

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ
Природно-математички факултет

Број

544

Подгорица, 21.04.2005. год.

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

mr Darko Mitrović

**Formiranje i interakcija singulariteta kod skalarnih zakona
održanja sa konveksnom nelinearnošću**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Podgorica, 08.04.2005. godine.

13-3323917

512.95 (dis. 3)



IV 778.2

инв. бр. 23673

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANTU:

Ime i prezime: *Darko Mitrović*

Datum i mjesto rođenja: *12.01.1977., Savski venac, opština Beograd*

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka:
magistratura iz oblasti matematičkih nauka, Institut za matematiku, Novi Sad 2001.

INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: *Teorijska matematika*

Naslov teze: *Formiranje i interakcija singulariteta kod skalarnih zakona održanja sa konveksnom nelinearnošću*

Fakultet na kojem je disertacija odbranjena: *Prirodnomatematički fakultet, Univerzitet u Podgorici*

UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave doktorske teze: *14.10.2004.*

Datum sjednice senata na kojoj je prihvaćena teza: *03.03.2005.*

Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:

Prof. dr Miloica Jaćimović, redovni profesor PMF Podgorica

Prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF Novi Sad

Prof. dr Oleg Obradović, vanredni profesor PMF Podgorica

Mentor: *Prof. dr Miloica Jaćimović*

Komisija za ocjenu doktorske disertacije:

Prof. dr Miloica Jaćimović, redovni profesor PMF Podgorica

Prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF Novi Sad

Prof. dr Oleg Obradović, vanredni profesor PMF Podgorica

Komisija za odbranu doktorske disertacije:

Prof. dr Miloica Jaćimović, redovni profesor PMF Podgorica

Prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF Novi Sad

Prof. dr Oleg Obradović, vanredni profesor PMF Podgorica

Lektor: *prof. dr Miloica Jaćimović*

Datum odbrane:

Datum promocije:

Odbranjen!

Izvod teze

U tezi predstavljamo asimptotski metod za izučavanje evolucije i interakcije nelinearnih talasa u slučaju jednačina koje se ne mogu eksplicitno riješiti. Pod pojmom nelinearni talas imamo u vidu rješenje nelinearne jednačine sa lokalizovanom "brzom" varijacijom, to jest, skok ili δ distribuciju u čijoj nekoj okolini nema drugih singularnih djelova. Najtipičniji primjeri ovakvih talasa su solitoni u jednačini sa malom disperzijom (KdV jednačina i (regularizovani) udarni talasi u skalarnom zakonu održanja perturbovanom nestajućom viskoznošću. Naš asimptotski metod zasnovan je na proceduri u kojoj se nelinearnim talasima pridružuje funkcija koja zavisi od vremena, a ima vrijednosti u prostoru distribucija $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^1)$.

Uopšte govoreći, kada koristimo asimptotski metod konstruišemo rješenje (bolje reći funkciju) koja zadovoljava jednačinu do na neku veličinu. Za ovu veličinu kažemo da je mala ako u smislu neke norme zadovoljava ocjenu $\mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$ gdje $\alpha > 0$ i $\varepsilon \rightarrow 0$. Najčešće se koristi norma prostora C^k .

Metod koji ovdje predstavljamo zove se slabo asimptotski metod. Možemo ga shvatiti kao neku vrstu uopštenja metoda iščezavajuće viskoznosti jer naše asimptotsko rješenje porađa izvjesnu malu veličinu na desnoj strani jednačine (kao u slučaju metoda iščezavajuće viskoznosti s tom razlikom što ovdje nemamo konkretan oblik terma na desnoj strani). Međutim, oblik našeg aproksimativnog rješenja je mnogo prostiji od oblika rješenja koje se dobija ukoliko se koristi metod iščezavajuće viskoznost. Na primjer, u slabo asimptotskom metodu, aproksimativno rješenje tipa udarnog talasa za skalarni zakon održanja (kakvi se razmatraju u tezi) imamo u obliku sume glatke funkcije i glatke funkcije pomnožene aproksimacijom Heavisideove funkcije. Dakle, daćemo formulu koja je validna duž cijele vremenske ose, koja je jednostavne forme, a koja dobro aproksimira standardno slabo rješenje posmatrane jednačine. Korak koji uproštava proces konstrukcije asimptotskog rješenja je veoma jednostavan; umjesto da tražimo da odstupanje od jednakosti lijeve i desne strane u posmatranoj jednačini bude malo u standardnom $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ smislu, tražićemo da ono bude malo u smislu $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^1)$ (t.j. u smislu prostora funkcionala nad test funkcijama koje zavise samo od prostorne promjenljive x). Kao što ćemo vidjeti u tekstu teze, ova trivijalna modifikacija dopušta nam da problem opijivanja interakcije nelinearnih talasa svedemo na rješavanje nekog sistema običnih diferencijalnih jednačina (umjesto rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina).

U tezi ćemo pokazati kako se koristi slabo asimptotski metod za opisivanje

interakcije dva udarna talasa. Naravno, ovo nije njegova jedina primjena. On se pokazao efikasnim u slučaju mnogih jednačina kao i sistema jednačina u kojima se pojavljuju nelinearni fenomeni. Mnogi problemi neriješeni su upravo iz tog razloga što ne znamo odgovarajući mehanizam kojim bismo opisali proces prelaska rješenja iz glatkog u prekidno stanje. Slabo asimptotski metod nam u mnogim slučajevima razrješava ovu situaciju. U stvari, on nam omogućava da neprekidno pratimo pomenuti proces. Zahvaljujući tome, u slučaju skalarnog zakona održanja (koji se razmatra u tezi) izbjegli smo korištenje dodatnih uslova (uslovi dopustivosti) koji nam obezbjeđuju jedinstvenost rješenja date jednačine i poslije trenutka u kom rješenje izgubi glatkost.

SUMMARY

In the thesis we present an asymptotic method for studying the evolution and interaction of nonlinear waves in the “nonintegrable” case. By nonlinear waves we mean solution of nonlinear equation with localized “fast” variation (i.e. it is singular part of the solution in whose neighborhood there are no other singular parts). The most typical examples of such waves are solitons of equations with small dispersion (KdV equation) and smoothed shock waves in equation with small viscosity (perturbed scalar conservation law). Our asymptotic method is based on the procedure in which nonlinear waves are assigned functions of the time variable with values in the space of generalized functions $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^1)$.

Generally speaking, by using asymptotic methods one constructs approximate solution which obey equations up to small terms. The discrepancy is said to be small if, in the sense of some norm, it admits the estimate $\mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$ where $\alpha > 0$ and $\varepsilon \rightarrow 0$ is a small parameter. The norm in the space C^k is used the most often. The small parameter ε can be contained in the solution as well as in the equation. The solution is sought in the form which depends on the method.

The method presented here we call the weak asymptotic method. It can be understood as some kind of generalization of the vanishing viscosity approach since our asymptotic solution bears some small term on the right-hand side of the equation. Still, the form of our solution is much more simpler than the form of the solution at vanishing viscosity approach. For instance, in the weak asymptotic method, the shock wave type approximate solution for the scalar conservation law (which is considered in the thesis) we have in the form of the sum of smooth function and the smooth function multiplied by the Heaviside function approximation. The step which simplified the process of constructing the asymptotic solution is rather simple; instead of the demand discrepancy to be small in the (standard) $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ sense, we demand it to be small in the sense $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^1)$ (i.e. in the sense of the space of functionals over test functions depending only on the space variable x). As we have seen, this rather trivial modification allows us to reduce the problem of describing interaction of nonlinear waves to solving some system of ordinary differential equations (instead of solving partial differential equations).

In Section 2 we gave basic notions concerning conservation laws and we made an overview of the papers and publications concerning our subject.

In the framework of the weak asymptotic method we presented formulas

we used to describing arising of singularities as well as the interaction of the singularities (Section 3). We also described transformation of smooth decreasing initial data in the case of the Hopf equation (Section 4) and we gave two methods for constructing smooth approximating solution of convex scalar conservation law with decreasing initial condition (Section 6, 7 and 8).

Predgovor

U disertaciji predstavljamo metod za izučavanje interakcija i formiranja nelinearnih talasa. Primjeri ovakvih interakcija su mnogobrojni, javljaju se u slučaju svih nelinearnih evolutivnih procesa. Interesantno je analizirati interakcije između dva solitona (KdV jednačina [17]), udarna talasa, slaba diskontinuiteta (skalarni zakon održanja [4], [5], [6], [7]) ili dva singularna delta talasa kao i dva delta talasa (sistemi hiperboličkih zakona održanja [16]).

Ovdje ćemo opisati metod koji na relativno elegantan način rješava problem određivanja glatke po vremenu aproksimacije rješenja skalaranog zakona održanja sa konveksnom nelinearnošću i opadajućim početnim uslovom. Prije nas, bar po našim saznanjima, ovo je radio A.M.II'in [15]. U sličnom smjeru nastavio je i u nedavnom radu [23]. Takodje je i bio mentor kandidatske disertacije I.O.Rasskazova čiji je pregled objavljen u [24].

Tekst je, isključujući predgovor, uvod i formule koje ćemo koristiti, podijeljen u tri velika dijela.

Tema prvog dijela je Hopfova jednačina (treće poglavlje). Istražićemo interakcije među singularitetima koji se javljaju ili postoje u slučaju određenih početnih uslova. Ispitaćemo interakcije između kako slabih tako i jakih diskontinuiteta. Na kraju, to ćemo iskoristiti za nalaženje slabo asimptotskog rješenja proizvoljnog Cauchyevog problema za datu jednačinu.

U drugom dijelu razmatramo proizvoljan skalarni zakon održanja sa konveksnom nelinearnošću (peto poglavlje). Glatko po vremenu ćemo opisati interakcije među jakim diskontinuitetima i glatko po vremenu opisati transformaciju dio po dio konstantnog početnog uslova.

U trećem dijelu razmatramo problem iz drugog dijela. Glatko po vremenu opisujemo prelazak rješenja iz neprekidnog u prekidno stanje (šesto i sedmo poglavlje).

Generalno, postoji razlika u pristupu između prva dva i trećeg dijela. U prva dva dijela, problem rješavamo tako što prvo cijeli početni uslov aproksimiramo odgovarajućim funkcijama i posmatramo njegovu transformaciju, dok u drugom dijelu početni uslov aproksimiramo samo u "najkritičnijim" djelovima, a zatim posmatramo promjene tako transformisane početne funkcije.

Preciznije, disertacija sadrži sljedeće djelove.

U prvom poglavlju uvodimo osnove poznate teorije koje se tiču zakona održanja. Takođe pravimo poređenje sa dosadašnjim rezultatima koji se tiču

problema nalaženja glatkog po vremenu asimptotskog rješenja skalarnog zakona održanja.

U drugom poglavlju navodimo osnovne formule i teoreme vezane za metod koji ćemo primjenjivati.

Cilj trećeg poglavlja je rješavanje Hopfove jednačine sa proizvoljnim opadajućim početnim uslovom. Početni uslov aproksimiramo poligonalnom linijom i analiziramo transformaciju tog poligona. U nekoliko potpoglavlja daju se standardni primjeri interakcija talasa nastalih kao posljedica transformacije poligona duž trajektorija određenim jednačinom koju analiziramo. Pokazujemo da je dobijeno rješenje u L^1 smislu blizu tačnog dopustivog slabog rješenja razmatranog problema [4].

Četvrto poglavlje posvećeno je dokazu mogućnosti odgovarajućeg rabi-
janja x ose tj. dokazu postojanja odgovarajuće aproksimacije početnog uslova.

U petom poglavlju analiziramo proizvoljan skalarni zakon održanja sa konveksnom nelinearnošću. Početni uslov aproksimiramo regularizovanim Heavisideovim funkcijama i pratimo njegovu transformaciju. Dat je i dokaz da je moguće napraviti takvu aproksimaciju tako da nijedna tri udarna talasa ne interaguju istovremeno [5].

Šestom poglavlje je najznačajnije u tezi [6]. Razmatra se skalarni zakon održanja sa, kako smo ga nazvali, jednostavnim početnim uslovom. Funkcijom koja je glatka po vremenskoj promjenljivoj opisujemo formiranje udarnog talasa. Ovo ćemo iskoristiti u naredno poglavlju da dobijemo slabo asimptotsko rješenje razmatrane jednačine sa proizvoljnim početnim uslovom.

Sedmo poglavlje daje opis transformacije standardnih početnih uslova koje ćemo koristiti za rješavanje skalarnog zakona održanja sa proizvoljnom opadajućim početnim funkcijom [7]. Primijenjujemo dobijene rezultate da opišemo rekurzivnu proceduru koja nam daje glatko po vremenu asimptotsko rješenje razmatranog problema. Na kraju, dokazujemo da dobijeno aproksimativno rješenje konvergira upravo dopustivom slabom rješenju posmatranog skalarnog zakona održanja sa opadajućom početnom funkcijom.

Konačno, želim da se zahvalim svima koji su pomogli u izradi ove disertacije. Prije svih, rukovodiocu projekta, Vladimiru Grigorjeviču Danilovu, a zatim, u tek malo manjoj mjeri, profesorima Stevanu Pilipoviću i Marku Nedeljkovu. Takođe je nezaobilazno pomenuti Prirodnomatematički fakultet u Podgorici koji mi je omogućio da provedem dvije godine u Moskvi gdje sam uradio većinu ove disertacije, posebno mentora profesora Milojicu Jaćimovića koji mi je sve vrijeme pružao podršku i razumijevanje.

Sadržaj

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Uvod i napomene iz klasične teorije | 3 |
| 2 | Formule slabo asimptotskog metoda | 13 |
| 2.1 | Asimptotska linearna nezavisnost | 19 |
| 2.2 | "Complex germ" lema | 21 |
| 3 | Slabo asimptotsko rješenje | |
| | Hopfove jednačine | 22 |
| 3.1 | Interakcija slabih diskontinuiteta. Formiranje udarnih talasa | 22 |
| 3.2 | Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa | 26 |
| 3.3 | Standardni primjeri Košijevih problema za Hopfovju jednačinu | 29 |
| 3.3.1 | Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa, slučaj četiri tačke; prvi slučaj | 31 |
| 3.3.2 | Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa, slučaj četiri tačke; druga mogućnost | 33 |
| 3.3.3 | Interakcija slabih diskontinuiteta; slučaj četiri tačke | 35 |
| 3.3.4 | Interakcija dva udarna talasa povezana pravom | 36 |
| 3.4 | Interakcija slabih diskontinuiteta i formiranje udarnih talasa; slučaj n tačaka. | 38 |
| 3.5 | Proizvoljan opadajući početni uslov | 45 |
| 4 | Dodatak: Postojanje dopustivog razbijanja u slučaju proizvoljnog zakona održanja | 48 |
| 5 | Asimptotsko glatko po $t \in \mathbb{R}^+$ rješenje skalarnog zakona održanja sa početnim uslovom aproksimiranim Heavisideovom funkci- jom | 55 |
| 5.1 | Interakcija i prostiranje dva udarna talasa za skalarni zakon održanja za skalarni zakon održanja sa proizvoljnom konveksnom nelinearnošću | 56 |
| 5.2 | Interakcije i prostiranje n udarnih talasa za skalarni zakon održanja sa proizvoljnom konveksnom nelinearnošću | 59 |
| 5.3 | Postojanje dopustive aproksimacije početnog uslova regulari- zovanom stepenastom funkcijom | 65 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Prelazak iz neprekidnog u prekidno; jednostavni slučaj | 67 |
| 6.1 | Oblik slabo asimptotskog rješenja | 69 |
| 7 | Evolucija nelinearnih talasa | 85 |
| 7.1 | Transformacija standardnog početnog uslova | 85 |
| 7.2 | Interakcija udarnih talasa sa promjenljivom amplitudom . . . | 96 |
| 7.3 | Skalarni zakon održanja sa opadajućim početnim uslovom | 100 |
| 7.4 | Opravdanje slabo asimptotskog rješenja | 107 |

1 Uvod i napomene iz klasične teorije

Definicija 1. Za kvazilincarnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$Lu = u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0. \quad (1)$$

kažemo da je hiperbolička sa konveksnom nelinearnošću ako važi

$$f''(x) > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Jednačinu za ovim osobinama zovemo i *skalarni zakon održanja sa konveksnom nelinearnošću*. Kako je jednačina (1) parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda, njeno klasično rješenje možemo tražiti pomoću sistema karakteristika.

Definicija 2. Karakteristika jednačine (1) pridružena njenom neprekidno diferencijabilnom rješenju u je funkcija $x = x(t)$ koja zadovoljava jednačinu $\dot{x} = f'(u(x(t), t))$.

Svakoј karakteristiki možemo pridružiti diferencijalni operator

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + f'(u(x(t), t))\partial_x.$$

Odavde i na osnovu (1) vidimo da važi $\frac{du}{dt} = 0$ na karakteristici $x(t)$ što znači da je funkcija u konstantna duž karakteristika. Dakle,

$$x(t) = f'(u(x(t), t))t + const. = f'(u(x(0), 0))t + const. \quad (2)$$

Konstanta u prethodnom izrazu određuje se iz početnog uslova $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$. Geometrijski, relacija (2) zajedno sa činjenicom da $u(x(t), t) = const.$ znači da je oblast $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ ispunjena pravama duž kojih je funkcija u konstantna. Međutim, date prave nisu paralelne (osim u slučaju linearne parcijalne diferencijalne jednačine) što znači da se, u opštem slučaju, mogu presjeći. Kako svaka prava nosi različitu informaciju o vrijednosti rješenja dolazimo u situaciju da u tački presjeka funkcija u uzima dvije vrijednosti. Ovakav događaj naziva se "gradijentna katastrofa" i u tom trenutku rješenje gubi glatkost.

Dakle, i u slučaju nekih beskonačno diferencijabilnih početnih funkcija $u_0(x)$ rješenje $u(t, x)$ je glatka funkcija samo do nekog trenutka $t = T$, dok je granična vrijednost

$$u(T, x) = \lim_{t \rightarrow T-0} u(t, x)$$

je dio po dio glatka funkcija sa prekidima prvog reda. Upravo je ovo motivacija za uvođenje prekidnih funkcija kao rješenja razmatranog problema. Prirodan način da se ovo uradi je koristeći teoriju distribucija. U tom smislu uvodimo:

Definicija 3. Funkcija $u(t, x)$ je slabo rješenje jednačine (1), sa početnim uslovom

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

ako za svaku funkciju $\eta(x, t) \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ važi:

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^+} [u\eta_t + f(u)\eta_x] dx dt + \int_{\mathbf{R}} u_0(x)\eta(x, 0) dx = 0. \quad (4)$$

Međutim, kako pokazuje sljedeći primjer, ovakav koncept ne obezbjeđuje jedinstvenost rješenja problema (1), (3):

Primjer 4. Posmatrajmo Hopfovsku jednačinu:

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2(x, t) \right) = 0 \quad (5)$$

sa početnim uslovom:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Slabo rješenje ovog problema je svaka funkcija koja pripada familiji:

$$u_\alpha = \begin{cases} -1, & -\infty < x < -t \\ \frac{x}{t}, & -t < x \leq -\alpha t \\ -\alpha, & -\alpha t < x \leq 0 \\ \alpha, & 0 < x \leq \alpha t \\ \frac{x}{t}, & \alpha t < x \leq t \\ 1, & t < x < \infty, \end{cases}$$

pri čemu je α proizvoljni broj u intervalu $[0, 1]$. Prethodni primjer pokazuje da je potrebno uvesti dodatne uslove koje bi rješenje trebalo da zadovoljava da bi se dobila njegova jedinstvenost.

