnosti: ukoliko signal  $s(t)$  predstavlja linearnu kombinaciju više komponenti, tada TFR signala  $s(t)$  predstavlja linearnu kombinaciju TFR svake sastavne komponente [3], [5]:

$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \Rightarrow TFR(t, f) = a_1 TFR_{s_1}(t, f) + a_2 TFR_{s_2}(t, f), \quad (1.4)$$

gdje je  $TFR$  linearna vremensko-frekvencijska transformacija signala, dok su  $TFR_{s_1}$  i  $TFR_{s_2}$  linearne vremensko-frekvencijske transformacije njegovih sastavnih komponenti.

### 1.1.1 Kratkotrajna Fourier-ova Transformacija

Jedna od najznačajnijih linearnih vremensko-frekvencijskih transformacija je kratkotrajna Fourier-ova transformacija (Short-time Fourier Transform, u nastavku teksta STFT). Umjesto da se posmatra Fourier-ova transformacija čitavog signala, uvodi se funkcija prozora  $w(t)$  kojom se ograničava i izdvaja samo jedan dio signala oko posmatranog vremenskog trenutka  $t$ . Primjenom Fourier-ove transformacije na dio signala obuhvaćen prozorom, dobija se spektar ograničenog dijela signala. Pomjeranjem prozora duž čitavog signala, za svaki vremenski trenutak, dobija se STFT [2], [3]. Na Slici 1.1 ilustrovan je princip korišćenja funkcije prozora pri proračunu STFT.



Slika 1.1. Ilustracija primjene funkcije prozora za analizu nestacionarnih signala

Dakle, STFT se može definisati na sljedeći način:

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.5)$$

Množenjem signala sa funkcijom prozora relativno male širine, uzimaju se u obzir samo komponente u okolini posmatranog vremenskog trenutka  $t$ . STFT zapravo predstavlja lokalni spektar signala u okolini posmatranog trenutka.

STFT posjeduje sljedeće osobine [2], [3]:

- *Linearnost* – STFT linearne kombinacije signala jednaka je linearnoj kombinaciji STFT računate zasebno za svaku sastavnu komponentu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [as_1(t + \tau) + bs_2(t + \tau)] w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = a \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + b \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

- *Vremensko pomjeranje* – pomjeranje signala duž vremenske ose odražava se na pomjeranje STFT duž iste ose na sljedeći način:

$$z(t) = s(t - t_0) \Rightarrow STFT_z(t, \omega) = STFT_s(t - t_0, \omega) e^{j\omega t_0}.$$

- *Frekvencijsko pomjeranje* – množenje signala eksponencijalnom funkcijom odražava se na pomjeraj po frekvenciji u okviru STFT:

$$z(t) = s(t) e^{j\omega_0 t} \Rightarrow STFT_z(t, \omega) = STFT_s(t, \omega - \omega_0).$$

- *Osobina skaliranja*

$$z(t) = s(\alpha t) \Rightarrow STFT_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha(t + \tau)) w(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} STFT_s\left(\alpha t, \frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Signal  $s(t)$  je moguće dobiti na osnovu njegove STFT. Rekonstruisani signal dobija se integracijom STFT duž vremenske promjenljive i primjenom inverzne Fourier-ove transformacije. Umjesto funkcije prozora  $w(t)$  korišćenog za analizu, uvodi se nova funkcija prozora  $h(t)$  za sintezu. Izbor funkcije prozora za sintezu vrši se u skladu sa uslovom koji mora biti zadovoljen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)w^*(t)dt = 1.$$

Za datu funkciju prozora  $w(t)$  postoji beskonačno mnogo funkcija  $h(t)$  koje zadovoljavaju navedeni uslov, uključujući  $h(t)=w(t)$ , kao najjednostavniji izbor. Nakon izbora funkcije prozora, rekonstruisani signal  $s(t)$  može se dobiti na osnovu relacije:

$$s(t) = \int \int_{\tau \theta} STFT(\tau, \theta) h(t - \tau) e^{j\theta t} d\tau d\theta. \quad (1.6)$$

### Diskretna forma STFT

U praktičnim primjenama STFT, neophodno je izvršiti diskretizaciju promjenljivih. Ukoliko je signal  $s(t)$  odabran sa korakom  $\Delta t$ :  $s(n) = s(n\Delta t)\Delta t$ , i normalizujući frekvenciju sa  $\Delta t$ , dobija se vremenski diskretna forma STFT [2]:

$$STFT(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)s(n+m)e^{-jm\omega}. \quad (1.7)$$

Pri tome važi da je  $STFT(n, \omega)$  periodična po frekvenciji sa periodom  $2\pi$ .

Imajući u vidu ograničavanje signala korišćenjem funkcije prozora konačne širine, diskretizacija po frekvenciji se vrši sa brojem odbiraka koji je veći ili jednak širini prozora. Ukoliko se pretpostavi da je broj diskretnih odbiraka po frekvenciji jednak širini prozora, diskretna forma STFT dobija se u sljedećem obliku:

$$STFT(n, k) = STFT(n, \omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N_s} k} = \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2-1} s(n+m)w(m)e^{-j2\pi mk/N_s}. \quad (1.8)$$

### Vremensko-frekvencijska rezolucija

Imajući u vidu da STFT u vremenskom trenutku  $t$  predstavlja spektar dijela signala ograničenog funkcijom prozora može se zaključiti da je za dobru vremensku rezoluciju STFT potreban prozor male širine, odnosno kratkog trajanja. Sa druge strane, STFT se može posmatrati kao konvolucija signala i funkcije prozora u frekvencijskom domenu. Dobra frekvencijska rezolucija podrazumijeva konvoluciju sa uskim prozorom u frekvencijskom domenu (širok prozor u vremenskom domenu). Međutim, princip neodređenosti onemogućava postojanje prozora sa proizvoljno kratkim trajanjem i istovremeno, proizvoljno malom širinom u frekvencijskom domenu.

Ukoliko se pretpostavi da su prozor ili signal beskonačnog trajanja, moguće je definisati mjeru trajanja prozora  $M_T^2$  u vremenskom domenu kao i mjeru trajanja prozora  $M_W^2$  u frekventnom domenu, [2]:

$$M_T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |w(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)|^2 d\tau}, \quad M_W^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |W(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.9)$$

gdje je  $W(\omega)$  Fourier-ova transformacija prozora  $w(t)$ . Korišćenjem odgovarajućih mjera trajanja, princip neodređenosti se može definisati za sve signale koji zadovoljavaju  $s(t)\sqrt{t} \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \pm\infty$ , kao:

$$M_T M_W \geq \frac{1}{2}. \quad (1.10)$$

Dakle, združena vremensko-frekvencijska rezolucija je ograničena činjenicom da poboljšanje vremenske rezolucije uzrokuje istovremeno slabljenje frekvencijske rezolucije, i obratno.

## 1.2 KVADRATNE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE

Kvadratne vremensko-frekvencijske distribucije se mogu koristiti za analizu energetske distribucije signala [2]-[5]. Energetska vremensko-frekvencijska distribucija kombinuje koncepte trenutne snage  $p_s(t) = |s(t)|^2$  i spektralne gustine energije  $P_s(\omega) = |S(\omega)|^2$ . U idealnom slučaju energetske vremensko-frekvencijske distribucije zadovoljavaju marginalna svojstva [2], [5]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFR(t, \omega) d\omega &= P_s(t) = |s(t)|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} TFR(t, \omega) dt &= p_s(\omega) = |S(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdje je sa  $TFR$  označena vremensko-frekvencijska transformacija signala. Dakle, jednodimenzione gustine energije signala  $p_s(t)$  i  $P_s(\omega)$  u vremenskom i frekvencijskom domenu, respektivno, su marginalne gustine vremensko-frekvencijske distribucije  $TFR(t, \omega)$ . Shodno tome, energija signala se može dobiti integracijom  $TFR$  po cjelokupnom vremensko-frekvencijskom domenu [2]:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TFR(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.12)$$

### 1.2.1 Spektrogram

Spektrogram predstavlja energetska verziju STFT i definiše se na sljedeći način [1]-[5]:

$$SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2. \quad (1.13)$$

Spektrogram je najčešće korišćena vremensko-frekvencijska distribucija za analizu nestacionarnih signala. Spektrogram sume dva signala  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$  nije jednak

prosto sumi spektrograma pojedinačnih signala. Dakle, svojstvo linearnosti STFT je narušeno kvadratnom strukturom spektrograma.

Sve kvadratne vremensko-frekvencijske distribucije zadovoljavaju kvadratni princip superpozicije:

$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \Rightarrow$$

$$TFR_s(t, \omega) = |a_1|^2 TFR_{s_1}(t, \omega) + |a_2|^2 TFR_{s_2}(t, \omega) + a_1 a_2^* TFR_{s_1 s_2}(t, \omega) + a_2 a_1^* TFR_{s_2 s_1}(t, \omega),$$

(1.14)

gdje su sa  $TFR_{s_1}(t, \omega)$  i  $TFR_{s_2}(t, \omega)$  označeni auto-članovi vremensko-frekvencijske distribucije signala, dok su sa  $TFR_{s_1 s_2}(t, \omega)$  i  $TFR_{s_2 s_1}(t, \omega)$ , označeni tzv. kros-članovi koji unose nelinearnost. Ukoliko se ovaj princip generalizuje za multikomponentne signale zapisane u obliku:

$$s(t) = \sum_{p=1}^P a_p s_p(t),$$

gdje je  $P$  broj komponenti signala, mogu se izvesti sljedeći zaključci:

- svakoj komponenti signala  $a_p s_p(t)$  odgovara po jedan auto-član u vremensko-frekvencijskom domenu  $|a_p|^2 TFR_{s_p}(t, \omega)$  ;
- svake dvije komponente  $a_p s_p(t)$  i  $a_q s_q(t)$  formiraju kros-član u vremensko-frekvencijskoj ravni u obliku:  $a_p a_q^* TFR_{s_p s_q}(t, \omega) + a_q a_p^* TFR_{s_q s_p}(t, \omega)$  .

Dakle, za signal sa  $P$  komponenti, vremensko-frekvencijska distribucija sadržaće  $P$  auto-članova i  $P \cdot (P-1)/2$  kros-članova. Broj kros-članova raste kvadratno sa porastom broja komponenti signala, što je otežavajuća okolnost pri analizi multikomponentnih signala. Kros-članovi spektrograma su oscilatorne strukture, koje su prisutne samo u onim djelovima vremensko-frekvencijske ravni gdje se odgovarajuće auto-komponente preklapaju. Naime, ukoliko se komponente ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni tada važi da je:

$$STFT_{s_p}(t, \omega)STFT_{s_q}^*(t, \omega) = 0 \quad \text{za } p \neq q. \quad (1.15)$$

U tom slučaju, može se reći da je spektrogram multikomponentnog signala jednak sumi spektrograma svake pojedinačne komponente, odnosno:

$$SPEC_s(t, \omega) = |STFT_s(t, \omega)|^2 = \sum_{p=1}^P |STFT_{s_p}(t, \omega)|^2. \quad (1.16)$$

U suprotnom, ukoliko postoje komponente koje se preklapaju u vremensko-frekvencijskom domenu, važi da je:

$$SPEC_s(t, \omega) = \sum_{p=1}^P |STFT_{s_p}(t, \omega)|^2 + \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P STFT_{s_p}(t, \omega)STFT_{s_q}^*(t, \omega), \quad (1.17)$$

gdje drugi član u izrazu predstavlja kros-članove. Pri predstavljanju multikomponentnih signala, čije se komponente ne preklapaju, odsustvo kros-članova omogućava korišćenje spektrograma za efikasnu analizu ovakvih signala. Sa druge strane, imajući u vidu da je spektrogram zasnovan na STFT, njegov osnovni nedostatak je, u velikom broju slučajeva, loša vremensko-frekvencijska rezolucija. Generalno govoreći dobru vremensko-frekvencijsku koncentraciju auto-članova i izostanak članova interferencije je gotovo nemoguće postići istovremeno, tako da je među njima potrebno uspostaviti odgovarajući kompromis.

### 1.2.2 Wigner-ova distribucija

Među najznačajnijim i najviše izučavanim kvadratnim vremensko-frekvencijskim distribucijama izdvaja se Wigner-ova distribucija [4]-[6]. Analiza njenih prednosti i nedostataka dovela je do značajnog napretka na polju vremensko-frekvencijske analize signala. Wigner-ova distribucija se definiše na sljedeći način [4]:

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right)s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau. \quad (1.18)$$

Na osnovu relacije (1.18) može se zaključiti da se pri računanju Wigner-ove distribucije za određeni vremenski trenutak dodaju članovi formirani od proizvoda



signala pomjerenog za isti iznos ulijevo i udesno. Dakle, za slučaj signala ograničenog trajanja  $t \in (t_1, t_2)$ , Wigner-ova distribucija je jednaka nuli sve do trenutka u kome se javlja signal. Slično se može zaključiti i za trenutak  $t_2$ , odnosno Wigner-ova distribucija će biti jednaka nuli po završetku signala. Može se zaključiti da je  $WD(t, \omega) \neq 0$  za  $t \in (t_1, t_2)$ . Isto važi i u frekvencijskom domenu: ukoliko je signal ograničenog opsega, Wigner-ova distribucija će biti jednaka nuli za sve frekvencije koje ne pripadaju tom opsegu.

### Osobine Wigner-ove distribucije

Wigner-ova distribucija je realna, odnosno važi da je:

$$WD^*(t, \omega) = WD(t, \omega). \quad (1.19)$$

Osobina vremenskog i frekventnog pomjeranja:

Za signal  $z(t) = s(t - t_0)$  važi da je  $WD_z(t, \omega) = WD_s(t - t_0, \omega)$ .

Ukoliko je  $z(t) = s(t)e^{j\omega_0 t}$  tada je  $WD_z(t, \omega) = WD_s(t, \omega - \omega_0)$ . (1.20)

*Marginalna svojstva* – integrali Wigner-ove distribucije po frekvenciji i vremenu, odgovaraju trenutnoj snazi signala i njegovoj spektralnoj energiji, respektivno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) d\omega &= |s(t)|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt &= |S(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

*Trenutna frekvencija*  $\omega_i$  i *grupno kašnjenje*  $t_g$  definišu se na osnovu Wigner-ove distribucije kao:

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega WD(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) d\omega}, \quad t_g(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t WD(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt}. \quad (1.22)$$

*Moyal-ovo svojstvo* – Važan dio vremensko-frekvencijske analize signala predstavlja estimacija i detekcija signala. Osobina koju treba da zadovolji Wigner-ova distribucija da

bi bila optimalna u kontekstu detekcije signala je unitarnost i definisana je Moyal-ovom formulom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WD_x(t, \omega) WD_s(t, \omega) dt d\omega = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s^*(t) dt \right|, \quad (1.23)$$

gdje su  $x(t)$  i  $s(t)$  analitički signali.

*Svojstvo invertibilnosti* – Ovo svojstvo odnosi se na mogućnost dobijanja originalnog signala iz njegove vremensko-frekvencijske distribucije. Za slučaj Wigner-ove distribucije svojstvo invertibilnosti zapisuje se relacijom :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} WD\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{j\omega t} d\omega = s(t) s^*(0). \quad (1.24)$$

Dakle, signal može biti jedinstveno rekonstruisan na osnovu Wigner-ove distribucije, sa tačnošću do faze, odnosno do kompleksnog faktora  $s^*(0)$ .

### ***Diskretna Wigner-ova distribucija***

Osnovna diskretna forma dobija se primjenom teoreme odabiranja [2], [7]. Wigner-ova distribucija signala sa ograničenim opsegom se može dobiti na osnovu odbiraka signala:

$$WD(t, \omega) = \frac{T}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(t+mT) s^*(t-mT) e^{-2j\omega mT}, \quad (1.25)$$

gdje je  $1/T$  frekvencija odabiranja, koja mora biti takva da je  $T \leq \pi/2\omega_{max}$ , pri čemu je  $\omega_{max}$  maksimalna frekvencija signala. Dakle, frekvencija odabiranja mora zadovoljavati uslov:  $\omega_s \geq 4\omega_{max}$ . Za diskretni signal  $s(n)$  i  $T=1$ , relacija (1.25) dobija sljedeći oblik:

$$WD(n, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n+m) s^*(n-m) e^{-2j\theta k}. \quad (1.26)$$

Da bi se izbjegla pojava aliasing efekta, kao i da bi se zadržale neke od značajnih karakteristika Wigner-ove distribucije, u realizaciji diskretne forme podrazumijeva se

upotreba analitičkog i neperiodičnog signala [7]. Diskretna Wigner-ova distribucija može biti izražena kao:

$$WD_z\left(\frac{n}{2f_s}, \frac{kf_s}{2N}\right) = e^{j(\pi/N)kn} \sum_{m=l_1}^{l_2} z[m]z^*[n-m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad (1.27)$$

gdje je  $z(n)$  analitički signal,  $f_s$  je frekvencija odabiranja signala,  $N$  je broj odbiraka signala, dok je  $l_1 = \max\{0, n - (N - 1)\}$  i  $l_2 = \min\{n, N - 1\}$ .

### **Wignerova distribucija multikomponentnih signala**

Posmatran je slučaj multikomponentnih signala. Ukoliko se signal  $s(t)$  sastoji od  $M$  komponenti:  $s(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t)$ , tada se njegova Wigner-ova distribucija može zapisati u obliku [2]:

$$WD(t, \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \int_{-\tau}^{\tau} s_p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s_q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.28)$$

Dakle, za slučaj multikomponentnih signala Wigner-ova distribucija osim auto-članova:

$$WD_a(t, \omega) = \sum_{p=1}^P \int_{-\tau}^{\tau} s_p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s_p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

sadrži i znatan broj kros-članova:  $WD_k(t, \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^P \int_{-\tau}^{\tau} s_p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s_q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau.$

Pri interpretaciji Wigner-ove distribucije multikomponentnih signala, kao i signala sa nelinearnom frekvencijskom modulacijom, mora se uzeti u razmatranje način formiranja i prostorni raspored kros-članova [8]. Za razliku od spektrograma, kros-članovi Wigner-ove distribucije neće biti jednaki nuli čak ni u slučaju kada se komponente ne preklapaju u vremensko-frekvencijskom planu. Ovi članovi osciluju u pravcu ortogonalnom na liniju koja spaja dvije tačke koje interferiraju, pri čemu oscilacije rastu sa povećanjem rastojanja među tačkama u vremensko-frekvencijskoj ravni. Sa praktičnog aspekta kros-članovi predstavljaju značajan nedostatak Wigner-ove distribucije, jer otežavaju vizuelnu interpretaciju karakteristika multikomponentnog

signala. Međutim, sa druge strane, kvadratni kros-članovi su prirodna pojava u funkcijama gustine energije i korelacije. U većini slučajeva oscilatorni i djelimično negativni kros-članovi moraju biti prisutni da bi bile zadovoljene marginalne osobine, osobina unitarnosti ili Moyal-ova formula [8]-[11].

### 1.2.3 Pseudo Wigner-ova distribucija

Definicija Wigner-ove distribucije date relacijom (1.18) zahtijeva poznavanje proizvoda  $s\left(t+\frac{\tau}{2}\right)s^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$  za  $\tau \in (-\infty, \infty)$ , što predstavlja problem u praktičnim realizacijama. Iz tog razloga uvodi se funkcija prozora  $w(\tau)$ , konačne dužine, i definiše se pseudo forma Wigner-ove distribucije [2]:

$$PWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t+\frac{\tau}{2}\right)s^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)w(\tau/2)w^*(-\tau/2)e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad (1.29)$$

Diskretna forma Pseudo Wigner-ove distribucije se definiše kao:

$$PWD(n, k) = 2 \sum_{m=-N_s}^{N_s-1} s(n+m)s^*(n-m)w(m)w^*(-m)e^{-j4\pi mk/N_s}. \quad (1.30)$$

### 1.2.4 S-metod

Da bi se prevazišli nedostaci Wigner-ove distribucije definisane su nove distribucije koje omogućavaju redukovanje kros-članova [2], [15]. Jedan od najznačajnijih pristupa s aspekta predstavljanja multikomponentnih signala je S-metod [12]. S-metod je baziran na ideji očuvanja koncentracije auto-članova Wigner-ove distribucije, uz značajnu redukciju kros-članova, što je značajna prednost u odnosu na ostale distribucije sa redukovanim kros-članovima. Ovaj metod je izveden na osnovu veze između STFT i pseudo Wigner-ove distribucije. Naime, pseudo Wigner-ova distribucija se može izraziti u sljedećem obliku:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega + \theta)STFT^*(t, \omega - \theta)d\theta. \quad (1.31)$$

Uvođenjem prozora  $P(\theta)$  konačnog trajanja u frekventnom domenu, dobija se S-metod [12]:

$$SM(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) STFT(\omega + \theta) STFT^*(\omega - \theta) d\theta. \quad (1.32)$$

Ova relacija definiše vrlo efikasan metod u pogledu zahtjevnosti proračuna. U cilju izbora optimalnog prozora  $P(\theta)$  posmatraju se dva specijalna slučaja:

1. Ukoliko je  $P(\theta) = \pi\delta(\theta)$ , S-metod se svodi na spektrogram.
2. Ukoliko je  $P(\theta) = 1$ , S-metod se svodi na pseudo Wigner-ovu distribuciju.

Ova dva specijalna slučaja definišu S-metod kao distribuciju koja objedinjuje dobre osobine spektrograma i Wigner-ove distribucije. Spektrogram ne sadrži kros-članove ukoliko se komponente signala ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, dok Wigner-ova distribucija obiluje kros-članovima. S druge strane spektrogram ima nedostatak u pogledu upotrebe prozora, tj. postizanja dobre vremensko-frekvencijske rezolucije, dok je taj problem znatno manje izražen u slučaju Wigner-ove distribucije. S-metod omogućava predstavljanje multikomponentnih signala, tako da je distribucija svake komponente Wigner-ova distribucija, uz mogućnost redukovanja kros-članova.

Za potrebe praktičnih realizacija uvodi se diskretna forma S-metoda:

$$\begin{aligned} SM(n, k) &= \sum_{i=-L}^L P(i) STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) \\ &= |STFT(n, k)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{i=1}^L P(i) STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) \right], \end{aligned} \quad (1.33)$$

pri čemu je  $L$  širina prozora. Naglasimo da se podešavanjem vrijednosti parametra  $L$ , postiže poboljšanje koncentracije auto-članova, uz istovremeno redukovanje kros-članova.

Na osnovu relacije (1.33) se može zaključiti da članovi unutar sume poboljšavaju kvalitet spektrograma na račun kvaliteta Wigner-ove distribucije. Stoga se S-metod koristi kao optimalna distribucija za analizu govornih i ostalih multikomponentnih signala [13], [14].

### 1.3 COHEN-OVA KLASA KVADRATNIH VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA

Cohen-ova klasa vremensko-frekvencijskih distribucija sadrži kvadratne distribucije sa redukovanim kros-članovima, koje mogu da zadovoljavaju marginalne uslove. Distribucije iz ove klase su okarakterisane dvodimenzionom funkcijom jezgra  $c(\theta, \tau)$ , koja određuje njene osobine, [15]-[24]. Wigner-ova distribucija predstavlja osnovu za definisanje distribucija iz Cohen-ove klase. Polazeći od dvodimenzionalne transformacije Wigner-ove distribucije poznate kao ambiguity funkcija:

$$A(\theta, \tau) = FT_{t, \omega}\{WD(t, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{-j\theta t} dt, \quad (1.34)$$

svaka distribucija iz Cohen-ove klase se može definisati na osnovu funkcije  $A_g(\theta, \tau) = c(\theta, \tau)A(\theta, \tau)$ . Drugim riječima, inverzna dvodimenzionalna Fourier-ova transformacija funkcije  $A_g(\theta, \tau)$  predstavlja Cohen-ovu klasu kvadratnih distribucija:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) A(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\omega \tau} d\tau d\theta. \quad (1.35)$$

Primijetimo da se u slučaju  $c(\theta, \tau) = 1$ , dobija Wigner-ova distribucija. Korišćenje funkcija jezgra za definisanje vremensko-frekvencijskih distribucija ima nekoliko prednosti. Osobine koje zadovoljava distribucija zavisiće od osobina korišćenog jezgra. Na primjer, distribucija će zadovoljavati marginalne uslove ukoliko jezgro zadovoljava sljedeći uslov:  $c(0, \tau) = c(\theta, 0) = 1$ . Shodno tome, u okviru Cohen-ove klase je mnogo lakše generisati distribuciju koja treba da zadovolji određene uslove. Neke od osobina vremensko-frekvencijskih distribucija i odgovarajući uslovi koji treba da važe za jezgra dati su u Tabeli 1.1.

TABELA 1.1 OSOBINE DISTRIBUCIJA I ODGOVARAJUĆI USLOVI KOJE JEZGRO TREBA DA ZADOVOLJI

Naziv Osobine	Definicija osobine	Definicija uslova za jezgro
1. Trenutna energija	$\frac{1}{2\pi} \int CD(t, \omega) d\omega =  s(t) ^2$	$c(\theta, 0) = 1$ za $\forall \theta$
2. Snaga spektra	$\int CD(t, \omega) dt =  S(\omega) ^2$	$c(0, \tau) = 1$ za $\forall \tau$
3. Pomjeraj u vremenu	$s_1(t) = s_2(t - T)$ $CD_{s_1}(t, \omega) = CD_{s_2}(t - T, \omega)$	$c(\theta, \tau)$ ne zavisi od $t$
4. Pomjeraj po frekvenciji	$s_1(t) = s_2(t)e^{j\Omega t}$ $CD_{s_1}(t, \omega) = CD_{s_2}(t, \omega - \Omega)$	$c(\theta, \tau)$ ne zavisi od $\omega$
5. Realnost	$CD(t, \omega) = CD^*(t, \omega)$	$c(\theta, \tau) = c^*(-\theta, -\tau)$
6. Grupno kašnjenje	$\frac{\int t CD(t, \omega) dt}{\int CD(t, \omega) dt} = t_{kasnjenja}(\omega)$	$\frac{\partial c(\theta, \tau)}{\partial \theta} \Big _{\theta=0} = 0$ za $\forall \tau$ $c(0, \tau) = 1$ za $\forall \tau$
7. Trenutna frekvencija	$\frac{\int \omega CD(t, \omega) d\omega}{\int CD(t, \omega) d\omega} = \Omega(\omega)$	$\frac{\partial c(\theta, \tau)}{\partial \theta} \Big _{\tau=0} = 0$ za $\forall \theta$ $c(\theta, 0) = 1$ za $\forall \theta$

Alternativno, Cohen-ova klasa distribucija se može definisati na sljedeći način [2], [15], [16]:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) s(u + \tau/2) s^*(u - \tau/2) e^{-j\theta t - j\omega \tau + j\theta u} du d\tau d\theta, \quad (1.36)$$

ili u frekvencijskom domenu kao:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) S(u + \theta/2) S^*(u - \theta/2) e^{-j\theta t - j\omega \tau + j\tau u} du d\tau d\theta. \quad (1.37)$$



Značajna osobina ove klase distribucija je mogućnost redukovanja kros-članova, korišćenjem jezgra nisko-propusnog tipa, [16]-[21]. Ovdje se polazi od pretpostavke da su u ambiguity domenu auto-članovi locirani u blizini koordinatnog početka i osa  $\theta$  i  $\tau$ , dok su kros-članovi dislocirani od osa [15], [19]. Međutim, redukcija kros-članova primjenom funkcije jezgra najčešće uzrokuje opadanje koncentracije auto-članova. Stoga se efikasnost jezgra ogleda u mogućnosti uspostavljanja što boljeg kompromisa između očuvanja koncentracije auto-članova i stepena redukcije kros-članova [15], [20]. Neka od najznačajnijih i najčešće korišćenih jezgara, na osnovu kojih su nastale istoimene distribucije su [16]-[21]:

Choi-Williams-ovo jezgro:  $c(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \sigma}, \sigma > 0,$

Born-Jordan-ovo jezgro:  $c(\theta, \tau) = \frac{\sin(\theta \tau / 2)}{\theta \tau / 2},$

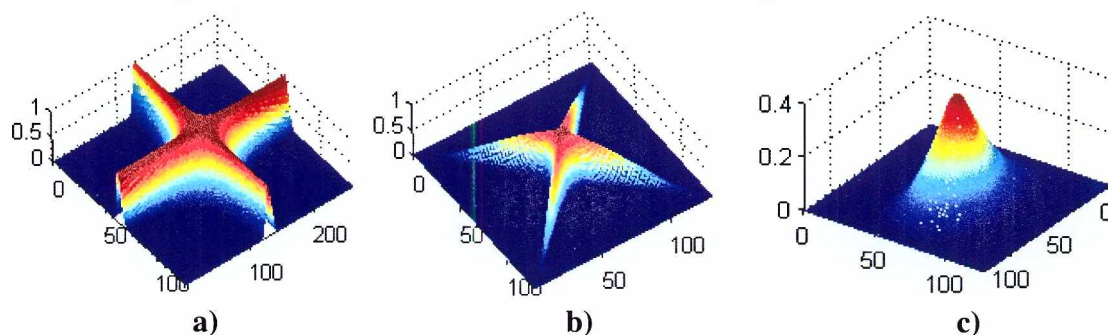
Radijalno Gauss-ovo jezgro:  $c(\theta, \tau) = e^{-(\theta^2 + \tau^2) / 2\sigma(v)},$   
 $v = \arctan(\tau / \theta)$

Gauss-ovo jezgro:  $c(\theta, \tau) = e^{-(\theta^2 / 2\sigma_1 + \tau^2 / 2\sigma_2)},$

Zhao-Atlas Marks-ovo jezgro:  $c(\theta, \tau) = w(\tau) \left| \tau \right| \frac{\sin(\theta \tau / 2)}{\theta \tau / 2},$

Sinc jezgro:  $c(\theta, \tau) = \text{rect}(\theta \tau, \alpha).$

Ilustracija Choi-Williams-ovog, Radijalnog Gauss-ovog i običnog Gauss-ovog jezgra data je na sljedećoj slici.



Slika 1.2 a) Choi-Williams-ovo jezgro, b) Radijalno Gauss-ovo jezgro, c) Gauss-ovo jezgro



## 1.4 VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE SA KOMPLEKSNIM VREMENSKIM ARGUMENTOM

Distribucije sa kompleksnim vremenskim argumentom uvedene su u cilju povećanja koncentracije za signale sa brzo promjenljivom trenutnom frekvencijom [25]-[30]. Prilikom definisanja ovih distribucija polazi se od pretpostavke da se povećavanjem reda distribucije, mogu značajno redukovati svi viši izvodi faze [25]. Napomenimo da viši izvodi faze dovode do rasipanja koncentracije oko trenutne frekvencije tj. prvog izvoda faze, te se njihovom redukcijom smanjuje faktor rasipanja i time poboljšava koncentracija u vremensko-frekvencijskom domenu.

Za frekvencijski modulisan signal  $x(t)=re^{j\phi(t)}$ , opšti oblik vremensko-frekvencijske distribucije višeg reda ( $q$ ) se može zapisati u obliku:

$$TFD(t, \omega) = 2\pi r^{2q} \delta(\omega - \dot{\phi}(t)) *_{\omega} W(\omega) *_{\omega} FT\{e^{jQ(t, \tau)}\}, \quad (1.38)$$

gdje  $Q(t, \tau)$  predstavlja faktor rasipanja distribucije oko trenutne frekvencije,  $W(\omega)$  je Fourier-ova transformacija prozora, dok je  $q$  konstanta. U zavisnosti od prisustva viših izvoda faze u okviru faktora  $Q(t, \tau)$  distribucija će obezbjeđivati manje ili više koncentrisano predstavljanje trenutne frekvencije. Osnovna forma vremensko-frekvencijske distribucije višeg reda sa kompleksnim vremenskim argumentom definisana je na sljedeći način [25], [26]:

$$CTD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{4}) x^*(t - \frac{\tau}{4}) x^{-j}(t + j\frac{\tau}{4}) x^j(t - j\frac{\tau}{4}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.39)$$

Faktor rasipanja distribucije četvrtog reda sadrži tek peti izvod faze signala:

$$Q(t, \tau) = \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^4 5!} + \phi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{4^8 9!} + \dots \quad (1.40)$$

Svi članovi u okviru faktora  $Q(t, \tau)$  su značajno redukovani u odnosu na Wigner-ovu distribuciju, koja sadrži sve neparne izvode faze:

$$Q(t, \tau) = \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \phi^{(7)}(t) \frac{\tau^7}{2^6 7!} \dots$$

Navedena distribucija zadovoljava niz veoma važnih osobina, kao što su [25], [26]:

1. Realna je za sve signale koji se mogu zapisati kao  $x(t) = re^{j\phi(t)}$ .
2. Marginalni uslov (trenutna energija):  $\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} CTD(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2$ .
3. Energetski uslov:  $\frac{1}{2\pi} \int_t \int_{\omega} CTD(t, \omega) dt d\omega = \int_t |x(t)|^2 dt = E_x$ .
4. Ukoliko je  $CTD(t, \omega)$  distribucija signala  $x(t)$ , tada je  $CTD(t-T, \omega)$  distribucija za  $x(t-T)$ .
5. Ukoliko je trajanje signala  $x(t)$  ograničeno na vremenski interval  $|x(t)| \leq T$ , tada je  $CTD(t, \omega)$  takođe ograničena na isti vremenski interval.
6. Ako je  $CTD(t, \omega)$  distribucija signala  $x(t)$ , tada je  $CTD(t, \omega - \omega_0)$  distribucija signala  $x(t)e^{j\omega_0 t}$ .

Vrijednosti signala sa kompleksnim vremenskim argumentom  $x(t+j\tau)$  se dobijaju računanjem analitičkog proširenja signala sa realnim argumentom  $x(t)$  na sljedeći način:

$$x(t+j\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-\tau\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.41)$$

gdje je  $X(\omega)$  Fourier-ov transformacija, odnosno spektar signala  $x(t)$ .

Distribucija četvrtog reda sa kompleksnim argumentom može se predstaviti i u formi:

$$CTD(t, \omega) = WD(t, \omega) *_{\omega} FT\{c(t, \tau)\}, \quad (1.42)$$

gdje  $c(t, \tau)$  povećava koncentraciju i možemo je nazvati koncentraciona funkcija. Ona je definisana u sljedećem obliku:

$$c(t, \tau) = x^{-j}(t + j\frac{\tau}{4}) x^j(t - j\frac{\tau}{4}) = e^{j \ln |x(t - j\frac{\tau}{4}) / x(t + j\frac{\tau}{4})|}. \quad (1.43)$$

### Realizacija za slučaj multikomponentnih signala

Imajući u vidu relaciju (1.42), te činjenicu da Wigner-ova distribucija za multikomponentne signale posjeduje značajan broj kros-članova, neophodno je izvršiti modifikaciju i u definiciji distribucije sa kompleksnim argumentom [26]. Dakle, da bi se izbjegli kros članovi, umjesto Wigner-ove distribucije se može koristiti S-metod:

$$CTD(t, \omega) = SM(t, \omega) *_{\omega} CF(t, \omega), \quad (1.44)$$

gdje je sa  $SM(t, \omega)$  označen S-metod, dok je korekciona funkcija  $CF(t, \omega)$  u vremensko-frekvencijskom domenu definisana kao [26]:

$$CF(t, \omega) = FT_m \left\{ \sum_{p=1}^P c_p(t, \tau) \right\} = FT \left\{ w(\tau) \sum_{p=1}^P e^{j \ln |x_p(t-j\frac{\tau}{4}) / x_p(t+j\frac{\tau}{4})|} \right\}. \quad (1.45)$$

Svaka komponenta signala  $x_p(t \pm j\frac{\tau}{4})$  se računa korišćenjem iterativne procedure koja se može opisati na sljedeći način:

1. Pozicija  $p$ -te komponente signala dobija se korišćenjem STFT:

$$k_p(t) = \arg \left\{ \max_{\omega} STFT(t, \omega) \right\}.$$

2. Komponenta signala sa kompleksnim argumentom se zatim računa kao:

$$x_p(t \pm j\frac{\tau}{4}) = \int_{-W_p}^{W_p} STFT(t, \omega + k_p(t)) e^{j(\omega + k_p(t))(t \pm j\frac{\tau}{4})} d\omega,$$

i pri tome je pretpostavljeno da se posmatrana komponenta nalazi u regionu:  $[k_p(t) - W_p, k_p(t) + W_p]$ .

3. U nastavku, region  $[k_p(t) - W_p, k_p(t) + W_p]$  se postavlja na vrijednost 0 (nula) i ponavlja se ista procedura kako bi se izdvojila sljedeća komponenta signala. Procedura se ponavlja onoliko puta koliki je očekivani broj komponentata signala.

## GLAVA 2

### **GENERALIZOVANA FORMA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM**

U prethodnom poglavlju dat je pregled nekih od najznačajnijih vremensko-frekvencijskih distribucija i njihovih osobina. Kao jedna od najznačajnijih osobina za predstavljanje signala, ističe se koncentracija u vremensko-frekvencijskom domenu ili tzv. vremensko-frekvencijska rezolucija. Postizanje zadovoljavajuće koncentracije je izazovan i zahtjevan zadatak, naročito kada su u pitanju signali sa visokom nestacionarnošću faze, odnosno trenutne frekvencije. Stoga će u ovom poglavlju biti razmatran pristup koji obezbjeđuje visoko koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije, čak i za slučaj brzih varijacija trenutne frekvencije signala u okviru nekoliko odbiraka [31]. Pristup definisan u [31] je baziran na konceptu diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule. Njime se obezbjeđuje definisanje specifičnih vremensko-frekvencijskih distribucija, proizvoljnog reda, sa kompleksnim argumentom vremena. S tim u vezi, razmatrana su dva načina poboljšanja koncentracije: povećanje broja tačaka prilikom diskretizacije i povećanje broja uzastopnih integracija. Prvo rješenje omogućava definisanje nove generalne forme vremensko-frekvencijskih distribucija sa kompleksnim argumentom koja uključuje postojeće forme, dok drugo rješenje uvodi L-forme distribucija, koje se jednostavno realizuju korišćenjem osnovnog oblika distribucije.

## 2.1 INTERPRETACIJA I POBOLJŠANJE KONCENTRACIJE U VREMENSKO-FREKVENCIJSKOM DOMENU

### 2.1.1. Uticaj diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule na trenutnu frekvenciju signala

Cauchy-jeva integralna formula se često koristi u kompleksnoj analizi. Polazeći od ove formule, svaka holomorfna funkcija  $f(z)$ , definisana na zatvorenom disku  $D=\{z:|z-z_0|\leq r\}$ , može se u potpunosti odrediti na osnovu vrijednosti koje funkcija ima na graničnoj kružnici  $C$  diska  $D$ , na sljedeći način:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z-t} dz. \quad (2.1)$$

Iz relacije (2.1) zaključujemo da se proizvoljni izvod funkcije  $f$  može dobiti integracijom po kružnici  $C$  kao:

$$f^K(t) = \frac{K!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-t)^{K+1}} dz. \quad (2.2)$$

Posmatrajmo signal oblika  $s(t) = re^{j\phi(t)}$ , sa konstantnom amplitudom  $r$  i funkcijom faze  $\phi(t)$ . U cilju estimacije prvog izvoda faze, odnosno trenutne frekvencije  $\phi'(t)$ , pretpostavimo da je kružnica  $C$  centrirana u nekom vremenskom trenutku  $t$ , te da je  $z = t + \tau e^{j\theta}$ . Pri tome  $\tau$  predstavlja poluprečnik kružnice, dok je  $\theta$  ugao koji može imati vrijednosti:  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Na osnovu prethodne relacije, za slučaj kada je  $f(t) = \phi(t)$  i  $K=1$ , trenutna frekvencija se može definisati na sljedeći način:

$$\phi'(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\phi(t + \tau e^{j\theta})}{(\tau e^{j\theta})^2} d(\tau e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^{2\pi} \phi(t + \tau e^{j\theta}) e^{-j\theta} d\theta. \quad (2.3)$$

Primijetimo da smanjivanje poluprečnika kružnice  $\tau$  dijeljenjem sa faktorom  $L$ , ima za posljedicu pojavljivanje višestrukih ( $L$ ) uzastopnih integracija:

$$\phi'(t)\tau = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t + \frac{\tau}{L} e^{j\theta}) e^{-j\theta} d\theta. \quad (2.4)$$

Za primjenu ovih koncepata u vremensko-frekvencijskoj analizi, parametar  $\tau$  je uveden u definiciji vremensko-frekvencijske distribucije, kao parametar relativnog pomjeraja u odnosu na trenutak  $t$ . Skaliranjem parametra  $\tau$  i povećavanjem broja integracija povećava se tačnost estimacije trenutne frekvencije signala. Diskretna forma prethodne relacije se može zapisati u obliku [28]:

$$\phi'(t)\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t + \frac{\tau}{N} e^{j2\pi k/N}) e^{-j2\pi k/N}, \quad (2.5)$$

gdje je  $N$  broj tačaka uzetih za diskretizaciju. Za dovoljno veliko  $N$ , moguće je postići gotovo idealnu koncentraciju oko trenutne frekvencije. Primijetimo dalje da relacija (2.5) predstavlja fazu momenta signala sa kompleksnim argumentom [28]:

$$M(t, \tau) = \prod_{k=0}^{N-1} s^{e^{-j2\pi k/N} (t + \frac{\tau}{N} e^{j2\pi k/N})}. \quad (2.6)$$

Odgovarajuće vremensko-frekvencijske distribucije  $N$ -tog reda se dobijaju primjenom Fourier-ove transformacije na funkciju momenta (2.6).

