

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Aladin Crnkić

**KOLEKTIVNO PONAŠANJE I
SAMOORGANIZACIJA U MREŽAMA
POVEZANIH OSCILATORA**
-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Podgorica, 2019.

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL
SCIENCES

Aladin Crnkić

**COLLECTIVE BEHAVIOR AND
SELF-ORGANIZATION IN NETWORKS
OF COUPLED OSCILLATORS**

-PHD THESIS-

Podgorica, 2019.

Podaci i informacije o doktorandu

Ime i prezime: Aladin Crnkić

Datum i mjesto rođenja: 23.04.1987. godine, Bihać, Bosna i Hercegovina

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka:
Matematika i informatika, 2013.

Podaci i informacije o mentoru

Ime i prezime: Vladimir Jaćimović

Titula: doktor matematičkih nauka

Zvanje: redovni profesor

Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Univerzitet Crne Gore,
Prirodno-matematički fakultet

Članovi komisije:

Dr Vladimir Jaćimović, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Predrag Miranović, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr David Kaljaj, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Igor Đurović, redovni profesor ETF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Marija Mitrović Dankulov, viši naučni saradnik, Institut za fiziku u
Beogradu

Datum odbrane:

2. juli 2019. godine

Podaci o doktorskoj disertaciji

Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

Naslov disertacije: Kolektivno ponašanje i samoorganizacija u mrežama povezanih oscilatora

Rezime: Ova teza je posvećena primjenama klasičnih matematičkih teorija na izučavanje fenomena samoorganizacije u kompleksnim sistemima. Kao paradigmatičan okvir za opisivanje ovakvih kompleksnih sistema je razmotren klasični model Kuramoto povezanih oscilatora, kao i ekstenzija ovog modela na sferu S^3 (neabelov model Kuramoto). Koristeći aparat Komplexne analize i Geometrije, izučeni su prvi integrali i dinamika globalnih promjenljivih u ovim sistemima. Predložene su primjene ovih teorijskih rezultata na izučavanje kompleksnih mreža, klasterizaciju podataka i koordinaciju u sistemima sa više agenata.

Ključne riječi: Model Kuramoto, Möbiusove transformacije, dvo-razmjera, kompleksna mreža, srednje polje, detekcija zajednica, direkcionalna statistika, neabelov model Kuramoto, konsenzus, adaptivne sinapse

Naučna oblast: Primjenjena matematika

Uža naučna oblast: Matematička fizika

UDK broj: 51-7:53(043.3)

Information on the PhD thesis

Course of study: Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Montenegro

Thesis title: Collective behavior and self-organization in networks of coupled oscillators

Summary: This thesis is devoted to applications of some classical mathematical theories to the study of self-organization phenomena in complex systems. As a paradigmatic framework for mathematical description of such systems, we consider the classical Kuramoto model of coupled oscillators, as well as an extension of this model to the 3-sphere (non-Abelian Kuramoto model). Using the apparatus of Complex Analysis and Geometry, we study the constants of motion and the dynamics of global variables in these systems. Furthermore, we propose several applications of these theoretical results to community detection in complex networks, data clustering and coordination in multi-agent systems.

Key words: Kuramoto model, Möbius transformation, cross ratio, complex network, mean field, community detection, Directional Statistics, non-Abelian Kuramoto model, consensus, adaptive synapses

Scientific field: Applied mathematics

Science topic: Mathematical physics

UDC: 51-7:53(043.3)

Predgovor

Prvi poznati zapisi o fenomenu sinhronizacije povezanih oscilatora datiraju od XVII vijeka i pisama poznatog holandskog fizičara Huygensa [42]. Huygens je primijetio da se dva sata s klatnima, okačena na istom zidu, sinhronizuju u istoj fazi (ili u antifazi) nakon nekog vremena. On je ovaj fenomen u svojim pismima opisao kao “čudna simpatija”. U XX vijeku je detaljno izučavana sinhronizacija u populacijama s velikim brojem oscilatora [11, 78]. Ovakvi sistemi opisuju različite procese u fizici i biologiji. Winfree [105] je u svojim radovima dao matematičku formulaciju prvog modela koji pokazuje fenomen sinhronizacije. Nakon njega, japanski fizičar Kuramoto je 1975. godine uveo najpopularniji model ove vrste [52].

Model Kuramoto [52] opisuje veliku populaciju međusobno povezanih faznih oscilatora (amplituda oscilacija se zanemaruje) s globalnim poparnim vezama, tj. pretpostavlja se da su veze između svakog para oscilatora iste. Ovaj model već decenijama služi kao paradigma za izučavanje kolektivnog ponašanja i samoorganizacije u velikim populacijama jedinki s poparnim interakcijama, koje mogu imati za posljedicu fazne prelaske (u kontekstu ovog modela, to je sinhronizacija oscilatora).

Nakon prvobitne formulacije modela Kuramoto, nekoliko varijacija, ekstenzija i primjena ovog modela su detaljno proučavane u literaturi.

Acebrón i ostali [2] su 2005. godine objavili prvi pregledni rad o modelu Kuramoto. Razmatrane su varijacije modela Kuramoto s različitim funkcijama veze, kao na primjer, veza s faznim pomakom (model Kuramoto-Sakaguchi) [85], veze s kašnjenjem [22, 107] ili veze koje su pod uticajem šuma [10, 107], itd. O ostalim varijacijama vidjeti pregledni rad [2].

Ideja o primjeni modela Kuramoto u proučavanju kompleksnih mreža je ispitana od 2005. do 2007. u radovima [6, 7, 71]. U ovim radovima je pokazano da proces sinhronizacije otkriva važne informacije o topologiji mreže. Ova ideja se nastavlja dalje koristiti u nekoliko radova u kojima se proučavaju svojstva mreže posmatrajući proces sinhronizacije u njoj [13, 54, 59]. Također, važno je napomenuti da je model Kuramoto korišten i predlagan i za klasteriranje multivarijantnih podataka [70, 94].

Već Kuramoto je primijetio da se u ovakvim sistemima, kao posljedica poparnih interakcija, uspostavlja tzv. srednje polje [52, 95]. Relativno nedavni napredak (2008-2009) pruža objašnjenje niskodimenzionalne dinamike i efekta srednjeg polja u modelu sa identičnim oscilatorima (svi oscilatori imaju istu svojstvenu frekvenciju) i globalnim (svako sa svakim) povezivanjem [63, 74, 79]. Ovo objašnjenje je dato u terminima Teorije grupa i Kompleksne analize. Pokazano je da se dinamika velikih populacija globalno povezanih oscilatora može reducirati na niskodimenzionalnu podmnogostrukost (rezultati Watanabe-Strogatz i Ott-Antonsena)[74, 75, 100, 101]. Marvel i ostali [63] su opisali algebarsku strukturu koja stoji iza ove redukcije, a to je da se oscilatori kreću pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju jediničnu kružnicu (tj. automorfizama jediničnog diska). Grupa Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk zavisi od tri parametra koje su globalne promjenljive u modelu. Prvi integrali sistema (konstante kretanja) su određeni dvorazmjerom (engl. *cross ratio*).

Jednu od najadekvatnijih ekstenzija klasičnog modela Kuramoto na više dimenzije je predložio australijski fizičar Max Lohe u svojim radovima [57, 58]. Model opisuje kolektivno kretanje međusobno povezanih uopštenih "oscilatora" (Kuramoto-Lohe oscilatori), čija stanja su zadana unitarnim matricama. Istraživači ga nazivaju neabelovim modelom Kuramoto (ili samo model Lohe). Ova terminologija naglašava najvažniju razliku između ovog i klasičnog modela Kuramoto, a to je da množenje nije komutativno na grupi unitarnih matrica. S ovim modelom se razrađuju nove paradigme kvantne sinhronizacije [5, 58].

Nedavno su istraživači u oblasti upravljanja prepoznali da je model Kuramoto (i neabelov model Kuramoto) povezan s algoritmima iz Teorije geometrijskog konsenzusa (engl. *Geometric Consensus Theory*) [46, 73]. Ovo zapažanje ukazuje na intrigantnu vezu između konsenzusa i univerzalnog prirodnog fenomena sinhronizacije povezanih oscilatora [78]. Teorija geometrijskog konsenzusa je nedavno razvijena poddisciplina u širokom polju distribuiranog i kooperativnog upravljanja koja se bavi zadacima konsenzusa i koordinacije na određenim neeuklidskim (prije svega na homogenim) prostorima [89, 90].

Paradigma za zadatke s konsenzusom je roj (engl. *swarm*) identičnih individua (agenata) koji komuniciraju kroz zadani neusmjereni povezani graf. U takvoj postavci se pokazuje da je zadatak konsenzusa minimizacija odgovarajuće potencijalne funkcije.

U prethodnim studijama razvijen je univerzalni konceptualni pristup zadacima konsenzusa na homogenim prostorima. Međutim, konvergencija algoritama u velikoj mjeri zavisi od geometrije osnovnih prostora. Ipak postoji nekoliko univerzalnih rezultata u vezi s konvergencijom (anti)konsenzusnih

algoritama. Sarlette i Sepulchre su dokazali konvergenciju algoritama konsenzusa i antikonsenzusa na široj klasi mnogostrukosti u slučajevima kada je komunikacijski graf kompletan ili neusmjereno stablo [89, 90]. Napomenimo da obje topologije mogu biti problematične u primjenama, jer je kompletni graf često preskup, dok topologija stabla nije robusna. Nedavni radovi [56, 62] postigli su značajan napredak u razumjevanju algoritama konsenzusa na sferama preko proizvoljnih komunikacijskih grafova. Konkretno, u radu [62] je pokazano da je skup konsenzusa skoro globalno stabilan za rojeve na sferama s agentima koji komuniciraju preko neusmjerenog povezanog grafa.

Izložimo strukturu disertacije. Disertacija se sastoji od šest glava.

Na početku, u prvoj glavi predstavljamo model Kuramoto i dajemo pregled nedavnih istraživanja o niskodimenzionom ponašanju globalno povezanih oscilatora.

U drugoj glavi se pokazuje da se Kato-Jones raspodjele [50], dobijene kao Möbiusova transformacija von Misesove raspodjele vjerovatnoća na kružnici, prirodno pojavljuju u proučavanju populacija povezanih oscilatora. U ovoj glavi se ističu određene relacije između direkcione statistike (engl. *Directional Statistics*) i kolektivnog kretanja povezanih oscilatora.

Nakon toga, u trećoj glavi detektujemo kolektivno ponašanje oscilatora i karakterišemo kompleksne mreže koristeći statistiku Möbiusovih transformacija u mreži. To omogućuje da uvedemo neke nove (statističke) koncepte koji karakterišu mrežu. Posebno je predložen pojam koherentnosti mreže (ili podmreže). U trećem paragrafu ove glave se proučava nekoliko jednostavnih (slučajnih) grafova kako bi se ilustrovala važnost konceptata koji se uvode. U nastavku ove glave se uvodi matematički model srednjih polja u kompleksnoj mreži identičnih Kuramoto oscilatora. U ovom okviru, srednja polja u mreži su predstavljena skupom tačaka na jediničnom disku s hiperboličkom metrikom (Poincareov disk model). Ovaj skup tačaka karakteriše topologiju mreže. Prikazane su simulacije za neke slučajne i regularne grafove.

U četvrtoj glavi se razmatra niskodimenziona dinamika u opštem neabelovom modelu Kuramoto [57, 58] međusobno povezanih uopštenih oscilatora na 3-sferi. Ako svi oscilatori imaju identične svojstvene uopštene frekvencije i veza je globalna, dinamika je u potpunosti određena s nekoliko globalnih promjenljivih. Pokazujemo da se ovi uopšteni oscilatori kreću pod dejstvom grupe $G_{\mathbb{H}}$ (kvaternionskih) Möbiusovih transformacija koje čuvaju S^3 . Situacija je ovdje analogna onoj u klasičnom modelu Kuramoto, ali ipak složenija jer umjesto kompleksne analize moramo koristiti elemente kvaternionske analize. Objašnjavamo prve integrale kretanja koristeći kvaternionsku dvorazmjernu. Globalne promjenljive zadovoljavaju određeni sistem kvaternionskih ODJ-a, koji je ekstenzija Watanabe-Strogatz sistema [101]. Ako je početna raspodjela oscilatora uniformna na S^3 , pojavljuju se dodatne simetrije i di-

namika se može dalje ograničiti na invarijantnu (realnu) četverodimenzionu podmnogostrukost. Uz teorijski interes, ova studija može imati različite primjene u nauci i inženjerstvu.

U nastavku ove glave predlažemo novu metodu klasteriranja multivarijantnih podataka predstavljenih kao vektori u \mathbb{R}^n . Klasteriranje je vjerovatno najvažniji zadatak nenadgledanog učenja (engl. *unsupervised learning*), koji se bavi detekcijom strukture u kolekciji neobilježenih podataka [47, 48]. Naša metoda je zasnovana na procesu sinhronizacije u neabelovim modelima Kuramoto na $U(n)$. Fokusiramo se na slučaj $n = 2$, što daje sistem matričnih ODJ na $SU(2)$ s grupnom mnogostrukosti S^3 . Ovaj izbor podrazumjeva ograničenje dimenzije multivarijantnih podataka, tako da u simulacijama istražujemo skupove podataka gdje su podaci predstavljeni s najviše šest atributa. U ovom pristupu svaki objekat odgovara jednom Kuramoto-Lohe oscilatoru na S^3 i podaci su unešeni u matrice njihovih svojstvenih frekvencija. Jedna od važnih prednosti ovakvog pristupa je da se može prirodno prilagoditi klasteriranju multivarijantnih funkcionalnih podataka. Predstavljaju se rezultati simulacija za nekoliko ilustrativnih skupova podataka.

U petoj glavi proučavamo konsenzus i antikonsenzus na 3-sferi kao zadatke minimizacije nekih funkcija. Ističemo da je za te funkcije metod gradijentnog spuska u suštini neabelov model Kuramoto s nultim svojstvenim frekvencijama. Ovo zapažanje nudi novi uvid u algoritme konsenzusa. Tokom ove glave većinom istražujemo slučaj na sferi S^3 . Napomenimo da se analogni rezultati mogu navesti i za roj na S^1 s kompletnim komunikacijskim grafom. Razlog tome jest da su to jedine sfere koje su Lie grupe. Dokazujemo da algoritam antikonsenzusa nad kompletnim grafom na S^3 konvergira prema balansiranoj konfiguraciji ako je zadovoljen određeni blagi uslov o početnim pozicijama agenata. Ovaj uslov ukazuje na neočekivan odnos s nekim važnim konstrukcijama iz kompleksne analize.

U istoj glavi analiziramo dinamiku roja na sferi s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama. Jedan princip za uvođenje sinapsi zavisnih o stanju inspirisan je klasičnim Hebbovim pravilom iz nauke o neuronima. Ovo pravilo postulira da parovi agenata čija su stanja bliska jedni drugima ojačavaju svoje sinapse (*The cells that fire together, wire together*). Model s anti-hebbovim pravilom može pokazati različite stabilne formacije ili oscilatorno ponašanje u zavisnosti od parametara sistema. Dokazujemo da roj teži ka stabilnoj ravnoteži pod uslovom da je parametar sistema dovoljno velik. Na kraju ove glave prikazani su neki rezultati simulacija koji ilustruju primjenu ovih teorijskih rezultata na koordinaciju rotirajućih tijela u 3D prostoru. Ovo se vrši preslikavanjem trajektorija iz S^3 u specijalnu ortogonalnu grupu $SO(3)$.

Konačno, u osmoj glavi se izvlače neki zaključci i postavljaju neka otvo-

rena pitanja za daljnja proučavanja.

Cjelokupni materijal je podijeljen na glave, glave su podijeljene na paragrafe a neki paragrafi su podijeljeni na potparagrafe. Oznaku paragrafa čine dva broja. Prvi ukazuje na glavu, a drugi na redni broj paragrafa u toj glavi. Potparagraf je označen s tri broja, od kojih prva dva određuju broj paragrafa (sadrži oznaku glave kome paragraf pripada) a treći je broj potparagrafa. Numeracija formula, teorema, lema, definicija je standardna.

Tokom doktorskih studija i rada na izradi doktorske disertacije, u časopisima koji se nalaze na SCI/SCIE listi, objavljeni su sljedeći radovi:

- **Crnkić, A.**, Jaćimović, V.: *Swarms on the 3-sphere with adaptive synapses: Hebbian and anti-Hebbian learning rule*. Systems & Control Letters, Vol. 122, pp. 32–38 (2018),
- **Crnkić, A.**, Jaćimović, V.: *Data clustering based on quantum synchronization*. Natural Computing, <https://doi.org/10.1007/s11047-018-9720-z> (2018),
- **Crnkić, A.**, Jaćimović, V.: *Consensus and balancing on the three-sphere*. Journal of Global Optimization, <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0723-1> (2018),
- Jaćimović, V., **Crnkić, A.**: *Low-dimensional dynamics in non-Abelian Kuramoto model on the 3-sphere*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol. 28, No. 8, pp. 083105 (2018),
- Jaćimović, V., **Crnkić, A.**: *Modelling mean fields in networks of coupled oscillators*. Journal of Geometry and Physics, Vol. 124, pp. 241–248 (2018),
- Jaćimović, V., **Crnkić, A.**: *Collective motions of globally coupled oscillators and some probability distributions on circle*. Physics Letters A, Vol. 381, No. 24, pp. 1989–1994 (2017),
- Jaćimović, V., **Crnkić, A.**: *Characterizing complex networks through statistics of Möbius transformations*. Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 345, pp. 56–61 (2017),

te jedan rad na konferenciji čiji je zbornik indeksiran u bazi Scopus:

- **Crnkić, A.**, Jaćimović, V.: *Exploring complex networks by detecting collective dynamics of Kuramoto oscillators*. VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), CEUR Workshop Proceedings, Petrovac, Montenegro (2017).

Rezultati ovih radova su korišteni prilikom izrade ove teze. Neki od rezultata su predstavljeni i na međunarodnim konferencijama OPTIMA-2017 i OPTIMA-2018.

Na kraju se iskreno zahvaljujem profesoru Vladimiru Jaćimoviću na postavljenim zadacima, pomoći i savjetima pruženim u toku izrade ove disertacije.

Izvod iz teze

Fenomen sinhronizacije u velikim populacijama povezanih oscilatora je predmet intenzivnih istraživanja u fizici, biologiji, hemiji i društvenim naukama. Najznačajniji model ove vrste, koji već decenijama služi kao paradigma za izučavanje kolektivnog ponašanja i samoorganizacije u velikim populacijama, je model Kuramoto. U ovoj disertaciji se proučava niskodimenziona dinamika tog modela i predstavljaju njegove nove primjene u različitim oblastima korištenjem različitih matematičkih alata.

Bolje objašnjenje dinamike i kolektivnog ponašanja povezanih oscilatora otkriva vezu s nekim rezultatima i objektima koji se proučavaju u direkcionoj statistici. Razmatran je model povezanih oscilatora sa šumom koji pokazuje da se Kato-Jones raspodjele prirodno pojavljuju u proučavanju populacija povezanih oscilatora.

Predložen je konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža korištenjem statistike Möbiusovih transformacija. Ista ideja je upotrebljena u opisivanju srednjih polja i detekciji zajednica u kompleksnim mrežama povezanih oscilatora.

Od strane mnogih naučnika trenutno se intenzivno proučava uopštenje modela Kuramoto na neke homogene prostore viših dimenzija. Jedno takvo uopštenje na sferi S^3 je predstavljeno u ovoj disertaciji. Jednačine u tom modelu su kvaternionske Riccatijeve diferencijalne jednačine. Proučava se niskodimenziona dinamika tog modela i predlažu se različite primjene u nauci i inženjerstvu. Detaljno je razmatrana njegova primjena u klasteriranju multivarijantnih podataka.

U glavi 5 se udaljavamo od fizičkih teorija i razmatramo zadatke konsenzusa i koordinacije na neeuklidskim mnogostrukostima. Proučava se konsenzus i balansiranje na sferi S^3 , tako što se pokazuje da je algoritam gradijentnog spuska za funkciju (anti)konsenzusa u suštini neabelov model Kuramoto s nultim svojstvenim frekvencijama. Razmatra se dinamika roja na sferi S^3 s interakcijama zavisnim o stanju koje zadovoljavaju određene realizacije Hebbovog i antihebbovog pravila učenja.

Abstract

Synchronization phenomena in large populations of coupled oscillators are the subject of intensive researches in Physics, Biology, Chemistry and Social sciences. The most significant model of this kind being used as a paradigm in studying the collective behavior and self-organization in large populations, is the Kuramoto model. In the present thesis we study low-dimensional dynamics in this model and its use in various fields by using different mathematics tools.

A better understanding of dynamics and collective behavior of coupled oscillators unveils relation to some result of Directional statistics. In the Kuramoto model with noise the Kato-Jones distributions naturally arise.

A conceptual framework for characterization of complex networks by using statistics of Möbius transformations was proposed. The same idea was used in describing mean fields and community detection in complex networks of coupled oscillators.

Recently, researchers have intensively studied a generalization of the Kuramoto model on certain spaces of higher dimensions. An extension to the sphere S^3 is presented in this thesis. The equations in that model are quaternionic Riccati differential equations. The low-dimensional dynamics in the model is studied and various applications in science and engineering proposed. We also propose an application to clustering of multivariate data.

Chapter 5 moves away from physical theories and deals with consensus and coordination problems on non-Euclidean manifolds. The consensus and balancing on the sphere S^3 is studied, showing that the gradient descent algorithm for the function of (anti-)consensus is essentially the non-Abelian Kuramoto model with zero intrinsic generalized frequencies. The swarm dynamics on the sphere S^3 with state-dependent interactions that satisfy certain realizations of Hebbian and anti-Hebbian learning rules are analyzed.

Slike

1.1	Geometrijska interpretacija parametra poretka	20
2.1	Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.135$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 2$) i $K = -4$, $v = 0$, $\tau = 0$. Raspodjela evoluira prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji.	28
2.2	Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.135$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 2$) i $K = -3$, $v = 0$, $\tau = 1$. U slučaju veze s kašnjenjem, modalnost se mijenja naizmjenično (unimodalna u bimodalnu i obrnuto).	29
2.3	Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.185$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 3$) i $K = 2$, $v = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$. Fazni pomak povećava asimetričnost raspodjele.	30
3.1	Raspodjela faza za tri grafa u momentu $T = 3$ određena sistemom (3.1) s uniformno raspodjeljenim početnim fazama. Na osnovu <i>OA ansatza</i> i MMS principa slijedi da je raspodjela globalno povezane populacije (crna linija) Poissonovo jezgro s određenim parametrima. Kao što se i očekivalo, raspodjela faza za Erdős-Renyi graf s $p = 0.9$ (crvena linija) je bliža Poissonovom jezgru nego s $p = 0.5$ (plava linija).	38
3.2	Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih $X_{\mathcal{N}}$ (prva kolona), $-\log X_{\mathcal{N}} $ (druga kolona) i $Y_{\mathcal{N}}$ (treća kolona) za tri različita modela: (a), (b), (c): Globalno povezana populacija (model 1); (d), (e), (f): Dvije perfektne zajednice jednakih veličina (model 2); (g), (h), (i): Dvije perfektne zajednice različitih (2 : 1) veličina.	40
3.3	Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih $X_{\mathcal{N}}$ (prva kolona), $-\log X_{\mathcal{N}} $ (druga kolona) i $Y_{\mathcal{N}}$ (treća kolona) za tri različita ER grafa s $N = 500$ čvorova: (a), (b), (c): ER graf s $p = 0.9$; (d), (e), (f): ER graf s $p = 0.5$; (g), (h), (i): ER graf s $p = 0.1$	41

3.4	Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih X_N , $-\log X_N $ i Y_N za Watts-Strogatz mrežu s $N = 500$ čvorova i parametrima $k = 50$ i $p = 0.1$	42
3.5	Evolucija srednjeg polja na vremenskom intervalu $t \in [0, 4]$ u populaciji od $N = 500$ oscilatora s globalnom jačinom veze $K = 2$	44
3.6	Srednja polja u ER grafu s $d = 0.1$ u momentima $T = 2, 25, 50$	47
3.7	Srednja polja u ER grafu s $d = 0.9$ u momentima $T = 2, 3, 4$	47
3.8	Srednja polja u ER grafovima s (a) $d = 0.1$, (b) $d = 0.5$ i (c) $d = 0.9$ u momentu $T = 5$	48
3.9	Srednja polja u WS grafovima s $k = 250$ i (a) $\beta = 0.1$, (b) $\beta = 0.5$ i (c) $\beta = 0.9$ u momentu $T = 5$	48
3.10	Srednja polja u mreži koja sadrži dvije perfektно koherentne zajednice s jačinom veze unutar zajednica $K = 0.675$ i između zajednica $\nu = 0.325$ u momentima $T = 50, 200, 250$	49
3.11	Slučajni graf s dvije zajednice.	52
3.12	Tačke u jediničnom disku su dobijene primjenom našeg algoritma na slučajni graf prikazan na slici 3.11. Svaka tačka odgovara četvorki čvorova. Dva klastera tačaka koja odgovaraju dvjema zajednicama su jasno vidljiva.	52
3.13	Slučajni graf s tri zajednice. Centralna zajednica je manja i posreduje između preostale dvije.	53
3.14	Čvorovi u mreži s tri zajednice su predstavljeni krugovima. Površina svakog kruga je inverzno proporcionalna stepenu korenspodencije čvora. Vidljivo je da čvorovi iz centralne zajednice imaju manji stepen korenspodencije.	53
4.1	Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za sistem (4.4) s funkcijom veze (4.11). Simulacija se izvodi za $N = 100$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = 0.5$. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na S^3	62
4.2	Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.11). Simulacija se izvodi za $N = 100$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = -0.5$. Početni uslovi su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na S^3 sa smjerom srednje vrijednosti $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ i koncentracijskim parametrom $\kappa = 2$	63

4.3	Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.13). Simulacija se izvodi za $N = 50$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = 2$ i faznim pomacima $\alpha = \beta = \pi/2$. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na S^3	64
4.4	Rezultati simulacija za skup podataka <i>Iris flower</i> : ukupan broj klastera se smanjuje od 150 na 2 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$	70
4.5	Rezultati simulacija za skup podataka od 28 zemalja: ukupan broj klastera se smanjuje od 28 na 9 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$	70
4.6	Rezultati simulacija za skup podataka <i>Canadian meteorological data</i> : algoritam je pronašao 3 velika klaster (crvene, žute i plave linije) i 4 odvojena klastera (crna, ljubičasta, siva i zelena linija).	71
4.7	Rezultati simulacija za skup podataka <i>Key economic indicators data</i> : algoritam je pronašao 1 veliki klaster (crne linije) i 4 odvojena klastera (plava, žuta, crvena i ljubičasta linija). . .	72
5.1	Model s Hebbovim učenjem (5.18), (5.20) s $N = 10$ agenata. Vrijednost parametra: $\varepsilon = 0.2$. Nulte početne vrijednosti za sinapse $w_{jk}(0) = 0$ i slučajne početne vrijednosti za $q_j(0)$ smo birali u skladu s napomenom 5.9. (a) Skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	90
5.2	Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 4$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) Skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	92
5.3	Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	93

5.4	Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 1$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	93
5.5	Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	94
5.6	Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 1$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).	94

Tabele

3.1	H-koherentnost Watts-Strogatz grafova (jačina veze je $K = 7$ i $T = 3$).	50
3.2	Stepen korenspondencije slučajno izabranih čvorova u mreži koja se sastoji od tri zajednice. Jasno je da čvorovi koji pripadaju centralnoj zajednici (zajednica B) imaju manji stepen korenspondencije.	54

Sadržaj

Predgovor	4
Izvod iz teze	10
Abstract	11
1 Uvod: Globalne promjenljive u idealnom modelu Kuramoto na S^1	19
2 Model Kuramoto sa šumnim frekvencijama i neke vjerovatnosne raspodjele na kružnici	23
2.1 Uvod	23
2.2 Povezani oscilatori i von Misesova raspodjela	25
2.3 Model	26
2.4 Dinamika parametara K-J raspodjela	27
2.5 Evolucija oblika na invarijantnoj podmnogostrukosti K-J raspodjela	28
2.6 Momenti	31
3 Primjene modela Kuramoto na kružnici na detekciju zajednica i karakterizaciju kompleksnih mreža	32
3.1 Uvod	32
3.2 Karakterizacija kompleksnih mreža pomoću statistike Möbiusovih transformacija	33
3.2.1 Koncepti: koherentnost mreže, korenspondencija čvora	34
3.2.2 Slučajne mreže	37
3.3 Modeliranje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora . .	42
3.3.1 Srednja polja u globalno povezanoj populaciji	43
3.3.2 Möbiusove transformacije u kompleksnoj mreži oscilatora	44
3.3.3 Srednja polja u kompleksnim mrežama Kuramoto oscilatora	45

3.4	Detekcija zajednica u kompleksnim mrežama	51
3.4.1	Algoritam	51
3.4.2	Primjeri	53
4	Ekstenzija modela Kuramoto na sferu S^3 i neke primjene	55
4.1	Uvod	55
4.2	Globalne promjenljive u idealnom neabelovom modelu Kuramoto na S^3	56
4.2.1	Model povezanih uopštenih oscilatora na S^3	57
4.2.2	Niskodimenziona dinamika globalno povezanih uopštenih oscilatora na S^3	58
4.2.3	Dinamika u Hopfovima koordinatama i neke specijalne funkcije veze	60
4.2.4	Uniformna početna raspodjela daje 4D dinamiku	64
4.2.5	Potencijalne primjene	65
4.3	Primjena neabelovog modela Kuramoto na klasterizaciji podataka	66
4.3.1	Algoritam	67
4.3.2	Studije slučaja	69
4.3.3	Klasteriranje funkcionalnih podataka	71
5	Distribuirani algoritmi konsenzusa i koordinacije na sferama	74
5.1	Uvod	74
5.2	Konsenzus i balansiranje na 3-sferi	75
5.2.1	Konsenzus na S^1	76
5.2.2	Konsenzus na S^3 i $SO(3)$ preko neusmjerenih grafova	77
5.2.3	Konsenzus na S^3 preko kompletnog grafa	81
5.2.4	Antikonsenzus i balansiranje na S^3	86
5.3	Rojevi na 3-sferi s adaptivnim sinapsama	88
5.3.1	Roj na S^3 s Hebbovim pravilom učenja	89
5.3.2	Roj na S^3 s antihebbovim pravilom učenja	92
5.3.3	Primjene i vizualizacija	98
6	Zaključak	100
	Literatura	103
	Biografija	112

Glava 1

Uvod: Globalne promjenljive u idealnom modelu Kuramoto na S^1

Sinhronizacija u velikoj populaciji povezanih oscilatora je univerzalni fenomen s velikim brojem manifestacija u fizici i prirodnim naukama, te primjenama u inženjerstvu [78]. Ovakav paradigmatički model je 1975. godine predstavio Kuramoto [52]:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \frac{K}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Ovdje, N je ukupan broj oscilatora, $\varphi_j(t)$ i $\omega_j \in \mathbb{R}$ je faza i svojstvena frekvencija j -tog oscilatora respektivno. K je globalna jačina veze, koja je ista za svaki par oscilatora.

Također, može se uzeti u obzir i opšti oblik modela Kuramoto:

$$\dot{\varphi}_j = f e^{i\varphi_j} + \omega_j + \bar{f} e^{-i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

s globalnom kompleksnom funkcijom veze $f = f(t, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$.

Sistem (1.1) se dobija iz (1.2) za specifičan izbor funkcije veze:

$$f = i \frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N e^{-i\varphi_i}.$$

Napomenimo da oblik (1.2) uključuje različita uopštenja, kao što su veza s faznim pomakom (model Kuramoto-Sakaguchi), veze s kašnjenjem ili veze koje su pod uticajem šuma, itd.

Kuramoto je započeo analizu modela (1.1) uvodeći parametar poretka (engl. *order parameter*) $r(t)$ i srednju fazu $\mu(t)$ (vidjeti sliku 1.1), definisanu s:

$$r(t)e^{i\mu(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\varphi_i(t)}. \quad (1.3)$$

S parametrom poretka, model Kuramoto (1.1) je moguće zapisati u pogodnijem obliku. Da bismo to dobili, množimo obje strane jednačine 1.3 s $e^{-i\varphi_j}$:

$$re^{i(\mu-\varphi_j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i(\varphi_i-\varphi_j)}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.4)$$

Imaginarni dijelovi od 1.4 su

$$r \sin(\mu - \varphi_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad j = \overline{1, N},$$

koji se mogu zamijeniti u (1.1). Na ovaj način, (1.1) postaje:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + Kr \sin(\mu - \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

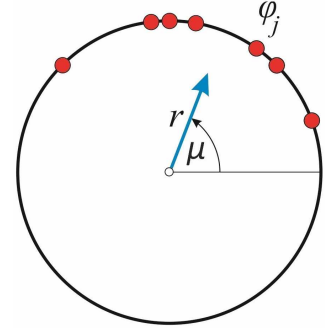
Ovaj oblik otkriva efekt srednjeg polja globalne veze, koje djeluje tako što svi oscilatori žele da budu povezani na isto vanjsko polje $\mu(t)$ sa zajedničkom jačinom veze $Kr(t)$ (vidjeti [95]). Uz ovo svojstvo, klasični model Kuramoto je u isto vrijeme netrivialan i podložan matematičkoj analizi. Njegova intriga proizilazi iz činjenice da i srednja faza $\mu(t)$ i jačina srednjih polja $Kr(t)$ variraju s vremenom i zavise od stanja svih oscilatora u svakom trenutku.

Pretpostavimo da je populacija homogena s globalnom vezom, tj. populacija u kojoj svi oscilatori imaju istu svojstvenu frekvenciju $\omega_j \equiv \omega$. Tada se (1.2) zapisuje kao:

$$\dot{\varphi}_j = fe^{i\varphi_j} + \omega + \bar{f}e^{-i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

Pojedinačni oscilatori u modelima (1.1)-(1.6) se zovu “Kuramoto oscilatori” (ili “sinusoidno povezani oscilatori”). Ovaj izraz se koristi da se naglasi kako: (a) su zanemarene amplitude oscilatora i (b) veza zavisi samo o prvim harmonikama $e^{i\varphi_j}$ i $e^{-i\varphi_j}$ (a ne o višim harmonikama).

Početkom devedesetih godina su u nekoliko radova predstavljeni rezultati simulacija koji ukazuju na to da (1.6) naizgled pokazuje niskodimenzionu dinamiku, kao na primjer, dobivala su se neutralna stabilna rješenja poput tzv. *splay* stanja [34, 69, 97, 98].



Slika 1.1: Geometrijska interpretacija parametra poretka

Ovi eksperimentalni zaključci su praćeni teorijskim rezultatom, a to je da su Watanabe i Strogatz u radovima [100, 101] predstavili posebnu transformaciju promjenljivih s kojom su redukovali (1.6) u trodimenzioni dinamički sistem i pronašli $N - 3$ konstanti kretanja (*WS system*). Ovo je pokazatelj da takvi sistemi sadrže neke skrivene simetrije i dopuštaju mnoge konstante kretanja. Nadalje, 2008. godine, Ott i Antonsen su u radu [74] pokazali da u nekim slučajevima (1.1) dozvoljava mnoge konstante kretanja i izvodi niskodimenzionu dinamiku za veliko N i neke specijalne početne uslove $\varphi_j(0)$, $j = 1, \dots, N$ (*OA ansatz*). Eksplicitno zadana ODJ koja opisuje evoluciju kompleksnog parametra poretka je izvedena ne samo za slučaj identičnih oscilatora ($\omega_j \equiv \omega$), nego i u slučaju kada su svojstvene frekvencije ω_j izabrane iz Cauchyjeve (Lorentzove) raspodjele (i nekih drugih raspodjela) na realnoj pravoj. Funkcija gustoće raspodjele faza $\rho(\varphi, t)$ evoluira u invarijantnim niskodimenzionim podmnogostrukostima u prostoru svih funkcija gustoća. Rezultat Otta i Antonsena je naročito transparentan kada svi oscilatori imaju jednake svojstvene frekvencije. U tom slučaju se gustoća faza oscilatora razvija na dvodimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukosti koja se sastoji od Poissonovog jezgra (vidjeti [84]). Međutim, treba naglasiti da *OA ansatz* vrijedi pod pretpostavkom da je početna raspodjela faza uniformna na $[0, 2\pi]$. U većini radova o ovoj temi usvaja se ova pretpostavka, uglavnom zato što daje posebno pogodnu kompleksnu ODJ za parametar poretka. Pored toga, ova pretpostavka o početnim fazama izgleda prilično prirodna u mnogim modelima.