Ovi uslovi mogu se dobiti određivanjem svojstava klasičnog rješenja koja se ne pogoršavaju (ili očuvavaju) pri prelasku na $\lim_{t \rightarrow T}$, gdje je $t = T$ trenutak u kom se javlja singularitet (prekid). To znači da takve osobine karakterišu singularitete koji se pojavljuju kod (klasičnog) rešenja razmatranog problema. Pokažimo kako se može doći do traženih osobina.

Označimo $p = u_x(x, t)$ i prodiferencirajmo jednačinu (1) po x . Važi:

$$0 = p_t + f'(u)p_x + f''(u)p^2 \geq p_t + f'(u)p_x.$$

Duž proizvoljne karakteristike poslednja nejednakost se svodi na:

$$0 \geq p_t + \frac{dx}{dt}p_x = \frac{dp(t, x(t))}{dt}$$

odakle slijedi da funkcija $p(x, t)$ ne raste duž karakteristika $x = x(t)$. Dakle, u svakoj tački (x, t) oblasti u kojoj postoji klasično rešenje važi:

$$p(x, t) = u_x(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} u'_0(x) = K_0.$$

Budući da izvod $u_x(x, t)$ za $t = T$ nije određen za svako $x \in \mathbf{R}$ u zadnjoj nejednakosti pređimo na ekvivalentnu formu koja nam daje uslov dopustivosti slabog rešenja:

$$\frac{u(x_2, t) - u(x_1, t)}{x_2 - x_1} \leq K_0, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

Primjedba 5. Nejednakost ovakvog tipa kao uslov dopustivosti u teoriji uopštenih rješenja uvedena je prvi put u radovima O.A.Oleinik (vidi [8]).

Iz nejednakosti (6) slijedi $u(x_2, t) - u(x_1, t) \leq K_0(x_2 - x_1)$ pri $x_2 > x_1$. Prelazeći na limes kad $x_2 \rightarrow x^* + 0$, $x_1 \rightarrow x^* - 0$, gde je x^* tačka prekida funkcije $u(T, x)$ dobijamo:

$$u_+ = u(x^* + 0, T) < u(x^* - 0, T) = u_-. \quad (7)$$

Definicija 6. Za slabo rešenje problema (1), (3) kažemo da je dopustivo po uslovu Oleinik ako u svakoj svojoj tački prekida zadovoljava uslov (7).

Primjedba 7. Uslovi tipa uslova iz Definicije 6 zovu se uslovi rasta entropije na linijama jakog prekida. Naime, nelinearni fizički procesi modelirani jednači-

nom oblika (1) su nepovratni po vremenu, a funkcija koja karakteriše nepovratnost je entropija. Npr., u slučaju Hopfove jednačine $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$ koja opisuje kretanje gasa u cijevi (ne uzimajući u obzir pritisak i gustinu gasa) ulogu entropije S ima kinetička energija čestica koje se nalaze u tački x u trenutku t :

$$S(x, t) = \frac{1}{2}u^2(x, t).$$

Poznato je da ona ne opada sa vremenom pri prelasku kroz udarni talas Γ :

$$S_+ = S(x, t + 0) \geq S_- = S(x, t - 0), \quad (t, x) \in \Gamma.$$

Zato se sve nejednakosti koje karakterišu nepovratnost prirodnih procesa nazivaju nejednakostima tipa "rasta entropije".

Nedostatak analize kojom se došlo do Definicije 6, osim ograničenja da $f'' > 0$, leži u činjenici da se uslov dat u Definiciji 6 može primijeniti samo na dio po dio glatke funkcije kada je određeno šta je linija prekida i jednos-trane granične vrednosti pri prilasku toj liniji. S druge strane, u definiciji slabog rješenja (datog jednakošću (4)) neophodno je jedino postojanje odgovarajućih integrala. Dakle, pojavilo se pitanje kako definisati slabo rešenje problema (1), (3) tako da ta definicija u sebe uključuje i jednakost (4) i uslove rasta entropije. Odgovor na ovo pitanje dao je S.N.Kružkov (vidi [12] i [11]) sljedećom definicijom (koja je u slučaju dio po dio glatkih funkcija ekvivalentna sa Definicijom 6):

Definicija 8. Mjerljiva ograničena funkcija u na $\mathbf{R}^m \times [0, T)$ je dopustivo slabo rešenje problema (1), (3) sa $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^m)$ ako za svaku nenegativnu neprekidnu po Lipschitzu funkciju ψ sa kompaktnim nosačem važi nejednakost:

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^m} [\partial_t \psi \eta(u) + \partial_\alpha \psi q(u)] dx dt + \int_{\mathbf{R}^m} \psi(x, 0) \eta(u_0(x)) dx \geq 0$$

za svaku konveksnu funkciju η i funkciju q datu sa

$$q(u) = \int_{-\infty}^u \eta'(w) f'(w) dw.$$

Primjedba 9. Par funkcija η, q iz prethodne definicije obično se naziva *entropija-fluks entropije par*.

Važi (vidi [14]):

Teorema 10. *Dio po dio glatko u smislu Definicije 6 dopustivo rešenje jednačine (1) zadovoljava uslove Definicije 8.*

Kružkov je dokazao sljedeće teoreme (vidi [14]):

Teorema 11. *Za svako $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ postoji jedinstveno dopustivo (u smislu prethodne definicije) slabo rješenje problema (1), (3) na $[0, \infty)$ i*

$$u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty); L^1_{loc}(\mathbf{R})).$$

Teorema 12. *Neka su u i \hat{u} dopustiva slaba rešenja jednačine (1) sa početnim uslovima u_0 i \hat{u}_0 koji uzimaju vrednosti u kompaktnom intervalu $[a, b]$. Tada postoji $s > 0$ koje zavisi samo od $[a, b]$ takvo da za svako $t \in [0, T)$ i $R > 0$ važi:*

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < R)} \leq \|u_0(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot)\|_{L^1(|x| < R+st)}.$$

Dalje, ako

$$u_0(x) \leq \hat{u}_0(x), \quad \text{s.s. na } \mathbf{R}$$

tada

$$u(x, t) \leq \hat{u}(x, t), \quad \text{s.s. na } \mathbf{R} \times [0, T).$$

Uvešćemo još neke definicije i stavove vezane za pojam dopustivosti.

Definicija 13. Jednačina (1) sa početnim uslovom oblika

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}, \quad (8)$$

pri čemu su u_1 i u_2 konstante naziva se Rimanov problem za jednačinu (1).

Teorema 14. *Neka je dat Rimanov problem (1), (8). Ako važi*

a) $u_1 > u_2$ *tada je dopustivo slabo rješenje razmatranog problema dato u obliku dopustivog udarnog talasa:*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x > ct, \\ u_2, & x < ct, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

pri čemu je c konstanta data Rankine-Hugoniotovim uslovom

$$c = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2}.$$

b) $u_1 < u_2$ tada je dopustivo slabo rješenje razmatranog problema dato u obliku razrjeđujućeg talasa:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x > f'(u_1)t \\ \tilde{u}(\frac{x}{t}), & f'(u_2)t \leq x \leq f'(u_1)t \\ u_2, & x < f'(u_2)t, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}^+, \end{cases}$$

pri čemu $\tilde{u}(x, t)$ zadovoljava (1) u klasičnom smislu.

Pozabavimo se malo bliže fenomenima koji karakterišu hiperboličke zakone održanja. Uzmimo najjednostavniji primjer zakona održanja, Hopfovu jednačinu:

$$u_t + (u^2)_x = 0, \quad (9)$$

sa početnim uslovom:

$$u_0(x) = \begin{cases} v_0, & x < a_1, \\ v_1, & a_1 \leq x < a_2, \\ v_2, & x \geq a_2, \end{cases} \quad (10)$$

gdje $v_0 < v_1 < v_2$. Poslije određenog vremena, na primjer, $t = t^*$, dva udarna talasa koja su sadržana u (10) će se spojiti i rješenje problema (9), (10) će imati oblik:

$$u(x, t) = \begin{cases} v_0, & x < \lambda t, \\ v_2, & x \geq \lambda t. \end{cases}$$

Ovdje je $\lambda > 0$ brzina udarnog talasa i data je već pominjanim uslovom Rankine-Hugoniot. Osim Rankine-Hugoniotovog uslova, objašnjenje za ovakav oblik rješenja daju i uslovi dopustivosti. Oba ova uslova karakterišu slaba rješenja razmatranog problema, a budući da slaba rješenja pripadaju klasi L^∞ funkcija ona se ne mijenjaju ukoliko im promijenimo vrijednost na skupu mjere nula. Zato možemo reći da pomenuti uslovi proizilaze iz "globalnih" svojstava rješenja (nezavisni su od vrijednosti funkcije u tački).

S druge strane, fenomen spajanja dva udarna talasa koji se događa u Košijevom problemu (1), (10), može se shvatiti "lokalno". Naime, tačke a_1 i a_2 kreću se duž trajektorija $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$, $t \in \mathbf{R}^+$, respektivno, (ove trajektorije date su ili Rankine-Hugoniotovim uslovom ili jednačinom karakteristika i početnim uslovima $\varphi_i(0) = a_i$, $i = 1, 2$). Poslije trenutka $t = t^*$ ove trajektorije se sijeku i novi udarni talas se formira što znači da tačke a_1 i a_2 nastavljaju da se kreću istom brzinom. Da bismo formalizovali ovakav proces potrebno je dobiti jednačine koje određuju funkcije $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, koje, s druge strane, opisuju kretanje tačaka a_1 i a_2 , respektivno. Nakon toga, možemo izvesti odgovarajuće osobine funkcija $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$. Primijetimo da je u ovom slučaju vremensku promjenljivu $t \in \mathbf{R}^+$ potrebno posmatrati kao parametar, što nije slučaj ukoliko problem posmatramo globalno (uporediti [18] i [16]). Problem koji se javlja pri ovakvom pristupu je očigledan. Naime, funkcije $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ nisu glatke i ne mogu biti rješenja odgovarajuće obične diferencijalne jednačine. Misao koja prirodno pada na pamet u cilju prevazilaženja ovog problema je da na neki način perturbujemo jednačinu koju razmatramo tako da njena rješenja ostanu glatka duž čitavog vremenskog intervala, a da pri tom, kad pustimo da perturbacija teži nuli, dobijemo slabo rješenje početnog problema. Ovo se postiže ukoliko jednačinu perturbujemo tako da od nje postane parabolická jednačina *preciznije dodaje se član εu_{xx} sa desne strane jednačine). Ovakav pristup analizi Košijvog problema (1), (3), zove se metod *iščezavajuće viskoznosti*.

Prvi primjer zakona održanja na koji je primjenjen metod iščezavajuće viskoznosti je Hopfova jednačina (5). Godine 1948. sovjetski matematičar Florin, a dvije godine kasnije, nezavisno od njega, Hopf i Cole otkrili su linearizaciju Hopfove jednačine sa iščezavajućom viskoznosti:

$$u_t + (u^2)_x = \varepsilon u_{xx}.$$

Na taj način, oni dobijaju tačno rješenje ove jednačine (koje je dosta složene strukture jer u sebe uključuje integral nerješiv kvadraturama). Analiza ovog rješenja data je u [22] za periode prije i poslije pucanja glatkog rješenja Hopfove jednačine bez iščezavajuće viskoznosti.

Međutim, ovaj metod je vrlo teško primjeniti na zakon održanja sa proizvoljnom nelinearnošću jer u opštem slučaju nije poznato kako naći tačno rješenje perturbovane jednačine. Jedino što je poznato je da postoji njeno glatko rješenje duž cijelog vremenskog intervala. Zato je A.M. Il'in tek trideset godina kasnije našao način da iskoristi ideju o perturbaciji jednačine u cilju

konstrukcije glatkog po vremenu aproksimativnog rješenja odgovarajućeg zakona održanja. On je uveo poznati "metod poklapanja" ("the matching method"). U svom radu on razmatra Košijev problem $u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}$, $u(0, x) = \varphi(x)$ gdje je φ ograničena dio po dio glatka funkcija. Za fiksirano ε poznato je da prethodni problem ima ograničeno beskonačno diferencijabilno rješenje za svako $t > 0$ i svako $x \in \mathbf{R}$ sa izuzetkom tačaka prekida početne funkcije. Sa druge strane, kad $\varepsilon \rightarrow 0$ rješenje prestaje biti čak i neprekidno i pojavljuje se kriva u $x - t$ ravni na kojoj rješenje ima prekid. Rješenje problema on konstruiše u vidu dva asimptotska reda. Prvi asimptotski red on određuje kao rješenje problema u proizvoljnoj oblasti koja ne sadrži liniju prekida dok je drugi red rješenje jednačine u okolini linije prekida. On pokazuje da se ova dva reda poklapaju do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$ u blizini linije prekida i to u oblasti koja je dovoljno "široka" (tj. njena površina je reda od $\mathcal{O}(\varepsilon^\mu)$, $\mu < 1$). Ovako konstruisano rješenje ima veoma komplikovanu formu. Ipak, ono je glatko po vremenskoj promjenljivoj $t \in \mathbf{R}$ tj. glatko po vremenu opisuje prelaz iz neprekidnog u prekidno stanje rješenja.

Za razliku od Whithama i Il'ina koji su razmatrali samo skalarni zakon održanja, sveobuhvatniji pristup dali su J. Glimm ("random choice method") i Bressan ("wave front tracking method").¹ Ali, napominjemo da su i Whitham, a u opštijem slučaju Il'in dali vezu između dva različita stanja rješenja što nije slučaj u "random choice" ili "wave front tracking" methodu.

Glimm razbija x -osu kao i t -osu čime pravi mrežu u xt -ravni. On rekurzivno dodjeljuje, (počevši od trenutka $t_0 = 0$) neku konstantnu vrijednost U_s^i svakom od intervala $(x_{i-1}, x_{i+1}) \times \{t_s\}$, $i \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N}$, $i + s$ je parno.² Na taj način on dobija niz Riemannovih problema za jednačinu $u_t + (f(u))_x = 0$ na povezanim intervalima (x_{2i-1}, x_{2i+3}) (ili (x_{2i}, x_{2i+2})) sa početnim trenutkom $t = t_s$, gdje $i \in \mathbf{Z}_2$, $s \in \mathbf{N}_2 + 1$ (ili $i \in \mathbf{Z}_2$, $s \in \mathbf{N}_2$). Razbijanje t -ose on pravi tako da nijedna dva talasa (udarni ili razrjeđujući) koja su fomirana iz pomenutih Riemannovih problema ne interaguju jedan sa drugim do trenutka $t = t_{s+1}$. Drugim riječima, na svakom koraku on rekonstruiše rješenje da bi izbjegao moguće interakcije talasa. Konačno, dokazuje da rješenje konstruisano u ovakvom obliku teži ka dopustivom slabom rješenju originalnog problema.³

"The wave front tracking" metod (vidi npr. [14] i [9]) bazira se na

¹"Wave front tracking" metod prvi je uveo DiPerna za 2x2 sisteme.

²Ime "random choice" (slučajni izbor) slijedi iz izbora konstanti U_s^i .

³Glimmova konstrukcija prvi put je objavljena u [10] i bila je propabilističkog karaktera. Npropabilističku verziju konstrukcije prvi je da Liu [13].

praćenju talasa i njihovih interakcija. Na početku, kao u Glimovom "random choice" metodu, aproksimiraju se početni uslovi pomoću stepenaste funkcije i nalazi se rješenje do prvog seta interakcija. Interakcija između udarnih talasa ne predstavlja problem jer se poslije nje dobija novi Riemannov problem. Međutim, ovo nije slučaj kada su u pitanju interakcija koje uključuju razrjeđujuće talase. Kao što smo pomenuli, Glimm je ovaj problem riješio reaproksimacijom rješenja prije nego dođe do interakcije. Za razliku od njega, Bressan prevazilazi ovu teškoću aproksimirajući razrjeđujućim talas nedopustivim udarnim talasima. Iako ovakva rješenja ne zadovoljavaju uslove dopustivosti kako aproksimacija postaje finija ovi uslovi postaju zadovoljeni. Na ovaj način, problem interakcije talasa svodi se na problem interakcije udarnih talasa. Dakle, interakcije nisu izbjegnute, ali su vrlo uprošćene i nisu opisane čak ni neprekidno po vremenu. U "wave front tracking" metodu sat se zaustavlja u trenutku spajanja dva udarna talasa da bi se zatim opet rješavao novodobijeni Košijev problem.

Primijetimo da svi pomenuti autori ili nisu pratili kretanje talasa (Whitham i Il'in) ili su to radili tako da kriva koja opisuje kretanje talasa (odnosno tačke) nije glatka. U disertaciji ćemo predstaviti metod koji će nam omogućiti da opišemo trajektoriju proizvoljne tačke $(x, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ čije je kretanje dato problemom (1), (3). Pokazaćemo kako udarni talas niče iz neprekidnih početnih uslova, a ovaj proces ćemo opisati glatko po vremenu.

Metod koji ćemo predstaviti ovdje prvi je uveden u radovima V.G.Danilova, G.A.Omel'anova i V.V.Shelkovicha. Kao što ćemo vidjeti, dali su mu prirodno ime, *slabo asimptotski metod*. Generalno, upotreba asimptotskih metoda za rješavanje diferencijalne jednačine znači konstrukciju funkcije koja zavisi od nekog malog parametra ε , i zadovoljava diferencijalnu jednačinu do $\mathcal{O}_S(\varepsilon^\alpha)$ dok $\varepsilon \rightarrow 0$ za neko $\alpha > 0$. Ovdje $\mathcal{O}_S(\varepsilon^\alpha)$ znači da izraz $\frac{\mathcal{O}_S(\varepsilon^\alpha)}{\varepsilon^\alpha}$ ostaje ograničen u S smislu dok $\varepsilon \rightarrow 0$, gdje je S odgovarajući funkcionalni prostor obično C^k . U našem novom pristupu, $S = \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Ovo znači da za datu diferencijalnu jednačinu tražimo funkciju koja je zadovoljava u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ili u *slabom smislu*. Zato ovakva rješenja zovemo *slabo asimptotska rješenja*.

Naglašavamo da aproksimativno rješenje treba da zadovoljava jednačinu sa tačnošću do malog parametra u prostoru \mathcal{D}'_x tj. nad test funkcijama koje zavise samo od "prostorne" promjenljive $x \in \mathbf{R}$. Kao što ćemo vidjeti, ovakav pristup će nam omogućiti da problem opisa interakcije nelinearnih talasa svedemo na problem rješavanja sistema običnih diferencijalnih jednačina

(koje opisuju trajektorije odgovarajućih tačaka prostora).