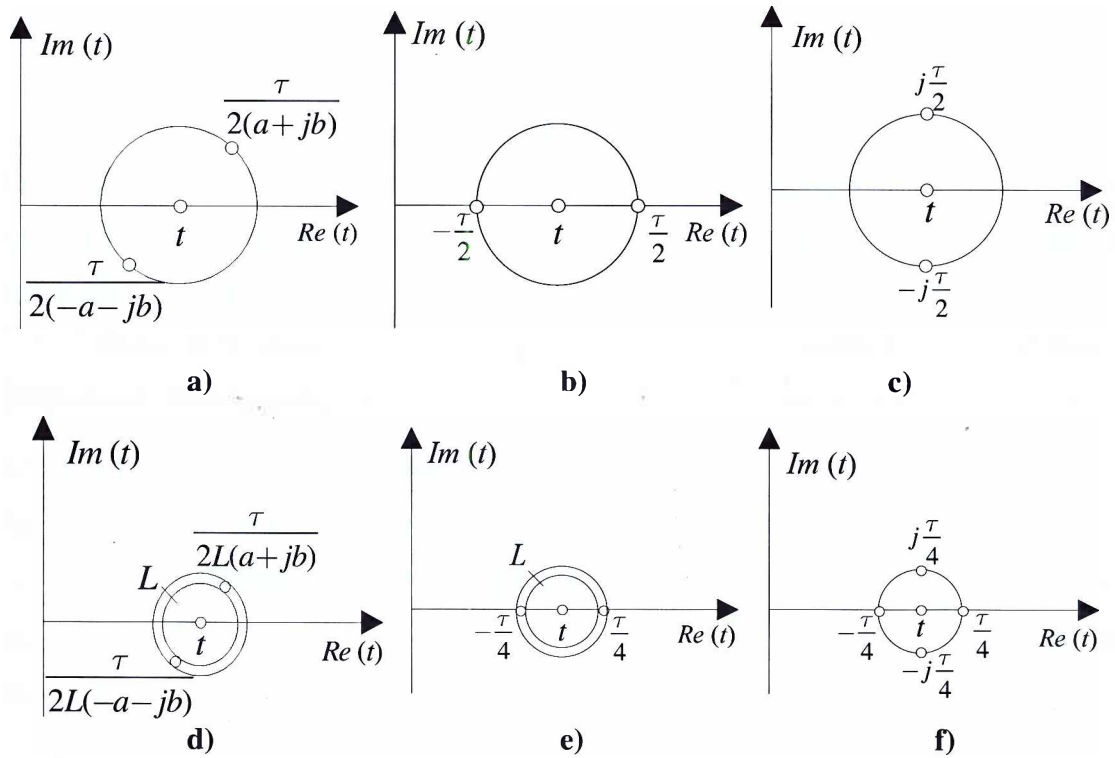
### 2.1.2 Analiza tačnosti procjene trenutne frekvencije signala

U nastavku će biti analizirana tačnost estimacije trenutne frekvencije u zavisnosti od broja i izbora tačaka korišćenih za diskretizaciju. U tu svrhu, posmatrajmo najprije najjednostavniji slučaj dvije tačke na krugu, koje u opštem slučaju mogu biti zapisane kao:  $\tau/(2(a+jb))$  i  $\tau/(2(-a-jb))$ . Tačke su postavljene simetrično u odnosu na vremenski trenutak  $t$ , kao što je ilustrovano na Slici 2.1.a. Za posmatrane tačke se može definisati funkcija momenta signala na sljedeći način [31]:

$$M(t, \tau) = s^{(a+jb)} \left( t + \frac{\tau}{2(a+jb)} \right) s^{(-a-jb)} \left( t + \frac{\tau}{2(-a-jb)} \right). \quad (2.7)$$

Primjenom razvoja u Taylor-ov red, faza momenta  $M(t, \tau)$  se zapisuje u obliku:

$$\phi_M(t, \tau) = \phi'(t)\tau + \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3! (a+jb)^2} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5! (a+jb)^4} + \dots \quad (2.8)$$



**Slika 2.1.** Ilustracija tačaka na kružnici u okolini trenutka  $t$ : a) opšti slučaj dvije tačke, b) tačke na realnoj osi, c) tačke na imaginarnoj osi, d) dvije tačke sa više prolaza (višestruke integracije), e) dvije tačke na realnoj osi za slučaj višestrukih prolaza kroz tačke, f) četiri tačke

U prethodnoj relaciji, svi članovi izuzev  $\phi'(t) \cdot \tau$  (članovi koji sadrže treći  $\phi^{(3)}(t)$ , peti  $\phi^{(5)}(t)$  i više neparne izvode faze) predstavljaju grešku integracije. Ova greška uzrokuje rasipanje koncentracije vremensko-frekvencijske distribucije. Na osnovu funkcije momenta signala, definisane relacijom (2.7), moguće je definisati opštu formu distribucije drugog reda ( $N=2$ ) [31]:

$$GCD_{N=2}(t, \omega)|_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} s^{(a+jb)} \left( t + \frac{\tau}{2(a+jb)} \right) s^{(-a-jb)} \left( t + \frac{\tau}{2(-a-jb)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.9)$$

Očigledno je da ova forma obezbjeđuje idealnu koncentraciju za slučaj linearne trenutne frekvencije. U opštem slučaju, pojedini članovi iz (2.8) mogu proizvesti amplitudске modulacije. Međutim, one se mogu izbjeći korišćenjem funkcije *angle()* kao što će biti razmatrano kasnije u tekstu (*Slučaj 3*). U nastavku ćemo analizirati neke interesantne slučajeve.

*Slučaj 1:* Uzimajući da je  $(a,b)=(1,0)$ , razmatraju se tačke  $\tau/2$  i  $-\tau/2$  (Slika 2.1.b). U ovom slučaju, distribucija (2.9) odgovara formi Wigner-ove distribucije. Primijetimo da je umjesto konjugacije drugog člana signala, prisutan eksponent -1, ali to ne mijenja uticaj na procjenu trenutne frekvencije. Jedina razlika je da korišćenjem eksponenta -1 umjesto konjugacije, distribucija ne zadovoljava marginalne uslove.

*Slučaj 2:* Sa stanovišta procjene trenutne frekvencije, gotovo isti rezultati kao u prethodnom slučaju dobijaju se za  $(a,b)=(0,1)$  (koriste se zapravo tačke  $\pm j\tau/2$ , Slika 2.1.c). Odgovarajuća funkcija momenta je definisana kao:  $M(t, \tau) = s^{-j}(t + j\tau/2) s^j(t - j\tau/2)$ . Faza ove funkcije sadrži iste izvode kao i u slučaju Wigner-ove distribucije.

*Slučaj 3:* Jedna interesantna mogućnost eliminisanja trećeg, sedmog, jedanaestog i viših izvoda se dobija u slučaju  $a=b=\sqrt{2}/2$ . Razvojem funkcije faze u Taylor-ov red dobija se:

$$\phi_M(t, \tau) = \phi'(t)\tau - j\phi^{(3)}(t)\frac{\tau^3}{2^2 3!} - \phi^{(5)}(t)\frac{\tau^5}{2^4 5!} + \dots \quad (2.10)$$

Izvodi faze čiji se red može zapisati u obliku  $4n-1$  ( $n=1,2,\dots$ ) stvaraju članove sa amplitudskom modulacijom. Stoga, da bi se ovi članovi izbjegli, u cilju procjene trenutne frekvencije se može uvesti modifikacija momenta  $M(t, \tau)$  u obliku:  $e^{j\text{angle}(M(t, \tau))}$ .

Nelinearne promjene trenutne frekvencije, mogu prouzrokovati značajan faktor rasipanja koncentracije usljed pojave članova interferencije (viši izvodi faze). Dakle, da bi se poboljšala koncentracija u slučaju nelinearne faze signala, mora se koristiti preciznija integracija. Na osnovu relacije (2.4), ovo se može realizovati integracijom po višestrukim kružnicama sa  $L$  puta manjim poluprečnikom. Ilustracija višestrukih kružnica



kroz dvije proizvoljne tačke data je na Slici 2.1.d. Kao rezultat se dobija L-forma distribucije definisana kao [31]:

$$GCD_{N=2}^L(t, \omega) \Big|_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} s^{L(a+jb)} \left( t + \frac{\tau}{2L(a+jb)} \right) s^{L(-a-jb)} \left( t + \frac{\tau}{2L(-a-jb)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.11)$$

Na primjer, za  $L=2$ , preciznost procjene trenutne frekvencije je poboljšana korišćenjem dvostruke integracije po tačkama sa dvostruko manjim poluprečnikom. Dakle, za tačke  $\frac{\tau}{4}$  i  $-\frac{\tau}{4}$  (Slika 2.1.e), dobija se L-Wigner-ova distribucija [32]:

$$GCD_{N=2}^{L=2}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left( t + \frac{\tau}{4} \right) s^{-2} \left( t - \frac{\tau}{4} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.12)$$

L-Wigner-ova distribucija smanjuje faktor rasipanja u odnosu na Wigner-ovu distribuciju [32] (Tabela 2.1), obezbjeđujući veću koncentraciju u vremensko-frekvencijskom domenu. Umjesto višestrukih uzastopnih integracija kroz samo dvije tačke, preciznost integracije, a time i procjene trenutne frekvencije, se dalje može povećavati korišćenjem većeg broja tačaka. Za dva para simetričnih tačaka

$\left[ \pm \frac{\tau}{4(a_i + jb_i)} \right], i=1, 2$ , razvoj faze momenta se zapisuje kao [31]:

$$\phi_M(t, \tau) = \phi^{(1)}(t)\tau + 2\phi^{(3)}(t)\frac{\tau^3}{4^3 3!} \left( \frac{1}{(a_1 + jb_1)^2} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^2} \right) + 2\phi^{(5)}(t)\frac{\tau^5}{4^5 5!} \left( \frac{1}{(a_1 + jb_1)^4} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^4} \right) + \dots$$

Pogodnim izborom parametara  $a_1, b_1, a_2$ , and  $b_2$ , uticaj pojedinih neparnih izvoda može biti značajno redukovano ili u potpunosti eliminisan. Na primjer, primijetimo da za slučaj  $a_1 = -a_2 = b_1 = b_2$  nestaju svi izvodi reda  $4n-1, n=1, 2, \dots$ . Vremensko-frekvencijska distribucija koja odgovara ovom slučaju se definiše u obliku [31]:

$$GCD_{N=4}(t, \omega) \Big|_{a_i, b_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^2 s^{+(a_i + jb_i)} \left( t + \frac{\tau}{4(a_i + jb_i)} \right) s^{-(a_i + jb_i)} \left( t - \frac{\tau}{4(a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.13)$$

Uzimajući da je  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (1, 0, 0, 1)$  (Slika 2.1.d), dobija se forma distribucije četvrtog reda ( $N=4$ ) [25], [26] sa kompleksnim vremenskim argumentom:

$$GCD_{N=4}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \frac{\tau}{4}) s^{-1}(t - \frac{\tau}{4}) s^{-j}(t + j\frac{\tau}{4}) s^j(t - j\frac{\tau}{4}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.14)$$

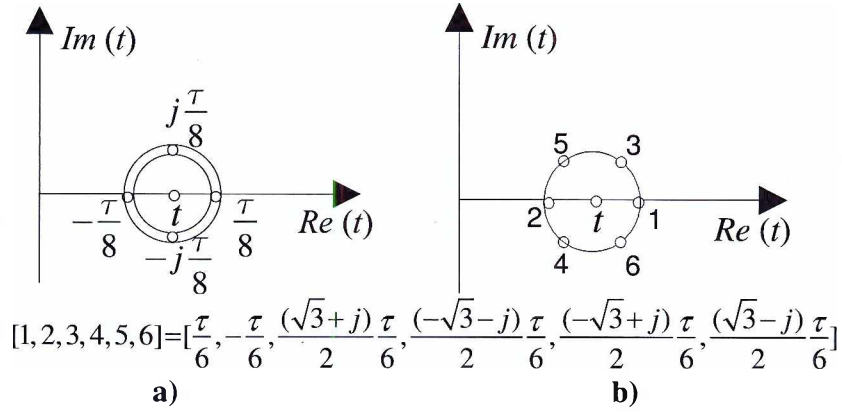
Faktor rasipanja za ovu distribuciju dat je u Tabeli 2.1. Takode, interesantan je i slučaj:  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (1/2, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2, -1/2)$ . Korišćenjem ranije uvedene modifikacije  $e^{j\text{angle}(M(t, \tau))}$ , postiže se dvostruko smanjenje faktora rasipanja u odnosu na distribuciju definisanu relacijom (2.14). Dodatna prednost korišćenja tačaka sa dvostruko manjim imaginarnim dijelom je u smanjenju grešaka koje mogu nastati prilikom numeričke realizacije signala sa kompleksnim argumentom [26].

Za signale sa još izraženijom nestacionarnošću odnosno sa brzim varijacijama trenutne frekvencije, opet se može primijeniti koncept višestrukih integracija. Na taj način se definiše L-forma distribucije četvrtog reda  $GCD_{N=4}^L(t, \omega)$ , [31]:

$$GCD_{N=4}^L(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^L(t + \frac{\tau}{4L}) s^{-L}(t - \frac{\tau}{4L}) s^{-jL}(t + j\frac{\tau}{4L}) s^{jL}(t - j\frac{\tau}{4L}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.15)$$

TABELA 2.1. FAKTORI RASIPANJA KONCENTRACIJE ZA POJEDINE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE

Distribucija	Faktor rasipanja distribucije
Wigner-ova distribucija, ( $GCD_N$ , $N=2$ )	$Q(t, \tau) = \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \dots$
L-Wigner-ova distribucija $GCD_{N=2}^L$	$Q(t, \tau) = \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3! L^2} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5! L^4} + \dots$
$GCD_{N=4}$	$Q(t, \tau) = \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^4 5!} + \phi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{4^8 9!} + \dots$
$GCD_{N=4}^{L=2}$	$Q(t, \tau) = \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^6 5!} + \phi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{4^{12} 9!} + \dots$
$GCD_{N=s}^L$	$Q(t, \tau) = \phi^{s+1}(t) \frac{\tau^{s+1}}{s^s (s+1)! L^s} + \phi^{2s+1}(t) \frac{\tau^{2s+1}}{s^{2s} (2s+1)! L^{2s}} + \dots$



**Slika 2.2:** Ilustracija tačaka na kružnici, u okolini trenutka  $t$  za: **a)**  $GCD_{N=4}^{L=2}(t, \omega)$ ,  
**b)**  $GCD_{N=6}(t, \omega)$

Tačke koje se koriste za integraciju u slučaju  $L=2$  date su na Slici 2.2.a. Članovi u okviru faktora rasipanja koncentracije za distribuciju  $GCD_{N=4}^{L=2}(t, \omega)$  su redukovani u odnosu na distribuciju  $GCD_{N=4}(t, \omega)$  (Tabela 2.1). U pogledu kompleksnosti realizacije, L-forma distribucija sa kompleksnim argumentom (za parno  $L$ ) se može dobiti primjenom jednostavne rekurzivne procedure [31], [32]:

$$GCD_{N=4}^L(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} GCD_{N=4}^{L/2}(t, \omega + \theta) GCD_{N=4}^{L/2}(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (2.16)$$

Ova procedura je vrlo pogodna za praktične realizacije. Uticaj šuma na  $GCD_{N=4}^L(t, \omega)$  biće analiziran u poglavlju 2.2.1.

Kao što je ranije naglašeno, povećanjem broj tačaka na kružnici, povećava se koncentracija distribucije. Međutim, takode se povećava i kompleksnost realizacije same distribucije. Ilustracija tačaka na kružnici za  $N=6$  data je na Slici 2.2.b.

U idealnom slučaju, za proizvoljno veliki broj tačaka  $N$  i broj integracija  $L$ , faktor rasipanja koncentracije odgovarajuće distribucije teži nuli. Opšta L-forma distribucije  $N$ -tog reda sa kompleksnim argumentom se definiše na sljedeći način [31]:

$$GCD_N^L(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N/2-1} s^{+L(a_i + jb_i)} \left( t + \frac{\tau}{N \cdot L(a_i + jb_i)} \right) s^{-L(a_i + jb_i)} \left( t - \frac{\tau}{N \cdot L(a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.17)$$

Specijalan slučaj distribucije se dobija za ekvidistantne tačke:  $\{\pm(a_i + jb_i) | i=1, \dots, N/2-1\} = \{e^{j2\pi k/N} | k=1, \dots, N-1\}$ . Uočimo da za  $L=1$ , ovaj specijalan slučaj odgovara distribuciji  $N$ -tog reda predloženoj u [28].

Iz Tabele 2.1 (posljednji red tabele) se može zaključiti da se proizvoljno smanjenje faktora rasipanja postiže pogodnim izborom parametara  $L$  i  $N$ .

## 2.2 UTICAJ ŠUMA NA ESTIMACIJU TRENUTNE FREKVENCIJE

Posmatrajmo diskretni signal  $s(n) = re^{j\phi(n)}$  ( $r$  je amplituda signala, dok je  $\phi(n)$  faza) kojem je dodat bijeli Gauss-ov šum  $v(n)$ . Diskretna forma distribucije četvrtog reda ( $N=4$ ) sa kompleksnim argumentom se u ovom slučaju može zapisati kao [26]:

$$GCD_{N=4}(n, \omega) = \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2-1} w(m)(s(n+m)+v(n+m))(s^*(n-m)+v^*(n-m)) \times e^{-j2 \ln \left| \frac{s(n+jm)+v(n+jm)}{s(n-jm)+v(n-jm)} \right|} e^{-j4m\omega}, \quad (2.18)$$

gdje je  $m$  diskretna koordinata koja odgovara pomjeraju u vremenu,  $N_s$  je broj obiraka signala u okviru prozora, dok je  $w(m)$  funkcija prozora. Pretpostavljajući da je šum male jačine, uvodi se sljedeća aproksimacija:

$$\ln |s(n+jm)+v(n+jm)| = \ln |s(n+jm)| + \Delta\theta_v(n, m), \quad \Delta\theta_v = \text{Re}\{v(n+jm)/s(n+jm)\}, \quad (2.19)$$

pri čemu je  $\Delta\theta_v$  fazna devijacija članova sa kompleksnim argumentom. Vrijednosti signala sa kompleksnim argumentom se računaju korišćenjem analitičkog proširenja signala [26]:

$$s(n+jm) = \sum_{k=k(n)-N_k}^{k(n)+N_k} STFT_s(n, k) e^{2\pi j / N_s (n+jm)k}, \quad (2.20)$$

gdje  $k(n)$  predstavlja poziciju maksimuma  $STFT_s(n,k)$  u odgovarajućem vremenskom trenutku  $n$ , dok je širina komponente signala u vremensko-frekvencijskoj ravni  $2N_k+1$ . Ista relacija važi i za šum  $v(n+jm)$ . Bias i varijansa procjene trenutne frekvencije za distribuciju  $GCD_{N=4}(n,\omega)$  se dobijaju u obliku [26]:

$$\begin{aligned} bias\{\Delta\omega\} &= \frac{1}{M_2} \left( \phi^{(5)} \frac{M_6}{5!} + \phi^{(9)} \frac{M_{10}}{9!} + \dots \right), \\ var\{\Delta\omega\} &\sim \frac{\sigma_v^2 N_w^3}{24 r^2 M_2^2} \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{8\pi N_w} e^{2\pi N_w N_k / N_s} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Prethodna relacija izvedena je za slučaj pravougaonog prozora  $w(m)$  širine  $N_w$ , dok su momenti računati kao:  $M_k = \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2-1} m^k w(m)$ ,  $k=2,3,4,\dots$ . Premda je distribucija

$GCD_{N=4}(n,\omega)$  višeg reda u odnosu na Wigner-ovu distribuciju, za vrijednosti parametara:  $N_s=128$ ,  $N_w=16$ ,  $N_k=8$ , njena varijansa je istog reda kao i varijansa Wigner-ove distribucije, dok je bias značajno niži, obezbjeđujući poboljšanje tačnosti procjene trenutne frekvencije [26]. Za širinu prozora  $N_w > 40$ , distribucija postaje osjetljivija na šum (eksponencijalni član u jednačini (2.21) postaje dominantan). Takođe, može se zaključiti da varijansa opada sa smanjivanjem vrijednosti  $N_k$ . Ono što je važno uočiti je da vrijednost  $N_k$  neće uticati na bias, dokle god je komponenta signala u regionu  $[k(n)-N_k, k(n)+N_k]$ . Stoga, optimalnu vrijednost parametra  $N_k$  možemo odrediti na osnovu širine komponente signala.

Na bazi prethodne analize, u nastavku je izveden uticaj šuma za slučaj L-forme distribucije sa kompleksnim argumentom ( $N=4$ ). Za signal  $x(n)$ , koji sadrži šum male jačine, koristi se sljedeći model sa aditivnim šumom:

$$x^L(n) = (s(n) + v(n))^L \equiv s^L(n) + L s^{L-1}(n) v(n) = s^L(n) + \xi(n), \quad (2.22)$$

gdje je autokorelaciona funkcija  $\xi(n)$  definisana kao:  $R_{\xi\xi}(n) = r^{2L-2} \sigma_v^2 L^2 \delta(n)$ , dok je  $\sigma_v$  varijansa šuma  $v(n)$ . Dakle, diskretna L-forma distribucije sa kompleksnim vremenskim argumentom se može zapisati u obliku [31]:

$$GCD_{N=4}^L = \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2-1} w(m) \left( s^L \left( n + \frac{m}{L} \right) + \xi \left( n + \frac{m}{L} \right) \right) \left( s^{*L} \left( n - \frac{m}{L} \right) + \xi^* \left( n - \frac{m}{L} \right) \right) e^{-j2L\theta(n,m)} e^{-j4m\omega}, \quad (2.23)$$

i pri tome je:  $\theta(n,m) = \ln \left| s \left( n + j \frac{m}{L} \right) + v \left( n + j \frac{m}{L} \right) \right|$ .

Bias i varijansa procijenjene trenutne frekvencije se dobijaju kao [31]:

$$\begin{aligned} bias\{\Delta\omega\} &= \frac{1}{M_2} \left( \phi^{(5)} \frac{M_6}{5!L^4} + \phi^{(9)} \frac{M_{10}}{9!L^8} + \dots \right), \\ var\{\Delta\omega\} &= \frac{L^2 \sigma_v^2}{8r^2 M_2^2} \left( \left( \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2} m^2 w^2(m) \right) + \frac{1}{Nr^{2L-2}} \sum_{k=-N_k/L}^{N_k/L} \left( \sum_{m=-N_s/2}^{N_s/2} mw(m) e^{-2\pi km/N} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

U slučaju korišćenja pravougaonog prozora  $w(m)$  širine  $N_w$ , imamo da je:

$$var\{\Delta\omega\} = \frac{L^2 \sigma_v^2 N_w^3}{24r^2 M_2^2} \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{8\pi r^{2L-2} N_w} e^{2\pi N_w N_k / N_s / L} \right). \quad (2.25)$$

Ukoliko je drugi član u okviru zagrade dovoljno mali, varijansa posmatrane distribucije je istog reda kao i varijansa L-Wigner-ove distribucije. Na primjer, za vrijednosti parametara:  $N_s=128$ ,  $N_w=16$ ,  $N_k=8$ ,  $r=1$ ,  $L=2$ , važi da je  $\frac{3}{8\pi r^{2L-2} N_w} e^{(2\pi N_w N_k / N_s / L)} = 0.17$ .

Dakle, varijansa procjene trenutne frekvencije za slučaj L-forme distribucije sa kompleksnim argumentom ( $N=4$ ) može biti iste veličine kao u slučaju L-Wigner-ove distribucije [33], dok je bias značajno redukovan.

### 2.3 REALIZACIJA DISTRIBUCIJE SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM ZA SLUČAJ MULTIKOMPONENTNIH SIGNALA

Na osnovu relacije (2.17), za slučaj  $L=1$  i  $\{\pm(a_i + jb_i) | i=0, \dots, N/2-1\} = \{\pm e^{j2\pi i/N} | i=0, 1, \dots, N/2-1\}$ , dobija se sljedeći oblik distribucije:

$$GCD_N(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=0}^{N/2-1} s^{(a_i + jb_i)} \left( t + \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) s^{-(a_i + jb_i)} \left( t - \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.26)$$

Za  $i=0$  slijedi da je  $a_0 + jb_0 = 1$ , te se prethodna relacija može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} GCD_N(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s \left( t + \frac{\tau}{N} \right) s^{-1} \left( t - \frac{\tau}{N} \right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N/2-1} s^{(a_i + jb_i)} \left( t + \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) s^{-(a_i + jb_i)} \left( t - \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.27) \\ &= \frac{N}{2} WD(t, \frac{N}{2} \omega) *_{\omega} C(t, \omega). \end{aligned}$$

gdje je sa  $WD$  označena Wigner-ova distribucija, dok je za  $C$  označena koncentraciona

$$\text{funkcija: } C(t, \omega) = FT \left\{ \prod_{i=1}^{N/2-1} s^{(a_i + jb_i)} \left( t + \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) s^{-(a_i + jb_i)} \left( t - \frac{\tau}{N \cdot (a_i + jb_i)} \right) \right\}.$$

Uvođenjem S-metoda umjesto Wigner-ove distribucije, dobija se uopštenija forma relacije (2.27), koja je pogodna i za slučaj multikomponentnih signala. Ova forma je definisana na sljedeći način [34]:

$$GCD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) SM(t, \omega + \theta) C(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (2.28)$$

Prozor  $P(\theta)$  ima istu ulogu i efekte kao i u slučaju S-metod-a. Za signal sa  $Q$  komponenti, koncentraciona funkcija  $C(t, \omega)$  se može izračunati na osnovu formule [34]:

$$C(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) C_{re}(t, \omega + \theta) C_{im}(t, \omega - \theta) d\theta, \quad (2.29)$$

gdje je [34]:

$$\begin{aligned}
C_{re}(t, \omega) &= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q \prod_{i=1}^{N/2-1} c_{re_i}(t, \tau)_q \right\} = \\
&= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q \prod_{i=1}^{N/2-1} e^{ja_i \angle(x(t+(a_i+jb_i)\frac{\tau}{N})_q) \cdot x^*(t-(a_i+jb_i)\frac{\tau}{N})_q} \right\} \\
C_{im}(t, \omega) &= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q \prod_{i=1}^{N/2-1} c_{im_i}(t, \tau)_q \right\} = \\
&= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q \prod_{i=1}^{N/2-1} e^{-jb_i \ln \left| x(t+(a_i+jb_i)\frac{\tau}{N})_q \right| \cdot x^*(t-(a_i+jb_i)\frac{\tau}{N})_q} \right\}
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Signal sa kompleksnim argumentom se računa kao:

$$x(t \pm (a_i + jb_i)\frac{\tau}{N})_q = \int_{-W_q}^{W_q} STFT(t, \omega + \omega_q(t)) e^{j(t \pm \tau \frac{(a_i + jb_i)}{N})\omega} d\omega, \quad (2.31)$$

gdje  $\omega_q(t) = \arg \left\{ \max_{\omega} STFT(t, \omega) \right\}$  predstavlja poziciju maksimuma  $q$ -te komponente.

Dakle, komponente se prvo razdvajaju korišćenjem STFT, a potom se računa analitičko proširenje signala. Koncentracione funkcije  $C_r(t, \omega)$  i  $C_i(t, \omega)$  za distribuciju šestog reda sa kompleksnim argumentom se dobijaju kao:

$$\begin{aligned}
C_{re}(t, \omega) &= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q e^{j\frac{\sqrt{3}}{2} \angle(x(t+(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q) \cdot x^*(t-(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q)} \right. \\
&\quad \times e^{j\frac{\sqrt{3}}{2} \angle(x(t+(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q) \cdot x^*(t-(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q)} \left. \right\} \\
C_{im}(t, \omega) &= FT_{\tau} \left\{ \sum_{q=1}^Q e^{-j\frac{1}{2} \ln \left| x(t+(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q \right| \cdot x^*(t-(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q} \right. \\
&\quad \times e^{-j\frac{1}{2} \ln \left| x(t+(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q \right| \cdot x^*(t-(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2})\frac{\tau}{6})_q} \left. \right\}
\end{aligned} \quad (2.32)$$

Na osnovu navedenih relacija, predložena je arhitektura za realizaciju distribucija sa kompleksnim argumentom, za slučaj jednokomponentnih i multikomponentnih signala, kao i FPGA implementacija za  $N=4$  (distribucija četvrtog reda) [35], [36].



**Primjer 1:** Posmatrajmo signal sa brzim varijacijama trenutne frekvencije:

$$x(t) = e^{j(2\cos(2\pi t) + 1/2\cos(6\pi t) + 1/2\cos(4\pi t))} + v(t),$$

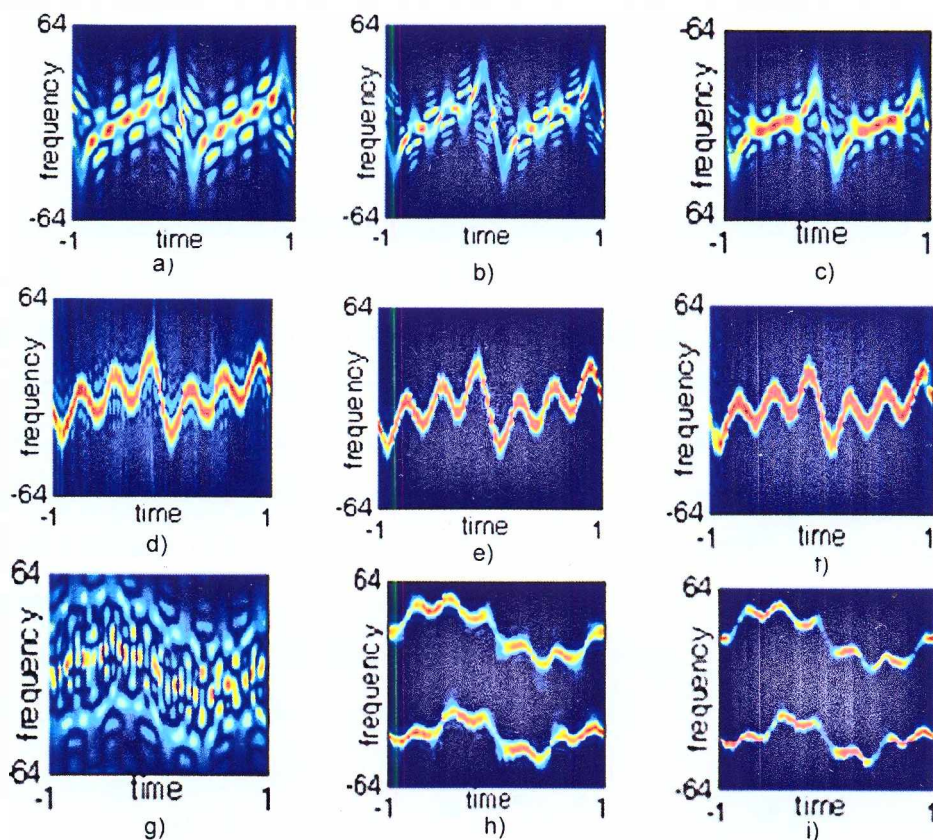
gdje  $v(t)$  kompleksni bijeli Gauss-ov šum (odnos signala i šuma je  $\text{SNR}=30\text{dB}$ ). Signal je definisan na vremenskom intervalu  $t \in [-1, 1]$ , sa korakom  $\Delta t = 2/128$ . Na Slici 2.3 prikazani su rezultati dobijeni primjenom Wigner-ove distribucije, L-Wigner-ove distribucije, zaobljene pseudo Wigner-ove distribucije (SPWD), distribucije četvrtog reda sa kompleksnim argumentom  $GCD_{N=4}$ , L-forme distribucije  $GCD_{N=4}^{L=2}$ , kao i distribucije šestog reda sa kompleksnim argumentom  $GCD_{N=6}$ . Možemo zaključiti da Wigner-ova distribucija, L-Wigner-ova distribucija i SPWD nisu pogodne za procjenu trenutne frekvencije posmatranog signala. Naime, Wigner-ova distribucija ne može da prati brze varijacije trenutne frekvencije, te ni zaobljavanje duž frekvencijske ili duž obje ose (kod L-Wigner-ove distribucije i SPWD, respektivno) ne može doprinijeti poboljšanju rezultata. S druge strane,  $GCD_{N=4}$  bolje prati varijacije trenutne frekvencije (Slika 2.3.d), ali još uvijek ne obezbjeđuje zadovoljavajuću rezoluciju. Ne povećavajući značajno kompleksnost realizacije,  $GCD_{N=4}^{L=2}$  (Slika 2.3.e) poboljšava koncentraciju distribucije  $GCD_{N=4}$  redukujući članove interferencije. Ujedno, u poređenju sa distribucijom šestog reda  $GCD_{N=6}$ , L-forma distribucije četvrtog reda  $GCD_{N=4}^{L=2}$  je manje osjetljiva na šum.

**Primjer 2:** Razmatrajmo slučaj multikomponentog signala sa brzim promjenama trenutne frekvencije:

$$y(t) = e^{j(4.5\cos(\pi t) + 3/4\cos(6\pi t) + 8\pi t)} + e^{j(2\cos(\pi t) + 2/3\cos(6\pi t) + \cos(2\pi t) - 8\pi t)}.$$

Na Slikama 2.3.g,h,i, za posmatrani signal, prikazane su redom: Wigner-ova distribucije,  $GCD_{N=4}$  i njena L-forma. Kao i u prethodnom primjeru, Wigner-ova distribucija ne daje zadovoljavajuće rezultate, dok  $GCD_{N=4}$  prati varijacije trenutne frekvencije, ali sa

nedovoljnom koncentracijom. Poboljšanje koncentracije je postignuto korišćenjem L-forme tj.  $GCD_{N=4}^{L=2}$  (Slika 2.3.i).



**Slika 2.3. Monokomponentni signal  $x(t)$ : a) Wigner-ova distribucija, b) L-Wigner-ova distribucija, c) SPWD, d)  $GCD_{N=4}$ , e)  $GCD_{N=4}^{L=2}$ , f)  $GCD_{N=6}$ , Multikomponentni signal  $y(t)$ : g) Wigner-ova distribucija, h)  $GCD_{N=4}$ , i)  $GCD_{N=4}^{L=2}$**

Primijetimo da posmatrane distribucije sa kompleksnim argumentom, prilagođene slučaju multikomponentnih signala, ne sadrže kros-članove.

## GLAVA 3

### KLASA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA BAZIRANA NA AMBIGUITY DOMENU

Pri analizi multikomponentnih signala, moguće je iskoristiti prednosti ambiguity domena. Na ovaj način ne samo da se može dobiti vremensko-frekvencijska distribucija sa redukovanim kros-članova, već se efikasno smanjuju greške koje mogu nastati prilikom računanja signala sa kompleksnim argumentom. Korišćenje ambiguity domena, pruža mogućnost definisanja čitave klase vremensko-frekvencijskih distribucija sa kompleksnim argumentom [37]. S tim u vezi, ovim pristupom se nastoje zadržati dobre osobine distribucija iz Cohen-ove klase i u okviru klase distribucija sa kompleksnim argumentom.

Ambiguity funkcija za moment signala sa realnim argumentom definiše se na osnovu sljedeće relacije [37]:

$$AF_r(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} M_r(t, \tau) e^{-j\theta t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{N}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{N}\right) e^{-j\theta t} dt. \quad (3.1)$$

Ova funkcija drugog reda odgovara standardnoj ambiguity funkciji:  $AF_r(\theta, \tau) = AF(\theta, 2\tau/N)$ , čije su auto-komponente locirane u okolini koordinatnog početka, dok su kros-članovi (kod multikomponentnih signala) dislocirani u odnosu na auto-komponente. Analogno prethodnoj relaciji, može se takođe definisati i ambiguity funkcija (reda  $N-2$ ) za moment signala sa kompleksnim argumentom  $M_c(t, \tau)$ , kao [37]:

$$AF_c(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} M_c(t, \tau) e^{-j\theta t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N/2-1} x^{w_{N,k}}\left(t + \frac{w_{N,k}}{N}\tau\right) x^{*w_{N,k}}\left(t - \frac{w_{N,k}}{N}\tau\right) e^{-j\theta t} dt. \quad (3.2)$$

gdje je  $w_{N,k} = e^{j2\pi k/N}$ . Pri tome su članovi signala dobijeni korišćenjem analitičkog proširenja signala  $x(t)$ .

Za slučaj multikomponentnih signala, članovi sa kompleksnim argumentom mogu biti računati kao [37]:

$$x(t \pm \frac{w_{N,k}}{N} \tau) = \sum_{m=1}^M x_m(t \pm \frac{w_{N,k}}{N} \tau) = \sum_{m=1}^M \int_{-W_m}^{W_m} STFT(t, \omega + \omega_m(t)) e^{j(\omega + \omega_m(t))(t \pm \frac{w_{N,k}}{N} \tau)} d\omega, \quad (3.3)$$

gdje je  $M$  broj komponenti signala,  $2W_m$  je širina komponente signala, dok je:  $\omega_m(t) = \arg \left\{ \max_{\omega} STFT(t, \omega) \right\}$ . Primijetimo da se, za velike vrijednosti proizvoda  $\omega\tau$ , mogu pojaviti greške u računu usljed ograničene preciznosti softvera. Ove greške se pojavljuju u  $AF_{ct}(\theta, \tau)$ , te u okviru nje mogu biti filtrirane [37]. Dakle, da bi se eliminisali kros-članovi i računske greške u okviru ambiguity funkcija  $AF_{rt}(\theta, \tau)$  i  $AF_{ct}(\theta, \tau)$ , koristi se funkcija jezgra  $C(\theta, \tau)$ . Filtrirane ambiguity funkcije se dobijaju kao:

$$\begin{aligned} AF_{rt}^c(\theta, \tau) &= C(\theta, \tau) AF_{rt}(\theta, \tau), \\ AF_{ct}^c(\theta, \tau) &= C(\theta, \tau) AF_{ct}(\theta, \tau). \end{aligned} \quad (3.4)$$

S obzirom da funkcija  $AF_{rt}(\theta, \tau)$  sadrži sve informacije o komponentama signala, jezgro je potrebno prilagoditi auto-komponentama u okviru  $AF_{rt}(\theta, \tau)$ , kao i u slučaju izvođenja Cohen-ove klase distribucija [16], [17]. Najčešće korišćena fiksna jezgra su prezentovana u sekciji 1.6 za slučaj Cohen-ove klase distribucija, [15]-[24]. Ova jezgra zadovoljavaju niz dobrih osobina. Na primjer, zadovoljena je osobina vremenskog i frekvencijskog pomjeraja, realnost distribucije pod uslovom da je  $C(\theta, \tau) = C^*(-\theta, -\tau)$ , dok su marginalne osobine zadovoljene ako su ispunjeni uslovi:  $C(\theta, 0) = 1$  i  $C(0, \tau) = 1$ . Na primjer, Choi-Williams, Born-Jordan and Sinc jezgro zadovoljavaju oba marginalna uslova, za razliku od Cone jezgra koje zadovoljava jedan od marginalnih uslova (trenutna snaga signala). Generalno govoreći, kao i u slučaju Cohen-ove klase distribucija, osobine distribucija iz klase sa kompleksnim argumentom zavisice od osobina koje zadovoljava jezgro.

U većini slučajeva, jezgro pokazuje dobre osobine po vremenskoj ili po frekvencijskoj osi. Step en redukcije kros članova će zavisiti od orijentacije Wigner-ove

distribucije u okviru vremensko-frekvencijske ravni. Obično je potrebno uspostaviti kompromis između redukcije kros-članova i očuvanja koncentracije auto-članova signala [15], [18]. Slabljenje kros-članova kod multikomponentnih signala je povezano sa vremensko-frekvencijskim lokacijama komponenti signala koje interferiraju stvarajući kros-član. Naime, ukoliko se komponente signala pojavljuju u okolini istog vremenskog trenutka ili na istoj frekvenciji, kros-članovi nastali njihovom interferencijom biće locirani u okolini  $\tau$  ili  $\theta$  ose, kao i sami auto-članovi signala. U ovom slučaju, oblik navedenih fiksnih jezgara ne može obezbijediti uklanjanje kros-članova, a da pri tome ne dođe do narušavanja auto-komponenti signala.

Posmatrajmo slučaj fiksnog Gauss-ovog jezgra:  $C(\theta, \tau) = e^{-(\theta^2 + \tau^2)/2\sigma^2}$ . Ovo jezgro može zadovoljiti marginalne uslove samo za pojedinačne komponente signala. Međutim, oblik ovog jezgra obezbjeđuje efikasno redukovanje kros-članova, bez većeg uticaja na auto-komponente u ambiguity domenu. Takođe, korišćenjem ovog jezgra se mogu značajno ublažiti greške koje nastaju pri proračunu vrijednosti signala sa kompleksnim argumentom. Napomenimo na kraju da se u ove svrhe mogu uspješno koristiti i različita adaptivna jezgra i signal zavisna jezgra [20]-[24].

### **3.1 GENERALNA FORMA AMBIGUITY FUNKCIJE; KLASA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA SA KOMPLEKSNIM ARGUMENTOM**

Kod distribucija sa kompleksnim argumentom, koncentracija distribucije se poboljšava uvođenjem dodatne koncentracione funkcije. Sličan pristup se može primijeniti i u ambiguity domenu. Funkcija  $AF_{ct}^c(\theta, \tau)$  (bazirana na momentu signala sa kompleksnim argumentom) ima ulogu korekcionog člana, koji poboljšava koncentraciju auto-komponenti u okviru ambiguity funkcije sa realnim argumentom  $AF_{rt}^c(\theta, \tau)$  [37]. Stoga se rezultatna ambiguity funkcija  $N$ -tog reda, za analizu visoko nestacionarnih signala, dobija dvodimenzionom konvolucijom ambiguity funkcija sa realnim



$AF_{rt}^c(\theta, \tau)$  (funkcija drugog reda) i kompleksnim argumentom  $AF_{ct}^c(\theta, \tau)$  (funkcija reda  $N-2$ ). Međutim, kako bi ovaj pristup bio primjenljiv i za slučaj multikomponentnih signala, neophodno je uvesti i dodatnu funkciju prozora kako bi se izbjeglo pojavljivanje novih kros-članova usljed konvolucije. Na osnovu analogije sa vremensko-frekvencijskim domenom, gdje je koncept uvođenja frekvencijskog prozora iskorišćen za definisanje S-metoda, [12]:  $SM(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) STFT(t, \omega + \lambda) STFT(t, \omega - \lambda) d\lambda$ ,

( $P(\lambda)$  je prozor u frekvencijskom domenu), rezultatna ambiguity funkcija, koja ne sadrži kros-članove, se definiše na sljedeći način [36]:

$$AF_{CTD}(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) e^{-j\xi\tau_1} e^{j\xi(\tau - \tau_1)} \times \quad (3.5)$$

$$\times AF_{rt}^c(\theta_1, \tau_1) AF_{ct}^c(\theta - \theta_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 d\theta_1 d\xi.$$

Kros-članovi će biti u potpunosti izbjegnuti ukoliko je širina prozora  $P(\xi)$  manja od najmanjeg rastojanja između auto-komponenti signala. Eksponencijalne funkcije u prethodnoj relaciji odgovaraju pomjerajima po frekvenciji u vremensko-frekvencijskom domenu. Na osnovu rezultatne ambiguity funkcije, nova klasa distribucija sa kompleksnim argumentom se definiše kao [37]:

$$GCD_{AF}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} AF_{CTD}(\theta, \tau) e^{j\theta t - j\omega \tau} d\tau d\theta. \quad (3.6)$$

### 3.1.1. Kompleksnost proračuna distribucija iz predložene klase

Rezultatna ambiguity funkcija drugog reda ( $N=2$ ) svodi se na filtriranu ambiguity funkciju sa realnim argumentom  $AF_{rt}^c(\theta, \tau)$ . U tom slučaju, primjenom relacije (3.6), dobijaju se kvadratne distribucije iz Cohen-ove klase. Za veći red distribucije  $N=4, 6, \dots$ , kompleksnost proračuna se povećava time što je potrebno računati ambiguity funkciju sa kompleksnim argumentom  $AF_{ct}^c(\theta, \tau)$  (reda  $N-2$ ). U poređenju sa Cohen-ovom klasom distribucija (na primjer Choi-Williams-ovom distribucijom), sve

dodatne operacije se odnose na funkciju  $AF_{ct}(\theta, \tau)$  i na rezultatnu ambiguity funkciju.

Računanje funkcije  $AF_{ct}(\theta, \tau)$  uključuje [37]:

- računanje signala sa kompleksnim argumentom ( $N-2$  FFT procedure ( $O(N_s(N-2)\log_2 N_s)$ ) operacija za  $N_s$  odbiraka u okviru prozora),  $M(N-2)$  IFFT procedure uz korišćenje  $2W_m$  odbiraka ( $O(M(N-2)W_m\log_2 2W_m)$ ) operacija i  $N_s$  kompleksnih množenja sa eksponencijanim članovima);
- računanje momenta signala sa kompleksnim argumentom ( $(N-3)N_s$  kompleksnih množenja),
- FFT procedura za dobijanje ambiguity funkcije ( $O(N_s\log_2 N_s)$ ).

Stoga, složenost proračuna funkcije  $AF_{ct}(\theta, \tau)$  je reda  $O((N-2)N_s\log_2 N_s)$  operacija [37].

Filtriranje ambiguity funkcije sa kompleksnim argumentom:  $AF_{ct}^c(\theta, \tau) = C(\theta, \tau)AF_{ct}(\theta, \tau)$  zahtijeva isti broj aritmetičkih operacija kao i filtriranje standardne ambiguity funkcije sa realnim argumentom  $AF_{rt}^c(\theta, \tau) = C(\theta, \tau)AF_{rt}(\theta, \tau)$ , koje se primjenjuje u Cohen-ovoj klasi distribucija (na primjer za Choi-Williams-ovu distribuciju).