Početkom 2000-ih godina u radovima [63, 79] je postignut novi uvid u niskodimenziono ponašanje modela (1.2). Rad Marvela i ostalih [63] je posebno ilustrativan, jer nudi teorijsko objašnjenje grupe ove niskodimenzione dinamike, tj. evolucija oscilatora je zadana dejstvom grupe Möbiusovih transformacija (ovaj rezultat ćemo ubuduće spominjati kao MMS princip). Da bi se to objasnilo, uvode se nove kompleksne promjenljive $z_j(t) = e^{i\varphi_j(t)}$ koji predstavljaju stanja oscilatora. U odsustvu veze, svaki oscilator vrši rotaciju na jediničnoj kružnici S^1 u kompleksnoj ravni:

$$\dot{z}_j = i\omega z_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Uvodeći zamjenu $z_j(t) = e^{i\varphi_j(t)}$ u (1.6) dobija se kompleksna Riccatijeva diferencijalna jednačina:

$$\dot{z}_j = i(f z_j^2 + \omega z_j + \bar{f}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

s globalnom vezom $f = f(t, z_1, \dots, z_N)$ i zajedničkom svojstvenom frekvencijom $\omega \in \mathbb{R}$.

Kompleksne Riccatijeve jednačine su usko povezane s Möbiusovim transformacijama u proširenoj kompleksnoj ravni. Pored toga, jednačina specifičnog oblika (1.8) čuva jediničnu kružnicu, tj. ako je $z_j(0) \in S^1$, tada $z_j(t) \in S^1$ za svako $t > 0$. Ovo se lako potvrdi tako što se pokaže da $z(0)\bar{z}(0) = 1$ implicira $\frac{d}{dt}(z(t)\bar{z}(t)) = 0$.

Opšta Möbiusova transformacija koja čuva S^1 se može napisati u sljedećoj parametrizaciji:

$$\mathcal{M}(z) = \frac{e^{i\psi}z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}e^{i\psi}z}, \quad (1.9)$$

s parametrima $\psi \in [0, 2\pi]$ i $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1$.

Skup svih Möbiusovih transformacija koje čuvaju S^1 je troparametarska podgrupa $G_{\mathbb{C}}$ grupe svih Möbiusovih transformacija u kompleksnoj ravni. Marvel i ostali su pokazali da se oscilatori z_j kreću pod dejstvom grupe $G_{\mathbb{C}}$. Preciznije, $z_j(t) = \mathcal{M}_t(z_j(0))$ za svako $t > 0$ i $j = 1, \dots, N$, gdje je \mathcal{M}_t jednoparametarska familija Möbiusovih transformacija u $G_{\mathbb{C}}$. Drugim riječima, funkcija gustoće stanja oscilatora $\rho(z, t)$ u svakom momentu t je odgovarajuća Möbiusova transformacija početne raspodjele $\rho(z, 0)$ na S^1 . Budući da (pod)grupa Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk mogu biti parametrizirane s tri (realna) parametra, slijedi da $\rho(z, t)$ evoluira na invarijantnoj trodimenzionoj podmnogostrukosti u prostoru raspodjela. Štaviše, parametri ψ i α u (1.9) zadovoljavaju sistem koji su ranije dobili Watanabe i Strogatz [101]:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = i(f\alpha^2 + \omega\alpha + \bar{f}); \\ \dot{\psi} = f\alpha + \omega + \bar{f}\bar{\alpha}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Ova linija istraživanja donosi novu intrigu u proučavanju Kuramoto oscilatora (zajedno s tradicionalnim fokusom na sinhronizaciju frekvencije i faznim prelazima iz/u koherentna stanja), a to su odnosi s hiperboličkom geometrijom, kompleksnom analizom i implikacije.

Glava 2

Model Kuramoto sa šumnim frekvencijama i neke vjerovatnosne raspodjele na kružnici

2.1 Uvod

Model Kuramoto je trajno stimulisao interesovanje naučnika u niskodimenzionom ponašanju velikih populacija globalno povezanih oscilatora. Izuzetan napredak u ovoj temi postignut je u sljedećim radovima [63, 74, 79]. Otkriveno je da se dinamika velikih populacija globalno povezanih oscilatora može reducirati na niskodimenzione podmnogostrukosti (*WS system*, *OA ansatz* i *MMS princip*). MMS princip je dodatno poboljšao Ott-Antonsenov rezultat, a to je da rješenja u obliku Poissonovog jezgra nastaju kao Möbiusove transformacije kružne uniformne raspodjele. Zbog toga, za slučaj globalno povezane populacije, MMS princip je uopštenje *OA ansatza* za proizvoljnu početnu raspodjelu faza. Međutim, za razliku od *OA ansatza*, MMS princip ne obuhvata (bar ne do sada) slučaj neidentičnih oscilatora.

Sada ukratko ističemo neke analogne koncepte, a to je da su raspodjele u obliku Poissonovog jezgra već dugo proučavane kao "umotane" (engl. *wrapped*) Cauchyjeve raspodjele. U radu [64] je uvedena reparametrizacija umotanih Cauchyjevih raspodjela korištenjem kompleksnih brojeva, koji su predstavljani kao Möbiusove transformacije kružne uniformne raspodjele. Ova analogija ukazuje na to da otkrića u direkcionoj statistici mogu biti korisna u objašnjenju dinamike velikih populacija povezanih oscilatora. Konkretno, mogli bi se zapitati koje druge kružne raspodjele (osim kružne uniformne i

umotane Cauchyjeve raspodjele) nastaju u dinamici povezanih oscilatora.

Druga familija raspodjela, koja je centralna u direkcionalnoj statistici, se sastoji od von Misesovih raspodjela $vM(\mu, \kappa)$. Njena funkcija gustoće vjerovatnoće je zadana s (vidjeti [31, 60]):

$$f_{vM}(\varphi) = \frac{1}{2\pi\mathcal{I}_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos(\varphi - \mu)\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2.1)$$

gdje je \mathcal{I}_0 modificirana Besselova funkcija prve vrste reda 0. U proučavanju povezanih oscilatora von Misesova raspodjela se spominje uglavnom u radovima o statističkoj detekciji i procjeni veza između oscilatora koji su pod uticajem šuma, vidjeti [3, 15, 17]. U našem kontekstu je važnije da se von Misesove raspodjele pojavljuju kao stacionarne raspodjele u nekim jednostavnim modelima povezanih oscilatora sa šumnim identično raspoređenim frekvencijama, vidjeti paragraf 2.2.

Kato i Jones su 2010. godine opisali novu familiju raspodjela vjerovatnoća na kružnici, dobijenu kao Möbiusova transformacija von Misesove raspodjele. Za fiksnu srednju vrijednost μ i koncentraciju κ u von Misesovoj raspodjeli, ova familija čini trodimenzionu podmnogostrukost u prostoru raspodjela. U nastavku, pozivat ćemo raspodjele koje pripadaju ovoj familiji kao *K-J raspodjele*.

U ovoj glavi proučavamo evoluciju globalno povezane populacije oscilatora u slučaju kada je početna raspodjela njihovih stanja von Misesova. Ova situacija nije obuhvaćena *OA ansatzom*, jer se ne odnosi na ovu familiju početnih raspodjela. Umjesto toga, oslanjamo se na rezultat Watanabe-Strogatza (u obliku MMS principa) za ovaj slučaj. Pozivajući se na MMS princip, zaključujemo da će se stanja globalno povezanih identičnih oscilatora razvijati na trodimenzionalnoj podmnogostrukosti koja se sastoji od K-J raspodjela. Ovo zapažanje, zajedno s nekim posljedicama i primjenama, predstavlja glavnu motivaciju za rezultate predstavljene u ovoj glavi.

U paragrafu 2.2 tvrdimo da je pretpostavka von Misesove raspodjele za početna stanja prilično prirodna u različitim modelima. U paragrafu 2.3 predstavljamo model globalno povezane populacije čija funkcija gustoće $\rho(z, t)$ evoluira na invarijantnoj podmnogostrukosti koja se sastoji od K-J raspodjela. U paragrafu 2.4 razmatramo netrivialnu relaciju između parametara modela i parametara rezultirajućih K-J raspodjela. U paragrafu 2.5, rezultati iz [50] se koriste da bi se dobile kvalitativne predikcije mogućih scenarija kolektivne dinamike u našem modelu i povezivanje kvalitativno različitih scenarija s odgovarajućim skupovima vrijednosti parametara modela. Nakon toga slijede neke simulacije koje ilustruju različite scenarije i podržavaju naše predikcije. Pitanja o modalnosti i asimetričnosti rezultirajućih raspo-

djela također se rješavaju u paragrafu 2.5. Na kraju, u paragrafu 2.6 dajemo eksplicitne izraze za momente K-J raspodjela koristeći formule iz [63].

2.2 Povezani oscilatori i von Misesova raspodjela

Proces sinhronizacije se obično proučava kao tranzicija iz potpuno nekoherentnog stanja (s početnom vrijednošću parametra poretka $r(0)$, koji je postavljen na nulu), kroz parcijalno koherentna stanja ($0 < r(t) < 1$), sve do potpune sinhronizacije ($r(t) \rightarrow 1$). Ova postavka podrazumjeva da je početna raspodjela faza oscilatora uniformna na $[0, 2\pi]$. Za globalno povezanu populaciju (i neke opštije slučajeve, kao što je pokazano u [53, 75]), *OA ansatz* pruža moćan metod za tretiranje takvih sistema. Iako ova pretpostavka zvuči sasvim razumno, u nekim procesima određeni stepen koherentnosti u populaciji je prisutan prije nego što se uspostavi veza srednjeg polja. Zbog toga, u takvim slučajevima se neke druge raspodjele pojavljuju kao početne faze oscilatora. U ovom paragrafu ukratko objašnjavamo kako se von Misesove raspodjele pojavljuju kao rezultat kombinovanih efekata veza i šuma.

Jedno opšte zapažanje je da von Misesove raspodjele $vM(\mu, \kappa)$ imaju maksimalnu entropiju na S^1 za fiksni parametar koncentracije κ (ako je $\kappa = 0$ tada se dobija uniformna raspodjela).

Pored toga, von Misesove raspodjele nastaju kao stacionarne raspodjele procesa drifta i difuzije na kružnici s preferiranom orijentacijom, vidjeti [82]. Posebno se uzima u obzir populacija šumnih oscilatora koja je povezana s vanjskim poljem μ :

$$\dot{\varphi}_j = R \sin(\mu - \varphi_j) + \xi_j, \quad j = 1, \dots, N, t > 0, \quad (2.2)$$

gdje su ξ_j realizacije Gaussovog bijelog šuma s intenzitetom $D > 0$:

$$\langle \xi_j(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_j(t) \xi_i(t') \rangle = 2D\delta_{ij}(t - t').$$

Stacionarna raspodjela ovog procesa je von Misesova. Ovo se može pokazati rješavanjem Fokker-Planckove jednačine, vidjeti [40, 82].

U [40], usmjerena kretanja plivajućih mikroorganizama s preferiranom orijentacijom μ je opisana s (2.2). Drugi primjer je problem procjene fazne veze između šumnih oscilatora, a to je da su razlike u fazama oscilatora $\Delta_{jk}(t) = \varphi_j(t) - \varphi_k(t)$ regulisane s (2.2) i $\mu = 0$, vidjeti [3].

Napomenimo da model srednjeg polja (1.1) s identično raspoređenim šumnim frekvencijama $\omega_j = \omega + \xi_j$ također daje stacionarnu von Misesovu raspodjelu (s rotirajućim srednjim uglom $\mu(t)$), o ovome se raspravljalo u

radu [15]. U radu [4] su proučavani cirkadijski satovi u populaciji cijanobakterija korištenjem ovog modela za međucelijsku komunikaciju.

2.3 Model

Razmotrimo populaciju identičnih oscilatora s globalnom vezom:

$$\dot{\varphi}_j(t) = \omega + \frac{K}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_i(t - \tau) - \varphi_j(t) - v), \quad i = \overline{1, N}, \quad t \geq T. \quad (2.3)$$

Ovdje je ω bešumna frekvencija koja je zajednička za sve oscilatore i K je jačina globalne veze. Napomenimo da ne zahtijevamo da globalna veza K bude pozitivna, nego dopuštamo i negativnu (odbojnu) vezu.

Razmotrimo proces (2.3) na vremenskom intervalu $t \in [T, \infty)$ za neko $T \geq 0$. Pretpostavimo da su početna stanja oscilatora $z_1(T) = e^{i\varphi_1(T)}, \dots, z_N(T) = e^{i\varphi_N(T)}$ izabrana iz von Misesove raspodjele $vM(\mu, \kappa)$.

Naglasimo da se *OA ansatz* ne primjenjuje na ovaj skup početnih uslova (osim ako je $\kappa = 0$, tada dobivamo uniformnu raspodjelu). Da bismo primjenili MMS princip (ili *WS system*) nametnuli smo važno ograničenje, a to je da svi oscilatori imaju identične svojstvene frekvencije ω . Druga ključna pretpostavka je da je veza globalna, što znači da su fazni pomak v i kašnjenje τ isti u svim poparnim interakcijama. Sistem oblika (2.3) se naziva model Kuramoto-Sakaguchi [85].

Posmatrajući sve zajedno, naš model se može posmatrati kao proces koji se odvija u dvije faze, prva opisana od strane (2.2) do trenutka T i druga (2.3) nakon T . Pretpostavlja se da je T dovoljno veliko, tako da proces u prvoj fazi dostigne stacionarnu raspodjelu.

Druga pretpostavka je da šum nestaje u trenutku T , tj. oscilatori su šumni za $t \in [0, T]$ i bešumni nakon T . Iako ova pretpostavka može zvučati vještački na prvi pogled, mi tvrdimo da ova dvofazna dinamika može poslužiti kao adekvatan model u različitim situacijama. Konkretno, može se smatrati da je vanjsko polje deaktivirano u trenutku T , čime se realizuju poparne interakcije i potisne se šum ξ_j .

Kao jedan konkretan i intrigantan primjer, pozivamo se na eksperiment o progresiji populacije ćelija kroz ćelijski ciklus. U prvoj fazi populacija se dva puta tretira timidin blokovima da bi se sve ćelije uhvatile u (približno) istoj fazi, to je početak S-faze ćelijskog ciklusa. U momentu T timidin je ispran i posmatrana je kolektivna progresija kroz ćelijski ciklus. Neki detalji o ovom eksperimentu i njegovim rezultatima su izloženi u knjizi [66], strana 25. U ovoj konkretnoj situaciji, može se pretpostaviti da dinamika ćelija opisuju (2.2) u prvoj fazi (prije nego što je timidin ispran), a zatim (2.3) nakon toga.

Primjenom MMS principa na (2.3), dobivamo da raspodjela faza u svakom trenutku $t > T$ pripada K-J familiji. Ovo će biti dodatno istraženo u sljedećem paragrafu.

2.4 Dinamika parametara K-J raspodjela

Skup svih Möbiusovih transformacija koji čuvaju jedinični disk D formira podgrupu. Opšta Möbiusova transformacija koja čuva jedinični disk se može napisati u sljedećem obliku:

$$\mathcal{M}(z) = e^{i\mu} \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}, \quad (2.4)$$

za neki ugao $0 < \mu < 2\pi$ i kompleksan broj $\alpha \in D, \alpha = re^{i\nu}$.

Neka slučajna kružna promjenljiva z ima von Misesovu raspodjelu $vM(0, \kappa)$. Tada je slika od z pod dejstvom Möbiusove transformacije (2.4) kružna slučajna promjenljiva sa sljedećom funkcijom gustoće vjerovatnoće (vidjeti [50]):

$$f_{KJ}(\varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi \mathcal{I}_0(\kappa)} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \gamma)} \times \exp \left\{ \frac{\kappa(\xi \cos(\varphi - \eta) - 2r \cos \nu)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \gamma)} \right\}, \quad (2.5)$$

gdje je $\gamma = \mu + \nu$, $\xi = \sqrt{r^4 + 2r^2 \cos(2\nu) + 1}$ i $\eta = \mu + \arg\{r^2 \cos(2\nu) + 1 + ir^2 \sin(2\nu)\}$.

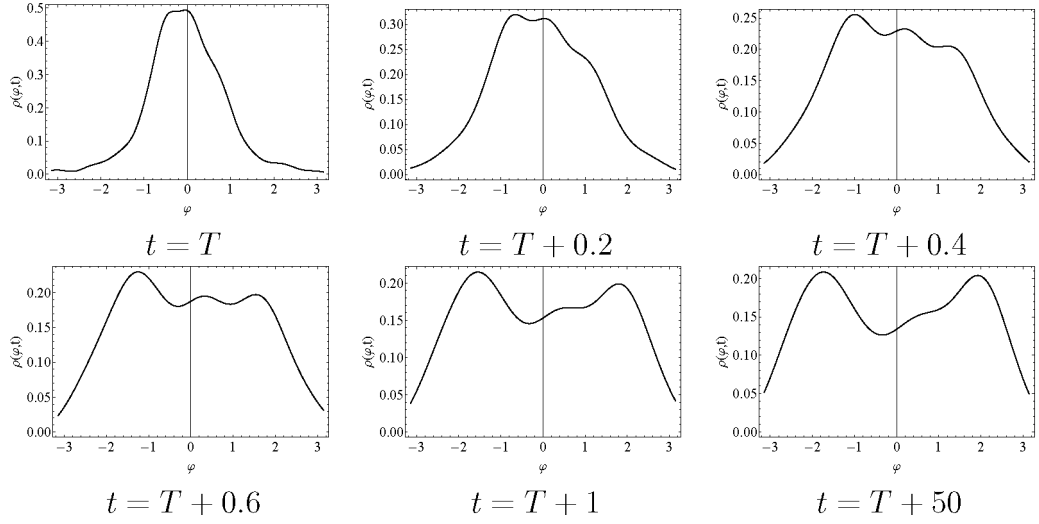
Ova raspodjela zavisi od četiri parametra: $\kappa \geq 0$, $0 \leq \mu, \nu < 2\pi$ i $0 \leq r < 1$. Parametar κ je naslijeđen od von Misesove raspodjele, dok preostala tri dolaze iz Möbiusove transformacije (2.4).

Za fiksnu vrijednost parametra κ , funkcije oblika (2.5) predstavljaju tro-dimenzionu podmnogostrukost u prostoru raspodjela verovatnoća.

Kao što je objašnjeno u paragrafu 2.2, faze $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ u svakom momentu $t > T_1$ evoluiraju pod dejstvom Möbiusove transformacije koja čuva jedinični disk (2.4) s parametrima $\mu(t) \in [0, 2\pi]$ i $\alpha(t) \in \mathbb{C}$, koji zadovoljavaju sljedeći sistem običnih diferencijalnih jednačina [63, 100]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= i(f(t)\alpha^2 + g(t)\alpha + \bar{f}(t)); \\ \dot{\mu} &= f(t)\alpha + g(t) + \bar{f}(t)\bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ovdje, f je funkcija veze, $f(t) = i \frac{K}{2N} \sum_{j=1}^N e^{-i(\varphi_j(t-\tau)-\nu)}$ i $g(t) = \omega$.



Slika 2.1: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.135$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 2$) i $K = -4$, $v = 0$, $\tau = 0$. Raspodjela evoluirala prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji.

Iz teorije Lie grupa, imamo da u svakom momentu $t > T$ postoji Möbiusova transformacija \mathcal{M}_t koja preslikava faze $\varphi_1(T), \dots, \varphi_N(T)$ u $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$.

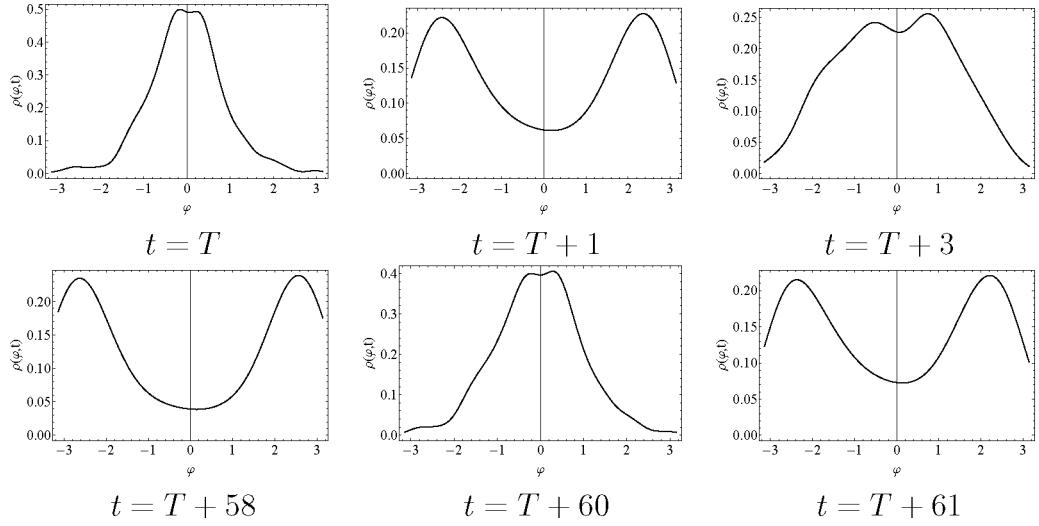
Parametar κ je proporcionalan količniku $\frac{R}{D}$. Preostala tri parametra K-J raspodjele su vezana za K, v, ω i τ iz (2.3). Međutim, ovaj odnos je vrlo suptilan i posredovan kroz (2.6) i dejstva odgovarajućeg protoka Möbiusovih transformacija.

U stvari, ova zavisnost je još komplikovanija, jer funkcija veze $f(t)$ u (2.6) zavisi i od stanja svih oscilatora u momentu t . Zbog toga parametri r, ν i μ zavise ne samo o K, v, ω i τ , nego i o R i D (kroz κ).

Zato je veoma teško procijeniti evoluciju parametara K-J raspodjele ako su dati parametri modela. Ta evolucija se može djelimično shvatiti samo fizičkom intuicijom, simulacijama i izrazima za momente i upoređivanjem s analizom iz [50]. Ovo će se proučavati u narednim paragrafima ove glave.

2.5 Evolucija oblika na invarijantnoj podmnogostrukosti K-J raspodjela

U svom radu, Kato i Jones su pokazali da raspodjele (2.5) imaju različite oblike u zavisnosti o parametrima. U ovom paragrafu proučavamo evoluciju oblika funkcije gustoće faza u modelu (2.3) za različite vrijednosti parametara.



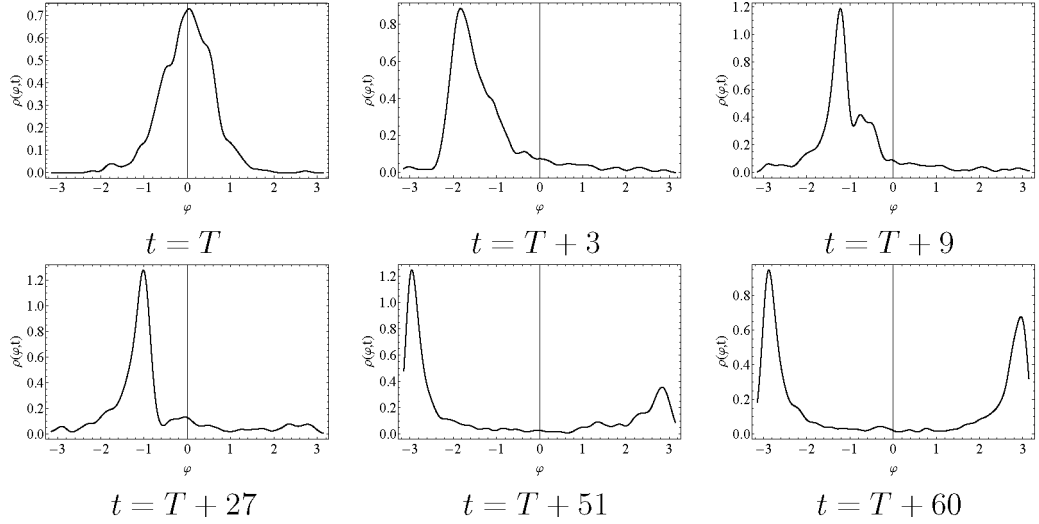
Slika 2.2: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.135$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 2$) i $K = -3$, $v = 0$, $\tau = 1$. U slučaju veze s kašnjenjem, modalnost se mijenja naizmjenično (unimodalna u bimodalnu i obrnuto).

tara. Ova studija je podržana rezultatima simulacija za neke ilustrativne slučajeve. Na slikama 2.1-2.3 je prikazana evolucija funkcije gustoće faza oscilatora $\rho(\varphi, t)$ za tri različita slučaja u različitim momentima t . Svaka funkcija gustoće je dobijena rješavanjem sistema (2.2)-(2.3) za populaciju koja se sastoji od $N = 500$ oscilatora. U svim simulacijama, moment tranzicije iz prve faze u drugu je $T = 30$.

Mi ćemo simulirati efekte privlačne i odbojne veze, veze s globalnim kašnjenjem τ i veze s faznim pomakom. Napomenimo da MMS princip vrijedi za sve tipove veza pomenutih gore, stoga sve funkcije gustoće prikazane na slikama pripadaju familiji K-J raspodjela.

Familija (2.5) sadrži i simetrične i asimetrične, kao i unimodalne i bimodalne raspodjele. S druge strane, von Misesove raspodjele su unimodalne i simetrične. U našem kontekstu to znači da se unimodalna i simetrična početna raspodjela faza može razviti u bimodalnu i/ili asimetričnu s vezom srednjeg polja. Interesantno je objasniti kako različiti efekti (kao što su negativna veza, veze s kašnjenjem, veze s faznim pomakom) utiču na oblik raspodjela. Razlikujemo nekoliko kvalitativno različitih scenarija:

1. Prvo razmotrimo model bez kašnjenja i faznog pomaka: $\tau = 0, v = 0$.
 - a) Ako veze nema u prvoj fazi ($R = 0$) i veza je odbojna u drugoj ($K \leq 0$), tada je funkcija gustoće $\rho(\varphi, T)$ konstantna i ostaje



Slika 2.3: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara $R = 0.185$, $D = 0.1$, $\mu = 0$ (dobija se $\kappa \approx 3$) i $K = 2$, $v = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$. Fazni pomak povećava asimetričnost raspodjele.

konstantna za svako $t > T$, što znači da stanja oscilatora imaju kružnu uniformnu raspodjelu ($\kappa = 0, r = 0$).

- b) Ako je $R = 0$ i $K > 0$, tada je funkcija gustoće $\rho(\varphi, T)$ konstantna i evoluira dalje prema postepenoj sinhronizaciji ($r \rightarrow 1$) na dvo-dimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukost koja se sastoji od umotanih Cauchyjevih funkcija gustoća ($\kappa = 0$).
 - c) Ako je veza privlačna u obe faze ($K, R > 0$), tada nema promjene u modalnosti. Dobivamo unimodalne K-J funkcije gustoće za svako $t > T$ i postepenu sinhronizaciju ($\kappa > 0, r \rightarrow 1$).
 - d) Ako je privlačna veza u prvoj fazi $R > 0$, koja je praćena odbojnom u drugoj fazi $K < 0$, sistem evoluira prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji s dvije koncentracione tačke odvojene uglom π . Ovaj scenarij je prikazan na slici 2.1. Ovdje je $\kappa > 0$, $0 < r \rightarrow a < 1$.
2. Prisustvo globalne veze s kašnjenjem ($\tau = 1$) s $R > 0$ i $K < 0$, donosi oscilatornu dinamiku. Raspodjela mijenja modalnost (od unimodalne do bimodalne i obrnuto) nekoliko (ili beskonačno mnogo) puta, vidjeti sliku 2.2. Ovdje je $\kappa > 0$, jer r oscilira. Pitanje dugotrajnog ponašanja za ovaj slučaj je prilično suptilan (zapravo, zavisi od intenziteta odbojne veze K).

3. Prisustvo faznog pomaka $v \approx \frac{\pi}{2}$ donosi jake asimetrične raspodjele, slika 2.3. Stoga, fazni pomak je parametar koji bitno utiče na asimetričnost raspodjela. U stvari, K-J raspodjele su simetrične samo za nekoliko posebnih slučajeva: $\kappa = 0$ (umotana Cauchyjeva), $r = 0$ (von Misesova) i $\nu = 0$ ili $\nu = \pi$.

Sada se ukratko bavimo pitanjem bimodalnih stacionarnih konfiguracija pomenutih u tački 1d) gore. Engelbrecht i Mirollo su u radu [30] koristili MMS princip da bi dokazali da su jedini mogući granični parametri za (2.3) pojedinačne tačke. Zbog toga, uprkos pojavljivanju bimodalnih raspodjela, sistem nikada ne može da se sinhronizuje u dvije različite tačke. U stvari, K-J familija ne sadrži raspodjele s visokom koncentracijom u dvije tačke, funkcije gustoće su samo umjereno bimodalne, kao što su one prikazane na slikama. To znači da stacionarna konfiguracija fazne raspodjele ne zavisi mnogo o tome koliko je šiljata von Misesova raspodjela. Drugim riječima, stacionarne bimodalne konfiguracije dobijene za slučaj 1d) se razlikuju samo kad je $\kappa = 0.5$ i za vrlo veliko κ .

2.6 Momenti

Marvel i ostali su u radu [63] također izveli formulu za momente fazne raspodjele povezanih oscilatora. Jednostavnim ubacivanjem Fourierovih koeficijenata von Misesove raspodjele $vM(0, \kappa)$ u formule (55)-(56), iz kojih dobivamo izraz za dinamičku evoluciju m -tog momenta:

$$\begin{aligned} \langle z^m \rangle(t) &= \alpha^m(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(1 - |\alpha(t)|^2)^{k+1}}{k!} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k)!}{n!} \frac{\mathcal{I}_{|n+k+1|}(\kappa)}{\mathcal{I}_0(\kappa)} e^{i(m+n)\psi(t)} \bar{\alpha}^n(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdje je \mathcal{I}_l modificirana Besselova funkcija prve vrste reda l . Kao i prije, $\alpha(t)$ i $\psi(t)$ su rješenja sistema (2.6). Njihovo geometrijsko značenje je također predstavljeno u [63]: $\psi(t)$ je ukupna rotacija u suprotnom smjeru kazaljke na satu početne raspodjele do vremena t , i $\alpha(t)$ je slika centra (nule) pod dejstvom protoka Möbiusove transformacije.

Konkretno, formula za centroid raspodjele daje:

$$\langle z \rangle(t) = \alpha(t) + (|\alpha(t)|^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathcal{I}_{|n|}(\kappa)}{\mathcal{I}_0(\kappa)} e^{in\psi(t)} \bar{\alpha}^{n-1}(t). \quad (2.8)$$

Interesantno je uporediti gornju formulu s izrazom za momente dobivene u radu [50].

Glava 3

Primjene modela Kuramoto na kružnici na detekciju zajednica i karakterizaciju kompleksnih mreža

3.1 Uvod

U ovoj glavi razmatramo model faznih oscilatora koji su povezani preko kompleksne mreže interakcija kao paradigma kolektivnog ponašanja u velikim sistemima. Identifikacijom oscilatora s čvorovima i interakcijama s granama, moguće je definisati model Kuramoto na kompleksnoj mreži \mathcal{N} . Taj model se može napisati kao sljedeći dinamički sistem:

$$\dot{\phi}_j = \omega + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Ovdje, $\phi_i \in [0, 2\pi)$ je faza (stanje) oscilatora i , ω je svojstvena frekvencija svih oscilatora. K_{ij} je matrica poparnih interakcija (jačina veza) između oscilatora i i j u mreži \mathcal{N} . Matrica K_{ij} može biti asimetrična.

Naglasimo da se model (3.1) razlikuje od onog koji je razmatran u pionirskom radu Kuramoto [52]. U [52] je pretpostavljena globalna veza, tj. $K_{ij} \equiv K > 0$ za $\forall i, j$. S druge strane, svojstvene frekvencije ω_j su različite za različite oscilatore.

Poznato je da ako je mreža povezana (tj. postoji grana u mreži između dva proizvoljna čvora i i j) i sve interakcije su privlačne (tj. $K_{ij} \geq 0$ za $\forall i, j$) tada će se u određenom trenutku pojaviti sinhronizacija svih oscilatora u mreži.

Model povezanih oscilatora (3.1) se može primjeniti u istraživanju kompleksnih mreža. Ova ideja je ispitana od 2005. do 2007. u sljedećim radovima [6, 7, 71]. Pomoću tih metoda, koje su bazirane na posmatranju postepenog procesa sinhronizacije u kompleksnoj mreži Kuramoto oscilatora, dolazi se do važnih informacija o topologiji mreže, a posebno pomažu u detekciji međusobno povezanih klastera.

Ista ideja se nastavlja dalje koristiti u nekoliko radova gdje se proučavaju svojstva mreže posmatrajući proces sinhronizacije u njoj [13, 54, 59]. Metode ispitivanja kompleksnih mreža proučavanjem odgovarajućeg modela povezanih oscilatora imale su određene utjecaje i primjene u posljednjem desetljeću, zajedno s tradicionalnim metodama koje se često temelje na klasičnim rezultatima matematičke teorije grafova ili slučajnih šetnji na mrežama [12, 32].

U ovoj glavi istražujemo kompleksne mreže detekcijom kolektivnog ponašanja određenih grupa oscilatora. Informacije o kolektivnom ponašanju izvlačimo iz statistike Möbiusovih transformacija koju reguliše dinamika oscilatora u fiksnim vremenskim intervalima.

U sljedećem paragrafu predlažemo konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža. U paragrafu 3.3 predlažemo da grupa Möbiusovih transformacija može poslužiti kao adekvatan matematički objekat za opisivanje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora. Ovaj model se može primjeniti u detekciji zajednica u mrežama, što je pokazano u paragrafu 3.4.

3.2 Karakterizacija kompleksnih mreža pomoću statistike Möbiusovih transformacija

U ovom paragrafu mi karakterišemo kompleksnu mrežu otkrivajući kolektivno ponašanje oscilatora u njoj. Međutim, kolektivno ponašanje nismo uočavali kroz fenomen sinhronizacije, nego kroz prisutnost i različitost Möbiusovih transformacija u dinamici povezanih oscilatora na zadanom vremenskom intervalu. Dakle, istražujemo neka topološka i strukturna svojstva kompleksnih mreža ispitivanjem u kojoj se mjeri algebarska struktura opisana u [63] nalazi u mreži. Grubo rečeno, što je mreža kompleksnija, manje će se ove strukture naći u njoj.

U sljedećem potparagrafu ćemo navesti nekoliko osnovnih činjenica iz kompleksne analize, uvesti neke nove koncepte i objasniti glavnu ideju proučavajući idealistične modele. Konačno, u potparagrafu 3.2.2 ćemo ponovo razmatrati i nadograditi te koncepte kako bismo ih učinili primjenjivim za slučajnu i realnu mrežu.

3.2.1 Koncepti: koherentnost mreže, korenspondencija čvora

Razmotrimo model Kuramoto identičnih faznih oscilatora povezanih kroz mrežu interakcija \mathcal{N} (3.1) u vremenskom intervalu $[0, T]$. Pretpostavimo da je broj oscilatora N dovoljno velik (recimo, $N > 100$) i da su početne faze oscilatora slučajne, izabrane iz neke određene vjerovatnosne raspodjele na $[0, 2\pi]$:

$$\phi_i(0) = \phi_i^0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.2)$$

Na primjer, u svim primjerima u ovom paragrafu pretpostavit ćemo da početne faze oscilatora imaju uniformnu raspodjelu na $[0, 2\pi]$. Dakle, moglo bi se pretpostaviti da $\phi_i^0 \sim U[0, 2\pi]$.