Kao i u slučaju većine asimptotskih metoda (npr. Glimove sheme ili "wave front tracking" metoda) analiziraćemo prvo skalarni zakon održanja sa odgovarajućom jednostavnom funkcijom kao početnim uslovom (u slučaju Glimove sheme i wave tracking metoda ta funkcija je bila funkcija tipa Heavisideove). Zatim ćemo takvim funkcijama aproksimirati dati početni uslov i sa tom aproksimacijom kao početnim uslovom rješavati skalarni zakon održanja. Za razliku od pristupa J.Glimma i A.Bressana, naša jednostavna funkcija biće neprekidna jer želimo da objasnimo prelaz rješenja iz kontinualnog u diskontinualno stanje. Potvrda da je naš pristup pravilan je činjenica da u limitu našeg slabo asimptotskog rješenja dobijamo funkciju koja je dopustivo slabo rješenje originalnog problema. Napominjemo da ni u jednom trenutku ne koristimo uslove dopustivosti.

Sada ćemo u opštim crtama objasniti kako koristimo slabo asimptotski metod da bismo riješili problem glatkog po $t \in \mathbf{R}^+$ opisa nastanka i interakcije singulariteta.

U okviru slabo asimptotskog metoda naći rješenje problema (1), (3) znači za svako $t \in \mathbf{R}^+$ naći mrežu funkcija (u_ε) , $\varepsilon \in (0, 1)$ tako da važi:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(u_\varepsilon)}{\partial x} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} - u_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

gdje je $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ distribucija mala u slabom smislu u odnosu na promjenljivu $x \in \mathbf{R}$. Precizna definicija data je u sljedećem poglavlju Definicijom 15.

Uočimo sada tačku $x_0 \in \mathbf{R}$ takvu da

$$t^* = \min_{x \in \mathbf{R}} -\frac{1}{f''(u_0(x))u'_0(x)} = -\frac{1}{f''(u_0(x_0))u'_0(x_0)}.$$

Pretpostavimo zbog jednostavnosti da je takvo $x_0 \in \mathbf{R}$ jedinstveno. U tom slučaju udarni talas će se pojaviti na trajektoriji (karakteristici) po kojoj se tačka x_0 kreće, ili, drugim riječima, pucanje slabog rješenja nastaje na visini $u_0(x_0)$ poslije trenutka t^* (t.j. početni uslovi mijenjaju se kao na slici 1). Da bismo opisali ovaj fenomen glatko po $t \in \mathbf{R}^+$, na prvom koraku definišemo funkcije $u_1(x)$ takvu da:

$$f'(u_1(x)) = -Kx + b, \quad x \in \mathbf{R},$$

K i b su konstante koje određujemo iz uslova (δ je neki fiksirani broj):

$$u_1(x_0 - \delta) = u_0(x_0 - \delta), \quad u_1(x_0 + \delta) = u_0(x_0 + \delta).$$

Zatim, zamjenjujemo dio prvobitnih početnih uslova $u_0(x)$ u nekoj maloj okolini $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tačke x_0 funkcijom $u_1(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Iz ovog malog dijela oko tačke x_0 u trenutku $t^* = \frac{1}{K}$ iznići će udarni talas snage $|u_0(x_0 - \delta) - u_0(x_0 + \delta)|$ dok će za $t < t^*$ rješenje u našeg problema (sa transformisanim početnim uslovom) biti neprekidna funkcija (vidi sliku 2).

U našem pristupu, jednostavni početni uslovi imaju oblik:

$$u|_{t=0} = u_0^0 + (u_1(x) - u_0^0)H(a_1 - x) + (U - u_1(x))H(a_2 - x),$$

Funkcija $u_1(x)$ zadovoljava uslov $f'(u_1(x)) = -Kx + b$ za konstante K i b koje određujemo iz uslova:

$$u_1(a_1) = u_0^0, \quad u_1(a_2) = U.$$

Razlog za takav izbor funkcije $u_1(x)$ je u tome što se u ovom slučaju sve karakteristike koje ističu iz tačaka koje pripadaju intervalu $[a_2, a_1]$ sijeku u istoj tački, (x^*, t^*) gdje je $t^* = -1/K$, a $x^* = (-f'(u_0^0) + b)/K$ (vidi sliku 3). Zato je slabo rješenje problema (1), (3) uvijek u prostoru $\mathcal{L}(1, \theta(\varphi_1(t) - x), \theta(\varphi_1(t) - x))$ gdje su φ_1, φ_2 funkcije koje opisuju kretanje tačaka a_1 i a_2 .

2 Formule slabo asimptotskog metoda

Definicija 15. Sa $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha)$ označavamo element prostora $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ takav da za svaku funkciju $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ važi:

$$f(x, \varepsilon) = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha) \Leftrightarrow \langle f(x, \varepsilon), \eta(x) \rangle = O(\varepsilon^\alpha), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Lema 16. Neka je $\omega \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, gdje je \mathcal{S} Schwartzov prostor. Za svako $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ važi:

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), \eta(x) \right\rangle = \sum_{k \geq 0} \Omega_k \frac{\varepsilon^k}{k!} (-1)^k \langle \delta^{(k)}(x-a), \eta(x) \rangle, \quad \varepsilon > 0.$$

Ova relacija je formalna i znači da se lijeva strana može predstaviti u vidu asimptotskog reda datog na desnoj strani čiji su koeficijenti dati sa:

$$\Omega_k = \int \omega(z) z^k dz.$$

Preciznije, za svako $N \in \mathbf{N}$ važi:

$$\frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) = \sum_{k=0}^N \Omega_k \frac{\varepsilon^k}{k!} (-1)^k \delta^{(k)}(x-a) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^{N+1}).$$

Dokaz Posmatrajući $\frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$ kao element prostora Schwartzovih distribucija, za svako $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ važi:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), \eta(x) \right\rangle &= \frac{1}{\varepsilon} \int \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) \eta(x) dx = \int \omega(z) \eta(a + \varepsilon z) dz \\ &= \sum_{k \geq 0} \Omega_k \frac{\varepsilon^k}{k!} (-1)^k \langle \delta^{(k)}(x-a), \eta(x) \rangle, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

Kako funkcija η koja se pojavljuje u prethodnoj formuli ne može biti analitička, jasno je da je ovaj izraz samo formalni zapis. Jasno je da tačna formula glasi: za svako $N \in \mathbf{N}$ važi:

$$\frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) = \sum_{k=0}^N \Omega_k \frac{\varepsilon^k}{k!} (-1)^k \delta^{(k)}(x-a) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^{N+1}).$$

□

Lema 17. Neka su $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Tada važi sljedeća formula koja je simetrična i uniformna po a_1, a_2 (odnosno, ako su a_1 i a_2 glatke ograničene funkcije od nekog parametra t formula će i dalje važiti za t koje pripada nekom kompaktnom intercalu):

$$\omega_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right) \omega_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} [\varepsilon \delta(x-a_1) + \varepsilon \delta(x-a_2)] B\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (13)$$

gdje

$$B\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) = \int \omega_1(z) \omega_2\left(z - \frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) dz = \int \omega_1\left(z + \frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) \omega_2(z) dz$$

i $\Delta a = a_2 - a_1$.

Dokaz Dokaz je sličan dokazu prethodne leme. Neka je $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.
Važi:

$$\begin{aligned} \int \omega_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right)\omega_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right)\eta(x)dx = \\ \frac{1}{2}\left[\int \omega_1(z)\omega_2\left(z-\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)\eta(a_1+\varepsilon z)\varepsilon dz + \right. \\ \left. \int \omega_1\left(z+\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)\omega_2(z)\eta(a_2+\varepsilon z)\varepsilon dz\right]. \end{aligned}$$

Razvijmo sada funkcije $\eta(a_1+\varepsilon z)$ i $\eta(a_2+\varepsilon z)$ po Taylorovoj formuli u okolini tačaka a_1 i a_2 . Dobijamo

$$\begin{aligned} \int \omega_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right)\omega_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right)\eta(x)dx = \\ \frac{1}{2}\left[\varepsilon\eta(a_1)\int \omega_1(z)\omega_2\left(z-\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)dz + \right. \\ \left. \varepsilon\eta(a_2)\int \omega_1\left(z+\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)\omega_2(z)dz\right] + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

što je upravo formula (13). \square

Lema 18. Neka su $\omega_1, \omega_2 \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\frac{d\omega_i}{dz} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} \omega_i(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \omega_i(z) = 1$, $i = 1, 2$. Važi:

$$\omega_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right)\omega_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right) = \theta(x-a_1)B_1\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) + \theta(x-a_2)B_2\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad (14)$$

gdje

$$B_1\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) = \int \dot{\omega}_1(z)\omega_2\left(z-\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)dz, \quad B_2\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) = \int \omega_1\left(z+\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right)\dot{\omega}_2(z)dz$$

i $\Delta a = a_2 - a_1$. Takođe važi:

$$B_1(\infty) = 0, \quad B_1(-\infty) = 1, \quad B_1(\rho) + B_2(\rho) \equiv 1, \quad \rho \in \mathbf{R}.$$

Dokaz Diferencirajući (14) po $x \in \mathbf{R}$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\dot{\omega}_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right)\omega_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\omega_1\left(\frac{x-a_1}{\varepsilon}\right)\dot{\omega}_2\left(\frac{x-a_2}{\varepsilon}\right) = \\ \delta(x-a_1)B_1\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) + \delta(x-a_2)B_2\left(\frac{\Delta a}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Pomnožimo sve sa $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ i primijenimo postupak iz prethodne leme čime dokazujemo ovu relaciju. S obzirom na činjenicu da je (14) tačno za $x \rightarrow \infty$ slijedi da je relacija (14) tačna za svako $x \in \mathbf{R}$.

Ostaje još da dokažemo da je $B_1(\rho) + B_2(\rho) = 1$, $\rho \in \mathbf{R}$. Dovoljno je prodiferencirati ovu relaciju po ρ da dobijemo:

$$\dot{B}_1(\rho) + \dot{B}_2(\rho) = \int \dot{\omega}_1(z)\dot{\omega}_2(z + \rho)dz - \int \dot{\omega}_2(z)\dot{\omega}(z - \rho)dz = 0.$$

Kako je $B_1(\infty) + B_2(\infty) = 1$ slijedi $B_1(\rho) + B_2(\rho) = 1$ za svako $\rho \in \mathbf{R}$.

□

Funkcije ω_i , $i = 1, 2$, date u prethodnoj lemi zvaćemo aproksimacijama Heavisideove funkcije. Formule date u prethodne tri leme nazivamo slabo asimptotske formule. Sada ćemo uvesti pojam slabo asimptotskog rješenja parcijalne diferencijalne jednačine nad skupom $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

Definicija 19. Neka je dat parcijalni diferencijalne operator $L : C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+) \rightarrow \mathbf{R}$. Za mrežu funkcija $u_\varepsilon(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$, ε mali parametar, kažemo da je slabo asimptotsko rješenje problema (1), (3) ako važi:

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon &= \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\mathbf{R}), \\ u_\varepsilon|_{t=0} - u_0(x) &= \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Sada ćemo dokazati da je formula (14), u nekom smislu, nezavisna od izbora funkcija ω_1 i ω_2 .

Lema 20. Za svake dvije ograničene aproksimacije $\omega_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})$ i $\tilde{\omega}_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})$ Heavisideove funkcije $\theta(\varphi_1 - x)$ i aproksimacije $\omega_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon})$ i $\tilde{\omega}_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon})$ Heavisideove funkcije $\theta(\varphi_2 - x)$ važi

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon})\theta(\varphi_1 - x) + \tilde{B}_2(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon})\theta(\varphi_2 - x) &= \\ \tilde{\omega}_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})\tilde{\omega}_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon) &= \omega_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})\omega_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon) = \\ B_1(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon})\theta(\varphi_1 - x) + B_2(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon})\theta(\varphi_2 - x) &+ \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned}$$

gdje

$$B_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) = \int \dot{\omega}_1(z) \omega_2\left(z + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_2(z) \omega_1\left(z - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz \\ \bar{B}_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\tilde{\omega}}_1(z) \tilde{\omega}_2\left(z + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz, \\ \bar{B}_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\tilde{\omega}}_2(z) \tilde{\omega}_1\left(z - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Dokaz Primijetimo ograničene aproksimacije $\omega_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})$ i $\tilde{\omega}_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})$ Heavisideove funkcije $\theta(\varphi_1 - x)$ i aproksimacije $\omega_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon})$ i $\tilde{\omega}_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon})$ Heavisideove funkcije $\theta(\varphi_2 - x)$ takve da $\frac{d\omega_i}{dz}, \frac{d\tilde{\omega}_i}{dz} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $i = 1, 2$. Zato, za $i = 1, 2$ imamo za svako $x \neq \varphi_i$,

$$\begin{aligned} \omega_i\left(\frac{\varphi_i - x}{\varepsilon}\right) - \theta(\varphi_i - x) &= \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \\ \tilde{\omega}_i\left(\frac{\varphi_i - x}{\varepsilon}\right) - \theta(\varphi_i - x) &= \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Oдавде slijedi

$$\begin{aligned} \int \left(\omega_1\left(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) \omega_2\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right) - \tilde{\omega}_1\left(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) \tilde{\omega}_2\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right) \right) \phi(x) dx = \\ \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Prema Lemi 18 важи:

$$\begin{aligned} \bar{B}_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) \theta(\varphi_1 - x) + \bar{B}_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) \theta(\varphi_2 - x) &= \\ \tilde{\omega}_1\left(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) \tilde{\omega}_2\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon) &= \\ \omega_1\left(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) \omega_2\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon) &= \\ B_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) \theta(\varphi_1 - x) + B_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) \theta(\varphi_2 - x) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned}$$



gdje

$$\begin{aligned} B_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_1(z) \omega_2\left(z + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz, \\ B_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_2(z) \omega_1\left(z - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz \\ \bar{B}_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_1(z) \tilde{\omega}_2\left(z + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz, \\ \bar{B}_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_2(z) \tilde{\omega}_1\left(z - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz. \square \end{aligned}$$

□

Jednostavna posljedica prethodne leme je sljedeća formula:

$$\theta(a_1 - x)\theta(a_2 - x) = B_1\left(\frac{a_2 - a_1}{\varepsilon}\right)\theta(a_1 - x) + B_2\left(\frac{a_2 - a_1}{\varepsilon}\right)\theta(a_2 - x) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad (18)$$

gdje su B_1 i B_2 funkcije date sa (15) za proizvoljne aproksimacije $\omega_1(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon})$ i $\omega_2(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon})$ Heavisideovih funkcija $\theta(\varphi_1 - x)$ i $\theta(\varphi_2 - x)$, respektivno.

Lema 21. *Neka su a, b i c realne konstante i $\omega_i, i = 1, 2$, dvije aproksimacije Heavisideove funkcije. Neka su dalje $\varphi_i, i = 1, 2$, veličine koje mogu glatko zavisiti od nekog parametra. Vazi sljedeća formula:*

$$\begin{aligned} f(a + b\theta_{1\varepsilon}(\varphi_1 - x) + c\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2 - x)) &= f(a + b\theta(\varphi_1 - x) + c\theta(\varphi_2 - x)) = \\ &= f(a) + \theta(\varphi_1 - x)(f(a + b + c)B_1 + f(a + b)B_2 - f(a + c)B_1 - f(a)B_2) + \\ &+ \theta(\varphi_2 - x)(f(a + b + c)B_2 - f(a + b)B_2 + f(a + c)B_1 - f(a)B_1) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

gdje

$$\begin{aligned} B_1\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_1(z) \omega_2\left(z + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz \text{ and} \\ B_2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) &= \int \dot{\omega}_2(z) \omega_1\left(z - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}\right) dz. \end{aligned}$$

Dokaz Analizirajmo prvo izraz $f(d + c\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2 - x))$ gdje je $\theta_{2\varepsilon}$ aproksimacija Heavisideove funkcije tako da $\theta_{2\varepsilon}(x) = \omega(x/\varepsilon)$ i $\frac{d\omega}{dz} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ dok veličine c i d

pripadaju nekom kompaktnom skupu. Koristeći Taylorovu formulu vidimo da:

$$\begin{aligned} f(d + c\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2 - x)) &= f(d + c\theta(\varphi_2 - x)) + \\ &f'(K)(\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2 - x) - \theta(\varphi_2 - x)) = f(d + c\theta(\varphi_2 - x)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (20)$$

za neko K između d i c . Sa druge strane važi:

$$f(d + c\theta(\varphi_2 - x)) = f(d) + (f(d + c) - f(d))\theta(\varphi_2 - x). \quad (21)$$

Stavljajući ovdje $d = a + b\theta(\varphi_1 - x)$ dobijamo,

$$\begin{aligned} f(a + b\theta(\varphi_1 - x) + c\theta(\varphi_2 - x)) &= f(a + b\theta(\varphi_1 - x)) + \\ &(f(a + b\theta(\varphi_1 - x) + c) - f(a + b\theta(\varphi_1 - x)))\theta(\varphi_2 - x). \end{aligned}$$

Koristeći opet (21), dobijamo sljedeću formulu:

$$\begin{aligned} f(a + b\theta(\varphi_1 - x) + c\theta(\varphi_2 - x)) &= \\ f(a) + \theta(\varphi_1 - x)(f(a + b + c)B_1 + f(a + b)B_2 - f(a + c)B_1 - f(a)B_2) + \\ &\theta(\varphi_2 - x)(f(a + b + c)B_2 - f(a + b)B_2 + f(a + c)B_1 - f(a)B_1). \end{aligned} \quad (22)$$

gdje su B_1 i B_2 oblika (15). Primijetimo dalje da je:

$$\begin{aligned} f(a + b\theta_{1\varepsilon}(\varphi_1 - x) + c\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2 - x)) &= \\ f(a + b\theta(\varphi_1 - x) + c\theta(\varphi_2 - x)) + f'(K)(b(\theta_{1\varepsilon} - \theta_1) + c(\theta_{2\varepsilon} - \theta_2)), \end{aligned} \quad (23)$$

za neku konstantu K koja pripada nekom kompaktnom skupu. Pošto je $f'(K)(b(\theta_{1\varepsilon} - \theta_1) + c(\theta_{2\varepsilon} - \theta_2))$ poretka $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$, i upoređujući (22) i (23) dobijamo formulu (19). \square

2.1 Asimptotska linearna nezavisnost

Ako želimo da razmatramo linearne kombinacije distribucija sa tačnošću $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha)$, tada moramo modifikovati pojam linearne nezavisnosti. Ova modifikacija igra ključnu ulogu u rješavanju problema interakcije solitona [17].