Rezultantna ambiguity funkcija se dobija korelacijom u okviru prozora širine  $2L+1$  ( $N_s(2L+2)$  kompleksnih množenja i  $L\cdot N_s$  kompleksnih sabiranja ( $O(N_s)$ ). Pretpostavljajući da se isto kolo može koristiti za filtriranje ambiguity funkcija sa realnim i kompleksnim argumentom, predložena distribucija za slučaj  $N \geq 4$  zahtijeva  $O((N-2)N_s\log_2 N_s)$  dodatnih aritmetičkih operacija u poređenju sa Choi-Williams-ovom distribucijom.

### 3.1.2 Grupno kašnjenje

Za analizu grupnog kašnjenja koristi se frekvencijska forma vremensko-frekvencijskih distribucija. U narednom dijelu je predložena klasa vremensko-frekvencijskih distribucija razmatrana u frekvencijskom domenu [37].

Za signal  $X(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , koji predstavlja Fourier-ovu transformaciju signala  $x(t)$ , momenti sa realnim i kompleksnim argumentom se mogu definisati na sljedeći način [37]:

$$\begin{aligned} M_r(\omega, \theta) &= X\left(\omega + \frac{\theta}{N}\right) X^*\left(\omega - \frac{\theta}{N}\right), \\ M_c(\omega, \theta) &= \prod_{k=1}^{N/2-1} X^{w_{N,k}^*}\left(\omega + \frac{w_{N,k}}{N}\theta\right) X^{-w_{N,k}^*}\left(\omega - \frac{w_{N,k}}{N}\theta\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Signal sa kompleksnim frekvencijskim argumentom se dobija kao:

$$\begin{aligned} X\left(\omega \pm \frac{w_{N,k}}{N}\theta\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\mp jw_{N,k}t/N} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\pm bt/N} e^{-j(\omega \pm a)t} dt, \quad \text{gdje je } w_{N,k} = a + jb. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Odgovarajuće ambiguity funkcije sa realnim i kompleksnim argumentom se mogu definisati korišćenjem momenata signala u frekvencijskom domenu [37]:

$$\begin{aligned} AF_{rt}(\theta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_r(\omega, \theta) e^{j\omega\tau} d\omega \\ AF_{ct}(\theta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_c(\omega, \theta) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rezultujuća ambiguity funkcija  $AF_{CTD}(\theta, \tau)$  i klasa vremensko-frekvencijskih distribucija sa kompleksnim argumentom imaju formu definisanu relacijama (3.5) i (3.6).



### 3.2 PRIMJERI

U zavisnosti od brzine varijacija trenutne frekvencije u okviru funkcije prozora, mogu se koristiti distribucije različitog reda. Naime, za signale sa konstantnom trenutnom frekvencijom dovoljno je koristiti spektrogram, dok se za slučaj linearne trenutne frekvencije koriste kvadratne distribucije. Međutim, za signale sa brzim varijacijama faze, kod kojih je prisustvo trećeg izvoda faze značajno, potrebno je koristiti distribuciju četvrtog reda ( $N=4$ ) sa kompleksnim argumentom. Slično, ukoliko je peti izvod faze prisutan u značajnoj mjeri, treba koristiti distribuciju šestog reda ( $N=6$ ). Imajući u vidu prirodu signala, može se imati približna predstava o brzini varijacija trenutne frekvencije, što može biti značajna informacija prilikom izbora odgovarajuće vremensko-frekvencijske distribucije.

U narednim primjerima su posmatrani visoko nestacionarni multikomponentni signali sa trenutnom frekvencijom koja varira brzo, čak i u okviru nekoliko odbiraka signala. Ovi signali su periodično modulirani i u realnom slučaju odgovaraju radarskim signalima generisanim od strane neuniformne rotacije reflektujuće tačke.

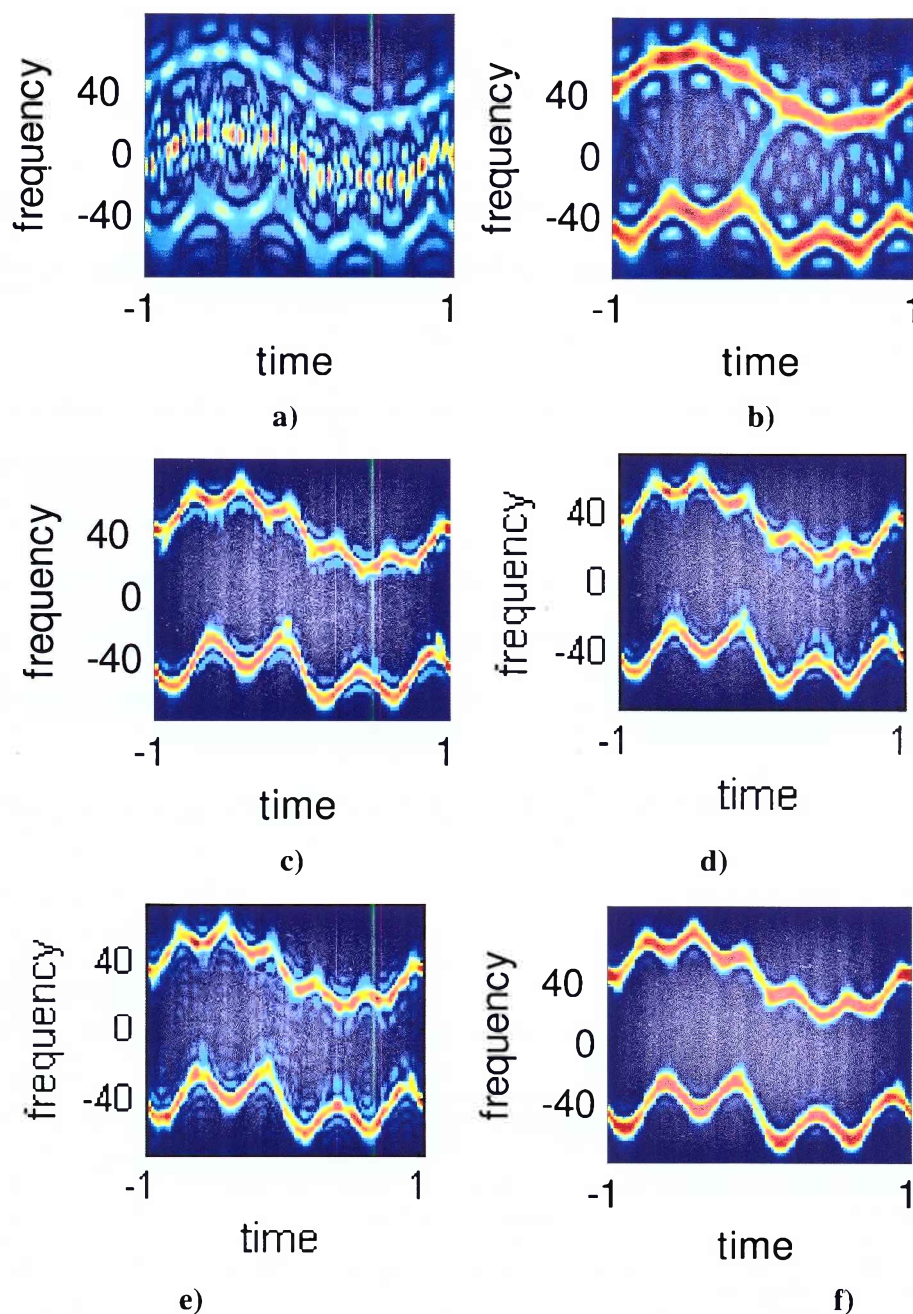
**Primjer 1:** Posmatrajmo multikomponentni signal u obliku:

$$x(t) = e^{j(\cos(4\pi t) + 2/3 \cos(6\pi t) + 1/2 \cos(\pi t) + 7.5\pi t)} + e^{j2(\cos(\pi t) + 1/2 \cos(4\pi t) + 1/4 \cos(2\pi t) - 9.5\pi t)}$$

pri čemu je  $t \in [-1, 1]$ , a korak odabiranja  $\Delta t = 2/128$ . S obzirom da su varijacije trenutne frekvencije brze, kvadratne distribucije ( $N=2$ ) su loše za njenu procjenu.

U cilju ilustracije, Wigner-ova distribucija je data na Slici 3.1.a, dok je njena filtrirana verzija bez kros-članova prikazana na Slici 3.1.b. Dakle, da bi poboljšali rezultate, koristimo distribuciju četvrtog reda iz predložene klase ( $GCD_{AF}(t, \omega)$  za  $N=4$ ). Na Slikama 3.1.c – 3.1.f su prikazani rezultati dobijeni korišćenjem Choi-Williams-ovog jezgra, Born-Jordan-ovog jezgra, Sinc jezgra i Gauss-ovog jezgra ( $\sigma=10$ ), respektivno. Može se zaključiti da Gauss-ovo jezgro obezbjeđuje efikasno očuvanje koncentracije

auto-komponenti, uz istovremenu eliminaciju kros-članova, te stoga, doprinosi nešto boljim rezultatima u poređenju sa ostalim posmatranim slučajevima.



**Slika 3.1.** a) Wigner-ova distribucija, b) Wigner-ova distribucija sa Gauss-ovim jezgrom, c)  $GCD_{AF}$  (N=4) sa Choi-Williams-ovim jezgrom, d)  $GCD_{AF}$  (N=4) sa Born-Jordan-ovim jezgrom, e)  $GCD_{AF}$  (N=4) sa Sinc jezgrom, f)  $GCD_{AF}$  (N=4) sa Gauss-ovim jezgrom

Kao kvantitativna mjera za poređenje distribucija razmatranih u ovom primjeru, računane su srednje kvadratne greške (mean square error - MSE) procjene trenutne frekvencije:

$$MSE = \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} [f(n) - \bar{f}(n)]^2,$$

gdje  $f(n)$  predstavlja pravu vrijednost trenutne frekvencije, dok  $\bar{f}(n)$  predstavlja vrijednost procijenjenu pomoću vremensko-frekvencijskih distribucija (TFD):

$$\bar{f}(n) = \max_k TFD(n, k).$$

Srednje kvadratne greške estimacije su date u Tabeli 3.1 za sljedeće distribucije: Choi-Williams-ova distribucija, filtrirana pseudo Wigner-ova distribucija (ovo su specijalni slučajevi  $GCD_{AF}$  za  $N=2$ ), i  $GCD_{AF}$  ( $N=4$ ) sa: Choi-Williams-ovim jezgrom, Sinc jezgrom, Born-Jordan-ovim jezgrom, i Gauss-ovim jezgrom. Na osnovu prikazanih rezultata se može zaključiti da je najmanja greška obezbijedena korišćenjem  $GCD_{AF}$  ( $N=4$ ) sa Gauss-ovim jezgrom.

TABELA 3.1. SREDNJE KVADRATNE GREŠKE (MSE) PROCJENE TRENUTNE FREKVENCIJE

DISTRIBUCIJA	MSE
Choi-Williams-ova distribucija	47
$GCD_{AF}$ for $N=2$ , tj. Wigner-ova distr. sa Gauss-ovim jezgrom	24
$GCD_{AF}$ for $N=4$ , sa Choi-Williams-ovim jezgrom	11.9
$GCD_{AF}$ for $N=4$ , sa Sinc jezgrom	12.3
$GCD_{AF}$ for $N=4$ , sa Born-Jordan-ovim jezgrom	13.16
$GCD_{AF}$ for $N=4$ , sa Gauss-ovim jezgrom	9.5

Razmatrajmo sada slučaj signala  $x(t)$  sa bijelim Gauss-ovim šumom. U ovom slučaju, računata je takode srednja kvadratna greška procjene trenutne frekvencije. Eksperiment je vršen sa nekoliko različitih vrijednosti odnosa signala i šuma (SNR): SNR=30dB,

SNR=20dB, SNR=10dB i SNR=5dB. Dobijeni rezultati su prikazani u Tabeli 3.2, za  $GCD_{AF}$  sa  $N=4$  (Gauss-ovo jezgro). Rezultati su upoređeni sa rezultatima za Choi-Williams-ovu distribuciju (Tabela 3.2). Iz tabele se vidi da,  $GCD_{AF}$  ( $N=4$ ) značajno prevazilazi performance Choi-Williams-ove distribucije u pogledu tačnosti procjene trenutne frekvencije u prisustvu šuma. Međutim, već za slučaj SNR<10dB, greška procjene trenutne frekvencije i za  $GCD_{AF}$  ( $N=4$ ) postaje značajnija.

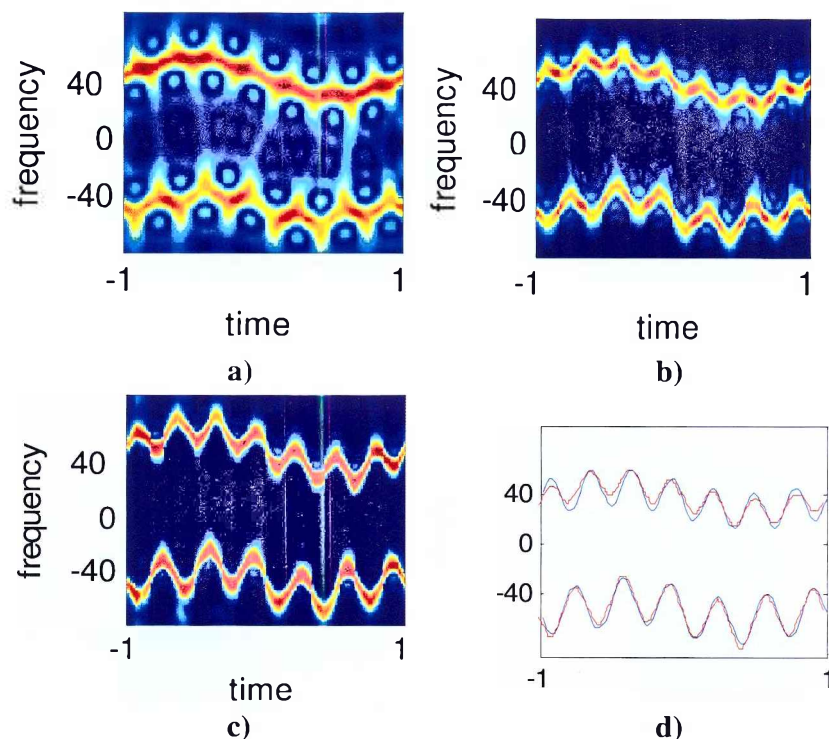
TABELA 3.2. GREŠKA ESTIMACIJE TRENUTNE FREKVENCije U PRISUSTVU ŠUMA

Distribucija	SNR= 30dB	SNR= 20dB	SNR= 10dB	SNR= 5dB
$GCD_{AF}(t, \omega)$ , $N=4$	10.49	13.01	18.15	29.75
Choi-Williams distr.	48.4	73.85	81.54	123.14

**Primjer 2:** U ovom primjeru biće ilustrovano povećanje koncentracije distribucije sa povećanjem reda distribucije  $N$ . Stoga, posmatrajmo multikomponentni signal definisan kao:

$$y(t) = e^{j(3\cos(\pi t) + 2/3\cos(7\pi t) + 11.5\pi t)} + e^{2j(\cos(\pi t) + 1/4\cos(2\pi t) + 1/2\cos(6\pi t) - 8.5\pi t)}$$

Nestacionarnost trenutne frekvencije je jače izražena u odnosu na prethodni primjer. Kvadratna distribucija ( $GCD_{AF}$  za  $N=2$ ), dobijena korišćenjem Gauss-ovog jezgra prikazana je na Slici 3.2.a. Distribucije iz predložene klase čiji je red  $N=4$  i  $N=6$ , su prikazane na Slikama 3.2.b i 3.2.c, respektivno (korišćeno je Gauss-ovo jezgro kao i u slučaju  $N=2$ ). Očigledno je da kvadratne distribucije ne mogu dobro da prate varijacije trenutne frekvencije. Znatno bolji rezultati se postižu za  $N=4$ , dok se dodatno poboljšanje ostvaruje korišćenjem distribucije šestog reda ( $GCD_{AF}$  za  $N=6$ ), koja dalje povećava koncentraciju u odnosu na slučaj  $N=4$ . Tačna i procijenjena trenutna frekvencija signala (za  $GCD_{AF}$ ,  $N=6$ ) su prikazane na Slici 3.2.d.



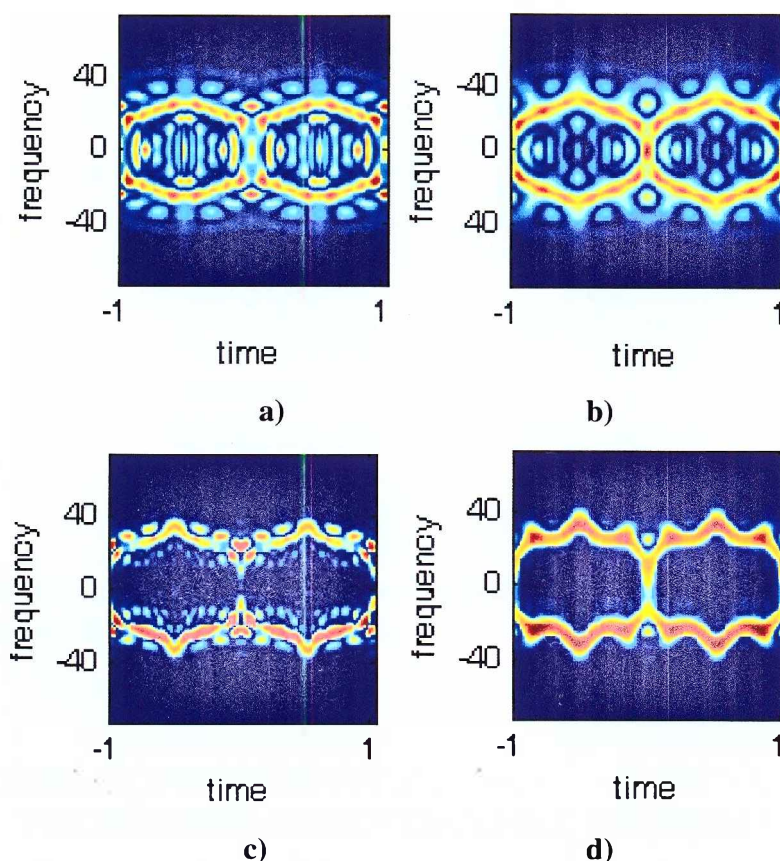
**Slika 3.2. Distribucije iz predložene klase: a)  $N=2$ ; b)  $N=4$ ; c)  $N=6$ ; d) tačna trenutna frekvencija (plava linija) i trenutna frekvencija procijenjena na osnovu  $GCD_{AF}$ ,  $N=6$**

**Primjer 3:** U prethodnim primjerima su razmatrani signali, čije se komponente preklapaju u vremenu. Međutim, analiza postaje znatno komplikovanija ukoliko se komponente preklapaju i u pravcu vremenske i u pravcu frekvencijske ose. Na primjer, posmatrajmo sljedeći signal:

$$z(t) = \cos(j \cdot (9 \cos(\pi \cdot t) + 2/3 \cos(3 \cdot \pi \cdot t) + 5/7 \cos(5 \cdot \pi \cdot t)));$$

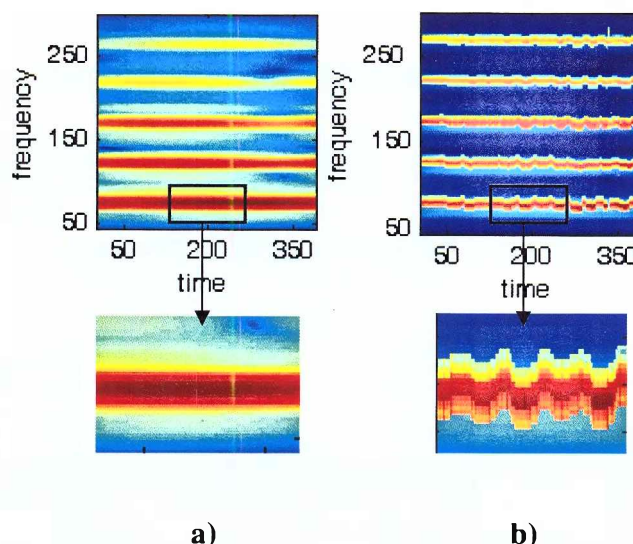
Choi-Williams-ova distribucija i Wigner-ova distribucija filtrirana korišćenjem Gauss-ovog jezgra prikazane su na Slici 3.3.a. i 3.3.b, respektivno. Distribucija četvrtog reda ( $GCD_{AF}$  za  $N=4$ ) je računata korišćenjem Choi-Williams-ovog jezgra (Slika 3.3.c) i Gauss-ovog jezgra (Slika 3.3.d). Primijetimo da distribucija  $GCD_{AF}$  za  $N=4$  sa Gauss-ovim jezgrom pokazuje bolje performanse u odnosu na ostale (posmatrane) distribucije. Jedini problem prilikom procjene trenutne frekvencije može nastati u presječnoj tački komponenti signala.





**Slika 3.3. a) Choi-Williams-ova distribucija; b)  $GCD_{AF}$ ,  $N=2$ ; c)  $GCD_{AF}$ ,  $N=4$  sa Choi-Williams-ovim jezgrom; d)  $GCD_{AF}$ ,  $N=4$  sa Gauss-ovim jezgrom**

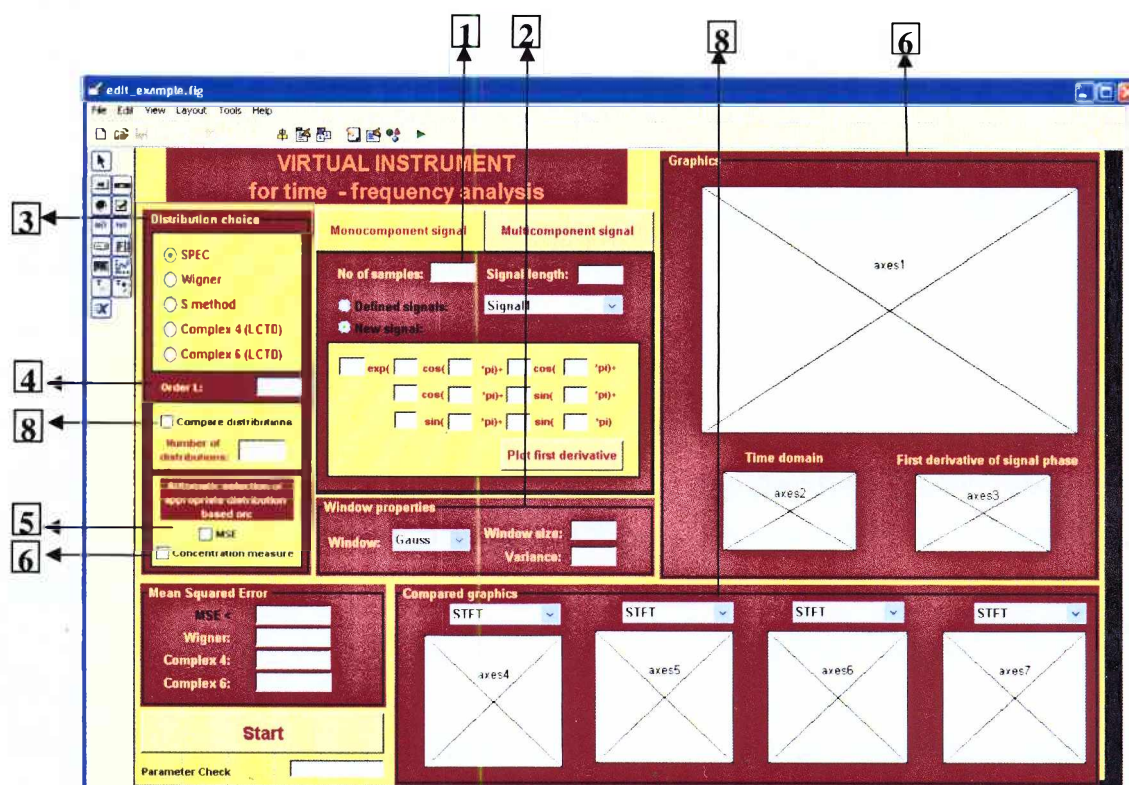
**Primjer 4:** U ovom primjeru je razmatran realni multikomponentni signal flaute koji se sastoji iz nekoliko komponenti sa nelinearnim varijacijama trenutne frekvencije. Rezultati dobijeni primjenom Wigner-ove distribucije ( $N=2$ ) filtrirane Gauss-ovim jezgrom i distribucije sa kompleksnim argumentom  $GCD_{AF}$  za  $N=4$ , prikazane su redom na Slikama 3.4.a i 3.4.b. Distribucija  $GCD_{AF}$  reda  $N=4$ , obezbjeđuje značajno poboljšanje prikaza brzo promjenljivih harmonika signala. Sa druge strane, za stacionarne ili kvazistacionarne signale (kao što je govor), sa malim varijacijama frekvencije u okviru prozora, kvadratne distribucije mogu da obezbijede dovoljno dobre rezultate.



**Slika 3.4. Realni signal flaute: a) Wigner-ova distribucija sa Gauss-ovim jezgrom i jedan zumirani region; b) distribucija  $GCD_{AF}$ ,  $N=4$ , i njen zumirani region**

### 3.3 VIRTUELNI INSTRUMENT ZA VISOKO-KONCENTRISANE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE

Na kraju ovog poglavlja, a u cilju sublimacije rezultata dobijenih korišćenjem visoko-koncentrisanih vremensko-frekvencijskih distribucija, predstavljen je virtuelni instrument za analizu signala sa nestacionarnom trenutnom frekvencijom [38], [39]. Uprkos varijacijama trenutne frekvencije, pogodnim izborom forme i reda vremensko-frekvencijske distribucije može se postići proizvoljno visoka koncentracija. Izbor distribucije se može vršiti manuelno, a obezbijedena je i automatizovana procedura. Predloženi instrument omogućava i realizaciju visoko-koncentrisanih distribucija u ambiguity domenu. Pri tome je instrument predviđen za analizu kako jednokomponentnih tako i multikomponentnih signala. Zahvaljujući velikom broju opcija, omogućeno je poređenje rezultata dobijenih korišćenjem više distribucija istovremeno. Instrument je implementiran u Matlab-u 7, a njegov izgled prikazan je na Slici 3.5.



Slika 3.5. Izgled virtuelnog instrumenta za vremensko-frekvencijsku analizu

U okviru instrumenta je uključena realizacija sljedećih vremensko-frekvencijskih distribucija: spektrograma, Wigner-ove distribucije, S-metoda, distribucija sa kompleksnim argumentom različitog reda, klase distribucija sa kompleksnim argumentom bazirane na korišćenju ambiguity domena, koja ujedno uključuje i Cohen-ovu klasu distribucija. Realizovane su i L-forme distribucija. U nastavku je dat opis izgleda instrumenta i opcija koje on nudi [38], [39].

### 3.3.1. Opis virtuelnog instrumenta

#### 1. Ulazni signal

Signal može biti odabran sa liste definisanih signala - *Defined signals*, gdje je ponuđeno više ilustrativnih primjera. U suprotnom, za proizvoljni signal sa nelinearnom faznom funkcijom:



$$f(t) = A e^{a_1 \cos(b_1 \pi t) + a_2 \cos(b_2 \pi t) + a_3 \cos(b_3 \pi t)} \times e^{a_4 \sin(b_4 \pi t) + a_5 \sin(b_5 \pi t) + a_6 \sin(b_6 \pi t)}, \quad (3.10)$$

korisnik može sam odabrati vrijednosti parametara  $A, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ . Takođe, potrebno je definisati dužinu signala.

### 2. Funkcija prozora

Pri računanju distribucija, dostupni su različiti tipovi prozora (pravougaoni, Gauss-ov, Hanning-ov, Hamming-ov). Ujedno je moguće podesiti parametre prozora kao što je dužina prozora. Sva podešavanja vezana za funkcije prozora nalaze se u sklopu dijela **Window properties**.

### 3. Izbor distribucije (manuelno)

U okviru odjeljka **Distribution choice**, korisnik može izabrati željenu distribuciju, pri čemu: *SPEC* predstavlja spektrogram, *Wigner* predstavlja Wigner-ovu distribuciju, *S method* je S-metod, *Complex 4* predstavlja distribuciju četvrtog reda sa kompleksnim argumentom, dok *Complex 6* predstavlja distribuciju šestog reda sa kompleksnim argumentom.

### 4. Izbor parametra $L$

U cilju poboljšanja koncentracije, dostupna je i  $L$ -forma za svaku od navedenih distribucija. Pri tome, vrijednost parametra  $L$  treba da bude postavljena na vrijednost veću od 1. Vrijednost  $L=1$  odgovara osnovnoj formi distribucije.

### 5. Izbor distribucije na osnovu srednje kvadratne greške MSE:

Automatizovani izbor odgovarajuće distribucije, za neki analitički signal, je omogućen korišćenjem srednje kvadratne greške procjene trenutne frekvencije. Odgovarajuća distribucija treba da obezbjeđuje vrijednost MSE manju od unaprijed zadate vrijednosti koja se unosi u polju:  $MSE <$ .

### *6. Izbor distribucije na osnovu mjere koncentracije*

Optimalna distribucija treba da obezbijedi mjeru koncentracije veću od unaprijed zadate vrijednosti. Može se primjenjivati u slučaju jednokomponentnih signala.

### *7. Glavni panel za prikazivanje distribucije*

Pritiskom na dugme Start, izabrana vremensko-frekvencijska distribucija se pojavljuje u glavnom panelu za crtanje (axes 1). Dostupna su i dva dodatna panela: u prvom se prikazuje ulazni signal (axes 2), dok se u drugom crta tačna trenutna frekvencija analitičkog signala (axes 3).

### *8. Poređenje distribucija*

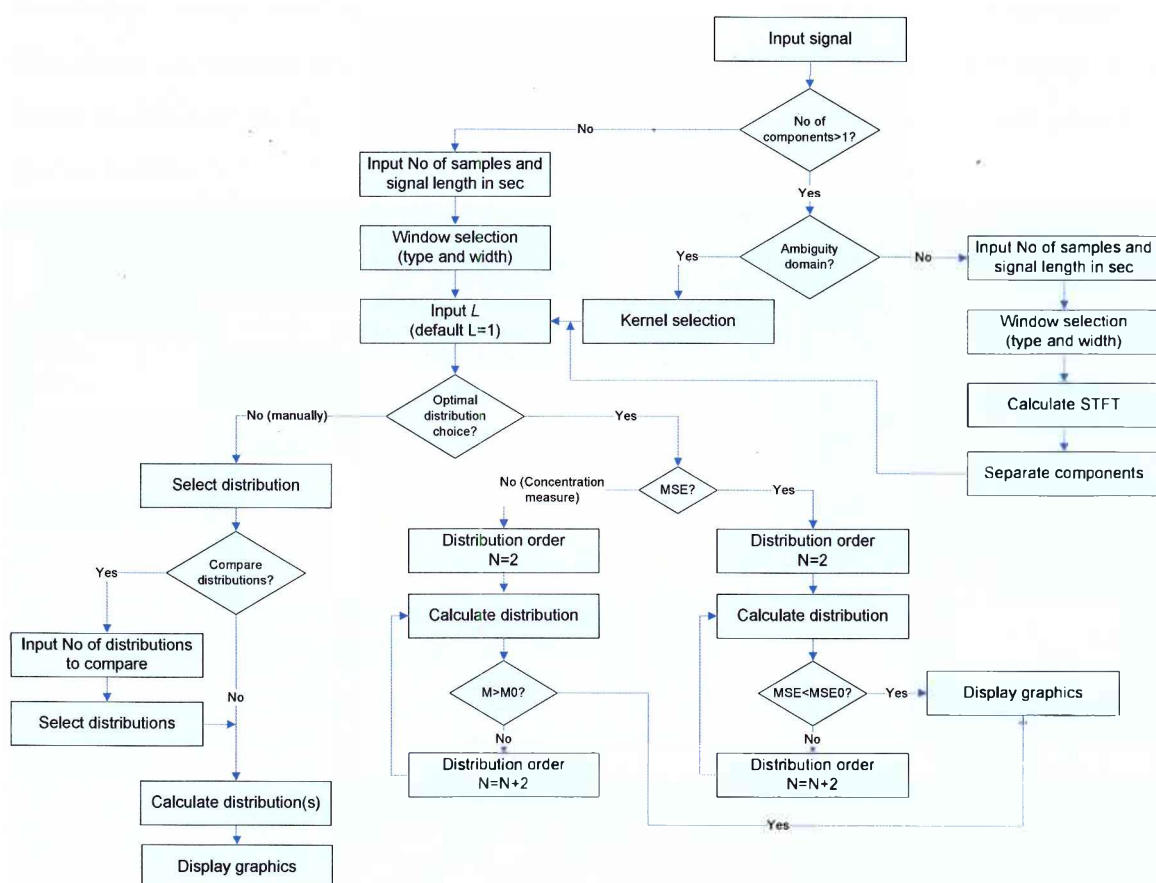
Distribucije se mogu međusobno porediti korišćenjem opcije **Compare distributions**, dok se one prikazuju u okviru panela **Compared graphics** na Slici 3.5. Dakle, korisnik najprije treba da izabere opciju **Compare distributions** i da unese broj distribucija koje želi da poredi. Distribucije za poređenje se biraju u okviru svakog prozora panela **Compared graphics** (axes 4, axes 5, axes 6, axes 7).

Šematski prikaz algoritma za realizaciju virtuelnog instrumenta dat je na Slici 3.6. U zavisnosti od broja komponenti signala, algoritam se opredjeljuje za realizaciju koja je pogodna za jednokomponentne ili za multikomponentne signale.

**Jednokomponentni signal:** Korisnik unosi broj odbiraka i trajanje signala u vremenu, kao i parametre funkcije prozora (širinu i tip prozora). Zatim, ukoliko se želi postići povećanje koncentracije, potrebno je definisati vrijednost parametra  $L$ . U suprotnom se računa osnovna forma distribucije ( $L=1$ ). Željena distribucija se može izabrati manuelno ili se može startovati procedura za traženje optimalne distribucije. Kada se vrši manuelni izbor distribucije, postoji mogućnost poređenja sa četiri dodatne distribucije, koje će biti prikazane u manjim pomoćnim prozorima (axes 4, axes 5, axes 6, axes 7). Procedura za automatsko pretraživanje optimalne distribucije, započinje sa distribucijom drugog reda ( $N=2$ ), tj. sa Wigner-ovom distribucijom. Zatim se iterativno povećava red distribucije

sve dok ne bude zadovoljen zadati uslov (dok MSE ne postane manja od unaprijed zadate vrijednosti).

**Multikomponentni signal:** U ovom slučaju postoje dvije mogućnosti za realizaciju distribucije. Za realizaciju u ambiguity domenu, najprije je potrebno izabrati određeno jezgro. Time je, u okviru instrumenta, dostupna čitava klasa vremensko-frekvencijskih distribucija. L-forma distribucija se, takođe, može opcionalno koristiti. Procedura izbora distribucije se odvija na isti način kao i u slučaju jednokomponentnih signala. Ukoliko nije na početku izabrana realizacija u ambiguity domenu, nakon unošenja parametara signala i funkcije prozora, računa se STFT, kao bi se odvojile komponente signala. Zatim, slijedi ista procedura opisana za jednokomponentne signale (Slika 3.6).



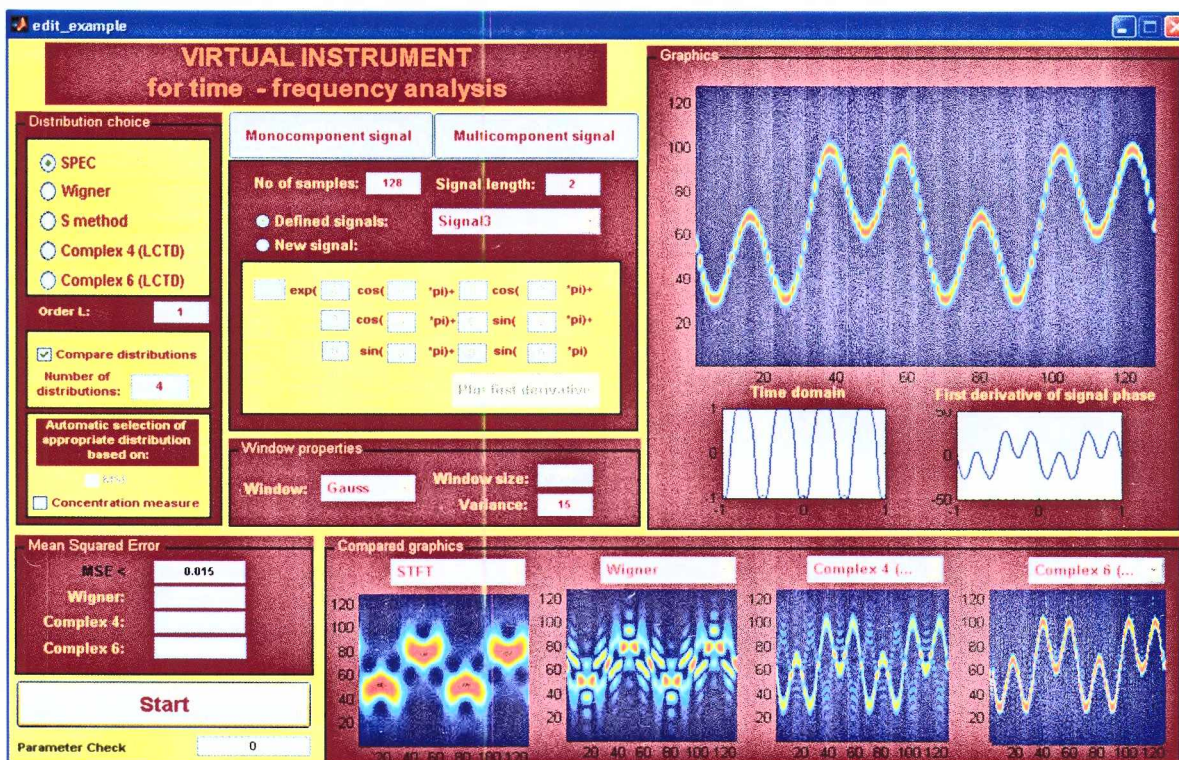
Slika 3.6. Algoritam za realizaciju virtuelnog instrumenta

### 3.3.2 Primjena virtuelnog instrumenta

#### Jednokomponentni signali

**Primjer 1:** Posmatrajmo signal u obliku:  $x(t) = e^{j(5/2 \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t))}$ .

Četiri pomoćna prozora za crtanje grafika su iskorišćena za poređenje rezultata dobijenih računanjem: Wigner-ove distribucije, S-metoda, distribucije četvrtog reda sa kompleksnim argumentom i distribucije šestog reda sa kompleksnim argumentom (Slika 3.7). Za računanje navedenih distribucija korišćen je Gauss-ov prozor širine  $N_s=128$  odbiraka. Primijetimo da je u slučaju spektrograma i Wigner-ove distribucije dobijena loša rezolucija zbog izraženih članova interferencije. Značajno poboljšanje rezolucije je postignuto korišćenjem distribucije četvrtog reda sa kompleksnim argumentom, dok distribucija šestog reda obezbeđuje odličnu koncentraciju duž trenutne frekvencije. Uklanjanje eventualnih preostalih članova interferencije može se postići korišćenjem L-forme distribucije šestog reda (za  $L=2$ ), koja je prikazana u glavnom prozoru za crtanje grafika na Slici 3.7.



Slika 3.7 Poređenje različitih vremensko-frekvencijskih distribucija

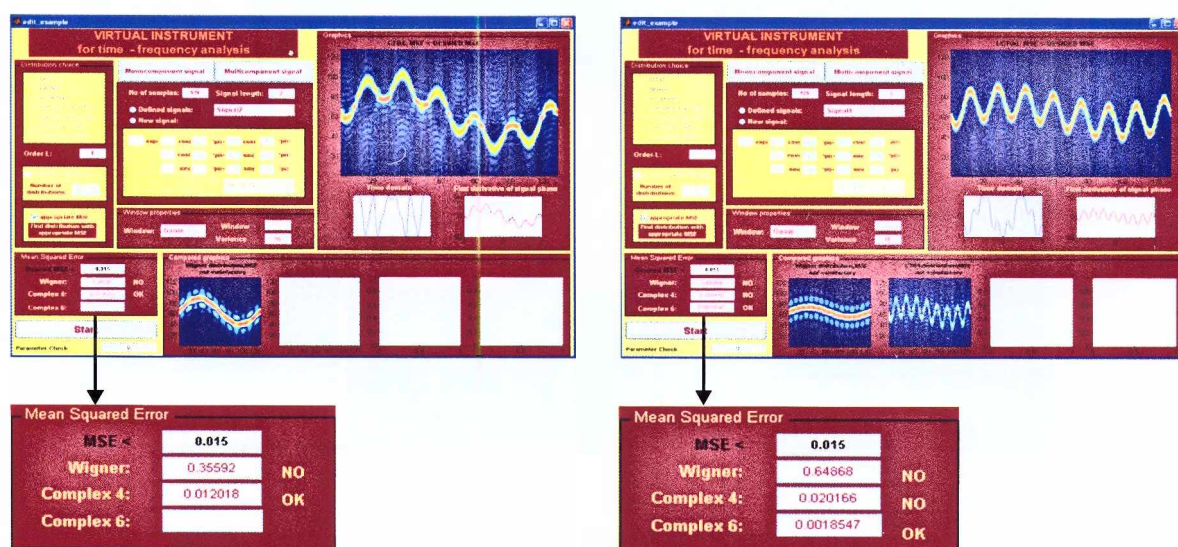


**Primjer 2:** U prethodnom primjeru, distribucije su birane manuelno. Međutim, korisnik može da unese najveću tolerisanu vrijednost greške (MSE) pri procjeni trenutne frekvencije. Na osnovu nje će instrument izabrati distribuciju koja zadovoljava zadati kriterijum. Na primjer, posmatrajmo dva signala:

$$y(t) = e^{j(7.5 \cos(\pi t) + 1/2 \cos(6\pi t))},$$

$$z(t) = e^{j(2 \cos(2\pi t) + 1/2 \cos(8\pi t) + 1/2 \cos(\pi t))}.$$

Uzmimo da najveća greška MSE koja se toleriše iznosi 0.015 (polje **MSE <**). Automatski izabrane distribucije za analizu ovih signala prikazane su redom na Slikama 3.8. a i b. Za razliku od Wigner-ove distribucije, distribucija četvrtog reda sa kompleksnim argumentom obezbjeđuje tačniju procjenu trenutne frekvencije signala  $y(t)$ . Stoga se ova distribucija automatski prikazuje u glavnom prozoru za crtanje, dok je u cilju poređenja, Wigner-ova distribucija prikazana u pomoćnom prozoru. Za signal sa bržim varijacijama trenutne frekvencije, kao što je signal  $z(t)$ , biće izabrana distribucija šestog reda sa kompleksnim argumentom i ona je prikazana u glavnom prozoru za crtanje na Slici 3.8.b. Distribucije nižeg reda koje ne daju zadovoljavajuće rezultate prikazane su u manjim pomoćnim prozorima.