U nastavku će biti prikladno predstavljati faze svih oscilatora kao tačke na jediničnoj kružnici S^1 u kompleksnoj ravni: $z_i(t) = e^{i\phi_i(t)}$. Shodno tome, početna raspodjela tačaka $z_i(0)$, $i = \overline{1, N}$ je uniformna na S^1 .

U slučaju globalne veze ($K_{ij} = K$, $\forall i, j = \overline{1, N}$), tačke z_i se kreću pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk [63]. U svakom zadanom momentu t , tačke su zadane dejstvom odgovarajuće Möbiusove transformacije. Tada, iz teorije Lie grupa, slijedi da su tačke $z_1(T), \dots, z_N(T)$ dobivene od $z_1(0), \dots, z_N(0)$ primjenom neke Möbiusove transformacije (to je vrlo teško odrediti apriori).

Poznato je da za dvije tačke z_i, w_i , postoji beskonačno mnogo Möbiusovih transformacija koje preslikavaju tačku z_i u w_i . Isto vrijedi ako imamo dvije različite tačke z_i, z_j i njihove dvije slike w_i, w_j . Ipak, Möbiusova transformacija je jedinstveno određena njenim dejstvom na tri različite tačke:

Propozicija 3.1. *Neka su z_i, z_j, z_k tri različite tačke na S^1 i w_i, w_j, w_k druge tri različite tačke na S^1 . Tada postoji jedinstvena Möbiusova transformacija koja preslikava z_i u w_i , z_j u w_j i z_k u w_k .*

Prethodna propozicija je osnovna činjenica iz kompleksne analize [84]. Bazirano na tome, uvodimo odgovarajuću terminologiju koju ćemo koristiti u nastavku. Neka su $z_1(0), \dots, z_N(0)$ početna stanja oscilatora i $z_1(T), \dots, z_N(T)$ njihova stanja u momentu $t = T$ (dobiveni iz sistema (3.1)).

Definicija 3.1.

1. Kažemo da se četiri oscilatora i, j, k, l *slažu*, ako za svako $T > 0$, postoji Möbiusova transformacija \mathcal{M}_T koja preslikava tačke $z_i(0), z_j(0), z_k(0), z_l(0)$ u tačke $z_i(T), z_j(T), z_k(T), z_l(T)$ respektivno.
2. Kažemo da $p > 4$ oscilatora i_1, \dots, i_p *leže u istom polju*, ako za svako $T > 0$, postoji Möbiusova transformacija \mathcal{M}_T koja preslikava tačke $z_{i_1}(0), \dots, z_{i_p}(0)$ u tačke $z_{i_1}(T), \dots, z_{i_p}(T)$.

Napomena 3.1. Napomenimo da koncepti u gore navedenoj definiciji zavise o topologiji mreže i početnim stanjima svih oscilatora. Drugim riječima, četiri oscilatora u mreži se mogu slagati za određene početne uvjete (3.2), a da se ne slažu u istoj mreži za neke druge početne uvjete. Međutim, kao što simulacije potvrđuju, ako se četiri oscilatora slažu (ne slažu) u određenom vremenskom intervalu $(0, t_1)$, tada se oni slažu (ne slažu) u bilo kojem vremenskom intervalu (t_1, t_2) . Također, treba naglasiti da dva skupa oscilatora koja leže u dva zajednička polja se mogu presijecati, pošto jedan oscilator može da leži u više zajedničkih polja.

Napomena 3.2. Zajedničko polje se može formirati vanjskim silama (utječući na frekvencije ω) i samih oscilatora (mreže) (kroz njihove međusobne interakcije K_{ij}).

Definicija 3.2. *Koherentnost* mreže \mathcal{N} povezanih oscilatora je vjerovatnoća da se slučajno izabrana četiri oscilatora iz \mathcal{N} slažu.

Koherentnost mreže \mathcal{N} označavamo s $r_{\mathcal{N}}$, $0 \leq r_{\mathcal{N}} \leq 1$.

Za grupu oscilatora $\mathcal{H} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, definiramo koherentnost grupe \mathcal{H} u mreži \mathcal{N} na isti način.

Napomena 3.3. Na osnovu statističke mjere, koherentnost ne zavisi o početnim stanjima pojedinačnih oscilatora (za zadanu dovoljno veliku mrežu). Drugim riječima, jedna određena četvorka oscilatora se može slagati za neke početne uslove i da se ne slaže za druge, ali vjerovatnoća da se četiri slučajno izabrana oscilatora slažu je približno ista za fiksnu topologiju mreže i određenu raspodjelu početnih faza.

Sada, fiksirajmo oscilator i i slučajno izaberimo tri oscilatora j_1, j_2, j_3 različitih od i .

Definicija 3.3. *Stepen korenspodencije* oscilatora i u mreži \mathcal{N} je vjerovatnoća da se četvorka i, j_1, j_2, j_3 slažu, podijeljena s koherentnošću mreže r .

Stepen korenspodencije oscilatora i označavamo s m_i .

Očito je da se može razmatrati stepen korenspodencije oscilatora u bilo kojoj grupi \mathcal{H} oscilatora u mreži \mathcal{N} . Također, očito je da u svakoj mreži prosječni stepen korenspodencije jednak jedan.

Pojam korenspodencije se može koristiti da se odrede važni (utjecajni) oscilatori u mreži. Pod utjecajnim oscilatorima (grubo rečeno) podrazumjevamo one koji znatno utječu na postojanje zajedničkih polja. Doista, oscilatori koji imaju izuzetno nizak ili visok stepen korenspodencije su sumnjivi da budu važni (ili marginalni) oscilatori.

Kao što smo vidjeli, važno je da za naša razmatranja provjeravamo da li se četiri oscilatora slažu. Najučinkovitiji način da se to provjeri je korištenje osnovnog geometrijskog koncepta: dvorazmjera (engl. *cross ratio*). Dvorazmjera [91] četiri tačke z_1, z_2, z_3, z_4 u kompleksnoj ravni je zadana s:

$$CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Propozicija 3.2. *Neka su z_1, z_2, z_3, z_4 četiri različite tačke u kompleksnoj ravni i w_1, w_2, w_3, w_4 druge četiri različite tačke. Tada, Möbiusova transformacija koja preslikava z_i u w_i , $i = \overline{1, 4}$ postoji ako i samo ako je*

$$CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = CR(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Napomena 3.4. Dvorazmjera četiri tačke z_1, z_2, z_3, z_4 je realan broj ako i samo ako su z_1, z_2, z_3, z_4 konciklične (ili kolinearne).

U našem slučaju sve tačke leže na jediničnoj kružnici, prema tome svaka dvorazmjera će biti realan broj.

Sada, posmatrajmo nekoliko jednostavnih modela.

Model 1. Posmatrajmo model globalno povezane populacije iz [63]. Svaki par je povezan s istom jačinom veze $K_{ij} = K$. U [63] je teorijski pokazano da u svakom vremenskom intervalu (t_1, t_2) **svi** oscilatori su zadani **istom** Möbiusovom transformacijom. Koristeći gore navedenu terminologiju, kažemo da svi leže u istom polju. Zbog toga, koherentnost ove mreže je maksimalna, $r = 1$ i stepen korenspondencije svakog oscilatora je jednak jedan. Naravno, simulacije ovo potvrđuju. Kažemo da je ovo perfektno koherentna mreža.

Napomena 3.5. Kao djelomičan slučaj gore navedenom modelu, prazna mreža identičnih oscilatora (tj. nema interakcije/veze, $K_{ij} \equiv K = 0$) je također perfektno koherentna. Doista, u ovom modelu oscilatori izvode jednostavne rotacije na S^1 s jednakim frekvencijama ω . Takva rotacija je trivijalan slučaj Möbiusovih transformacija.

Model 2. Posmatrajmo mrežu koja se sastoji od dvije zajednice, gdje je svaki par oscilatora povezan jačinom $K_{ij} = K$ ako z_i i z_j pripadaju istoj zajednici, dok za dva oscilatora koji pripadaju različitim zajednicama jačina je $K_{ij} = \nu < K$. Drugim riječima rečeno, svaki par oscilatora je povezan, ali jačina veze K unutar zajednice je veća od jačine veze ν između zajednica. Ovaj model je proučavan u [1, 77] kao jednostavan primjer populacije povezanih oscilatora koji može dovesti do zagonetnog fenomena nazvanog *chimera* stanje. U radu [63] ovaj model se ne spominje, ali se teoretski lako pokazuje

da se taj rezultat može primijeniti i na ovaj model [80]. Stoga, obje zajednice se razvijaju pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija (u svakom momentu dvije različite Möbiusove transformacije za dvije zajednice). Drugim riječima, ovdje postoje dva polja, prvo je zajedničko za jednu zajednicu, drugo za drugu.

Koherentnost mreže zavisi o omjeru veličina dviju zajednica. Koherentnost je minimalna ako su zajednice iste veličine, onda je jednako $r = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, i stepen korenspodencije svakog oscilatora je $m_i = 1$.

Ako je jedna zajednica duplo veća od druge, tada će se koherentnost povećati: $r = (\frac{1}{3})^4 + (\frac{2}{3})^4 = \frac{17}{81}$. Neka oscilator i pripada manjoj i j većoj zajednici. Tada je stepen korenspodencije oscilatora i i j , respektivno:

$$m_i = \frac{(\frac{1}{3})^3}{r} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{17}{81}} = \frac{3}{17}, \quad m_j = \frac{(\frac{2}{3})^3}{r} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{17}{81}} = \frac{24}{17}.$$

U cjelini, ovo nije perfektno koherentna mreža ($r < 1$), ali ona sadrži dvije perfektno koherentne grupe.

Model 3. Sada posmatrajmo slučajni Erdős-Renyi (ER) graf [12] gdje je svaki par oscilatora i, j povezan s vjerovatnoćom $p = 0.9$. Moglo bi se očekivati da će se dinamika (raspodjela faza) razvijati u blizini idealne mreže (model 1), pošto nedostaje samo 10% interakcija (grana u grafu) (slika 3.1). Međutim, ne možemo se nadati nekom teorijskom rezultatu postojanja Möbiusovih transformacija u njemu, nego se potpuno oslanjamo na simulacije. Simulacije pokazuju da se slučajna četvorka skoro nikad perfektno ne slaže, tj. dvorazmjera se skoro nikad perfektno ne čuva. Stoga, mi ispitujemo koliko često se dvorazmjera približno čuva. Razmatramo sistem (3.1) u vremenskom intervalu $t \in [0, 1]$ i proučavamo relativnu razliku dvorazmjera zadanu s:

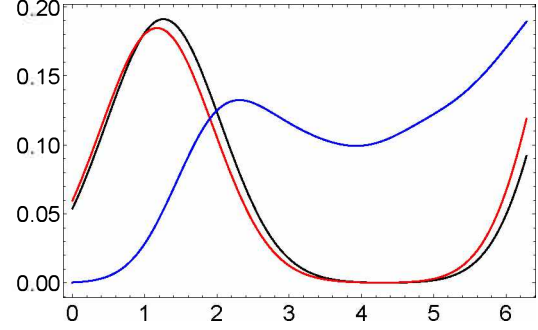
$$X = \frac{CR(1) - CR(0)}{CR(0)},$$

gdje su $CR(0)$ i $CR(1)$ dvorazmjere četiri tačke uzetih u momentima $t = 0$ i $t = 1$ respektivno. Uzimamo aproksimaciju $\varepsilon = 0.01$, tj. kažemo da se četiri oscilatora (približno) slažu, ako vrijedi $|X| < 0.01$. U ovom slučaju simulacija pokazuje da je koherentnost mreže približno 0.2 (za jačinu veze $K = 4$).

3.2.2 Slučajne mreže

Posljednji primjer pokazuje da moramo malo modificirati sve definicije kako bismo dobili značajne koncepte za slučajne (i realne) mreže.

Slika 3.1: Raspodjela faza za tri grafa u momentu $T = 3$ određena sistemom (3.1) s uniformno raspodjeljenim početnim fazama. Na osnovu *OA ansatza* i MMS principa slijedi da je raspodjela globalno povezane populacije (crna linija) Poissonovo jezgro s određenim parametrima. Kao što se i očekivalo, raspodjela faza za Erdős-Rényi graf s $p = 0.9$ (crvena linija) je bliža Poissonovom jezgru nego s $p = 0.5$ (plava linija).



Posmatrajmo mrežu povezanih oscilatora \mathcal{N} . Slučajno izaberimo četiri oscilatora i, j, k, l i \mathcal{N} i posmatrajmo njihova početna stanja (izabranih iz $U[0, 2\pi]$) $z_i(0), z_j(0), z_k(0), z_l(0)$ i njihova stanja u momentu $t = T$ određenim sistemom (3.1): $z_i(T), z_j(T), z_k(T), z_l(T)$. Označimo odgovarajuće dvorazmjere u momentima $t = 0$ i $t = T$ s $CR(0)$ i $CR(T)$ respektivno. Razmatramo relativnu razliku dvorazmjera:

$$X_{\mathcal{N}} = \frac{CR(T) - CR(0)}{CR(0)}.$$

Pošto su oscilatori i, j, k, l slučajno izabrani, može se $X_{\mathcal{N}}$ tretirati kao slučajna promjenljiva. Na ovaj način, sa svakom mrežom \mathcal{N} povezujemo slučajnu promjenljivu $X_{\mathcal{N}}$.

1. Za model 1, $X_{\mathcal{N}}$ je potpuno koncentrisana u nuli, njena funkcija gustoće je delta funkcija $\delta_0(x)$.
2. Za model 2, $X_{\mathcal{N}}$ ima nenultu vjerovatnoću nulte tačke (za slučaj jednako velikih zajednica vjerovatnoća nule je jednaka $\frac{1}{8}$). Dakle, u ovom slučaju raspodjela slučajne promjenljive $X_{\mathcal{N}}$ je također singularna (nije apsolutno neprekidna).

Zaključak. Ako slučajna promjenljiva $X_{\mathcal{N}}$ ima pozitivnu vjerovatnoću nulte tačke, tada mreža \mathcal{N} sadrži perfektно koherentnu grupu. S druge strane, slučajne promjenljive povezane sa slučajnim mrežama pretvaraju se u apsolutno neprekidne.

Uvedimo sada modifikovane definicije koherentnosti i stepena korencijencije koje će biti značajne i za slučajne mreže. Fiksirajmo malo $\varepsilon > 0$ i $T > 0$.

Definicija 3.4. Za dato $\varepsilon > 0$, koherentost mreže \mathcal{N} je

$$r_{\mathcal{N}} = P\{-\varepsilon < X_{\mathcal{N}} < \varepsilon\}.$$

Kao i ranije, na isti način uvodimo pojam koherentnosti grupe oscilatora.

Napomena 3.6. Napomenimo da u gore navedenoj definiciji, koherentnost zavisi o ε i o vremenu T . U simulacijama, koherentnost opada s T , pošto se devijacije dvorazmjera (ili greške računanja) akumuliraju u dužim intervalima. Zbog toga, kada se upoređuju dvije mreže, važno je da se uzima isto ε i T za oboje. Štaviše, koherentnost također zavisi i o početnoj raspodjeli faza. Ovo je razlog zbog kojeg smo u potparagrafu 3.2.1 odredili da početna raspodjela faza bude uniformna na $[0, 2\pi]$.

Također se može uvesti još jedna moguća definicija koherentnosti koja ne zavisi o ε :

Definicija 3.5. *S-koherentnost* mreže \mathcal{N} je entropija odgovarajuće slučajne promjenljive $X_{\mathcal{N}}$.

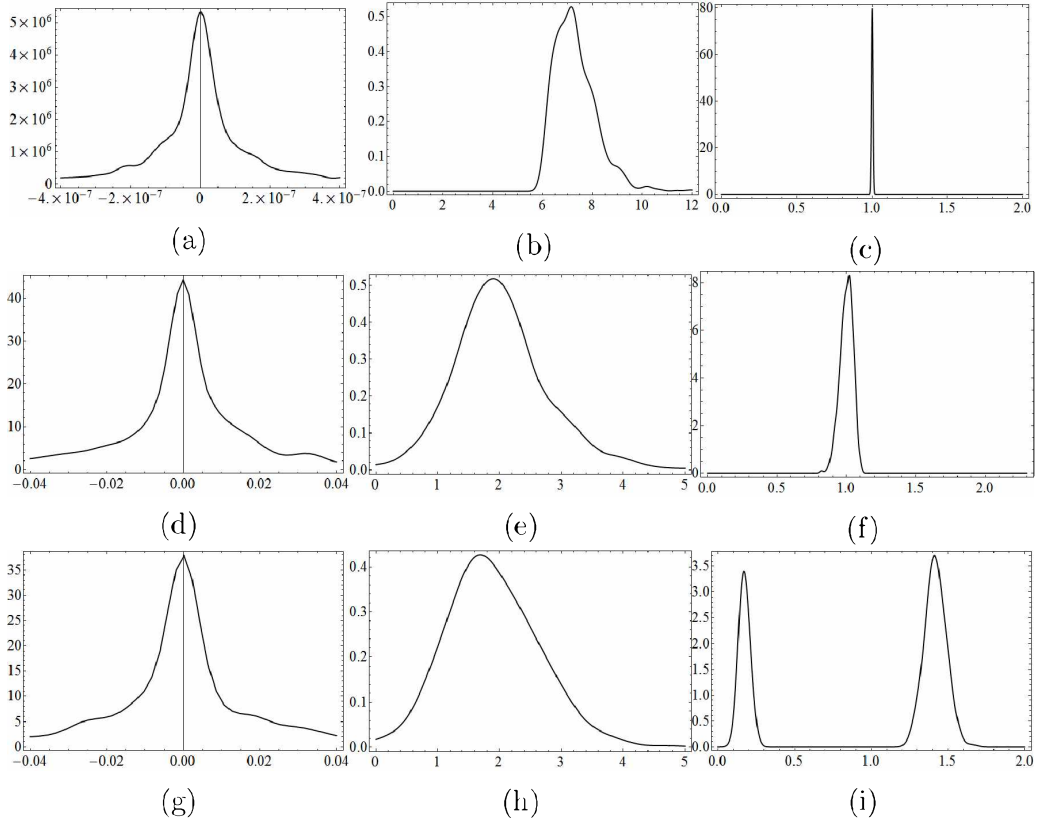
Sada, posmatrajmo jedan oscilator i . Slučajno izaberimo tri oscilatora koja su različita od i , označimo ih s j, k, l . Označimo njihova stanja u svakom momentu t s tačkama $w_i(t), w_j(t), w_k(t), w_l(t)$ na kružnici S^1 . Dvorazmjera te četiri tačke u svakom momentu t je realan broj, označimo ih s $CR_w(t)$. Postavimo da je $p_i^* = P\{-\varepsilon < \frac{CR_w(t) - CR_w(0)}{CR_w(0)} < \varepsilon\}$. Drugim riječima, p_i^* je vjerovatnoća da se w_i i tri slučajna oscilatora slažu za malo $\varepsilon > 0$.

Definicija 3.6. Step en korens pod encije oscilatora i u mreži \mathcal{N} je $m_i = \frac{p_i^*}{r_{\mathcal{N}}}$.

Ovdje $r_{\mathcal{N}}$ označava koherentnost mreže \mathcal{N} . Napomenimo da step en korens pod encije oscilatora zavisi o njegovoj interakciji (tj. o topologiji mreže) i o početnim stanjima (fazama) čitavog sistema.

Za slučajno birajući oscilator i iz mreže, njegov step en korens pod encije m_i se posmatra kao slučajna promjenljiva. Na ovaj način uvodimo još jednu slučajnu promjenljivu koja je povezana s mrežom \mathcal{N} . Označimo je s $Y_{\mathcal{N}}$.

Napomena 3.7. Kratko objašnjavamo dvije slučajne promjenljive $X_{\mathcal{N}}$ i $Y_{\mathcal{N}}$ koje karakterišu mrežu \mathcal{N} . Slučajna promjenljiva $X_{\mathcal{N}}$ daje informaciju o koherentnosti mreže. Koncentracija raspodjele promjenljive $X_{\mathcal{N}}$ oko nule ukazuje na prisustvo koherentnih grupa u mreži. S druge strane, $Y_{\mathcal{N}}$ karakteriše raspodjelu uloga (uticaja) oscilatora u mreži. Za određene mrežne interakcije K_{ij} i fiksne početne uvjete (3.2), ove slučajne promjenljive mogu uzeti konačan skup mogućih vrijednosti ($\binom{N}{4}$ i N vrijednosti respektivno). Međutim, kako pretpostavljamo da je početna faza svakog oscilatora slučajna (uniformno raspodjeljena na $[0, 2\pi]$), dobivamo da obje slučajne promjenljive uzimaju beskonačan skup mogućih vrijednosti. Domena $X_{\mathcal{N}}$ je realna linija, dok $Y_{\mathcal{N}}$ uzima pozitivne realne brojeve.

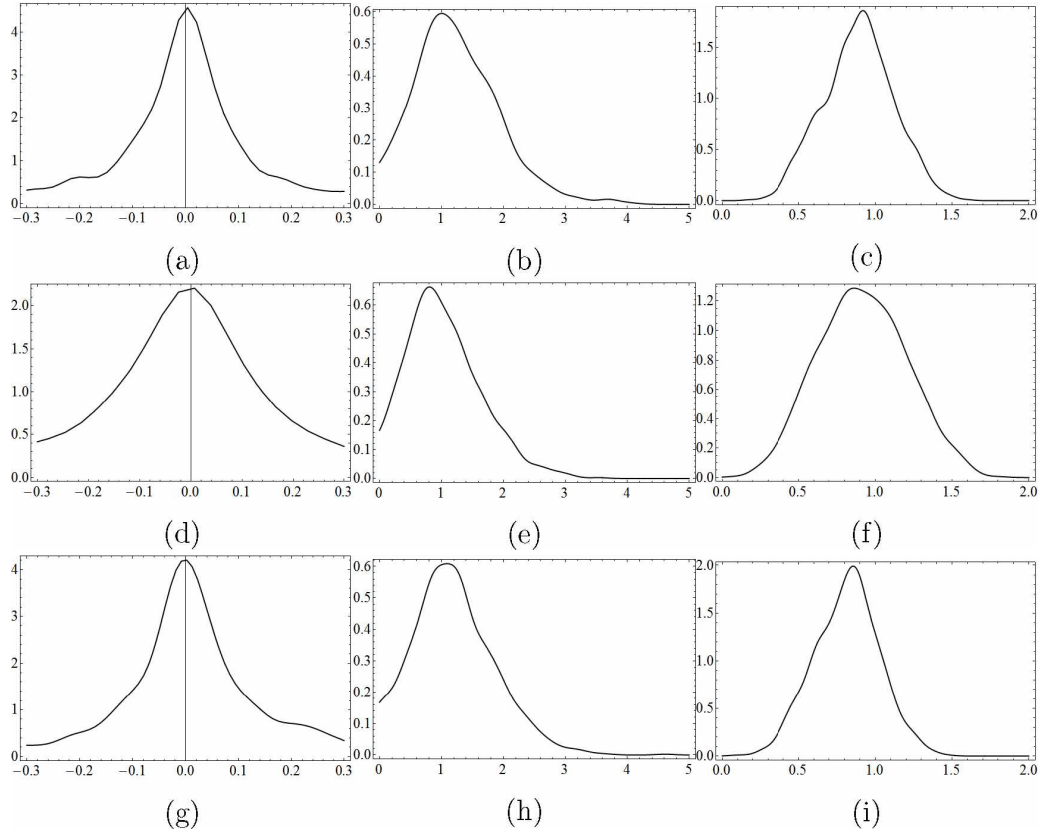


Slika 3.2: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih X_N (prva kolona), $-\log|X_N|$ (druga kolona) i Y_N (treća kolona) za tri različita modela: (a), (b), (c): Globalno povezana populacija (model 1); (d), (e), (f): Dvije perfektne zajednice jednakih veličina (model 2); (g), (h), (i): Dvije perfektne zajednice različitih ($2 : 1$) veličina.

Uzorci slučajnih promjenljivih X_N i Y_N se mogu generirati numerički pomoću Monte Carlo metode. U narednim primjerima prikazujemo empirijsku funkciju gustoće vjerovatnosti dvije slučajne promjenljive i kratko komentiramo slike.

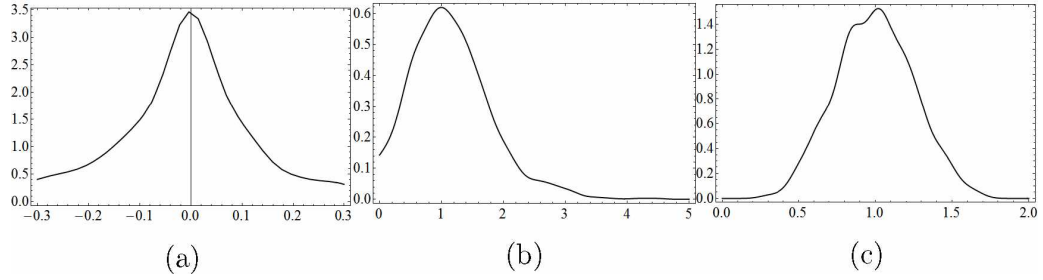
Napomena 3.8. Budući da je X_N visoko centrirana oko nule za neke mreže, prikladno ju je zamjeniti s $-\log_{10}|X_N|$, te nju razmatrati. Crtaćemo funkciju gustoće slučajnih promjenljivih X_N i $-\log_{10}|X_N|$ za neke primjere proučavane u nastavku.

U sljedećim primjerima uzet ćemo da je $\varepsilon = 0.01$ i $T = 1$ i slučajno birati početne faze iz uniformne raspodjele na $[0, 2\pi)$. Napomenimo da je potrebno izabrati T na takav način da se sinhronizacija ne dešava u intervalu $(0, T)$ i usporediti dvorazmjere prije sinhronizacije.



Slika 3.3: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih X_N (prva kolona), $-\log|X_N|$ (druga kolona) i Y_N (treća kolona) za tri različita ER grafa s $N = 500$ čvorova: (a), (b), (c): ER graf s $p = 0.9$; (d), (e), (f): ER graf s $p = 0.5$; (g), (h), (i): ER graf s $p = 0.1$.

1. Za model 1 funkcije gustoće su prikazane na slikama 3.2(a), 3.2(b), 3.2(c). Može se vidjeti da za ovu mrežu funkcija gustoće promjenljive X_N je u biti delta funkcija centrirana u nuli, a od Y_N je delta funkcija centrirana u 1.
2. Za model 2 su prikazana dva slučaja. Slike 3.2(d), 3.2(e) i 3.2(f) prikazuju funkcije gustoće za slučaj kada su zajednice jednakih veličina. U tom slučaju funkcija gustoće vjerovatnoće slučajne promjenljive X_N ima težinu (mjeru) koja je jednaka $\frac{1}{8}$ u nuli. Funkcija gustoće promjenljive Y_N je ista kao u modelu 1. Slike 3.2(g), 3.2(h) i 3.2(i) prikazuju funkcije gustoće vjerovatnoće za mrežu u kojoj je jedna zajednica duplo manja od druge. Lako se uočava da u ovom slučaju raspodjela od Y_N koncentrisana u dvije tačke: $x_0 = \frac{3}{17}$ ima vjerovatnoću $\frac{1}{3}$, a $x_1 = \frac{24}{17}$



Slika 3.4: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih X_N , $-\log|X_N|$ i Y_N za Watts-Strogatz mrežu s $N = 500$ čvorova i parametrima $k = 50$ i $p = 0.1$.

ima vjerovatnoću $\frac{2}{3}$.

3. Funkcije gustoće za ER mreže s $p = 0.9, 0.5$ i $p = 0.1$ su prikazane na slici 3.3. Koherentnost ovih mreža su približno 0.2, 0.12 i 0.2. Kao što se i očekivalo, mreža s $p = 0.5$ ima manju koherentnost od ostalih dvije. Također se uočava da je slučajna promjenljiva Y_N apsolutno neprekidna i koncentrisana na intervalu $(0, 2)$ s centrom u $x = 1$.
4. Razmotrimo poznatu Watts-Strogatz (WS) mrežu [12, 102] s $N = 500$, $k = 50$ (početni broj veza) i za različito p (p je vjerovatnoća uključivanja). Empirijske funkcije gustoće vjerovatnosti za parametre $k = 50$ i $p = 0.1$ su prikazane na slici 3.4.

Simulacije pokazuju da koherentnost WS mreže ne zavisi o vjerovatnoći uključivanja p i približno je ista kao kod ER mreža sa skoro istim brojem grana. Na primjer, koherentnost WS mreže s $N = 500$, $k = 50$ (i proizvoljno p) je slična ER grafu s $p = 0.1$.

3.3 Modeliranje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora

Veliki je izazov izabrati odgovarajući matematički objekat koji opisuje srednja polja u populaciji oscilatora povezanih kroz kompleksnu mrežu interakcija. Za dovoljno veliku mrežu može se smatrati da je doprinos svih (ili veći dio) oscilatora kolektivnoj dinamici veoma mali (zanemarljiv), te da se interakcije između oscilatora mogu aproksimirati uvođenjem jednog ili više srednjih polja. Međutim, situacija je u ovom slučaju mnogo komplikovanija, jer srednje polje nema isti efekat na sve oscilatore. Preciznije, dinamika različitih oscilatora se reguliše različitim srednjim poljima.

U ovom paragrafu uvodimo matematički model srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora. Koncepti koji su uvedeni u ovom paragrafu su posebno transparentni kada se primjenjuju na globalno povezane populacije. U ovom slučaju, postoji globalno srednje polje koje se u svakom trenutku može predstaviti jedinstvenom Möbiusovom transformacijom. Ovo je objašnjeno u potparagrafu 3.3.1. U potparagrafu 3.3.2 raspravljamo o tome kako se ta ideja može prilagoditi kada se bavimo kompleksnim mrežama. Nakon toga u potparagrafu 3.3.3 je uveden matematički okvir za opisivanje srednjih polja u kompleksnim mrežama povezanih oscilatora. Temeljem toga konstruišemo statističku metodu računanja srednjih polja i primjenjujemo ga za karakterizaciju nekih regularnih i slučajnih mreža.

3.3.1 Srednja polja u globalno povezanoj populaciji

U prvoj glavi smo rekli da kompleksna Riccatijeva obična diferencijalna jednačina (1.8) s $\omega \in \mathbb{R}$ definiše *protok* na jediničnoj kružnici, tj. za zadane početne uslove $z_j(0)$ na S^1 , imamo da $z_j(t) \in S^1$ za svako $t > 0$. Štaviše, može se pokazati da jednačina (1.8) definira jednoparametarsku familiju Möbiusovih transformacija koja čuva jedinični disk. Zaista, Poincareova preslikavanja Riccatijevih jednačina su Möbiusove transformacije, vidjeti npr. u radovima [14, 16].

Međutim, u gore navedenom obrazloženju postoji veoma važna osobina. Pozivajući se na (1.8) kao Riccatijevu običnu diferencijalnu jednačinu, iz čega implicira da se može pretpostaviti da funkcija veze f zavisi samo o t , a ne i o z_1, \dots, z_N . Ovo je u suštini aproksimacija srednjeg polja. Usvajanjem toga mi smatramo da su jednačine za stanja oscilatora povezane samo kroz neku zajedničku kompleksnu funkciju $f(t)$.

Za dovoljno veliku globalno povezanu populaciju ova aproksimacija je važeća i može se tretirati (1.8) kao Riccatijev protok na S^1 s vremenski zavisnim koeficijentima $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ i $\omega \in \mathbb{R}$. Dolazi do zapetljanije situacije ako veza nije globalna, tj. ako su oscilatori povezani kroz kompleksnu mrežu. Ovo će biti razmatrano u sljedećem potparagrafu. Započet ćemo definiranjem matematičkog modela jedinstvenog srednjeg polja u globalno povezanoj populaciji.

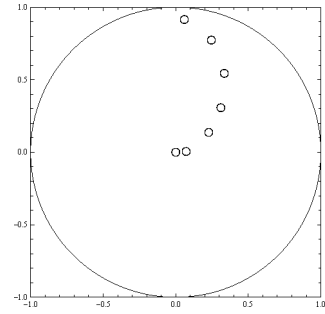
Definicija 3.7. Srednje polje u globalno povezanoj populaciji (1.6) u momentu $T \geq 0$ je Möbiusova transformacija $\mathcal{M}_T \in G_{\mathbb{C}}$, tako da su stanja svih oscilatora u momentu T zadana sa $z_j(T) = \mathcal{M}_T(z_j(0))$, $j = 1, \dots, N$.

Iz MMS principa slijedi da takva Möbiusova transformacija postoji za svako $T \geq 0$.

Svakoj Möbiusovoj transformaciji koja čuva jedinični disk (1.9) pridružujemo odgovarajući parametar $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. Na ovaj način, srednje polje u globalno povezanoj populaciji (1.6) u momentu $t > 0$ je predstavljeno tačkom $\alpha(t)$ u jediničnom disku, koja zadovoljava prvu običnu diferencijalnu jednačinu u sistemu (1.10).

Napomena 3.9. Geometrijsko značenje parametra $\alpha(t)$ je također jasno izloženo u radu [63]. Evolucija stanja oscilatora je zadana odgovarajućom jednoparametarskom familijom Möbiusovih transformacija $\mathcal{M}_t \in G_{\mathbb{C}}$. Tada, ispostavlja se da je $\alpha(t)$ slika centra pod dejstvom familije \mathcal{M}_t : $\alpha(t) = \mathcal{M}_t(0)$. U izuzetnom slučaju, kada je početna raspodjela faza uniformna na $[0, 2\pi]$, $\alpha(t)$ je jednostavno centroid stanja oscilatora u momentu t . Drugi parametar od \mathcal{M}_t , ugao $\psi(t) \in [0, 2\pi]$, je ukupna rotacija oscilatora u vremenskom intervalu $[0, t]$ i u suštini nije važna za karakterizaciju srednjeg polja.

Jasno je da srednje polje evoluiira s vremenom i njegova evolucija zavisi i od jačine veze i početnih stanja oscilatora.



Slika 3.5: Evolucija srednjeg polja na vremenskom intervalu $t \in [0, 4]$ u populaciji od $N = 500$ oscilatora s globalnom jačinom veze $K = 2$.

3.3.2 Möbiusove transformacije u kompleksnoj mreži oscilatora

U potparagrafu 3.3.1 smo uveli matematičku definiciju (zapravo model) srednjeg polja u populaciji globalno povezanih oscilatora. Naš sljedeći cilj je da proširimo ovaj model kako bismo proučavali kompleksne mreže oscilatora. Razmotrimo (dovoljno veliku) mrežu \mathcal{N} identičnih Kuramoto oscilatora (3.1).

Radi bolje preglednosti, pretpostavimo da su početne faze oscilatora izabrane iz uniformne raspodjele na $[0, 2\pi]$:

$$\varphi_j(0) \in U[0, 2\pi], \quad j = 1, \dots, N.$$

Napišimo (3.1) u opštem obliku:

$$\dot{\varphi}_j = f_j e^{i\varphi_j} + \omega + \bar{f}_j e^{-i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Kao što je gore navedeno, stanje oscilatora j je predstavljeno kompleksnim brojem s modulom 1 (tačka na S^1) $z_j(t) = e^{i\varphi_j(t)}$. Zamjenom u (3.3) se dobija

sljedeći sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\dot{z}_j = i(f_j z_j^2 + \omega z_j + \bar{f}_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

za neku funkciju veze $f_j(t, z_1, \dots, z_N)$ i $\omega \in \mathbb{R}$.