Naime, neka su $\phi_1 \neq \phi_2$ nezavisne od $x \in \mathbb{R}$. Razmatrajmo relaciju

$$g_1\delta(x - \phi_1) + g_2\delta(x - \phi_2) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha), \quad \alpha > 0,$$

gdje su g_i , $i = 1, 2$, nezavisne od ε . Jasno, dobijamo relacije:

$$g_i = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha), \quad i = 1, 2,$$

koje, po našim pretpostavkama povlače:

$$g_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Sve se mijenja ako pretpostavimo da koeficijenti g_i , $i = 1, 2$, mogu zavisiti od ε . Ovdje ćemo razmatrati samo specijalan slučaj ovakve zavisnosti koji će nam kasnije jedino trebati. Naime, neka je

$$g_i = A_i + S_i(\Delta\phi/\varepsilon), \quad i = 1, 2,$$

gdje su A_i nezavisni od ε dok $S_i(\rho)$ opada dok $|\rho| \rightarrow \infty$.

Pretpostavimo da važi sljedeća ocjena:

$$|\rho S_i(\rho)| \leq \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

Odredimo osobine koeficijenata g_i koji slijede iz relacije

$$g_1\delta(x - \phi_1) + g_2\delta(x - \phi_2) = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon).$$

Množeći ovu relaciju test funkcijom $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, dobijamo

$$g_1\varphi(\phi_1) + g_2\varphi(\phi_2) = O(\varepsilon)$$

ili, što je isto,

$$[A_1\varphi(\phi_1) + A_2\varphi(\phi_2)] + [S_1\varphi(\phi_1) + S_2\varphi(\phi_2)] = O(\varepsilon). \quad (24)$$

Razmotrimo izraz u drugoj zagradi. Koristeći Taylorovu formulu dobijamo:

$$[S_1\varphi(\phi_1) + S_2\varphi(\phi_2)] = S_1\varphi(\phi_1) + S_2\varphi(\phi_1) + S_2(\phi_2 - \phi_1)\varphi'(\phi_1 + \theta\phi_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Sada vidimo da

$$S_2(\Delta\phi/\varepsilon)(\phi_2 - \phi_1) = \{-\rho S_2(\rho)\}\big|_{\rho=\Delta\phi/\varepsilon} \cdot \varepsilon = O(\varepsilon),$$

pošto je funkcija $\rho S_2(\rho)$ uniformno ograničena po $\rho \in \mathbf{R}$.

Dakle, možemo prepisati relaciju (24) kao

$$A_1\varphi(\phi_1) + A_2\varphi(\phi_2) + (S_1 + S_2)\varphi(\phi_1) = O(\varepsilon).$$

Dakle, kako su koeficijenti A_i nezavisni od ε , kao i obično dobijamo:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad S_1 + S_2 = 0.$$

2.2 "Complex germ" lema

U ovom poglavlju ćemo, u formi koja nam odgovara formulisati tvrđenje koje ima veoma važnu ulogu u Maslovljevoj "complex germ" teoriji [20, 21].

Lema 22. *Neka $f(t) \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $f(t_0) = 0$, i $f'(t_0) \neq 0$. Neka je g neprekidno diferencijabilna funkcija na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ koja lokalno uniformno zadovoljava ocjene*

$$|\tau g(\tau, t)| \leq \text{const}, \quad |\tau g'_t(\tau, t)| \leq \text{const}, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

i $g(\tau, t_0) = 0$. Tada za svako $T > 0$ postoji C_T tako da nejednakost

$$\left| g\left(\frac{f(t)}{\varepsilon}, t\right) \right| \leq C_T \varepsilon,$$

važi na svakom intervalu $0 \leq t \leq T$ koji ne sadrži nule funkcije $f(t)$ osim t_0 .

Dokaz Razlomak $f(t)/(t-t_0)$ je lokalno ograničen po t . Razlomak $\tau g(\tau, t)/(t-t_0)$ je takođe lokalno ograničen. Važi:

$$g\left(\frac{f(t)}{\varepsilon}, t\right) = \varepsilon \left[g\left(\frac{f(t)}{\varepsilon}, t\right) (t-t_0)^{-1} \right] \frac{f(t)}{\varepsilon} \cdot \frac{t-t_0}{f(t)}.$$

Po pretpostavkama leme, na posmatranom intervalu posljednji činilac na desnoj strani je ograničen, dok je proizvod srednjeg činioca i izraza u srednjim zagradama ograničen usljed osobina funkcije $g(\tau, t)$. \square

3 Slabo asimptotsko rješenje Hopfove jednačine

U ovom poglavlju, na primjeru Hopfove jednačine, pokazaćemo kako se primjenjuje slabo asimptotski metod za dobijanje glatkog po $t \in \mathbf{R}^+$ asimptotskog rješenja Cauchyevog problema (1), (3). Prvo ćemo razmatrati jednačinu (25) sa početnim uslovom u obliku jednostavne funkcije (26). Analiziraćemo, zatim standardne slučajeve interakcija među singularitetima (interakcija dvije slabe neprekidnosti, slabe neprekidnosti i udarnog talasa i dva udarna talasa). Na kraju ćemo razmatrati proizvoljan opadajući početni uslov. Aproksimiramo ga poligonom (jer je jednostavna funkcija u obliku izlomljene linije) i analizirati transformaciju tog poligona po $t \in \mathbf{R}^+$. Na kraju ćemo dokazati da je dato aproksimativno rješenje u $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ smislu blizu dopustivog slabog rješenja razmatranog problema.

3.1 Interakcija slabih diskontinuiteta. Formiranje udarnih talasa

Razmatrajmo Hopfov u jednačinu

$$Lu = u_t + (u^2)_x = 0 \quad (25)$$

sa sljedećim početnim uslovom

$$u|_{t=0} = u_0^0 + u_1^0(a_1 - x)_+ - u_1^0(a_2 - x)_+, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (26)$$

gdje $a_1 > a_2$, $z_+ = z\theta(z)$, $u_i^0 = \text{const} > 0$.

Slabo asimptotsko rješenje tražićemo u obliku (regularizovane) izlomljene linije

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) = & u_0^0 + u_1(t, \varepsilon)(\varphi_1(t, \varepsilon) - x)\theta_{\varepsilon,1}(-x + \varphi_1(t, \varepsilon)) \\ & - u_2(t, \varepsilon)(\varphi_2(t, \varepsilon) - x)\theta_{\varepsilon,2}(-x + \varphi_2(t, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Nepoznate funkcije φ_i i u_i , $i = 1, 2$, koje se pojavljuju u posljednjem izrazu pripadaju klasi $C^1(\mathbf{R}^+)$ za svako fiksirano ε i zadovoljavaju sljedeće uslove:

$$\varphi_i(0, \varepsilon) = a_i, \quad u_i(0, \varepsilon) = u_i^0, \quad i = 1, 2.$$

Zamjenjujući aproksimaciju $u_\varepsilon(x, t)$ u jednačinu (25) i primjenjujući Lemu 18 dobijamo:

$$\begin{aligned} & (u_1(\varphi_1 - x)_+)_t - (u_2(\varphi_2 - x)_+)_t + (u_1^2(\varphi_1 - x)_+^2)_x + (u_2^2(\varphi_2 - x)_+^2)_x \\ & + 2[u_0^0 u_1(\varphi_1 - x)_+]_x - 2[u_0^0 u_2(\varphi_2 - x)_+]_x \\ & - 2[u_1 u_2(\varphi_1 - x)(\varphi_2 - x)\theta(\varphi_1 - x)]_x B_1(\Delta\varphi/\varepsilon) \\ & - 2[u_1 u_2(\varphi_1 - x)(\varphi_2 - x)\theta(\varphi_2 - x)]_x B_2(\Delta\varphi/\varepsilon) = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned}$$

gdje $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Razmatrajmo ovaj izraz u oblasti $\varphi_2 < x \leq \varphi_1$. Primijetimo da u ovom slučaju $\theta_1 = \theta(\varphi_1 - x) = 1$ i $\theta_2 = \theta(\varphi_2 - x) = 0$. Dakle važi:

$$\begin{aligned} & u_{1t}(\varphi_1 - x) + u_1 \varphi_{1t} + 2[u_0^0 u_1(\varphi_1 - x)]_x + [u_1^2(\varphi_1 - x)^2]_x \\ & + 2u_1 u_2(\varphi_1 - x)B_1 + 2u_1 u_2(\varphi_2 - x)B_1 = \\ & u_{1t}(\varphi_1 - x) + u_1 \varphi_{1t} - 2u_0^0 u_1 + 2u_1^2(\varphi_1 - x) \\ & + 2u_1 u_2(\varphi_1 - x)B_1 + 2u_1 u_2(\varphi_2 - x)B_1 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Ako stavimo $x = \varphi_1$ dobijamo,

$$\varphi_{1t} - 2u_0^0 + 2u_2 \Delta\varphi B_1 = 0. \quad (28)$$

Primjenjujući ovu relaciju na jednačinu (27) stižemo do sljedeće jednačine za funkciju u_1 :

$$u_{1t} - 2u_1^2 + 4u_1 u_2 B_1 = 0. \quad (29)$$

Na sličan način, razmatrajući oblast, $-\infty < x \leq \varphi_2$, dobijamo sljedeće dvije jednačine:

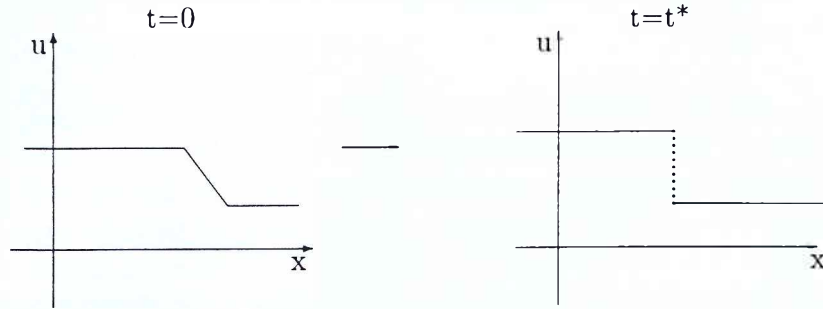
$$\varphi_{2t} - 2u_0^0 + 2u_1 \Delta\varphi B_2 = 0, \quad (30)$$

$$u_{2t} + 2u_2^2 - 4u_1 u_2 B_2 = 0, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (31)$$

Neka je $\Delta\varphi < 0$. Tada, do $O(\varepsilon^N)$, važi $B_1(\Delta\varphi/\varepsilon) = 0$, $B_2(\Delta\varphi/\varepsilon) = 1$ i tako dobijamo sljedeći sistem jednačina koje opisuju evoluciju izlomljene linije do trenutka njenog "ispravljanja" (ili, formalnije, dok $\varphi_1 > \varphi_2$):

$$\begin{aligned} & (\varphi_{10})'_t - 2u_0^0 = 0, \quad (\varphi_{20})'_t - 2u_0^0 + 2u_{10}(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = 0, \\ & (\varphi_{10})'_t - 2(u_{10})^2 = 0, \quad (u_{20})'_t + 2u_{20}^2 - 4u_{10}u_{20} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$





Slika 1: Transformacija jednostavnog početnog uslova kod Hopfove jedn.

Rješenja ovog sistema imaju oblik:

$$u_{10}(t) = u_{20}(t) = u_1^0 / (1 - 2tu_1^0),$$

$$\varphi_{10}(t) = a_1 + 2u_0^0 t, \quad \varphi_{20}(t) = a_2 + 2[u_1^0(a_1 - a_2) + u_0^0]t.$$

Stavimo $\psi_0(t) = \varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)$. U trenutku $t = t^*$ takvom da $\psi_0(t^*) = 0$ slabi diskontinuitete se spajaju i udarni talas je generisan (vidi sliku).

Da bismo konstruisali asimptotsko rješenje koje je glatko po $t \in \mathbf{R}^+$ te opisali interakciju slabih diskontinuiteta i formiranje udarnih talasa tražimo funkcije φ_i , $i = 1, 2$, u obliku

$$\varphi_k(t, \varepsilon) = \varphi_{k0}(t) + \psi_0(t)\phi_k(\tau), \quad \tau = \psi_0/\varepsilon, \quad k = 1, 2. \quad (33)$$

Zamjenjujući ovo u (28) i (30) i puštajući da $\tau \rightarrow -\infty$ vidimo da ϕ_k moraju zadovoljavati:

$$\begin{aligned} \phi_k(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow -\infty} &= 0, \\ \frac{d\phi_k}{d\tau} \Big|_{|\tau| \rightarrow \infty} &= o(\tau^{-1}). \end{aligned}$$

Uvedimo sada funkciju $\rho = \rho(\tau)$:

$$\rho(\tau) = \frac{\varphi_2(t, \varepsilon) - \varphi_1(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Funkcije $u_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$, tražimo u obliku:

$$u_k(t, \varepsilon) = \psi_0(0)u_1^0 / (\psi_0(t) + \varepsilon g_k(\tau)), \quad k = 1, 2.$$

Ovdje pretpostavljamo da se funkcije $g_k(\tau)$ ponašaju na isti način kao funkcije $\phi_k(\tau)$. Iz jednačina (28), (29), (30), (31) zaključujemo $\tau + g = \tau + g_1 = \tau + g_2 = \rho$ kao i

$$\dot{\rho} = 1 - 2B_1(\rho), \quad \rho/\tau|_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 1. \quad (34)$$

Stacionarno rješenje ove jednačine je $\rho = \rho_0$, gdje je ρ_0 takvo da $B_1(\rho_0) = 1/2$. Pošto $0 < B_1 < 1$ vidimo da je $\dot{\rho} > 0$. Dakle, ρ je rastuća funkcija koja teži ρ_0 .

Ovo nam dozvoljava da izračunamo rješenje kada $\psi_0 > 0$ (t.j., poslije interakcije). Primijetimo da u tom slučaju $\tau \rightarrow \infty$.

Uvedimo funkciju $G(\tau) = \tau + g(\tau)$. Po prethodnom, $\dot{G} = \dot{\rho}$, $G/\tau|_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow +1$. Funkcije u_i možemo izraziti putem funkcije G :

$$u_i = \frac{\psi_0(0)u_1^0}{\varepsilon G} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\psi_0(0)u_1^0}{\varepsilon \rho_0}.$$

Izračunajmo limit $(\varphi_k)_t^+$ dok $\tau \rightarrow \infty$ (to je limit brzina slabih diskontinuiteta):

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_t^+ &= 2u_0^0 - \frac{2\psi_0(0)u_1^0}{\varepsilon \rho_0} \frac{1}{2} \varepsilon \rho_0 = 2u_0^0 + (a_1 - a_2)u_1^0, \\ (\varphi_1)_t^+ &= 2u_0^0 - \frac{2\psi_0(0)u_1^0}{\varepsilon \rho_0} \frac{1}{2} \varepsilon \rho_0 = 2u_0^0 + (a_1 - a_2)u_1^0, \end{aligned}$$

i one se poklapaju sa brzinama udarnih talasa

$$U(x, t) := u_0^0 + (a_1 - a_2)u_1^0 \theta(-x + \varphi^+(t)),$$

gdje $\varphi^+ = \varphi_2^+ = \varphi_1^-$.

Koristeći eksplisicnu fomulu za rješenje $u_\varepsilon(x, t)$, vidimo da

$$w - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = U(x, t), \quad t > t^*.$$

Naime, prepisimo funkciju $u_\varepsilon(x, t)$ u obliku

$$u_\varepsilon(x, t) = u_0^0 + u_1(\varphi_1 - \varphi_2)\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) + u_1(x - \varphi_2)[\theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x) - \theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x)].$$

Razmotrimo drugi sabirak u prethodnoj formuli:

$$u_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\psi_0(0)u_1^0 \rho}{G} = \psi_0(0)u_1^0 = (a_1 - a_2)u_1^0 \stackrel{\text{def}}{=} U_0.$$

Pošto $\varphi_1|_{t>t^*} = \varphi^+ + \mathcal{O}(\varepsilon)$, prva dva sabirka prelaze u udarni talas $U(x, t)$ za $t > t^*$. Razmotrimo posljednji sabirak:

$$u_1(x - \varphi_2) [\theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x) - \theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x)] = \\ u_1(\varphi_1 - \varphi_2)(x - \varphi_2) \left[\frac{\theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x) - \theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right]. \quad (35)$$

Kako smo već pokazali, koeficijent $u_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ ispred izraza u zagradama je konstantan. Izraz u srednjim zagradama je aproksimacija Dirakove δ -funkcije u tački φ_1 . Zato je čitav izraz sa desne strane relacije (35) jednak $const \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \delta(x - \varphi_2) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ pa budući da za $t > t^*$ važi $(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ vidimo da je izraz sa lijeve strane (35) mali (u slabom smislu) dok $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2 Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa

Ovo podpoglavlje nazvali smo interakcija udarnog talasa i slabog diskontinuiteta samo iz razloga konzistentnosti izlaganja. Naime, u ovom slučaju, ne možemo govoriti o interakciji jer rješenje ne mijenja svoju strukturu; imamo udarni talas koji se kreće po nekonstatnoj podlozi. Dakle, nema prelaska iz neprekidnog u prekidno stanje rješenja ili interakcije dva udarna talasa u kom slučaju sa funkcije koja ima dvije tačke prekida prelazimo u funkciju sa samo jednom tačkom prekida.

Početni uslov koji odgovara ovom tipu interakcije ima oblik:

$$u|_{t=0} = u_0^0 \theta(a_1^0 - x) + u_1^0 (a_1 - x) \theta(a_1 - x) - u_1^0 (a_2 - x) \theta(a_2 - x), \quad (36)$$

gdje su u_0^0, u_1^0 pozitivne konstante i $a_1 > a_2$ (primijetimo da znak konstanti ne utiče na opštost razmatranja).