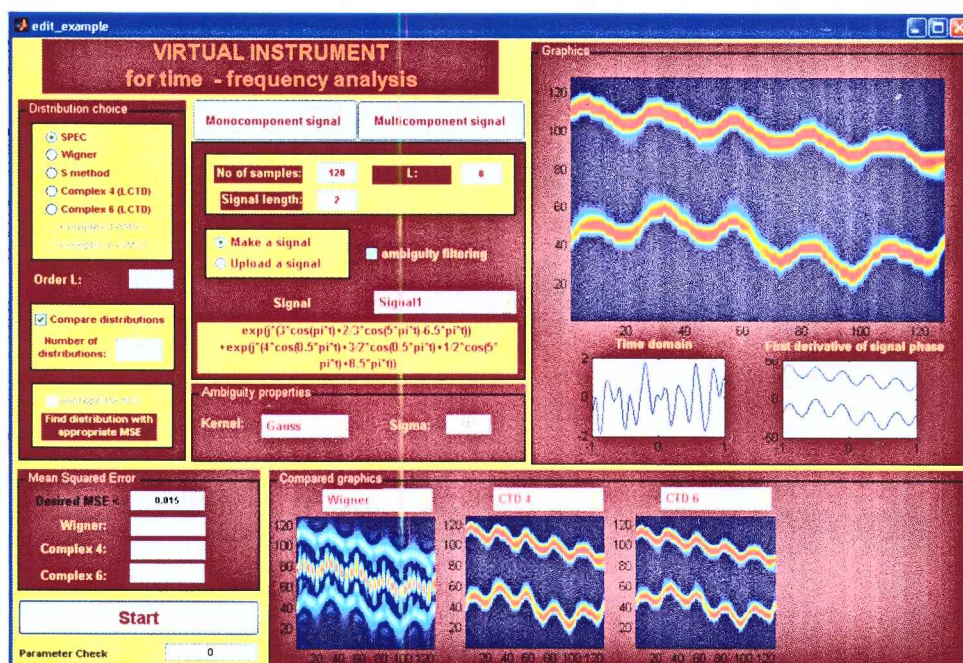
Slika 3.8. Automatizovani izbor odgovarajuće vremensko-frekvencijske distribucije  
a) distribucija četvrtog reda sa kompleksnim argumentom, b) distribucija šestog reda sa kompleksnim argumentom

## Multikomponentni signali

**Primjer 1:** Izabran je multikomponentni signal u obliku:

$$s(t) = e^{4j\cos(0.5\pi t) + \frac{2}{3}\cos(5\pi t) - 6.5\pi t} + e^{4j\cos(\frac{1}{2}\pi t) + \frac{3}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi t) + \frac{1}{2}\cos(5\pi t) + 8.5\pi t}$$

Dakle, on se sastoji od dvije nepreklapajuće komponente, sa brzim varijacijama fazne funkcije. STFT je računata korišćenjem  $N_s=128$  odbiraka. Poređenje Wigner-ove distribucije i distribucije četvrtog reda sa kompleksnim argumentom je prikazano na Slici 3.9 (pomoćni prozori za crtanje grafika). Primijetimo da je, zbog jako izraženih kros-članova, Wigner-ova distribucija nepogodna za analizu. Sa druge strane, distribucija četvrtog reda omogućava dobru koncentraciju, koja je dodatno poboljšana korišćenjem distribucije šestog reda sa kompleksnim argumentom.



Slika 3.9. Analiza multikomponentnog signala

## GLAVA 4

# VISOKO-KONCENTRISANE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE SA VIŠESTRUKIM PROZORIMA (MULTIWINDOW)

U prethodnom dijelu je pokazano da analiza signala sa brzim promjenama trenutne frekvencije zahtijeva korišćenje visoko-koncentrisanih distribucija, kao što su distribucije sa kompleksnim argumentom. Vidjeli smo da se povećanje koncentracije u vremensko-frekvencijskom domenu može ostvariti povećanjem reda distribucije, tj. dodavanjem novih članova u okviru momenta signala ili korišćenjem višestrukih integracija (L-forma distribucije). Naime, svako povećanje reda distribucije dovodi do eliminisanja polovine članova (izvoda faze) u okviru funkcije rasipanja distribucije nižeg reda. Za distribuciju  $N$ -tog reda, faktor rasipanja će sadržati samo članove u obliku:

$$\frac{\phi_{(t)}^{iN+1} \tau^{iN+1}}{N^{iN} (iN+1)!}, i=1, 2, \dots$$

U značajnom broju aplikacija, umjesto povećavanja reda distribucije, moguće je koristiti višestruke prozore pri realizaciji postojećih kvadratnih distribucija. Ukoliko se koristi mali broj prozora, ove distribucije su relativno jednostavne za realizaciju. Svaki od prozora treba da doprinese smanjenju faktora rasipanja koncentracije. Na primjer, eliminisanje prvih  $K$  izvoda faze signala, zahtijeva uvođenje  $K$  prozora u slučaju spektrograma. Međutim, za razliku od distribucija sa kompleksnim argumentom, funkcija rasipanja koncentracije će sadržati sve izvode reda većeg od  $K$ .

U ovoj sekciji će biti uveden S-metod zasnovan na višestrukim prozorima. Na ovaj način će biti povećana koncentracija u odnosu na standardnu formu ove distribucije. Biće više riječi o optimalnom izboru funkcija prozora, o broju funkcija prozora i njegovom uticaju na faktor rasipanja koncentracije, kao i o uticaju šuma na predloženu distribuciju sa višestrukim prozorima.



## 4.1 S-METOD SA VIŠESTRUKIM PROZORIMA BAZIRAN NA KORIŠĆENJU HERMITSKIH FUNKCIJA

### 4.1.1 Optimalni prozori – Hermitske funkcije

Efikasno rješenje za analizu vremenski promjenljivog spektra signala omogućeno je uvođenjem metoda zasnovanog na višestrukim prozorima [40]-[43]. Da bi se minimizovala varijansa, ovi metodi su bazirani na korišćenju ortogonalnih prozora. Istovremeno, prozori trebaju da budu optimalno koncentrisani kako bi obezbijedili mali bias. Dakle, za efikasnu vremensko-frekvencijsku analizu se koriste ortogonalni prozori koji su optimalno koncentrisani u združenom vremensko-frekvencijskom domenu. Imajući u vidu da su Hermitske funkcije dobro koncentrisane u vremenskom i u frekvencijskom domenu, može se reći da one predstavljaju jedan od optimalnih izbora za višestruke prozore. Ove funkcije su zapravo optimalno lokalizovane u okviru kružne oblasti vremensko-frekvencijske ravni:  $\{(t, \omega): t^2 + \omega^2 \leq R^2\}$ , pri čemu je  $R$  konstanta [43].

Hermitska funkcija  $i$ -tog reda se definiše kao:

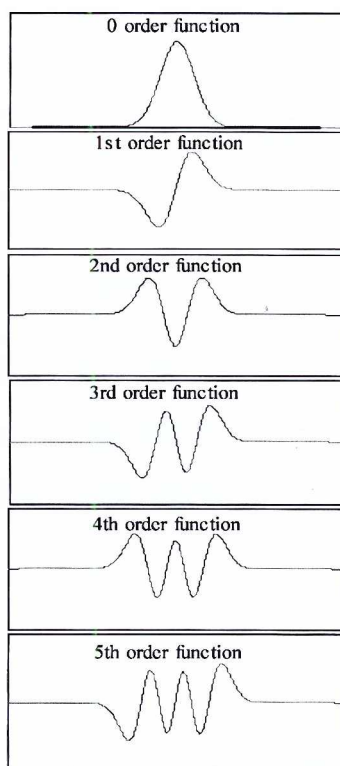
$$\Psi_i(t) = \frac{(-1)^i e^{t^2/2}}{\sqrt{2^i i! \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{d^i(e^{-t^2})}{dt^i}. \quad (4.1)$$

Mada na prvi pogled računanje Hermitskih funkcija djeluje vrlo zahtjevno, one se mogu jednostavno dobiti rekurzivnom realizacijom definisanom na sljedeći način [44], [45]:

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-t^2/2}, \\ \Psi_1(t) &= \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-t^2/2}, \\ \Psi_i(t) &= t\sqrt{\frac{2}{i}}\Psi_{i-1}(t) - \sqrt{\frac{i-1}{i}}\Psi_{i-2}(t), \quad \forall i \geq 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Možemo primijetiti da Hermitska funkcija nultog reda  $\Psi_0$  odgovara Gauss-ovom prozoru. Hermitske funkcije iščezavaju u beskonačnosti i predstavljaju sopstvene funkcije (eigenfunkcije) Fourier-ove transformacije. Dakle, one obezbjeđuju istovremenu analizu signala i njegove Fourier-ove transformacije. Shodno njihovim dobrim osobinama, Hermitske funkcije se koriste u nizu različitih aplikacija, kao na primjer, analizi tekstura slike, filtriranju, poboljšanju rezolucije slike, obradi govornih signala, i slično [44]-[47]. Izgled Hermitskih funkcija  $\Psi_i$  za  $i=0,1,2,3,4,5$ , prikazan je na Slici 4.1.



Slika 4.1. Ilustracija Hermitskih funkcija  $\Psi_i$  za  $i=0,1,2,3,4,5$ .

#### 4.1.2 Spektrogram sa višestrukim prozorima

Spektrogram sa višestrukim prozorima je definisan na bazi ideje uvedene u radu Thomson-a [40]. Naime, on se definiše kao težinska suma  $K$  spektrograma, gdje  $K$  predstavlja ukupan broj korišćenih prozora, odnosno Hermitskih funkcija. Spektrogram sa višestrukim prozorima je definisan kao [42]:

$$MWS_K = \sum_{i=0}^{K-1} d_i(t) SPEC_i(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(t) \left| \int x(\tau) \Psi_i(\tau-t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2, \quad (4.3)$$

gdje je  $x(t)$  signal, dok su  $d_i(t)$  težinski koeficijenti.

Procijenjena trenutna frekvencija, za signal predstavljen u obliku:  $x(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ , se može definisati kao [42]:

$$\langle \omega \rangle_t = \sum_{i=1}^{K-1} d_i(t) \frac{\int A(t+\tau)^2 \Psi_i^2(\tau) \varphi'(t+\tau) d\tau}{P_i(t)}, \quad (4.4)$$

gdje je  $P_i(t)$  marginalni uslov za spektrogram, računat korišćenjem  $i$ -te Hermitske funkcije, i važi da je:

$$P_i(t) = \int A(t+\tau)^2 \Psi_i^2(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Pretpostavljajući da je  $x(t)$  signal sa polinomijalnom fazom  $K$ -tog reda i primjenjujući razvoj funkcije  $\varphi'(t)$  u Taylor-ov red, moment  $n$ -tog reda za spektrogram (dobijen korišćenjem Hermitske funkcije  $i$ -tog reda) se definiše kao [42]:

$$M_i^n(t) = \frac{1}{P_i(t)} \int A(t+\tau)^2 \Psi_i^2(\tau) \tau^n d\tau, \quad (4.6)$$

$i=0, 1, \dots, K-1, n=0, 1, \dots, K-1.$

Dakle, srednja frekvencija  $\langle \omega \rangle_t$  se sada može zapisati u obliku:

$$\langle \omega \rangle_t = \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(t) \frac{M_i^n(t)}{n!} \varphi^{n+1}(t). \quad (4.7)$$

Da bi se dobio prvi izvod faze  $\varphi'(t)$  treba da važi da je:

$$\sum_{i=0}^{K-1} d_i(t) M_i^n(t) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Imajući u vidu da je  $\varphi(t)$  polinomijalna funkcija reda  $K$ , optimalni koeficijenti  $d_i(t)$  se mogu dobiti korišćenjem najmanje  $K$  spektrograma. Dakle, optimalna vrijednost težinskih koeficijenata  $d_i(n)$  se može izračunati na osnovu sljedeće relacije [42]:

$$\sum_{i=0}^{K-1} d_i(t) \frac{\int A^2(t+\tau) \Psi_i^2(\tau) \tau^n}{\int A^2(t+\tau) \Psi_i^2(\tau)} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

$$n=0,1,\dots,K-1,$$

Ukoliko se amplituda signala može smatrati konstantnom u okviru prozora ( $A(t+\tau)=A(t)$ ), težinski koeficijenti su konstante date u Tabeli 4.1.

TABELA 4.1. TEŽINSKI KOEFICIJENTI  $d_i$  ZA SIGNAL SA KONSTANTNOM AMPLITUDOM U ZAVISNOSTI OD BROJA HERMITSKIH FUNKCIJA  $K=1,\dots,11$

	<b>d<sub>0</sub></b>	<b>d<sub>1</sub></b>	<b>d<sub>2</sub></b>	<b>d<sub>3</sub></b>	<b>d<sub>4</sub></b>	<b>d<sub>5</sub></b>	<b>d<sub>6</sub></b>	<b>d<sub>7</sub></b>	<b>d<sub>8</sub></b>	<b>d<sub>9</sub></b>	<b>d<sub>10</sub></b>
<b>K=1</b>	1										
<b>K=2</b>	1.5	-0.5									
<b>K=3</b>	1.75	-1	0.25								
<b>K=4</b>	1.875	-1.375	0.625	-0.125							
<b>K=5</b>	1.937	-1.625	1	-0.375	0.062						
<b>K=6</b>	1.968	-1.781	1.312	-0.687	0.219	-0.031					
<b>K=7</b>	1.984	-1.875	1.546	-1	0.453	-0.125	0.016				
<b>K=8</b>	1.992	-1.929	1.710	-1.273	0.727	-0.289	0.070	-0.008			
<b>K=9</b>	1.996	-1.961	1.820	-1.492	1	-0.507	0.179	-0.039	0.003		
<b>K=10</b>	1.998	-1.978	1.890	-1.656	1.246	-0.754	0.344	-0.109	0.021	-0.002	
<b>K=11</b>	1.900	-1.561	0.955	-0.223	-0.357	0.573	-0.460	0.237	-0.079	0.016	-0.001

Korišćenjem  $K$  Hermitskih funkcija, moguće je ukloniti  $K-1$  izvoda faze iz faktora rasipanja koncentracije distribucije: drugi, treći,..., i  $K$ -ti. Dakle, veći broj funkcija  $K$  korišćenih pri realizaciji distribucije, obezbjeđuje veću koncentraciju u vremensko-frekvencijskom domenu.

Spektrogram sa višestrukim prozorima pokazuje znatno bolje performanse u odnosu na standardni spektrogram, te predstavlja efikasno sredstvo za procjenu trenutne

frekvencije [42]. Slično kao za spektrogram, višestruki prozori mogu se primijeniti i u slučaju S-metoda.

#### 4.1.3 S-metod sa višestrukim prozorima

Slijedeći analogiju sa standardnim S-metodom, njegova forma sa višestrukim prozorima se definiše kao konvolucija kratkotrajnih Fourier-ovih transformacija računatih za različite Hermitske funkcije [48], [49]. Naime, STFT se računa za Hermitske funkcije različitog reda, a zatim se vrši konvolucija tako dobijenih STFT za svaki red  $i$ , u okviru dodatnog frekvencijskog prozora  $P(\theta)$ . Na osnovu toga, S-metod sa višestrukim prozorima se dobija kao suma konvolucionih članova pomnoženih odgovarajućim težinskim faktorima [48]:

$$MWSM_K(t, \omega) = \sum_{i=0}^{K-1} \int_{\theta} P(\theta) d_i(t) STFT_i(t, \omega + \theta) STFT_i^*(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (4.10)$$

Pri tome  $STFT_i(t, \omega)$  označava kratkotrajnu Fourier-ovu transformaciju dobijenu korišćenjem Hermitske funkcije  $i$ -tog reda:

$$STFT_i(t, \omega) = \int x(\tau) \Psi_i(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.11)$$

Prozor  $P(\theta)$  u frekvencijskom domenu, treba da ima iste osobine kao i u slučaju standardnog S-metoda. Diskretizacijom relacije (4.10) dobija se oblik distribucije koji je pogodan za praktične realizacije, a koji se može zapisati kao [48]:

$$MWSM(n, k) = \sum_{i=0}^{K-1} d_i(n) |MWS_i(n, k)|^2 + \sum_{i=0}^{K-1} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^L d_i(n) P(l) STFT_i(n, k + l) STFT_i^*(n, k - l) \right\}. \quad (4.12)$$

Imajući u vidu da je ova distribucija definisana korišćenjem Hermitskih funkcija, u nastavku će biti korišćen naziv Hermitski S-metod [48]. Prvi član u okviru Hermitskog

S-metoda predstavlja Hermitski spektrogram. Članovi u konvoluciji, poboljšavaju kvalitet i rezoluciju Hermitskog spektrograma. Za polinomijalni signal čija je faza  $N$ -tog reda ( $N > K$ ), Hermitski S-metod sadrži  $(N-K)/2$  izvoda faze većih od  $K$ -tog izvoda, što predstavlja polovinu broja izvoda faze koja se pojavljuje u slučaju Hermitskog spektrograma. U cilju poređenja, faktori rasipanja koncentracije za: standardni spektrogram, S-metod, Hermitski spektrogram i Hermitski S-metod, dati su u Tabeli 4.2. Važno je primijetiti da Hermitski S-metod obezbeđuje bolju rezoluciju u poređenju sa standardnim S-metodom, na sličan način kao što Hermitski spektrogram pokazuje bolje performance u odnosu na standardni spektrogram [48].

TABELA 4.2. FAKTORI RASIPANJA ZA VREMENSKO-FREKVENCIJSKE DISTRIBUCIJE

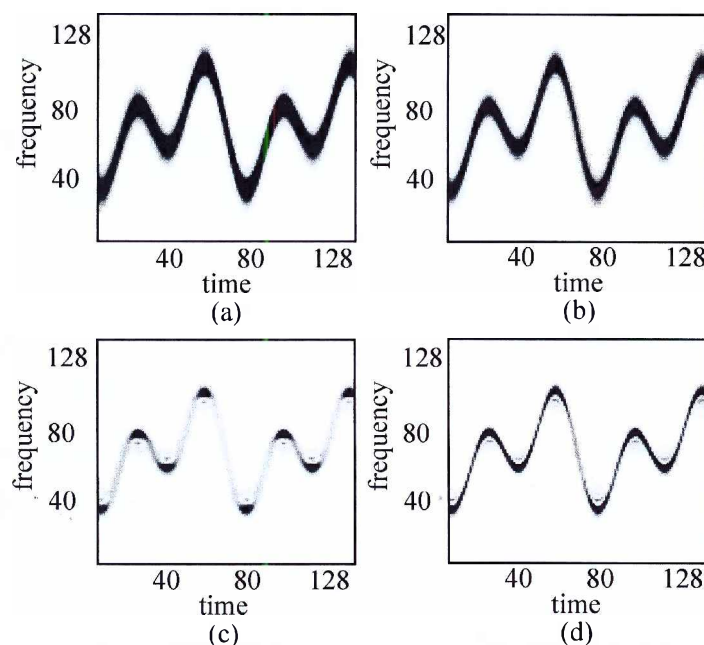
Distribucija	Faktor rasipanja	
Spektrogram	$Q(t, \tau) = \phi^{(2)}(t) \frac{\tau^2}{2!} + \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{3!} + \phi^{(4)}(t) \frac{\tau^4}{4!} + \dots$	
S-metod	$Q(t, \tau) = \phi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \dots$	
Hermitski Spektrogram sa K funkcija	$Q(t, \tau) = \phi^{(K+1)}(t) \frac{\tau^{K+1}}{(K+1)!} + \phi^{(K+2)}(t) \frac{\tau^{K+2}}{(K+2)!} + \phi^{(K+3)}(t) \frac{\tau^{K+3}}{(K+3)!} + \dots$	
Hermitski S-metod sa K funkcija	parno K	$Q(t, \tau) = \phi^{(K+1)}(t) \frac{\tau^{K+1}}{2^K (K+1)!} + \phi^{(K+3)}(t) \frac{\tau^{K+3}}{2^{(K+2)} (K+3)!} + \dots$
	neparno K	$Q(t, \tau) = \phi^{(K+2)}(t) \frac{\tau^{K+2}}{2^{K+1} (K+2)!} + \phi^{(K+4)}(t) \frac{\tau^{K+4}}{2^{(K+3)} (K+4)!} + \dots$

Jedan primjer koji ilustruje efikasnost Hermitskog S-metoda prikazan je na Slici 4.2. Posmatran je signal u sljedećem obliku:

$$x(t) = e^{6\pi j \cos(0.1\pi t) + 4\pi j \cos(0.2\pi t)}$$

Rezultati dobijeni korišćenjem spektrograma, S-metoda, Hermitskog spektrograma i Hermitskog S-metoda prikazani su redom na Slikama 4.2. a, b, c i d. Hermitski spektrogram i Hermitski S-metod su dobijeni sa četiri Hermitske funkcije ( $i=0,1,2,3$ ). Vrijednost parametra  $L=5$  je korišćena za računanje standardnog i Hermitskog S-metoda.

Vidimo da Hermitski S-metod obezbjeđuje bolju koncentraciju u odnosu na ostale posmatrane distribucije. Takođe, zahtjevi u pogledu računanja Hermitskog S-metoda su samo donekle povećani u odnosu na standardni S-metod, naročito imajući u vidu da su zadovoljavajući rezultati postignuti korišćenjem malog broja Hermitskih funkcija [48].



**Slika 4.2. Vremensko-frekvencijske distribucije signala  $x(t)$ : a) Spektrogram, b) S-metod sa  $L=5$ , c) Hermitski spektrogram sa četiri Hermitske funkcije, d) Hermitski S-metod sa četiri Hermitske funkcije i  $L=5$**

Izvršena je i procjena trenutne frekvencije u prisustvu šuma, za različite vrijednosti odnosa signala i šuma: SNR=5dB, SNR=7.5dB, i SNR=10dB. Srednje kvadratne greške (MSE) su računate za 40 realizacija (za svaku vrijednost SNR-a distribucija je računata za 40 različitih šumova). Srednja vrijednost svih kvadratnih grešaka je računata na sljedeći način:

$$E\{MSE\} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} E\left\{\left[f(n) - \bar{f}(n)\right]^2\right\},$$

gdje  $f(n)$  predstavlja tačnu trenutnu frekvenciju, dok je  $\bar{f}(n)$  trenutna frekvencija procijenjena na osnovu vremensko-frekvencijske distribucije (TFD):

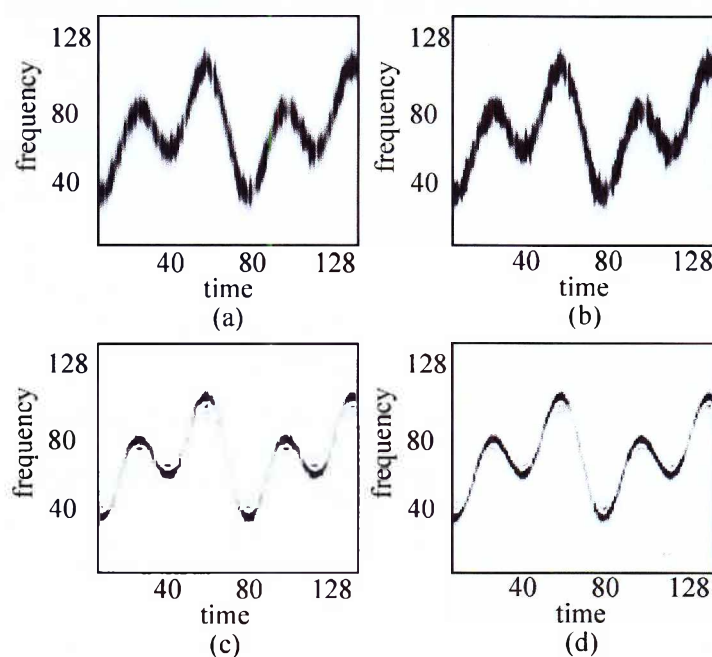
$$\bar{f}(n) = \max_k TFD(n, k).$$

Rezultati su dati u Tabeli 4.3.

TABELA 4.3. SREDNJE KVADRATNE GREŠKE PROCJENE TRENUTNE FREKVENCIJE ZA SIGNALS  
SA ŠUMOM

Srednja kvadratna greška (MSE)	SNR =5dB	SNR =7.5dB	SNR =10dB
Spektrogram	45.41	40.05	32.77
S-metod	40.33	31.34	21.9
Hermitski Spektrogram	24.17	20.56	13
Hermitski S-metod	13.77	12.9	11.8

Ilustracija posmatranih vremensko-frekvencijskih distribucija za signal sa šumom:  $y(t)=x(t)+v(t)$ , je data na Slici 4.3 (za SNR=7.5dB). Može se zaključiti da je, u poređenju sa drugim razmatranim distribucijama, Hermitski S-metod manje osjetljiv na šum. Ovo predstavlja njegovu dodatnu prednost, naročito za slučaj analize realnih signala.



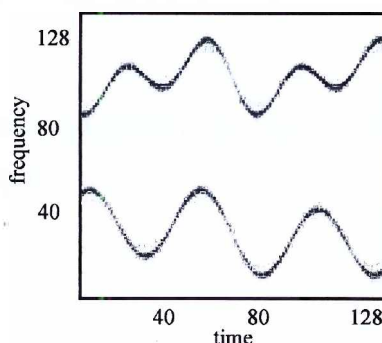
Slika 4.3. Vremensko-frekvencijske distribucije za signal sa šumom: a) Spektrogram, b) S-metod, c) Hermitski spektrogram, d) Hermitski S-metod



Bitno je naglasiti da Hermitski S-metod, kao ni standardni S-metod, ne sadrži kros članove za slučaj multikomponentnih signala. Da bi se to postiglo, širina  $(2L+1)$  prozora  $P(\theta)$  u frekvencijskom domenu treba da bude manja od minimalnog rastojanja između auto-članova signala. Ilustracija Hermitskog S-metoda za multikomponentni signal:

$$z(t) = e^{3\pi j \cos(0.1\pi t) + 2\pi j \cos(0.2\pi t) + 12jt} + e^{4\pi j \cos(0.15\pi t) + 4\pi j \cos(0.05\pi t) - 12jt},$$

je data na Slici 4.4.



**Slika 4.4. Ilustracija Hermitskog S-metoda za slučaj multikomponentnog signala**

## 4.2 DVODIMENZIONNI HERMITSKI S-METOD

Dvodimenziona STFT signala  $x(n_1, n_2)$ , se definiše kao:

$$STFT(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_1=-N/2}^{N/2-1} \sum_{i_2=-N/2}^{N/2-1} x(n_1 + i_1, n_2 + i_2) e^{-j(2\pi/N)(i_1 k_1 + i_2 k_2)}. \quad (4.13)$$

Dvodimenzioni spektrogram se dobija kao kvadrat njene apsolutne vrijednosti:  $Spec(n_1, n_2, k_1, k_2) = |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)|^2$ . U slučaju signala sa vremenski promjenljivom frekvencijom, dvodimenziona STFT, kao i spektrogram, daju zamućenu dvodimenzionu sliku signala.

Kako bi se poboljšala koncentracija spektrograma, koristi se dvodimenziona forma S-metoda. Dvodimenzioni S-metod računat po jednoj koordinati može se zapisati kao [50]-[55]:

$$SM_R(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_1=-L}^L P(i_1) STFT(n_1, n_2, k_1 + i_1, k_2) STFT^*(n_1, n_2, k_1 - i_1, k_2), \quad (4.14)$$

gdje  $P$  kao i u jednodimenzionom slučaju predstavlja frekvencijski prozor koji je najčešće pravougaonog oblika. Na sličan način, dvodimenzioni S-metod se može računati i po drugoj koordinati kao:

$$SM_{CR}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_2=-L}^L P(i_2) STFT(n_1, n_2, k_1, k_2 + i_2) STFT^*(n_1, n_2, k_1, k_2 - i_2). \quad (4.15)$$

Dvodimenzioni S-metod za poboljšanje koncentracije po obje koordinate se definiše na sljedeći način [50], [51]:

$$SM(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_1=-L}^L \sum_{i_2=-L}^L P(i_1, i_2) STFT(n_1, n_2, k_1 + i_1, k_2 + i_2) \times \quad (4.16) \\ \times STFT^*(n_1, n_2, k_1 - i_1, k_2 - i_2).$$

U zavisnosti od konkretne aplikacije, može se koristiti jedna od navedenih formi dvodimenzionog S-metoda. Na primjer, dvodimenzioni S-metod se može koristiti za poboljšanje rezolucije ili tzv. izoštravanje radarskih slika [54]. Naime, usljed kretanja mete dolazi do zamućenja slike u pravcu normalnom na liniju radar-meta, te je neophodno njeno fokusiranje u tom pravcu. Međutim, kao rezultat neuniformne rotacije ili brzih pokreta mete, zamućenje može da nastane i u pravcu radar-meta. U tom slučaju može se koristiti dvodimenzioni S-metod po obje koordinate [54].

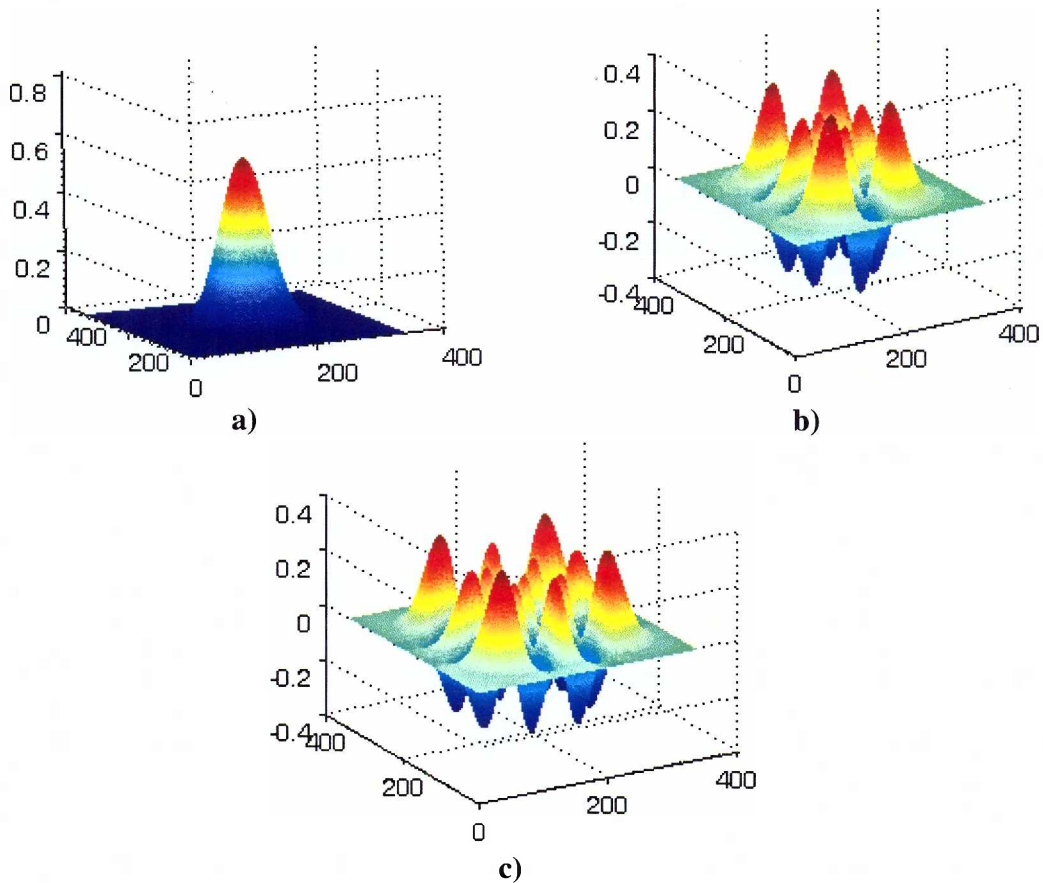
#### 4.2.1 Dvodimenzioni S-metod baziran na Hermitskim funkcijama

Vidjeli smo da se u slučaju jednodimenzionih signala, vremensko-frekvencijska rezolucija može dodatno popraviti korišćenjem višestrukih prozora [49]. Pri tome se za analizu dvodimenzionih signala uvode dvodimenzione funkcije prozora. Kako bi se iskoristile njihove dobre osobine, jednodimenzione Hermitske funkcije proširene su na dvodimenzioni slučaj, i definišu se kao [45]:

$$\Psi_{kl}(x, y) = \frac{(-1)^{k+l} e^{x^2/2+y^2/2}}{\sqrt{2^{k+l} k! l! \pi}} \frac{d^k(e^{-x^2})}{dx^k} \frac{d^l(e^{-y^2})}{dy^l}. \quad (4.17)$$

Primjeri dvodimenzionih Hermitskih funkcija su dati na Slici 4.5. Interesantno je primijetiti da se dvodimenzione Hermitske funkcije mogu dobiti računanjem jednodimenzionih funkcija, pojedinačno za svaku koordinatu:

$$\Psi_{kl}(x, y) = \Psi_k(x) \Psi_l(y) = \frac{(-1)^k e^{x^2/2}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \frac{d^k(e^{-x^2})}{dx^k} \frac{(-1)^l e^{y^2/2}}{\sqrt{2^l l! \sqrt{\pi}}} \frac{d^l(e^{-y^2})}{dy^l}. \quad (4.18)$$



**Slika 4.5. Ilustracija nekoliko dvodimenzionih Hermitskih funkcija:**

a)  $\Psi_{00}(x, y)$ , b)  $\Psi_{24}(x, y)$ , c)  $\Psi_{44}(x, y)$

Po analogiji sa jednodimenzionim Hermitskim S-metodom, dvodimenzioni S-metod sa višestrukim prozorima se definiše kao konvolucija dvodimenzionih STFT računatih korišćenjem Hermitskih funkcija:

$$HSM(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_1=-L}^L \sum_{i_2=-L}^L P(i_1, i_2) HSTFT^K(n_1, n_2, k_1 + i_1, k_2 + i_2) \times \\ \times HSTFT^{K*}(n_1, n_2, k_1 - i_1, k_2 - i_2), \quad (4.19)$$

Dvodimenziona STFT sa  $K$  Hermitskih funkcija je označena sa  $HSTFT^K(n_1, n_2, k_1, k_2)$ . Ona predstavlja sumu dvodimenzionih STFT računatih za niz Hermitskih funkcija različitog reda, kao što slijedi [49]:

$$HSTFT^K(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1} HSTFT^{kl}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \\ = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{i_1=-N/2}^{N/2-1} \sum_{i_2=-N/2}^{N/2-1} d_{kl} \Psi_{kl}(n_1, n_2) x(n_1 + i_1, n_2 + i_2) e^{-j(2\pi/N)(i_1 k_1 + i_2 k_2)}, \quad (4.20)$$

Težinski koeficijenti su označeni kao  $d_{kl}$ , dok je  $K$  broj funkcija koji se koristi duž obje koordinate. U cilju pojednostavljenja realizacije,  $HSTFT^{kl}(n_1, n_2, k_1, k_2)$  se može dobiti kompozicijom jednodimenzionih slučajeva [49]:

$$HSTFT^{kl}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i_1=-N/2}^{N/2-1} \left[ \sqrt{d_l} \Psi_l(n_1) e^{-j(\frac{2\pi}{N} i_1 k_1)} \sum_{i_2=-N/2}^{N/2-1} \sqrt{d_k} \Psi_k(n_2) \right. \\ \left. \times x(n_1 + i_1, n_2 + i_2) e^{-j(\frac{2\pi}{N} i_2 k_2)} \right]. \quad (4.21)$$

Jednodimenzioni težinski koeficijenti  $d_k$  i  $d_l$  su definisani na osnovu procedure opisane u [29], dok je  $d_{kl} = \sqrt{d_k d_l} = d_{lk}$ . Dakle, može se zaključiti da dvodimenzione Hermitske funkcije imaju ulogu višestrukih prozora koji poboljšavaju koncentraciju po obje koordinate.

Dvodimenziona forma spektrograma sa višestrukim funkcijama se dobija kao [49]:

$$HSpec(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1} \left| HSTFT^{kl}(n_1, n_2, k_1, k_2) \right|^2. \quad (4.22)$$

Korišćenjem spektrograma, dvodimenzioni Hermitski S-metod se može zapisati u sljedećem obliku [49]:

$$HSM(n_1, n_2, k_1, k_2) = HSpec(n_1, n_2, k_1, k_2) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i_1=1}^L \sum_{i_2=1}^L P(i_1, i_2) HSTFT^K(n_1, n_2, k_1 + i_1, k_2 + i_2) HSTFT^{K*}(n_1, n_2, k_1 - i_1, k_2 - i_2) \right\} \quad (4.23)$$

Primijetimo da se u slučaju standardnog S-metoda definisanog relacijom (4.16), članovi

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i_1=1}^L \sum_{i_2=1}^L P(i_1, i_2) HSTFT^K(n_1, n_2, k_1 + i_1, k_2 + i_2) HSTFT^{K*}(n_1, n_2, k_1 - i_1, k_2 - i_2) \right\}$$

koriste za poboljšanje vremensko-frekvencijske rezolucije standardnog spektrograma (svi parni izvodi faze biće uklonjeni iz faktora rasipanja distribucije) [51], [54]. S obzirom da se ista ideja koristi za distribucije sa Hermitskim funkcijama, Hermitski S-metod poboljšava rezoluciju eliminisanjem parnih izvoda faze koji preostaju nakon što Hermitski spektrogram ukloni prvih  $K-1$  izvoda. Kao i u slučaju standardnog dvodimenzionog S-metoda, u nekim aplikacijama je dovoljno računati Hermitski S-metod duž jedne koordinate. Stoga se Hermitski S-metod po zasebnim koordinatama definiše na sljedeći način:

$$HSM_R(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i=-L}^L P(i) HSTFT^K(n_1, n_2, k_1 + i, k_2) HSTFT^{K*}(n_1, n_2, k_1 - i, k_2), \quad (4.24)$$

$$HSM_{CR}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \sum_{i=-L}^L P(i) HSTFT^K(n_1, n_2, k_1, k_2 + i) HSTFT^{K*}(n_1, n_2, k_1, k_2 - i).$$

Predloženi pristup se može generalizovati korišćenjem i drugih funkcija umjesto Hermitskih. Na primjer, Laguerre-ove funkcije se mogu interpretirati kao Wigner-ova distribucija Hermitskih funkcija. Naime, Laguerre-ova funkcija  $i$ -tog reda predstavlja Wigner-ovu distribuciju Hermitske funkcije  $i$ -tog reda. Stoga se ove funkcije mogu koristiti da se generišu optimalna jezgra. Takođe se mogu koristiti prozori dobijeni na osnovu spline funkcija, kao što su  $B$ -spline funkcije [56].

## GLAVA 5

### NEKI ASPEKTI PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE ANALIZE SIGNALA

Vremensko-frekvencijska analiza je našla primjenu u različitim aspektima obrade i analize nestacionarnih signala. U ovoj glavi biće analizirane neke od aplikacija vremensko-frekvencijskih distribucija. Najprije će biti riječi o primjenama u analizi jednodimenzionih i dvodimenzionih radarskih signala. Naime, biće razmatrane aplikacije karakterizacije i klasifikacije kretanja čovjeka korišćenjem radarskih signala i poboljšanje koncentracije slike radarske mete. Zatim će biti razmatrane watermarking tehnike za zaštitu multimedijalnih podataka zasnovane na multidimenzionoj vremensko-frekvencijskoj analizi. Na kraju je dat osvrt na analizu nekih biomedicinskih signala, dobijenih akcelometrijskom procedurom snimanja vibracija gutanja, a predložena je procedura za klasifikaciju ovih signala.

#### 5.1 ANALIZA RADARSKIH SIGNALA

##### 5.1.1 Primjena jednodimenzionog Hermitskog S-metoda za analizu radarskih signala

U ovom dijelu efikasnost jednodimenzionog Hermitskog S-metoda biće pokazana na primjerima sa radarskim signalima. Najprije je dat kratak pregled osnovnog modela radarskog signala, i s tim u vezi, metod procjene kretanja radarske mete. Posmatrajmo slučaj Doppler-ovog radara koji šalje signal u obliku [57], [58]:

$$s(t) = \begin{cases} e^{j\pi B f_r t^2} & \text{za } 0 \leq t \leq T_r, \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases} \quad (5.1)$$

gdje je  $t$  vrijeme,  $T_r$  vrijeme ponavljanja impulsa,  $B$  širina opsega poslatog impulsa. Najčešće se signal sastoji iz  $M$  komponenti:

$$s_M(t) = e^{-j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{M-1} s(t - mT_r), \quad (5.2)$$

pri čemu je frekvencija radara označena sa  $\omega_0$ . U nastavku možemo posmatrati samo jednu komponentu primljenog signala  $s_m(t) = e^{-j\omega_0 t} s(t - mT_r)$ . Ukoliko sa  $d(t)$  označimo rastojanje mete od radara (engleski *range*), primljeni signal kasni u odnosu na poslati signal za  $2d(t)/c$ :

$$s_m(t) = \sigma e^{-j\omega_0 \left( t - \frac{2d(t)}{c} \right)} s\left(t - \frac{2d(t)}{c} - mT_r\right), \quad (5.3)$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti, dok je  $\sigma$  koeficijent refleksije. Doppler-ova faza se može zapisati u obliku [57]:

$$\phi_r(t) = \int_0^t \Delta\omega_d(\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

pri čemu je sa  $\Delta\omega_d$  označena Doppler-ova frekvencija. Dakle, faza primljenog signala se mijenja po zakonu:

$$\phi_r(t) = \frac{4\pi}{\lambda} d(t) = \frac{2\omega_0}{c} d(t), \quad (5.5)$$

gdje je  $\lambda$  talasna dužina poslatog signala. Na osnovu relacije (5.5), pomjeraj Doppler-ove frekvencije je proporcionalan radijalnoj brzini mete:

$$\Delta\omega_r(t) = \frac{d}{dt}[\phi_r(t)] = \frac{2\omega_0}{c} \frac{d}{dt}[d(t)] = \frac{2\omega_0}{c} v(t). \quad (5.6)$$

Radarska meta može da sadrži strukture koje proizvode mehaničke vibracije i rotacije, te prouzrokuju frekvencijsku modulaciju odbijenog signala. Ova modulacija se naziva mikro-Doppler-ov fenomen. Vibracije površine od koje se odbija signal se mogu mjeriti na osnovu promjena faze. Shodno tome, pomjeraj Doppler-ove frekvencije se koristi za detektovanje vibrirajuće strukture na meti [58], [59].