Fiksirajmo oscilator j i razmotrimo njegovu jednačinu (3.4). Strogo govoreći, ona nije Riccatijeva jednačina, pošto funkcija f_j zavisi o z_1, \dots, z_N . Međutim, shvatajući da je doprinos oscilatora j mrežnoj dinamici veoma mali, možemo zanemariti zavisnost funkcija f_1, \dots, f_N o z_j i smatrati (3.4) kao Riccatijevu jednačinu protoka na S^1 :

$$\dot{z}_j = i(f_j(t) z_j^2 + \omega z_j + \bar{f}_j(t)). \quad (3.5)$$

Očigledno, u globalno povezanoj (i velikoj) populaciji, svi oscilatori zadovoljavaju **istu** Riccatijevu jednačinu (1.8). U kompleksnim mrežama, različiti oscilatori zadovoljavaju različite jednačine (3.5). Naš pristup je baziran na detekciji grupa oscilatora koji (približno) zadovoljavaju istu Riccatijevu jednačinu.

U cjelini, ako oscilator j zadovoljava Riccatijevu jednačinu protoka oblika (3.5), njegovo stanje evoluira pod dejstvom jednoparametarske familije Möbiusovih transformacija s parametrima $\alpha(t)$ i $\psi(t)$ koji zadovoljavaju sistem (1.10). Međutim, znajući dinamiku jednog oscilatora u vremenskom intervalu $t \in [0, T]$ nije dovoljno da se utvrdi da li se kreće pod dejstvom Möbiusove grupe. Dejstvo Möbiusovih transformacija se može otkriti posmatranjem dinamike grupe koja se sastoji od $p \geq 4$ oscilatora i računajući dvorazmjernu. Koristićemo ovu metodu u simulacijama u narednom potparagrafu.

3.3.3 Srednja polja u kompleksnim mrežama Kuramoto oscilatora

Razmotrimo model (3.1) oscilatora povezanih kroz kompleksnu mrežu \mathcal{N} s početnim fazama $\varphi_j(0)$ biranih iz uniformne raspodjele na $[0, 2\pi]$.

Definicija 3.8.

1. Kažemo da je Möbiusova transformacija \mathcal{M} *prisutna* u mreži \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$, ako postoje četiri oscilatora i, j, k, l , takva da $z_i(T) = \mathcal{M}(z_i(0))$, $z_j(T) = \mathcal{M}(z_j(0))$, $z_k(T) = \mathcal{M}(z_k(0))$, $z_l(T) = \mathcal{M}(z_l(0))$. Drugim riječima, \mathcal{M} je prisutna u mreži \mathcal{N} u momentu T , ako se mogu naći četiri oscilatora u \mathcal{N} koji se slažu s \mathcal{M} u momentu T .
2. Pretpostavimo da je \mathcal{M} prisutna u \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$. Tada, *težina* od \mathcal{M} je $\frac{m}{4N}$, gdje je $m \leq N$ ukupan broj oscilatora koji leže u zajedničkom polju \mathcal{M} u momentu T .

Definicija 3.9. Srednja polja u mreži \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$ su Möbiusove transformacije koje su prisutne u \mathcal{N} u momentu T . Težine srednjih polja u \mathcal{N} su težine odgovarajućih Möbiusovih transformacija.

Fiksirajmo skup početnih stanja oscilatora $z_1(0), \dots, z_N(0)$ i moment $T > 0$. Označimo s Y_4 skup svih četvorki $\{i, j, k, l\}$ koji se slažu. Očigledno, Y_4 je konačno, te ima najviše $\binom{N}{4}$ elemenata. Svaki element iz Y_4 definiše jedinstvenu Möbiusovu transformaciju u momentu T . Razmotrimo funkciju $g_{\mathcal{N}} : Y_4 \rightarrow G_{\mathbb{C}}$, koja preslikava četvorke u Möbiusove transformacije. Domena funkcije $g_{\mathcal{N}}$ je konačan skup $P \subseteq G_{\mathbb{C}}$ koji sadrži sve Möbiusove transformacije koje su prisutne u \mathcal{N} u momentu T .

Svaka Möbiusova transformacija iz P je predstavljena odgovarajućim parametrom α . Na ovaj način, srednja polja u \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$ su predstavljena konačnim skupom ("oblakom") (težinskih) tačaka u \mathbb{D} .

Pretpostavimo da su srednja polja u mreži \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$ predstavljena "oblakom" tačaka $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ u \mathbb{D} s odgovarajućim težinama w_1, \dots, w_p . Sljedeći koraci zahtijevaju pojam udaljenosti između tačaka $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Podsjećajući se na to da su ove tačke slike nule pod nekim Möbiusovim transformacijama $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_p$, prirodno je koristiti hiperboličku udaljenost (Poincareov disk model, vidjeti [68]).

Neka je $w = w_1 + \dots + w_p$. Definirajmo funkciju:

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^p \frac{w_k}{w} d^2(\xi, \alpha_k),$$

gdje je

$$d(\xi, \alpha) = \ln \left(\frac{|\bar{\alpha}\xi - 1| + |\xi - \alpha|}{|\bar{\alpha}\xi - 1| - |\xi - \alpha|} \right)$$

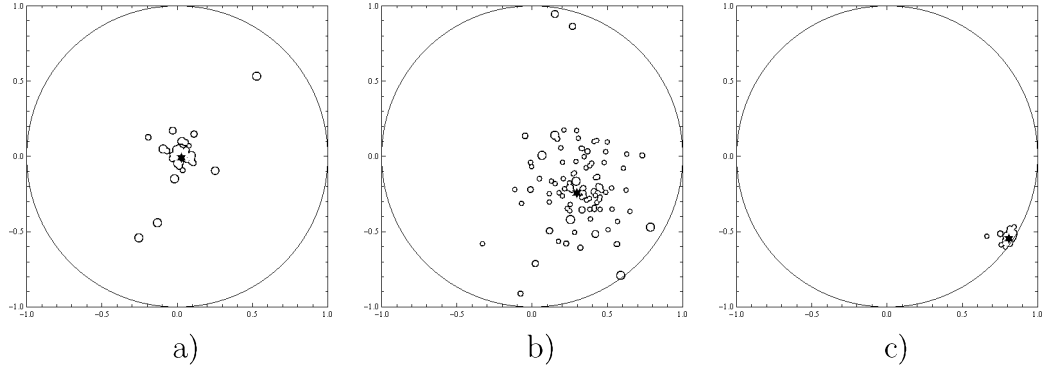
hiperbolička udaljenost u \mathbb{D} između tačaka ξ i α . Funkcija f ima jedinstven minimum B u \mathbb{D} , kojeg zovemo *Poincareov baricentar* (ili, u opštem kontekstu, *Karcherova sredina*, vidjeti [9, 49]) skupa tačaka $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

Definicija 3.10. *Prosječno srednje polje* u mreži \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$ je Poincareov baricentar $B(T)$ skupa $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in \mathbb{D}$.

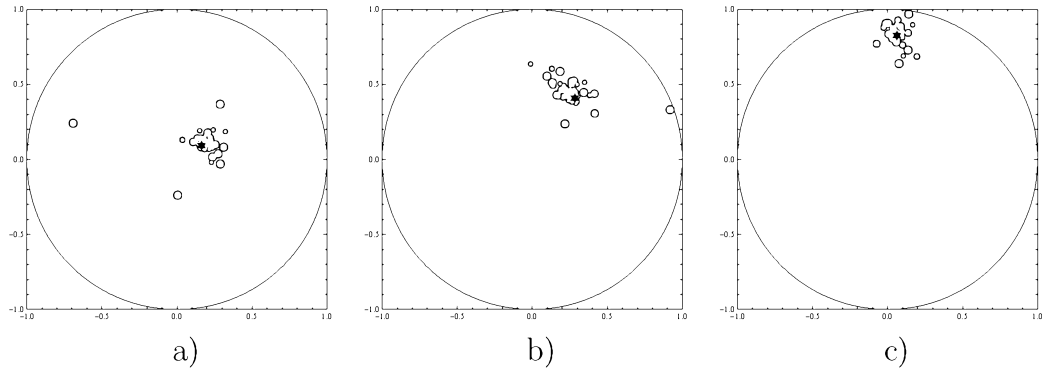
Označimo s $\kappa(T)$ vrijednost funkcije f u tački minimuma $B(T)$.

Definicija 3.11. *H-koherentnost* mreže \mathcal{N} u momentu $T \geq 0$ je $r(T) = \frac{1}{1+\kappa(T)}$.

Napomena 3.10. Napomenimo da se h-koherentnost (hiperbolička koherentnost) mreže razlikuje od pojma koherentnosti, koji je uveden u prethodnom paragrafu.



Slika 3.6: Srednja polja u ER grafu s $d = 0.1$ u momentima $T = 2, 25, 50$.



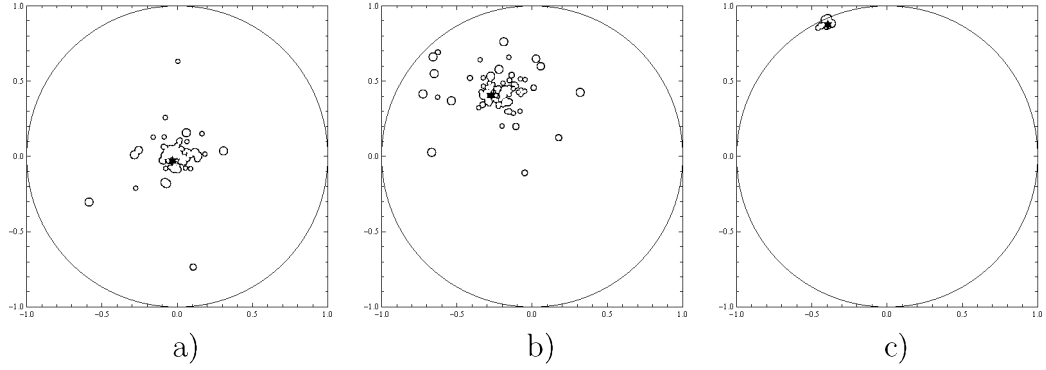
Slika 3.7: Srednja polja u ER grafu s $d = 0.9$ u momentima $T = 2, 3, 4$.

Napomena 3.11. Za zadanu mrežu \mathcal{N} , prosječno srednje polje $B(T)$ i h-koherentnost $r(T)$ su funkcije koje zavise o vremenu.

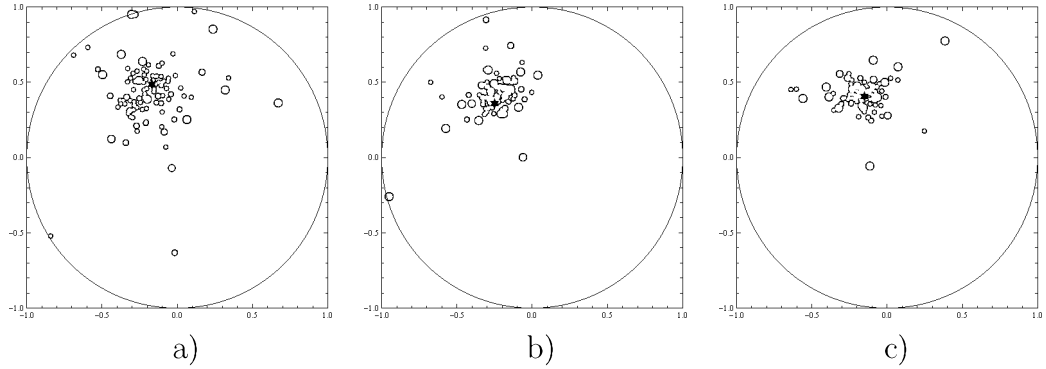
Napomena 3.12. Očigledno je da za globalno povezanu populaciju, koja je proučavana u potparagrafu 3.3.1, $\kappa(T) = 0$ za svako T . Zbog toga, njena h-koherentnost je jednaka jedan za svako T . Kažemo da je to *perfektna h-koherentna mreža*. Za svaku drugu mrežu, imamo da je $0 < r(T) < 1$. Tipično, h-koherentnost je opadajuća funkcija koja zavisi o vremenu.

Na slikama 3.6-3.10 su prikazana srednja polja različitih mreža. Metod simulacija je baziran na gore navedenim definicijama i lijepim osobinama matematičkih objekata koji se koriste. Međutim, kako bi proučavali kompleksne mreže, neke adaptacije i relaksacije su neophodne i kratko ćemo objasniti metodu (neki od narednih koraka su detaljnije objašnjeni u prethodnom paragrafu).

1. Slučajno izabrati početne faze $\varphi_1(0), \dots, \varphi_N(0)$ iz uniformne raspodjele na $[0, 2\pi]$.

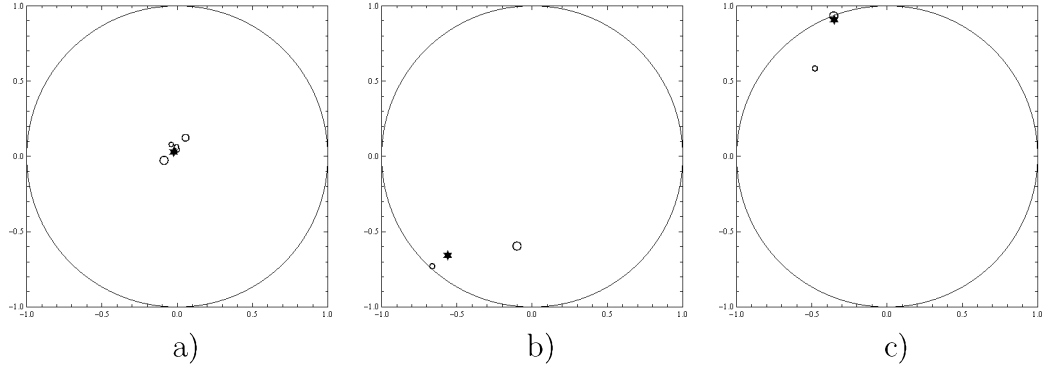


Slika 3.8: Srednja polja u ER grafovima s (a) $d = 0.1$, (b) $d = 0.5$ i (c) $d = 0.9$ u momentu $T = 5$.



Slika 3.9: Srednja polja u WS grafovima s $k = 250$ i (a) $\beta = 0.1$, (b) $\beta = 0.5$ i (c) $\beta = 0.9$ u momentu $T = 5$.

2. Riješiti (3.1) za $t \in [0, T]$ s tim početnim fazama da dobijemo faze oscilatora u momentu T : $\varphi_1(T), \dots, \varphi_N(T)$.
3. Zamjeniti $z_j(0) = e^{i\varphi_j(0)}$ i $z_j(T) = e^{i\varphi_j(T)}$ za $j = 1, \dots, N$ da dobijemo stanja oscilatora u momentima $t = 0$ i $t = T$ kao tačke na S^1 .
4. Slučajno izabrati 1000 četvorki oscilatora. Za svaku četvorku i, j, k, l provjeriti da li se slažu. Ovo se lako provjerava upoređivanjem dvorazmjera tačaka z_i, z_j, z_k, z_l u momentima $t = 0$ i $t = T$. Ako se dvorazmjera čuva, tada se i, j, k, l slažu. Međutim, ovdje nam je potrebna fleksibilnost jer se dvorazmjera skoro nikada savršeno ne čuva u kompleksnoj mreži. Zbog toga, dozvoljavamo malu grešku, pretpostavljajući da se oscilatori slažu ako se dvorazmjera približno čuva do $\varepsilon = 10^{-2}$.



Slika 3.10: Srednja polja u mreži koja sadrži dvije perfektно koherentne zajednice s jačinom veze unutar zajednica $K = 0.675$ i između zajednica $\nu = 0.325$ u momentima $T = 50, 200, 250$.

5. Pretpostavimo da se oscilatori i, j, k, l (približno) slažu. Tada, koristeći dvorazmjernu, tražimo sve oscilatore koji se (približno) slažu s trojkom i, j, k . Označimo s $m \leq N$ ukupan broj oscilatora koji se slažu s i, j, k (računajući i njih).
6. Za četvorku i, j, k, l , odrediti njihovu Möbiusovu transformaciju \mathcal{M} (s nekom malom greškom). Težina od \mathcal{M} je $\frac{m}{4N}$.
7. Zapisati \mathcal{M} u obliku (1.9) kako bismo pronašli odgovarajuće α .
8. Prikazati α u \mathbb{D} s odgovarajućom težinom.

Mala greška se tolerira u koraku 4, i prema tome i u svim narednim koracima. Međutim, pošto je naš metod u suštini statistički, ova aproksimacija ne utiče značajno na rezultate simulacije.

Srednja polja i h-koherentnost zavise i o topologiji mreže i o početnoj raspodjeli faza oscilatora. U ovom paragrafu pretpostavljamo da je raspodjela početnih faza uniformna kako bi se fokusirali samo na topologiju. Međutim, postoje i druge mogućnosti. Mogu se uporediti srednja polja u jednoj mreži za različite raspodjele početnih faza (na primjer, uzimanjem uniformne i von Misesove početne raspodjele).

U svim simulacijama se koristi isti skup početnih faza. Ovo je pogodno kada se upoređuju dvije mreže kako bi se izbjegla dvosmislenost sa slučajnom srednjom fazom $\mu(t)$. Inače, kada razmatramo dvije mreže, treba uporediti dva skupa tačaka po modulu grupe rotacija u ravni $SO(2)$.

Prikazujemo rezultate simulacija za neke Erdős-Renyi (ER) i Watts-Strogatz (WS) grafove (vidjeti [12, 102]). Na slikama 3.6 i 3.7, evolucija

WS graf s $k = 50$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1$
H-koherentnost	0.943087	0.959091	0.967391	0.974499	0.974103
WS graf s $k = 250$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1$
H-koherentnost	0.253563	0.27055	0.723713	0.798361	0.801395
WS graf s $k = 450$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1$
H-koherentnost	0.473923	0.480417	0.60308	0.638407	0.685943

Tabela 3.1: H-koherentnost Watts-Strogatz grafova (jačina veze je $K = 7$ i $T = 3$).

srednjih polja u ER grafovima s vjerovatnoćom povezivanja $d = 0.1$ i $d = 0.9$ su ilustrovani prikazivanjem slika u različitim momentima. Srednja polja u različitim ER i WS grafovima u momentu $T = 5$ su prikazana na slikama 3.8 i 3.9. Jačina veze na grani je $K = 2$ u svim simulacijama.

Prosječno srednje polje (baricentar $B(t)$) je predstavljen crnom zvijezdom na svim slikama.

Uglavnom, slučajne mreže su koherentnije nego regularne. WS mreže postaju koherentnije kako se povećava vjerovatnoća uključivanja β , od minimalne koherentnosti s $\beta = 0$ (perfektno regularna mreža), do maksimalne koherentnosti s $\beta \rightarrow 1$ (dobija se perfektna slučajna mreža, tj. ER graf), vidjeti tabelu 3.1.

Na slici 3.10 je prikazana evolucija srednjih polja u mreži s dvije perfektne zajednice (globalna veza, s jačinom veze unutar zajednice $K = 0.675$, koja je jača od veze između zajednica $\nu = 0.325$). Ovaj model s faznim pomakom $\gamma = \frac{\pi}{2} - 0.1$ u vezi je najjednostavnija mreža kod koje dolazi do *chimera* stanja, vidjeti [1]. Kao što je očekivano, slika 3.10 prikazuje prisutnost dva dominantna srednja polja, stvorena unutar dvije zajednice. Kada se pojavi *chimera* stanje, ova dva polja se razilaze, jedan se kreće prema jediničnoj kružnici S^1 a drugi izvodi (kvazi)periodičnu evoluciju prema unutrašnjosti diska \mathbb{D} . Ovaj primjer pokazuje da srednja polja mogu biti vrlo osjetljiva na male fluktuacije u početnim uslovima.

3.4 Detekcija zajednica u kompleksnim mrežama

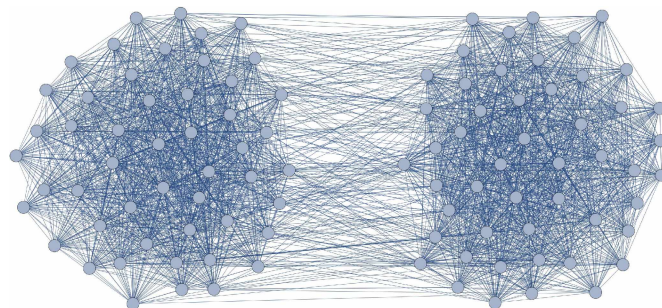
Arenas i ostali [7] su predložili algoritam detekcije zajednica koji se oslanja na posmatranju procesa postepene sinhronizacije u mreži povezanih oscilatora i na taj način se otkriva topologija mreže. Shodno tome, može se očekivati da oscilatori koji pripadaju istoj zajednici sinhronizuju svoje oscilacije prije nego što počne sinhronizacija u cijeloj mreži. Ovo je osnovna ideja koja stoji iza ove metode, jer posmatranje procesa postepene sinhronizacije omogućava razdvajanje gusto povezanih zajednica u mreži. Napomenimo da je ovo samo gruba ideja i da su Arenas i ostali uveli matematičke instrumente za proučavanje ovog procesa.

U protekloj deceniji su predložene različite modifikacije i ekstenzije gore pomenute metode. U ovom paragrafu predlažemo novi metod za istraživanje kompleksnih mreža, koji se zasniva na modelu koji je proučavan u [7]. Razlika je u tome što se naš metod zasniva na otkrivanju kolektivnog ponašanja čvorova u kompleksnim mrežama. Ovaj pristup je inspirisan rezultatom [63] za globalno povezanu populaciju oscilatora. Ovaj rezultat nam omogućava da koristimo klasične koncepte projektivne geometrije i kompleksne analize. U narednom potparagrafu detaljno objašnjavamo primjenu na dva tipična zadatka vezana za kompleksne mreže: detekcija zajednica i identifikacija utjecajnih čvorova. U potparagrafu 3.4.2 ukratko ilustrujemo metodu prikazivanjem rezultata za neke slučajne mreže.

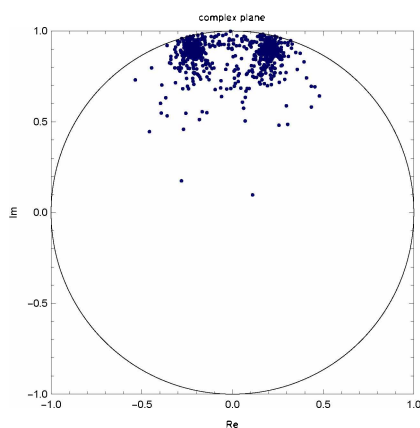
3.4.1 Algoritam

Naš algoritam se zasniva na definicijama 3.1 i 3.2. Može se grubo objasniti u sljedećim koracima:

1. Pretpostavimo da je data mreža s N čvorova (oscilatora). Slučajno izabрати četiri oscilatora i, j, k, l iz populacije $1, \dots, N$.
2. Provjeriti da li se i, j, k, l (približno) slažu. Ako se ne slažu, vratiti se na korak 1.
3. Ako se i, j, k, l slažu, odrediti odgovarajuću Möbiusovu transformaciju, tj. odrediti parametre ψ i α iz (1.9).
4. Parametar α je predstavljen tačkom u jediničnom disku.
5. Ponoviti korake 1-4 dok se ne pronađe M tačaka u jediničnom disku.



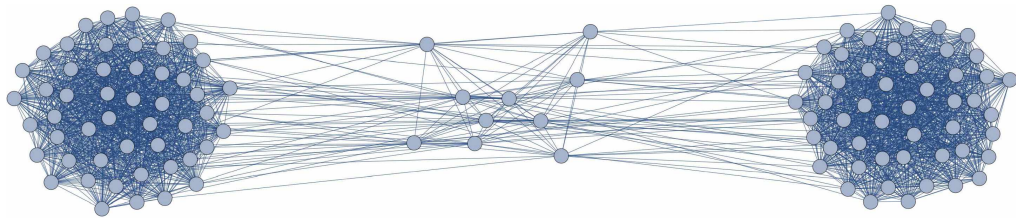
Slika 3.11: Slučajni graf s dvije zajednice.



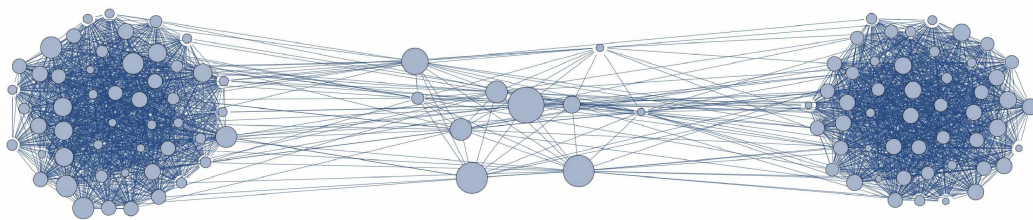
Slika 3.12: Tačke u jediničnom disku su dobijene primjenom našeg algoritma na slučajni graf prikazan na slici 3.11. Svaka tačka odgovara četvorki čvorova. Dva klastera tačaka koja odgovaraju dvjema zajednicama su jasno vidljiva.

6. Dobiće se "oblak" tačaka u jediničnom disku. Korištenjem nekih od postojećih algoritama podijeliti ovaj "oblak" u klasterne.
7. Svaka tačka odgovara četvorki čvorova (oscilatora). Odrediti koji čvorovi se dominantno pojavljuju u kojem klasteru. U cjelini, to daje klasterizaciju mreže.

Za identifikaciju važnih (utjecajnih) čvorova u mreži koristit ćemo koncept stepena korenspondencije (vidjeti definiciju 3.3). Napomenimo da je koncept stepena korenspondencije statistički i može se približno izračunati pomoću Monte Carlo metode. Iz definicije 3.3 je jasno da je prosječni stepen korenspondencije u mreži jednak 1. Doista, moglo bi se očekivati da utjecajni



Slika 3.13: Slučajni graf s tri zajednice. Centralna zajednica je manja i posreduje između preostale dvije.



Slika 3.14: Čvorovi u mreži s tri zajednice su predstavljeni krugovima. Površina svakog kruga je inverzno proporcionalna stepenu korenspodencije čvora. Vidljivo je da čvorovi iz centralne zajednice imaju manji stepen korenspodencije.

čvorovi ne sudjeluju u kolektivnom ponašanju i stoga imaju niži stepen korenspodencije nego prosjek u mreži.

Propozicija 3.3. *U tipičnim mrežama utjecajni čvorovi imaju znatno niži stepen korenspodencije od prosjeka u mreži.*

S druge strane, marginalni čvorovi imaju istu osobinu, što znači da čvorovi s malim stepenom korenspodencije nisu nužno utjecajni, to zahtjeva dodatnu verifikaciju. To će biti ilustrovano u sljedećem potparagrafu.

3.4.2 Primjeri

Zbog kratkoće u ovom potparagrafu razmatramo samo dva ilustrativna primjera slučajnih mreža. Ovi primjeri su odabrani tako da demonstriraju upotrebu naše metode na dva klasična zadatka u proučavanju kompleksnih mreža: detekcija zajednica i identifikovanje utjecajnih (važnih, vitalnih) čvorova u mreži.

Kao prvi primjer, razmotrimo slučajnu mrežu koja se sastoji od dvije zajednice. Svaka zajednica je Erdős-Renyi graf gdje je svaki par čvorova po-

	1	2	3	4	5	
A	1.4825	1.2707	0.9177	1.4119	1.1295	
B	1.5039	0.5013	0.2507	0.7519	0.2507	
C	1.1295	1.0589	1.553	0.9883	1.0589	
	6	7	8	9	10	Mean
A	0.7765	1.1295	1.4119	1.3413	1.0589	1.193
B	1.2533	1.0027	1.5039	0	0.7519	0.777
C	1.2001	1.3413	1.1295	1.2001	1.411	1.2071

Tabela 3.2: Stepen korenspodencije slučajno izabranih čvorova u mreži koja se sastoji od tri zajednice. Jasno je da čvorovi koji pripadaju centralnoj zajednici (zajednica B) imaju manji stepen korenspodencije.

vezan s vjerovatnoćom 0.9, dok čvorovi koji pripadaju različitim zajednicama povezani su s vjerovatnoćom od samo 0.1, vidjeti sliku 3.11.

Na slici 3.12 prikazujemo tačke koje odgovaraju Möbiusovim transformacijama koje se određuju korištenjem koraka 1-5 algoritma objašnjenog u prethodnom potparagrafu. Prisustvo dvije zajednice je jasno vidljivo. Napomenimo da svaka tačka odgovara četvorki čvorova. Za preostale korake 6 i 7 je dovoljno koristiti jedan od poznatih algoritama.

Također razmatramo još jedan primjer koji ilustruje naš metod identifikacije uticajnih čvorova. Razmotrimo mrežu koja se sastoji od tri zajednice, vidjeti sliku 3.13. U svakoj zajednici čvorovi su gusto povezani s vjerovatnoćom 0.9. Međutim, čvorovi koji pripadaju zajednicama A i C su direktno povezani samo s čvorovima iz srednje zajednice B s vjerovatnoćom 0.1. Pored toga, zajednice A i C sadrže po 250 čvorova i značajno su veće od B , koja sadrži samo 50 čvorova. Jasno je da se može reći da su čvorovi koji pripadaju zajednici B utjecajni u mreži jer su u suštini mala grupa *medijatora* u mreži.

U tabeli 3.2 su navedeni stepeni korenspodencije deset slučajno izabranih oscilatora iz svake zajednice. Jasno je da čvorovi iz B imaju značajno niži stepen korenspodencije. To je prikazano na slici 3.14, gdje su čvorovi prikazani krugovima. Površina krugova je inverzno proporcionalna stepenima korenspodencije odgovarajućih čvorova. Drugim riječima, čvorovi s nižim stepenom korenspodencije su predstavljeni većim krugovima.

Glava 4

Ekstenzija modela Kuramoto na sferu S^3 i neke primjene

4.1 Uvod

U prvoj glavi smo vidjeli da se MMS princip oslanja na geometrijsko obrazloženje, posebno na osobinama Lie grupe jedinične kružnice S^1 i grupe $G_{\mathbb{C}}$ Möbiusovih transformacija koje djeluju na njemu [63]. Ovo zapažanje je glavni motiv da se analogna analiza može izvesti i na nekim višedimenzionim Lie grupama (bar na sferi S^3) s intrigantnim interpretacijama.

Ispostavilo se da je australijski fizičar Maks Lohe već 2009. godine uveo takav model u radovima [57, 58] i u njima diskutirao mnoga njegova svojstva kvantne sinhronizacije. Zatim je slijedio niz radova [21, 23, 24, 38] koji uopštavaju ovaj model i raspravljaju o njegovim dinamičkim i stacionarnim svojstvima. Pregled sinhronizacijskih modela, upoređivanje i kontrast klasične i kvantne sinhronizacije se može naći u ovom radu [36].

Lohe je razmatrao ekstenziju klasičnog modela Kuramoto (1.1) na grupu unitarnih matrica $U(n)$:

$$i\dot{U}_j U_j^* = H_j - \frac{iK}{2N} \sum_{i=1}^N (U_j U_i^* - U_i U_j^*), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Ovo je sistem matričnih ODJ za kompleksne $n \times n$ matrice U_j , te H_j su zadane Hermiteove matrice. Pojam U_j^* označava konjugiranu matricu matrice U_j . Sistem (4.1) se može smatrati kao sistem od n^2 realnih ODJ. Napomenimo da (4.1) čuva $U(n)$, tj. ako početni uslovi zadovoljavaju $U_j(0) \in U(n)$, tada imamo da $U_j(t) \in U(n)$ za svako t .

Prateći terminologiju koju je uveo Lohe, pozivat ćemo se na (4.1) za $n > 1$ kao *neabelov model Kuramoto*. Alternativno, istraživači ga također

nazivaju *model Lohe*. Model opisuje kolektivno kretanje međusobno povezanih uopštenih oscilatora, čija stanja su zadana unitarnim matricama $U_j(t)$. Ovi uopšteni oscilatori se nazivaju kao *Kuramoto-Lohe oscilatori*. U odsustvu veze ($K = 0$), ovi oscilatori zadovoljavaju jednostavne jednačine:

$$\dot{U}_j = -iH_j U_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Matrice iH_j pripadaju Lie algebri $\mathfrak{su}(n)$, i mi ćemo ih smatrati kao *svojstvene uopštene frekvencije* Kuramoto-Lohe oscilatora.

Za jednodimenzioni slučaj kada je $n = 1$, (4.1) definiše kretanje na $U(1)$, što je upravo Abelov model Kuramoto (1.1):

$$U_j := e^{-i\varphi_j}, \quad H_j := \omega_j \in \mathbb{R}.$$

Direktnim proračunom imamo:

$$i\dot{U}_j U_j^* = \dot{\varphi}_j, \quad U_j U_i^* - U_i U_j^* = e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} - e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} = 2i \sin(\varphi_i - \varphi_j).$$

Tada sistem (4.1) postaje klasični model Kuramoto (1.1).

Prelazak na sinhronizaciju je vrlo sličan u Abelovim i neabelovim modelima, tj. postoji kritična jačina snage K_c (koja zavisi od disperzije svojstvenih frekvencija), tako da se efekti sinhronizacije odvijaju za $K > K_c$, vidjeti [57, 58].

U ovoj glavi se fokusiramo na konkretni slučaj kada je $n = 2$ koji odgovara kretanjima na $SU(2)$ s grupnom mnogostrukošću S^3 . Svojstvene uopštene frekvencije $iH_j \in \mathfrak{su}(2)$ su antihermiteove matrice traga nula.

Niskodimenzionu dinamiku modela (4.1) razmatramo u narednom paragrafu na sferi S^3 . U paragrafu 4.3, neabelov model Kuramoto (4.1) primjenjujemo za neke važne zadatke u mašinskom učenju kao što su klasterizacija podataka u \mathbb{R}^k i klasterizacija multivarijantnih funkcionalnih podataka.

4.2 Globalne promjenljive u idealnom neabelovom modelu Kuramoto na S^3

Trenutno postoje dva uzbudljiva istraživanja. Proučavanje o niskodimenzionoj dinamici u Abelovom modelu Kuramoto koje je započeto 1994. godine, a 2009. godine su izloženi odnosi s hiperboličkom geometrijom i kompleksnom analizom. Druga linija istraživanja, inicirana od strane Lohea 2009. godine, se provodi s neabelovim modelima Kuramoto na unitarnim grupama $U(n)$ i razrađuje nove paradigme kvantne sinhronizacije [5, 58]. U ovoj glavi se razrađuje nastavak i kombinacija ova dva istraživačka smjera.

U narednom potparagrafu predstavljamo neabelov model Kuramoto, koji je opšta verzija modela Lohe na S^3 . Jedna tehnička novina je ta da su promjenljive u jednačinama zapisane u kvaternionima.

U potparagrafu 4.2.2 nudimo teorijski opis niskodimenzionalne dinamike u modelu kao kretanje na orbiti grupe (kvaternionskih) Möbiusovih transformacija. Parametri Möbiusovih transformacija su globalne promjenljive koje određuju evoluciju čitavog sistema. Dinamiku ovih globalnih promjenljivih daje uopšteni Watanabe-Strogatz sistem. Osim toga, ovo obrazloženje omogućava identifikaciju simetrija i konstanti kretanja. U potparagrafu 4.2.3 prelazimo na Hopfove (ugaone) koordinate na S^3 i identifikujemo poseban oblik funkcije veze koja pretvara sistem u osnovni neabelov model Kuramoto. U potparagrafu 4.2.4 uvodimo dodatnu pretpostavku da je početna raspodjela oscilatora uniformna na S^3 . Slično kao kod klasičnog modela Kuramoto, ova pretpostavka dovodi do daljnje redukcije dimenzije i jednostavne ODJ-e koja opisuje evoluciju parametra poretka. Na kraju, u potparagrafu 4.2.5 ističemo neke primjene modela u matematici i inženjerstvu.