Slično prethodnom, slabo asimptotsko rješenje Hopfove jednačine sa početnim uslovom (36) tražimo u obliku:

$$u_\varepsilon(x, t) = u_0(t, \varepsilon) \theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1(t, \varepsilon) - x) + u_1(t, \varepsilon) (\varphi_1(t, \varepsilon) - x) \theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1(t, \varepsilon) - x) - \\ u_1(t, \varepsilon) (\varphi_2(t, \varepsilon) - x) \theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2(t, \varepsilon) - x), \quad (37)$$

gdje su $u_i = u_i(t, \varepsilon)$, $\varphi_i = \varphi_i(t, \varepsilon)$ nepoznate $C^1(\mathbf{R}^+)$ funkcije za svako fiksirano ε koje zadovoljavaju sljedeće početne uslove:

$$u_i(0, \varepsilon) = u_i^0, \quad \varphi_i(0, \varepsilon) = a_i, \quad i = 1, 2.$$

Označimo $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Zamjenjujući izraz za $u_\varepsilon(x, t)$ u Hopfovju jednačinu i ponavljajući proceduru iz prethodnog podpoglavlja dobijamo sljedeći sistem jednačina koji određuje nepoznate funkcije iz (37)

$$\varphi_{1t} - u_0 + 2u_1(\varphi_2 - \varphi_1)B_1(\Delta\varphi/\varepsilon) = 0, \quad (38)$$

$$u_{0t} - u_0u_1(1 - 2B_1(\Delta\varphi/\varepsilon)) = 0, \quad (39)$$

$$u_{1t} - 2u_1^2 + 4u_1^2B_1(\Delta\varphi/\varepsilon) = 0, \quad (40)$$

$$\varphi_{2t} - 2u_0B_2 + 2u_1\psi B_2(\Delta\varphi/\varepsilon) = 0. \quad (41)$$

Prije interakcije važi $\varphi_2 < \varphi_1$, dakle, $\Delta\varphi/\varepsilon \sim -\infty$, i $B_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, $B_2 = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ za proizvoljno $N \in \mathbf{N}$. Označavajući sa φ_{10} , u_{10} , φ_{20} , u_{00} rješenja sistema (38)-(41) kada $B_1 = 0$, $B_2 = 1$ (t.j. prije interakcije), dobijamo sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \varphi_{10t} &= u_{00}, \\ u_{10t} &= 2u_{10}^2, \\ u_{00t} &= u_{00}u_{10}, \\ \varphi_{20t} &= 2(u_{00} - u_{10}\psi_0), \quad \psi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10}. \end{aligned}$$

Njegova rješenja su oblika:

$$u_{10} = \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0 t}, \quad u_{00} = \frac{u_0^0}{(1 - 2u_1^0 t)^{1/2}},$$

$$\varphi_{20} = a_2 + 2Ut, \quad \varphi_{10} = a_1 + \int_0^t u_{00} dt, \quad (42)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{u_1^0} \left[(\psi_0^0 u_1^0 - u_0^0)(1 - 2u_1^0 t) - u_0^0 \sqrt{1 - 2u_1^0 t} \right], \quad (43)$$

$$U = u_0^0 + u_1^0(a_1 - a_2).$$

Očigledno je da je funkcija $\psi_0(t)$ jednaka nuli u dvije tačke $t_1 = 1/2u_1^0$ i $t = t^*$ takvoj da

$$\sqrt{1 - 2u_1^0 t^*} = \frac{u_0^0}{U}.$$

Jasno, $t^* < t_1$ pa se $x = \varphi_{10}$ i $x = \varphi_{20}$ spajaju u $t = t^*$. U ovom slučaju važi:

$$u_{00}(t^*) = u_{00}^* \equiv U, \quad u_{10}(t^*) = \frac{U^2}{(u_0^0)^2} u_1^0 < \infty.$$

Oduzimajući jednačinu (40) od jednačine (38), dobijamo sljedeću jednačinu za funkciju ψ :

$$\psi_t = (u_0 - 2\psi u_1)(1 - 2B_1(\Delta\varphi/\varepsilon))$$

ili, označavajući $\rho = \Delta\varphi/\varepsilon = (\psi_0 + \psi_0\psi_1(\tau))/\varepsilon$, $\tau = \psi_0/\varepsilon$,

$$\psi'_0\dot{\rho} = [u_0 - 2\psi u_1](1 - 2B_1(\rho)), \quad \left. \frac{\rho}{\tau} \right|_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 1. \quad (44)$$

Primijetimo da možemo upotrijebiti formulu za ψ_0 (i za funkcije u_{00} i u_{10}) samo za $t \in [0, t^* + \delta]$, gdje je $\delta > 0$ proizvoljni broj takav da $\delta < t_1 - t^*$.

Da bismo dobili formule globalne po $t \in \mathbf{R}^+$, moramo odabrati broj δ i produžiti funkcije u_{00} , u_{10} , i ψ_0 glatko za vrijeme $t \geq t^* + \delta$ tako da funkcije u_ε ostaju (slabo asimptotsko) rješenje Košijevog problema (25), (36). Pošto $u_0 - 2\psi u_1 = \frac{2u_1^0}{\sqrt{1-2u_1^0 t}} + u_0^0 + (a_1 - a_2)u_1^0 > 0$, za $t < t^*$ vidimo da $\dot{\rho} > 0$ u tom intervalu. Kao u poglavlju 3.1 zaključujemo da postoji rješenje ρ problema (44) takvo da $\rho \rightarrow \rho_0$ dok $\tau \rightarrow +\infty$, gdje je ρ_0 korjen jednačine

$$B_1(\rho) = 1/2.$$

Oдавce slijedi da $\dot{\rho} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow +\infty$ što znači da kad $t > t^*$ važi $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Iz (40) možemo izračunati $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$ za $t > t^*$. Važi: $\varphi_i(t) = U$, $i = 1, 2$, i iz početnih uslova za φ_i , $i = 1, 2$, vidimo da za $t > t^*$:

$$\varphi_1(t, \varepsilon) = \varphi_{10}(t^*) + Ut + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varphi_2 = \varphi_{20}(t^*) + Ut + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (45)$$

Razmotrimo sistem jednačina za funkcije u_0 i u_1 . Iz (39) i (40) vidimo da

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0 \int_0^t [1 - 2B_1(\rho(\tau))] dt'}.$$

Pošto $\int_0^{t^*} (1 - 2B_1) dt' \leq t^*$, važi $u_1(t^*, \varepsilon) \leq u_{10}(t^*)$. S druge strane važi $t > t^*$ za $\rho \rightarrow \rho_0$. Zato $(\Delta\varphi) = \varepsilon\rho \rightarrow 0$ kad $\tau \rightarrow \infty$ (t.j., za $t > t^*$ i $\varepsilon \rightarrow 0$). Ovo povlači da za $t > t^*$ važi

$$u_1(t, \varepsilon) = u_{10}(t^*) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Predstavimo konstruisano rješenje u obliku

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) = & u_0\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) + u_1(\varphi_1 - x)\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) - u_1(\varphi_2 - x)\theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x) = \\ & U\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) + (u_0 - U)\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) + u_1(\varphi_1 - \varphi_2)\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) + \\ & [\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) - \theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x)](\varphi_2 - x)u_1. \end{aligned}$$

Pošto kad $t > t^*$ važi $U - u_0 \rightarrow 0$ i $\varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow 0$ drugi i treći sabirak u prethodnom izrazu teže nuli kada $\varepsilon \rightarrow 0$ dok četvrti izraz teži nuli jer

$$\begin{aligned} & [\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) - \theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x)](\varphi_2 - x)u_1 = \\ & \frac{\theta_{\varepsilon,1}(\varphi_1 - x) - \theta_{\varepsilon,2}(\varphi_2 - x)}{\varphi_2 - \varphi_1}(\varphi_2 - x)(\varphi_2 - \varphi_1)u_1 \rightarrow \\ & \delta(\varphi_2 - x)(\varphi_2 - x)(U - u_0) = 0 \end{aligned}$$

Pošto za $t > t^*$, $\varepsilon \rightarrow 0$, iz (45) imamo $\varphi_1 = a_1 + Ut$, prvi sabirak pa tako i konstruisana funkcija $u_\varepsilon(x, t)$ kada $t > t^*$, aproksimira udarni talas

$$u = U\theta(a_1 + Ut - x).$$

3.3 Standardni primjeri Košijevih problema za Hopfovu jednačinu

U sljedeća četiri potpoglavlja razmatraćemo transformaciju početnog uslova prije druge interakcije. Poslije prve interakcije imaćemo problem analogan onom iz trenutka $t = 0$ ili ćemo problem svesti na neku od prethodnih situacija. Kako je problem interakcije lokalna (i vremenska i prostorna) dovoljno je glatko po $t \in \mathbb{R}$ opisati trenutak promjene strukture rješenja (u ostalom dijelu prostora krećemo se ili po karakteristikama ili po Rankine-Hugoniotovoj krivoj). Kako je ovo urađeno u prethodnom dijelu teksta u sljedeća četiri potpoglavlja samo ćemo navesti rezultate bez dokaza pozivajući se na prethodna dva potpoglavlja (ponavljamo da je ovo legitimno zbog lokalnosti fenomena interakcije). Iz same konstrukcije vidi se da se rješenja od k -te do $k+2$ -ge interakcije i od $k+1$ -ve do $k+3$ -će interakcije poklapaju u zajedničkim djelovima intervala $(t_k^*, t_{k+1}^* + \delta_k)$, $\delta_k < t_{k+2}^* - t_{k+1}^*$, $k \in \mathbb{N}$, gdje je t_k^* kao i obično, vrijeme k -te interakcije. Iz ovog razloga, moći ćemo napisati glatko po t asimptotsko rješenje razmatranog Košijevog problema koristeći razbijanje jedinice vremenske ose.

U tekstu koji slijedi, funkcija ϕ koju smo koristili za regularizovanje trajektorije koja opisuje kretanje tačaka a_i (vidi (33)) zavisice ne samo od "brze" promjenljive τ već i od promjenljive t takođe. Sljedeća lema je rješava probleme koji nastaju uvođenjem nove promjenljive u funkciju ϕ .

Lema 23. *Pretpostavimo da za funkcije $\varphi(t, \tau)$ i $F(t, \tau)$ gdje je $\tau = \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}$, ψ_0 glatka rastuća funkcija koja ima jedinstvenu nulu u $t = t^*$, važi*

$$(\varphi(t, \tau))_t = F(t, \tau), \quad (46)$$

kao i $F(\cdot, \tau) - F(\cdot, -\infty) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ i $F(\cdot, \tau) - F(\cdot, \infty) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Tada postoje funkcije $\phi(t, \tau)$, $t \in \mathbf{R}^+$, $\tau \in \mathbf{R}$ takve da

$$\varphi(t, \tau) = \varphi^-(t) + \psi_0(t)\phi(t, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (47)$$

gdje $\varphi^-(t) = \varphi(t, -\infty)$, $t \in \mathbf{R}^+$. Dalje važi:

$$\phi = \frac{1}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau (F(t, \tau') - \varphi^-(t) - \psi_0(t)\phi_t^+(t)\omega(\tau')) d\tau', \quad (48)$$

gdje je ϕ^+ dato sa

$$\psi_0(t)\phi^+(t) = \int_t^\infty (F(t, +\infty) - \varphi_t^-(t)) dt'$$

dok je ω takvo da $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = 1$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} w(z) = 0$, i $\frac{dw}{dz} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Dokaz: Zamjenjujući (47) u (46) dobijamo

$$\varphi_t^- + \psi_{0t}(\tau\phi)_\tau + \psi_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = F.$$

Dakle, da bismo dokazali da je (48) funkcija koja zadovoljava lemu moramo dokazati da

$$\varphi_t^- + (F - \varphi_t^- - \psi_0\omega\phi_t^+) + \psi_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = F + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

t.j. da,

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\tau\phi - \tau\omega\phi^+) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Zamjenjujući (48) u gornju jednačinu dobijamo

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\psi'_0} \int_0^\tau (F(t, \tilde{\tau}) - \varphi_t^-(t) - \psi_0(t)\phi_t^+(t)\omega(\tilde{\tau}) - \psi'_0(t)\phi^+(t)\omega(\tilde{\tau})) d\tilde{\tau} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Koristeći činjenicu da φ^- rješava jednačinu $\varphi_t = F^- = F(\cdot, -\infty)$ i da važi $\varphi_t^- + \psi_0\phi_t^+ + \psi'_0\phi^+ = (\varphi^- \psi_0\phi^+)_t = F^+ = F(\cdot, \infty)$ imamo:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\psi'_0} \int_{-\infty}^\tau (F(t, \tilde{\tau}) - F^+(t)\omega(\tilde{\tau}) - F^-(t)(1 - \omega(\tilde{\tau}))) d\tilde{\tau} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (49)$$

Pošto važi $F(\cdot, \tau) - F(\cdot, -\infty) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ i $F(\cdot, \tau) - F(\cdot, \infty) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, za svako $t \in \mathbf{R}^+$, takođe važi $\frac{\partial}{\partial t}(F(\cdot, \tau) - F(\cdot, -\infty)) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ i $\frac{\partial}{\partial t}(F(\cdot, \tau) - F(\cdot, \infty)) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Dalje, pošto u (49) imamo parcijane izvode po t (izvod ne utiče na τ), zaključujemo da je posljednji integral ograničen te da je jednakost data sa (49) korektna. \square

U nastavku će nam trebati sljedeće funkcije:

$$\begin{aligned}\tau^{ij} &= \frac{\varphi_{j0}(t) - \varphi_{i0}(t)}{\varepsilon}, \\ \rho^{ij} &= \frac{\Delta^{ij}\varphi(t)}{\varepsilon} = \frac{\varphi_j(t) - \varphi_i(t)}{\varepsilon}, \\ B_k^{ij} &= B_k(\rho^{ij}), \quad t \in \mathbf{R}^+.\end{aligned}$$

3.3.1 Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa, slučaj četiri tačke; prvi slučaj

U ovom poglavlju daćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (25) sa početnim uslovom koje ima tri slaba diskontinuiteta i jedan udarni talas. Analiziraćemo transformaciju početnih uslova do druge interakcije. Početni uslov je:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= h + u_1^0(a_1 - x) - u_1^0(a_2 - x)_+ + u_0^0\theta(a_2 - x) + \\ &\quad u_2^0(a_2 - x)_+ - u_2^0(a_3 - x)_+ + u_3^0(a_3 - x)_+ - u_3^0(a_4 - x)_+, \quad (50)\end{aligned}$$

gdje $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ i $v_0^0, v_1^0, v_2^0, h > 0, u_0^0 > 0, u_1^0 > 0, u_2^0 > 0$ i u_3^0 su konstante u \mathbf{R} takve da $(a_1 - a_2)u_1^0 = v_0^0, (a_2 - a_3)u_2^0 = v_1^0$ i $(a_3 - a_4)u_3^0 = v_2^0$. Slabo asimptotsko rješenje problema (25), (50) dato je u obliku:

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x, t) &= h + u_1(\varphi_1 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_1 - x) - u_1(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + \\ &\quad u_0\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + u_2(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) - u_2(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + \\ &\quad u_3(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) - u_3(\varphi_4 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_4 - x), \quad (51)\end{aligned}$$

gdje je $\varphi_i(0) = a_i, i = 1, 2, 3, 4$, i $u_i(0) = u_i^0, i = 0, 1, 2, 3$. Pretpostavimo da će se prva interakcija dogoditi između tačaka a_2 and a_3 .

Jednačine za nepoznate funkcije φ_i i $u_{i-1}, i = 1, 2, 3, 4$, u intervalu $[0, t_1^* +$

δ), $\delta < t_2^* - t_1^*$, gdje je t_2^* vrijeme druge interakcije, imaju oblik:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1t} &= 2h \\
\varphi_{2t} &= u_0 + 2h + 2v_0^0 - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_1^{23} + 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23} = 0 \\
\varphi_{3t} &= 2h + 2v_0^0 + 2u_1\Delta^{23}\varphi + 2u_0B_2^{23} - 2u_1\Delta^{23}\varphi B_2^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_2^{23} = 0 \\
\varphi_{4t} &= 2h + 2v_0^0 + 2v_1^0 + v_2^0 + 2u_0 \\
u_{0t} - u_0(u_2 + u_1) + 2u_0u_2B_1^{23} - 2u_0u_3B_1^{23} &= 0 \\
u_{1t} - u_1^2 &= 0 \\
u_{2t} - 2u_2^2 - 4u_1u_2B_1^{23} + 4u_1u_3B_1^{23} - 4u_2u_3B_1^{23} - 4u_2^2B_1^{23} &= 0 \\
u_{3t} - 2u_3^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Rješenja sistema su:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= 2ht + a_1, \quad \varphi_4(t) = 2(h + v_0^0 + v_1^0 + v_2^0)t + 2 \int_0^t u_0(t')dt' + a_4 \\
u_1(t) &= \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0t}, \quad u_3(t) = \frac{u_3^0}{1 - 2u_3^0t} \\
u_0(t) &= \exp\left(\int_0^t (u_2 + u_1 - 2u_2B_1^{23} + 2u_3B_1^{23}) dt' + u_0^0\right), \\
\varphi_2(t) &= \varphi_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_2(t, \tau^{23}) \\
\varphi_3(t) &= \varphi_{30}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_3(t, \tau^{23}) \\
u_2(t) &= u_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\kappa(t, \tau),
\end{aligned} \tag{53}$$

gdje $\psi_0^{23} = \varphi_{30} - \varphi_{20}$, $\tau^{23} = \frac{\psi_0^{23}}{\varepsilon}$ i

$$\begin{aligned}
\varphi_{20}(t) &= (2h + 2v_0^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_2, \\
\varphi_{30}(t) &= 2(h + v_0^0 + v_1^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_3, \\
u_{20}(t) &= \frac{u_2^0}{1 - 2u_2^0t}, \\
\dot{\rho}^{23}\psi_{0t}^{23} &= (u_0 - 2u_2\Delta^{23})(1 - 2B_1^{23}) + 2u_1\Delta^{23}\varphi B_1^{23} - 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23}.
\end{aligned}$$

Funkcije $\rho^{23}(\tau^{23})$, $\phi_2(t, \tau^{23})$, $\phi_3(t, \tau^{23})$ i $\kappa(t, \tau)$ su takve da

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{23}(\tau^{23})}{\tau^{23}} \Big|_{\tau^{23} \rightarrow -\infty} &= 1, \\ B_i(\rho^{23}(t, \tau^{23}) \Big|_{\tau^{23} \rightarrow +\infty}) &= 1/2, \quad i = 1, 2, \\ \phi_i(t, \tau^{23}) \Big|_{\tau^{23} \rightarrow -\infty} &= 0, \\ \frac{d\phi_i(t, \tau^{23})}{d\tau^{23}} \Big|_{\tau^{23} \rightarrow -\infty} &= o((\tau^{23})^{-1}), \quad i = 2, 3, \\ \kappa(t, \tau^{23}) \Big|_{\tau^{23} \rightarrow -\infty} &= 0, \\ \frac{d\kappa(t, \tau^{23})}{\tau^{23}} &= o((\tau^{23})^{-1}). \end{aligned}$$

Izraze za funkcije $\phi_2(t, \tau^{23})$, $\phi_3(t, \tau^{23})$ i $\kappa(t, \tau)$ dobijamo iz sistema (52) i Leme 23.

Primjedba 24. Dok izraze za $\phi_2(t, \tau^{23})$ i $\phi_3(t, \tau^{23})$ dobijamo eksplicitno iz Leme 23, za $\kappa(t, \tau)$ imamo (vidi izraz za u_2 u (53)):

$$u_{2t} = F(t, \tau, u_2)$$

odakle dobijamo relaciju

$$a(t, \tau)\kappa^2 + b(t, \tau)\kappa + c(t, \tau) = 0,$$

za odgovarajuće $C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ funkcije a , b i c . Odavde, koristeći granični uslov za funkciju κ nalazimo nepoznatu funkciju κ .