Meta se može posmatrati kao skup primarnih rotirajućih tačaka [59]. Pretpostavljajući da su vibracije tačaka podešene na frekvenciju oscilacije  $\omega_p$ , njena faza se mijenja kao [59]:



$$\phi(t) = \frac{4\pi D_v}{\lambda} \sin(\omega_v t), \quad (5.7)$$

gdje je  $D_v$  amplituda vibracija, a  $\lambda$  talasna dužina poslatog signala. Mikro-Doppler-ova frekvencija, uzrokovana vibracijama, se može dobiti kao:

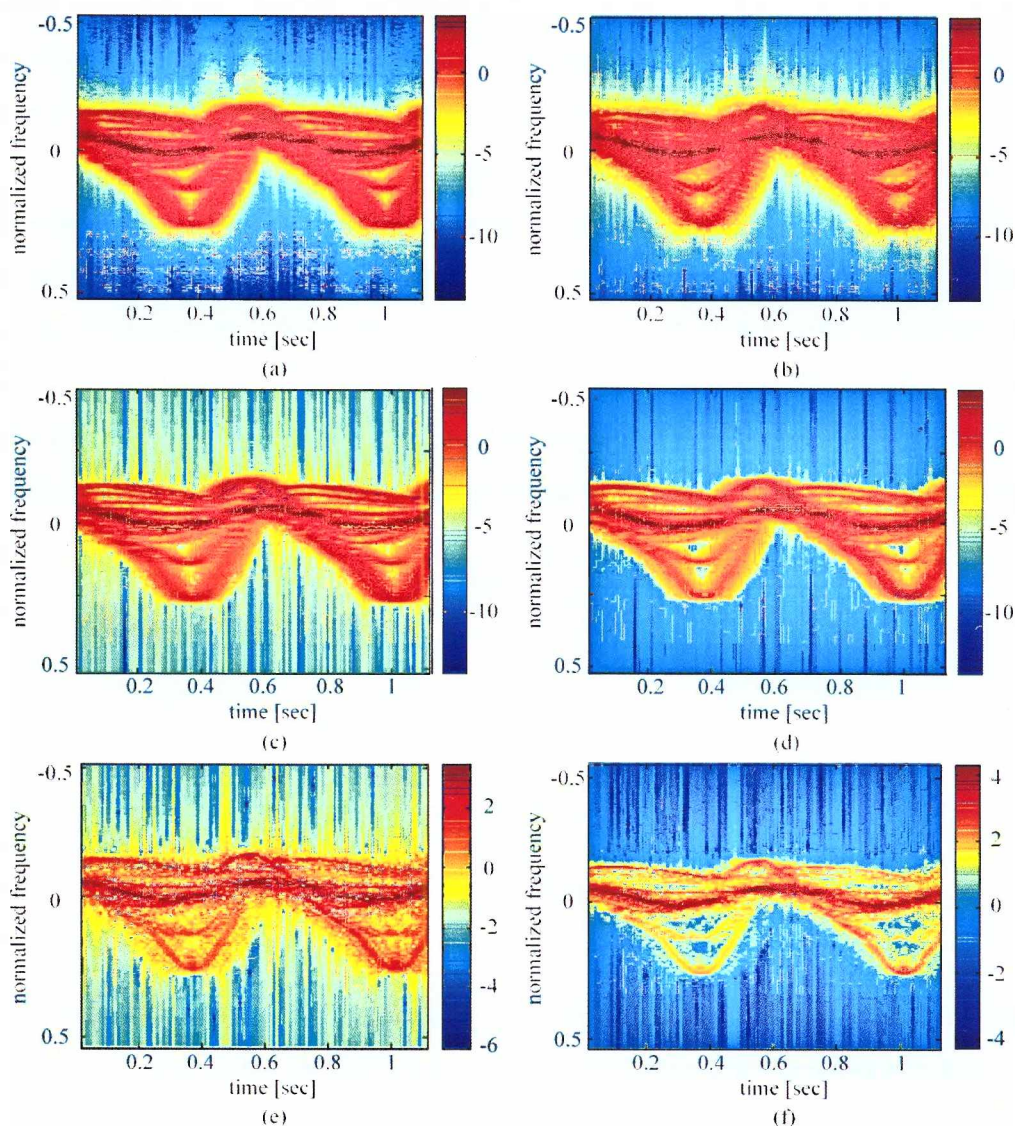
$$f_D(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{2D_v \omega_v}{\lambda} \cos(\omega_v t). \quad (5.8)$$

Mikro-Doppler-ove karakteristike su bitne za identifikaciju mete. Na primjer, često se ove karakteristike koriste za identifikaciju kretanja čovjeka, naročito za identifikaciju kretanja pojedinih dijelova tijela. Za ovu svrhu se koriste vremensko-frekvencijske distribucije, s obzirom da je mikro-Doppler vibrirajućih tačaka o koje se odbija radarski signal, vremenski-promjenljiv spektar [58], [59].

**Primjer:** Posmatran je radarski signal kojim se detektuje kretanje čovjeka [48]. Signal sadrži fizičke pokrete koji se izvršavaju istovremeno. Različiti dijelovi tijela imaju različite frekvencijske pomjeraje, jer se kreću različitim brzinama. Najjača komponenta odgovara kretanju tijela, dok se ostale komponente odnose na kretanje ruku i nogu. Na primjer, kretanje ruku proizvodi frekvencijsku modulaciju odbijenog signala i generiše bočne komponente oko glavne komponente kretanja tijela.

Standardni spektrogram i S-metod su računati korišćenjem Hanning-ovog prozora i prikazani su na Slikama 5.1.a i 5.1.b, respektivno. Takođe, spektrogram i S-metod dobijeni korišćenjem samo jedne Hermitske funkcije (funkcija nultog reda koja odgovara Gauss-ovom prozoru) dati su na Slikama 5.1.c i 5.1.d. Hermitski spektrogram prikazan je na Slici 5.1.e, dok je Hermitski S-metod prikazan na Slici 5.1.f. Ove vremensko-frekvencijske distribucije su računate korišćenjem pet Hermitskih funkcija. Standardni S-metod i Hermitski S-metod su realizovani korišćenjem parametra  $L=3$ , koji obezbjeđuje odsustvo kros-članova i dobru koncentraciju auto-članova. Veća vrijednost parametra  $L$  dovodi do pojave kros-članova. Naime, kada  $L$  dostigne vrijednost jednaku rastojanju između auto-članova, pojavljuju se kros-članovi. Primijetimo da standardni S-metod poboljšava koncentraciju u odnosu na spektrogram. Dalje poboljšanje koncentracije je ostvareno upotrebom Hermitskog spektrograma. Međutim, Hermitski S-metod pokazuje bolje performanse u poređenju sa svim ostalim razmatranim distribucijama, naročito u

regionu koji odgovara kretanju tijela čovjeka. Standardni S-metod i Hermitski spektrogram mogu da obezbijede dobru koncentraciju frekvencijskih komponenti koje se mogu smatrati linearnim. Sa druge strane, Hermitski S-metod dodatno poboljšava koncentraciju komponenti sa izraženijom nelinearnošću. Naglasimo da je dobra koncentracija postignuta korišćenjem pet Hermitskih funkcija ( $k=0,1,2,3,4$ ). Naime, prisustvo petog i viših izvoda faze nije značajno, te povećanje broja Hermitskih funkcija ne doprinosi značajnom poboljšanju rezultata.

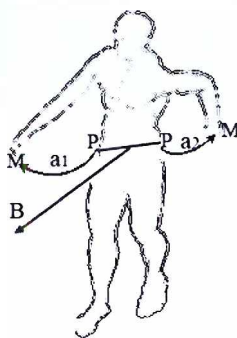


**Slika 5.1** Vremensko-frekvencijske distribucije sintetizovanog radarskog signala: a) standardni spektrogram sa Hanning-ovim prozorom, b) standardni S-metod sa Hanning-ovim prozorom i  $L=3$ ; c) spektrogram sa jednom Hermitskom funkcijom, d) S-metod sa jednom Hermitskom funkcijom, e) Hermitski spektrogram sa 5 Hermitskih funkcija, d) Hermitski S-metod sa 5 funkcija i  $L=3$

### 5.1.2 Primjena Hermitskog S-metoda za karakterizaciju kretanja čovjeka – Procedura klasifikacije načina kretanja

Problem radarske detekcije i klasifikacije vezane za pokretne ljudske mete, predmet je interesovanja mnogih istraživača [57] ,[59]-[61]. Detekcija pokreta je važna u različitim aplikacijama kao što su sigurnosni sistemi za nadgledanje i vojne aplikacije. Različiti algoritmi su razvijeni za klasifikaciju između ljudskih i životinjskih pokreta. Znatan broj ovih algoritama je zasnovan na vremensko-frekvencijskoj analizi radarskih signala, u prvom redu korišćenjem spektrograma [60], [61].

U nastavku je razmatran problem izdvajanja osobina koje bi omogućile razlikovanje kretanja čovjeka bez korišćenja ruku, kretanje sa pomjeranjem jedne i sa pomjeranjem obje ruke. Dakle, posebna pažnja je posvećena komponentama radarskog signala koji odgovaraju pokretima ruku. Pretpostavka je da se obje ruke pomjeraju na isti način. To znači da obje ruke prolaze pored tijela (kroz  $P$  tačke na Slici 5.2), u suprotnim smjerovima, približno u istom trenutku odnosno sa malom vremenskom razlikom  $\Delta t$ ). Isto važi za tačke ( $M$  na Slici 5.2) u kojima ruke dostižu maksimalan otklon u oba smjera.



Slika 5.2. Kretanje tijela – B, kretanje ruku  $a_1$  i  $a_2$

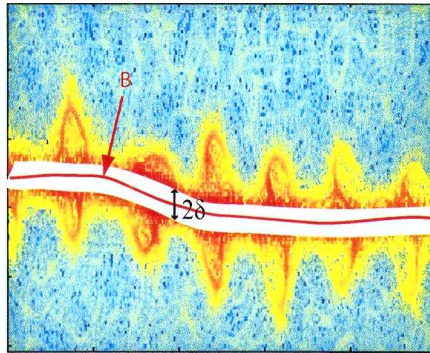
Vremensko-frekvencijska analiza je korišćena da se izdvoje mikro-Doppler obilježja koja su pogodna za proceduru klasifikacije. Pogodna vremensko-frekvencijska distribucija je dobijena korišćenjem Hermitskog S-metoda. Prvi korak procedure je uklanjanje najjačih komponenti signala koje odgovaraju glavnom kretanju (kretanje tijela i nogu). Stoga se funkcija oslonca, koja omogućava uklanjanje glavne komponente kretanja, može definisati u obliku:

$$S_1(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{za } (t, B(t) - \delta) < (t, \omega) < (t, B(t) + \delta) \\ 1, & \text{ostalo,} \end{cases} \quad (5.9)$$

gdje je  $2\delta+1$  širina regiona koji sadrži glavno kretanje, dok je:

$$B(t) = \arg \left\{ \max_{\omega} |MSM(t, \omega)| \right\}. \quad (5.10)$$

Pretpostavka je, da je maksimalna vrijednost glavnog kretanja centrirana, što ne mora uvijek biti tačno. Međutim, dovoljna je čak i gruba aproksimacija regiona koji sadrži glavno kretanje, jer je cilj samo da se oslabe jake komponente koje potiču od kretanja tijela kao bi došle do izražaja komponente koje potiču od kretanja ruku. Ilustracija regiona koji će biti uklonjen korišćenjem funkcije oslonca  $S_1(t, \omega)$  data je na Slici 5.3.



**Slika 5.3. Ilustracija regiona (označenog bijelom bojom) koji odgovara kretanju tijela**

Da bi se redukovao uticaj šuma i preostalih komponenti, a koje ujedno nisu kretanje ruku, uvodi se dodatna funkcija oslonca:

$$S_2(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{za } (t, \omega) : |MSM(t, \omega)| < Thr \\ 1, & \text{ostalo,} \end{cases} \quad (5.11)$$

gdje je  $Thr$  energetska prag. Zatim se funkcije oslonca  $S_1(t, \omega)$  i  $S_2(t, \omega)$  kombinuju u cilju dobijanja rezultujuće funkcije oslonca:

$$S(t, \omega) = S_1(t, \omega) \cap S_2(t, \omega). \quad (5.12)$$

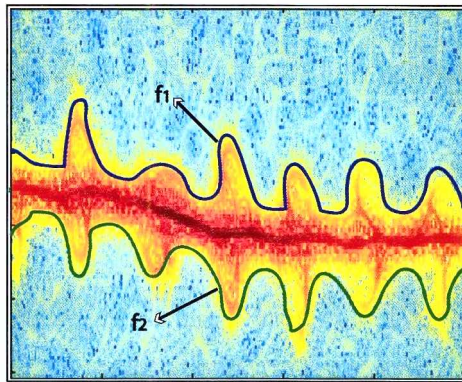


Tačke u okviru funkcije  $S(t, \omega)$  se mogu podijeliti na dva skupa: tačke iznad i tačke ispod glavne trajektorije (komponente kretanja tijela). Ukoliko se ruke pomjeraju tokom hoda, ovi skupovi tačaka opisuju anvelopu kretanja ruku. Na oba dijela anvelope se primjenjuje procedura modelovanja određenom krivom i kao rezultat dobijaju se dvije modelujuće funkcije:

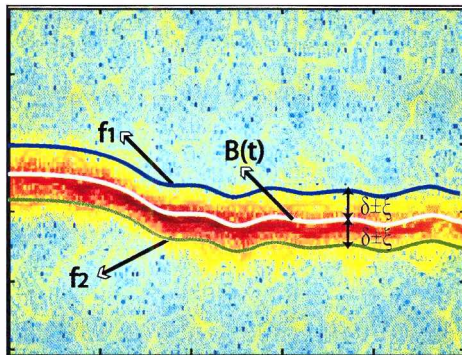
$$\mathcal{F}\{S(t, \omega)\} \xrightarrow{\omega > B(t)} f_1(t), \quad (5.13)$$

$$\mathcal{F}\{S(t, \omega)\} \xrightarrow{\omega < B(t)} f_2(t).$$

Modelujuće funkcije za slučaj kretanja sa pomjeranjem obje ruke i slučaj bez pomjeraja ruku ilustrovane su na Slici 5.4 i 5.5, respektivno.



Slika 5.4. Ilustracija anvelope (modelujuće funkcije  $f_1$  i  $f_2$ )



Slika 5.5. Signal koji ne sadrži pokrete ruku:  $f_1$  i  $f_2$  su na distanci  $\delta$  u odnosu na  $B(t)$  sa malim varijacijama  $\xi_{f1}$  i  $\xi_{f2}$

Razmatrajmo sljedeće pretpostavke:  $h_1$  – kretanje bez pomjeranja ruku,  $h_2$  – kretanje sa pomjeranjem jedne ili obje ruke. Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  se mogu, u opštem slučaju, zapisati kao:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= B(t) + \delta \pm \xi_{f1}(t), \\ f_2(t) &= B(t) - \delta \pm \xi_{f2}(t), \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdje je  $\delta$  konstantna vrijednost definisana u relaciji (5.9), dok su  $\xi_{f1}(t)$  i  $\xi_{f2}(t)$  varijacije (na gore i na dolje) u odnosu na glavno kretanje. Ove varijacije su uglavnom posljedica pomjeranja ruku tokom kretanja. U suprotnom, ukoliko se ruke ne pomjeraju tokom kretanja, varijacije  $\xi_{f1}(t)$  i  $\xi_{f2}(t)$  mogu nastati ili usljed šuma ili usljed kretanja nogu, te su značajno manje nego u slučaju varijacija nastalih pomjeranjem ruku (Slika 5.5). Dakle, pravilo za donošenje odluke za početnu klasifikaciju se može definisati kao:

$$MSE = MSE_1 + MSE_2 = \frac{1}{T} \sum_t \xi_{f1}^2(t) + \frac{1}{T} \sum_t \xi_{f2}^2(t) \begin{matrix} \geq \xi_{Thr} \\ < \xi_{Thr} \end{matrix} \begin{matrix} h_2 \\ h_1 \end{matrix}, \quad (5.15)$$

gdje je MSE ukupna srednja kvadratna greška, dok je  $\xi_{Thr}$  donja vrijednost tolerantne srednje kvadratne greške koja se unaprijed definiše. Ukoliko je pretpostavka  $h_2$  tačna, razmatraju se dvije dodatne pretpostavke:  $h_{21}$  – pomjeranje samo jedne ruke,  $h_{22}$  – pomjeranje obje ruke. Ukoliko je  $h_{22}$  tačna, funkcije  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  imaju značajan stepen simetrije u odnosu na trajektoriju kretanja  $B(t)$ . Ova “simetrija” je opisana na sljedeći način: svaki lokalni maksimum na krivoj  $f_1$  ima odgovarajući lokalni minimum na krivoj  $f_2$ , koji je vremenski lociran u blizini  $\Delta t$ . Ukoliko su funkcije  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  “asimetrične” pretpostavka  $h_{21}$  je tačna. Ovo pravilo klasifikacije se može definisati kao:

$$\arg \{l \max(f_1(t))\} - \arg \{l \min(f_2(t))\} \begin{matrix} \leq \Delta t_T \\ > \Delta t_T \end{matrix} \begin{matrix} h_{22} \\ h_{21} \end{matrix}, \quad (5.16)$$

gdje  $l \max(f_1(t))$  predstavlja lokalni maksimum na  $f_1(t)$ ,  $l \min(f_2(t))$  je lokalni minimum na  $f_2(t)$ , dok je  $\Delta t_T$  vrijednost praga odlučivanja (za vremenski interval između lokalnih maksimuma i minimuma).

**Primjer 1:** Procedura za klasifikaciju je testirana na skupu realnih radarskih signala. Eksperimenti su vršeni sa radarom čija je frekvencija nosioca 2.4 GHz i transmisiona snaga 5 dBm. Širina opsega trenutne frekvencije je 70 kHz. Frekvencija odabiranja originalnih signala je 1 kHz. Prilikom računanja Hermitskog S-metoda, signali su pododabrani sa faktorom 4.

Radarski podaci su sakupljeni od različitih ljudskih meta, pod upadnim uglovima 0 i 30 stepeni. Posmatrana su tri načina kretanja: kretanje bez pomjeranja ruku, kretanje sa pomjeranjem jedne ruke, kretanje sa pomjeranjem obje ruke. Za sve testirane signale, Hermitski S-metod je računat korišćenjem tri Hermitske funkcije najnižeg reda:  $i=0,1,2$ , sa 512 odbiraka u okviru prozora. Parametar  $L=3$  je korišćen za definisanje širine frekvencijskog prozora  $P(l)$ . Širina komponente signala koja odgovara kretanju tijela, je aproksimirana sa vrijednošću parametra  $\delta=6$  (odgovara približno opsegu od 1.5Hz). Vrijednost energetskog praga  $Thr$  u okviru funkcije oslonca  $S_2(t, \omega)$ , dobijena je eksperimentalno i iznosi  $2 \cdot 10^{-4}$  za sve testirane signale. Procedura je implementirana korišćenjem Matlab-a 7.

Za kretanja sa i bez pomjeranja ruku, računate su srednje kvadratne greške (MSE) na osnovu relacije (5.15). Rezultati su prezentovani u Tabeli 5.1. Značajno manje greške se dobijaju za signale koji ne sadrže pomjeranje ruku. Na osnovu rezultata za testirane signala, možemo koristiti vrijednost  $\xi_{Thr} = 20$ .

TABELA 5.1. SREDNJE KVADRATNE GREŠKE MSE

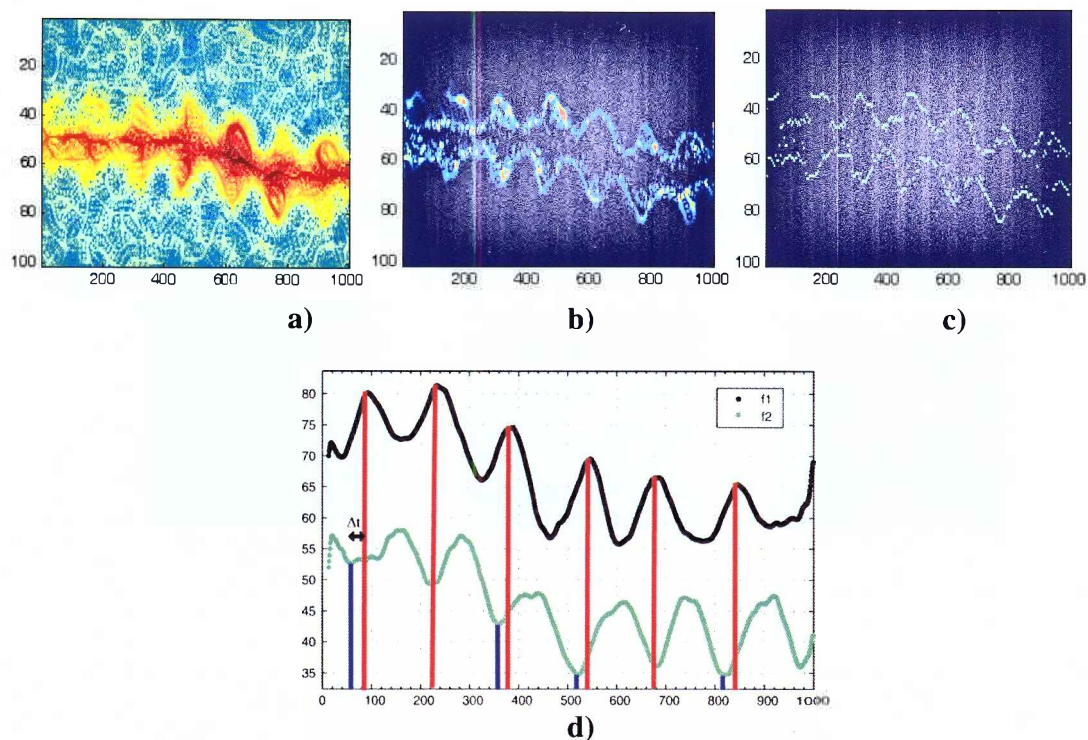
Bez ruku		Jedna ili obje ruke	
Signal	MSE	Signal	MSE
Sig 1	5.1	Sig 9 (1 ruka)	69.7
Sig 2	4.2	Sig 10 (2 ruke)	57.5
Sig 3	16.6	Sig 11 (1 ruka)	211
Sig 4	13.6	Sig 12 (2 ruke)	127.8
Sig 5	13.4	Sig 13 (2 ruke)	146.4
Sig 6	10.3	Sig 14 (1 ruka)	112
Sig 7	5.9	Sig 15 (1 ruka)	83.3
Sig 8	3.2	Sig 16 (2 ruke)	46.5



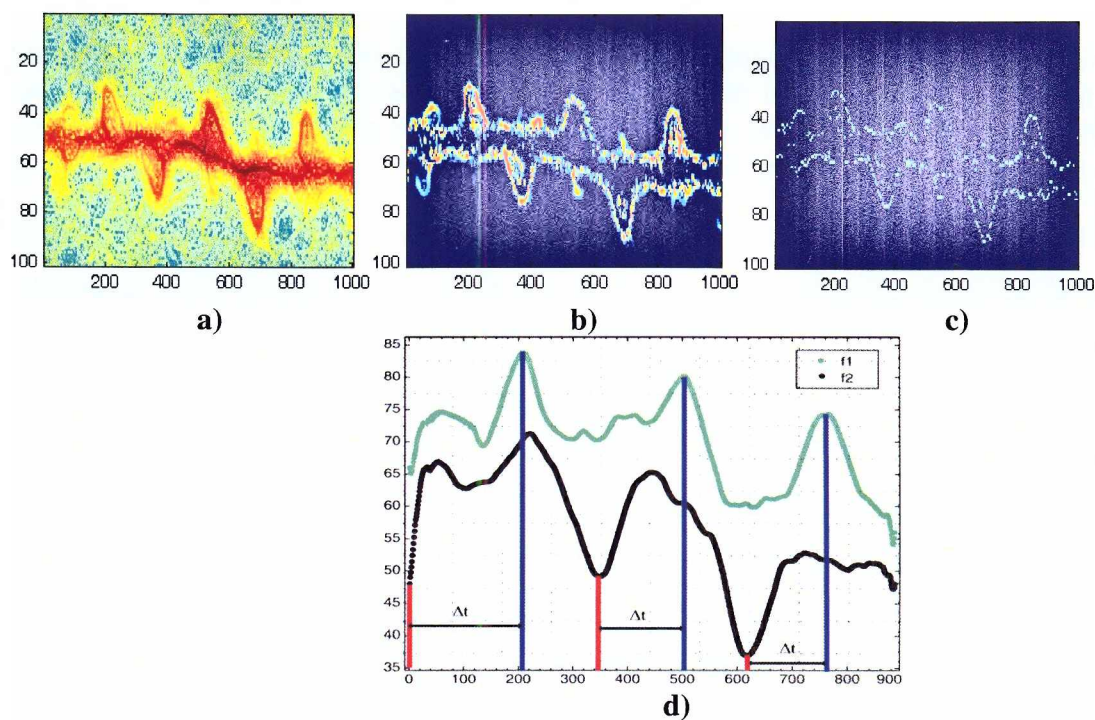
U nastavku je vršena klasifikacija na kretanje sa pomjeranjem jedne ruke i sa pomjeranjem obje ruke. Rezultati za ove tipove signala su prikazani na Slikama 5.6 i 5.7. Hermitski S-metod, za signal koji sadrži pokrete obje ruke, prikazan je na Slici 5.6.a. Vremensko-frekvencijske karakteristike koje su korišćene za klasifikaciju prikazane su na Slici 5.6.b, dok je odgovarajuća funkcija oslonca prikazana na Slici 5.6.c. Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  su date na Slici 5.6.d. U eksperimentima je dobijeno da vremenska distanca  $\Delta t$  između lokalnih maksimuma na krivoj  $f_1$  i odgovarajućih minimuma na krivoj  $f_2$  iznosi približno 20 odbiraka. Sa druge strane, u slučaju kretanja samo jedne ruke,  $\Delta t$  je veće, s obzirom da i maksimumi na  $f_1$  i minimumi na  $f_2$  potiču od kretanja iste ruke. Hermitski S-metod, vremensko-frekvencijske karakteristike i funkcija oslonca za slučaj pomjeranja samo jedne ruke, ilustrovani su na Slikama 5.7a. do 5.7c, respektivno. Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  su prikazane na Slici 5.7.d. Može se primijetiti da je  $\Delta t$  u ovom slučaju znatno veće od 20 odbiraka (za testirane signale je između 100 i 200 odbiraka). Minimalne i maksimalne vrijednosti parametra  $\Delta t$  su date u Tabeli 5.2 za ostale testirane signale. Vrijednost praga odlučivanja  $\Delta t_T$  se može postaviti između najmanje vrijednosti  $\min(\Delta t)$  za slučaj pomjeranja samo jedne ruke (Signal 5, vrijednost 109, u Tabeli 5.2) i najveće vrijednosti  $\max(\Delta t)$  za slučaj kretanja obje ruke (Signal 4, vrijednost 25, u Tabeli 5.2). Dakle, može se koristiti vrijednost  $\Delta t_T = 67$ .

TABELA 5.2. MINIMALNE I MAKSIMALNE VRJEDNOSTI PARAMETRA  $\Delta t$  ZA TESTIRANE SIGNALE

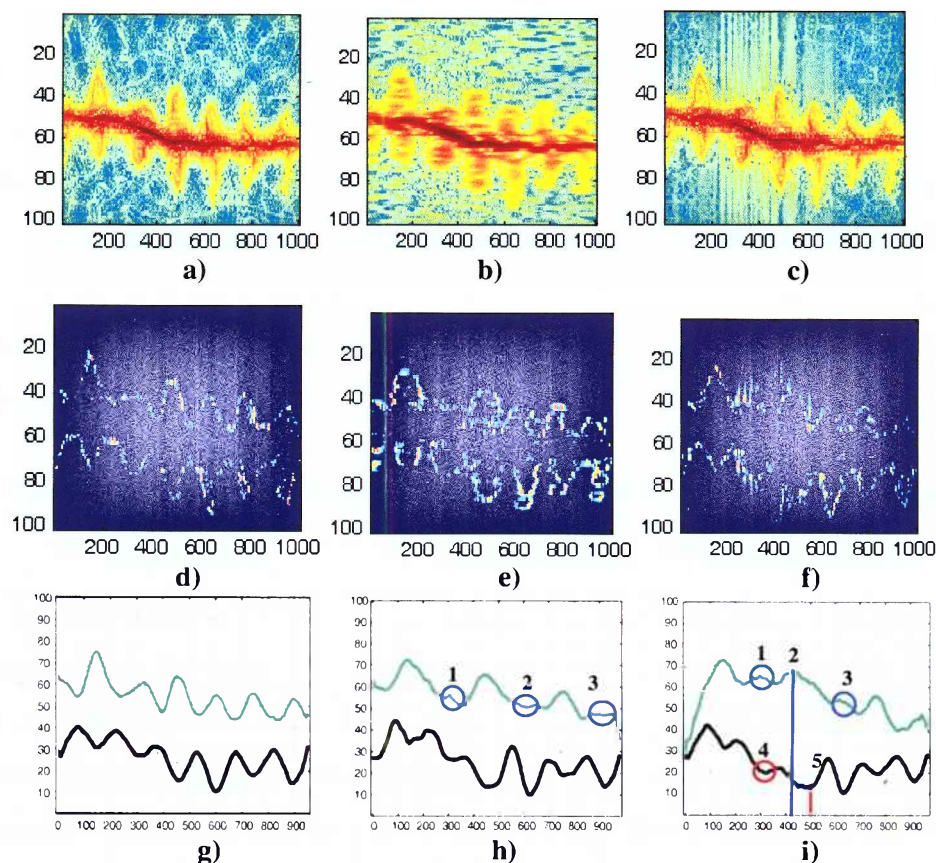
	Ugao	$\min(\Delta t)$ u odbircima	$\max(\Delta t)$ u odbircima	Broj ruku
Signal 1	30	19	22	2
Signal 2	0	0	20	2
Signal 3	0	2	22	2
Signal 4	0	5	25	2
Signal 5	30	109	140	1
Signal 6	0	100	160	1
Signal 7	30	120	200	1
Signal 8	0	115	140	1
Signal 9	0	125	140	1



Slika 5.6. Kretanje sa pomjeranjem obje ruke: a) Hermitski S-metod, b) vremensko-frekvencijske karakteristike, c) funkcija oslonca, d) funkcije  $f_1$  i  $f_2$



Slika 5.7. Kretanje sa pomjeranjem jedne ruke: a) Hermitski S-metod, b) vremensko-frekvencijske karakteristike, c) funkcija oslonca, d) funkcije  $f_1$  i  $f_2$



**Slika 5.8. Vremensko-frekvencijske distribucije i ekstrakcija krivih: a) Hermitski S-metod, b) Spektrogram, c) S-metod; d) karakteristike izdvojene iz Hermitskog S-metoda, e) karakteristike iz Spektrograma, f) karakteristike izdvojene iz S-metoda; g)  $f_1$  i  $f_2$  za Hermitski S-metod, h)  $f_1$  i  $f_2$  za Spektrogram, i)  $f_1$  i  $f_2$  za S-metod**

**Primjer 2:** U ovom primjeru pokazane su prednosti korišćenja Hermitskog S-metoda u odnosu na spektrogram i standardni S-metod. Razmatran je radarski signal sa šumom (bijeli Gauss-ov šum je dodat signalu). Odnos signala i šuma je  $\text{SNR} \approx 25\text{dB}$ . Signal opisuje kretanje sa pomjeranjem obje ruke. Hermitski S-metod, spektrogram i standardni S-metod prikazani su na Slikama 5.8.a-c, respektivno. Odgovarajuće vremensko-frekvencijske karakteristike su date na Slikama 5.8.d-f, dok su modelujuće funkcije prikazane na Slikama 5.8.g-i. Usljed šuma i slabije koncentracije, pojavljuju se greške u funkcijama  $f_1$  i  $f_2$  za slučaj spektrograma i standardnog S-metoda. Na primjer, korišćenjem spektrograma se mogu izgubiti neki od lokalnih maksimuma kao što je slučaj sa tačkama 1, 2 i 3 na Slici 5.8.h. Stoga, funkcije  $f_1$  i  $f_2$  nisu više “simetrične”, što može dovesti do pogrešnih rezultata klasifikacije.



Slično, kod standardnog S-metoda, lokalni ekstremumi označeni kao 1, 3 i 4 su slabi i teže ih je detektovati. Takođe,  $\max(\Delta t) \approx 100$  odbiraka, odnosno distanca lokalnog maksimuma 2 i lokalnog minimuma 5, je skoro 100 odbiraka, što je bliže signalu koji sadrži pomjeranje samo jedne ruke (Tabela 5.2). Sa druge strane, kod Hermitskog S-metoda je očuvana “simetrična” struktura, tipična za slučaj pomjeranja obje ruke tokom kretanja, i pri tome je  $\max(\Delta t) = 22$  odbiraka. Hermitski S-metod je, dakle, manje podložan greškama pri modelovanju funkcija  $f_1$  i  $f_2$ , i stoga pogodniji za proceduru klasifikacije.

### **5.1.3 Primjena dvodimenzionog Hermitskog S-metoda u ISAR aplikacijama**

Za predstavljanje radarskih slika najčešće je korišćena dvodimenziona Fourier-ova transformacija. Primjenom dvodimenzione Fourier-ove transformacije na koherentno procesirane radarske eho-e, dobijaju se odgovarajuće radarske slike [58], [62]-[64]. Međutim, visoka rezolucija se može postići samo u slučaju stacionarnih meta kao u SAR aplikacijama i konstantne rotacije u ISAR aplikacijama. U suprotnom, Doppler-ovi efekti u okviru primljenog signala će uzrokovati zamućenje slike. Stoga se, u cilju poboljšanja vremensko-frekvencijske rezolucije, koriste različite vremensko-frekvencijske distribucije [51]-[55] i/ili tehnike kompenzacije kretanja [65], [66]. Tehnike kompenzacije kretanja daju dobre rezultate jer procjenjuju parametre kretanja mete, ali su računski dosta zahtjevne. Sa druge strane, što se tiče vremensko-frekvencijskih distribucija, efikasna rješenja su dobijena korišćenjem S-metoda [51]-[55], jer se poboljšava koncentracija dvodimenzione Fourier-ove transformacije. Hermitski S-metod je korišćen da bi se dodatno popravile performanse S-metoda.

#### ***Model signala i ISAR model***

ISAR tehnika je dizajnirana za pokretne mete, pri čemu je radar fiksiran. Radar šalje signal u obliku  $M$  koherentnih frekvencijski modulisanih signala tzv. impulsa [58], i definisan je relacijom (5.2).

Priljeni signal koji potiče od  $m$ -te komponente poslatog signala, a koji je odbijen od strane jedne reflektujuće tačke mete se može zapisati u obliku [51], [53]:

$$x_R(m,t) = \sigma e^{j\omega_0 2d/c} e^{-j2\pi Bf_r(t-mT_r)2d/c}. \quad (5.17)$$

Množenjem priljenog signala sa konjugovano kompleksnim poslatim signalom dobija se signal u sljedećem obliku:

$$x(m,t) = \sigma e^{j\omega_0 2d/c} e^{j2\pi Bf_r(t-mT_r)} e^{j\pi Bf_r(2d/c)^2}. \quad (5.18)$$

Pošto je  $B \ll \omega_0$ , konstantni fazni pomjeraj  $e^{j\pi Bf_r 4d^2/c^2}$  u prethodnoj relaciji se može zanemariti u odnosu na druge dvije komponente [65]. Stoga, uvođenjem smjene  $t-mT_r = nT_s$  u (5.18) ( $T_s$  je period odabiranja poslatog signala), dvodimenzioni oblik diskretnog signala se definiše kao [51], [53]:

$$x(m,n) = \sigma e^{j\omega_0 2d/c} e^{-j\theta n}, \quad (5.19)$$

gdje je  $\theta = 2\pi Bf_r 2d/cT_s$  ugaona frekvencija. Primjena Fourier-ove transformacije će kao rezultat dati impuls na ugaonoj frekvenciji  $\theta$ , koji je proporcionalan rastojanju  $d$ . Napomenimo da je u slučaju kada se meta kreće u odnosu na radar, rastojanje između mete i radara definisano u funkciji vremena:  $d(t) = d(nT_s + mT_r)$ .

**ISAR model:** Pretpostavimo da je lokacija  $p$ -te reflektujuće tačke mete definisana sa  $(x_p, y_p)$ . Koordinata u pravcu radar-meta (range koordinata) je označena sa  $x_p$ , dok je sa  $y_p$  označena koordinata normalna na liniju radar-meta (*kros-range* koordinata). Dakle za  $p$ -tu reflektujuću tačku važi da je [53]:

$$\begin{aligned} d(t) &= R(t), \quad R = R_0, \\ R(t) &= R_0 + x_p \cos(\omega_R t) + y_p \sin(\omega_R t), \\ \lim_{\omega_R \rightarrow 0} [R(t)] &= R_0 + x_p + y_p \omega_R t. \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdje je  $\omega_R t$  ugao rotacije reflektujuće tačke. Doppler-ov pomjeraj se dobija kao [53]:

$$\omega_d = \frac{2\omega_0}{c} \frac{d}{dt}[d(t)] = \frac{2\omega_0}{c} \frac{d}{dt}[R_0 + x_p \cos(\omega_R t) + y_p \sin(\omega_R t)]. \quad (5.21)$$

Za  $\omega_R t \rightarrow 0$ , i uz pretpostavku da je komponenta translacije kompenzovana, važi da je

$$\omega_d = \frac{2\omega_0}{c} y_p \omega_R \sim y_p. \text{ Na osnovu ovih uslova je } d(t) \approx x_p, \text{ a brzina je } v(t) \approx y_p \omega_R = v.$$

Koristeći uvedene pretpostavke, dvodimenziona Fourier-ova transformacija signala koji odgovara  $p$ -toj reflektujućoj tački se može aproksimirati sljedećim izrazom [65]:  $2\pi\sigma_p \delta(\omega_l - c_1 y_p) \delta(\omega_m - c_2 x_p)$ , gdje je  $c_1 = 2\omega_R \omega_0 / c$  i  $c_2 = 4\pi B / c$ . Drugim riječima, dvodimenziona Fourier-ova transformacija proizvodi pik na poziciji posmatrane reflektujuće tačke.

**Neuniformno kretanje:** Kada meta rotira sa konstantnom ugaonom brzinom  $\omega_R$ , duži period vremena, pozicija  $p$ -te tačke je:  $y_p = r_p \sin(\omega_R t)$ ,  $x_p = r_p \cos(\omega_R t)$ , gdje je  $r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ . Za posmatrani vremenski interval  $[t, t + \Delta t]$ , koordinata normalna na pravac radar-meta (*kros-range*) se mijenja u intervalu [53]:

$$[y_p, y_p + \Delta y_p] = [r_p \sin(\omega_R t), r_p \sin(\omega_R \Delta t) + y_p \cos(\omega_R \Delta t)]. \quad (5.22)$$

Projekcija brzine posmatrane reflektujuće tačke na liniju radar-meta se mijenja u intervalu:

$$\begin{aligned} [v_s(t), v_s(t + \Delta t)] &= [r_p \omega_R \sin(\omega_R t), r_p \omega_R \sin(\omega_R(t + \Delta t))] = \\ &= [y_p \omega_R, x_p \omega_R \sin(\omega_R \Delta t) + y_p \omega_R \cos(\omega_R \Delta t)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Za male vrijednosti  $\omega_R \Delta t$ , relacija (5.23) se može zapisati u obliku [53]:

$$[v_s(t), v_s(t + \Delta t)] = [y_p \omega_R, y_p \omega_R + x_p \omega_R \Delta t]. \quad (5.24)$$

Naime, na frekvenciji koja odgovara članu  $y_p \omega_R$ , umjesto delta impulsa se dobija funkcija koja odgovara linearnom frekvencijski modulisanom signalu [53]. Isto važi i za



koordinatu  $x_p$ . U slučaju kada  $\omega_R \Delta t$  nije dovoljno malo, ili kada  $\omega_R$  nije konstantno, trenutna frekvencija može da bude izrazito nelinearna, te će dvodimenziona Fourier-ova transformacija, a time i periodogram, proizvesti zamućenu i nejasnu sliku.

Iz prethodne analize, može se izvesti zaključak da je u posmatranim slučajevima kretanja radarske mete, neophodno izvršiti izoštravanje radarskih slika dobijenih dvodimenzionom Fourier-ovom transformacijom. U prethodnoj glavi predložen je Hermitski S-metod za poboljšanje vremensko-frekvencijske rezolucije dvodimenzione Fourier-ove transformacije i standardnog S-metoda. U primjerima koji slijede će biti demonstrirana efikasnost Hermitskog S-metoda za postizanje zadovoljavajuće rezolucije radarskih slika.

**Primjer 1:** Da bi pokazali kako Hermitski S-metod poboljšava koncentraciju u vremensko-frekvencijskom domenu, posmatrajmo jednostavan simulirani signal u obliku [49]:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) + x_4(n),$$

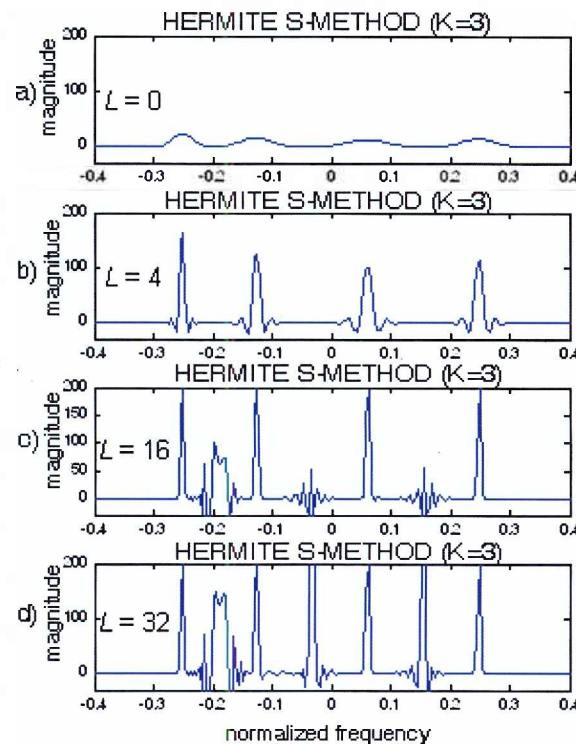
gdje su komponente signala definisane kao,

$$\begin{aligned} x_1(n) &= A(n)e^{j\frac{0.2}{256}\pi n^2} e^{j\frac{\pi}{2}n}, \\ x_2(n) &= A(n)e^{j\frac{0.24}{256}\pi n^2} e^{j\frac{\pi}{8}n}, \\ x_3(n) &= A(n)e^{-j\frac{0.18}{256}\pi n^2} e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \\ x_4(n) &= A(n)e^{-j\frac{0.12}{256}\pi n^2} e^{-j\frac{\pi}{2}n}, \end{aligned}$$

Posmatran je vremenski trenutak  $n=0$ . Dakle, signal se sastoji iz četiri komponente koje imaju ulogu radarskih signala reflektovanih od četiri tačke mete. Amplituda je sporo-promjenljiva:  $A(n) = 0.5 + 0.5 \cos \frac{\pi}{256} n$ ,  $-128 \leq n \leq 127$ . Diskretne trenutne frekvencije

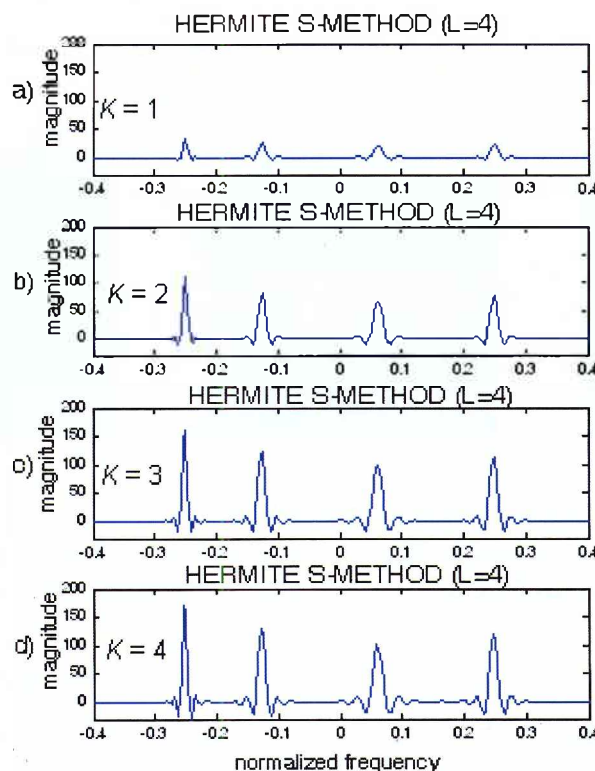
komponenti signala su:  $\omega_1(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_2(0) = \frac{\pi}{8}$ ,  $\omega_3(0) = -\frac{\pi}{4}$  i  $\omega_4(0) = -\frac{\pi}{2}$ . Hermitski S-metod je računat korišćenjem različitih vrijednosti parametra  $L$  ( $L=0,4,16,32$ ).