4.2.1 Model povezanih uopštenih oscilatora na S^3

Postoje različiti načini za predstavljanje koordinata na S^3 . Za naše potrebe algebra kvaterniona je vjerovatno najprikladnija. Slijedeći analogiju s (1.7), razmotrimo jedan uopšteni oscilator čije se kretanje opisuje kvaternionskom običnom diferencijalnom jednačinom (KODJ):

$$\dot{q} = wq + qu, \quad (4.3)$$

gdje je $q(t)$ jedinični kvaternion, a w i u su "čisti" kvaternioni (to znači da je $Re(w) = Re(u) = 0$). Skup jediničnih kvaterniona identifikovan je s Lie grupom S^3 s odgovarajućom Lie algebrom koja se sastoji od čistih kvaterniona. Dakle, ako je početna tačka $q(0)$ za (4.3) jedinični kvaternion, onda će rješenje $q(t)$ biti jedinični kvaternion za svako t . Drugim riječima, kretanje (4.3) je ograničeno na S^3 . Kažemo da je čestica opisana s (4.3) Kuramoto-Lohe (KL) oscilator sa svojstvenim frekvencijama w i u .

Dalje, zasniva se ansambl koji se sastoji od N međusobno povezanih identičnih KL oscilatora koji zadovoljavaju kvaternionsku Riccatijevu diferencijalnu jednačinu:

$$\dot{q}_j = q_j f q_j + w q_j + q_j u - \bar{f}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Ovdje, $f = f(t, q_1, \dots, q_N)$ je kvaternioniska funkcija, koja predstavlja vezu između KL oscilatora. Pojam \bar{f} u (4.4) označava konjugirani kvaternion, tj. ako je $f = f_1 + i f_2 + j f_3 + k f_4$, tada je $\bar{f} = f_1 - i f_2 - j f_3 - k f_4$.

Sistem (4.4) je neabelov model Kuramoto na S^3 (ili model Lohe za $n = 2$). Kao što ćemo vidjeti u potparagrafu 4.2.3, ono je uopštenje od (4.1) na isti način kao što je (1.2) uopštenje od (1.1). U ovom paragrafu glavni fokus je na niskodimenzionoj dinamici i teorijskim osobinama grupe za (4.4). Naglasimo da pretpostavljamo visoko idealiziranu postavku s ansamblom koji se sastoji od identičnih (w i u ne zavise o j) i globalno povezanih (f ne zavisi od j) KL oscilatora.

Može se potvrditi da $q_j(0)\bar{q}_j(0) = 1$ implicira $\frac{d}{dt}(q_j(t)\bar{q}_j(t)) = 0$, što znači da (4.4) čuva S^3 .

U zaključku, spomenimo da su kvaternionske Riccatijeve diferencijalne jednačine oblika (4.4) proučavane u nekoliko radova [28, 104, 108].

4.2.2 Niskodimenziona dinamika globalno povezanih uopštenih oscilatora na S^3

Označimo s \mathbb{H} algebru kvaterniona. Skup Möbiusovih (linearnih frakcionih) transformacija koje djeluju na četverodimenzionoj sferi $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ je grupa $GL(2, \mathbb{H})$. Tada se Lie algebra od $GL(2, \mathbb{H})$ sastoji od matrica koje generišu vektorska polja oblika $qfq + bq + qc + g$, gdje su $f, b, c, g \in \mathbb{H}$ proizvoljni kvaternioni.

Razmotrimo podgrupu $G_{\mathbb{H}} \subset GL(2, \mathbb{H})$ svih transformacija koje čuvaju jediničnu sferu S^3 . Ova podgrupa ima Lie algebru koja se sastoji od matrica koje generišu vektorska polja s $g = -\bar{f}$ i $Re(b) = Re(c) = 0$ [33]. Stoga, dinamika KRDJ (4.4) se može opisati u smislu dejstva Möbiusovih transformacija koje čuvaju S^3 .

Da bismo to detaljnije istražili, razmotrimo opštu Möbiusovu transformaciju koja čuva S^3 :

$$\mathcal{M}(q) = p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)r,$$

za neke jedinične kvaternione p i r , i kvaternion $a \in \mathbb{H}$, $|a| < 1$. Inverzna transformacija daje malo drugačiju parametrizaciju:

$$\mathcal{G}(q) = (\bar{p}q\bar{r} + a)(1 + \bar{a}\bar{p}q\bar{r})^{-1}. \quad (4.5)$$

Teorema 4.1. *Razmotrimo ansambl od N povezanih čestica čija je dinamika određena s (4.4) s početnim uslovima $q_1(0), \dots, q_N(0)$. Tada, $q_j(t) = \mathcal{G}_t(q_j(0))$ za neku jednoparametarsku familiju transformacija \mathcal{G}_t koje pripadaju $G_{\mathbb{H}}$.*

Štaviše, parametri $a(t), p(t)$ i $r(t)$ od \mathcal{G}_t zadovoljavaju sljedeći sistem KODJ-a:

$$\begin{cases} \dot{a} = afa + wa + au - \bar{f}; \\ \dot{p} = -p(w + af - \bar{a}\bar{f}); \\ \dot{r} = -r(u - af + \bar{a}\bar{f}). \end{cases} \quad (4.6)$$

Dokaz. Ovdje ćemo kratko dati račun koji se koristio u izvođenju sistema (4.6). Računanje je prilično glomazno zbog nedostatka komutativnosti u algebri kvarterniona.

Fiksirajmo baznu tačku $k \in S^3$, i neka je $q = \mathcal{G}(k)$.

Iz jednačine (4.5), dobivamo:

$$q(1 + \bar{a}\bar{p}k\bar{r}) = \bar{p}k\bar{r} + a,$$

a zatim direktno deriviramo gore navedenu jednačinu, držeći k konstantnom:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [\dot{\bar{p}}k\bar{r} + \bar{p}k\dot{\bar{r}} + \dot{a} - q(\dot{\bar{a}}\bar{p}k\bar{r} + \bar{a}\dot{\bar{p}}k\bar{r} + \bar{a}\bar{p}k\dot{\bar{r}})] \\ &\times (1 + \bar{a}\bar{p}k\bar{r})^{-1} \\ &= (\dot{\bar{p}}k\bar{r} + \bar{p}k\dot{\bar{r}} + \dot{a} - q\dot{\bar{a}}\bar{p}k\bar{r} - q\bar{a}\dot{\bar{p}}k\bar{r} - q\bar{a}\bar{p}k\dot{\bar{r}}) \\ &\times (\bar{p}k\bar{r} + a)^{-1} q. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pretvaranje jednačine za $q = \mathcal{G}(k)$ daje:

$$(\bar{p}k\bar{r} + a)^{-1} = (1 - \|a\|^2)^{-1} (\bar{q} - \bar{a}).$$

Zamjenjujući ovo u (4.7) dobivamo:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (1 - \|a\|^2)^{-1} [(1 - q\bar{a})\dot{\bar{p}}p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a) \\ &+ (q - a)r\dot{\bar{r}} + \dot{a} - q\dot{\bar{a}}(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)] (\bar{q} - \bar{a})q \\ &= (1 - \|a\|^2)^{-1} \left[(1 - q\bar{a})\dot{\bar{p}}p \frac{1 - a\bar{q}}{\|1 - q\bar{a}\|^2} \|q - a\|^2 q \right. \\ &+ (q - a)r\dot{\bar{r}}(1 - \bar{a}q) + \dot{a}(1 - \bar{a}q) \\ &\left. - q\dot{\bar{a}} \frac{1 - \bar{a}q}{\|1 - q\bar{a}\|^2} \|q - a\|^2 q \right]. \end{aligned}$$

Pošto je $\|1 - q\bar{a}\|^2 = \|q\|^2 \cdot \|\bar{q} - \bar{a}\|^2 = \|q - a\|^2$, imamo:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (1 - \|a\|^2)^{-1} [\dot{\bar{p}}pq - q\bar{a}\dot{\bar{p}}pq - \dot{\bar{p}}pa + q\bar{a}\dot{\bar{p}}pa + qr\dot{\bar{r}} - \\ &- ar\dot{\bar{r}} - qr\dot{\bar{r}}\bar{a}q + ar\dot{\bar{r}}\bar{a}q + \dot{a} - \dot{a}\bar{a}q - q\dot{\bar{a}}q + q\dot{\bar{a}}a]. \end{aligned}$$

Upoređujući ovo s (4.4), dobivamo sljedeći sistem:

$$\begin{cases} (1 - \|a\|^2)^{-1} (-\bar{a}\dot{\bar{p}}p - r\dot{\bar{r}}\bar{a} - \dot{a}) = f; \\ (1 - \|a\|^2)^{-1} (\dot{\bar{p}}p + ar\dot{\bar{r}}\bar{a} - \dot{a}\bar{a}) = \omega; \\ (1 - \|a\|^2)^{-1} (\bar{a}\dot{\bar{p}}pa + r\dot{\bar{r}} + \dot{a}\bar{a}) = u; \\ (1 - \|a\|^2)^{-1} (-\dot{\bar{p}}pa - ar\dot{\bar{r}} + \dot{a}) = -\bar{f}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Sistem (4.8) se može algebarski preurediti da se dobije sistem KODJ-a (4.6). \square

Sistem (4.6) je analog (ili ekstenzija) Watanabe-Strogatz sistema (1.10).

Gornji teorem uspostavlja niskodimenziono ponašanje (4.4), tj. dinamika je ograničena na $B^4 \times S^3 \times S^3$, što je podmnogostrukost realne dimenzije 10. Ovdje, B^4 označava jediničnu kuglu u četverodimenzionom prostoru.

Napomena 4.1. Möbiusova transformacija \mathcal{G} je parametrizirana na takav način da je $\mathcal{G}(0) = a$ (vidjeti formulu (4.5)). Dalje, primjetimo da je KODJ za $a(t)$ u (4.6) ista kao jednačine (4.4) za q_j . Razmatrajući ekstenziju \mathcal{G}_t sa S^3 na jediničnu kuglu B^4 , jasno vidimo da je $a(t)$ slika nule pod dejstvom \mathcal{G}_t , tj. $a(t) = \mathcal{G}_t(0)$.

Sada nije teško pogoditi šta bi bile konstante kretanja od (4.4). U našem slučaju, kvaternionske dvorazmjere:

$$Q(q_i, q_j, q_k, q_l) = (q_j - q_i)^{-1}(q_l - q_i)(q_l - q_k)^{-1}(q_j - q_k), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq N \quad (4.9)$$

su konstante kretanja. Kvaternionska Möbiusova transformacija nije jedinstveno određena njenim dejstvom na četiri tačke, jer postoje i neke dodatne invarijante (zajedno s dvorazmjerom) [35].

4.2.3 Dinamika u Hopfovima koordinatama i neke specijalne funkcije veze

U ovom potparagrafu ćemo koristiti Cayley-Dicksonov oblik koji omogućava predstavljanje kvaterniona parom kompleksnih brojeva, tj. $q = q_1 + q_2j$, $f = f_1 + f_2j$, gdje su q_1, q_2, f_1, f_2 kompleksni brojevi. Što se tiče čistih kvaterniona, označavat ćemo ih s $w = iw_a + w_2j$, $u = iu_a + u_2j$, gdje je $w_a, u_a \in \mathbb{R}$, a w_2, u_2 su kompleksni brojevi. Jedinični kvaternion q se također može napisati u ugaonim promjenljivim:

$$q = q_1 + q_2j, \quad \text{gdje je } q_1 = e^{i\varphi} \cos \theta, \quad q_2 = e^{i\psi} \sin \theta,$$

s $\varphi, \psi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zamjenom u (4.4) dobivamo sljedeći sistem ODJ za $j = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j = w_a + u_a + \frac{i}{2}(\bar{u}_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} - \bar{w}_2 \tan(\theta_j) e^{i(\varphi_j + \psi_j)} - \\ u_2 \tan(\theta_j) e^{i(\varphi_j - \psi_j)} + w_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) + \frac{i}{\cos(\theta_j)}(\bar{f}_1 e^{-i\varphi_j} - f_1 e^{i\varphi_j}); \\ \dot{\psi}_j = w_a - u_a + \frac{i}{2}(\bar{u}_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} + \bar{w}_2 \cot(\theta_j) e^{i(\varphi_j + \psi_j)} - \\ u_2 \cot(\theta_j) e^{i(\varphi_j - \psi_j)} - w_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) + \frac{i}{\sin(\theta_j)}(\bar{f}_2 e^{i\psi_j} - f_2 e^{-i\psi_j}); \\ \dot{\theta}_j = \frac{1}{2}(\bar{u}_2 e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} + \bar{w}_2 e^{i(\varphi_j + \psi_j)} + u_2 e^{i(\varphi_j - \psi_j)} + w_2 e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) + \\ \sin(\theta_j)(\bar{f}_1 e^{i\varphi_j} + \bar{f}_2 e^{-i\varphi_j} + \cos(\theta_j)(f_2 e^{-i\psi_j} + \bar{f}_2 e^{i\psi_j})). \end{cases} \quad (4.10)$$

Ova zamjena vrijedi za $\theta \neq 0$ i $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Uprkos naizgled komplikovanim izrazima, ODJ-e za uglove pružaju neki osjećaj o dinamici. Prvo, primjetimo

da veza (izrazi koji sadrže f_1 ili f_2) ulazi u jednačine na prilično jednostavan način, slično klasičnom modelu Kuramoto (1.6). Drugo, ugao φ_j je povezan samo indirektno s uglom ψ_i za $i \neq j$, preko ugla θ_j . Zanimljivo je da je kvaternion veze $f = f_1 + f_2 j$ podjeljen tako što je kompleksan broj f_1 odgovoran za vezu ugla φ_j , dok je f_2 za vezu ugla ψ_j .

Ova zapažanja daju nagovještaj kako odabrati određeni oblik kvaternionске funkcije f zavisno o određenim ciljevima. Na primjer, postavimo da je:

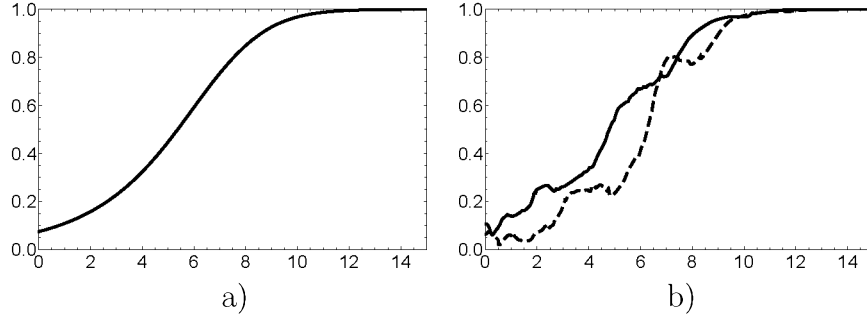
$$f = -\frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N \bar{q}_i = -\frac{K}{2} \langle \bar{q} \rangle, \quad (4.11)$$

gdje $\langle q \rangle = \frac{1}{N} \sum q_i \in B^4$ označava centroid (centar mase) tačaka $q_1, \dots, q_N \in S^3$. Ovim specifičnim izborom funkcije veze f , sistem (4.10) se zapisuje na sljedeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_j = w_a + u_a + \\ \frac{i}{2} (\bar{u}_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} - \bar{w}_2 \tan(\theta_j) e^{i(\varphi_j + \psi_j)} - \\ u_2 \tan(\theta_j) e^{i(\varphi_j - \psi_j)} + w_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) + \\ \frac{K}{N \cos(\theta_j)} \sum_{i=1}^N (\sin(\varphi_i - \varphi_j + \theta_i) + \sin(\varphi_i - \varphi_j - \theta_i)); \\ \\ \dot{\psi}_j = w_a - u_a + \\ \frac{i}{2} (\bar{u}_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} + \bar{w}_2 \cot(\theta_j) e^{i(\varphi_j + \psi_j)} - \\ u_2 \cot(\theta_j) e^{i(\varphi_j - \psi_j)} - w_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) + \\ \frac{K}{N \sin(\theta_j)} \sum_{i=1}^N (\cos(\psi_i - \psi_j - \theta_i) - \cos(\psi_i - \psi_j + \theta_i)); \\ \\ \dot{\theta}_j = \frac{1}{2} (\bar{u}_2 e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} + \\ \bar{w}_2 e^{i(\varphi_j + \psi_j)} + u_2 e^{i(\varphi_j - \psi_j)} + w_2 e^{-i(\varphi_j + \psi_j)}) - \\ \frac{K \sin(\theta_j)}{N} \sum_{i=1}^N (\cos(\varphi_i - \varphi_j - \theta_i) + \cos(\varphi_i - \varphi_j + \theta_i)) + \\ \frac{K \cos(\theta_j)}{N} \sum_{i=1}^N (\sin(\psi_i - \psi_j + \theta_i) - \sin(\psi_i - \psi_j - \theta_i)). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Veza je privlačna ako je $K > 0$, u ovom slučaju sistem evoluira prema sinhronizaciji za bilo koje početne uslove (naglasimo da pretpostavljamo da su identične uopštene frekvencije i globalna veza). Može se pokazati da je sinhronizacija (potpuno koherentno stanje) jedina asimptotski stabilna konfiguracija za $K > 0$ [90].

Situacija je suptilnija za slučaj odbojne veze, $K < 0$. Za skoro sve početne uslove sistem evoluira prema potpuno nekoherentnom stanju. Zapravo, si-



Slika 4.1: Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za sistem (4.4) s funkcijom veze (4.11). Simulacija se izvodi za $N = 100$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = 0.5$. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na S^3 .

stem konvergira prema potpuno nekoherentnom stanju kad god početna raspodjela ne sadrži *većinski klaster*, što znači da ne postoji $N/2$ oscilatora u istoj tački. S obzirom na početnu raspodjelu KL oscilatora, ovo potpuno nekoherentno stanje je jedinstveno (do rotacije), to je privlačna fiksna tačka na orbiti grupe $G_{\mathbb{H}}$. Chen i ostali su u radu [20] predstavili detaljan i rigorozan matematički opis fiksnih tačaka na orbitama grupe $G_{\mathbb{C}}$ za model Kuramoto na S^1 .

Da bi ilustrovali gore pomenutu diskusiju, uvedimo globalni realni parametar poretka sistema na standardni način:

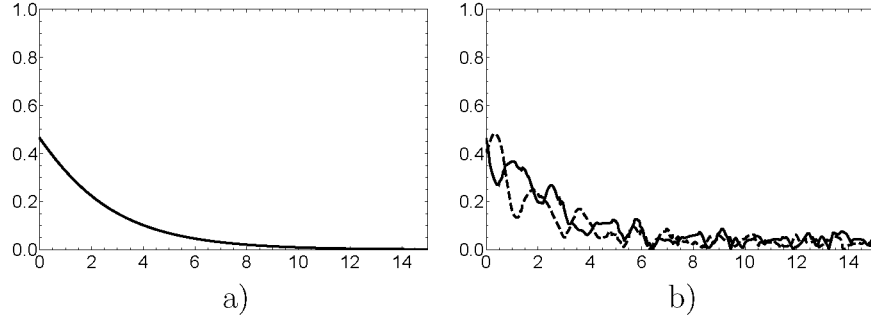
$$\rho = |\langle q \rangle|, \quad \text{gdje je} \quad \langle q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i.$$

Tada vrijednosti $\rho = 1$ i $\rho = 0$ globalnog parametra poretka odgovaraju koherentnom stanju (sinhronizacija) i potpuno nekoherentnom stanju respektivno.

Uz globalni parametar poretka u ovom modelu također ima smisla definisati ugaone parametre poretka ρ_φ i ρ_ψ na sljedeći način:

$$\rho_\varphi(t)e^{i\mu(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\varphi_i(t)}, \quad \rho_\psi(t)e^{i\nu(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\psi_i(t)}.$$

Slika 4.1 ilustrira evoluciju prema koherentnom stanju za $K = 0.5$, globalnog parametra poretka (a) i ugaonih parametara poretka (b), koji se postepeno povećavaju prema 1. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na S^3 .



Slika 4.2: Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.11). Simulacija se izvodi za $N = 100$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = -0.5$. Početni uslovi su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na S^3 sa smjerom srednje vrijednosti $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ i koncentracijskim parametrom $\kappa = 2$.

Evolucija prema potpuno nekoherentnom stanju za odbojnu vezu $K = -0.5$ globalnog parametra poretka (a) i ugaonih parametara poretka (b) koji teže nuli, je prikazana na slici 4.2. Početni uslovi u ovoj simulaciji su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na S^3 sa smjerom srednje vrijednosti $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ i koncentracijskim parametrom $\kappa = 2$.

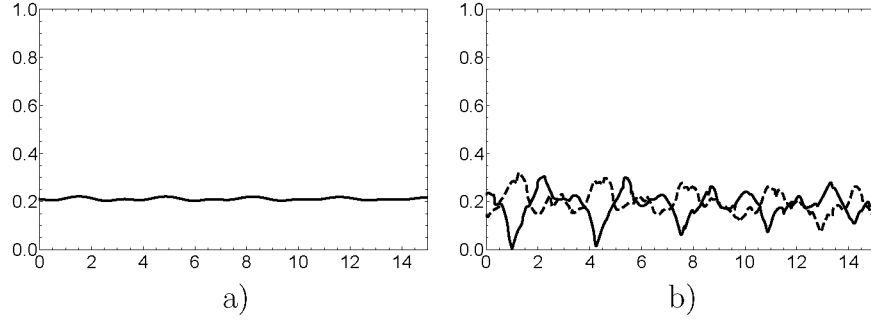
Napomena 4.2. Naglasimo da je funkcija veze oblika (4.11) je samo jedna mogućnost za model (4.4). U mnogim situacijama bi bilo interesantno razmotriti neke druge funkcije veza. Na primjer, mogu se definisati fazni pomaci uz uglove φ i ψ na sljedeći način:

$$f(q_1, \dots, q_N) = f_1(q_1, \dots, q_N) + f_2(q_1, \dots, q_N)j, \quad (4.13)$$

gdje su kompleksne funkcije f_1 i f_2 definisane s:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N e^{-i(\varphi_i - \alpha)} \cos \theta_i, \\ f_2 &= \frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N e^{i(\psi_i - \beta)} \sin \theta_i. \end{aligned}$$

Slika 4.3 ilustrira evoluciju globalnog (a) i ugaonih (b) parametara poretka za fazne pomake $\alpha = \beta = \pi/2$. Može se vidjeti da globalni parametar poretka ostaje gotovo konstantan oko 0.2, dok ugaoni parametri poretka vrše nepravilne oscilacije približno u anti-fazi jedan prema drugom. Početni uslovi za sliku 4.3 su birani iz uniformne raspodjele.



Slika 4.3: Evolucija globalnog parametra poretka ρ (a) i ugaonih parametara poretka ρ_φ (puna linija) i ρ_ψ (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.13). Simulacija se izvodi za $N = 50$ KL oscilatora, s jačinom veze $K = 2$ i faznim pomacima $\alpha = \beta = \pi/2$. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na S^3 .

Napomena 4.3. Zamjenom (4.11) i postavljanjem da je $u = 0$ u (4.4) se dobija:

$$\dot{q}_j = -\frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N q_j \bar{q}_i q_j + w q_j + \frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N q_i \quad (4.14)$$

što je upravo osnovni neabelov model Kuramoto (4.1) na S^3 .

Da bi se ovo videlo, množi se (4.1) s $-i$ i s matricama U_j s desne strane. Napomenimo da su $-iH_j$ antihermiteove 2×2 matrice traga nula koje sadrže Lie algebru $\mathfrak{su}(2)$. Koristeći izomorfizam između Lie grupa, predstavljamo matrice $U_j \in SU(2)$ kao jedinične kvaternione i $-iH_j \in \mathfrak{su}(2)$ kao čiste kvaternione. Na taj način, model (4.1) se zapisuje kao (4.14).

4.2.4 Uniformna početna raspodjela daje 4D dinamiku

Kao i kod Abelovog modela Kuramoto (1.6), postoji poseban slučaj kada je dinamika (4.4) u potpunosti određena jednim kvaternionskim parametrom a u (4.5). U ovom slučaju jednačine za p i r u (4.6) odvajaju se iz jednačine za a i dinamika je ograničena na 4-dimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukosti.

Razmotrimo (4.4) u termodinamičkoj granici, $N \rightarrow \infty$, i pretpostavimo da je početna raspodjela KL oscilatora uniformna na S^3 . Tada se raspodjela razvija na podmnogostrukosti koja se sastoji od mjera koje se dobijaju kao Möbiusove transformacije uniformne Lebesgueove mjere na S^3 . Poznato je da Möbiusove transformacije uniformne mjere na S^3 daju harmonične mjere (ili, u vjerovatnosnom terminu, umotane Cauchyjeve raspodjele [51]) s funkcijom

gustoće:

$$\rho(y; a(t)) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1 - |a(t)|^2}{|y - a(t)|^2} \right)^3, \quad y \in S^3,$$

gdje je $a(\cdot) \in B^4$ parametar raspodjele.

Napomena 4.4. Za datu raspodjelu verovatnoće na S^3 , možemo se fokusirati na dvije važne tačke u B^4 : centroid (centar mase) $\langle q \rangle(t)$ i konformni baricenter [29] $a(t)$. Postoji posebna karakteristika slučaja kada je početna raspodjela uniformna, a to je da se samo u ovom slučaju ove dvije tačke poklapaju. Drugim riječima, samo u ovom slučaju centroid je slika nule pod dejstvom jednoparametarske familije \mathcal{G}_t Möbiusovih transformacija (vidjeti napomenu 4.1).

Razmotrimo osnovni neabelov model Kuramoto i pretpostavimo da je početna raspodjela uniformna na S^3 . Samo u ovom konkretnom slučaju, evolucija realnog parametra poretka $\rho(t) = |\langle q \rangle|$ je zadana jednostavnom (realnom) ODJ-om:

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{K}{2}(\rho - \rho^3).$$

4.2.5 Potencijalne primjene

Varijacije klasičnog modela Kuramoto su se našle u zanimljivim (a ponekad i neočekivanim) primjenama u različitim oblastima [2, 8, 83]. U ovom potparagrafu ističemo neke potencijalne primjene modela (4.4).

Počnimo s jednom čisto matematičkom primjenom. Pretpostavimo da je zadana vjerovatnosna mjera μ na S^3 . Pretpostavimo da μ ne sadrži atome s težinom $\geq 1/2$. Tada, konformni baricenter μ se može naći rješavanjem osnovnog neabelovog modela Kuramoto (4.12) sa $K < 0$ i s početnim uslovima koji su birani iz mjere μ .¹ Ovo dodatno omogućava izračunavanje Douady-Earlejeve ekstenzije [29] homeomorfizma $f : S^3 \rightarrow S^3$ u samopreslikavanju lopte B^4 .

Kako bismo nastavili s nekim inženjerskim primjenama, ističemo neke veze između neabelovog modela Kuramoto i algoritama iz teorije geometrijskog konsenzusa. Teorija geometrijskog konsenzusa je nedavno razvijena poddisciplina u širokom polju distribuiranog i kooperativnog upravljanja koja se bavi zadacima konsenzusa i koordinacije na određenim neeuklidskim (naročito homogenim) prostorima [89, 90].

Općenito, na matričnim Lie grupama $SO(n)$ i $SU(n)$ postoji značajna klasa zadataka konsenzusa s brojnim primjenama u robotici, svemirskoj navigaciji i upravljanju roja (engl. *swarm control*) [72, 87]. Algoritam konsenzu-

¹Ideja je objašnjena u radu [45] za slučaj u ravni.

sa se dobija primjenom metode gradijentnog spuska na zadatku minimizacije potencijalne funkcije. Ovaj sistem gradijentnog spuska je neabelov model Kuramoto model (4.1) s nultim uopštenim frekvencijama $H_j \equiv 0$.

Jedan poseban slučaj od posebne važnosti je konsenzus na Lie grupama S^3 i $SO(3)$. To je zbog činjenice da kvaternioni pružaju prikladan način za rad s rotacijama u 3D prostoru, u stvari, to je bila izvorna motivacija Hamiltonu da uvede tu algebru 1843. godine. Predstavljanje 3D rotacija s jediničnim kvaternionima se temelji na dvostrukoj pokrivenosti preslikavanja iz S^3 u $SO(3)$. Algoritmi konsenzusa i koordinacije na S^3 i $SO(3)$ rješavaju neke važne zadatke u svemirskoj navigaciji kao što su sinhronizacija držanja i formacije letenja. Sistem (4.4) s funkcijom veze (4.11) daje algoritam za konsenzus (za $K > 0$) i balansiranje (za $K < 0$). Potpuno nekoherentna stanja se tipično nazivaju kao *balansirana stanja* u teoriji distribuiranog upravljanja. Za neke druge koordinacione zadatke se mogu razmatrati različite funkcije veze f , jedan primjer je objašnjen u napomeni 4.2. Međutim, naglasimo da (4.4) s opštom funkcijom veze f , različitom od (4.11), ne pokazuje potencijalnu dinamiku, tj. nije sistem gradijentnog spuska za bilo koju funkciju cilja. U narednoj glavi razmatramo detaljnije ove zadatke.

Napomenimo da se kvaternionske Möbiusove transformacije koriste u dizajniranju konformnih deformacija mreža u 3D prostoru s primjenama u animaciji i grafici [99]. To znači da (4.4) pruža način izračunavanja i dinamičkog generiranja kontinuiranih konformnih deformacija 3D mreža.

U narednom paragrafu razmatramo primjenu modela (4.4) na klasterizaciji podataka u \mathbb{R}^n i klasterizaciji multivarijantnih funkcionalnih podataka.

4.3 Primjena neabelovog modela Kuramoto na klasterizaciji podataka

Postoji manje važan pristup klasteriranju, inspirisan samoorganizacijom u kompleksnim sistemima, naročito sinhronizacijom u modelu Kuramoto povezanih oscilatora [52]. Međutim, efikasno klasteriranje multivarijantnih podataka zahtijeva ekstenziju klasičnog modela Kuramoto na više dimenzije. Jedna takva metoda je predložena u [65] tako što su multivarijantni podaci unešeni u vektore prirodnih "frekvencija" u specifičnom dinamičkom sistemu na \mathbb{R}^m koji podsjeća na model Kuramoto. U radu [94] (vidjeti također [70]) frekvencije su uklonjene iz modela i multivarijantni podaci se uzimaju kao početni uslovi. Međutim, obje metode uključuju vezu susjeda i, općenito, zahtijevaju ponovno izračunavanje poparnih udaljenosti između vektora podataka u svakom koraku. Prema tome, može se smatrati da su ove metode

zasnovane na udaljenosti podataka.

Neabelovi modeli Kuramoto oblika (4.1) su najadekvatnije ekstenzije modela Kuramoto na više dimenzije. To omogućava mogućnost dizajniranja metode klasteriranja zasnovane na ovom modelu uz globalnu vezu, što dovodi do značajnog pojednostavljenja u implementaciji i smanjenja računske složenosti.

U ovom paragrafu pokazujemo da neabelovi modeli Kuramoto pružaju prirodni okvir za klasteriranje multivarijantnih podataka zasnovanih na sinhronizaciji. U ovom okruženju ne treba uzimati u obzir bližnje susjede i ponovo izračunavati poparne udaljenosti između oscilatora u svakom koraku. Umjesto toga, veza je globalna i konstantna, početni uslovi su slučajno izabrani i podaci se unose u matrice frekvencija KL oscilatora. Osnovna ideja je da će se KL oscilatori s bliskim svojstvenim frekvencijama prvo sinhronizovati i na taj način otkriti hijerarhijsku strukturu klastera u skupu podataka.

4.3.1 Algoritam

Naš metod se zasniva na neabelovim modelima Kuramoto. Ovakve modele je prvi put predstavio Lohe u radu [57]:

$$\dot{U}_j = H_j U_j + U_j G_j + \frac{K}{2N} \sum_{i=1}^N (U_j U_i^* U_j - U_i), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Ovdje su $U_j(t) \in U(n)$ unitarne matrice, koje predstavljaju stanja oscilatora. H_j i G_j pripadaju Lie algebri $\mathfrak{u}(n)$ koja se sastoji od $n \times n$ antihermiteovih matrica. Ove matrice se tumače kao svojstvene frekvencije oscilatora. Pojam U_i^* označava konjugirano transponiranu matricu matrice U_i . Na kraju, K je globalna jačina veze u sistemu.

Važno je da (4.15) definiše dinamiku na grupi $U(n)$, što znači da $U_j(0) \in U(n)$ za svako $j = 1, \dots, N$ implicira da $U_j(t) \in U(n)$ za svako $t > 0$. Nadalje, neka je \mathfrak{m} podalgebra od $\mathfrak{u}(n)$ i M odgovarajuća podgrupa od $U(n)$. Pretpostavimo da $U_j(0) \in M$ za svako $j = 1, \dots, N$, i da H_j i G_j pripadaju \mathfrak{m} . Zatim, dinamika od (4.15) se odvija na podgrupi $M \subset U(n)$, to je $U_j(t) \in M$ za svako $t > 0$.

Napomenimo da smo dodali dodatni član u neabelov model Kuramoto, a to je drugi član s desne strane u (4.15). Taj član je odsutan u originalnom modelu (4.1). Na taj način, svaki KL oscilator ima dvije matrice svojstvenih frekvencija H_j i G_j . Ovo blago uopštenje omogućava dvostruko veću dimenziju podataka.

U principu, u zavisnosti od dimenzije vektora podataka, može se koristiti (4.15) na $U(n)$ za proizvoljno n . Zbog jednostavnosti se fokusiramo na slučaj

kada je $n = 2$, tj. na neabelovom modelu Kuramoto na $SU(2)$. To podrazumjeva ograničenje dimenzije multivarijantnih podataka, tj. pretpostavljamo da se podaci mogu predstaviti kao vektori u prostoru \mathbb{R}^k za $k \leq 6$. Drugim riječima, mi identifikujemo klastere u skupovima podataka gdje svaki objekat nije zadan s više od 6 atributa.

Sada ćemo detaljnije objasniti metodu. Pretpostavimo da skup podataka sadrži N objekata, koji su predstavljeni vektorima a_1, \dots, a_N u \mathbb{R}^k s $k \leq 6$. Svaki vektor a_j se povezuje s jednim KL oscilatorom.

Korak 1. Unijeti vektor a_j u matrice frekvencija H_j i G_j za j -ti oscilator. Matrice H_j i G_j pripadaju Lie algebri $\mathfrak{su}(2)$ antihermiteovih matrica traga nula. Ovdje se koristi izomorfizam između prostora $\mathfrak{su}(2)$ i \mathbb{R}^3 .

Korak 2. Slučajno odabrati početne uslove $U_1(0), \dots, U_N(0)$ za sistem (4.15) iz uniformne raspodjele na S^3 . Koristeći izomorfizam između $SU(2)$ i S^3 , ove slučajne tačke na S^3 se transformišu u $SU(2)$ matrice.

Korak 3. Riješiti (4.15) s globalnom jačinom veze K .

Korak 4. Posmatrati proces sinhronizacije KL oscilatora $U_1(t), \dots, U_N(t) \in SU(2)$ i detektovati (moguću hijerarhijsku) strukturu podataka.

Međutim, u gore navedenom algoritmu postoje dvije nejasnoće:

P1: Kako odabrati jačinu veze K ?

P2: Koji su kriteriji za zaustavljanje?

Nemamo pravi odgovor na prvo pitanje. Odgovarajuću jačinu veze K treba odrediti na osnovu nekoliko realizacija algoritma. Očigledno je da ako je K premalo (ispod kritične jačine K_c), onda se sinhronizacija uopšte ne odvija i ne može se dobiti nikakva informacija. S druge strane, ako je K preveliko, može se posmatrati brza potpuna sinhronizacija sa sličnim rezultatima. Prema tome, K bi trebalo izabrati na takav način kako bi se osigurao postepeni proces sinhronizacije.

Kada je riječ o drugom pitanju, napominjemo da se kriteriji za zaustavljanje mogu predstaviti na više načina. Međutim, u većini slučajeva provjera kriterija za zaustavljanje u svakom koraku zahtijeva računanje. Zbog toga predlažemo da se postupa na sljedeći način: riješimo (4.15) i izvučemo informacije o klasterima (uzajamno sinhronizovane grupe KL oscilatora) samo u određenim trenucima, recimo $t = 1, 5, 10, \dots$. Na taj način je moguće identifikovati hijerarhijsku strukturu podataka bez provjere kriterija u svakom koraku.