3.3.2 Interakcija slabog diskontinuiteta i udarnog talasa, slučaj četiri tačke; druga mogućnost

U ovom potpoglavlju razmatramo takođe interakciju slabog diskontinuiteta i udarnog talasa s tim što je raspored singulariteta u početnoj funkciji izmijenjen. Ovdje hoćemo da istražimo interakciju pomenutih singulariteta u slučaju kada je slabi diskontinuitet ispod udarnog talasa. Kako smo najavili, razmatraćemo evoluciju početnog uslova do druge interakcije. Početni uslov je:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = h + u_1^0(a_1 - x) - u_1^0(a_2 - x)_+ + u_2^0(a_2 - x)_+ + \\ u_0^0(a_3 - x)_+ - u_2^0(a_3 - x)_+ + u_3^0(a_3 - x)_+ - u_3^0(a_4 - x)_+, \quad (54) \end{aligned}$$

gdje su $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ konstante u \mathbf{R} , dalje, u_0^0, u_1^0, u_2^0 i u_3^0 su pozitivne konstante takve da $(a_1 - a_2)u_1^0 = v_0^0$, $(a_2 - a_3)u_2^0 = v_1^0$ i $(a_3 - a_4)u_3^0 = v_2^0$. Slabo asimptotsko rješenje problema (25), (54) ima oblik:

$$u_\varepsilon(x, t) = h + u_1(\varphi_1 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_1 - x) - u_1(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + u_2(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) - \\ u_2(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + u_0\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + u_3(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) - \\ u_3(\varphi_4 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_4 - x), \quad (55)$$

gdje $\varphi_i(0) = a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, i $u_i(0) = u_i^0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Ovdje pretpostavljamo da će se prva interakcija dogoditi između tačaka a_2 and a_3 . Jednačine koje određuju nepoznate funkcije φ_i i u_{i-1} , $i = 1, 2, 3, 4$, u intervalu $[0, t_1^* + \delta)$, $\delta < t_2^* - t_1^*$, gdje je t_2^* vrijeme druge interakcije, su:

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} &= 2h \\ \varphi_{2t} &= 2h + 2v_0^0 + 2u_0B_1^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_1^{23} + 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23} \\ \varphi_{3t} &= 2h + u_0 + 2v_0^0 - 2u_1\Delta^{23}\varphi + 2u_1\Delta^{23}\varphi B_2^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_2^{23} = 0 \\ \varphi_{4t} &= 2h + 2v_0^0 + 2v_1^0 + v_2^0 + 2u_0 \\ u_{0t} - u_0(u_2 + u_1) + 2u_0u_2B_1^{23} - 2u_0u_3B_1^{23} &= 0 \\ u_{1t} - u_1^2 &= 0 \\ u_{2t} - 2u_2^2 - 4u_1u_2B_1^{23} + 4u_1u_3B_1^{23} - 4u_2u_3B_1^{23} &= 4u_2^2B_1^{23} = 0 \\ u_{3t} - 2u_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja sistema su:

$$\varphi_1(t) = 2ht + a_1, \quad \varphi_4(t) = 2(h + v_1^0 + v_2^0 + v_3^0)t + 2 \int_0^t u_0(t')dt' + a_4$$

$$u_1(t) = \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0 t}, \quad u_3(t) = \frac{u_3^0}{1 - 2u_3^0 t} \quad (56)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_2(t, \tau^{23})$$

$$u_0(t) = \exp\left(\int_0^t (u_2 + u_1 - 2u_2B_1^{23} + 2u_3B_1^{23}) dt' + u_0^0\right), \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= \varphi_{30}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_3(t, \tau^{23}) \\ u_2(t) &= u_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\kappa(t, \tau), \end{aligned}$$

gdje je $\psi_0^{23} = \varphi_{30} - \varphi_{20}$, $\tau^{23} = \frac{\psi_0^{23}}{\varepsilon}$ i

$$\begin{aligned}\varphi_{20}(t) &= 2(h + v_0^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_2 \\ \varphi_{20}(t) &= 2(h + v_1^0 + v_0^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_3 \\ u_{20}(t) &= \frac{u_2^0}{1 - 2u_2^0 t}, \\ \dot{\rho}^{23}\psi_{0t}^{23} &= (u_0 - 2u_2\Delta^{23})(1 - 2B_1^{23}) - 2u_1\Delta^{23}\varphi B_1^{23} - 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23}.\end{aligned}$$

Ostale nepoznate funkcije $\rho^{23}(\tau^{23})$, $\phi_2(t, \tau^{23})$, $\phi_3(t, \tau^{23})$ i $\kappa(t, \tau^{23})$ imaju iste osobine kao odgovarajuće funkcije iz prethodnog poglavlja i dobijamo ih na potpuno isti način.

3.3.3 Interakcija slabih diskontinuiteta; slučaj četiri tačke

U ovom potpoglavlju daćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (25) sa početnim uslovom koji ima četiri slaba diskontinuiteta. Analiziraćemo transformaciju početnog uslova do druge interakcije. Početni uslov je:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= h + u_1^0(a_1 - x) - u_1^0(a_2 - x)_+ + u_2^0(a_2 - x)_+ \\ &\quad - u_2^0(a_3 - x)_+ + u_3^0(a_3 - x)_+ - u_3^0(a_4 - x)_+, \quad (58)\end{aligned}$$

gdje su $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ konstante u \mathbf{R} , zatim u_1^0 , u_2^0 i u_3^0 su pozitivne konstante takve da $(a_1 - a_2)u_1^0 = v_0^0$, $(a_2 - a_3)u_2^0 = v_1^0$ i $(a_3 - a_4)u_3^0 = v_2^0$. Slabo asimptotsko rješenje problema (25), (58) ima oblik:

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x, t) &= h + u_1(\varphi_1 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_1 - x) - u_1(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + u_2(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + \\ &\quad - u_2(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + u_3(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) - u_3(\varphi_4 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_4 - x), \quad (59)\end{aligned}$$

gdje $\varphi_i(0) = a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, i $u_i(0) = u_i^0$, $i = 1, 2, 3$.

Sistem jednačina koji određuje nepoznate funkcije u (59) u intervalu

$[0, t_1^* + \delta)$, $\delta < t_2^* - t_1^*$, gdje je t_2^* vrijeme druge interakcije, je:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1t} &= 2h \\
\varphi_{2t} &= 2(h + v_0^0) - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_1^{23} + 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23} \\
\varphi_{3t} &= 2(h + v_0^0) - 2u_1\Delta^{23}\varphi + 2u_1\Delta^{23}\varphi B_2^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_2^{23} = 0 \\
\varphi_{4t} &= 2h + 2v_0^0 + 2v_1^0 + v_2^0 \\
u_{1t} - u_1^2 &= 0 \\
u_{2t} - 2u_2^2 - 4u_1u_2B_1^{23} + 4u_1u_3B_1^{23} - 4u_2u_3B_1^{23} &= 4u_2^2B_1^{23} = 0 \\
u_{3t} - 2u_3^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenja sistema su:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= 2ht + a_1, \quad \varphi_4(t) = 2(h + v_1^0 + v_2^0 + v_3^0)t + 2 \int_0^t u_0(t')dt' + a_4 \\
u_1(t) &= \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0t}, \quad u_3(t) = \frac{u_3^0}{1 - 2u_3^0t} \\
\varphi_2(t) &= \varphi_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_2(t, \tau^{23}) \\
\varphi_3(t) &= \varphi_{30}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_3(t, \tau^{23}) \\
u_2(t) &= u_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\kappa(t, \tau),
\end{aligned} \tag{60}$$

gdje je $\psi_0^{23} = \varphi_{30} - \varphi_{20}$, $\tau^{23} = \frac{\psi_0^{23}}{\epsilon}$ i

$$\begin{aligned}
\varphi_{20}(t) &= 2(h + v_0^0)t + a_2 \\
\varphi_{20}(t) &= 2(h + v_1^0 + v_0^0)t + a_3 \\
u_{20}(t) &= \frac{u_2^0}{1 - 2u_2^0t}, \\
\dot{\rho}^{23} &= 1 - 2B_1^{23}
\end{aligned}$$

Ostale nepoznate funkcije $\rho^{23}(\tau^{23})$, $\phi_2(t, \tau^{23})$, $\phi_3(t, \tau^{23})$ i $\kappa(t, \tau^{23})$ imaju iste osobine kao i odgovarajuće iz prethodnog poglavlja i dobijamo ih na potpuno isti način.

3.3.4 Interakcija dva udarna talasa povezana pravom

Analiziraćemo transformaciju početnog uslova do druge interakcije. Početni uslov je:

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= h + u_1^0(a_1 - x)_+ - u_1^0(a_2 - x)_+ u_1^0(a_2 - x)_+ + u_2^0(a_2 - x)_+ + \\
&\quad u_2^0(a_3 - x)_+ - u_2^0(a_3 - x)_+ + u_3^0(a_3 - x)_+ - u_3^0(a_4 - x)_+, \tag{61}
\end{aligned}$$

gdje su $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ konstante u \mathbf{R} , u_0^0 , a u_1^0 , u_2^0 i u_3^0 pozitivne konstante takve da $(a_1 - a_2)u_1^0 = v_0^0$, $(a_2 - a_3)u_2^0 = v_1^0$ i $(a_3 - a_4)u_3^0 = v_2^0$. Slabo asimptotsko rješenje problema (25), (61) ima oblik:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) = & h + u_1(\varphi_1 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_1 - x) - u_1(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + u_{01}\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) + \\ & u_2(\varphi_2 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_2 - x) - u_2(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + u_{02}\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) + \\ & u_3(\varphi_3 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_3 - x) - u_3(\varphi_4 - x)\theta_\varepsilon(\varphi_4 - x), \quad (62) \end{aligned}$$

gdje važi $\varphi_i(0) = a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, i $u_i(0) = u_i^0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Pretpostavimo da će se prva interakcija dogoditi između tačaka a_2 i a_3 .

Sistem jednačina koji određuje neponate funkcije φ_i i u_{i-1} , $i = 1, 2, 3, 4$, u (62) u intervalu $[0, t_1^* + \delta)$, $\delta < t_2^* - t_1^*$, gdje je t_2^* vrijeme druge interakcije, je:

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} &= 2h \\ \varphi_{2t} &= 2h + 2v_0^0 + u_{01} + 2u_{02}B_1^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_1^{23} + 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23} \\ \varphi_{3t} &= 2h + u_{02} - 2u_{01}B_2^{23} + 2v_1^0 - 2u_1\Delta^{23}\varphi B_1^{23} - 2u_2\Delta^{23}\varphi B_2^{23} \\ \varphi_{4t} &= 2h + 2v_0^0 + 2v_1^0 + v_2^0 + 2u_{01} + 2u_{02} \\ u_{01t} - u_{01}(u_2 + u_1) + 2u_{01}u_2B_1^{23} - 2u_{01}u_3B_1^{23} &= 0 \\ u_{02t} - u_{02}(u_3 + u_2) + 2u_{02}u_1B_1^{23} - 2u_{02}u_2B_1^{23} &= 0 \\ u_{1t} - u_1^2 &= 0 \\ u_{2t} - 2u_2^2 - 4u_1u_2B_1^{23} + 4u_1u_3B_1^{23} - 4u_2u_3B_1^{23} &= 4u_2^2B_1^{23} = 0 \\ u_{3t} - 2u_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja sistema su:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 2ht + a_1, \quad \varphi_4(t) = 2(h + v_1^0 + v_2^0 + v_3^0)t + 2 \int_0^t (u_{01}(t') + u_{02}(t'))dt' + a_4 \\ u_1(t) &= \frac{u_1^0}{1 - 2u_1^0 t}, \quad u_3(t) = \frac{u_3^0}{1 - 2u_3^0 t} \\ u_0(t) &= \exp \left(\int_0^t (u_2 + u_1 - 2u_2B_1^{23} + 2u_3B_1^{23}) dt' + u_0^0 \right), \\ \varphi_2(t) &= \varphi_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_2(t, \tau^{23}) \\ \varphi_3(t) &= \varphi_{30}(t) + \psi_0^{23}(t)\phi_3(t, \tau^{23}) \\ u_2(t) &= u_{20}(t) + \psi_0^{23}(t)\kappa(t, \tau), \end{aligned}$$

gdje je $\psi_0^{23} = \varphi_{30} - \varphi_{20}$, $\tau^{23} = \frac{v_0^{23}}{\varepsilon}$ i

$$\varphi_{20}(t) = 2(h + v_0^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_2$$

$$\varphi_{20}(t) = 2(h + v_1^0 + v_0^0)t + \int_0^t 2u_0(t)dt + a_3$$

$$u_{20}(t) = \frac{u_2^0}{1 - 2u_2^0 t},$$

$$\dot{\rho}^{23}\psi_{0t}^{23} = (u_0 - 2u_2\Delta^{23})(1 - 2B_1^{23}) - 2u_1\Delta^{23}\varphi B_1^{23} - 2u_3\Delta^{23}\varphi B_1^{23}.$$

Funkcije $\rho^{23}(\tau^{23})$, $\phi_2(t, \tau^{23})$, $\phi_3(t, \tau^{23})$ i $\kappa(t, \tau)$ imaju iste osobine kao i odgovarajuće iz pretodnog poglavlja.

3.4 Interakcija slabih diskontinuiteta i formiranje udarnih talasa; slučaj n tačaka.

U ovom poglavlju rješavamo jednačinu (25) sa početnim uslovom u vidu poligoma sa n čvorova. Prvo ćemo napisati slabo asimptotsko rješenje problema u intervalu $[0, t_1^* + \delta_1)$, gdje, kao i obično, t_i^* označava vrijeme i -te interakcije i $\delta_i < t_{i+1}^* - t_i^*$. Koristeći rezultate Poglavlja 3.3 rekurzivno ćemo napisati rješenje u intervalima $[t_i^*, t_{i+1}^* + \delta_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-2$, i $[t_{n-1}^*, \infty)$.

Na početku ćemo uvesti pomoćne pojmove i oznake.

$$u_{l,0}(t) = \frac{u_l^0}{1 - 2u_l^0 t}, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_0^0 = 0, \quad v_k^0 = (a_{k-1} - a_k)u_{k-1}^0, \quad k = 2, \dots, n+1,$$

$$\varphi_{1,0}(t) = a_1, \quad \varphi_{l-1,0}(t) = 2 \sum_{k=1}^{l-1} v_k^0 t + a_l, \quad l = 2, \dots, n+1,$$

$$\psi_{l-1,0} = \varphi_{l,0} - \varphi_{l-1,0}, \quad \tau^{l-1,l} = \frac{\psi_{l,0}}{\varepsilon}, \quad l = 2, \dots, n+1,$$

$$\rho_l^{[i]}(\tau^{l-1,l}) = \frac{\varphi_l^{[i]} - \varphi_{l-1}^{[i]}}{\varepsilon}, \quad l = 2, \dots, n+1$$

$$B_{[i]k}^{l-1,l} = B_k(\rho_l^{[i]}), \quad k = 1, 2, \quad l = 2, \dots, n+1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u_s^{[i]} \equiv 0, \quad s \in \mathbf{Z}_0^-, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Neka je početni uslov za Hopfovju jednačinu:

$$u|_{t=0} = u_1^0(a_1 - x)_+ + (u_2^0 - u_1^0)(a_2 - x)_+ + (u_3^0 - u_2^0)(a_3 - x)_+ + \dots + (u_{n-1}^0 - u_{n-2}^0)(a_{n-1} - x)_+ + (u_n^0 - u_{n-1}^0)(a_n - x)_+ - u_n^0(a_{n+1} - x)_+ \quad (63)$$

Poznato je da će poslije određenog vremena a_i dostići tačku a_j ili obrnuto. Pretpostavimo da su momenti interakcije $t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^*$ i da u trenutku $t = t_i^*$ tačke $a_{l(i-1)}$ i $a_{l(i)}$ interaguju. Argumentom indukcije možemo napisati formulu koja glatko po t opisuje transformaciju početnog uslova. Kao i ranije, analiziraćemo ponašanje rješenja u intervalima: $[0, t_1^* + \delta_1)$, $[t_1^*, t_2^* + \delta_2)$, ..., $[t_{n-2}^*, \infty)$ gdje $t_0^* = 0$ i $\delta_i < t_{i+1}^* - t_i^*$, $i = 1, \dots, n-2$. Slabo asimptotsko rješenje u intervalima $[t_i^*, t_{i+1}^* + \delta_i)$, $i = 1, \dots, n$, označavaćemo sa $u_\varepsilon^{[i]}$.

Slično prethodnom, slabo asimptotsko rješenje u intervalu $[0, t_1^* + \delta_1)$ ima oblik:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{[1]}(x, t) = & u_1^{[1]}(\varphi_1^{[1]} - x)\theta_{1,\varepsilon}(\varphi_1^{[1]} - x) - u_1^{[1]}(\varphi_2^{[1]} - x)\theta_{2\varepsilon}(\varphi_2^{[1]} - x) + \\ & + \dots + u_{l(1)-1}^{[1]}(\varphi_{l(1)-1}^{[1]} - x)\theta_{l(1)-1,\varepsilon}(\varphi_{l(1)-1}^{[1]} - x) - u_{l(1)-1}^{[1]}(\varphi_{l(1)}^{[1]} - x)\theta_{l(1),\varepsilon}(\varphi_{l(1)}^{[1]} - x) + \\ & u_{l(1)}^{[1]}(\varphi_{l(1)-1}^{[1]} - x)\theta_{l(1),\varepsilon}(\varphi_{l(1)}^{[1]} - x) - \dots + u_n^{[1]}(\varphi_n^{[1]} - x)\theta_{n,\varepsilon}(\varphi_n^{[1]} - x) - \\ & u_n^{[1]}(\varphi_{n+1} - x)\theta_{n+1,\varepsilon}(\varphi_{n+1} - x). \end{aligned} \quad (64)$$

Pošto su na ovom (prvom) koraku oguće interakcije samo slabih diskontinuiteta, po analogiji sa Potpoglavljem 3.3.3 imamo:

$$\begin{aligned} \varphi_s^{[1]}(t) &= \varphi_{s,0}(t), \quad s \neq l(1) \text{ and } s \neq l(0), \quad s = 1, \dots, n+1, \\ \varphi_{l(0)}(t, \varepsilon) &= \varphi_{l(0),0}(t) + \psi_{l(0),0}(t)\phi_1^{[1]}(\tau^{l(0),l(1)}, t) \\ \varphi_{l(1)}(t, \varepsilon) &= \varphi_{l(1),0}(t) + \psi_{l(0),0}(t)\phi_2^{[1]}(\tau^{l(0),l(1)}, t) \\ u_s^{[1]}(t) &= u_{s,0}(t), \quad s \neq l(1) - 1, \quad s = 1, \dots, n, \\ u_{l(0)}(t, \varepsilon) &= u_{l(0),0}(t) + \kappa^{[1]}(\tau^{l(0),l(1)}, t) \end{aligned}$$

gdje funkcije $\phi_k^{[1]}(\tau^{l(0),l(1)}, t)$, $k = 1, 2$, i $\kappa^{[1]}(\tau^{l(0),l(1)}, t)$ za svako fiksirano $t \in$

\mathbf{R}^+ zadovoljavaju ($\tau^{l(0),l(1)}$ je nezavisna promjenljiva ovdje):

$$\begin{aligned}(\varphi_{l(0)})_t &= \sum_{k=0}^{l(0)} v_k^0 + 2u_0^{[1]} B_{[1]1}^{l(0),l(1)} \\(\varphi_{l(1)})_t &= \sum_{k=0}^{l(0)} v_k^0 + 2u_0^{[1]} B_{[1]1}^{l(0),l(1)} + 2u_0^{[1]} B_{[1]2}^{l(0),l(1)}, \\u_0^{[1]} &= u_{l(0)}^{[1]} \left(\varphi_{l(0)}^{[1]} - \varphi_{l(1)}^{[1]} \right) \\u_{0t} &= -2u_{l(0)-1}^{[1]} u_0^{[1]} B_{[1]1}^{23} + 2u_{l(1)}^{[1]} u_0^{[1]} B_{[1]1}^{23}.\end{aligned}$$

sa uslovima: $\kappa^{[1]}(-\infty, t) = \phi_j^{[1]}(-\infty) = 0$, $j = l(0)$ i $j = l(1)$.