Rezultati su prikazani na Slici 5.9. Isti broj Hermitskih funkcija ( $K=3$ ) je korišćen pri realizacijama za svako  $L$ . Može se uočiti da se povećanje koncentracije postiže povećavanjem parametra  $L$ , tj. povećavanjem broja konvolucionih članova u Hermitskom S-metodu [49]. Međutim, za velike vrijednosti parametra  $L$  ( $L=16$  i  $L=32$  na Slici 5.9), pojavljuju se neželjeni kros-članovi između auto-komponenti. U ovim aplikacijama korišćena je vrijednost  $3 \leq L \leq 10$ .



**Slika 5.9. Izbor širine prozora  $L$  za poboljšanje koncentracije povećavanjem parametra  $L$ : a)  $L=0$ , b)  $L=4$ , c)  $L=16$ , d)  $L=32$**

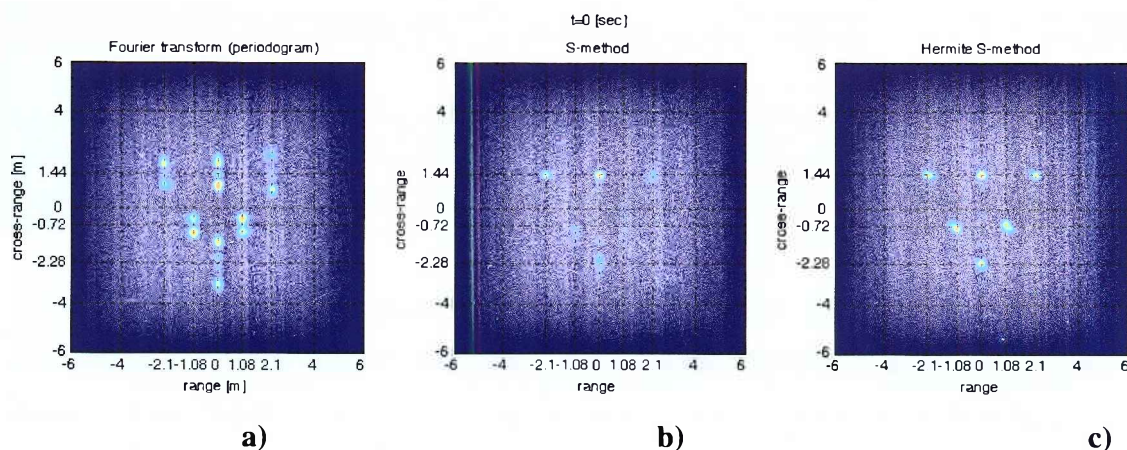
Takođe, koncentracija se može poboljšati povećavanjem broja Hermitskih funkcija  $K$  [49]. Hermitski S-metod, računat korišćenjem različitog broja Hermitskih funkcija ( $K=1, 2, 3$ , i  $4$ ) je prikazan na Slici 5.10. Pri tome je fiksirana vrijednost parametra  $L$  ( $L=4$ ) za sve vrijednosti parametra  $K$ .



**Slika 5.10. Poboljšanje koncentracije povećanjem broja Hermitskih funkcija  $K$ : a)  $K=1$ , b)  $K=2$ , c)  $K=3$ , d)  $K=4$**

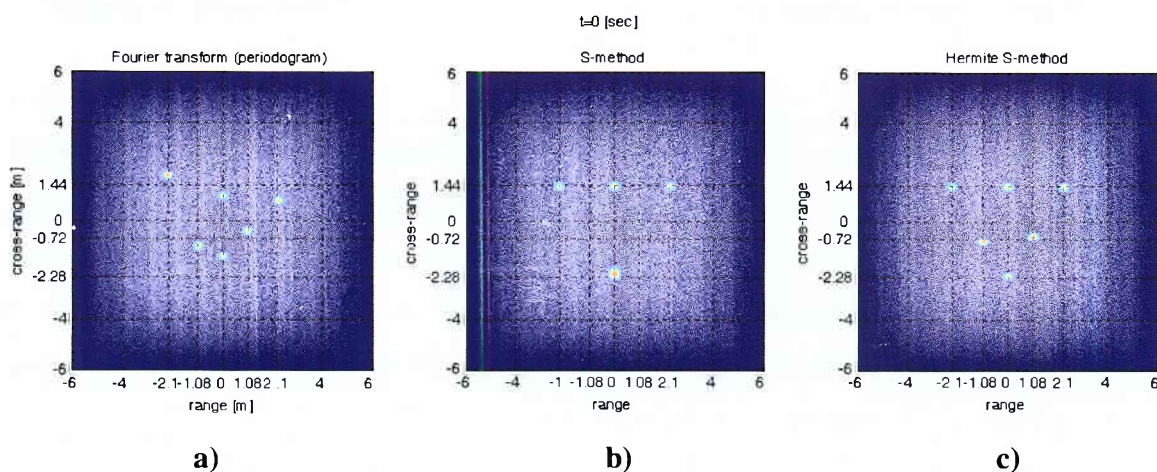
**Primjer 2:** U ovom primjeru, testirana je efikasnost Hermitskog S-metoda u detekciji tačaka mete. Razmatran je simulirani radarski signal [49], gdje radarski sistem podrazumijeva: visoko-rezolucioni radar čija je frekvencija  $f_0=10.1\text{GHz}$ , širina opsega poslatog signala je  $B=600\text{MHz}$ , vremenski interval za koherentnu integraciju je  $T=2\text{s}$ , 64 impulsa i 256 odbiraka u okviru svakog impulsa. Meta je udaljena 2 km od radara i rotira brzinom  $\omega_R = 2.1^\circ/\text{sec}$ . Takođe je dodata i nelinearna rotacija sa frekvencijom  $\Omega = 0.5\text{Hz}$ :  $\omega_R(t) = \omega_R + A\sin(2\pi\Omega t)$ , gdje je  $A = 1.05^\circ/\text{sec}$ . Translacija je zanemarena u okviru eksperimenta, tako da nema potrebe za njenom kompenzacijom. Meta je simulirana pomoću šest reflektujućih tačaka u  $(x, y)$  ravni, pri čemu su pozicije tačaka u  $t=0$ :  $(x_1, y_1)=(-2.1, 1.44)$ ,  $(x_2, y_2)=(0, 1.44)$ ,  $(x_3, y_3)=(2.1, 1.44)$ ,  $(x_4, y_4)=(-1.08, -0.72)$ ,  $(x_5, y_5)=(1.08, -0.72)$ ,  $(x_6, y_6)=(0, -2.28)$ . Sve koordinate su u metrima. Radarske slike su dobijene primjenom: dvodimenzione Fourier-ove transformacije (periodograma), standardnog S-metoda i Hermitskog S-metoda (Slika 5.11). Parameter  $L=3$  je korišćen

pri računanju S-metoda i Hermitskog S-metoda. Za realizaciju Hermitskog S-metoda uzeto je  $K=3$  funkcije.



**Slika 5.11. ISAR slike simulirane mete korišćenjem: a) periodograma, b) standardnog S-metoda, c) Hermitskog S-metoda**

Broj “korektnih tačaka” je računat selekcijom šest najvećih vrijednosti u okviru periodograma, S-metoda i Hermitskog S-metoda (Slika 5.12), provjeravajući da li one odgovaraju tačnim pozicijama tačaka mete. Ostale tačke su postavljene na vrijednost nula. Koordinate šest tačaka sa najvećom energijom su date u Tabeli 5.3. Može se primijetiti da su u slučaju periodograma, selektovane tačke prilično dislocirane od tačnih pozicija mete. Četiri od šest tačaka se mogu smatrati “korektnim tačkama” u slučaju korišćenja S-metoda, dok su za posmatrani signal sve selektovane tačke u Hermitskom S-metodu “korektne tačke” [49].



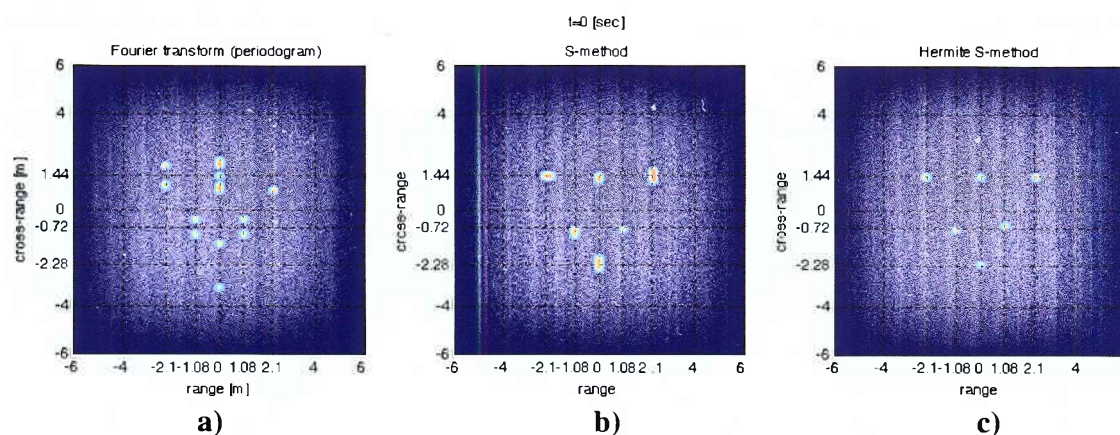
**Slika 5.12. Šest najvećih vrijednosti (tačaka) u okviru: a) periodograma, b) standardnog S-metoda, c) Hermitskog S-metoda**



TABELA 5.3. KOORDINATE ŠEST TAČAKA SA NAJVEĆIM VRIJEDNOSTIMA

$(x,y)$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
Tačne pozicije	(-2.1,1.44)	(0, 1.44)	(2.1, 1.44)	(-1.08, -0.72)	(1.08, -0.72)	(0, -2.28)
Periodogram	(-2.25, 1.82)	(0,1)	(2.25, 0.8)	(-1, -1)	(1, -0.4)	(0, 1.4)
S-metod	(-2.2, 1.44)	(0, 1.44)	(2.2, 1.44)	(0, 2)	(0, 2.1)	(0, 2.2)
Hermitski S-metod	(-2.2, 1.44)	(0, 1.44)	(2.2, 1.44)	(-1, -0.8)	(1, -0.65)	(0, -2.28)

Sve tačke sa energijom iznad minimalne energije pravih tačaka mete su posmatrane kao “lažni alarmi”. Na Slici 5.13, su prikazane prave tačke mete i “lažni alarmi”. Broj “lažnih alarma” u slučaju periodograma i S-metoda je 8 (ukupno je prikazano 14 tačaka). U okviru Hermitskog S-metoda nema “lažnih alarma” u ovom primjeru.



Slika 5.13. Prave tačke mete i “lažni alarmi”: a) periodogram, b) standardni S-metod, c) Hermitski S-metod

**Primjer 3:** Korišćen je model MIG mete. ISAR slike aviona MIG25, dobijene korišćenjem standardnog periodograma i standardnog S-metoda (bez korišćenje dodatnih algoritama obrade i korišćenjem pravougaonog prozora), su prikazani na Slikama 5.14.a i b. S-metod je računat sa  $L=3$ . Treba primijetiti da su pojedini djelovi ISAR slika zamućeni usljed manevra mete (na primjer, tačke na nosu aviona, krila, itd). Standardni S-metod ne može obezbijediti zadovoljavajuće poboljšanje koncentracije, imajući u vidu da dvodimenziona Fourier-ova transformacija produkuje izrazito nefokusiranu sliku.

Na Slici 5.14.c prikazan je dvodimenzionalni Hermitski periodogram. Dobijen je korišćenjem  $K=3$  dvodimenzionalnih Hermitskih funkcija (tri Hermitske funkcije su korišćene po obje koordinate). Koncentracija Hermitskog periodograma se može dodatno poboljšati upotrebom Hermitskog S-metoda. Slike karakterističnih tačaka aviona, dobijene korišćenjem Hermitskog S-metoda za  $K=1$  i  $K=3$ , su prikazane redom na Slikama 5.14.d i 5.14.e. Kao i u slučaju standardnog S-metoda, parametar  $L=3$  je korišćen u Hermitskom S-metodu. Slika dobijena pomoću Hermitskog S-metoda (za  $K=3$  i  $L=3$ ) je dobro fokusirana i poboljšana u poređenju sa drugim prikazanim slučajevima [49].

U opisanom primjeru, Hermitski S-metod je primijenjen samo na jednu koordinatu (*kros-range* koordinatu), jer obezbjeđuje dobre rezultate uz manje računskih operacija u poređenju sa Hermitskim S-metodom računatim po obje koordinate. Naime, slike su dovoljno izoštrene u pravcu radar-meta (*range* koordinata), tako da se konvolucija u okviru standardnog i u okviru Hermitskog S-metoda treba računati samo po drugoj koordinati. S obzirom da je korišćen mali broj Hermitskih funkcija ( $K=3$ ), ovaj pristup je i daje efikasan u pogledu male kompleksnosti proračuna. Da bi se objektivno procijenio kvalitet izoštrene radarske slike, koristi se tzv. mjera izoštrenosti [67], definisana kao normalizovana suma apsolutne vrijednosti piksela konvoluiranih sa prostornim visoko-propusnim filtrom [67]:

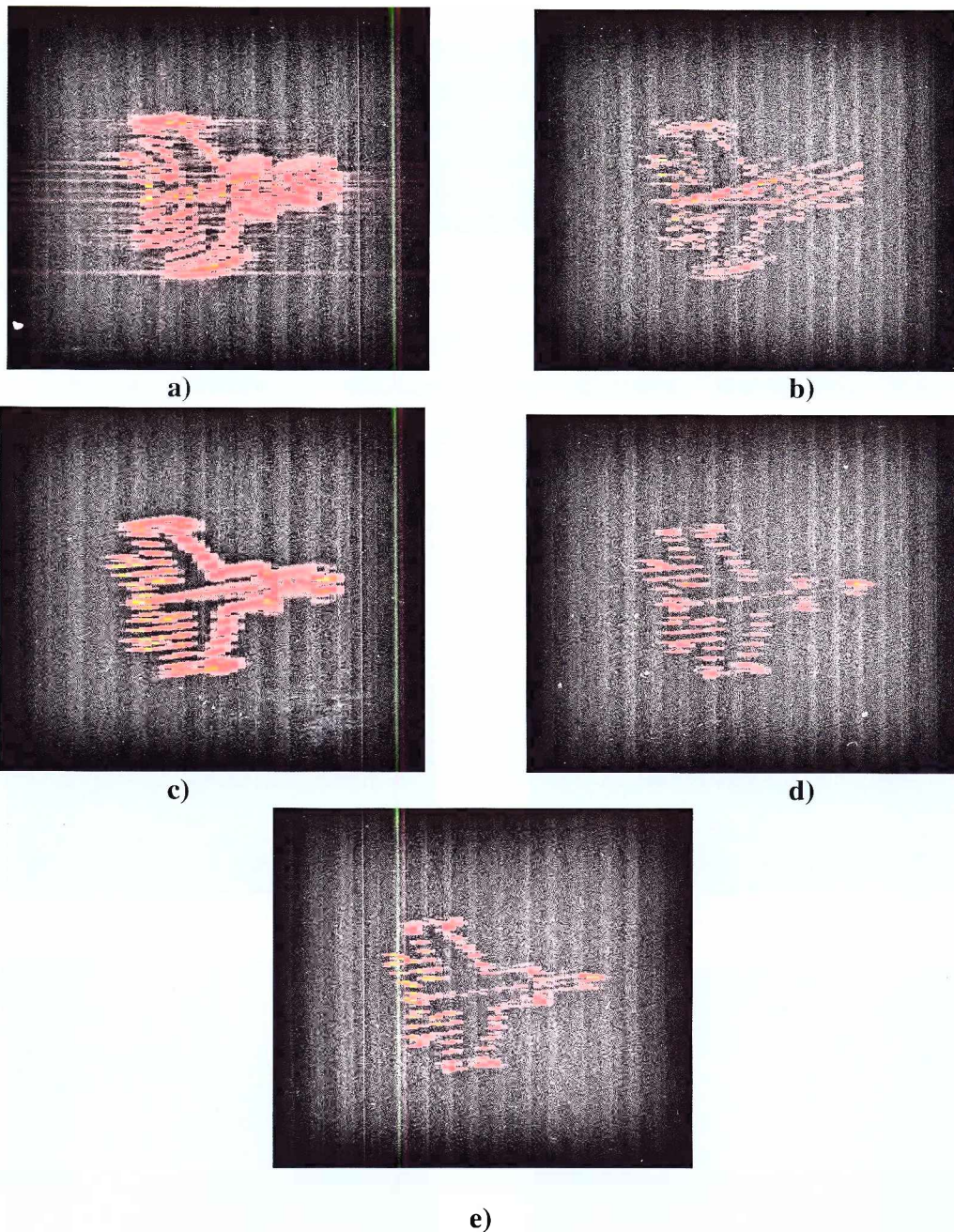
$$IQM = \frac{1}{E} \sum_i \sum_j |I_{i,j} * K|, \text{ gdje je } K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je  $I_{i,j}$  intenzitet na poziciji  $(i,j)$ , dok je  $E = \sum_i \sum_j I_{i,j}$  ukupni intenzitet slike. Kao dodatna objektivna mjera kvaliteta, može se koristiti kontrast slike, definisan kao [68]:

$$C = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j |I_{i,j}|^4}}{\sum_i \sum_j |I_{i,j}|^2}.$$

Mjere kvaliteta slike,  $IQM$  i  $C$ , su računate za radarske slike prikazane na Slici 5.14, i date su u Tabeli 5.4. Primijetimo da u slučaju radarske slike, dobijene Hermitskim S-metodom, mjere  $IQM$  i  $C$  imaju najveće vrijednosti, ukazujući na najbolji kvalitet [49].





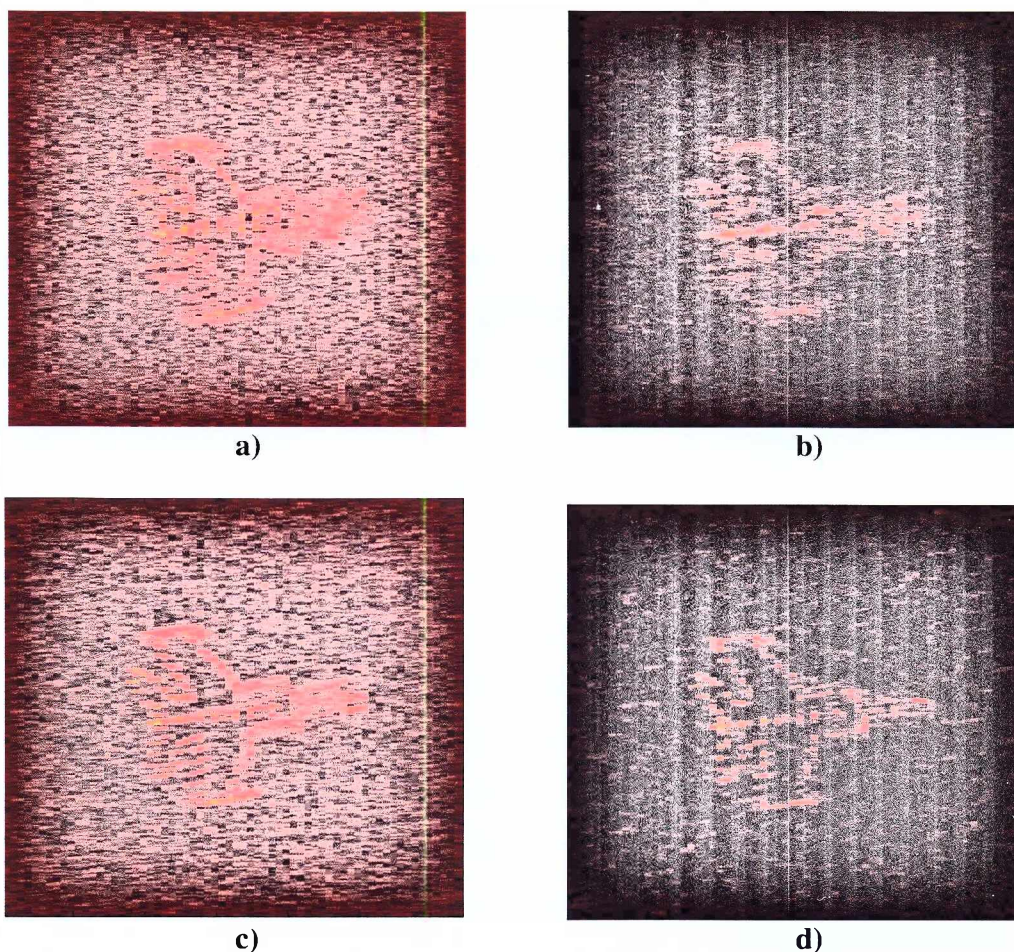
Slika 5.14. ISAR slike aviona MIG25 dobijene korišćenjem: a) dvodimenzione Fourier-ove transformacije, b) standardnog S-metoda, c) dvodimenzionog Hermitskog periodograma, d) Hermitskog S-metoda sa  $K=1$ , e) Hermitskog S-metoda sa  $K=3$



TABELA 5.4. VRIJEDNOSTI ZA MJERE KVALITETA SLIKE

Radarske slike dobijene korišćenjem:	<i>IQM</i>	<i>C</i>
Standardnog periodograma – Slika 5.14.a	0.76	0.00089
Standardnog S-metoda ( $L=3$ ) – Slika 5.14.b	0.71	0.0011
Hermitskog periodograma ( $K=3$ ) – Slika 5.14.c	0.79	0.014
Hermitskog S-metoda ( $K=3, L=3$ ) - Slika 5.14.e	0.86	0.0019

**Primjer 4:** U nastavku je razmatrana simulacija radarskog signala sa šumom. Signalu iz prethodnog primjera je dodat Gauss-ov šum sa odnosom signala i šuma  $SNR=3dB$ . ISAR slike dobijene korišćenjem standardnog periodograma, standardnog S-metoda, Hermitskog periodograma i Hermitskog S-metoda su prikazani na Slici 5.15.



Slika 5.15. ISAR slike (MIG 25) sa šumom dobijene korišćenjem: a) periodograma, b) standardnog S-metoda, c) Hermitskog periodograma, d) Hermitskog S-metoda ( $K=3$ )

Slike dobijene korišćenjem standardnog periodograma i standardnog S-metoda su prilično nejasne i zamućene (Slike 5.15.a i 5.15.b, respektivno). Hermitski periodogram (Slika 5.15.c) poboljšava donekle rezultate, ali je slika i dalje zamućena i zahvaćena šumom. Međutim, Hermitski S-metod (Slika 5.15.d) je robustniji u uslovima šuma i obezbjeđuje znatno čistiju i izoštreniju sliku [49].

## **5.2 PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE ANALIZE U DIGITALNOM WATERMARKING-U**

### **5.2.1 Digitalni watermarking**

Sa razvojem Interneta i informacija u digitalnom obliku dolazi do promjena u savremenom načinu komunikacije. Širokopojasne (Broadband) komunikacione mreže i digitalni multimedijalni podaci, kao što su slika, audio i video podaci, otvaraju nove mogućnosti za inovacijama. Digitalni multimedijalni sadržaji, za razliku od analognih, usljed višestrukih procesa kopiranja ne gube na kvalitetu. Međutim, da bi se zaštitila autorska prava i neovlašćeno kopiranje i korišćenje, potrebno je obezbijediti pouzdane tehnike zaštite digitalnih podataka. Tradicionalne metode zaštite multimedijalnih podataka zasnovane na hardveru ili umetanju informacija u zaglavlje digitalnih fajlova postale su beskorisne. Tehnike digitalnog watermarking-a razvijaju se kao odgovor na zahtjev za zaštitom digitalnih multimedijalnih sadržaja, [69]-[75].

Digitalni watermarking sistemi obezbjeđuju umetanje tajnog signala, poznatog kao watermark, u multimedijalni sadržaj, [70]-[73]. Watermark obično predstavlja slučajnu sekvencu koja se umeće u signal aditivnom ili multiplikativnom procedurom. U najvećem broju aplikacija, watermark treba da bude perceptualno neprimjetan, odnosno da ne dovodi do degradacije kvaliteta originalnog signala. Međutim, da bi watermarking procedura ostvarila svoju funkciju, mora se obezbijediti procedura za detekciju watermark-a u okviru štićenog signala. U tu svrhu razvijeni su brojni watermark detektori [74], [77]-[80]. Pri tome, multimedijalni sadržaji su često izloženi različitim obradama kao što su kompresija, filtriranje, i slično. Ove obrade signala predstavljaju nenamjerne atake i mogu dovesti do djelimičnog ili potpunog gubitka informacija o watermarku, što

Slike dobijene korišćenjem standardnog periodograma i standardnog S-metoda su prilično nejasne i zamućene (Slike 5.15.a i 5.15.b, respektivno). Hermitski periodogram (Slika 5.15.c) poboljšava donekle rezultate, ali je slika i dalje zamućena i zahvaćena šumom. Međutim, Hermitski S-metod (Slika 5.15.d) je robustniji u uslovima šuma i obezbjeđuje znatno čistiju i izoštriju sliku [49].

## **5.2 PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE ANALIZE U DIGITALNOM WATERMARKING-U**

### **5.2.1 Digitalni watermarking**

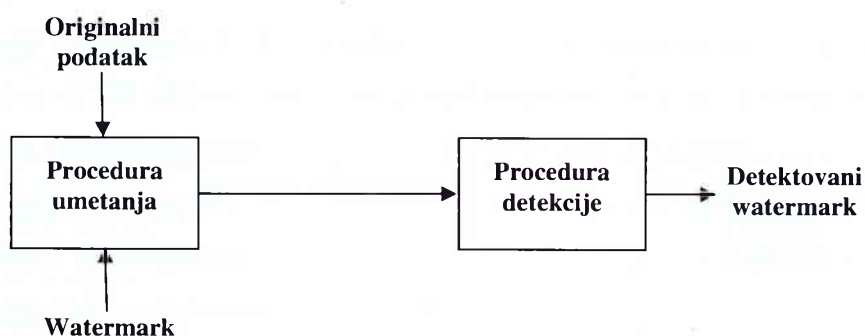
Sa razvojem Interneta i informacija u digitalnom obliku dolazi do promjena u savremenom načinu komunikacije. Širokopojasne (Broadband) komunikacione mreže i digitalni multimedijalni podaci, kao što su slika, audio i video podaci, otvaraju nove mogućnosti za inovacijama. Digitalni multimedijalni sadržaji, za razliku od analognih, usljed višestrukih procesa kopiranja ne gube na kvalitetu. Međutim, da bi se zaštitila autorska prava i neovlašćeno kopiranje i korišćenje, potrebno je obezbijediti pouzdane tehnike zaštite digitalnih podataka. Tradicionalne metode zaštite multimedijalnih podataka zasnovane na hardveru ili umetanju informacija u zaglavlje digitalnih fajlova postale su beskorisne. Tehnike digitalnog watermarking-a razvijaju se kao odgovor na zahtjev za zaštitom digitalnih multimedijalnih sadržaja, [69]-[75].

Digitalni watermarking sistemi obezbjeđuju umetanje tajnog signala, poznatog kao watermark, u multimedijalni sadržaj, [70]-[73]. Watermark obično predstavlja slučajnu sekvencu koja se umeće u signal aditivnom ili multiplikativnom procedurom. U najvećem broju aplikacija, watermark treba da bude perceptualno neprimjetan, odnosno da ne dovodi do degradacije kvaliteta originalnog signala. Međutim, da bi watermarking procedura ostvarila svoju funkciju, mora se obezbijediti procedura za detekciju watermark-a u okviru štićenog signala. U tu svrhu razvijeni su brojni watermark detektori [74], [77]-[80]. Pri tome, multimedijalni sadržaji su često izloženi različitim obradama kao što su kompresija, filtriranje, i slično. Ove obrade signala predstavljaju nenamjerne atake i mogu dovesti do djelimičnog ili potpunog gubitka informacija o watermarku, što



otežava detekciju watermarka. Sa druge strane, postoji čitav niz tehnika čiji je cilj uklanjanje watermark-a izštićenog sadržaja. One su poznate kao namjerni ili maliciozni ataci. Sa ovog aspekta, efikasnost watermarking procedure se mjeri stepenom robustnosti na različite vrste ataka.

Robustnost i neprimjetnost watermark-a su u većini slučajeva oprečni zahtjevi, te je potrebno uspostaviti kompromis među njima. Opšta šema watermarking procedure prikazana je na Slici 5.16.



**Slika 5.16. Opšta blok šema watermarking procedure**

Shodno postojećim oblastima primjene, digitalni watermark se može podijeliti u sljedeće kategorije: autentifikacioni watermark, fingerprint watermark, watermark za kontrolu kopiranja, watermark za zaštitu integriteta i slično. Ujedno, imajući u vidu vrstu i specifične karakteristike multimedijalnih sadržaja, zasebno su razvijane procedure audio watermarking-a [81], [91], watermarking-a slike [92]-[103], video watermarking-a i slično.

Procedura umetanja watermark-a može biti izvršena direktno u vremenskom, odnosno prostornom domenu, ili u nekom od transformacionih domena. Izbor odgovarajućeg domena vrši se u skladu sa vrstom multimedijalnih podataka koji se watermarkiraju, kao i u skladu sa zahtjevima same aplikacije. Najčešće korišćeni transformacioni domeni zasnovani su na: Diskretnoj Fourier-ovoj transformaciji (DFT – Discrete Fourier Transform) [71], [72], Diskretnoj kosinusnoj transformaciji (DCT – Discrete Cosine Transform) [92], [94]-[96], Diskretnoj wavelet transformaciji (DWT – Discrete wavelet Transform) [97]-[99], i slično.

### **5.2.2 Jedan generalizovani pristup watermarking-u multimedijalnih podataka korišćenjem multidimenzione vremensko-frekvencijske analize**

Naglasimo još jednom da se većina watermarking tehnika izvodi ili u domenu signala (vremenski domen kod audio signala, prostorni domen kod slike), ili u frekvencijskom domenu. Takođe, većina postojećih tehnika je primjenljiva samo na jednodimenzione signale kao što je audio/govor ili samo na dvodimenzione signale kao što je slika. U oba slučaja, vremensko-frekvencijske karakteristike watermarka ne odgovaraju vremensko-frekvencijskim ili prostorno-frekvencijskim karakteristikama signala koji se želi zaštititi. Dakle, watermark može biti prisutan i u onim djelovima gdje ne postoje komponente signala, što dalje može dovesti do degradacije kvaliteta signala odnosno do perceptibilnosti watermarka. Kako bi se ostvario što bolji kompromis između robustnosti i neprimjetnosti watermark-a, koristi se umetanje i detekcija watermark-a u vremensko-frekvencijskom domenu [88]-[91], [100]-[105].

U ovom dijelu je predložena jedna generalizovana watermarking tehnika za zaštitu podataka korišćenjem multidimenzione vremensko-frekvencijske analize [102]. Ova tehnika može biti korišćena za zaštitu različitih vrsta signala. Jednodimenziona vremensko-frekvencijska analiza se koristi u slučaju jednodimenzionih signala kao što su audio i govor [88]-[91], dvodimenziona prostorno-frekvencijska analiza se koristi u slučaju digitalne slike [102]-[104], dok se njihova kombinacija može koristiti za zaštitu trodimenzionih video signala [102].

Generalno govoreći, predložena watermarking procedura se sastoji iz nekoliko zasebnih cjelina, koje se realizuju na sličan način za različite signale. Glavne cjeline koje se mogu izdvojiti su:

1. Selekcija regiona pogodnih za umetanje watermarka
2. Selekcija specifičnih komponenti pogodnih za modelovanje watermarka
3. Modelovanje vremensko/prostorno-frekvencijskih karakteristika watermarka na osnovu vremensko/prostorno-frekvencijskih karakteristika signala
4. Umetanje i detekcija watermarka



U nastavku će biti opisana svaka od navedenih cjelina za slučaj jednodimenzionih i dvodimenzionih signala, konkretno za slučajeve govornog signala i slike.

## 1) Selekcija regiona pogodnih za umetanje watermarka

### A. Govorni signali

Prolaskom vazdušnog talasa kroz djelove vokalnog trakta, formiraju se različiti djelovi govornog signala. Oni se mogu klasifikovati na glasovne i neglasovne djelove. U vremenskom domenu glasovni djelovi signala se odlikuju izrazitom periodičnošću, sa fundamentalnom frekvencijom koja se naziva *pitch* frekvencija. Neglasovni djelovi ne pokazuju periodično ponašanje i imaju prirodu sličnu prirodi šuma. Pored toga, glasovni djelovi se odlikuju znatno većom energijom u odnosu na neglasovne djelove. U frekventnom domenu glasovne djelove karakteriše postojanje harmonijskih struktura koje se nazivaju rezonantne frekvencije ili formanti. Formanti su nisko-frekventne prirode i nose glavni dio energije glasovnog sadržaja. Stoga su veoma bitni u analizama i aplikacijama koje uključuju govorne signale. Dakle, shodno značaju i energiji komponenti, za watermarking će biti pogodni glasovni djelovi.

Da bi se izbjegle pauze koje postoje u sklopu govornog signala, korišćen je detektor početka i kraja riječi zasnovan na entropijsko-energetskom svojstvu signala [106]-[108]. Signal se najprije dijeli u odgovarajuće vremenske frejmove dužine 8 ms (64 odbirka signala pri frekvenciji odabiranja 8 kHz). Za svaki pojedinačni frejm signala,

računa se njegova energija:  $E_i = \sum_{k=1}^K s_k^2$ , gdje je  $E_i$  energija  $i$ -tog frejma, dok je  $K_i$  broj

komponenti u okviru frejma. S druge strane, funkcija gustine raspodjele spektra govornog signala  $S(\omega)$ , dobija se normalizacijom frekvencijskih komponenti frejma signala:

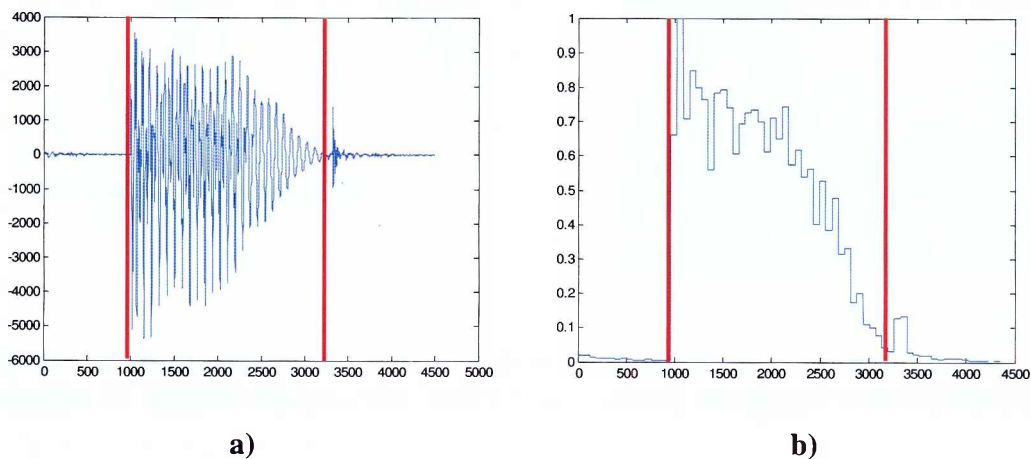
$$p_i = S(\omega_i) / \sum_{k_i} S(\omega_{k_i}).$$

Na osnovu definisane energije i funkcije gustine raspodjele spektra, entropijsko-energetsko svojstvo se može definisati korišćenjem sljedeće relacije:

$$EES_i = (1 + |E_i \cdot H_i|)^{1/2}, \quad (5.25)$$

Pri čemu je sa  $H_i$  označena entropija  $i$ -tog frejma definisana kao:  $H_i = \sum_{k_i=1}^{K_i} p_{k_i} \log p_{k_i}$ .

Entropijsko-energetsko svojstvo frejmova govornog signala ilustrovano je na Slici 5.17.



**Slika 5.17. a) Govorni signal, b) Entropijsko-energetsko svojstvo njegovih frejmova**

Pragovi  $T_1$  i  $T_2$  se uvode, za određivanje početne i krajnje granice glasovnog dijela. Naime, na osnovu eksperimentalno određenih vrijednosti pragova i entropijsko-energetskog svojstva signala, početni i krajnji vremenski trenutak glasovnog dijela se dobija primjenom relacija:

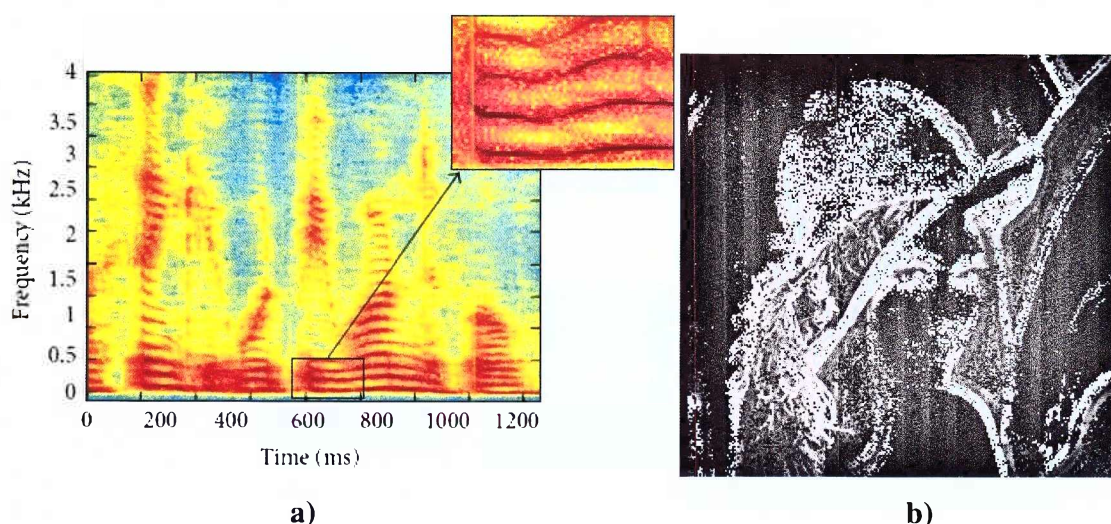
$$\begin{aligned} t_p &= \arg \min_i \{EES(i) > T_1\}, 1 \leq i \leq N \\ t_k &= \arg \max_i \{EES(i) > T_2\}, 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (5.26)$$

gdje je  $N$  ukupan broj frejmova signala. Uobičajene vrijednosti za pragove  $T_1$  i  $T_2$  su 0.16 i 0.17, respektivno.

Region u vremensko-frekvencijskom domenu (Slika 5.18.a) pogodan za watermarking govornih signala se može definisati na osnovu  $t_p$  i  $t_k$ , kao [90], [91]:

$$D = \{(n, k) : n \in (t_p, t_k), k \in (\omega_1, \omega_2)\}, \quad (5.27)$$

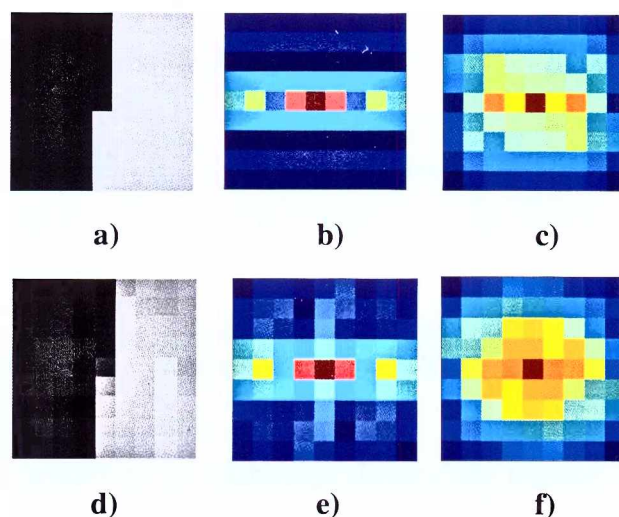
pri čemu je frekvencijski interval  $k \in (\omega_1, \omega_2)$  izabran tako da sadrži nisko-frekvencijske formante.



**Slika 5.18. Ilustracija regiona pogodnih za watermarking: a) Region govornog signala, b) Regioni piksela slike (neželjeni regioni su markirani crnom bojom)**

#### *B. Dvodimenzioni signal – Slika*

Umetanje watermarka u piksele koji pripadaju dinamičnim regionima slike može obezbijediti bolju neprimjetnost watermarka [102]. Istovremeno, u okviru ovakvih regiona se može umetnuti jači watermark, što dalje doprinosi njegovoj robustnosti. Pikseli koji pripadaju dinamičnim regionima prikazani su na Slici 5.18.b, dok su svi ostali pikseli prikazani crnom bojom (slika Lena je korišćena kao test slika). Da bi se odredili dinamični regioni piksela, korišćen je dvodimenzioni S-metod, koji može da naglasi dinamičnost regiona. U poređenju sa spektrogramom, S-metod poboljšava koncentraciju komponenti u okviru dinamičnih regiona, naročito komponenti na srednjim frekvencijama. U slučaju stacionarnih regiona, komponente na srednjim frekvencijama u okviru spektrograma su jako slabe, tako da neće biti značajne ni u okviru S-metoda. Kao ilustraciju prednosti korišćenja S-metoda, posmatrajmo dva sivoskalirana regiona na Slikama 5.19.a i 5.19.d. Prvi se sastoji iz dva stacionarna dijela različitih osvjetljaja, dok drugi sadrži znatno dinamičnije promjene i pogodniji je za umetanje watermarka. Primijetimo da je spektrogram sličan za oba posmatrana regiona. U okviru drugog regiona, koje odgovaraju brzo promjenljivim detaljima (Slika 5.19.f), S-metod bolje ističe komponente na srednjim frekvencijama.



**Slika 5.19.** Klasifikacija regiona slike pomoću spektrograma i S-metoda: a) prvi region sa dva glatka dijela, b) Spektrogram za prvi region, c) S-metod za prvi region, d) drugi region sa brzim promjenama osvetljaja, e) Spektrogram drugog regiona, f) S-metod drugog regiona

Dakle, S-metod se računa za region piksela obuhvaćenih prozorom  $N \times N$  (regioni mogu imati dimenzije od  $8 \times 8$  do  $16 \times 16$ ). Posmatra se oblast srednjih frekvencija:  $D = \{\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2) : \rho_1 < \omega_1, \omega_2 < \rho_2\}$ . S-metod u okviru regiona  $D$  je obelježen sa  $SMD$ . Ukoliko  $SMD$  sadrži značajan broj komponenti čija je energija iznad određenog praga:

$$No \left\{ \left| SMD(\bar{n}, \bar{\omega}) \right| > S \right\} > No_{Ref}, \quad (5.28)$$

region posjeduje dovoljno promjena i koristi se za watermarking. Vektorske oznake  $\bar{n} = (n_1, n_2)$  i  $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$  predstavljaju prostorne i frekvencijske koordinate posmatranog regiona. Funkcija  $No\{\}$  vraća broj komponenti koje zadovoljavaju postavljeni uslov, dok je  $No_{Ref}$  referentni broj tačaka na osnovu koga se donosi odluka o dinamičnosti regiona. Parametar  $S$  predstavlja energetska prag. Za različite regione, energija komponenti na srednjim frekvencijama se mijenja u skladu sa DC frekvencijskom komponentom koja nosi informacije o srednjoj energiji regiona. Stoga se  $S$  može odrediti na osnovu maksimalne vrijednosti S-metoda u okviru regiona:

$$S = \lambda \cdot 10^{\lambda \log_{10}(\max(SM(\vec{n}, \vec{\omega})))}, \quad (5.29)$$

gdje  $\lambda$  ima vrijednost između 0 i 1. Pri implementaciji opisane procedure korišćena je vrijednost  $\lambda=0.7$ . Referentni broj tačaka je dobijen na osnovu:  $No_{Ref} = \lambda \cdot N_D$ , gdje je  $N_D$  ukupan broj tačaka u regionu  $D$ .