Alternativni prijedlog za kriterij zaustavljanja zasnovan je na zapažanju da je proces sinhronizacije hijerarhijski. Definišimo (Euklidov) prosjek matrica U_1, \dots, U_N :

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j(t).$$

Napomenimo da \hat{U} ne pripada $SU(2)$. Međutim, determinanta matrice \hat{U} je realna i $0 \leq \det \hat{U} \leq 1$, sa slučajem $\det \hat{U} = 1$ koji odgovara potpunoj sinhronizaciji. Dakle, $\det \hat{U}$ je globalni parametar poretka populacije. Kada se pojavi sinhronizacija unutar nekih klastera, parametar poretka $\det \hat{U}$ brzo raste i nakon određenog vremena ostaje skoro konstantan sve dok se ne nastavi sinhronizacija između susjednih klastera. Zbog toga, jednostavan i računski kratak kriterij je da se algoritam zaustavi (i dobiju informacije o klasterima) kada je $|\det \hat{U}(t + \delta t) - \det \hat{U}(t)| < \varepsilon$ (za razumno odabrano δt i ε).

4.3.2 Studije slučaja

U ovom potparagrafu prikazujemo rezultate metode na dva reprezentativna (i mala) skupa podataka.

Kao prva studija slučaja analizirali smo poznati skup podataka *Iris flower* [103], koji se sastoji od 50 uzoraka iz svake od 3 vrste cvijeta irisa (*Iris setosa*, *Iris virginica*, *Iris versicolor*). Svaki cvijet karakteriše 4 atributa: dužina i širina sepalaca i latica.

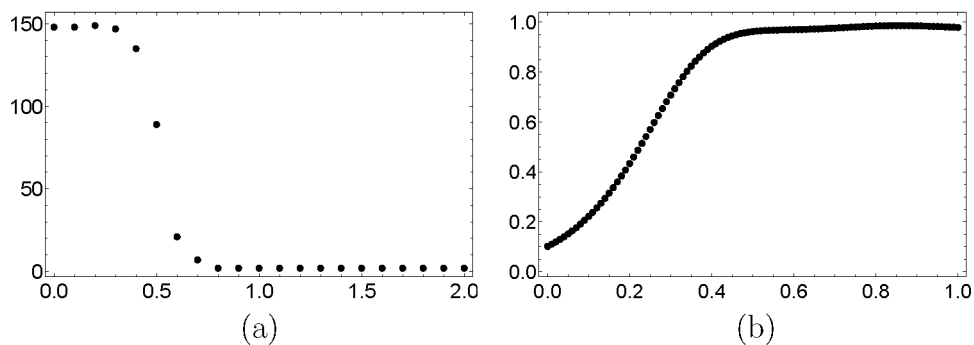
Riješili smo sistem $N = 150$ matričnih ODJ (4.15) sa slučajno izabranim početnim uslovima iz $SU(2)$. Četiri atributa svakog cvijeta su unešeni u matrice frekvencija H_j i G_j (prva 3 atributa u H_j , a preostali u G_j). Dva preostala mjesta u matrici G_j su podešena na nulu.

Metod identifikuje dva klastera: prvi odgovara upravo cvjetovima *Iris setosa*, dok drugi klaster uključuje sve cvjetove *Iris virginica* i *Iris versicolor*. Ovaj rezultat je očekivan i prirodan s aspekta nenadgledanog učenja. U stvari, poznato je da se vrste *Iris virginica* i *Iris versicolor* ne mogu razlikovati bez upotrebe oznaka kategorija.

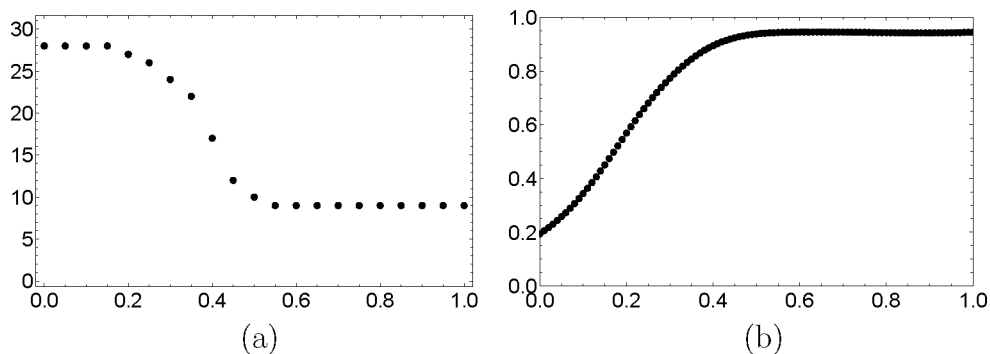
Ponovljene simulacije na ovom skupu podataka uvijek daju isti odgovor.

Za drugu studiju smo prikupili podatke koji opisuju društvo i ekonomiju u 28 različitih zemalja. Svakoj zemlji smo pridružili sljedećih 6 atributa: BDP po stanovniku, stopa nataliteta, očekivani životni vijek pri rođenju, stopa smrtnosti dojenčadi, Gini indeks (raspodjela porodičnih prihoda) i vojni troškovi (kao procenat ukupnog BDP-a). Statistički podaci su izvučeni iz *CIA world factbook* [25].

Podaci su grubo skalirani i unešeni u matrice frekvencija H_j i G_j (tri atributa u svakoj matrici). Sistem od 28 matričnih ODJ (sa slučajno izabranim



Slika 4.4: Rezultati simulacija za skup podataka *Iris flower*: ukupan broj klastera se smanjuje od 150 na 2 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$.



Slika 4.5: Rezultati simulacija za skup podataka od 28 zemalja: ukupan broj klastera se smanjuje od 28 na 9 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$.

početnim uslovima) je riješen. Algoritam je pronašao 9 klastera:

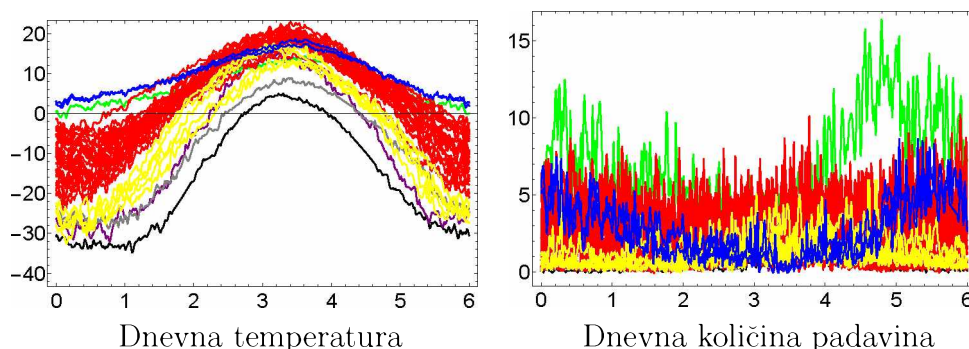
Prvi klaster: Švedska, Njemačka, Kanada, Danska, Holandija.

Drugi klaster: Srbija, Bosna i Hercegovina, Crna Gora, Albanija, Bugarska, Latvija, Indonezija, Malezija, Kina, Tajland, Čile, Urugvaj, Argentina.

Treći klaster: Togo, Uganda, Senegal, Kamerun.

Odvojeni klasteri (države koje ne spadaju ni u jedan klaster): Saudijska Arabija, Katar, Ujedinjeni Arapski Emirati, Slovenija, Kirgistan, Južnoafrička Republika.

Za ovaj skup podataka rezultati se mogu malo razlikovati od jedne simulacije do druge. Međutim, osnovni šablon klastera ostaje isti bez obzira



Slika 4.6: Rezultati simulacija za skup podataka *Canadian meteorological data*: algoritam je pronašao 3 velika klaster (crvene, žute i plave linije) i 4 odvojena klastera (crna, ljubičasta, siva i zelena linija).

na realizaciju. Na primjer, prvi klaster se uvijek sastoji od istih 5 zemalja. Također, balkanske zemlje su uvijek postavljene u isti klaster.

Slike 4.4 i 4.5 ilustruju proces sinhronizacije za dva skupa podataka respektivno. Broj klastera se s vremenom smanjuje (slike 4.4(a) i 4.5(a)), dok se globalni parametar poretka povećava (slike 4.4(b) i 4.5(b)).

4.3.3 Klasteriranje funkcionalnih podataka

Metod koji ovdje predlažemo omogućava razne ekstenzije. Konkretno, lako se može prilagoditi da se bavi multivarijantnim funkcionalnim podacima bez dramatičnog povećanja računske složenosti.

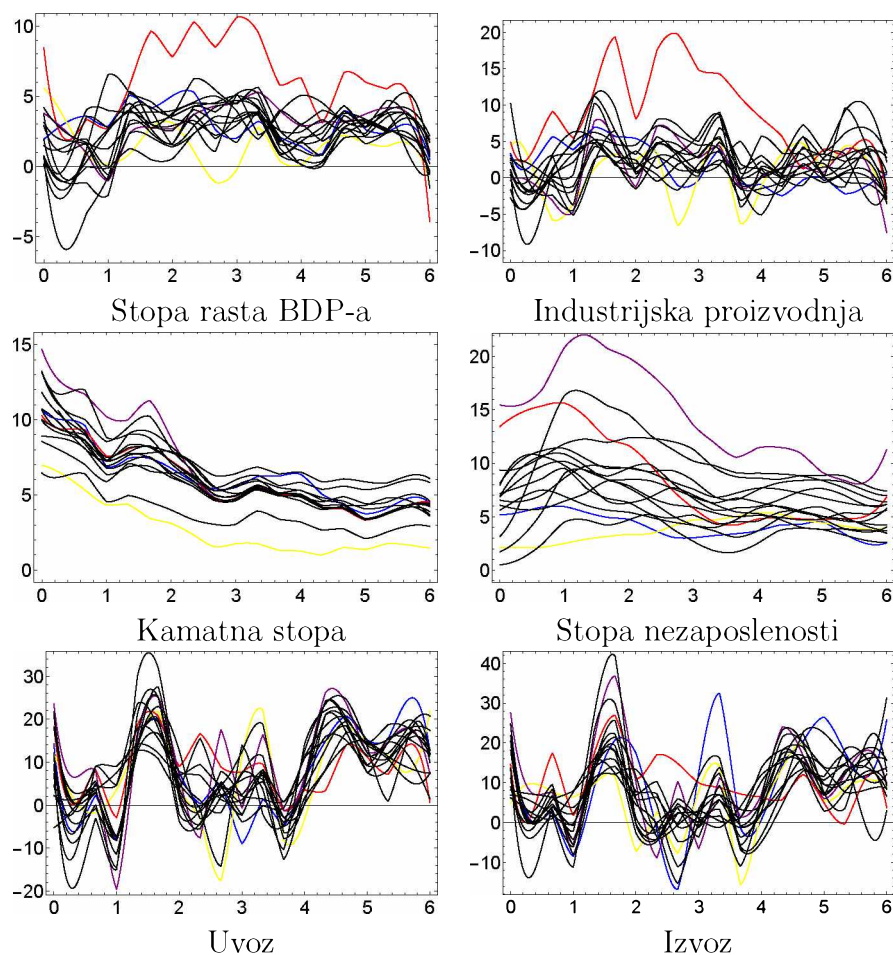
Ovo se može uraditi razmatranjem vremenski zavisnih matrica $H_j(t)$ i $G_j(t)$ u (4.15). Funkcionalni podaci se onda unose u ove matrice.

Ova ideja omogućava identifikaciju klastera u različitim vremenskim intervalima. Da bi se došlo do odlučujućeg zaključka tokom cijelog vremenskog perioda, izračunavamo matrice poparnih udaljenosti između KL oscilatora u nekoliko momenata.

Metod je verifikovan na dva skupa podataka koja su prethodno proučavana.

Prva studija slučaja je sprovedena na skupu podataka *Canadian meteorological data*, vidjeti [81]. Ovaj skup podataka se sastoji od 35 različitih lokacija u Kanadi, koje karakterišu dva vremenski promjenljiva atributa (dnevna temperatura i dnevne količine padavina). Pronašli smo sljedeću strukturu podataka (vidjeti sliku 4.6):

Prvi klaster: St. Johns, Halifax, Sydney, Yarmouth, Charlottvl, Fredericton, Quebec, Sherbrooke, Montreal, Ottawa, Toronto, London, Arvida, Thunder Bay, Calgary, Bagottville, Regina, Pr. George, Winnipeg,



Slika 4.7: Rezultati simulacija za skup podataka *Key economic indicators data*: algoritam je pronašao 1 veliki klaster (crne linije) i 4 odvojena klastera (plava, žuta, crvena i ljubičasta linija).

Edmonton, Kamloops, Pr. Albert, The Pas, Whitehorse.

Drugi klaster: Schefferville, Churchill, Uranium City, Dawson, Yellowknife.

Treći klaster: Vancouver, Victoria.

Odvojeni klasteri: Resolute, Inuvik, Iqaluit, Pr. Rupert.

Napominjemo da su naši zaključci gotovo identični zaključcima koji su dali Jacques i Preda [43, 44]. Međutim, naša metoda ne zahtjeva da se apriori odredi broj klastera i stoga postavlja četiri vremenske stanice u Sjevernoj Kanadi u zasebne klasterne.

Drugi skup podataka sadrži 6 ekonomskih indikatora za 16 zemalja tokom perioda od 1990. do 2008. godine. Yamamoto je proučavao ovaj šestovarijantni skup funkcionalnih podataka u radu [106]. Naš metod identifikuje 5 klastera (vidjeti sliku 4.7):

Prvi klaster: Australija, Kanada, SAD, Švedska, Francuska, Danska, Finska, Holandija, Velika Britanija, Belgija, Švicarska, Novi Zeland.

Odvojeni klasteri: Norveška, Japan, Irska, Španija.

Ovi rezultati su veoma slični onima koje je dobio Yamamoto. Međutim, postoji nekoliko razlika: Švicarska se ovdje svrstava u veliki klaster. S druge strane, Norveška i Španija su postavljene u zasebne klastere. Detaljnijim ispitivanjem podataka mogu se otkriti osnovni razlozi za takvu klasifikaciju. U slučaju Norveške, karakteristični indikator je izvozni prihod koji je vrlo visok u periodu od 2004. do 2006. godine. Kada je riječ o Španiji, razlog se može naći u visokoj stopi nezaposlenosti.

Glava 5

Distribuirani algoritmi konsenzusa i koordinacije na sferama

5.1 Uvod

Široka oblast kooperativnog i distribuiranog upravljanja obuhvata zadatke konsenzusa, balansiranja, održavanja formacije i koordiniranog kretanja u višeagentnim sistemima. Posebna poddisciplina, nazvana *teorija geometrijskog konsenzusa* (ili, općenito, *teorija geometrijske koordinacije*) se bavi ovim zadacima na neeuklidskim mnogostrukostima [90, 92]. Algoritmi koordinacije su formulisani na homogenim prostorima [89, 90]. Međutim, koordinacija agenata u velikoj mjeri zavisi od geometrijskih i algebarskih osobina osnovne mnogostrukosti, te se algoritmi na različitim homogenim prostorima izvide drugačije. Stoga, iako su nedavni teorijski napretci razvili prilično univerzalni pristup zadacima koordinacije na proizvoljnim homogenim prostorima, ima nekoliko univerzalnih rezultata u vezi s konvergencijom prema željenim ravnotežnim konfiguracijama.

Neki zadaci teorije geometrijske koordinacije su formulisani kao minimizacija odgovarajućih funkcija cilja na specifičnim homogenim prostorima. Metode gradijentnog spuska za ove zadatke minimiziranja omogućavaju distribuirani protokoli koordinacije. Jedan primjer ove vrste je zadatak konsenzusa na kružnici S^1 nad težinskim grafom G . Gradijentni protok potencijalne funkcije daje sistem ODJ na S^1 . Ovaj sistem ODJ je u suštini poznati model Kuramoto identičnih oscilatora koji su povezani kroz graf G . Ovo zapažanje ukazuje na intrigantnu vezu između konsenzusa na homogenim prostorima i univerzalnog prirodnog fenomena sinhronizacije povezanih

oscilatora [78]. Algoritmi koordinacije na S^1 imaju direktne primjene u kooperativnom upravljanju kolektivnih kretanja u ravni [93].

U ovoj glavi razmatramo koordinaciju roja na sferi S^3 . Postoje dva dobra razloga za fokusiranje na ovu specifičnu mnogostrukost. Prvo, geometrija sfera S^n (izuzev kružnice S^1) daje prednost konsenzusu. Zaista, algoritmi konsenzusa na S^n se izvode mnogo bolje od njihovih analoga na specijalnim ortogonalnim grupama $SO(n)$ [62]. Drugo, S^3 je, zajedno sa S^1 , jedina sfera s osobinom grupe. To čini S^3 veoma pogodnom postavkom za različite algoritme koordinacije, što ćemo pokazati u narednom paragrafu.

Inspiracija za rezultate u ovoj glavi donekle proističe iz činjenice da su gradijentni protoci za zadatke konsenzusa na višedimenzionim homogenim prostorima poznati u fizici kao neabelovi modeli Kuramoto, vidjeti [57]. Ovo zapažanje proširuje relaciju između konsenzusa i sinhronizacije: dok konsenzus na S^1 odgovara sinhronizaciji u klasičnom (Abelovom) modelu Kuramoto, konsenzus na S^3 odgovara kvantnoj sinhronizaciji u neabelovom modelu Kuramoto [57, 58].

Većina radova o teoriji geometrijske koordinacije se bavi rojem agenata koji komuniciraju kroz konstantni graf interakcija. U drugom paragrafu ove glave proučavamo roj s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama koje zadovoljavaju određene realizacije Hebbovog i antihebbovog pravila učenja. Model Kuramoto sa sinapsama koje uzimaju u obzir određene varijacije ovih pravila učenja je proučavan u nekoliko radova, vidjeti [37, 41, 96]. Po našem najboljem saznanju, neabelovi modeli Kuramoto s Hebbovim pravilom učenja do sada nisu razmatrani. Napominjemo, međutim, da su rojevi na S^n sa sinapsama zavisnim o stanju proučavani u [55, 72]. Također, rad [56] se bavi rojenjem na sferi s različitim kooperativnim pravilima u vremenski diskretnim modelima. U paragrafu 5.3 pokazujemo da rojevi na S^3 s nekim prirodnim i jednostavnim pravilima učenja za sinapse pokazuju različite oblike ponašanja i stabilne konfiguracije.

5.2 Konsenzus i balansiranje na 3-sferi

Zadaci konsenzusa imaju važnu ulogu u širokom polju distribuiranog i kooperativnog upravljanja. Različiti zadaci ove vrste na euklidskim prostorima su proučavani pod različitim ograničenjima i pretpostavkama, vidjeti, na primjer, [67, 73] i reference u njima. Međutim, u mnogim inženjerskim primjenama, kao što su kooperativno upravljanje krutog tijela [19, 86], mobilne senzorske mreže [76] ili prosjek rotacija [39], osnovni prostor je neeuklidov. Teorija geometrijskog konsenzusa [90, 92] ima za cilj konstruisanje algoritama na određenim Riemannovim mnogostrukostima i elaboriranje je-

dinstvenog pristupa konsenzusu u euklidskim i neeuklidskim prostorima.

Postoje bitne razlike između ove dvije postavke, s obzirom da osobine konvergencije algoritama konsenzusa mnogo zavise od geometrije osnovnog prostora. Da bi dobili osjećaj o ovome, poučno je započeti sa zadatkom na kružnici S^1 .

5.2.1 Konsenzus na S^1

Razmotrimo roj N agenata čija su stanja opisana tačkama $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$ na S^1 . Pretpostavimo da agenti međusobno komuniciraju preko neusmjerenog komunikacijskog grafa $G = (V, E)$, gdje je $V = \{1, \dots, N\}$ skup čvorova i $E \subseteq \{(j, k) : j, k \in V, j \neq k\}$ je skup grana. Kažemo da su agenti j i k *susjedi* ako postoji grana između njih, tj. ako $(j, k) \in E$.

Na osnovu informacija dobijenih od svojih susjeda, svaki agent neprekidno prilagođava svoje stanje. Prateći analogiju s linearnim algoritmima konsenzusa, prirodno je predložiti sljedeće kontinuirano ažuriranje stanja agenata [88, 90]:

$$\dot{\theta}_k = \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N a_{jk} \sin(\theta_j - \theta_k), \quad \alpha > 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

Ovdje, $a_{jk} = 1$ ako $(j, k) \in E$ i $a_{jk} = 0$ ako $(j, k) \notin E$.

Sistem (5.1) definiše potencijalnu dinamiku. To je gradijentni sistem za potencijalnu funkciju na N -torusu $T^N = S^1 \times \dots \times S^1$:

$$\begin{aligned} V_\theta(\theta) &= \frac{1}{2N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{jk} \|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\|^2 \\ &= \frac{1}{2N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{jk} \left(2 \sin \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Drugim riječima, (5.1) se dobija metodom gradijentnog spuska za zadatak minimizacije (5.2): $\dot{\theta}_k = -\alpha \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta_k}$, $k = 1, \dots, N$. Dakle, trajektorije konvergiraju prema kritičnim tačkama od V_θ i svi strogi minimumi funkcije V_θ su stabilne ravnoteže sistema (5.1).

Napomena 5.1. Sistem (5.1) je poznati model Kuramoto povezanih oscilatora. Napominjemo da, za razliku od originalnog modela Kuramoto predstavljenog u radu [52], oscilatori u (5.1) imaju identične (nulte) frekvencije i povezani su preko grafa G .

Gornja napomena pokazuje da je pitanje konvergencije distribuiranih algoritama konsenzusa na nekim Riemannovim mnogostrukostima povezano s univerzalnim fenomenom sinhronizacije povezanih oscilatora, vidjeti [78].

Definicija 5.1. Konfiguracija s $\theta_1 = \dots = \theta_N$ se zove *sinhronizacija* agenata.

Očigledno je da sinhronizacija odgovara globalnom minimumu potencijalne funkcije V_θ . Zbog toga se za zadatak konsenzusa može reći da je optimizacija funkcije V_θ . Međutim, ne postoji garancija da će (5.1) konvergirati prema sinhronizaciji, jer V_θ može imati kritične tačke različite od globalnog minimuma. Egzistencija lokalnih minimuma i drugih kritičnih tačaka funkcije cilja u velikoj mjeri zavisi od komunikacijskog grafa G .

Za graf G se kaže da je S^1 - *sinhronizirajući*, ako (5.2) ne prihvata lokalne minimume različite od sinhronizacije. To je otvoreni problem za karakterizaciju (bar približnu) svih S^1 -sinhronizirajućih grafova. Na primjer, simulacije pokazuju da je prsten graf s 4 čvora S^1 -sinhronizirajući, dok prsten grafovi koji sadrže 5 i 6 čvorova nisu ([90]). Jedan od rijetkih univerzalnih rezultata po ovom pitanju navode da su kompletni grafovi (komunikacija svaki sa svakim) i neusmjerena stabla S^1 -sinhronizirajući, vidjeti [88, 90].

5.2.2 Konsenzus na S^3 i $SO(3)$ preko neusmjerenih grafova

Kao što je pomenuto u uvodu, matematičku formalizaciju nekih važnih inženjerskih zadataka daju zadaci konsenzusa na određenim višedimenzionim Riemannovim mnogostrukostima. Da bi se razvila značajna teorija geometrijskog konsenzusa, neophodno je nametnuti neke uslove na klasi Riemannovih mnogostrukosti na kojima su navedeni zadaci. Jedno prirodno ograničenje je raditi pod pretpostavkom da je osnovna mnogostrukost homogeni prostor.

Ovdje ćemo se fokusirati na konsenzus (i antikonsenzus) na jednoj specifičnoj mnogostrukosti. To je Lie grupa $SU(2)$ s grupnom mnogostrukosti S^3 .

U cilju predstavljanja koordinata na sferi S^3 radićemo s algebrom jediničnih kvaterniona. Razmotrimo sljedeći sistem kvaternionskih ODJ na S^3 :

$$\dot{q}_j = q_j f_j q_j - \bar{f}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Ovdje, $q_j(t)$ je jedinični kvaternion, koji opisuje poziciju j -tog agenta na S^3 i $f_j = f_j(q_1, \dots, q_N)$ su kvaternionске funkcije nazvane *funkcijama veze* ili *komunikacijski protokoli* zavisno od konteksta. Pojam \bar{a} označava kvaternionsku konjugaciju kvaterniona a (konjugacija jediničnog kvaterniona se poklapa s inverznim: $\bar{a} = a^{-1}$).

Napomenimo da jednačine (5.3) čuvaju S^3 . Ovo se lako potvrđuje tako što se pokaže da $q_j(0) \in S^3$ za sve $j = 1, \dots, N$ implicira $q_j(t) \in S^3$ za svako $t > 0$.

Mogu se proučavati različiti oblici funkcija f_j u (5.3), u zavisnosti od specifičnih ciljeva. Za zadatke konsenzusa, ima smisla razmatrati funkcije sljedećeg oblika:

$$f_j = -\frac{\alpha}{2N} \sum_{k=1}^N a_{jk} \bar{q}_k, \text{ gdje je } \alpha > 0. \quad (5.4)$$

Nadvučeno označava kvaternionsku konjugaciju kao i ranije.

Uključivanjem (5.4) u (5.3) se dobija sljedeći sistem kvaternionskih ODJ

$$\dot{q}_j = \frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^N a_{jk} (q_j q_k q_j - \bar{q}_k). \quad (5.5)$$

Napomena 5.2. Sistem (5.5) (zapisan s realnim promjenljivim) se pojavio u nekoliko radova s različitim interpretacijama, na primjer kao roj na sferi u [72] i formiranju stavova na sferi u [18].

Sljedeći korak je da se pokaže da (5.5) prikazuje potencijalnu dinamiku. Potencijalna funkcija se može napisati kako slijedi:

$$\begin{aligned} V_q(q_1, \dots, q_N) &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \left(1 - \frac{1}{2} (\bar{q}_j q_k + \bar{q}_k q_j) \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} (1 - \cos \varphi_{jk}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdje je φ_{jk} ugao između dva vektora na S^3 koji odgovaraju kvaternionima q_j i q_k .

Stoga, situacija je analogna slučaju na S^1 koja je ukratko objašnjena u prethodnom potparagrafu. Zadatak konsenzusa na S^3 se može navesti kao minimizacija funkcije V_q i odgovarajuća metoda gradijentnog spuska (5.5) obezbjeđuje distribuirani algoritam konsenzusa na S^3 .

Uz (5.6) razmotrimo i zadatak minimizacije funkcije $V_Q(Q_1, \dots, Q_N)$ definisane na $(SO(3))^N$ (vidjeti, na primjer, [89, 90]):

$$V_Q(Q_1, \dots, Q_N) = \frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \text{Tr}(Q_j^T Q_k). \quad (5.7)$$

Sistem gradijentnog spuska za (5.7) glasi:

$$Q_j^{-1}\dot{Q}_j = \frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^N a_{jk}(Q_j^{-1}Q_k - Q_k^{-1}Q_j). \quad (5.8)$$

Napomena 5.3. U potparagrafu 5.2.1 je pomenuto da se gradijentni sistem (5.1) za zadatak konsenzusa na S^1 može tumačiti kao model Kuramoto povezanih oscilatora s identičnim nultim frekvencijama. Postoji analogija u višim dimenzijama. Sistemi gradijentnog protoka oblika (5.5) i (5.8) su predstavljeni u [57] kao tzv. neabelovi modeli Kuramoto. Ovo zapažanje ukazuje na paralelni razvoj u teoriji geometrijskog konsenzusa i u proučavanju fenomena sinhronizacije. Za konsenzus na S^1 je povezana klasična sinhronizacija, dok je konsenzus na S^3 povezan s fenomenom nazvanim kvantna sinhronizacija, vidjeti [58].

Definicija 5.2. Konfiguracija s $q_1 = \dots = q_N$ se zove *sinhronizacija* na S^3 .

Očigledno je da su konfiguracije sinhronizacije globalni minimumi funkcija (5.6) i (5.7).

Napomena 5.4. Postoji izvjesna dvosmislenost u korištenju termina *konsenzus* i *sinhronizacija* u relevantnoj literaturi. U radu [62] se ova dva pojma smatraju sinonimima. S druge strane, u radovima [88, 89, 90] je pojam konsenzusa općenitiji. Roj može primiti mnoge konfiguracije konsenzusa, zavisno od grafa G , a sinhronizacija je poseban slučaj konsenzusa. Pored toga, u nekim radovima, termini *poravnanje* i *sastajanje* se također koriste s istim značenjem.

Izlaganje je do sada predstavljalo analogne zadatke konsenzusa i algoritama na sferama S^1 i S^3 i matricnoj grupi $SO(3)$. Međutim, ispostavlja se da su osobine konvergencije algoritama (5.1), (5.5) i (5.8) veoma različite zbog geometrijskih osobina osnovnih mnogostrukosti.

Da bismo vidjeli ovo, počeli smo s nedavnim teorijskim rezultatom, dokazanim u [62]:

Teorema 5.1. *Pretpostavimo da je komunikacijski graf G neusmjeren i povezan. Tada je skup konfiguracija sinhronizacije skoro globalno stabilan za (5.5). Drugim riječima, skup svih početnih uslova za koje (5.5) ne konvergira prema sinhronizaciji ima nultu Lebesgueovu mjeru na $(S^3)^N$.*

Napomena 5.5. Teorema 5.1 pruža teorijsku osnovu za algoritme konsenzusa na S^3 , a to je da je konvergencija prema sinhronizaciji *skoro zagarantovana*. Geometrija 3-sfere je povoljna za sinhronizaciju. U stvari, teorem 5.1 važi za konsenzus na bilo kojoj sferi S^n za $n \geq 2$.

Istovremeno, teorem 5.1 ne važi za S^1 . Zaista, kako je objašnjeno u potparagrafu 5.2.1, postoje mnogi grafovi koji nisu S^1 -sinhronizirajući. Isto važi i za $SO(3)$, simulacije pokazuju da algoritam (5.8) ne konvergira obavezno prema sinhronizaciji. Potencijalna funkcija (5.7) može imati lokalne minimume. Struktura skupa lokalnih minimuma od V_Q mnogo zavise od komunikacijskog grafa.

Rezultati simulacija. Da bismo ilustrovali gore navedenu tačku, izvršili smo simulacije za konkretan slučaj kada su $N = 5$ agenata povezani u prsten (tj. komunikacijski graf G je prsten s 5 čvorova). Početna stanja agenata su slučajno izabrana iz uniformne raspodjele na S^3 . Početna stanja na $SO(3)$ su dobijena preslikavanjem tačke iz S^3 u $SO(3)$ matricu.

Algoritam (5.5) na S^3 je dostigao sinhronizaciju u 1000 od 1000 simulacija.

Algoritam (5.8) na $SO(3)$ je dostigao sinhronizaciju u 609 od 1000 simulacija.

Napomenimo da su isti eksperiment izložili Markdahl i ostali u radovima [61, 62], a naši rezultati su u skladu s njihovim.

Vizualizacija. Naravno, problematično je vizualizirati evoluciju tačaka na sferi u 4-dimenzionom prostoru. Mi ćemo ilustrovati evoluciju roja na S^3 prikazujući rotirajuća tijela u 3D. Matematički, koristimo dvostruko pokrivajuće preslikavanje iz S^3 u $SO(3)$ i predstavljamo 3D rotacije pomoću jediničnih kvaterniona. Dobro je poznato da takvo predstavljanje uzrokuje neke specifične efekte, zbog činjenice da dva antipodalna kvaterniona q i $-q$ odgovaraju istoj matrici u $SO(3)$.

Osobine konvergencije za (5.5) i (5.8) su prikazana u dva kratka videa. Broj agenata je $N = 5$, a komunikacijski graf je prsten s 5 čvorova. Slučajno smo izabrali početne uslove iz uniformne raspodjele na S^3 i iste početne uslove na $SO(3)$ (preslikavanjem jediničnih kvaterniona u odgovarajuće $SO(3)$ matrice).

Može se vidjeti da je sinhronizacija postignuta na S^3 (vidjeti video u dodatnim materijalima rada [27]), dok na $SO(3)$ algoritam završava u nekom lokalnom minimumu potencijalne funkcije (vidjeti video u dodatnim materijalima rada [27]). Prema rezultatima simulacija koji su objašnjeni iznad, vjerovatnoća takvog ishoda je približno jednaka 0.4.

5.2.3 Konsenzus na S^3 preko kompletnog grafa

Poznato je da u slučaju kompletnog komunikacijskog grafa algoritmi (5.1), (5.5) i (5.8) uvijek konvergiraju prema sinhronizaciji na S^1 , S^3 i $SO(3)$ respektivno, vidjeti [89, 90]. Drugim riječima, ako je G kompletan graf tada su konfiguracije sinhronizacije jedini minimumi funkcija V_θ , V_q i V_Q .

U ovom potparagrafu razmatramo zadatak konsenzusa na S^3 s druge tačke gledišta. Kroz ovaj i sljedeći potparagraf pretpostavljamo da je komunikacijski graf G kompletan. Napomenimo da je u nekim inženjerskim primjenama takva topologija preskupa ili čak nije izvodljiva. U kontekstu povezanih oscilatora, ova situacija se naziva globalna (svaki sa svakim) veza ili veza srednjeg polja. U ovom slučaju sistem (5.3) je napisan kao:

$$\dot{q}_j = q_j f q_j - \bar{f}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.9)$$

gdje je $f = f(q_1, \dots, q_N)$ funkcija globalne veze.

Za konsenzus preko kompletnog grafa, funkcija veze je u obliku:

$$f = -\frac{\alpha}{2N} \sum_{k=1}^N \bar{q}_k, \quad \text{gdje je } \alpha > 0. \quad (5.10)$$

Zamjenjujući (5.10) u (5.9) se dobija algoritam konsenzusa na S^3 :

$$\dot{q}_j = \frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^N (q_j q_k q_j - \bar{q}_k), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Štaviše, za slučaj kompletnog grafa, potencijalna funkcija V_q , koja je zadana s (5.6) ima naročito jednostavan oblik:

$$\hat{V}_q = 1 - r^2, \quad (5.12)$$

gdje je $r = \|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j\|$. Da bi se ovo razjasnilo, razmotrimo roj agenata čija

su stanja zadana s $q_1, \dots, q_N \in S^3$ i definišimo $\langle q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j$. Očigledno je da je $\langle q \rangle$ tačka u kugli B^4 (unutrašnjost od S^3) koja je centroid (centar mase) skupa tačaka q_1, \dots, q_N . Dalje, $r = \|\langle q \rangle\|$ je norma ove tačke (tj. 4D vektora). U kontekstu povezanih oscilatora, realni broj $r \in [0, 1]$ se naziva globalni parametar poretka roja agenata (tj. populacije oscilatora). Situacija kada je $r = 1$ (potpuno koherentno stanje) odgovara sinhronizaciji. Obrnuta situacija, kada je $r = 0$, naziva se potpuno nekoherentno stanje u statističkoj fizici. U teoriji sistema, ova situacija se naziva balansirana konfiguracija.

Pored globalnog parametra poretka, uvodimo i pojam ugaonih parametara poretka. Za tu svrhu koristimo Hopfove koordinate na S^3 . U tom cilju kvaternione q_k predstavljamo u Cayley-Dicksonovom obliku: $q_k = z_k + v_k j$, gdje su z_k i v_k kompleksni brojevi. Nadalje, budući da su q_k jedinični kvaternioni, z_k i v_k se mogu napisati na sljedeći način: $z_k = e^{i\varphi_k} \sin \theta_k$, $v_k = e^{i\psi_k} \cos \theta_k$, gdje su $\varphi, \psi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Sada, definirajmo sljedeće kompleksne brojeve:

$$r_\varphi(t)e^{i\mu(t)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\varphi_k(t)} \text{ i } r_\psi(t)e^{i\mu(t)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\psi_k(t)}.$$

Očigledno su $r_\varphi(t)$ i $r_\psi(t)$ realni brojevi u intervalu $[0, 1]$. Brojeve r_φ i r_ψ ćemo nazvati ugaonim parametrima poretka.