Sada ćemo analizirati Hopfov jednačinu u intervalima $[t_i^*, t_{i+1}^* + \delta_{i+1})$, $i = 2, \dots, n-2$, i $[t_{n-1}^*, +\infty)$. Iz prethodnog Poglavlja indukcijom zaključujemo da poslije i -te interakcije važi:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \dots = \varphi_{j(1)}, \\ \varphi_{j(1)+1} &= \dots = \varphi_{j(2)} \\ &\dots \\ \varphi_{j(s-1)+1} &= \dots = \varphi_{j(s)},\end{aligned}$$

gdje je $j(s) = n+1$. Pretpostavimo da u trenutku $t = t_{i+1}^*$ tačke $a_{j(k)}$ i $a_{j(k+1)}$ interaguju. Imamo sljedeće mogućnosti:

a) $\varphi_{j(k)}(t) \neq \varphi_m(t)$ za svako $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k)\}$ i $\varphi_{j(k+1)}(t) \neq \varphi_m(t)$ za svako $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k+1)\}$ u intervalu $[t_i^*, t_i^* + \delta_i)$.

U ovom slučaju imamo interakciju slabih diskontinuiteta (primijetimo da zato $j(k+1) = j(k) + 1$). Rješenje ima oblik:

$$1. \quad x \leq \varphi_{j(k+2)} \text{ i } x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

$$\text{U ovom slučaju } u_\varepsilon^{[i+1]}(x, t) = u_\varepsilon^{[i]}(x, t).$$

$$2. \quad \varphi_{j(k+2)} \geq x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

U ovom intervalu slabo asimptotsko rješenje je:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^{[i+1]}(x, t) = & \sum_{p=1}^{j(k-1)} v_p^0 + u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) \ell_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) \theta_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) \theta_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) \theta_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) \theta_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x) \theta_\varepsilon^{[i+1]}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x).
\end{aligned}$$

Ovo je situacija analogna onoj iz Potpoglavlja 3.3.3. Razlika je u tome što ne počinjemo od trenutka $t = 0$ već od $t = t_i^*$. Zato ćemo za početni uslov imati:

$$\begin{aligned}
\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k+2)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+2)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*).
\end{aligned}$$

Nepoznate funkcije date su sa (60) uz očiglednu razliku u indeksiranju.

Naime, ako u (60) umjesto $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ i φ_4 stavimo $\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]}, \varphi_{j(k)}^{[i+1]}, \varphi_{j(k+1)}^{[i+1]}$ i $\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]}$, respektivno, zatim umjesto u_1, u_2 i u_3 stavimo $u_{j(k-1)}^{[i+1]}, u_{j(k)}^{[i+1]}$ i $u_{j(k+1)}^{[i+1]}$ dobijamo tražene nepoznate funkcije.

b) $\varphi_{j(k)}(t) \neq \varphi_m(t)$ za svako $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k)\}$ i $\varphi_{j(k+1)}(t) = \varphi_m(t)$ za neko $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k+1)\}$ u intervalu $(t_i^*, t_i^* + \delta)_i$.

U ovom slučaju imamo interakciju slabog diskontinuiteta i udarnog talasa čiji je raspored analogan rasporedu singulariteta u Potpoglavlju 3.3.1. Rješenje je dato u obliku:

$$1. \quad x \leq \varphi_{j(k+2)} \text{ i } x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

U ovom slučaju uzimamo $u_\varepsilon^{[i+1]}(x, t) = u_\varepsilon^{[i]}(x, t)$.

$$2. \quad \varphi_{j(k+2)} \geq x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

U ovom intervalu rješenje ima oblik:

$$\begin{aligned}
u_{\varepsilon}^{[i+1]}(x, t) = & \sum_{p=1}^{j(k-1)-1} v_p^0 + u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + u_{0,j(k)}^{[i+1]}\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) - u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) - u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x)\theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x).
\end{aligned}$$

Razlika u odnosu na Potpoglavlje 3.3.1 je u tome što ovdje za početni uslov imamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k+2)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+2)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{0,j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \sum_{p=j(k-1)+1}^{j(k)-1} v_p^0
\end{aligned}$$

Nepoznate funkcije date su sa (53) sa razlikom u indeksiranju analognoj onoj iz prethodnog potpoglavlja.

c) $\varphi_{j(k)}(t) = \varphi_m(t)$ za neko $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k)\}$ i $\varphi_{j(k+1)}(t) \neq \varphi_m(t)$ za svako $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k+1)\}$ u intervalu $(t_i^*, t_i^* + \delta_i)$.

U ovom slučaju imamo interakciju slabog diskontinuiteta i udarnog talasa čiji je raspored analogan onom iz Potpoglavlja 3.3.2. Rješenje je dato u obliku:

$$1. \ x \leq \varphi_{j(k+2)} \text{ and } x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

U ovom slučaju uzimamo $u_{\varepsilon}^{[i+1]}(x, t) = u_{\varepsilon}^{[i]}(x, t)$.

$$2. \ \varphi_{j(k+2)} \geq x \geq \varphi_{j(k-1)}$$

U ovom intervalu rješenje ima oblik:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^{[i+1]}(x, t) = & \sum_{p=1}^{j(k-1)-1} v_p^0 + \\
& u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) - u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) - u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{0,j(k+1)}^{[i+1]}\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x)\theta_\varepsilon(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x).
\end{aligned}$$

Razlika u odnosu na situaciju iz Potpoglavlja 3.3.2 je u tome što za početni uslov ovdje imamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k+2)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+2)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{0,j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \sum_{p=j(k)+1}^{j(k+1)-1} v_p^0
\end{aligned}$$

Nepoznate funkcije date su sa (56) sa razlikom u indeksiranju kao u prethodna dva potpoglavlja.

d) $\varphi_{j(k)}(t) = \varphi_m(t)$ za neko $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k)\}$ i $\varphi_{j(k+1)}(t) = \varphi_m(t)$ za neko $m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j(k+1)\}$ u intervalu $(t_i^*, t_i^* + \delta_{i-1})$.

U ovom slučaju imamo situaciju analognu onoj iz Potpoglavlja 3.3.4. Rješenje ima oblik:

1. $x \leq \varphi_{j(k+2)}$ and $x \geq \varphi_{j(k-1)}$

U ovom intervalu uzimamo $u_\varepsilon^{[i+1]}(x, t) = u_\varepsilon^{[i]}(x, t)$.

2. $\varphi_{j(k+2)} \geq x \geq \varphi_{j(k-1)}$

U ovom intervalu rješenje ima oblik:

$$\begin{aligned}
u_{\varepsilon}^{[i+1]}(x, t) = & \sum_{p=1}^{j(k-1)-1} v_p^0 + \\
& u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]} - x) - u_{j(k-1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{0,j(k)}^{[i+1]} \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k)}^{[i+1]} - x) + \\
& - u_{j(k)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + u_{0,j(k+1)}^{[i+1]} \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) + \\
& u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]} - x) - \\
& u_{j(k+1)}^{[i+1]}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x) \theta_{\varepsilon}(\varphi_{j(k+2)}^{[i+1]} - x).
\end{aligned}$$

Razlika u odnosu na situaciju iz Potpoglavlja 3.3.4 je u početnom uslovu koji je ovdje dat od trenutka t_i^* :

$$\begin{aligned}
\varphi_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
\varphi_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & \varphi_{j(k+2)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \varphi_{j(k+2)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k-1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k-1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k)}^{[i]}(t_i^*) \\
u_{j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= u_{j(k+1)}^{[i]}(t_i^*) & u_{0,j(k)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \sum_{p=j(k)+1}^{j(k+1)-1} v_p^0 \\
u_{0,j(k+1)}^{[i+1]}(t_i^*) &= \sum_{p=j(k+1)+1}^{j(k+2)-1} v_p^0
\end{aligned}$$

Nepoznate funkcije date su sa (62) sa razlikom u indeksiranju kao u prethodna dva potpoglavlja.

Pošto u intervalu $(t_i^*, t_i + \delta_i)$ važi $u_{\varepsilon}^{[i]} = u_{\varepsilon}^{[i+1]}$ (do na $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$), asimptotsko rješenje glatko po $t \in \mathbf{R}^+$ jednačine (25) sa početnim uslovom (63) ima oblik:

$$u_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \eta_i u_{\varepsilon}^{[i]} \quad (65)$$

gdje je $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ razbijanje jedinice nenegativnog dijela realne ose takvo da

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= 1, \text{ for } t \in [0, t_1^*), \\ \eta_1(t) &= 0, \text{ for } t \in [t_1^* + \delta_1, +\infty), \\ \eta_i(t) &= 1, \text{ for } t \in [t_{i-1}^* + \delta_{i-1}, t_i^*), \\ \eta_i(t) &= 0, \text{ for } t \notin [t_{i-1}^*, t_i^* + \delta_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \eta_n(t) &= 1, \text{ for } t \in [t_{n-1}^* + \delta_{n-1}, \infty), \\ \eta_n(t) &= 0, \text{ for } t \in [0, t_{n-1}^*).\end{aligned}$$

3.5 Proizvoljan opadajući početni uslov

U ovom poglavlju tražimo slabo asimptotsko rješenje Hopfove jednačine (25) sa početnim uslovom (3) gdje je $u_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, proizvoljna opadajuća po Lipschitzu neprekidna funkcija koja uzima vrijednosti na nekom kompaktnom podskupu realne ose.

Procedura za nalaženje rješenja će biti.

Prvo, aproksimiramo dati početni uslov nizom poligona, a zatim za svaki od tih poligona kao početnim uslovom nalazimo rješenje Hopfove jednačine (koristimo rezultate prethodnih poglavlja). U odabiru čvorova poligona moramo paziti na to da nijedna tri uzastopna čvora (preciznije slaba diskontinuiteta) ne smiju intergavati simultano (dokaz da je takav izbor moguć dat je u sljedećem poglavlju u slučaju opštije jednačine $u_t + (f(u))_x = 0$, $f'' > 0$). Na ovaj način dobijamo familiju slabo asimptotskih rješenja za koju dokazujemo da konvergira dopustivom slabom rješenju Hopfove jednačine sa prvobitnim početnim uslovom. Preciznije, dokazaćemo sljedeću teoremu:

Teorema 25. *Za problem (25), (3) postoji funkcija $\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}(x, t, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times (0, 1))$ data su (67) tako da važi*

$$\begin{aligned}\int L\hat{u}_\varepsilon \cdot \phi dx &= \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \\ \|\hat{u}_\varepsilon(x, 0) - u_0(x)\|_{L_1(X)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}), \quad x \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

za svaki kompakt $X \subset \subset \mathbf{R}$, neko $\mu \in (0, 1)$ i svako $t > 0$.

Dalje, slabo dopustivo rješenje $\hat{u}(x, t)^4$ problema (25), (3) zadovoljava

$$\|\hat{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < R)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}).$$

⁴Za dokaz da postoji slabo dopustivo rješenje razmatranog problema vidi [14].



Dokaz:

Označimo sa $\hat{u}(x, t)$ slabo dopustivo rješenje datog problema. Podijelimo interval $(-\frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}}, \frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}})$ tačkama a_i , $i \in \mathbf{N}$, na podintervale dužine $\Delta a_i = a_{i-1} - a_i = M\varepsilon^{1-\mu}$, $0 < \mu < 1$, $M \in (1, 2)$. Zatim aproksimiramo početni uslov (3) poligonom $u_{0,\varepsilon}(x)$ sa čvorovima $u_0(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, [\frac{2}{\varepsilon^{1-\mu-\mu_1}}] + 1$, $a_i < a_j$ for $i < j$. Za $x > \frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}}$ definišimo $u_{0,\varepsilon}(x) = u_{0,\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}})$ i za $x < -\frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}}$ definišimo $u_{0,\varepsilon}(x) = u_{0,\varepsilon}(-\frac{1}{\varepsilon^{\mu_1}})$. Odaberimo μ_1 i μ iz intervala $(0, 1)$ tako da $1 + \mu_1 - \mu < 1/3$. Odaberimo tačke a_i , $i \in \mathbf{N}$, tako da nijedne tri uzastopne tačke ne interaguju simultano. Drugim rječima, ne može biti $\varphi_{i-1}(t) = \varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t)$ za ma koje $t < t_i^*$, $i = 2, \dots, n-1$, gdje φ_i opisuje kretanje tačaka a_i dok t_i^* označava vrijeme interakcije tačaka a_i i a_{i+1} (ponavljamo da je dokaz da je ovo moguće uraditi dat u sljedećem poglavlju). Na osnovu prethodnog poglavlja, aproksimativno rješenje Hopfove jednačine sa početnim uslovom

$$u|_{t=0} = u_{0\varepsilon}(x), \quad (66)$$

će biti dato u obliku:

$$\hat{u}_\varepsilon(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_i(t) u_{i\varepsilon}(x, t), \quad (67)$$

gdje je $\{\eta_i : i \in \mathbf{N}\}$ razbijanje jedinice vremenske ose tako da $\text{supp}\eta_i \cap \text{supp}\eta_j = \emptyset$, $|i - j| > 1$.

Dokazaćemo da je $\hat{u}_\varepsilon(x, t)$ slabo asimptotsko rješenje problema (25), (3) sa tačnošću $\varepsilon^{1-\mu}$.

Dakle, treba provjeriti:

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} [(\hat{u}_\varepsilon)_t + (\hat{u}_\varepsilon^2)_x] \phi(x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ za svako $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,
- b) $\|\hat{u}_\varepsilon(\cdot, 0) - u_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$,

Da dokažemo a) zamijenimo (67) u jednačinu (25). Dobijamo $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon^{2(1+\mu_1-\mu)}})$ proizvoda oblika $\theta_\varepsilon(x - \varphi_i)\theta_\varepsilon(x - \varphi_j)$, $i \neq j$. Koristeći Lemu 18 vidimo da svaki od ovih proizvoda generiše ostatak reda $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Dakle, sumirajući sve ostatke dobijamo da je totalni ostatak $\Omega(\varepsilon^{1-2(1+\mu_1-\mu)}) = \Omega(\varepsilon^{1/3})$. Dakle, izraz dat u a) je reda $\varepsilon^{1/3}$ što smo i htjeli da dokažemo.

Primijetimo dalje da na ograničenom skupu $X \subset \mathbf{R}$ važi,

$$\int_X (u_{0\varepsilon}(\cdot) - u_0(\cdot)) dx = \sup_{x \in X} |u_{0\varepsilon}(x) - u_0(x)| \cdot \text{diam} X \cdot \varepsilon^{1-\mu} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}). \quad (68)$$

Ovim dokazujemo b) čime smo završili dokaz da je \hat{u}_ε slabo asimptotsko rješenje problema (25), (3).

Na kraju, dokazaćemo da je naše slabo asimptotsko rješenje u smislu $L^1(\mathbf{R})$ konvergencije "blizu" dopustivog slabog rješenja problema (25), (3). Iz tog razloga dokazaćemo da slabo asimptotsko rješenje konstruisano u prvom dijelu dokaza slabo konvergira ka slabom rješenju problema (25), (3). Za svako $\psi \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbf{R})$ važi:

$$\int_{\mathbf{R}} [\hat{u}_{\varepsilon t} + (\hat{u}^2)_{\varepsilon x}] \psi(x, t) dx = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad t \text{ je fiksirano.}$$

Ako primijenimo $\int_0^T dt$ na posljednju relaciju dobijamo

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} [\hat{u}_{\varepsilon t} + (\hat{u}^2)_{\varepsilon x}] \psi(x, t) dx dt = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Ako primijenimo istu proceduru na početni uslov zaključujemo da je $w - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = u(x, t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}^+$ slabo asimptotsko rješenje problema (25), (3). Ako dokažemo da je funkcija u dio po dio glatka, iz njene konstrukcije (početni uslov je opadajući) vidimo da zadovoljava uslove dopustivosti Oleinik. Poznato je da su (vidi [14]) uslovi dopustivosti Oleinik i entropijski uslovi dopustivosti, podsjećamo:

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} [\partial_t \psi \eta(u) + \partial_x \psi q(u)] dx dt + \int_{\mathbf{R}} \psi(x, 0) \eta(u_0(x)) dx \geq 0, \quad (69)$$

gdje $q(u) = \int \eta'(u)$ i $\eta \in C^1(\mathbf{R})$ je proizvoljna konveksna funkcija, ekvivalentni u slučaju dio po dio neprekidnih funkcija. Budući da $w - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{u}_\varepsilon(x, t) = u(x, t)$ nije teško zaključiti da važi

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} [\partial_t \psi \eta(\hat{u}_\varepsilon) + \partial_x \psi q(\hat{u}_\varepsilon)] dx dt + \int_{\mathbf{R}} \psi(x, 0) \eta(u_{\varepsilon 0}(x)) dx \geq \varepsilon^{1-\mu} \mathcal{O}(1), \quad (70)$$

gdje $q(u) = \int 2u\eta'(u) du$.

Ako doslovno ponovimo poatupak iz dokaza Teoreme 6.2.2 u [14] koristeći (70) umjesto Definicije 6.2.1 iste knjige, dobijamo,

$$\|\hat{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^1(|x| < R)} \leq \|\hat{u}_\varepsilon(\cdot, 0) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^1(|x| < R+st)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}),$$

pošto u ovom slučaju $\tilde{u}_\varepsilon(x, 0) = \hat{u}_\varepsilon(x, 0)$. Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < R)} &\leq \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < R)} + \\ &\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < R)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\mu}), \end{aligned}$$

što implicira tvrđenje naše teoreme.