### ***Selekcija dinamičnih regiona slike zasnovana na dekompoziciji sopstvenih vrijednosti S-metoda***

Alternativna procedura za odabiranje dinamičnih regiona slike bazirana je na korišćenju principa dekompozicije na sopstvene vrijednosti [103]. Naime, da bi odredili da li posmatrani piksel pripada dinamičnom regionu, potrebno je primijeniti sljedeće korake:

Korak 1) Dvodimenziona STFT se računa za region piksela veličine 20x20 oko centralnog piksela, na sljedeći način:

$$STFT(\vec{n}, \vec{\omega}) = \sum_{k_1=-N/2}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2}^{N/2-1} I(\vec{n} + \vec{k}) w(\vec{k}) e^{-j2\pi / N \vec{\omega} \vec{k}},$$

gdje je  $N=20$ .

Korak 2) Na osnovu STFT se računa S-metod za dvodimenzioni region oko centralnog piksela  $(n_1, n_2)$  kao:

$$SM_{n_1 n_2}(\vec{n}, \vec{\omega}) = \sum_{i_1=-L}^L \sum_{i_2=-L}^L P(i) STFT(\vec{n}, \vec{\omega} + \vec{i}) STFT^*(\vec{n}, \vec{\omega} - \vec{i}).$$

Sadržaj na niskim frekvencijama je uklonjen iz  $SM_{n_1, n_2}(\omega_1, \omega_2)$ , kako bi se izbjegao uticaj komponente osvjetljaja, i shodno tome naglasili detalji na srednjim frekvencijama.

Korak 3) Zatim se, na osnovu  $SM_{n_1, n_2}(\omega_1, \omega_2)$ , dobija matrica  $R_{SM}$  kao:

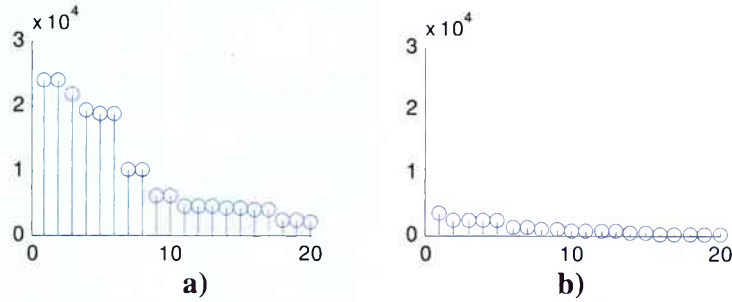
$$R_{SM}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{N+1} \sum_{\vec{k}=-N/2}^{N/2} SM(\frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{2}, \vec{k}) e^{j \frac{2\pi}{N+1} \vec{k}(\vec{n}_1 - \vec{n}_2)}$$

Korak 4) Potrebno je izvršiti *eigenvalue* dekompoziciju matrice  $R_{SM}$  koja se definiše na sljedeći način:



$$R_{SM} = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i u_i(\vec{n}) u_i^*(\vec{n}).$$

Korak 5) Sopstvene vrijednosti  $\lambda_i$ , za  $i=1, \dots, M$ , dobijene za centralni piksel  $(n_1, n_2)$  se zatim koriste za klasifikaciju regiona. Drugim riječima,  $\lambda_i$  koje odgovaraju stacionarnim regionima bez detalja, su značajno manji nego  $\lambda_i$  koje odgovaraju dinamičnim regionima (Slika 5.20).



**Slika 5.20. Ilustracija sopstvenih vrijednosti  $\lambda_i$  za  $i=1, \dots, 20$  u slučaju: a) dinamičnog regiona, b) stacionarnog regiona**

Uzimajući neku graničnu vrijednost  $\lambda_0$ , može se definisati sljedeći vektor:

$$\xi(i) = \begin{cases} 1, & \lambda(i) > \lambda_0 \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases} \quad (30)$$

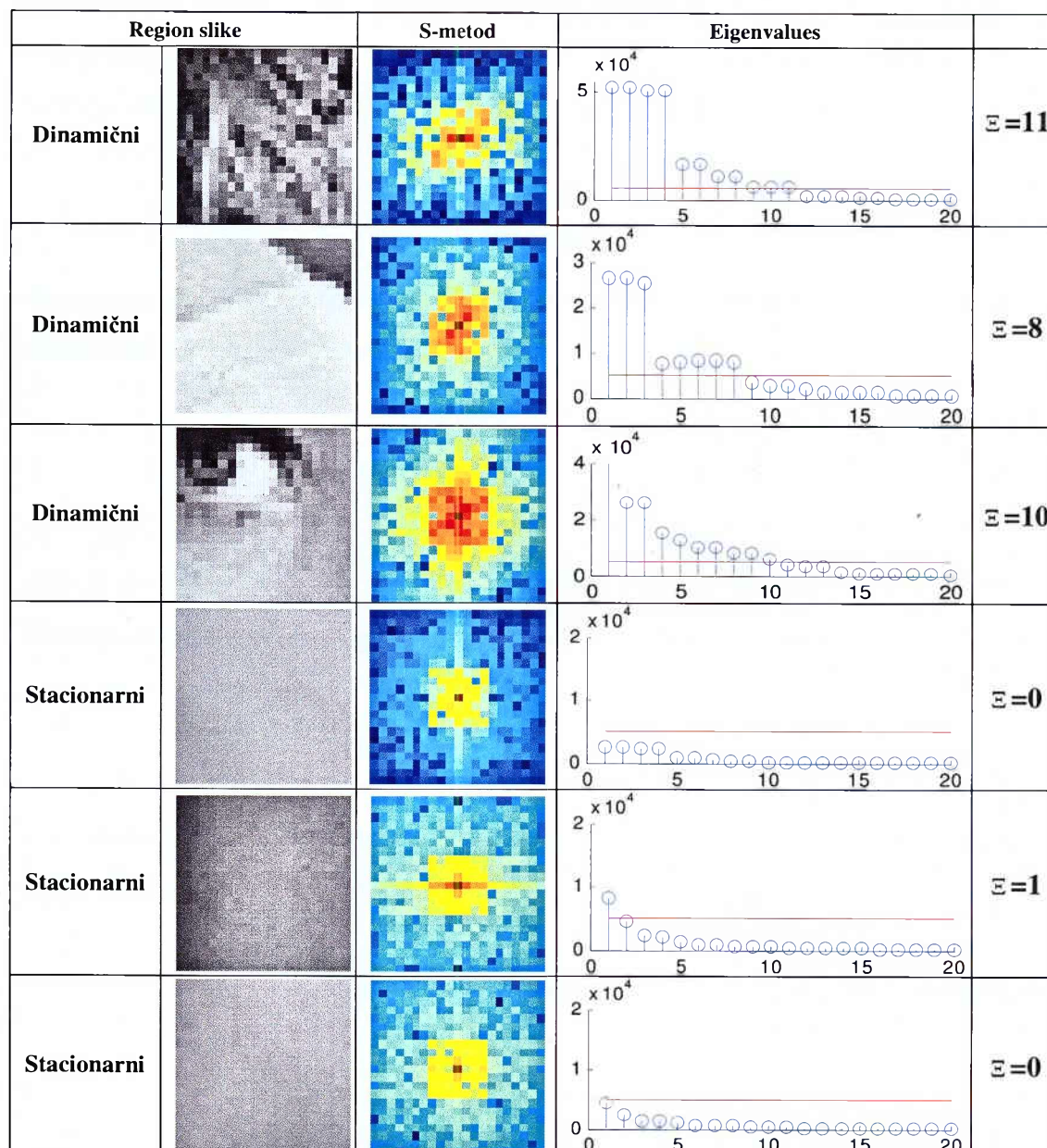
Tada se pravilo za klasifikaciju između stacionarnih i dinamičnih regiona definiše kao:

$$\Xi = \sum_{i=1}^M \xi(i) \begin{matrix} \xrightarrow{h1} \xi_0 \\ \xleftarrow{h2} \xi_0 \end{matrix}, \quad (31)$$

gdje je  $h1$  pretpostavka da je region dinamičan, dok je  $h2$  pretpostavka da se radi o stacionarnom regionu. Granična vrijednost  $\lambda_0$  treba da obezbijedi jasnu razliku između vrijednosti  $\Xi$  za dinamične i vrijednosti  $\Xi$  za regione bez promjena, što bi obezbijedilo određivanje vrijednosti praga  $\xi_0$ . Kao rezultat brojnih eksperimenata (sa različitim slikama i regionima) određena je optimalna vrijednost parametra  $\lambda_0$ . Naime, pokazuje se da za  $\lambda_0 = 0.5 \cdot 10^4$ ,  $\Xi$  je ili 0 ili 1 za sve testirane stacionarne regione. Sa druge strane, za dinamične regione,  $\Xi$  dobija znatno veće vrijednosti.



Neki ilustrativni primjeri su dati na Slici 5.21. Primijetimo da postoji značajan jaz između vrijednosti  $\Xi$  za dinamične i stacionarne regione. Stoga se  $\xi_0$  može postaviti na vrijednost između najmanjeg  $\Xi$  za dinamične i najvećeg  $\Xi$  za glatke regione.



Slika 5.21. Klasifikacija pomoću dekompozicije na sopstvene vrijednosti za različite regione slike

## 2) Selekcija komponenti pogodnih za modelovanje watermarka

Nastavak watermarking procedure je identičan za jednodimenzione i dvodimenzione signale. Stoga će biti korišćene vektorske oznake. Da bi se obezbijedila neprimjetnost watermarka, iz odabranih regiona selektuju se samo najznačajnije komponente. Pozicije svih komponenata u okviru regiona  $D$  su određene na osnovu funkcije oslonca [102]:

$$L_{H_1}(\vec{n}, \vec{\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{za } (\vec{n}, \vec{\omega}) \in D \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases} \quad (5.32)$$

Najznačajnije komponente u okviru regiona se izdvajaju uvođenjem dodatne funkcije oslonca definisane na sljedeći način:

$$L_{H_2}(\vec{n}, \vec{\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{za } (\vec{n}, \vec{\omega}) : |SM_D(\vec{n}, \vec{\omega})| > \xi \\ 0 & \text{za } (\vec{n}, \vec{\omega}) : |SM_D(\vec{n}, \vec{\omega})| \leq \xi \end{cases} \quad (5.33)$$

gdje je  $\xi = \lambda \cdot 10^{\lambda \log_{10}(\max(SM_D(\vec{n}, \vec{\omega})))}$ , vrijednost energetskog praga. Dakle, rezultujuća funkcija oslonca je definisana kao [102]:

$$L_M(\vec{n}, \vec{\omega}) = L_{H_1}(\vec{n}, \vec{\omega}) \cap L_{H_2}(\vec{n}, \vec{\omega}) \quad (5.34)$$

Ova funkcija sadrži informacije o značajnim komponentama u okviru regiona  $D$  korišćenim za modelovanje watermarka.

## 3) Modelovanje watermarka na osnovu vremensko/prostorno-frekvencijskih karakteristika signala

Da bi watermark bio usklađen sa izdvojenim komponentama, njegove vremensko/prostorno-frekvencijske karakteristike se modeluju na osnovu funkcije oslonca  $L_M$ . Pri tome se koristi princip vremenski promjenljivog filtriranja koji je primarno uvedeno za uklanjanje šumova, ali se može koristiti i kao vremensko-

frekvencijska maska za modelovanje signala [13], [14], [109], [110]. Polazeći od STFT slučajne sekvence  $p(\vec{n})$ , rezultujući watermark se dobija na izlazu nestacionarnog filtra na sljedeći način:

$$w_{key}(\vec{n}) = \sum_{\vec{\omega}} L_M(\vec{n}, \vec{\omega}) STFT_p(\vec{n}, \vec{\omega}), \quad (5.35)$$

ili ekvivalentno, STFT watermarka je:  $STFT_{w_{key}}(\vec{n}, \vec{\omega}) = L_M(\vec{n}, \vec{\omega}) STFT_p(\vec{n}, \vec{\omega})$ .

Na ovaj način se dobija watermark sa specifičnim vremensko/prostorno-frekvencijskim karakteristikama. Ovakav pristup dodatno poboljšava neperceptibilnost watermarka i obezbjeđuje veću vrijednost odnosa signala i šuma SNR.

#### 4) Umetanje i detekcija watermarka

Umetanje watermarka se vrši na osnovu relacije:

$$x_w(\vec{n}) = x(\vec{n}) + w_{key}(\vec{n}). \quad (5.36)$$

Detekcija watermarka se obavlja u okviru regiona  $D$ , korišćenjem korelacionog detektora u vremensko-frekvencijskom ili prostorno-frekvencijskom domenu, u zavisnosti od vrste multimedijalnog signala. Da bi se detekcija smatrala uspješnom, odzivi detektora treba da zadovolje sljedeći uslov [102]:

$$\sum_D STFT_{x_w}(\vec{n}, \vec{\omega}) \cdot STFT_{w_{key}}(\vec{n}, \vec{\omega}) > T, \quad (5.37)$$

gdje  $STFT_{x_w}(\vec{n}, \vec{\omega})$  i  $STFT_{w_{key}}(\vec{n}, \vec{\omega})$  predstavljaju STFT watermarkiranog signala i watermarka, respektivno, dok je  $T$  prag. Odziv detektora na bilo koji pogrešan pokušaj, odnosno pogrešnu sekvencu ili ključ (kreiranu na isti način kao watermark), ne smiju biti veći od vrijednosti praga.

U određenim slučajevima, detekcija watermarka se može značajno poboljšati uključivanjem kros-članova u vremensko-frekvencijskom domenu [90]. Naime, korišćenje S-metoda sa širim prozorom (većim  $L$ ), dovodi do pojave kros-članova koji

takođe sadrže informaciju o watermarku, te na taj način doprinose njegovoj detekciji. Stoga se korelacioni detektor u vremensko-frekvencijskom domenu može modifikovati u sljedeći oblik:

$$Det = \sum_{i=1}^N SM_{w_{key}}^i \cdot SM_{x_w}^i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N SM_{w_{key}}^{i,j} \cdot SM_{x_w}^{i,j}, \quad (5.38)$$

gdje prva suma uključuje auto-komponente, dok druga uključuje kros-članove.

Performanse predloženog detektora su testirane korišćenjem mjere kvaliteta detekcije definisane kao:

$$R = \frac{\bar{D}_{w_r} - \bar{D}_{w_w}}{\sqrt{\sigma_{w_r}^2 + \sigma_{w_w}^2}}, \quad (5.39)$$

gdje su  $\bar{D}$  i  $\sigma^2$  srednja vrijednost i standardna devijacija odziva detektora, respektivno, dok oznake  $w_r$  i  $w_w$  ukazuju na prave ključeve i pogrešne ključeve. Watermarking procedura je testirana za veći broj pravih ključeva (watermark-a). Za svaki pravi ključ se generiše određeni broj pogrešnih ključeva. Vjerovatnoća greške  $P_{err}$  se računa na osnovu relacije:

$$P_{err} = p_{Dw_w} \int_T^\infty P_{Dw_w}(x) dx + p_{Dw_r} \int_{-\infty}^T P_{Dw_r}(x) dx, \quad (5.40)$$

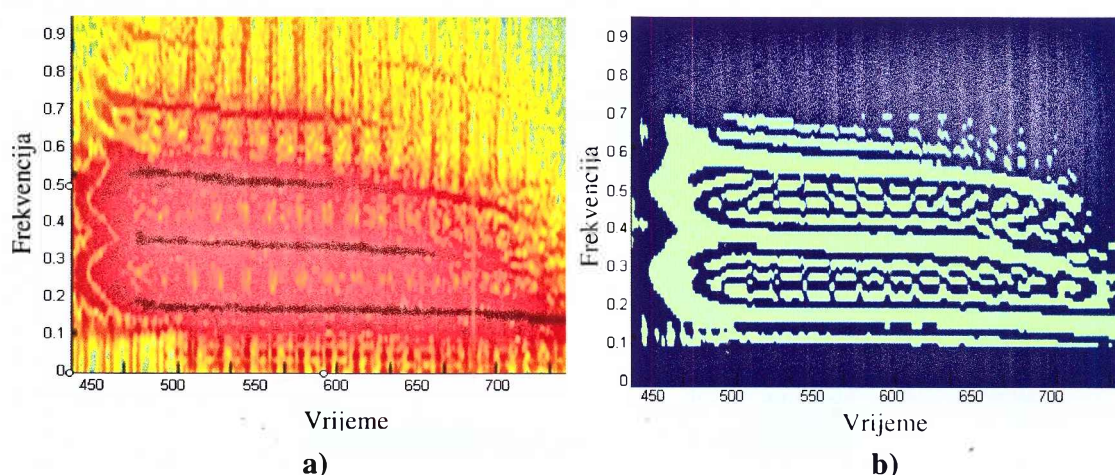
gdje je  $T$  prag. Pretpostavka je da su vjerovatnoće pojavljivanja pravih i pogrešnih ključeva jednake:  $p_{Dw_w} = p_{Dw_r} = 1/2$ . Smatrajući da je raspodjela  $P_{Dw_w}$  i  $P_{Dw_r}$  normalna, te da je  $\sigma_{w_r}^2 = \sigma_{w_w}^2$ , minimizacijom prethodnog izraza za vjerovatnoću greške  $P_{err}$  se dobija:

$$P_{err} = \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(-\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{2}. \quad (5.41)$$

Povećavanjem vrijednosti mjere kvaliteta detekcije  $R$ , opada vjerovatnoća greške. Na primjer,  $P_{err}(R=2)=0.0896$ ,  $P_{err}(R=3)=0.0169$ ,  $P_{err}(R=4)=0.0023$ .



**Primjer 1:** U ovom primjeru je korišćen govorni signal sa maksimalnom frekvencijom  $f_{max}=4\text{kHz}$ . STFT je računata sa pravougaonim prozorom širine 256 odbiraka za vremenski-promjenljivo filtriranje. Parametar  $L=5$  je korišćen za računanje S-metoda. Region  $D$  (Slika 5.22.a) je izabran tako da obuhvati prva tri nisko-frekventna formanta iz glasovnog regiona govora. Funkcija oslonca  $L_M$  (Slika 5.22.b) je dobijena korišćenjem praga  $\xi$  sa vrijednošću parametra  $\lambda=0.7$ .



Slika 5.22. a) Selektovani region govornog signala, b) Funkcija oslonca

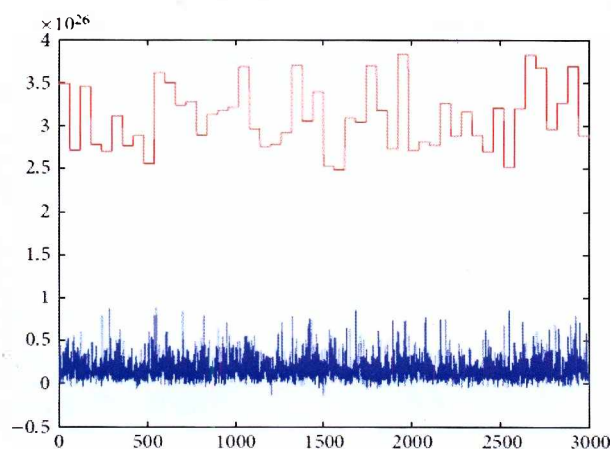
Da bi se testirala efikasnost predloženog pristupa, ista procedura je ponovljena 50 puta, odnosno za 50 različitih watermark signala (pravi ključevi). Svaki watermark je modelovan na osnovu funkcije oslonca koja sadrži informacije o značajnim komponentama u oblasti prva tri formanta. Srednja vrijednost odnosa signala i šuma, nakon umetanja watermarka je približno 27dB. Za svaki pravi ključ, 60 pogrešnih ključeva je generisano na isti način kao što su generisani i pravi ključevi.

Neperceptibilnost watermarka je testirana primjenom ABX testa preslušavanja, gdje su A, B i X redom originalni, watermarkirani i originalni ili watermarkirani signal. Slušalac preslušava signale A i B. Zatim, preslušava signal X i odlučuje da li je X signal A ili signal B. S obzirom da su A, B i X trajanja nekoliko sekundi, preslušavane su čitave sekvence, a ne samo izolovani segmenti. U testu preslušavanja je učestvovalo deset osoba. Test je ponovljen nekoliko puta i na osnovu dobijene statistike je zaključeno da slušaoci ne mogu sa sigurnošću da razlikuju originalni i watermarkirani signal.



Detekcija watermarka je vršena korelacionim detektorom baziranim na S-metodu. Za potrebe detekcije S-metod je računat sa  $L=32$ , te ovaj korelacioni detektor uključuje i kros-članove. Odzivi detektora na prave i pogrešne ključeve su prikazani na Slici 5.23.

Prag za detekciju je postavljen na vrijednost:  $T = \frac{\overline{D}_{w_r} + \overline{D}_{w_w}}{2}$ , gdje su  $\overline{D}_{w_r}$  i  $\overline{D}_{w_w}$  srednje vrijednosti odziva detektora na prave i pogrešne ključeve. Mjera kvaliteta detekcije je  $R=7.5$ , što znači da je vjerovatnoća greške  $5 \cdot 10^{-8}$ .



**Slika 5.23. Odzivi detektora na prave ključeve (označeno crvenom bojom) i na pogrešne ključeve (označeno plavom bojom)**

U nastavku, procedura je testirana za različite atake, kao što su: mp3 kompresija, skaliranje vremenske ose, skaliranje pitch frekvencije, eho, normalizacija amplituda, itd. Rezultati detekcije u vidu mjere kvaliteta detekcije  $R$ , kao i odgovarajuće vrijednosti vjerovatnoće greške  $P_{err}$ , su date u Tabeli 5.5. Većina ataka je realizovana korišćenjem programskog paketa CoolEditPro v2.0, dok je ostatak procedure realizovan u Matlab-u 7. Bitno je napomenuti da je većina razmatranih ataka jaka i da izazivaju značajne degradacije signala. Na primjer, u postojećim audio watermarking procedurama, obično je testirano: skaliranje vremenske ose do 4%, wow i flutter do 0.5% ili 0.7%, eho 50 ms ili 100 ms. Ovdje su primijenjeni jači ataci, da bi se pokazalo da i u tim slučajevima, predloženi metod obezbjeđuje veću robustnost sa jako malim vjerovatnoćama greške.

TABELA 5.5. MJERA KVALITETA DETEKCIJE R I VJEROVATNOĆE GREŠKE  $P_{err}$  ZA RAZLIČITE ATAKE

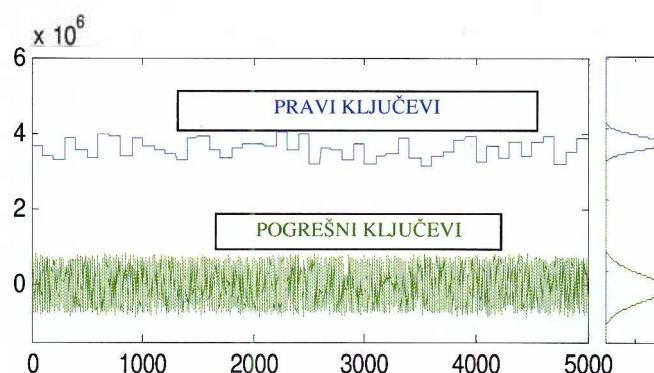
Atak	R	$P_{err}$
Bez ataka	7.5	$10^{-8}$
Mp3 (konstantan protok: 8 Kbps)	6.92	$10^{-7}$
Mp3 (promjenljivi protok: 75-120 Kbps)	6.8	$10^{-7}$
Mp3 (promjenljivi protok: 40-50 Kbps)	6.23	$10^{-6}$
Kašnjenje: mono light eho 180 ms	6.9	$10^{-7}$
Eho (200 ms)	6.8	$10^{-7}$
Razvlačenje vremenske ose $\pm 15\%$	6.2	$10^{-6}$
Wow (kašnjenje 20%)	6.3	$10^{-6}$
Flutter	6.8	$10^{-7}$
Wow i Flutter	6.72	$10^{-6}$
Normalizacija amplituda	6.95	$10^{-7}$
Skaliranje pitch frekvencije ( $\pm 5\%$ )	5.6	$10^{-5}$
Gauss-ov šum (SNR=-35dB)	6.9	$10^{-7}$

**Primjer 2:** Ilustrirajmo efikasnost primjene predložene procedure za zaštitu digitalne slike. Watermark je umetnut sa odnosom signala i šuma PSNR=50dB (peak signal to noise ratio). STFT je računata korišćenjem dvodimenzionog prozora veličine 9x9. Broj piksela u selektovanim dinamičnim regionima slike dat je u Tabeli 5.6 (druga kolona tabele) i znatno je manji od ukupnog broja piksela slike. Međutim, i pored toga što je korišćen mali broj piksela za umetanje watermarka, predložena procedura obezbjeđuje malu vjerovatnoću greške (Tabela 5.6, **P-F detekcija**). Ovo je rezultat činjenice da svakom pikselu u prostornom domenu odgovara dvodimenzioni region u prostorno-frekvencijskom domenu koji sadrži informacije o watermarku. Dakle, broj koeficijenata koji se koriste za detekciju watermarka je značajno veći od broja piksela koji zapravo sadrže watermark. Eksperimentalno dobijeni odzivi detektora za prave i pogrešne ključeve, za sliku Lena, su prikazani na Slici 5.24. Originalna slika i watermarkirana slika Lena su prikazane na Slici 5.25. Procedura je testirana u prisustvu ataka, pri čemu su eksperimenti vršeni watermarkiranjem različitih slika.

TABELA 5.6. MJERE EFIKASNOSTI DETEKCIJE I VJEROVATNOĆE GREŠKE

Slika	Broj piksela	P-F detekcija		Detekcija u domenu piksela	
		R	$P_{err}$	R	$P_{err}$
Lena	4330	8.25	$\sim 10^{-17}$	0.75	0.22
Peppers	4830	9.15	$\sim 10^{-20}$	0.9	0.18
F16	3304	7.95	$\sim 10^{-14}$	0.55	0.29
Boat	6015	9.2	$\sim 10^{-20}$	0.95	0.17
Barbara	7833	9.45	$\sim 10^{-21}$	1.1	0.13

Minimalne i maksimalne vrijednosti mjere kvaliteta detekcije  $R$  i odgovarajuće vjerovatnoće greške su prikazane u Tabeli 5.7 (**P-F procedura**). U cilju poređenja rezultata, paralelno je implementirana i watermarking procedura bazirana na DCT koeficijentima slike sa istim odnosom signala i šuma PSNR=50dB. Naime, svi DCT koeficijenti na srednjim frekvencijama su korišćeni za watermarking (22050 koeficijenata za slike veličine 256x256, što je značajno veći broj nego u slučaju predložene procedure). Detekcija je vršena korišćenjem korelacionog detektora (**DCT procedura** u Tabeli 5.7).



Slika 5.24. Odzivi detektora za 50 pravih ključeva i 5000 pogrešnih ključeva



Fig 5.25. a) Originalna slika Lena, b) Watermarkirana slika Lena

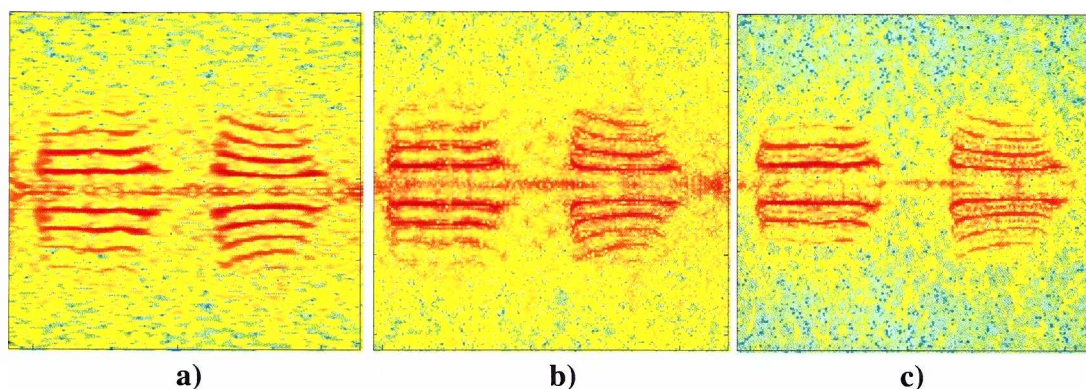
### **5.3 PRIMJENE VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH DISTRIBUCIJA ZA ANALIZU BIOMEDICINSKIH SIGNALA**

U cilju pomoći pacijentima koji imaju problem disfagije odnosno otežanog gutanja [111]-[119], vrši se analiza biomedicinskih signala dobijenih tehnikom akcelerometrije gutanja. Među tehnikama koje djeluju obećavajuće u rješavanju brojnih problema analize signala gutanja, izdvaja se vremensko-frekvencijska analiza.

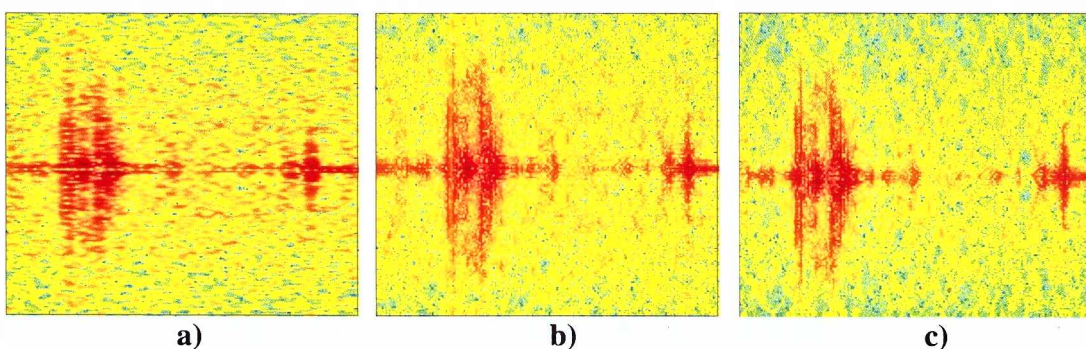
Ovdje će biti razmatrani složeni biomedicinski signali prikupljeni pomoću senzora koji se postavljaju na grlu pacijenata. Signali sadrže različite akustične vibracije, među kojima su najznačajnije vibracije prouzrokovane gutanjem i glasovne vibracije. Takođe, signali mogu da sadrže komponente uzrokovane mikrofonijom. Svaka od posmatranih vibracija sadrži specifične vremensko-frekvencijske karakteristike. Stoga je vremensko-frekvencijsko predstavljanje ovih signala veoma značajno za njihovu analizu i klasifikaciju. Imajući u vidu da su posmatrani signali izrazito multikomponentni, neophodno je koristiti vremensko-frekvencijske distribucije sa redukovanim kros-članovima. Iz tog razloga, razmatrano je korišćenje spektrograma, S-metoda i Hermitskog S-metoda.

Zumirani regioni spektrograma, S-metoda i Hermitskog S-metoda za jedan glasovni dio složenog signala prikazani su na Slikama 5.26.a do 5.26.c, respektivno. Takođe, zumirani regioni koji sadrže vibracije izazvane gutanjem, prikazani su na Slici 5.27. Spektrogram obezbjeđuje jasno razlikovanje regiona koji sadrže različite tipove vibracija. Međutim, vremensko-frekvencijska rezolucija se može poboljšati korišćenjem S-metoda. Dodatno poboljšanje rezolucije je omogućeno upotrebom Hermitskog S-metoda (Slika 5.26.c i Slika 5.27.c).





**Slika 5.26.** Vremensko-frekvencijski regioni glasovnih djelova signala dobijeni korišćenjem: a) Spektrograma, b) S-metoda, c) Hermitskog S-metoda



**Slika 5.27.** Vremensko-frekvencijski regioni signala gutanja: a) Spektrogram, b) S-metod, c) Hermitski S-metod

Na primjer, Hermitski S-metod poboljšava koncentraciju glasovnih komponenti u poređenju sa standardnim S-metodom (Slika 5.26). Ujedno, uticaj šuma je znatno redukovan. Upoređujući Slike 5.27.b i 5.27.c., može se primijetiti da Hermitski S-metod obezbjeđuje bolju rezoluciju komponenti gutanja.

### 5.3.1 Procedura klasifikacije

U vremensko-frekvencijskom domenu svaka zvučna vibracija je predstavljena dvodimenzionim regionom koji se odlikuje specifičnim “teksturama”. Kompleksnost “tekstura” zavisi od prirode zvuka, dok je finoća tekstura povezana sa rezolucijom vremensko-frekvencijske distribucije. Dakle, ideja je da se različite zvučne vibracije analiziraju u vremensko-frekvencijskom domenu. Na taj način se može obezbijediti



efikasan metod za njihovu klasifikaciju. U tu svrhu, upotrijebljen je metod projekcija zasnovan na Hermitskim funkcijama.

### *Hermitski Projekcioni Metod*

Hermitski projekcioni metod se koristi u mnogobrojnim aplikacijama za obradu slike, kao što je filtriranje, analiza tekstura, itd. U poređenju sa trigonometrijskim funkcijama, razvoj u Hermitske funkcije omogućava bolju lokalizaciju kako u domenu signala tako i u transformacionom domenu. Ujedno, razvoj u Hermitske funkcije omogućava istovremenu analizu signala i njegove Fourier-ove transformacije, s obzirom da su Hermitske funkcije eigen-funkcije Fourier-ove transformacije.

Prvi korak u okviru Hermitskog projekcionog metoda je oduzimanje osnove, imajući u vidu da:

$$\psi_i(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty.$$

Za dvodimenzioni signal  $I(x,y)$ , osnova je definisana na sljedeći način:

$$b_x(y) = I(x,0) + \frac{I(x,P) - I(x,0)}{P} \cdot y, \quad (5.42)$$

gdje je  $x=0, \dots, P$  i  $y=1, \dots, Q$ . Dakle, osnova se računa za svako  $y$ , a zatim se oduzima od originalnih vrijednosti:

$$f(x,y) = I(x,y) - b(x,y). \quad (5.43)$$

Dekompozicija na  $N$  Hermitskih funkcija se definiše kao:

$$f_y(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi_i(x), \quad (5.44)$$

gdje je  $f_y(x) = f(x,y)$  za fiksno  $y$ , dok se koeficijenti Hermitskog razvoja dobijaju kao:

$$c_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(x) \psi_i(x) dx. \quad (5.45)$$

Prethodna relacija se može aproksimirati korišćenjem Gauss-Hermitskog kvadraturnog metoda za aproksimaciju integrala:

$$c_i(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mu_{N-1}^i(x_m) f(x_m), \quad (5.46)$$

gdje su  $x_m$  nule Hermitskog polinoma:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d(e^{-x^2})}{dx^n}. \quad (5.47)$$

Konstante  $\mu_{N-1}^i(x_m)$  se dobijaju korišćenjem Hermitskih funkcija na sljedeći način:

$$\mu_{N-1}^i(x_m) = \frac{\psi_i(x_m)}{(\psi_{N-1}(x_m))^2}. \quad (5.48)$$

Odgovarajući vremensko-frekvencijski regioni se koriste za klasifikaciju između vibracija gutanja i drugih zvučnih vibracija (govor, smijeh, kašalj, itd.). Kao najjednostavniji izbor, za vremensko-frekvencijsko predstavljanje korišćen je spektrogram. Naime, procedura klasifikacije obezbjeđuje zadovoljavajuće rezultate čak i za vremensko-frekvencijsku rezoluciju postignutu korišćenjem spektrograma. Dalje poboljšanje se može ostvariti korišćenjem S-metoda ili Hermitskog S-metoda, ali to nije od krucijalne važnosti za klasifikaciju.

U okviru procedure klasifikacije, potrebno je najprije iz signala ukloniti šum. Za tu svrhu se definiše vremensko-frekvencijska maska, koja će eliminisati uticaj šuma i lokalizovati bitne komponente u okviru spektrograma:

$$L(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } SPEC(t, \omega) \geq Thr_1 \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases}, \quad (5.49)$$

gdje je  $Thr_1$  vrijednost praga koja se dobija kao:

$$Thr_1 = 10^{\frac{\sigma \log_{10}(\max_{t, \omega}(SPEC(t, \omega)))}{10}}. \quad (5.50)$$

Shodno tome, filtrirana verzija spektrograma se dobija kao:

$$SPEC_{filt}(t, \omega) = L(t, \omega) SPEC(t, \omega). \quad (5.51)$$

Zatim se, za određivanje intervala koji sadrže vibracije, računa projekcija filtriranog spektrograma na vremensku osu i dobija se energetska vektor:

$$E(t) = \sum_{\omega} |SPEC_{filt}(t, \omega)|. \quad (5.52)$$

Dakle, vektor pozicija na kojima se pojavljuju vibracije u vremenskom domenu se može definisati kao:

$$E_f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } E(t) \geq Thr_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (5.53)$$

gdje je radi eliminisanja preostalog šuma uveden dodatni prag  $Thr_2$ . Vremensko-frekvencijski regioni za klasifikaciju su izdvojeni iz filtriranog spektrograma  $SPEC_{filt}(t, \omega)$  za vremenske intervale  $t = \arg\{E_f(t) = 1\}$ . Dužina intervala koji sadrže vibracije se mora fiksirati na konstantnu vrijednost kako bi se dobili regioni istih dimenzija. Zatim se nad izdvojenim regionima primjenjuje Hermitski projekcioni metod. Korišćenjem malog broja Hermitskih funkcija, unosi se određena greška. Regioni sa jednostavnijim strukturama će imati malu grešku, dok će složeni regioni biti sa značajnom greškom jer trebaju više funkcija za rekonstrukciju. Dakle, srednje kvadratne greške se računaju na sljedeći način:

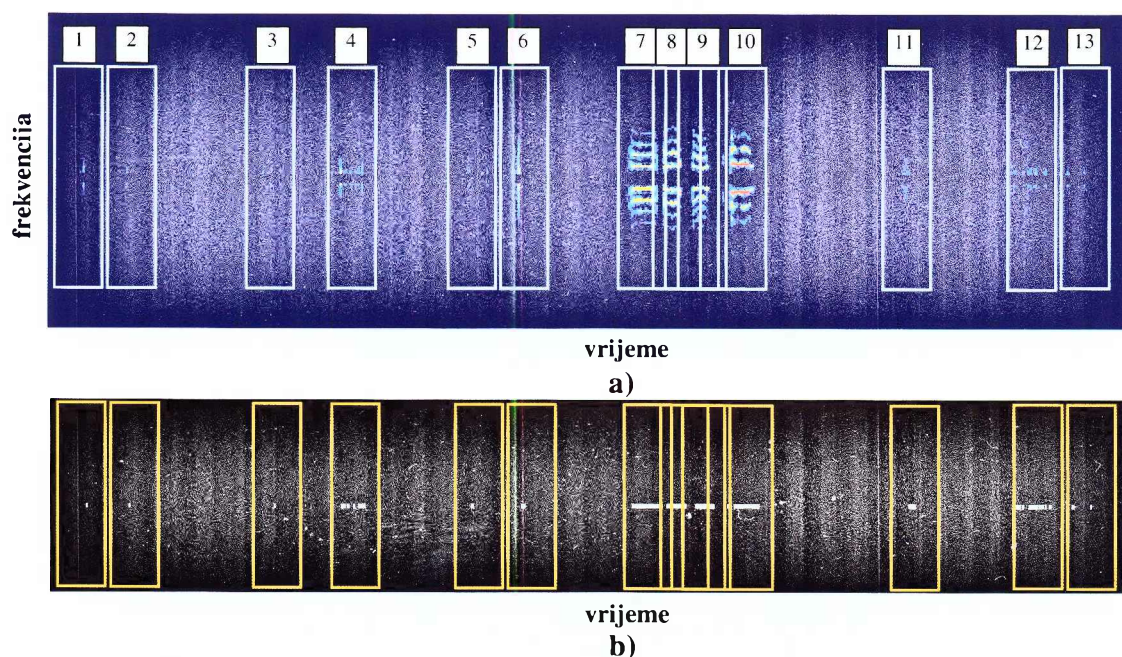
$$MSE = \frac{1}{T\Omega} \sum_t \sum_{\omega} (R(t, \omega) - R'(t, \omega)) \quad (5.54)$$

gdje  $R(t, \omega)$  označava originalni region iz  $SPEC_{filt}(t, \omega)$ ,  $R'(t, \omega)$  je rekonstruisani region, dok su  $T$  i  $\Omega$  dimenzije regiona. Dakle, region koji sadrži komponente gutanja biće rekonstruisan sa znatno manjom MSE u odnosu na region koji sadrži znatno složenije glasovne strukture. Dimenzije  $T$  i  $\Omega$  su iste za sve regione.

### 5.3.2 Eksperimentalni rezultati

U eksperimentima su korišćeni realni signali koji sadrže glasovne vibracije (govor, kašalj, smijeh), vibracije gutanja i šum. Signali snimljeni senzorima za akcelerometriju gutanja, za približno dvjesto pacijenata, dobijeni su zahvaljujući istraživačkom institutu Bloorview Kids Rehab iz Toronta, Kanada.

Veličina prozora, korišćena za računanje spektrograma je 512 odbiraka. Parametar  $\sigma=0.25$  je korišćen u relaciji (5.50) za određivanje praga  $Thr_1$ . Veličina regiona je 200 odbiraka u vremenu i 256 odbiraka po frekvenciji. Ilustracija filtriranih vremensko-frekvencijskih regiona za slučaj složenog signala prikazana je na Slici 5.28.a.



**Slika 5.28. a) Filtrirana vremensko-frekvencijska reprezentacija i pridruženi regioni, b) Ilustracija vektora koji sadrži okvirne vremenske trenutke pojavljivanja vibracija**

Kako bi se obezbijedilo više komponenti za analizu, korišćene su komponente i na pozitivnim i na negativnim frekvencijama. Testirani signali sadrže snažnu smetnju oko nulte frekvencije koja je unaprijed filtrirana. Vektor sa vremenskim pozicijama, na kojima dolazi do vibracija, prikazan je bijelim linijama na Slici 5.28.b. Hermitski projekcioni metod je primijenjem korišćenjem deset Hermitskih funkcija. Rezultati za različite regione su dati u Tabeli 5.8. Posmatrani su sljedeći tipovi regiona: regioni koji sadrže samo šum, regioni koji sadrže zvučne udare usljed mikrofonije, regioni koji sadrže gutanje i regioni koji sadrže glasovne vibracije.

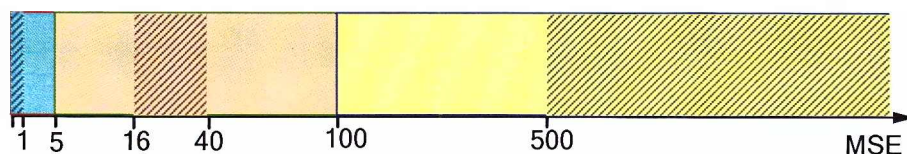
Primijetimo da će regioni sa šumom i regioni koji sadrže zvučne udare usljed nesavršenosti opreme, imati najmanju MSE, s obzirom da su jednostavni i mogu se lako rekonstruisati. Sa druge strane, regioni koji sadrže glasovne komponente su vrlo kompleksni za rekonstrukciju. Stoga se korišćenjem deset Hermitskih funkcija dobija

velika MSE. Na kraju, primijetimo da regioni koji sadrže gutanje imaju znatno manju MSE u odnosu na regione sa glasovnim komponentama, ali i znatno veću u odnosu na regione sa šumovima. Regioni koji sadrže šum, u većini slučajeva imaju  $MSE < 1$ , dok je za samo nekoliko ova greška nešto veća (ali opet manja od vrijednosti 5).