Da rezimiramo, u slučaju kompletnog grafa, zadatak minimizacije potencijalne funkcije se čini da je jednostavno maksimizacija parametra poretka (stepena koherentnosti) roja. Sistem gradijentnog spuska za (5.12) je (5.11).

Propozicija 5.1. [88, 89, 90] *Funkcija (5.12) nema lokalne minimume različite od sinhronizacije. Konfiguracije sinhronizacije su globalni minimumi od (5.12) i jedina asimptotski stabilna ravnoteža za (5.11).*

Stoga, zadatak o kojem diskutujemo u ovom potparagrafu se u potpunosti shvata sa stanovišta teorije optimizacije. Međutim, ovdje imamo drugačiju tačku gledišta kako bismo ukazali na neke odnose s fizikom i hiperboličkom geometrijom i izdvojili neke specifične nove rezultate.

Kao što je već pomenuto, sistem (5.9) je zapravo neabelov model Kuramoto na S^3 s globalnom (svaki sa svakim) vezom. U prethodnoj glavi smo proučavali neke simetrije ovog sistema.

Da bismo to objasnili, počinjemo s nekim oznakama. Označimo s \mathbb{H} algebru kvaterniona. Skup linearnih frakcionih Möbiusovih transformacija koje djeluju na proširenom kvaternionskom prostoru $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ je grupa $GL(2, \mathbb{H})$. Razmotrimo podgrupu $G_{\mathbb{H}}$ svih Möbiusovih transformacija koje čuvaju S^3 .

Teorema 5.2. *Neka roj evoluira s (5.9) od njihovih početnih pozicija $q_1(0), \dots, q_N(0)$. Tada u $G_{\mathbb{H}}$ postoji jednoparametarska familija Möbiusovih transformacija, takva da*

$$q_j(t) = g_t(q_j(0)) \quad \text{za svako } t > 0 \text{ i } j = 1, \dots, N.$$

Teorema 5.2 tvrdi da se u svakom momentu t pozicije agenata na S^3 dobijaju iz njihovih početnih pozicija nekom Möbiusovom transformacijom koja pripada $G_{\mathbb{H}}$. Napominjemo da je analogna činjenica za roj na S^1 ranije utvrđena u [63].

Koristeći teoremu 5.2 i opšte rezultate teorije grupa možemo tvrditi da raspodjela agenata na S^3 pripada orbitama grupe $G_{\mathbb{H}}$. To daje sljedeće:

Korolar 5.1. *Pretpostavimo da roj evoluira s (5.9). Tada se raspodjela agenata razvija na određenoj 10-dimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukosti koja leži u beskonačno-dimenzionoj mnogostrukosti svih raspodjela na S^3 .*

Dokaz. Za dokaz je dovoljno provjeriti da li je dimenzija 10 orbita grupe $G_{\mathbb{H}}$. Da bi se ovo vidjelo, uočimo da opšta Möbiusova transformacija koja čuva S^3 može biti napisana u sljedećem obliku:

$$w(q) = p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)r, \text{ za } q \in S^3,$$

gdje su p i r jedinični kvaternioni i $a \in \mathbb{H}$, $|a| < 1$.

Dva jedinična kvaterniona p i r generišu rotacije na S^3 i a odgovara dejstvu centra sfere. Rotacije (ili jedinični kvaternioni) daju $2 \times 3 = 6$ nezavisnih realnih parametara, dok je a tačka u B^4 (4 realna parametra). Na kraju, korolar slijedi iz opštih rezultata teorije grupa. \square

Postoji jedinstven način da se proširi Möbiusova transformacija g_t sa S^3 na cijelu jediničnu kuglu B^4 . Razmotrimo ovu ekstenziju i označimo s $P(t)$ sliku centra sfere S^3 pod dejstvom g_t , tj. $P(t) = g_t(0)$.

Propozicija 5.2. *Neka roj evoluira s (5.9) i neka je g_t familija Möbiusovih transformacija koja je definisana u teoremu 5.2. Tada tačka $P(t) = g_t(0)$ evoluira u B^4 sljedećom kvaternionskom ODJ-om:*

$$\frac{dP}{dt} = PfP - \bar{f}. \quad (5.13)$$

U preostalom dijelu ovog potparagrafa i u cijelom sljedećem potparagrafu će nam trebati pojam *konformni baricentar* [29] vjerovatnosne mjere μ na sferi. Pretpostavimo da vjerovatnosna mjera μ ne sadrži atom težine $\geq \frac{1}{2}$.

Slijedeći Douadyja i Earlea [29], definišimo funkciju h_μ na B^4 :

$$h_\mu(a) = \frac{1}{2} \int_{S^3} \log \frac{1 - |a|^2}{|a - u|^2} d\mu(u), \quad a \in B^4$$

i označimo s ξ_μ gradijent od h_μ u Poincareovoj (hiperboličkoj) geometriji u B^4 . Tada je ξ_μ vektorsko polje u B^4 , te su Douady i Earle dokazali da postoji jedinstvena tačka u B^4 gdje polje ξ_μ nestane. Ta tačka se naziva konformnim baricentrom $B(\mu)$ od μ .

Napomena 5.6. Neka je μ vjerovatnosna mjera na S^3 i w je Möbiusova transformacija koja čuva B^4 . Razmotrimo mjeru $\nu = w(\mu)$ koja se dobiva kao Möbiusova transformacija od μ . Vrijedi da $w(B(\mu)) = B(\nu)$, gdje su $B(\mu)$ i $B(\nu)$ konformni baricentri ove dvije mjere.

Ova napomena naglašava jednu posebnu osobinu konformnog baricentra. Ta osobina je ako je mjera transformisana Möbiusovom transformacijom, onda je konformni baricentar transformisan **istom** Möbiusovom transformacijom. Centroid nema ovu jedinstvenu osobinu. Ako centroide (srednje vrijednosti) označimo s $C(\mu)$ i $C(\nu)$ mjera μ i ν , onda je, općenito, $w(C(\mu)) \neq C(\nu)$.

Lema 5.1. *Razmotrimo roj (5.9) i pretpostavimo da je broj agenata velik, $N \rightarrow \infty$. Pretpostavimo da je početna raspodjela agenata uniformna na S^3 . Tada se konformni baricentar roja poklapa s centroidom u svakom momentu t . Štaviše, raspodjela agenata ρ u svakom momentu t je zadana sljedećom funkcijom gustoće na S^3 :*

$$\rho(y; P(t)) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1 - \|P(t)\|^2}{\|y - P(t)\|^2} \right)^3, \quad y \in S^3, P(t) \in B^4. \quad (5.14)$$

Dokaz. Raspodjela (5.14) se zove Poissonovo jezgro na S^3 . Poznato je (vidjeti [51]) da Poissonova jezgra na S^3 (kao i na S^1) nastaju kao Möbiusove transformacije uniformne mjere. Centroid Poissonovog jezgra (harmonijska mjera) je slika nule pod odgovarajućom Möbiusovom transformacijom, tj. tačka $P(t)$ iz propozicije 5.2. Drugim riječima, Poissonova jezgra su vrlo posebne raspodjele na S^3 za koje se podudaraju konformni baricentar i centroid. \square

Lema 5.2. *Razmotrimo roj koji se kreće algoritmom konsenzusa (5.11) za $\alpha > 0$. Pretpostavimo da je $N \rightarrow \infty$ i da je početna raspodjela agenata uniformna na S^3 . Tada globalni parametar poretka $r(t)$ zadovoljava sljedeću jednostavnu realnu ODJ-u:*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{2}(r - r^3). \quad (5.15)$$

Dokaz. Naglasimo da u ovoj lemi razmatramo algoritam konsenzusa (5.11).

Posmatrajmo evoluciju konformnog baricentra $P(t)$ roja. Zbog leme 5.1, $P(t)$ je također centroid roja. Pošto $P(t) \in B^4$, napišimo da je $P(t) = ru(t)$, gdje je $u(t)$ jedinični kvaternion i $r(t) = |P(t)|$ je globalni parametar poretka.

Tada funkcija veze (5.10) glasi

$$f = -\frac{\alpha}{2N} \sum_{k=1}^N \bar{q}_k = -\frac{\alpha}{2} \bar{P}(t) = -\frac{\alpha}{2} r \bar{u}(t), \quad \alpha > 0.$$

Zamjenjujući u (5.13) dobivamo:

$$\dot{r}u + r\dot{p} = -\frac{\alpha}{2} r u r \bar{u} r u + \frac{\alpha}{2} r u = -\frac{\alpha}{2} r^3 u + \frac{\alpha}{2} r u.$$

U posljednjoj jednakosti smo koristili da je r realni broj, a samim tim i komutirali s bilo kojim kvaternionom.

Množenjem s lijeve strane s u^{-1} imamo

$$\dot{r} + r \dot{u} u^{-1} = \frac{\alpha}{2} (r - r^3). \quad (5.16)$$

Posljednja jednačina je skoro ono što želimo dobiti, ali sadrži dodatni izraz s lijeve strane. Uočićemo da je (5.16), strogo rečeno, kvaternionijska ODJ (sistem od 4 realne ODJ-e) i zainteresirani smo za realni dio ODJ-e. Da bismo procijenili realni dio izraza $\dot{u} u^{-1}$, pišemo kvaternion u u Cayley-Dicksonovom obliku:

$$u = z_1 + z_2 j = r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2} j.$$

S obzirom da je u jedinični kvaternion, znamo da je $r_1^2 + r_2^2 \equiv 1$.

Jednostavni računi daju izraze za u^{-1} i \dot{u} :

$$u^{-1} = \bar{u} = r_1 e^{-i\varphi_1} - r_2 e^{i\varphi_2} j;$$

$$\dot{u} = (\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}_1) e^{i\varphi_1} + (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\varphi}_2) e^{i\varphi_2} j.$$

Koristeći dvije posljednje jednačine lako je provjeriti da je:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\dot{u} u^{-1}) &= \dot{r}_1 r_1 + \dot{r}_2 r_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} r_1^2 + \frac{d}{dt} r_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (1) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, izvlačenjem realnog dijela iz kvaternionijske ODJ-e (5.16) dobivamo realnu ODJ-u (5.15). \square

Napomena 5.7. Kako lema 5.2 zahtjeva uniformnu početnu raspodjelu na S^3 , početni uslov za (5.15) je $r(0) = 0$. Međutim, za algoritam konsenzusa $\alpha > 0$ je tada $r = 0$ nestabilna ravnoteža za (5.15). Stoga, roj (5.11) s $\alpha > 0$ će konvergirati prema sinhronizaciji (tj. $r \rightarrow 1$).

5.2.4 Antikonsenzus i balansiranje na S^3

U ovom potparagrafu diskutujemo o zadatku antikonsenzusa preko kompletnog grafa. Ovaj zadatak se može navesti kao minimizacija funkcije $-\hat{V}_q$ definisana s (5.12). Sistem gradijentnog spuska je tada (5.11) za $\alpha < 0$.

Definicija 5.3. Konfiguracija agenata se naziva *balansirana*, ako je njihov centroid nula kvaternion.

Mi ne namećemo nikakve pretpostavke o broju agenata. Roj se može sastojati od konačnog broja N agenata, kao i kontinuuma agenata. U kasnijem slučaju, raspodjela agenta u svakom momentu t je zadana funkcijom gustoće $\eta(q, t)$, gdje je $q \in S^3$. Pojam balansirane konfiguracije se prirodno proteže i na kasniji slučaj.

Kao što je objašnjeno u prethodnom potparagrafu, algoritam konsenzusa preko kompletnog grafa globalno konvergira prema sinhronizaciji. Po analogiji, može se očekivati da algoritam antikonsenzusa konvergira prema određenoj balansiranoj konfiguraciji. Situacija se čini teškom za ovaj zadatak. Ipak, sljedeća propozicija tvrdi da su sve balansirane konfiguracije u stvari konfiguracije antikonsenzusa preko kompletnog grafa.

Propozicija 5.3. [88, 90] *Sve balansirane konfiguracije su lokalni minimumi od $-\hat{V}_q$.*

Suprotna izjava nije dokazana. U nastavku ćemo navesti novi rezultat koji tvrdi da gradijentni sistem (5.11) konvergira prema balansiranoj konfiguraciji pod određenim blagim uslovima.

Pretpostavimo da je početna raspodjela agenata zadana skupom tačaka $\eta = \{q_1(0), \dots, q_N(0)\} \subset S^3$ ili funkcijom gustoće $\eta(q, 0)$ gdje je $q \in S^3$.

Napomena 5.8. Dodjeljujemo vjerovatnosnu mjeru bilo kojoj raspodjeli na S^3 (bez obzira da li je ova raspodjela diskretna ili apsolutno neprekidna). Na ovaj način ćemo govoriti o konformnom baricentru raspodjele agenata na S^3 .

Definicija 5.4. Kažemo da raspodjela na S^3 sadrži *većinski klaster*, ako odgovarajuća vjerovatnosna mjera sadrži atom težine $\geq 1/2$. Za slučaj kada je raspodjela η koncentrisana na konačnom broju N tačaka na S^3 , postojanje većinskog klastera znači da postoji $\geq N/2$ poklapajućih tačaka u η .

Razmotrimo algoritam antikonsenzusa (5.11) za $\alpha < 0$. Zbog korolara 5.1, raspodjela agenata evoluirá na invarijantnoj podmnogostrukosti M_η realne dimenzije 10. Ova invarijantna podmnogostrukost je određena početnom raspodjelom η .

Lema 5.3. *Pretpostavimo da početna raspodjela agenata $\eta(0)$ ne sadrži većinski klaster. Tada postoji jedinstvena (do rotacije na S^3) balansirana konfiguracija na invarijantnoj podmnogostrukosti $M_{\eta(0)}$.*

Dokaz. Mnogostrukost $M_{\eta(0)}$ se sastoji od svih raspodjela na S^3 koje se mogu dobiti kao Möbiusova transformacija od $\eta(0)$. Tada je $\eta(t) \in M_{\eta(0)}$ raspodjela agenata u momentu t .

Zbog teorema 5.2, roj konvergira pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija, što znači da postoji jednoparametarska familija Möbiusovih transformacija g_t , takva da $\eta(t) = g_t(\eta(0))$.

Tada, konformni baricentar $B(\eta(t))$ također evoluira pod dejstvom g_t , $B(\eta(t)) = g_t(B(\eta(0)))$, vidjeti napomenu 5.6.

Dalje, napomenimo da su za balansiranu konfiguraciju i konformni baricentar i centroid u nuli (tj. u centru sfere S^3). Kako bismo izvukli naš zaključak, ostaje da se prisjetimo da postoji tačno jedna (do rotacije na S^3) Möbiusova transformacija koja preslikava tačku $B(\eta(0))$ u nulu. \square

Teorema 5.3. *Pretpostavimo da početna raspodjela agenata η ne sadrži većinski klaster. Tada je balansirana konfiguracija koja se nalazi u M_η globalno stabilna za sistem (5.11) za $\alpha < 0$.*

Dokaz. Prvo, uočimo da se sistem (5.11) može napisati u sljedećem obliku (vidjeti [72]):

$$\dot{q}_j(t) = \alpha(q_j \mu(t) q_j - \bar{\mu}(t)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.17)$$

gdje je $\mu(t) = \langle q \rangle(t) = \frac{1}{N} \sum q_j \in B^4$ centroid roja.

Oblik (5.17) otkriva karakter srednjeg polja sistema (5.11). Djeluje kao da agenti nisu povezani jedni s drugima, ali su u svakom trenutku vremena povezani zajedničkim pravcem na S^3 . Ovaj zajednički pravac predstavlja srednje polje i, naravno, zavisi od konfiguracije agenata i evoluira u vremenu.

Funkcija $p = 1 - r^2 \geq 0$ se može uzeti kao Lyapunova funkcija za sistem (5.17). Minimum od p se postiže vrijednošću $r = 1$ što odgovara sinhroniza-

ciji. Deriviranjem p imamo ([72]):

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{d}{dt}|\mu|^2 = -2(\bar{\mu}\dot{\mu} + \dot{\bar{\mu}}\mu) = -\frac{2}{N^2} \sum_{j,k} \bar{q}_j \dot{q}_k - \frac{2}{N^2} \sum_{j,k} \dot{\bar{q}}_k q_j \\
&= -\frac{2\alpha}{N^2} \sum_{j,k} \bar{q}_j (q_k \mu q_k - \bar{\mu}) - \frac{2\alpha}{N^2} \sum_{j,k} (\bar{q}_k \bar{\mu} \bar{q}_k - \mu) q_j \\
&= \frac{2\alpha}{N} \sum_j (\bar{q}_j \bar{\mu} + \mu q_j) - \frac{2\alpha}{N^2} \sum_{j,k} (\bar{q}_j q_k \mu q_k + \bar{q}_k \bar{\mu} \bar{q}_k q_j) \\
&= \frac{2\alpha}{N} \sum_j (\bar{q}_j \bar{\mu} + \mu q_j) - \frac{2\alpha}{N} \sum_k (\bar{q}_k \bar{\mu} + \mu q_k) + \frac{2\alpha}{N} \sum_j (\bar{q}_j \mu \bar{q}_j \mu + q_j \bar{\mu} q_j \bar{\mu}) \\
&= \frac{2\alpha}{N} \sum_j (\bar{q}_j \mu \bar{q}_j \mu + q_j \bar{\mu} q_j \bar{\mu}) = -\frac{2\alpha}{N} \sum_j (1 - \cos^2(\psi_j)) \geq 0,
\end{aligned}$$

gdje je ψ_j ugao između tačke q_j i pravca srednjeg polja $\langle q \rangle$. Posljednja nejednakost proizlazi iz $\alpha < 0$ i implicira da je p neopadajuća. Shodno tome, globalni parametar poretka r je monotonno neopadajući.

Dalje, lako je zapaziti da svaka konfiguracija s $1 > r > 0$ ne može biti stabilna za sistem (5.17). Da bi to potvrdili, pretpostavimo da je određena konfiguracija s $r > 0$ ravnoteža za (5.17). Očigledno je da svaka perturbacija ove konfiguracije koja smanjuje r odgovara nestabilnom pravcu sistema (5.17). Prema tome, takva ravnoteža ne može biti stabilna.

Konačno, zbog leme 5.2, sistem konvergira prema jedinstvenoj balansiranoj konfiguraciji koja leži u invarijantnoj podmnogostrukosti \mathcal{M}_η . Ova balansirana konfiguracija je određena početnom raspodjelom agenata: $\eta = \{q_1(0), \dots, q_N(0)\}$. \square

5.3 Rojevi na 3-sferi s adaptivnim sinapsama

U ovom paragrafu proučavamo roj s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama na sferi S^3 . U narednom potparagrafu uvodimo specifično Hebbovo pravilo učenja koje dopušta privlačne i odbojne interakcije. Kao što se može očekivati, takav roj teži bipolarnoj konfiguraciji. U potparagrafu 5.3.2 se proučava model s antihebbovim pravilom učenja. Ovaj model omogućava različite netrivialne dinamičke režime i ravnoteže u zavisnosti od broja agenata i parametara sistema. Algoritmi za koordinaciju na S^3 se mogu preslikati na algoritme na grupi 3D rotacija $SO(3)$ pomoću dvostruko pokrivajućeg preslikavanja $S^3 \rightarrow SO(3)$. Ovo je ekvivalentno predstavljanju 3D rotacija jediničnim kvaternionima. Poznato je da ovakvo predstavljanje može proizvesti

neke specifične efekte, zbog toga što dva antipodalna kvaterniona odgovaraju istoj rotaciji. Međutim, u mnogim slučajevima takav pristup ima značajne prednosti u odnosu na konstruisanje metoda direktno na grupi $SO(3)$. Na kraju, u potparagrafu 5.3.3 nudimo nekoliko kratkih video zapisa kako bismo vizualizirali različite dinamičke režime na grupi $SO(3)$.

5.3.1 Roj na S^3 s Hebbovim pravilom učenja

Razmotrimo roj od N agenata koji se kreće na sferi S^3 :

$$\dot{q}_j = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk} (q_j q_k q_j - \bar{q}_k), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.18)$$

Ovdje, $q_j(t)$ je jedinični kvaternion, koji opisuje položaj j -tog agenta na S^3 . Koeficijenti w_{jk} u (5.18) se tumače kao jačine (težine) interakcija između agenata. U ovom paragrafu ćemo se pozabaviti slučajem kada interakcije mogu biti bilo kakvih znakova (privlačne, odbojne ili vremenski zavisne). Ako su w_{jk} strogo nenegativne, sistem (5.18) obezbjeđuje distribuirani algoritam konsenzusa.

Sistem (5.18) se može ekvivalentno zapisati u realnim koordinatama s jediničnim vektorima $x_1(t), \dots, x_N(t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\dot{x}_j = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk} (x_k - \langle x_j, x_k \rangle x_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.19)$$

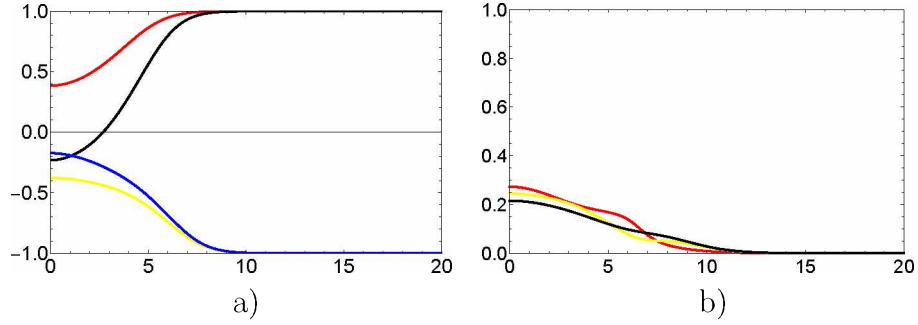
Postoji nekoliko načina za konstruisanje interakcija zavisnih o stanju u skladu s Hebbovim pravilom učenja. Kako bismo dobili neku ravnotežu različitu od konsenzusa, uvodimo pravilo učenja koje rezultira s privlačnim i odbojnim interakcijama w_{jk} . Razmotrimo roj koji je određen sistemom (5.18) s koeficijentima w_{jk} koji uzimaju u obzir sljedeći sistem ODJ:

$$\dot{w}_{jk} = \varepsilon (\bar{q}_j q_k + \bar{q}_k q_j - \mu w_{jk}), \quad \mu > 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N} \quad (5.20)$$

s početnim uslovima koji zadovoljavaju $w_{jk}(0) = w_{kj}(0)$ za sve $1 \leq j, k \leq N$. Ovo osigurava da su interakcije $w_{jk}(t)$ simetrične za svaki naredni moment $t > 0$.

Parametar ε u (5.20) se tumači kao *stopa učenja*.

Sistem (5.20) definiše neku vrstu Hebbovog učenja. Kako bi to razumjeli, primjetimo da je kvaternionski izraz $\frac{1}{2}(\bar{q}_j q_k + \bar{q}_k q_j)$ realan i jednak $\cos \rho_{jk}(t) = \langle x_j, x_k \rangle(t)$, gdje je $\rho_{jk}(t)$ ugao između jediničnih vektora $x_j(t)$ i $x_k(t)$. Stoga je ravnotežna interakcija w_{jk} između agenata j i k maksimalno privlačna



Slika 5.1: Model s Hebbovim učenjem (5.18), (5.20) s $N = 10$ agenata. Vrijednost parametra: $\varepsilon = 0.2$. Nulte početne vrijednosti za sinapse $w_{jk}(0) = 0$ i slučajne početne vrijednosti za $q_j(0)$ smo birali u skladu s napomenom 5.9. (a) Skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).

kada su agenti j i k poravnati ($q_j = q_k$). Obratno, interakcija je maksimalno odbojna ako su agenti pozicionirani u antipodalnim tačkama, $q_j = -q_k$.

Nije iznenađujuće što sistem (5.18), (5.20) završava u bipolarnoj (antipodalnoj) konfiguraciji na S^3 . Na slici 5.1 prikazujemo evoluciju poparnih kosinusa $\cos \rho_{jk}(t) = \langle x_j, x_k \rangle(t)$ za neke parove x_j, x_k .

Napomena 5.9. U svim simulacijama početni uslovi za stanja agenata $q_1(0), \dots, q_N(0)$ su slučajno izabrani iz uniformne raspodjele na S^3 . Interakcije su u početku podešene na nulu, $w_{jk}(0) = 0$, za svako j, k , što znači da mreža ne postoji za $t = 0$.

Definicija 5.5. Konfiguracija agenata, takva da je

$$q_1 = \dots = q_m = -q_{m+1} = \dots = -q_N, \text{ gdje je } 0 \leq m \leq N$$

se naziva bipolarna (ili antipodalna).

Napomenimo da skup bipolarnih konfiguracija uključuje sve konfiguracije konsenzusa. Drugim riječima, konsenzus je bipolarna konfiguracija za $m = N$.

Propozicija 5.4. Skup bipolarnih konfiguracija je asimptotski stabilan za model (5.18), (5.20).

Dokaz. Označimo s $\hat{X} = (\pm \hat{x}, \dots, \pm \hat{x})$ konfiguraciju bipolarne ravnoteže s odgovarajućim interakcijama $\hat{W} = (\pm 1, \dots, \pm 1)$. Dimenzije vektora \hat{X} i \hat{W} su $4N$ i $N^2 - N$ respektivno.

Zapišimo linearizaciju od (5.19), (5.20) oko tačke (\hat{X}, \hat{W}) :

$$\dot{X} = LX + TW + D(X)X, \quad \dot{W} = PX + MW + G(X)X.$$

Tada je matrica linearne aproksimacije od (5.19), (5.20) u okolini tačke (\hat{X}, \hat{W}) :

$$J = \begin{pmatrix} L & T \\ P & M \end{pmatrix}.$$

Ovdje, $T = \frac{\partial f}{\partial w_{jk}}(\hat{X}, \hat{W})$, $M = \frac{\partial g}{\partial w_{jk}}(\hat{X}, \hat{W})$, gdje su f i g desne strane od (5.18) i (5.20):

$$f_j(X, W) = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk}(q_j q_k q_j - \bar{q}_k) = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk}(x_k - \langle x_j, x_k \rangle x_j)$$

i

$$g_{jk}(X, W) = \varepsilon(\bar{q}_j q_k + \bar{q}_k q_j - \mu w_{jk}) = \varepsilon(2\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk}).$$

Jednostavno deriviranje daje:

$$\frac{\partial f_j}{\partial w_{jk}} = \alpha(x_j - \langle x_k, x_j \rangle x_k).$$

Ovaj izraz je jednak nuli kod bipolarne konfiguracije, kada je $x_j = \pm x_k$, te je:

$$\frac{\partial f}{\partial w_{jk}}(\hat{X}, \hat{X}) = 0, \text{ za sve } j \text{ i } k.$$

Također, deriviranjem g :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial w_{st}} = \begin{cases} -\varepsilon\mu, & \text{if } j = s, k = t; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

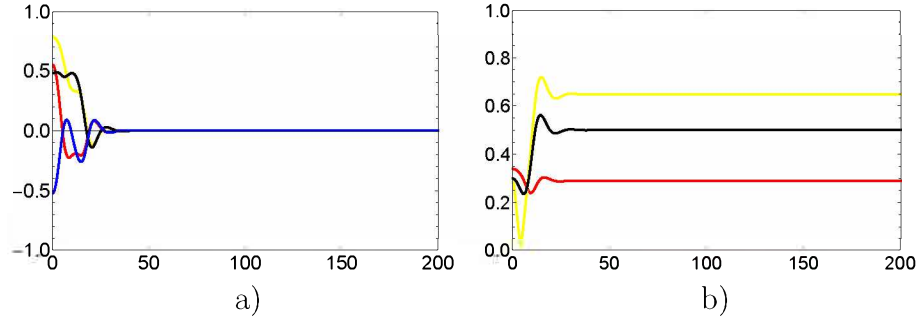
Otuda, matrica T se sastoji od nula i M je $(N^2 - N) \times (N^2 - N)$ dijagonalna matrica s dijagonalnim elementima $-\mu$.

Karakteristični polinom matrice J glasi:

$$\det(L - tI) \det(M - tI) = \det(L - tI)(-\mu - t)^{N^2 - N}.$$

Iz toga slijedi da je antipodalna ravnoteža (\hat{X}, \hat{W}) za (5.19), (5.20) stabilna kada je \hat{X} stabilna ravnoteža za (5.19) s odgovarajućim interakcijama $w_{jk} = \pm 1$ za svako j i k .

Da bismo završili dokaz, pozivamo se na rezultate [18, 72] koji kažu da je antipodalna konfiguracija asimptotski stabilna ravnoteža za (5.19) ako su interakcije w_{jk} simetrične. \square



Slika 5.2: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 4$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) Skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).

5.3.2 Roj na S^3 s antihebbovim pravilom učenja

U ovom potparagrafu razmatramo model (5.18) s malo modifikovanim pravilom za dinamiku sinapsa:

$$\dot{w}_{jk} = \varepsilon(-(\bar{q}_j q_k + \bar{q}_k q_j) - \mu w_{jk}), \quad \mu > 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.21)$$

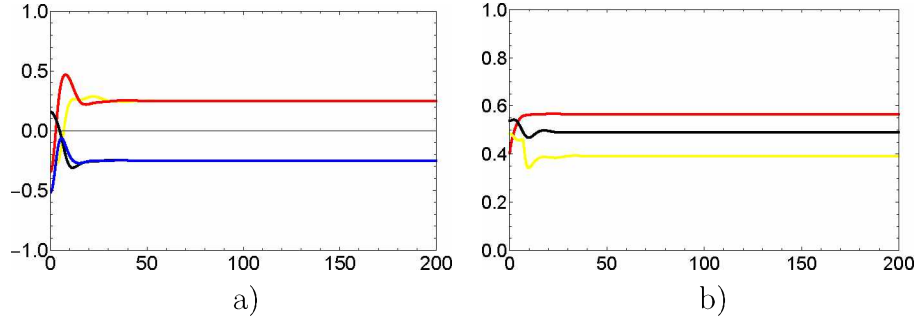
Kao u potparagrafu 5.3.1, ponovo pretpostavljamo da su početni uslovi $w_{jk}(0)$ simetrični, osiguravajući da je $w_{jk}(t) = w_{kj}(t)$ za svako $t > 0$.

Sistem (5.21) definiše pravilo koje je u izvjesnom smislu suprotno od Hebbovog: interakcija između dva agenta postaje odbojna kada su njihova stanja dovoljno blizu.

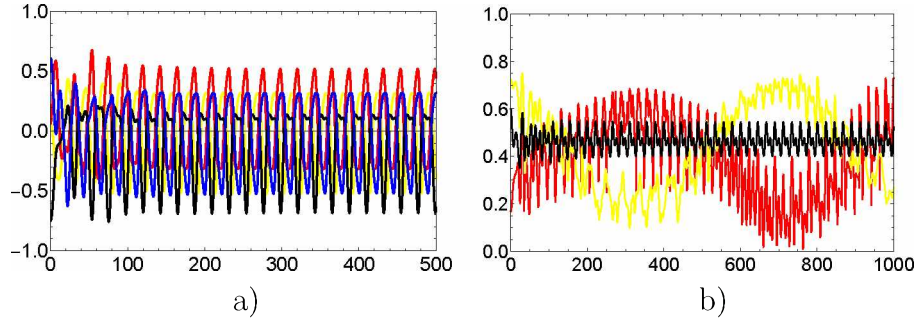
Antihebbov model (5.18), (5.21) pokazuje raznovrsne konfiguracije ravnoteža i dinamičke režime zavisno od parametra μ i broja agenata N . Iz tog razloga je teže dobiti neke teorijske rezultate. Počnimo s nekim numeričkim simulacijama za različiti broj agenata N .

Slučaj A: $N \leq 4$ agenata Ovaj slučaj je veoma jednostavan: roj evoluira prema konfiguraciji u kojoj sve interakcije w_{jk} nestanu. Takav razmještaj se postiže kada je sistem vektora x_1, \dots, x_N ortonormalan. Slika 5.2 ilustrira evoluciju 4 agenata prema ovoj stabilnoj konfiguraciji.

Slučaj B: $N = 5$ agenata Za $N = 5$ situacija je zapetljanija. Agenti teže da zauzimaju sistem ortonormalnih vektora na S^3 , tako da sve interakcije w_{jk} nestanu. Međutim, takva konfiguracija nije moguća, s obzirom da dimenzija ambijentalnog prostora nije dovoljna i postoji jedan suvišan agent. Dakle, oni



Slika 5.3: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).



Slika 5.4: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 1$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).

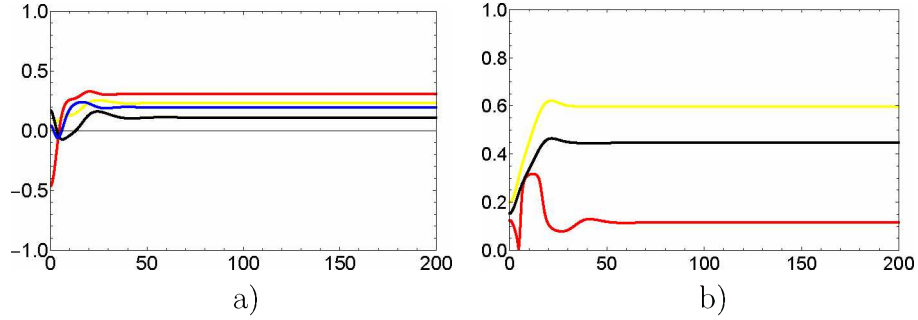
traže kompromis, a ako interakcije mogu biti dovoljno slabe, taj kompromis postaje stabilan.

Na slici 5.3 prikazujemo evoluciju prema stabilnoj konfiguraciji kada je parametar μ dovoljno velik.

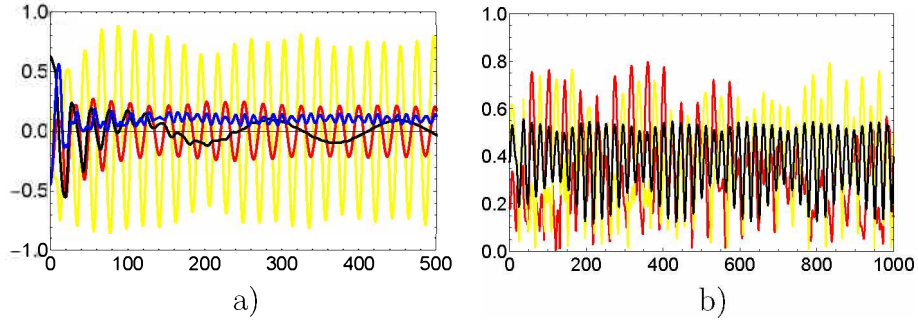
Zapravo, za svako $\mu > \mu_0 \approx 1.39$ se postiže ista konfiguracija stabilne ravnoteže (s kosinusima svih uglova između vektora koji su jednaki ± 0.25).

U cjelini, simulacije sugerišu da za bilo koje $\mu > 1.39$ postoji u suštini jedinstvena (do rotacije na S^3 i renumeracije agenata) stabilna ravnoteža.

Za $\mu < 1.39$ ova ravnoteža je nestabilna i cijeli sistem oscilira. Ovo je ilustrirano na slici 5.4. Dakle, dok se μ smanjuje, sistem prolazi oscilirajućom bifurkacijom za $\mu \approx 1.39$.



Slika 5.5: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 2$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).



Slika 5.6: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 1$. Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao φ (crvena linija) i parametar poretka za ugao ψ (žuta linija).

Slučaj C: $N = 6$ agenata Model s 6 agenata ima bifurkacionu vrijednost μ_1 približno u 1.59. Za $\mu > \mu_1$ sistem teži stabilnoj ravnoteži. Postoji bitna razlika s prethodnim slučajem: ova ravnoteža nije jedinstvena, a konačna konfiguracija zavisi od početnih uslova. Drugim riječima, sistem s 6 agenata i $\mu > \mu_1 \approx 1.59$ je *multistabilan*, s nekoliko (bitno drugačijih) stabilnih ravnoteža. Konvergencija prema jednoj stabilnoj konfiguraciji je prikazana na slici 5.5.