TABELA 5.8. MSE ZA SELEKTOVANE REIONE

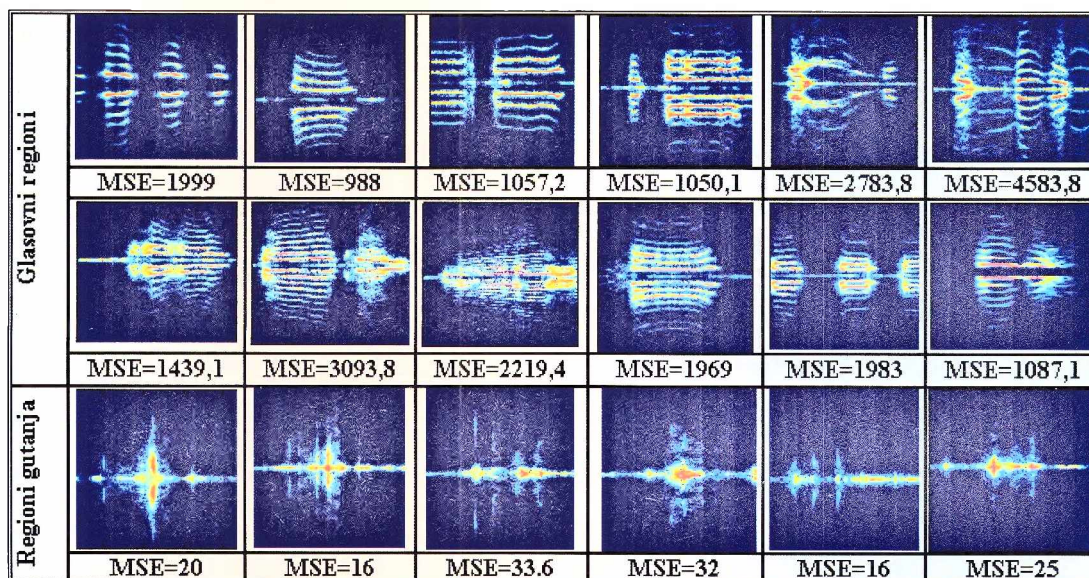
Broj regiona	Opis regiona	MSE
1	Šum	0.086
2	Šum	0.01
3	Šum	0.22
4	Gutanje	36.29
5	Zvučni udar	0.13
6	Percussive sound	3.4
7	Glasovni dio	669
8	Glasovni dio	1057.2
9	Glasovni dio	762
10	Glasovni dio	505
11	Šum	0.88
12	Gutanje	18.6
13	Šum	3

Greške za regione koje sadrže gutanje su najčešće između 16 i 40, ali uvijek značajno manje od 100. Za regione sa glasovnim komponentama, većina grešaka je veća od 500. Na Slici 5.30 dati su klasifikacioni intervali u zavisnosti od grešaka MSE: plava boja odgovara slučaju šuma, crvena označava gutanje, dok je slučaj glasovnih djelova označen žutom bojom. Šrafura je dodata za opseg vrijednosti koje se pojavljuju s najvećim vjerovatnoćama, za svaki od tipova regiona. U okviru ovih eksperimenata je testirano više od 100 signala, dok su rezultati za njih 18 prikazani na Slici 5.31 (date su i odgovarajuće greške MSE).



Slika 5.30. Klasifikacioni intervali





**Slika 5.31. Ilustracija nekoliko zumiranih vremensko-frekvencijskih regiona; odgovarajuće greške MSE su uključene ispod svakog regiona**

## ZAKLJUČAK

Nastojanje da se što idealnije opiše vremenski promjenljivi spektar je jedan od fundamentalnih izazova u analizi signala. Tome svjedoči i veliki broj objavljenih naučnih radova, vezanih za poboljšanje vremensko-frekvencijske koncentracije i rezolucije. Međutim, generalno govoreći, zadatak se svodi na traženje optimalne distribucije za svaku konkretnu aplikaciju. Spektrogram i Wigner-ova distribucija su najjednostavnijeg oblika i često se koriste u analizi signala. Međutim, ove distribucije ne mogu da obezbijede dobru koncentraciju za nelinearne promjene trenutne frekvencije, a time ni preciznu analizu ovakvih signala. Problem postaje još kompleksniji ako se radi o brzim varijacijama trenutne frekvencije.

U ovom radu su predloženi pristupi za dobijanje vremensko-frekvencijskih distribucija proizvoljnog reda, koje obezbjeđuju visoku koncentraciju za slučaj brzih varijacija trenutne frekvencija. U tom pogledu, teorijski doprinosi vremensko-frekvencijskoj analizi signala se odnose na: definisanje opšte forme vremensko-frekvencijske distribucije  $N$ -tog reda sa kompleksnim argumentom,  $L$ -forme vremensko-frekvencijskih distribucija sa kompleksnim argumentom i klase distribucija zasnovane na korišćenju ambiguity domena. Važno je naglasiti da predloženo uopštenje forme distribucija sa kompleksnim argumentom objedinjuje znatan broj postojećih i široko primjenjivanih distribucija, a takođe uključuje i nove oblike distribucija. Na taj način, moguće je postići visoku rezoluciju u vremensko-frekvencijskom domenu, nezavisno od zakonitosti promjene trenutne frekvencije. Predložena klasa distribucija u ambiguity domenu, sadrži podklase različitog reda, među kojima je i Cohen-ova klasa distribucija. Distribucije iz ove klase su naročito značajne za analizu multikomponentnih signala sa brzim varijacijama trenutne frekvencije, jer daju visoko-koncentrisano predstavljanje bez kros-članova. Za neke interesantne slučajeve predloženih distribucija, analizirane su performanse u prisustvu šuma, izvedeni su izrazi za bias i varijansu, data su poređenja sa najčešće korišćenim distribucijama. Predložen je virtuelni instrument koji uključuje novo-definisane i neke od postojećih distribucija. Instrument sadrži veliki broj opcija i uključuje realizacije za monokomponentne i multikomponentne signale. Osim toga,

omogućava poređenje više različitih distribucija, kao i automatizovani izbor optimalne distribucije na osnovu srednje kvadratne greške procjene trenutne frekvencije.

Sa druge strane, u radu je dat poseban doprinos razvoju i primjeni distribucija sa višestrukim prozorima. Polazeći od koncepta spektrograma sa višestrukim prozorima i nastojeći da se postigne povećanje koncentracije, a da se istovremeno zadrži jednostavnost realizacije, definisan je Hermitski S-metod. Kao optimalni prozori koriste se Hermitske funkcije različitog reda koje pokazuju niz dobrih osobina. Pokazano je da Hermitski S-metod obezbeđuje znatno bolje performanse u odnosu na standardni S-metod i Hermitski spektrogram. Kompleksnost realizacije nije značajno povećana u odnosu na pomenute distribucije, jer se zadovoljavajući rezultati postižu već sa malim brojem Hermitskih funkcija. Za dvodimenzionalne signale, kao što su radarske slike, pored jednodimenzionalnog, definisan je i dvodimenzionalni Hermitski S-metod.

Na kraju su razmatrani neki od aspekata primjene vremensko-frekvencijskih distribucija, koji su posljednjih godina u centru interesovanja brojnih istraživača. Prednosti korišćenja Hermitskog S-metoda razmatrane su najprije za slučaj radarskih signala, koji opisuju kretanje čovjeka. S tim u vezi, predložena je procedura za klasifikaciju načina kretanja, čiji je cilj da napravi jasne razlike između kretanja bez pomjeranja ruku, sa pomjeranjem jedne i sa pomjeranjem obje ruke. Zatim je na brojnim primjerima pokazano izoštravanje slika za potrebe detekcije radarske mete korišćenjem Hermitskog S-metoda.

Na bazi korišćenja vremensko-frekvencijske distribucije, predložena je generalizovana watermarking procedura za zaštitu multimedijalnih podataka (audio i slika). Pri tome je vremensko-frekvencijska analiza korišćena u gotovo svim fazama watermarking procedure: selekcija pogodnih regiona i komponenti za umetanje watermarka, modelovanje watermarka, umetanje i detekcija watermarka. Ovakav pristup pokazuje niz prednosti u odnosu na postojeće tehnike, u prvom redu u pogledu efikasnosti postizanja kompromisa između neprimjetnosti i robustnosti watermarka. Watermarking procedura je implementirana za govorne signale i sliku, dok je robustnost watermarka pokazana u prisustvu niza ataka karakterističnih za ove vrste signala (za govorne signale: MP3 kompresija, filtriranje, skaliranje vremenske ose, skaliranje pitch frekvencije, itd; za sliku: JPEG kompresija, filtriranje, impulsni i Gauss-ov šum,

posvjetljavanje i potamnjivanje slike). Za sve testirane atake, dobijene su izuzetno male vjerovatnoće greške pri detekciji watermark-a.

Vremensko-frekvencijska distribucija je primijenjena i u svrhu analize i klasifikacije biomedicinskih signala. Pri tome, Hermitski projekcioni metod je prilagođen i kombinovan sa vremensko-frekvencijskom distribucijom. Naime, ukoliko se Hermitski projekcioni metod sa malim brojem Hermitskih funkcija, primijeni direktno na dvodimenzionalne vremensko-frekvencijske regione, greška koja nastaje pri rekonstrukciji regiona zavisi od strukture regiona. Ovaj kriterijum je iskorišćen za klasifikaciju različitih regiona u okviru složenog signala, odnosno za razlikovanje regiona koji sadrže gutanje, regiona sa glasovnim vibracijama i regiona koji sadrže samo šum.

Dalje istraživanje bi moglo biti fokusirano u sljedećim pravcima:

- Kombinovanje distribucija sa kompleksnim argumentom i pristupa sa višestrukim prozorima;
- Definisanje robustnih verzija Hermitskog spektrograma i Hermitskog S-metoda za slučaj signala zahvaćenih impulsnim šumom;
- Korišćenje Hermitskog projekcionog metoda za klasifikaciju regiona slike;
- Watermarking audio signala korišćenjem S-metoda i dekompozicije na sopstvene vrijednosti.

## LITERATURA

- [1] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal- Part 1: Fundamentals," *Proc. of the IEEE*, vol. 80, No. 4, pp. 520-538, Apr. 1992.
- [2] LJ. Stanković, *Time Frequency Signal Analysis, Research monograph* 1993-2003.
- [3] B. Boashash, "Time-Frequency Signal Analysis," in S. Haykin, editor, *Advances in Spectral Estimation and Array Processing*, Prentice Hall, pp. 418-517, 1991.
- [4] L. Cohen, "Time-Frequency Distributions – A Review," *Proc. of the IEEE*, vol. 77, No. 7, pp. 941-981, 1989.
- [5] F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels, "Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations," *IEEE Signal Proc. Magazine*, vol. 9, pp. 21-67, 1992.
- [6] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrauker, "The Wigner distribution – A tool for Time-Frequency Signal Analysis – Part III: Relations with Other Time-Frequency Signal Transformations," *Philips J. Res.*, vol. 35, No. 6, pp. 372-389, 1980.
- [7] J. O' Toole, M. Mesbah and B. Boashash, "A Discrete Time and Frequency Wigner Distribution: Properties and Implementation," in *Proceedings International Symposium on Digital Signal Processing and Communication Systems*, Noosa Heads, Australia 2005.
- [8] F. Hlawatsch and P. Flandrin, "The Interference Structure of the Wigner Distribution and Related Time-Frequency Signal Representations in the Wigner Distribution," - *Theory and Applications in Signal processing*, W. Mecklenbrauker, ed., North Holland Elsevier Science Publishers, 1992.
- [9] J. E. Moyal, "Quantum Mechanics as a Statistical Theory," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 45, pp. 99-124, 1949.
- [10] E. P. Wigner, "Quantum-mechanical Distribution Functions Revisited," in *Perspectives in Quantum Theory*, W. Yourgrau and A. van der Merwe, eds., New York: Dover Publ., 1971.



- [11] F. Hlawatsch, "Regularity and Unitarity of Bilinear Time-frequency signal Representations," *IEEE Transactions on Information and Theory*, pp. 82-94, Jan. 1992.
- [12] LJ. Stanković, "A method for Time-Frequency Signal Analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.42, No.1, January 1994.
- [13] S. Stanković, "About Time-Variant Filtering of Speech Signals with Time-Frequency Distributions for Hands-Free Telephone Systems," *Signal processing*, vol.80, No.9, 2000.
- [14] LJ. Stanković, "On the Time-Frequency Analysis Based Filtering," *Annales des telecommunications*, Vol.54, No.5/6, May/June, 2000.
- [15] LJ. Stanković, "Auto-Terms Representation by the Reduced Interference Distributions; A procedure for Kernel Design," *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 44, No. 6, pp. 1557-1563, June 1996.
- [16] H. Choi and W. Williams, "Improved Time-Frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 73, No. 6, pp. 862-871, June 1989.
- [17] Y. Zhao, L. Atlas and R. Marks, "The use of the cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 1084-1091, 1990.
- [18] R. G. Baraniuk and D. L. Jones, "A Signal-Dependent Time-Frequency Representation: Optimal Kernel Design," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.41, No.4, pp. 1589-1602, April 1993.
- [19] F. Hlawatsch and R. L. Urbanke, "Bilinear Time-Frequency Representations of Signals: The Shift-Scale Invariant Class," *IEEE Transactions on Signals Processing*, vol. 42, No. 2, Feb. 1994.
- [20] R. G. Baraniuk and D. L. Jones, "Signal-Dependent Time-Frequency Analysis Using a Radially Gaussian Kernel," *Signal Processing*, vol. 32, No. 3, pp. 263-284, June 1993.
- [21] M. G. Amin and W. J. Williams, "High Spectral Resolution Time-Frequency Distribution kernels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, No. 10, pp. 2796-2804, Oct. 1998.

- [22] Y. Zhang, M. G. Amin and G. J. Frazer, "High resolution time-frequency distributions for maneuvering target detection in over-the-horizon radars," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (ICASSP 2003), vol. 6, pp. VI-437-440, April 2003.
- [23] D. Boutana, B. Barkat and F. Manir, "A Proposed High-Resolution Time-Frequency Distribution for Multicomponent Signal and Speech Signal," *International Journal on Signal Processing*, vol. 1, No. 2, pp. 167-170, 2004.
- [24] M. J. Bastiaans, T. Alieva and LJ. Stankovic, "On Rotated Time-Frequency Kernels," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 9, No. 11, pp. 378-381, Nov. 2002.
- [25] S. Stanković and LJ. Stanković, "Introducing Time-Frequency Distribution with a "Complex-Time" Argument," *Electronics Letters*, vol. 32, No. 14, July 1996.
- [26] LJ. Stanković, "Time-Frequency distributions with complex argument," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, No. 3, pp. 475-486, Mar. 2002.
- [27] M. Morelande, B. Senadji and B. Boashash, "Complex-lag polynomial Wigner-Ville distribution," *Proc. of IEEE Speech and Image Technologies for Computing and Telecommunication*, vol. 1, pp. 43-46, Dec. 1997.
- [28] C. Cornu, S. Stanković, C. Ioana, A. Quinquis, LJ. Stanković, "Generalized Representation Derivatives for Regular Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, No. 10, pp. 4831-4838, Oct. 2008.
- [29] I. Shafi, J. Ahmad, S. I. Shah and F. M. Kashif, "Computing De-blurred Time-Frequency Distributions using Artificial Neural Networks," *Circuits, Systems and Signal Processing*, Birkhäuser Boston, Springer Verlag, vol. 27, No. 3, pp. 277-294, Jun 2008.
- [30] I. Shafi, J. Ahmad, S. I. Shah, and F. M. Kashif, "Evolutionary Time-Frequency Distributions using Bayesian Regularised Neural Network Model," *IET Signal Processing*, vol. 1, No. 2, pp. 97-106, June 2007.
- [31] S. Stanković, I. Orović, "Effects of Cauchy Integral Formula Discretization on the Precision of IF Estimation: Unified Approach to Complex-lag Distribution and its L-Form," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, No. 4, pp. 307-310, Apr. 2009.
- [32] LJ. Stanković, "Multitime Definition of the Wigner Higher Order Distribution: L-Wigner Distribution," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.1, No.7, July 1994.

- [33] LJ. Stanković and V. Katkovnik, "Instantaneous frequency estimation using higher order L-Wigner distributions with data-driven order and window length," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.46, No.1, Jan. 2000.
- [34] S. Stanković, N. Žarić, I. Orović, C. Ioana, "General form of time-frequency distribution with complex-lag argument," *Electronics Letters*, vol. 44, No. 11, pp. 699-701, May 2008.
- [35] N. Žarić, I. Orović, S. Stanković, "Hardware realization of generalized time-frequency distribution with complex-lag argument," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, in print
- [36] N. Žarić, I. Orović, M. Zogović, S. Stanković, "FPGA Realization of Time-Frequency Distribution with Complex-lag Argument" *International Conference ETAI 2009*, Ohrid, Macedonia
- [37] I. Orović, S. Stanković, "A Class of Highly Concentrated Time-Frequency Distributions Based on the Ambiguity Domain Representation and Complex-Lag Moment," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2009, Article ID 935314, 9 pages
- [38] I. Orović, N. Žarić, M. Orlandić, S. Stanković, "A Virtual Instrument for Highly Concentrated Time-Frequency Distributions", *International Conference ETAI 2009*, Ohrid, Macedonia
- [39] I. Orović, M. Orlandić, S. Stanković, Z. Uskoković, "A Virtual Instrument for Time-Frequency Analysis of Signals with Highly Non-Stationary Instantaneous Frequency," submitted to *IEEE Transactions Instrumentation and Measurements*
- [40] D. J. Thomson, "Spectrum estimation and harmonic analysis", *Proc. IEEE*, vol. 70, pp. 1055-1096, 1982.
- [41] G. Frazer and B. Boashash, "Multiple window spectrogram and time-frequency distributions', in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 4, pp. 193-296, 1994.
- [42] F. Cakrak and P. J. Loughin, "Multiwindow Time-Varying Spectrum with Instantaneous Bandwidth and Frequency Constraints", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, No. 8, pp. 1656-1666, 2001.

- [43] M. Bayram and R. G. Baraniuk, "Multiple Window Time-Frequency Analysis," *Proc. of the IEEE Signal Processing International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp.173-176, 1996.
- [44] D. N. Kortchagine and A. S. Krylov, "Projection Filtering in image processing," *Proc. of the Intermatinal Conference Graphicon 2000*, pp.42-45.
- [45] A. Krylov and D. Kortchagine, "Hermite Foveation," *Proceedings of the International Conference Graphicon 2004*, pp. 166-169, Moscow, 2004.
- [46] A. V. Kutovoi and A. S. Krylov, "A New Method for Texture-based Image Analysis," *Proc. of Graphicon 2006*, pp. 235-238, Novosibirsk, 2006.
- [47] A. S. Krylov, D. N. Kortchagine and A. S. Lukin, "Streaming Waveform Data Processing by Hermite Expansion for Text-Independent Speaker Indexing form Continuous Speech," *Proc. of the International Conference Graphicon 2002*, pp. 91-98, Nizhi Novgorod 2002.
- [48] I. Orović, S. Stanković, T. Thayaparan, LJ. Stanković, "Multiwindow S-method for Instantantaneous Frequency Estimation and its Application in Radar Signal Analysis," *IET Signal Processing*, in print
- [49] S. Stanković, I. Orović, A. Krylov, "The Two-Dimensional Hermite S-method for High Resolution ISAR Imaging Applications," *IET Signal Processing*, in print
- [50] S. Stanković, LJ. Stanković and Z. Uskoković, "On the Local Frequency, Group Shift and Cross Terms in Some Multidimensional Time-Frequency Distributions; A method for Multidimensional Time-Frequency Analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, No. 7, pp. 1719-1724, 1995.
- [51] LJ. Stankovic, T. Thayaparan, M. Dakovic and V. Popovic, "S-method in radar imaging," in *Proceedings of the 14th European Signal Processing Conference (EUSIPCO '06)*, Florence, Italy, Sept. 2006.
- [52] V. Popovic, M. Dakovic, T. Thayaparan and LJ. Stankovic, "SAR Image Improvements by Using the S-method," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 3, pp.III 177-III 180, May 2006.
- [53] T. Thayaparan, LJ. Stanković, C. Wernik and M. Daković, "Real-time motion compensation, image formation and image enhancement of moving targets in ISAR

- and SAR using S-method based approach,” *IET Signal Processing*, vol. 2, No. 3, pp. 247-264, 2008.
- [54] LJ. Stanković, T. Thayaparan, V. Popović, I. Djurović and M. Daković, “Adaptive S-method for SAR/ISAR Imaging,” *Eurasip Journal on Advanced Signal Processing*, Article ID 593216, 10 pages, 2008.
- [55] LJ. Stanković, T. Thayaparan and M. Daković, “Improvement of the fast moving targets presentation in ISAR by using the S-method“, 13-th *European Signal Processing Conference*, Antalya, Turkey, Sept. 2005.
- [56] K. Toraichi, M. Kamada, S. Itahashi and R. Mori, “Window functions represented by B-spline functions,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, No. 1, pp. 145-147, 1989.
- [57] I. Bilik and J. Tabrikian, “Radar Target Classification using Doppler Signatures of Human Locomotion Models,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, No. 4, pp.1510-1522, 2007.
- [58] V. C. Chen and H. Ling, “Time-Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis,” Artech House, Boston, Mass, USA, 2002.
- [59] T. Thayaparan, LJ. Stanković and I. Djurović, “Micro-Doppler Based Target Detection and Feature Extraction in Indoor and Outdoor Environments,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 345, No. 6, pp. 700-722, 2008.
- [60] C. Hornsteiner and J. Detlefsen, “Characterization of human gait using a continuous-wave radar at 24GHz”, *Advances in Radio Science*, vol. 6, pp. 67-70, 2008.
- [61] S. Z. Gurbuz, W. L. Melvin and D. B. Williams, “Detection and Identification of Human Targets in Radar Data,” *SPIE Defense and Security Symposium*, April 9-13, Orlando, Florida, 2007.
- [62] W. G. Carrara, R. S. Goodman and R. M. Majewski, “Spotlight Synthetic Aperture Radar—Signal Processing Algorithms”, Artech House, Norwood, Ohio, USA, 1995.
- [63] S. Wong, E. Riseborough and G. Duff, “Experimental investigation on the distortion of ISAR images using different radar waveforms,” *Technical Memorandum TM* 2003-196, Defence Research and Development Canada, Ottawa, Canada, 2003.
- [64] S. R. DeGraaf: ‘SAR imaging via modern 2-D spectral estimation methods’, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, No. 5, pp. 729–761, 1998.



- [65] I. Djurović, T. Thayaparan and LJ. Stanković, "Adaptive Local Polynomial Fourier transform in ISAR," *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, Article ID 36093, 15 pages, 2006.
- [66] W. Haiqing, D. Grenier, G. Y. Delisle and F. Da-Gang, "Translational motion compensation in ISAR image processing," *IEEE Transactions on image processing*, vol. 4, No. 11, pp.1561-1571, 1995.
- [67] M. Cohen, G. Cauwenberghs and M. Vorontsov, "Image Sharpness and Beam Focus VLSI Sensors for Adaptive Optics," *IEEE Sensors Journal*, vol. 2, No. 6, pp. 680-690, 2002.
- [68] H.J. Callow, T. O. Saebo and R. E. Hansen, "Towards Robust Quality Assessment of SAS Imagery using the DPCA algorithm," *Oceans 2005 – Europe*, vol. 2, pp. 1095-1100, 2005.
- [69] F. Hartung and M. Kutter, "Multimedia Watermarking Techniques," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 7, pp. 1079-1107, July 1999.
- [70] G. Voyatzis and I. Pitas, "A general watermarking framework," *IEEE CGA*, Jan. 1999.
- [71] M. Barni, F. Bartolini, *Watermarking Systems Engineering*, Marcel Dekker, Inc., 2004.
- [72] N. Cvejić, *Algorithms for Audio Watermarking and Steganography*, University of Oulu, 2004.
- [73] G. Voyatzis, N. Nikolaidis, I. Pitas, "Digital watermarking: An overview," *Proceedings of European Signal Processing Conference EUSIPCO*, Rhode, Greece, pp. 9-12, Sept. 1998.
- [74] M. Barni, F. Bartolini and T. Furon, "A general framework for robust watermark security," *Signal Processing*, vol.83, pp.2069-2084, 2003.
- [75] E. Muharemagić and B. Furht, "Survey of Watermarking Techniques and Applications," *CH. 3 in Multimedia Watermarking Techniques and Applications*, B. Furht and D. Kirovski, editor, Auerbach Publication, pp. 91-130, 2006.
- [76] I. J. Cox, M. L. Miller and J. A. Bloom, "Watermarking applications and their properties," *International Conference on Information Technology*, Las vegas, 2000.

- [77] I. J. Cox., J. Killian, T. Leighton and T. Shamoan, "A secure, robust watermark for multimedia," in *Workshop on Information Hiding*, Newton Institute, University of Cambridge, May 1996.
- [78] I. J. Cox, J. Kilian, F. T. Leighton and T. Shamoan, "Secure Spread Spectrum Watermarking for Multimedia," *IEEE Trans. On Image Processing*, vol. 6, No. 12, pp. 1673-1687, 1997.
- [79] D. Heeger, *Signal Detection Theory*, Dept. Psych., Stanford Univ., Stanford, CA, Teaching Handout, Nov. 12, 1997.
- [80] T. D. Wickens, *Elementary Signal Detection Theory*. Oxford, U.K., Oxford Univ. Press, 2002.
- [81] L. Boney, A. H. Tewfik, and K. N. Hamdy, "Digital watermarks for audio signal," *International Conference on Multimedia Computing and Systems*, Hiroshima, Japan, pp. 473-480, 1996.
- [82] D. Kirovski and H. Malvar, "Spread-spectrum Watermarking of Audio Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, No. 4, April 2003.
- [83] H. J. Kim, "Audio Watermarking Techniques," *Pacific Rim Workshop on Digital Steganography*, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, Japan, July 2003.
- [84] P. Bassia, I. Pitas, and A. Nikolaidis, "Robust Audio Watermarking in Time Domain," *IEEE Transactions on Multimedia*, vol. 3, pp. 232-241, 2001.
- [85] M. F. Mansour and A. H. Tewfik, "Audio Watermarking by Time-Scale Modification," *International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, pp. 1353-1356, 2001.
- [86] M. F. Mansour, A. H. Tewfik, "Time-Scale Invariant Audio Data Embedding," *International Conference on Multimedia and Expo*, 2001.
- [87] C. P. Wu, P. C. Su and C. C. J. Kuo, "Robust and Efficient Digital Audio Watermarking Using Audio Content Analysis," *Security and Watermarking of Multimedia Contents*, SPIE, vol. 3971, pp. 382-392, 2000.
- [88] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, C. Ioana, "An Approach to Digital Watermarking of Speech Signals in the Time-Frequency Domain," *Proceedings ELMAR 2006*, Zadar, pp. 127-130, June 2006.

- [89] N. Zaric, I. Orovic, S. Stankovic and C. Ioana, "Digitalni watermarking govornih signala zasnovan na vremenski promjenljivom filtriranju", *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [90] S. Stanković, I. Orović and N. Žarić, "Robust speech watermarking in the time-frequency domain," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2008, Issue ID 519206, Page(s) 9, May 2008.
- [91] I. Orović, P. Zogović, N. Žarić and S. Stanković, "Speech Signals Protection via Logo Watermarking based on the Time-Frequency Analysis," *Annals of Telecommunication*, vol. 63, No. 5-6, pp. 276-284, May 2008.
- [92] A. G. Bors and I. Pitas. "Image Watermarking Using DCT Domain Constraints," (ICIP'96) *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. III. pp. 231-234, Sept. 1996.
- [93] S. Stankovic, I. Djurovic and I. Pitas, "Watermarking in the space/spatial-frequency domain using two-dimensional Radon-Wigner distribution," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, pp. 650–658, Apr. 2001.
- [94] A. Nikolaidis and I. Pitas, "Asymptotically optimal detection for additive watermarking in the DCT and DWT domains," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, No. 5, pp. 563-571, 2003.
- [95] J. R. Hernandez, M. Amado and F. Perez Gonzales, "DCT-domain watermarking techniques for still images: Detector performance analysis and a new structure," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.9, pp. 55-68, Jan. 2000.
- [96] S. Stanković, I. Orović and N. Žarić, "Robust watermarking procedure based on JPEG-DCT image compression," *Journal of Electronic Imaging*, vol. 17, No. 4, Page(s) 043001, Oct. 2008.
- [97] M. Orlandić, I. Orović, S. Stanković, „An image watermarking technique with optimal detection in the Wavelet domain“, *ETRAN 2009*, Vrnjačka Banja, Serbia, 2009.
- [98] D. Kundur and D. Hatzinakos, "Digital watermarking using multiresolution wavelet decomposition," *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASP)*, Seattle, Washington, USA, vol. 5, pp. 2969-2972, 1998.
- [99] P. Loo and N. G. Kingsbury, "Digital Watermarking using Complex Wavelets," *Proc. IEEE Conference on Image Processing*, Vancouver, paper 3608, Sept. 2000,

- [100] B. G. Mobaseri, "Digital watermarking in the joint time-frequency domain," *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 3, pp. 481-484, Sept. 2002, New York
- [101] M. Al-khassaweneh and S. Aviyente, "A time-frequency inspired robust image watermarking," in *IEEE Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference*, vol. 1, pp. 392-396, 2004.
- [102] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, "An Application of Multidimensional Time-Frequency Analysis as a base for the Unified Watermarking Approach," *IEEE Transactions on Image Processing*, in print
- [103] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, C. Ioana, "Two Dimensional Time-Frequency Analysis based Eigenvalue Decomposition Applied to Image Watermarking," *Multimedia Tools and Applications Journal*, in print
- [104] N. Žarić, I. Orović, S. Stanković, C. Ioana, "Space/Spatial-Frequency Based Image Watermarking," in *Proc. 50<sup>th</sup> International Symposium ELMAR 2008*, pp.101-104, 2008.
- [105] I. Orović and N. Žarić, "Data Hidding Procedure for Image Authentication," *BIHTEL IV international conference on Telecommunications*, Sarajevo, Oct 2006.
- [106] G. S. Ying, C. D. Mitchell and L. H. Jamieson, "Endpoint Detection of Isolated Utterances Based on A Modified Teager Energy Measurment," in *Proc. IEEE ICASSP-92*, pp. 732-735, 1992.
- [107] L. Gu and S. A. Zahorian, "A New Robust Algorithm for Isolated Word Endpoint Detection," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol.4, pp. IV-4161, 2002.
- [108] L. Gu, "A New Endpoint Algorithm for Isolated Endpoint Detection," Master thesis, 2002.
- [109] I. Orovic, D. Nikcevic, N. Zaric, S. Stankovic, "Modelovanje muzickih signala u vremensko-frekvencijskom domenu", *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [110] D. Nikčević, I. Orović, S. Stanković, "Tehnike filtriranja muzičkih signala zasnovane na vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji," *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [111] J. A. Logemann, *Evaluation and treatment of swallowing disorders*, 2nd ed. Austin, Texas, USA: PRO-ED, 1998.

- [112] C. Steele, C. Allen, J. Barker, P. Buen, R. French, A. Fedorak, S. Day, J. Lapointe, L. Lewis, C. MacKnight, S. McNeil, J. Valentine and L. Walsh, "Dysphagia service delivery by speech- language pathologists in Canada: results of a national survey," *Canadian Journal of Speech- Language Pathology and Audiology*, vol. 31, No. 4, pp. 166-177, 2007.
- [113] J. Lee, C. M. Steele and T. Chau, "Time and time-frequency characterization of dual-axis swallowing accelerometry signals," *Physiological Measurement*, vol. 29, No. 9, pp. 1105-1120, Sep. 2008.
- [114] A. J. Miller, *The neuroscientific principles of swallowing and dysphagia*, San Diego, USA: Singular Publishing Group, 1999.
- [115] N. P. Reddy, E. P. Canilang, R. C. Grotz, M. B. Rane, J. Casterline and B. R. Costarella, "Biomechanical quantification for assessment and diagnosis of dysphagia," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 7, No. 3, pp. 16-20, Sept. 1988.
- [116] J. A. Y. Cichero and B. E. Murdoch, "The physiologic cause of swallowing sounds: answers from heart sounds and vocal tract acoustics," *Dysphagia*, vol. 13, No. 1, pp. 39-52, Jan. 1998.
- [117] S. Hamlet, D. G. Penney and J. Formolo, "Stethoscope acoustics and cervical auscultation of swallowing," *Dysphagia*, vol. 9, No. 1, pp. 63-68, Dec. 1994.
- [118] S. R. Youmans and J. A. G. Stierwalt, "An acoustic profile of normal swallowing," *Dysphagia*, vol. 20, No. 3, pp. 195-209, Sept. 2005.
- [119] J. Lee, S. Blain, M. Casas, D. Kenny, G. Berall and T. Chau, "A radial basis classifier for the automatic detection of aspiration in children with dysphagia," *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, vol. 3, No. 14, 17 pages, July 2006.



## Lista Referenci Mr Irene Orović

### Radovi publikovani u časopisima

- [1] I. Orović, P. Zogović, N. Žarić, S. Stanković, "Speech Signals Protection via Logo Watermarking based on the Time-Frequency Analysis," *Annals of Telecommunication*, vol. 63, No. 5-6, pp. 276-284, May 2008.
- [2] S. Stanković, N. Žarić, I. Orović, C. Ioana, "General form of time-frequency distribution with complex-lag argument," *Electronics Letters*, vol. 44, No. 11, pp. 699-701, May 2008.
- [3] S. Stanković, I. Orović, Nikola Žarić, "Robust speech watermarking in the time-frequency domain," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Volume 2008, Issue ID 519206, Page(s) 9, May 2008.
- [4] S. Stanković, I. Orović, Nikola Žarić, "Robust watermarking procedure based on JPEG-DCT image compression," *Journal of Electronic Imaging*, vol. 17, No. 4, Page(s) 043001, Oct. 2008.
- [5] S. Stanković, I. Orović, C. Ioana, "Effects of Cauchy Integral Formula Discretization on the Precision of IF Estimation: Unified Approach to Complex-lag Distribution and its L-Form," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, No. 4, pp. 307-310, Apr. 2009.
- [6] I. Orović, S. Stanković, "A Class of Highly Concentrated Time-Frequency Distributions Based on the Ambiguity Domain Representation and Complex-Lag Moment," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2009, Article ID 935314, 9 pages, 2009.
- [7] N. Žarić, I. Orović, S. Stanković, "Hardware realization of generalized time-frequency distribution with complex-lag argument," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, in print
- [8] I. Orović, S. Stanković, T. Thayaparan, LJ. Stanković, "Multiwindow S-method for Instantaneous Frequency Estimation and its Application in Radar Signal Analysis," *IET Signal Processing*, in print

- [9] S. Stanković, I. Orović, A. Krylov, "The Two-Dimensional Hermite S-method for High Resolution ISAR Imaging Applications," *IET Signal Processing*, in print
- [10] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, "An Application of Multidimensional Time-Frequency Analysis as a base for the Unified Watermarking Approach," *IEEE Transactions on Image Processing*, in print
- [11] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, C. Ioana, "Two Dimensional Time-Frequency Analysis based Eigenvalue Decomposition Applied to Image Watermarking," *Multimedia Tools and Applications Journal*, in print

### **Radovi poslati na recenziju**

- [12] I. Orović, M. Orlandić, S. Stanković, Z. Uskoković, "A Virtual Instrument for Time-Frequency Analysis of Signals with Highly Non-Stationary Instantaneous Frequency," submitted to *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements*

### **Radovi objavljeni na konferencijama**

- [13] N. Zaric, I. Orovic, S. Stankovic, C. Ioana, "Digitalni watermarking govornih signala zasnovan na vremenski promjenljivom filtriranju", *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [14] I. Orovic, D. Nikcevic, N. Zaric, S. Stankovic, "Modelovanje muzickih signala u vremensko-frekvencijskom domenu", *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [15] D. Nikčević, I. Orović, S. Stanković, "Tehnike filtriranja muzičkih signala zasnovane na vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji," *IT-2006*, Žabljak, 2006.
- [16] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, C. Ioana, "An Approach to Digital Watermarking of Speech Signals in the Time-Frequency Domain," *Proceedings ELMAR 2006*, Zadar, pp. 127-130, June 2006.
- [17] I. Orović, N. Žarić, "Data Hidding Procedure for Image Authentication," *BIHTEL IV international conference on Telecommunications*, Sarajevo, Oct 2006.
- [18] N. Žarić, I. Orović, S. Stanković, C. Ioana, "Space/Spatial-Frequency Based Image Watermarking," in *Proc. 50<sup>th</sup> International Symposium ELMAR 2008*, pp.101-104, 2008.

- [19] I. Orović, N. Žarić, M. Orlandić, S. Stanković, “A Virtual Instrument for Highly Concentrated Time-Frequency Distributions“, *International Conference ETAI 2009*, Ohrid, Macedonia, 2009.
- [20] N. Žarić, I. Orović, M. Zogović, S. Stanković, “FPGA Realization of Time-Frequency Distribution with Complex-lag Argument“, *International Conference ETAI 2009*, Ohrid, Macedonia, 2009.
- [21] M. Orlandić, I. Orović, S. Stanković, “An image watermarking technique with optimal detection in the Wavelet domain“, *ETRAN 2009*, Vrnjačka Banja, Serbia, 2009.

### **Publikacije koje nisu vezane za doktorsku tezu**

- [22] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, M. Daković, “Osnovi Poslovne Informatike i Informacioni Sistemi 1“, udžbenik, Fakultet za Turizam i Hotelijerstvo, 2008.
- [23] I. Orović, N. Žarić, S. Stanković, “ Osnovi Poslovne Informatike i Informacioni Sistemi 2“, udžbenik, Fakultet za Turizam i Hotelijerstvo, 2008.

## PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: Prof. dr Irena Orović

Godina rođenja: 1983.

E-mail: irenao@ucg.ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore: Elektrotehnički fakultet

Naslov doktorske disertacije: Visoko koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije i neki aspekti primjene

Prevod naslova na engleski jezik: Highly concentrated time-frequency distributions and some aspects of their application

Datum odbrane: 19.02.2010.

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci<sup>1</sup>

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

---

<sup>1</sup> Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

# PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE

## Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Highly concentrated time-frequency distributions and some aspects of their application

## Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Prof. dr Srdjan Stanković (mentor)

Komisija za ocjenu: Prof. dr Zdravko Uskoković, Prof. dr Srdjan Stanković, Prof. dr Branko Kovačević

Komisija za odbranu: Prof. dr Zdravko Uskoković, Prof. dr Srdjan Stanković, Prof. dr Viktor Sučić, Doc. dr Miloš Daković, Prof. dr Cornel Ioana

## Sažetak \*

U radu su predloženi novi pristupi vremensko-frekvencijskoj analizi nestacionarnih signala. Visoko-koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije za procjenu brzopromjenljive trenutne frekvencije zasnovane su na kompleksnom vremenskom argumentu. Analizom efekata diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule, izvedena je generalizovana forma distribucija sa kompleksnim argumentom za proizvoljni red distribucije. Ova forma obezbjeđuje proizvoljno visoku koncentraciju u vremenskofrekvencijskom domenu. Takođe, definisana je i L-forma distribucije proizvoljnog reda sa kompleksnim argumentom. Kao odgovor na zahtjeve analize multikomponentnih signala predložena je i klasa distribucija sa kompleksnim argumentom izvedena iz ambiguity domena. U tu svrhu, definisana je ambiguity funkcija momenta proizvoljnog reda sa kompleksnim argumentom. Specijalni slučaji predloženih distribucija su analizirani i upoređivani kroz različite aspekte, uključujući i robustnost na šumove. Poseban dio rada posvećen je distribucijama sa višestrukim prozorima, u okviru koga je predložen jednodimenzioni i dvodimenzioni Hermitski S-metod. Optimalni prozori su dobijeni korišćenjem Hermitskih funkcija razlinitog reda koje pokazuju niz dobrih osobina naročito u pogledu lokalizacije u vremensko-frekvencijskom domenu. Na taj način je obezbijedeno poboljšanje rezolucije standardnih kvadratnih distribucija (spektrograma i S-metoda), ne povećavajući red distribucije, čime se ne povećava značajno ni kompleksnost realizacije.

Na kraju, značajan dio rada je posvećen nekim od aktuelnih aspekti primjene vremensko-frekvencijskih distribucija i to: primjene u analizi radarskih signala (jednodimenzionih i dvodimenzionih), zaštiti multimedijalnih podataka watermarking tehnikama u vremensko-frekvencijskom domenu, primjene u analizi i klasifikaciji specifične vrste biomedicinskih signala.

## Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

This work proposes some novel and generalized approaches in the time-frequency analysis of non-stationary signals. The highly concentrated distributions for the fast varying instantaneous frequency analysis are based on the complex-lag argument. The effects of Cauchy integral formula discretization on the concentration of time-frequency distribution are analyzed. As a result of this discretization, the new forms of complex-lag distribution with an arbitrary order are produced. Additionally, by using multiple successive integrations, the L-form of distributions is obtained. By extending the introduced concepts within the ambiguity domain, a class of time-frequency distributions with complex-lag argument is proposed. It is based on the ambiguity domain representations of real and complex lag moment, combined to provide a cross-terms free representation for multicomponent signals. A new form of the N-th order complex-lag time-frequency distribution follows as a two-dimensional inverse Fourier transform of the proposed ambiguity domain representation. More generally, by considering various existing kernels, the entire class of complex-lag distributions is defined. The proposed distributions are compared with respect to different aspects, including the robustness to noise. Furthermore, a



part of this work is dedicated to the multi-window time-frequency distributions, where the Hermite S-method has been proposed. The optimal windows are obtained by using Hermite functions of different orders. These functions show a number of desirable properties such as good time-frequency localization property. The proposed distribution improves the resolution of standard quadratic distributions (e.g. spectrogram and S-method), without increasing distribution order and hence, preserving low calculation complexity. Finally, some interesting and actual applications of time-frequency distributions are proposed and analyzed. Particularly, we focus on the following applications: time-frequency analysis of one-dimensional and two-dimensional radar signals, digital watermarking for multimedia data protection based on the time-frequency analysis and biomedical signal analysis and classification.

## Ključne riječi

vremensko-frekvencijska analiza, argument kompleksnog vremena, distribucije sa višestrukim prozorskim funkcijama, L-forme distribucija, virtuelni softverski instrumenti (instrumentacija i mjerenja), radari, multimedijalni pdaci, zaštita digitalnih podataka, watermarking

## Ključne riječi na engleskom jeziku

time-frequency analysis, complex-lag argument, multi-window distributions, L-form distributions, virtual instruments (instrumentation and measurements), radars, multimedia data, digital data protection, watermarking

## Naučna oblast/uža naučna oblast

Računari / Digitalna obrada signala

## Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

Computer Science / Digital Signal Processing

## Ostali podaci

\* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu.

## IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Visoko koncentrisane vremensko-frekvencijske distribucije i neki aspekti primjene

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la<sup>1</sup>.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda



U

---

<sup>1</sup> Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)

**Autorstvo**

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

**Autorstvo – bez prerada**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

**Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

**Autorstvo – nekomercijalno**

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada**

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.