Za $\mu < \mu_1$ sistem pokazuje oscilatorno ponašanje, vidjeti sliku 5.6.

Sumirajući gore navedenu diskusiju, rezultati simulacija ukazuju da će agenti postići kompromis ako je parametar μ dovoljno velik. Drugim riječima, za dovoljno veliko μ postoji ili jedna jedinstvena (modulo 4D rotacije i re-

numeracija agenata) stabilna ravnoteža (kada je $N = 5$) ili nekoliko bitno različitih stabilnih ravnoteža (kao i s $N = 6$ agenata). Sljedeća teorema tvrdi da ovo važi za proizvoljan broj agenata.

Teorema 5.4. *Za dovoljno veliko μ sistem (5.18) s antihebbovim pravilom učenja (5.21) teži stabilnoj stacionarnoj ravnoteži.*

Zbog jednostavnosti ćemo raditi s realnim vektorima x_1, \dots, x_N i sistemom u obliku (5.19).

Prvo, definišimo vektore:

$$\alpha_j = \sum_{k \neq j} w_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, N.$$

Vektor α_j se može tumačiti kao ukupan uticaj na agenta j od svih drugih agenata.

Zamjenjujući α_j u (5.19) dobivamo:

$$\dot{x}_j = \alpha_j - \langle \alpha_j, x_j \rangle x_j.$$

Definišimo kinetičku energiju sistema: $E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |\dot{x}_j(t)|^2$.

Uzimajući u obzir da su x_j jedinični vektori, lako je provjeriti da je $E(t) = \frac{1}{2} \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle$.

Zapišimo sistem (5.21) s realnim vektorima:

$$\dot{w}_{jk} = -\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk}, \quad \mu > 0. \quad (5.22)$$

Za dokaz teoreme nam je potrebna sljedeća lema:

Lema 5.4. *Za dovoljno veliko μ vrijedi:*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \dot{w}_{jk}^2(t) \leq E(t) + \epsilon(t),$$

gdje je $\epsilon(t)$ diferencijabilna funkcija koja konvergira nuli kada $t \rightarrow \infty$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati lemu 5.4. Da pojednostavimo obilježavanje, neka je: $b(t) = -\langle x_j, x_k \rangle(t)$, $x(t) = w_{jk}(t)$. Tada je jednačina (5.22) napisana kao

$$\dot{x} = b(t) - \mu x.$$

Rješenje ove ODJ-e je napisano kako slijedi

$$x(t) = x(0)e^{-\mu \int_0^t ds} + \int_0^t b(s)e^{-\mu \int_s^t d\tau} ds =$$

$$x(0)e^{-\mu t} + \int_0^t b(s)e^{-\mu(t-s)} ds = x(0)e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t b(s)e^{\mu s} ds =$$

$$(\text{koristeći integraciju po dijelovima}) =$$

$$x(0)e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \left(b(t)e^{\mu t} - b(0) - \int_0^t b'(s)e^{\mu s} ds \right) =$$

$$\frac{1}{\mu} b(t) - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \int_0^t b'(s)e^{\mu s} ds + e^{-\mu t} (x(0) - \frac{1}{\mu} b(0)).$$

Množenjem ove jednakosti s μ dobivamo

$$\mu x(t) - b(t) = -e^{-\mu t} \int_0^t b'(s)e^{\mu s} ds + \epsilon(t),$$

gdje $\epsilon(t)$ označava funkciju koja konvergira nuli kada $t \rightarrow \infty$.

Uzimajući limes kada $t \rightarrow \infty$ i koristeći L'Hospitalovo pravilo dobivamo

$$\mu x(t) - b(t) \rightarrow -\frac{b'(t)e^{\mu t}}{\mu e^{\mu t}} = -\frac{b'(t)}{\mu}, \text{ kada } t \rightarrow \infty.$$

Procjena kvadrata gore navedene jednakosti je

$$(\mu x(t) - b(t))^2 = \frac{b'(t)^2}{\mu^2} + \epsilon(t).$$

Vraćanjem nazad na originalno obilježavanje imamo

$$(\mu x(t) - b(t))^2 = (\mu w_{jk}(t) + \langle x_j, x_k \rangle(t))^2 =$$

$$\dot{w}_{jk}(t)^2 = \frac{\left(\frac{d}{dt} \langle x_j, x_k \rangle(t) \right)^2}{\mu^2} + \epsilon(t).$$

Sada je lako provjeriti da $\left(\frac{d}{dt}\langle x_j, x_k \rangle(t)\right)^2 \leq cE(t)$ za neku pozitivnu konstantu c . Zaista:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\langle x_j, x_k \rangle(t)\right)^2 &= \langle \dot{x}_j, x_k \rangle^2 + \langle x_j, \dot{x}_k \rangle^2 + 2\langle \dot{x}_j, x_k \rangle \langle x_j, \dot{x}_k \rangle \leq \\ &= |\dot{x}_j|^2 \cdot |x_k|^2 + |x_j|^2 \cdot |\dot{x}_k|^2 + 2|\dot{x}_j| \cdot |x_k| \cdot |x_j| \cdot |\dot{x}_k| = \\ &= |\dot{x}_j|^2 + |\dot{x}_k|^2 + 2|\dot{x}_j| \cdot |\dot{x}_k| \leq c \sum_j |\dot{x}_j|^2 = cE(t). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_j \sum_k \dot{w}_{jk}^2 = \frac{1}{\mu^2} \sum_j \sum_k \left(\frac{d}{dt}\langle x_j, x_k \rangle(t)\right)^2 + \epsilon(t) \leq \frac{cN^2}{\mu^2} E(t) + \epsilon(t)$$

i za dovoljno veliko μ : $\sum_j \sum_k \dot{w}_{jk}^2 \leq E(t) + \epsilon(t)$. \square

Dokaz. Da bi se dokazao teorem 5.4 razmotrimo sljedeću funkciju:

$$F(t) = \sum_{j=1}^N \langle x_j, \alpha_j \rangle + \frac{1}{2}\mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{jk}^2.$$

Deriviranjem $F(t)$ duž trajektorija od (5.19), (5.22) se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &= \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle + \sum_j \langle x_j, \dot{\alpha}_j \rangle + \mu \sum_j \sum_k w_{jk} \dot{w}_{jk} = \\ &= \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle + \sum_j \sum_k \langle x_j, w_{jk} \dot{x}_k \rangle + \sum_j \sum_k \langle x_j, \dot{w}_{jk} x_k \rangle - \\ &= \mu \sum_j \sum_k w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle - \mu^2 \sum_j \sum_k w_{jk}^2 = \\ &= \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle + \sum_k \left\langle \sum_j w_{kj} x_j, \dot{x}_k \right\rangle + \sum_k \left\langle \sum_j \dot{w}_{kj} x_j, x_k \right\rangle - \\ &= \mu \sum_k \left\langle \sum_j w_{kj} x_j, x_k \right\rangle - \mu^2 \sum_j \sum_k w_{jk}^2 = \end{aligned}$$

(koristeći (5.22) i simetričnost interakcija $w_{jk}(t)$ za svako t)

$$\begin{aligned}
& \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle + \sum_k \langle \alpha_k, \dot{x}_k \rangle + \sum_j \sum_k (-\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk}) \langle x_j, x_k \rangle - \\
& \mu \sum_k \langle \sum_j w_{jk} x_j, x_k \rangle - \mu^2 \sum_j \sum_k w_{jk}^2 = 2 \sum_j \langle \dot{x}_j, \alpha_j \rangle - \\
& \sum_j \sum_k \langle x_j, x_k \rangle^2 - \mu \sum_k \langle \alpha_k, x_k \rangle - \mu \sum_j \langle x_j, \alpha_j \rangle - \\
& \mu^2 \sum_j \sum_k w_{jk}^2 = 4E(t) - \sum_j \sum_k \langle x_j, x_k \rangle^2 - \\
& 2\mu \sum_j \sum_k w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle - \mu^2 \sum_j \sum_k w_{jk}^2 = \\
& 4E(t) - \sum_j \sum_k (-\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk})^2 = 4E(t) - \sum_j \sum_k \dot{w}_{jk}^2.
\end{aligned}$$

Kinetička energija $E(t)$ je nenegativna funkcija. Primjenjujući lemu 5.4 dobivamo da $\frac{d}{dt} F(t) \geq 3E(t) + \epsilon(t) \geq \epsilon(t)$ gdje $\epsilon(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Dalje, funkcija $F(t)$ je ograničena, jer

$$\begin{aligned}
|F(t)| & \leq \left| \sum_j \langle x_j, \alpha_j \rangle \right| + \mu \left| \sum_j \sum_k w_{jk}^2 \right| = \\
& \left| \sum_j \sum_k w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle \right| + \mu \left| \sum_j \sum_k w_{jk}^2 \right| \leq \sum_j \sum_k (|w_{jk}| + \mu w_{jk}^2)
\end{aligned}$$

i funkcije $w_{jk}(t)$ su ograničene kao rješenje od (5.22) za $\mu > 0$.

Otuda, $F'(t) \geq \epsilon(t)$ i $|F(t)| < c$, te zaključujemo da $F'(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Sada imamo da $3E(t) + \epsilon(t) \leq F'(t) \rightarrow 0$ kad $t \rightarrow \infty$ i $E(t) \geq 0$. Dakle, $E(t) \rightarrow 0$ i sistem teži stacionarnoj ravnoteži kada $t \rightarrow \infty$. \square

5.3.3 Primjene i vizualizacija

Kao što je naglašeno u uvodu, geometrija sfere S^3 je čini veoma pogodnim osnovnim prostorom za izradu algoritama konsenzusa i koordinacije. Ovo ukazuje na to da je u mnogim slučajevima korisno konstruisati algoritme na rotacijskim grupama $SO(3)$ i $SO(4)$ koristeći grupne homomorfizme od S^3 . Ovo se postiže pokretanjem simulacija na S^3 i preslikavanjem trajektorija svih agenata iz S^3 na $SO(3)$ (i od $S^3 \times S^3$ na $SO(4)$). Poznato je da u nekim situacijama ovaj pristup može uzrokovati neželjene efekte. Na primjer, bipolarna konfiguracija na S^3 odgovara konsenzusu na $SO(3)$.

U dodatnim materijalima rada [26] se mogu vidjeti nekoliko kratkih video zapisa koji ilustruju različite dinamičke režime u rojevima s 5 i 6 agenata s antihebbovim pravilom učenja (5.21). Ovi video zapisi se dobijaju preslikavanjem trajektorija iz S^3 na $SO(3)$.

Prva dva video zapisa ilustruju konvergenciju prema konfiguracijama ravnoteže s 5 i 6 agenata respektivno. Vrijednost parametra u obje simulacije je $\mu = 2$.

Dalje, ilustrujemo oscilatorne režime koji se javljaju kada je μ ispod praga bifurkacije. Treći i četvrti video zapisi pokazuju oscilatorno ponašanje u rojevima s 5 i 6 agenata respektivno. Vrijednost parametra je podešena na $\mu = 1$.

Glava 6

Zaključak

Nakon pionirskog rada Kuramoto od 1975., mnogobrojna istraživanja velikih populacija povezanih oscilatora su dovela do izvanrednog napretka [52]. Bolje objašnjenje dinamike i kolektivnog ponašanja povezanih oscilatora otkriva neočekivane veze s nekim važnim matematičkim teorijama. U drugoj glavi smo predstavili određene relacije između direkcione statistike i kolektivne dinamike povezanih oscilatora. Pokazali smo da je Kato-Jones raspodjela, zajedno s umotanom Cauchyjevom i von Misesovom raspodjelom relevantna u proučavanju povezanih oscilatora. Pretpostavili smo da bi se ove raspodjele mogle pojaviti u ćelijskom ciklusu razmnožavanja i predložili da se to eksperimentalno provjeri. Nadalje, demonstrirali smo kako se unimodalna simetrična raspodjela može transformisati u bimodalnu i asimetričnu pod efektom veze srednjeg polja. Precizirali smo koji efekti u vezi mogu biti odgovorni za promjene u modalnosti i asimetričnosti. Zatim, koristeći analizu iz rada [50], objasnili smo neke moguće dugotrajne evolucione scenarije fazne raspodjele koji su pod uticajem srednjeg polja.

U ovoj disertaciji se koristi bogata matematička teorija vezana za Möbiusove transformacije, uključujući klasične koncepte kompleksne analize, projektivne geometrije i algebre. Koristeći ove matematičke alate, u trećoj glavi smo predložili konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža tretirajući je kao mrežu povezanih oscilatora (gdje su čvorovi oscilatori, a grane su veze između oscilatora). Svakoj kompleksnoj mreži \mathcal{N} smo pridružili dvije slučajne promjenljive $X_{\mathcal{N}}$ i $Y_{\mathcal{N}}$. Njihove raspodjele sadrže važne informacije o samoj mreži \mathcal{N} i njenim podmrežama. Mi ne znamo te raspodjele, ali možemo koristiti Monte Carlo metod za generaciju empirijskih funkcija gustoće vjerovatnosti. Nadalje, pokazali smo da grupa Möbiusovih transformacija može poslužiti kao adekvatan matematički objekat za opisivanje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora i detekciji zajednica u kompleksnim mrežama.

U četvrtoj glavi uvodimo neabelov model Kuramoto (4.4) identičnih uo-

pštenih oscilatora na sferi S^3 s globalnom vezom. Jednačine u ovom modelu su kvaternionske Riccatijeve diferencijalne jednačine (ili, ekvivalentno, matrice Riccatijeve diferencijalne jednačine na grupi $SU(2)$). Tada populacija evoluira pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju S^3 . Ovo je teorijsko objašnjenje za niskodimenziono ponašanje u modelu. Vjerujemo da značajna vrijednost ovog modela leži u potencijalnim primjenama u matematici, mašinskom učenju, obradi podataka, robotici, itd. Za različite primjene potrebno je razmotriti različite varijacije modela bez pretpostavke da je veza globalna i/ili da su uopšteni oscilatori identični. U istoj glavi smo predložili novi algoritam za klasteriranje podataka koji je zasnovan na sinhronizaciji u neabelovim modelima Kuramoto. Predstavili smo metod koji odgovara modelu na $SU(2)$ pod pretpostavkom da se podaci predstavljaju s ne više od 6 atributa. Za podatke čija je dimenzija veća od 6 se možda može koristiti model na $SU(n)$. Ova ideja je pogodna za hijerarhijsko klasteriranje jer je zasnovana na hijerarhijskoj prirodi procesa sinhronizacije. Također, naš pristup se može koristiti za klasteriranje skupa podataka koji se sastoji od objekata označenih vektorom atributa zajedno s relacionim odnosima, koji predstavljaju (eventualno višeslojnu) mrežu.

U petoj glavi smo proučavali konsenzus i antikonsenzus na 3-sferi kao zadatke globalne optimizacije. Odgovarajući algoritam gradijentnog spuska je neabelov model Kuramoto na S^3 . Ovo zapažanje nam je otvorilo malo drugačiji uvid u neke prethodne rezultate i također omogućilo da dokažemo neke nove rezultate u vezi s konsenzusom i balansiranjem nad kompletnim grafom. Na ovaj način smo popunili neke praznine u postojećoj teoriji. Konkretno, dokazali smo da će roj na S^3 pod protokolom antikonsenzusa konvergirati prema balansiranoj konfiguraciji. Štaviše, ova balansirana konfiguracija je jedinstveno (do rotacije na S^3) određena početnom raspodjelom agenata. Ključna pretpostavka je odsustvo većinskog klastera u početnoj raspodjeli agenata. Ovo otkriva neočekivanu relaciju s konstrukcijom Douady-Earlea [29] koja se široko istražuje i koristi u ovoj glavi.

U nastavku iste glave smo uveli i analizirali nekoliko modela dinamike roja na sferi S^3 s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama između agenata. Jednačine koje opisuju dinamiku interakcija su varijacije klasičnog Hebbovog principa iz nauke o neuronima. Proučavali smo asimptotsko ponašanje u modelima s različitim realizacijama Hebbovog i antihebbovog pravila učenja. Roj s Hebbovim pravilom i nenegativnim (privlačnim) interakcijama evoluira prema konsenzusu. Ako Hebbovo pravilo dozvoljava privlačne i odbojne interakcije, roj konvergira prema bipolarnoj konfiguraciji. Najinteresantniji je model s antihebbovim pravilom učenja s privlačnim i odbojnim interakcijama. Ovaj model prikazuje bogat izbor dinamičkih režima i stacionarnih formacija, koji zavise od broja agenata i parametara sistema. Dokazali smo

da model s takvim antihebbovim pravilom evoluirá prema stabilnoj stacionarnoj konfiguraciji ako je parametar sistema iznad određenog praga bifurkacije. Naglasimo da većina teorijskih rezultata u ovoj glavi vrijede za bilo koju sferu S^n , a ne isključivo za S^3 . Fokusirali smo se na S^3 , jer je ovaj konkretan slučaj od posebnog značaja u primjenama.

Literatura

- [1] Abrams, D.M., Mirollo, R., Strogatz, S.H., Wiley, D.A.: *Solvable model for chimera states of coupled oscillators*. Physical Review Letters **101**(8), 084103 (2008)
- [2] Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F., Spigler, R.: *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena*. Reviews of Modern Physics **77**(1), 137 (2005)
- [3] Allefeld, C., Kurths, J.: *Testing for Phase Synchronization*. International Journal of Bifurcation and Chaos **14**(2), 405–416 (2004)
- [4] Amdaoud, M., Vallade, M., Weiss-Schaber, C., Mihalcescu, I.: *Cyanobacterial clock, a stable phase oscillator with negligible intercellular coupling*. Proceedings of the National Academy of Sciences **104**(17), 7051–7056 (2007)
- [5] Antonelli, P., Marcati, P.: *A model of synchronization over quantum networks*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**(31), 315101 (2017)
- [6] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Pérez-Vicente, C.J.: *Synchronization reveals topological scales in complex networks*. Physical Review Letters **96**(11), 114102 (2006)
- [7] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Pérez-Vicente, C.J.: *Synchronization processes in complex networks*. Physica D: Nonlinear Phenomena **224**(1), 27–34 (2006)
- [8] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C.: *Synchronization in complex networks*. Physics Reports **469**(3), 93–153 (2008)
- [9] Arnaudon, M., Barbaresco, F., Yang, L.: *Medians and means in Riemannian geometry: existence, uniqueness and computation*. Matrix Information Geometry, 169–197 (2013)

- [10] Bag, B.C., Petrosyan, K.G., Hu, C.-K.: *Influence of noise on the synchronization of the stochastic Kuramoto model*. Physical Review E **76**(5), 056210 (2007)
- [11] Balanov, A. G., Janson N. B., Postnov, D. E., Sosnovtseva, O. V.: *Synchronization: From Simple to Complex*. Springer, Berlin (2009)
- [12] Barabási, A.-L.: *Network Science*. Cambridge University Press, Cambridge (2016)
- [13] Boccaletti, S., Ivanchenko, M., Latora, V., Pluchino, A., Rapisarda, A.: *Detecting complex network modularity by dynamical clustering*. Physical Review E **75**(4), 045102 (2007)
- [14] Buchstaber, V. M., Karpov, O. V., Tertychnyi, S. I.: *A system on a torus modelling the dynamics of a Josephson junction*. Russian Mathematical Surveys **67**(1), 178–180 (2012)
- [15] Cadieu, C. F., Koepsell, K.: *Phase coupling estimation from multivariate phase statistics*. Neural computation **22**(12), 3107–3126 (2010)
- [16] Campos, J.: *Möbius transformations and periodic solutions of complex Riccati equations*. Bulletin of the London Mathematical Society **29**(2), 205–215 (1997)
- [17] Canolty, R. T., Ganguly, K., Kennerley, S. W., Cadieu, C. F., Koepsell, K., Wallis, J. D., Carmena, J. M.: *Oscillatory phase coupling coordinates anatomically dispersed functional cell assemblies*. Proceedings of the National Academy of Sciences **107**(40), 17356–17361 (2010)
- [18] Caponigro, M., Lai, A. C., Piccoli, B.: *A nonlinear model of opinion formation on the sphere*. Discrete & Continuous Dynamical Systems-A **35**(9), 4241–4268 (2015)
- [19] Chaturvedi, N.A., Sanyal, A.K., McClamroch, N.H.: *Rigid-body attitude control*. IEEE Control Systems **31**(3), 30–51 (2011)
- [20] Chen, B., Engelbrecht, J. R., Mirollo, R.: *Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**(35), 355101 (2017)
- [21] Chi, D., Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: *Emergent behaviors of a holonomic particle system on a sphere*. Journal of Mathematical Physics **55**(5), 052703 (2014)

- [22] Choi, M.Y., Kim, H.J., Kim, D., Hong, H.: *Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay*. Physical Review E **61**(1), 371 (2000)
- [23] Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: *Large-time dynamics of the asymptotic Lohe model with a small time-delay*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**(42), 425101 (2015)
- [24] Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: *Time-delayed interactions and synchronization of identical Lohe oscillators*. Quarterly of Applied Mathematics **74**(2), 297–319 (2016)
- [25] Central Intelligence Agency: *The World Factbook*. [Online]. Available: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook> (2018, Dec.)
- [26] Crnkić, A., Jaćimović, V.: *Swarms on the 3-sphere with adaptive synapses: Hebbian and anti-Hebbian learning rule*. Systems & Control Letters **122**, 32–38 (2018)
- [27] Crnkić, A., Jaćimović, V.: *Consensus and balancing on the three-sphere*. Journal of Global Optimization, <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0723-1> (2018)
- [28] de Lucas, J., Tobolski, M., Vilariño, S.: *Geometry of Riccati equations over normed division algebras*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **440**(1), 394–414 (2016)
- [29] Douady, A., Earle, C. J.: *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*. Acta Mathematica **157**(1), 23–48 (1986)
- [30] Engelbrecht, J. R., Mirollo, R.: *Classification of attractors for systems of identical coupled Kuramoto oscillators*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **24**(1), 013114 (2014)
- [31] Fisher, N. I.: *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- [32] Fortunato, S.: *Community detection in graphs*. Physics Reports **486**(3), 75–174 (2010)
- [33] Frenkel, I., Libine, M.: *Quaternionic analysis, representation theory and physics*. Advances in Mathematics **218**(6), 1806–1877 (2008)

- [34] Golomb, D., Hansel, D., Shraiman, B., Sompolinsky, H.: *Clustering in globally coupled phase oscillators*. Physical Review A **45**(6), 3516 (1992)
- [35] Gwynne, E., Libine, M.: *On a quaternionic analogue of the cross-ratio*. Advances in Applied Clifford Algebras **22**(4), 1041–1053 (2012)
- [36] Ha, S.-Y., Ko, D., Park, J., Zhang, X.: *Collective synchronization of classical and quantum oscillators*. EMS Surveys in Mathematical Sciences **3**(2), 209–267 (2016)
- [37] Ha, S.-Y., Noh, S. E., Park, J.: *Synchronization of Kuramoto oscillators with adaptive couplings*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems **15**(1), 162–194 (2016)
- [38] Ha, S.-Y., Ko, D., Ryoo, S. W.: *Emergent dynamics of a generalized Lohe model on some class of Lie groups*. Journal of Statistical Physics **168**(1), 171–207 (2017)
- [39] Hartley, R., Trumpf, J., Dai, Y., Li, H.: *Rotation averaging*. International Journal of Computer Vision **103**(3), 267–305 (2013)
- [40] Hill, N.A., Häder, D.-P.: *A biased random walk model for the trajectories of swimming micro-organisms*. Journal of Theoretical Biology **186**(4), 503–526 (1997)
- [41] Hölzel, R. W., Krischer, K.: *Stability and long term behavior of a Hebbian network of Kuramoto oscillators*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems **14**(1), 188–201 (2015)
- [42] Huygens, C.: Letters to de Sluse, (letters; no. 1333 of 24 February 1665, no. 1335 of 26 February 1665, no. 1345 of 6 March 1665) (Societe Hollandaise Des Sciences, Martinus Nijho, 1895).
- [43] Jacques, J., Preda, C.: *Model-based clustering for multivariate functional data*. Computational Statistics & Data Analysis **71**, 92–106 (2014)
- [44] Jacques, J., Preda, C.: *Clustering multivariate functional data*. In: COMPSTAT 2012, 353–366 (2012)
- [45] Jaćimović, V.: *Computing the Douady–Earle extension using Kuramoto oscillators*. Analysis and Mathematical Physics, 1–7 (2018)
- [46] Jadbabaie, A., Lin, J., Morse, A. S.: *Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules*. IEEE Transactions on Automatic Control **48**(6), 988–1001 (2003)

- [47] Jain, A. K., Murty, M. N., Flynn, P. J.: *Data clustering: a review*. ACM Computing Surveys (CSUR) **31**(3), 264–323 (1999)
- [48] Jain, A. K.: *Data clustering: 50 years beyond K-means*. Pattern Recognition Letters **31**(8), 651–666 (2010)
- [49] Karcher, H.: *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*. Communications on pure and applied mathematics **30**(5), 509–541 (1977)
- [50] Kato, S., Jones, M. C.: *A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation*. Journal of the American Statistical Association **105**(489), 249–262 (2010)
- [51] Kato, S., McCullagh, P.: *Conformal mapping for multivariate Cauchy families*. arXiv preprint arXiv:1510.07679, (2015)
- [52] Kuramoto, Y.: *Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators*. In: Proc. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, 420–422 (1975)
- [53] Lee, W. S., Ott, E., Antonsen, T. M.: *Large coupled oscillator systems with heterogeneous interaction delays*. Physical Review Letters **103**(4), 044101 (2009)
- [54] Li, D., Leyva, I., Almendral, J.A., Sendina-Nadal, I., Buldú, J.M., Havlin, S., Boccaletti, S.: *Synchronization interfaces and overlapping communities in complex networks*. Physical Review Letters **101**(16), 168701 (2008)
- [55] Li, W., Spong, M. W.: *Unified cooperative control of multiple agents on a sphere for different spherical patterns*. IEEE Transactions on Automatic Control **59**(5), 1283–1289 (2014)
- [56] Li, W.: *Collective motion of swarming agents evolving on a sphere manifold: A fundamental framework and characterization*. Scientific Reports **5**, 13603 (2015)
- [57] Lohe, M. A.: *Non-Abelian Kuramoto models and synchronization*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42**(39), 395101 (2009)
- [58] Lohe, M. A.: *Quantum synchronization over quantum networks*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43**(46), 465301 (2010)

- [59] Lou, X., Suykens, J.A.K.: *Finding communities in weighted networks through synchronization*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **21**(4), 043116 (2011)
- [60] Mardia, K. V., Jupp, P. E.: *Directional statistics*. John Wiley & Sons, New York (2009)
- [61] Markdahl, J., Gonçalves, J.: *Global convergence properties of a consensus protocol on the n -sphere*. In: Proc. 55th IEEE Conf. Decision and Control, pp. 3487–3492 (2016)
- [62] Markdahl, J., Thunberg, J., Gonçalves, J.: *Almost global consensus on the n -sphere*. IEEE Transactions on Automatic Control **63**(6), 1664–1675 (2018)
- [63] Marvel, S.A., Mirollo, R.E., Strogatz, S.H.: *Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **19**(4), 043104 (2009)
- [64] McCullagh, P.: *Möbius transformation and Cauchy parameter estimation*. The Annals of Statistics **24**(2), 787–808 (1996)
- [65] Miyano, T., Tsutsui, T.: *Data synchronization in a network of coupled phase oscillators*. Physical Review Letters **98**(2), 024102 (2007)
- [66] Morgan, D. O.: *The cell cycle: principles of control*. New Science Press, London (2009)
- [67] Nedic, A., Ozdaglar, A., Parrilo, P.A.: *Constrained consensus and optimization in multi-agent networks*. IEEE Transactions on Automatic Control **55**(4), 922–938 (2010)
- [68] Needham, T.: *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford (2002)
- [69] Nichols, S., Wiesenfeld, K.: *Ubiquitous neutral stability of splay-phase states*. Physical Review A **45**(12), 8430 (1992)
- [70] Novikov, A. V., Benderskaya, E. N.: *Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis*. Pattern Recognition and Image Analysis **24**(3), 365–371 (2014)
- [71] Oh, E., Rho, K., Hong, H., Kahng, B.: *Modular synchronization in complex networks*. Physical Review E **72**(4), 047101 (2005)

- [72] Olfati-Saber, R.: *Swarms on sphere: A programmable swarm with synchronous behaviors like oscillator networks*. In: Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, 5060–5066 (2006)
- [73] Olfati-Saber, R., Fax, J.A., Murray, R.M.: *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*. Proceedings of the IEEE **95**(1), 215–233 (2007)
- [74] Ott, E., Antonsen, T.M.: *Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **18**(3), 037113 (2008)
- [75] Ott, E., Antonsen, T.M.: *Long time evolution of phase oscillator systems*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **19**(2), 023117 (2009)
- [76] Paley, D.A.: *Stabilization of collective motion on a sphere*. Automatica **45**(1), 212–216 (2009)
- [77] Panaggio, M.J., Abrams, D.M.: *Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators*. Nonlinearity **28**(3), R67 (2015)
- [78] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J.: *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge (2003)
- [79] Pikovsky, A., Rosenblum, M.: *Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators*. Physical Review Letters **101**(26), 264103 (2008)
- [80] Pikovsky, A., Rosenblum, M.: *Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables*. Physica D: Nonlinear Phenomena **240**(9), 872–881 (2011)
- [81] Ramsay, J. O., Silverman, B. W.: *Functional data analysis*. Springer, New York (2005)
- [82] Risken, H.: *The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications*. Springer, Berlin (1989)
- [83] Rodrigues, F. A., Peron, T. K. D. M., Ji, P., Kurths, J.: *The Kuramoto model in complex networks*. Physics Reports **610**, 1–98 (2016)
- [84] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York (1986)

- [85] Sakaguchi, H., Kuramoto, Y.: *A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment*. Progress of Theoretical Physics **76**(3), 576–581 (1986)
- [86] Sarlette, A., Sepulchre, R., Leonard, N.E.: *Autonomous rigid body attitude synchronization*. Automatica **45**(2), 572–577 (2009)
- [87] Sarlette, A., Bonnabel, S., Sepulchre, R.: *Coordinated motion design on Lie groups*. IEEE Transactions on Automatic Control **55**(5), 1047–1058 (2010)
- [88] Sarlette, A., Sepulchre, R.: *Synchronization on the circle*. arXiv preprint arXiv:0901.2408 (2009)
- [89] Sarlette, A., Sepulchre, R.: *Consensus optimization on manifolds*. SIAM Journal on Control and Optimization **48**(1), 56–76 (2009)
- [90] Sarlette, A.: *Geometry and symmetries in coordination control*. Ph.D. thesis, Université de Liège (2009)
- [91] Schwerdtfeger, H.: *Geometry of complex numbers*. Dover, New York (1989)
- [92] Sepulchre, R.: *Consensus on nonlinear spaces*. Annual Reviews in Control **35**(1), 56–64 (2011)
- [93] Sepulchre, R., Paley, D. A., Leonard, N. E.: *Stabilization of planar collective motion: All-to-all communication*. IEEE Transactions on Automatic Control **52**(5), 811–824 (2007)
- [94] Shao, J., He, X., Böhm, C., Yang, Q., Plant, C.: *Synchronization-inspired partitioning and hierarchical clustering*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering **25**(4), 893–905 (2013)
- [95] Strogatz, S.H.: *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*. Physica D: Nonlinear Phenomena **143**(1), 1–20 (2000)
- [96] Timms, L., English, L. Q.: *Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity*. Physical Review E **89**(3), 032906 (2014)
- [97] Tsang, K. Y., Mirollo, R. E., Strogatz, S. H., Wiesenfeld, K.: *Dynamics of a globally coupled oscillator array*. Physica D: Nonlinear Phenomena **48**(1), 102–112 (1991)

- [98] Tsang, K. Y., Schwartz, I. B.: *Interhyperhedral diffusion in Josephson-junction arrays*. Physical Review Letters **68**(15), 2265 (1992)
- [99] Vaxman, A., Müller, C., Weber, O.: *Conformal mesh deformations with Möbius transformations*. ACM Transactions on Graphics (TOG) **34**(4), 55 (2015)
- [100] Watanabe, S., Strogatz, S.H.: *Integrability of a globally coupled oscillator array*. Physical Review Letters **70**(16), 2391 (1993)
- [101] Watanabe, S., Strogatz, S.H.: *Constants of motion for superconducting Josephson arrays*. Physica D: Nonlinear Phenomena **74**(3), 197–253 (1994)
- [102] Watts, D.J., Strogatz, S.H.: *Collective dynamics of “small-world” networks*. Nature **393**(6684), 440–442 (1998)
- [103] Wikipedia contributors: *Iris flower data set*. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Iris_flower_data_set&oldid=815019107 (2018, Dec.)
- [104] Wilczyński, P.: *Quaternionic-valued ordinary differential equations. The Riccati equation*. Journal of Differential Equations **247**(7), 2163–2187 (2009)
- [105] Winfree, A.T.: *The geometry of biological time*. Springer-Verlag, New York (1980)
- [106] Yamamoto, M.: *Clustering of functional data in a low-dimensional subspace*. Advances in Data Analysis and Classification **6**(3), 219–247 (2012)
- [107] Yeung, M.K.S., Strogatz, S. H.: *Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators*. Physical Review Letters **82**(3), 648 (1999)
- [108] Żołądek, H.: *Classification of diffeomorphisms of S^4 induced by quaternionic Riccati equations with periodic coefficients*. Topological Methods in Nonlinear Analysis **33**(2), 205–215 (2009)

Biografija

Aladin Crnkić je rođen 23.04.1987. godine u Bihaću, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu i gimnaziju je završio u Bihaću s odličnim uspjehom. U osnovnoj i srednjoj školi učestvovao je na brojnim kantonalnim i federalnim takmičenjima iz oblasti matematike i fizike gdje je ostvarivao zapažene rezultate.

Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću upisuje 2005. godine, smjer Matematika i informatika. Diplomski studij završava 2009. godine sa prosječnom ocjenom 8.86.

U toku studija dobivao je mnoge pohvale i priznanja, a najveće je priznanje od Federalnog ministarstva nauke i obrazovanja.

U aprilu 2010. godine upisuje magistarske studije na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zenici, smjer Matematika i informatika. Magistarski studij završava 2013. godine s prosječnom ocjenom 8.86. Magistarski rad pod nazivom "Dinamika monotonih i antimonotonih racionalnih sistema diferentnih jednačbi" je odbranio pod mentorstvom prof. dr Dževada Burgića.

Od 2013. godine je student doktorskih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu, smjer Matematika gdje počinje saradnju s prof. dr Vladimirom Jaćimovićem.

Na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Bihaću zaposlen je od oktobra 2011. godine kao saradnik u nastavi. Izvodio je vježbe iz predmeta Matematika I, Matematika II, Matematika III, Operacijska istraživanja i Teorija vjerovatnoće i statistike.

Izjava o autortstvu

Potpisan Aladin Crnić
Broj indeksa/upisa: 1/2013

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom **“Kolektivno ponašanje i samo-organizacija u mrežama povezanih oscilatora”**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nisam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

U Bihaću, BiH
26.12.2018.

Potpis doktoranda



Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Aladin Crnkić

Broj indeksa/upisa: 1/2013

Studijski program: Matematika

Naslov rada: "Kolektivno ponašanje i samoorganizacija u mrežama povezanih oscilatora"

Mentor: prof. dr Vladimir Jaćimović

Potpisan Aladin Crnkić

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

U Bihaću, BiH
26.12.2018.

Potpis doktoranda



Izjava o korištenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **“Kolektivno ponašanje i samoorganizacija u mrežama povezanih oscilatora”**, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilogima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (*Creative Commons*) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

U Bihaću, BiH
26.12.2018.

Potpis doktoranda