Ostalo nam je da dokažemo da je funkcija u dio po dio neprekidna. Koristeći definiciju, podrazumijevamo da su dvije tačke interagovale ako su udaljene za veličinu $\mathcal{O}(\varepsilon)$. U svakom konačnom intervalu za fiksirano $\varepsilon \in (0, 1)$ i $t \in \mathbf{R}^+$ imamo konačan broj tačaka za čije interakcije smo zainteresovani. (to su tačke razbijanja x -ose). Zato je broj formiranih "udarnih" talasa konačan za svako fiksirano $t \in \mathbf{R}^+$ (ovdje smo stavili znake navoda jer u slučaju funkcija u_ε , $\varepsilon \in (0, 1)$, nemamo prave udarne talasa usljed glatkosti odgovarajućih funkcija; ovdje imamo samo strme djelove grafika funkcija u_ε iz kojih, kada pustimo da $\varepsilon \rightarrow 0$, postaju udarni talasi.) Kada pustimo da $\varepsilon \rightarrow 0$, djelovi koji se nalaze između udarnih talasa su i dalje bar neprekidni jer su nastali kretanjem početnog uslova po karakteristikama. Zato je jasno da u mora biti dio po dio neprekidna. \square

4 Dodatak: Postojanje dopustivog razbijanja u slučaju proizvoljnog zakona održanja

Dokazaćemo da je uvijek moguće odabrati tačke a_i , $i = 1, 2, \dots$, na x -osi tako da nijedne tri uzastopne tačke ne interaguju simultano. Drugim riječima, ako sa φ_i , $i = 1, 2, \dots$ označimo funkciju koja opisuje trajektoriju tačke a_i , ne smije biti $\varphi_{i-1}(t) = \varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t)$ za ma koje $t \leq t_i^*$, $i = 2, \dots$, gdje t_i^* označava vrijeme interakcije tačaka a_i i a_{i+1} . Uvodimo sljedeće definicije:

Definicija 26. [14] Uopštena karakteristika jednačine (25) pridružena slabom rješenju $u(x, t)$ na vremenskom intervalu $[\sigma, \tau] \subset [0, \infty)$ je Lipschitzova funkcija $\xi : [\sigma, \tau] \rightarrow (-\infty, +\infty)$ koja zadovoljava diferencijalnu inkluziju:

$$\dot{\xi} \in \Lambda(\xi(t), t), \text{ skoro svuda na } [\sigma, \tau],$$

gdje je

$$\Lambda(\hat{x}, \hat{t}) = \cap_{\varepsilon > 0} [\text{essinf}_{\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon} f'(u(x, \hat{t})), \text{esssup}_{\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon} f'(u(x, \hat{t}))].$$

Definicija 27. Za particiju a_i , $i \in S$, $S \subset \mathbf{Z}$ realne x -ose kažemo da je legitimna za funkciju $v \in C^0(\mathbf{R})$ ako nijedne tri tačke a_m, a_p, a_n iz particije ne interaguju simultano krećući se po trajektorijama definisanim uopštenim karakteristikama Cauchyjevog problema (

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}^+, \\ u|_{t=0} = v(x).$$

Za dokaz će nam biti potrebna i sljedeća teorema [1]:

Teorema 28. [1] Neka su v_1 i v_2 funkcije neprekidne na nekom intervalu U realne ose i pri tom $v_1 < v_2$. Neka su φ_1 i φ_2 rješenja diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = v_1(x), \quad \dot{x} = v_2(x),$$

respektivno, sa jednakim početnim uslovima $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$. Tada za svako $t \geq t_0$ na intervalu U važi:

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

Dokazaćemo sljedeću teoremu:

Teorema 29. Dat je skalarni zakon održanja sa konveksnom nelinearnošću:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

Za proizvoljnu opadajuću funkciju $u_0 \in C^0(\mathbf{R})$ takvu da ne postoji interval za koji važi

$$f'(u_0(x)) \neq -Kx + b,$$

za neke konstante K i b , odaberimo rastuću particiju x_1, x_2, \dots, x_n , realne ose i povežimo odabrane tačke jednostavnim funkcijama u_1^i takvim da za neke konstante K_i, b_i , $i = 1, \dots, n-1$ i neki mali parametar ε^μ , važi:

$$f'(u_1^i(x)) = -K_i x + b_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \\ u_1^i(x) = u_0(x_i) + \varepsilon^\mu, \quad u_1^i = u_0(x_{i+1}) - \varepsilon^\mu.$$

Dalje, označimo sa u_n realnu funkciju jednaku funkciji u_0 van intervala $[x_1, x_n]$, a u ovom intervalu takvu da

$$u_n^0(x) = u_1^i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Tada za svako $n \in \mathbf{N}$ na svakom intervalu $[\alpha, \beta]$ postoji legitimna za funkciju u_0^n particija x_1, \dots, x_n posmatranog intervala $[\alpha, \beta]$.

Dokaz

Dokaz da je moguće izabrati particiju koja zadovoljava naše uslove izvešćemo koristeći argument indukcije.

Da bismo napravili odgovarajuću particiju koja ima tri čvora, na primjer, $a_1 > a_2 > a_3$, dovoljno je postaviti čvorove tako da za funkciju u_0 za koju važi

$$f'(u_0(x)) = -Kx + b, \quad x \in [a_2, a_1],$$

ne važi $f'(u_0(a_3)) = -Ka_3 + b$. Ako nije moguće odabrati takvo a_3 tada početni uslov zadovoljava

$$f'(u_0(x)) = -Kx + b, \quad x \in (-\infty, a_1],$$

i funkciju ne moramo da aproksimiramo u intervalu $(-\infty, a_1]$ jer je u tom slučaju u_0 jednostavna funkcija koju posebno analiziramo (Poglavlje 6).

Pretpostavimo sada da smo izabrali legitimnu particiju x -ose koja sadrži n tačaka a_i , $i = 1, \dots, n$, $a_i > a_j$ za $i < j$, za funkciju $u_0^{[n]}$ gdje $|u_0^{[n]}(x) - u_0(x)| < M\varepsilon^\mu$ za $a_n \leq x \leq a_1$ i $u_0^{[n]}$ je neprekidna i zadovoljava

$$\begin{aligned} f'(u_0^{[n]}(x)) &= -K_i x + b_i, \quad x \in [a_i, a_{i+1}] \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_0^{[n]}(x) &= u_0^{[n]}(a_n), \quad x < a_n, \\ u_0^{[n]}(x) &= u_0^{[n]}(a_1), \quad x > a_1, \end{aligned}$$

tako da nijedne tri različite tačke $a_i, a_j, a_k \in \{a_s | s = 1, 2, \dots, n\}$ ne interaguju simultano u nekom trenutku. Pokazaćemo da je uvijek moguće odabrati tačku $a_{n+1} < a_n$ tako da je particija a_i , $i = 1, \dots, n+1$, legitimna za neprekidnu funkciju $u_0^{[n+1]}$ koja zadovoljava:

$$\begin{aligned} u_0^{[n+1]}(x) &\equiv u_0^{[n]}(x), \quad a_n \leq x \\ f'(u_0^{[n+1]}(x)) &= -K_i x + b_i, \quad x \in [a_{i+1}, a_i] \quad i = 1, \dots, n, \\ u_0^{[n+1]}(x) &= u_0^{[n]}(a_{n+1}), \quad x < a_{n+1}, \\ u_0^{[n+1]}(x) &= u_0^{[n+1]}(a_1), \quad x > a_1. \end{aligned}$$

Uvedimo još jedan pojam koji će nam pomoći u dokazu.

Definicija 30. Sa φ_i , $i = 1, \dots, n+1$, označimo funkciju koja opisuje kretanje tačke a_i , $i = 1, \dots, n+1$. Kažemo da je trojka tačaka $(a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3})$ koja

zadovoljava

$$\begin{aligned} \varphi_{k_1}(t^*) &= \varphi_{k_2}(t^*) = \varphi_{k_3}(t^*) \text{ i} \\ \varphi_{k_1}(t) &< \varphi_{k_2}(t) < \varphi_{k_3}(t) \text{ for } t < t^*, \end{aligned} \quad (71)$$

maksimalna ako ne postoje indeksi $s_1 > s_2 > s_3$ takvi da $k_1 < s_1$ ili $k_2 < s_2$ ili $k_3 < s_3$ za koje je zadovoljeno (71).

Pretpostavimo sada da particija a_i , $i = 1, \dots, n+1$, nije legitimna t.j. da postoji maksimalna trojka tačaka $(a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3})$ koje simultano interaguju. Iz Poglavlja 6 vidimo da oblik funkcije $u_0^{[n+1]}$ na intervalu $[a_{n+1}, a_n]$ ne utiče na kretanje tačaka a_i , $i = 1, \dots, n-1$, prije nego što interaguje sa a_n . Zato mora biti $k_1 \geq n$. Inače, imali bismo kontradikciju sa pretpostavkom koja se odnosi na legitimnost izbora particije a_i , $i = 1, \dots, n$, za funkciju $u_0^{[n+1]}$ (koja se na $[a_1, a_n]$ poklapa sa $u_0^{[n]}$).

Dakle, vidimo da samo tačke a_n i a_{n+1} mogu učestvovati u simultanim interakcijama. Zato ćemo razmatrati sljedeće mogućnosti:

(I) Pretpostavimo da se simultana interakcija dogodila između tačaka a_n , a_{k_2} i a_{k_1} (koje čine maksimalnu trojku tačaka) u trenutku $t = t^*$. Pokazaćemo da ako pomjerimo vrijednost $u_0^{[n+1]}(a_{n+1})$ za proizvoljno mali parametar ε^μ tada ćemo promijeniti vrijeme interakcije tačaka a_n i a_{k_1} i tako izbjеći simultane interakcije između a_n , a_{k_2} i a_{k_1} .

Uočimo funkciju $\hat{u}_0^{[n+1]}$ datu sa:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^{[n+1]}(x) &= u_0^{[n+1]}(x), \quad x \leq a_n, \\ \hat{u}_0^{[n+1]}(a_{n+1}) &= u_0^{[n+1]}(a_{n+1}) + \varepsilon^\mu, \\ f'(\hat{u}_0^{[n+1]}(x)) &= -\hat{K}_{n+1}x + \hat{b}_{n+1}, \quad x \in [a_{n+1}, a_n]. \end{aligned}$$

Za jednačinu (1) pratićemo istovremeno transformaciju početnih uslova $u_0^{[n+1]}$ i $\hat{u}_0^{[n+1]}$.

Pošto se prije interakcije tačaka a_n i a_{n-1} , tačka a_n kreće po karakteristikama i pošto $\hat{u}_0^{[n+1]}(x) = u_0^{[n+1]}(x)$ za $x \leq a_n$ vidimo da će a_n interagovati sa a_{n-1} u istom trenutku za obje funkcije $\hat{u}_0^{[n+1]}$ i $u_0^{[n+1]}$ kao početni uslov. Označimo vrijeme ove interakcije sa T_1^* , a sa a_s tačku iz particije sa minimalnim indeksom koja interaguje sa a_n u trenutku T_1^* .

U trenutku T_1^* formiran je udarni talas. Njegova snaga se povećava sa vremenom pošto mu se tačke iz intervala $[a_{n+1}, a_n]$ i $[a_{s+1}, a_s]$ konstantno dodaju.

Označimo sa φ_n i $\hat{\varphi}_n$ funkcije koje opisuju kretanje tačke a_n kada je početni uslov $u_0^{[n+1]}$ odnosno $\hat{u}_0^{[n+1]}$, respektivno. Dokazaćemo da za svako $t > T_1^*$ važi $\hat{\varphi}_n(t) > \varphi_n(t)$.

Iz Potpoglavlja 5.4 vidimo da

$$(\varphi_n)_t = \frac{f(u_n(\varphi_n)) - f(u_s(\varphi_n))}{u_n(\varphi_n) - u_s(\varphi_n)} = v_1(\varphi_n), \quad (72)$$

$$(\hat{\varphi}_n)_t = \frac{f(\hat{u}_n(\hat{\varphi}_n)) - f(u_s(\hat{\varphi}_n))}{\hat{u}_n(\hat{\varphi}_n) - u_s(\hat{\varphi}_n)} = v_2(\hat{\varphi}_n). \quad (73)$$

Primijetimo dalje da zbog konkavnosti funkcije f i na osnovu osobina funkcija u i \hat{u} imamo $v_1(x) > v_2(x)$. Pošto za $t = T_1^*$ važi $\varphi_n(T_1^*) = \hat{\varphi}_n(T_1^*)$ na osnovu Teoreme 28 važiće $\varphi_n(t) < \hat{\varphi}_n(t)$ za $t \in (T_1^*, T_1^* + \sigma)$.

Označimo sa T_2^* i \hat{T}_2^* trenutak drugih interakcija tačke a_n koja se kreće po uopštenim karakteristikama Cauchyevog problema (1), $u|_{t=0} = u_0^{[n+1]}$ i (1), $\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0^{[n+1]}$, respektivno. Ne gubeći opštost (vidi Primjedbu 32), možemo pretpostaviti da će u oba slučaja a_n interagovati sa a_{s_1} gdje je a_{s_1} tačka iz particije sa minimalnim indeksom koja interaguje sa a_n u trenutku T_2^* t.j. \hat{T}_2^* . Dokazaćemo da $T_2^* > \hat{T}_2^*$.

Primjedba 31. Opet ne gubeći opštost, možemo pretpostaviti da u periodu $[\hat{T}_2^*, T_2^*]$ tačka a_{s_1} neće interagovati ni sa jednom tačkom particije (vidi Primjedbu 32).

Da uradimo ovo, dovoljno je dokazati da $\varphi_n(t) < \hat{\varphi}_n(t)$ for $t \in (T_1^*, \hat{T}_2^*)$. Pošto u intervalu $(T_1^*, T_1^* + \sigma)$ važi $\varphi_n(t) < \hat{\varphi}_n(t)$ tada, ako bi bilo $\varphi_n(\hat{t}) = \hat{\varphi}_n(\hat{t})$ za neko $\hat{t} \in (T_1^*, \hat{T}_2^*)$ tada bismo takođe imali $(\varphi_n)_t(\hat{t}) \geq (\hat{\varphi}_n)_t(\hat{t})$. Ovo zajedno sa (72) implicira

$$\frac{f(u_n(\varphi_n)) - f(u_s(\varphi_n))}{u_n(\varphi_n) - u_s(\varphi_n)} \Big|_{t=\hat{t}} \geq \frac{f(\hat{u}_n(\hat{\varphi}_n)) - f(u_s(\hat{\varphi}_n))}{\hat{u}_n(\hat{\varphi}_n) - u_s(\hat{\varphi}_n)} \Big|_{t=\hat{t}}. \quad (74)$$

S druge strane, znamo da važi $\hat{u}_n(\hat{\varphi}_n) > u_n(\hat{\varphi}_n)$ prije interakcije tačke a_{n+1} . Koristeći konveksnost funkcija f vidimo da (74) ne može biti tačno.

Da nastavimo, primijetimo da ako tačka sa manjim indeksom interaguje sa tačkom sa većim indeksom tada se brzina tačke sa manjim indeksom povećava dok se brzina tačke sa većim indeksom smanjuje (posljedica konveksnosti funkcije f).

Zato će tačka a_{s_1} preći dužu distancu u periodu $[\hat{T}_2^*, T_2^*]$ kada je trajektorija određena Cauchyevim problemom (1), $u|_{t=0} = \hat{u}_0^{[n+1]}$ nego u slučaju

kada je određena Cauchyevim problemom (1), $u|_{t=0} = u_0^{[n+1]}$. Označimo sa φ_{s_1} t.j. $\hat{\varphi}_{s_1}$ funkcije koje opisuju kretanje tačke a_{s_1} u slučajevima kada je njena trajektorija određena, respektivno, Cauchyevim problemima (1), $u|_{t=0} = u_0^{[n+1]}$ t.j. (1), $u|_{t=0} = u_0^{[n+1]}$. Po prethodnom znamo da $\varphi_{s_1} < \hat{\varphi}_{s_1}$ i da $\varphi_n(t) \leq \varphi_{s_1}(t)$ kao i da $\hat{\varphi}_n(t) = \hat{\varphi}_{s_1}(t)$ za $t \in [\hat{T}_2^*, T_2^*]$. Dakle, $\hat{\varphi}_n(T_2^*) > \varphi_n(T_2^*)$ što smo i htjeli da dokažemo. Na potpuno isti način dokazujemo da $\hat{\varphi}_n(t^*) > \varphi_n(t^*)$ t.j., u slučaju Cauchyevog problema (1), $u|_{t=0} = \hat{u}_0^{[n+1]}$ tačka a_n neće interagovati u isto vrijeme sa a_{k_1} i a_{k_2} .

Primjedba 32. Sada je jasno zašto možemo pretpostaviti da će se druga interakcija tačke a_n dogoditi sa tačkom a_{s_1} u oba pomenuta slučaja. Naime, ako pretpostavimo da ćemo u slučaju Cauchyevog problema (1), $u|_{t=0} = \hat{u}_0^{[n+1]}$, imati drugu interakciju tačke a_n sa tačkom $a_{\hat{s}_1}$, $\hat{s}_1 < s_1$ iz očiglednih razloga ćemo za $t > \hat{T}_2^*$ imati:

$$\hat{\varphi}_n(t) = \hat{\varphi}_{\hat{s}_1}(t) > \varphi_{\hat{s}_1}(t) > \varphi_n(t),$$

gdje $\hat{\varphi}_i$ t.j. φ_i opisuje kretanje tačke a_n u slučaju Cauchyevih problema (1), $u|_{t=0} = \hat{u}_0^{[n+1]}$ t.j. (1), $u|_{t=0} = u_0^{[n+1]}$. Produžavajući na isti način, dobijamo $\varphi_n(t^*) < \hat{\varphi}_n(t^*)$ što znači da smo izbjegli simultane interakcije između a_n , a_{k_1} i a_{k_2} .

(II) Pretpostavimo sada da u trenutku $t = t^*$ imamo simultane interakcije između tačaka a_{n+1} , a_{k_2} i a_{k_1} (koje čine maksimalnu trojku tačaka). Pokazaćemo da ako smanjimo vrijednost od $u_0^{[n+1]}(a_{n+1})$ za neki mali parametar ε^μ , promijenimo vrijeme interakcije tačaka a_{n+1} i a_{k_1} i tako izbjegli simultane interakcije između a_{n+1} , a_{k_2} i a_{k_1} .

U ovom slučaju dokaz je prost. Ako je a_{n+1} interagovala kao slabi diskontinuitet sa a_{k_1} i a_{k_2} tada ako smanjimo vrijednost $u_0^{[n+1]}(a_{n+1})$ za ε^μ , tako da je novi početni uslov za (1) je:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^{[n+1]}(x) &= u_0^{[n+1]}(x), \quad x \leq a_n, \\ \hat{u}_0^{[n+1]}(a_{n+1}) &= u_0^{[n+1]}(a_{n+1}) - \varepsilon^{\mu}, \\ f'(\hat{u}_0^{[n+1]}(x)) &= -\hat{K}_{n+1}x + \hat{b}_{n+1}, \quad x \in [a_n + 1, a_n], \end{aligned}$$

tada će a_{n+1} preći kraći put u slučaju novih početnih uslova tada u slučaju funkcije $u_0^{[n+1]}$ kao početnim uslovom.

Ako je a_{n+1} interagovala sa udarnim talasom pomjerićemo tačku a_{n+1} za ε^μ . Nova particija x -ose će biti $a_{-k}, \dots, a_n, \hat{a}_{n+1}$, a novi početni uslovi za (1)

će biti:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_0^{[n+1]}(x) &= u_0^{[n+1]}(x), \quad x \leq a_n, \\
\hat{u}_0^{[n+1]}(\hat{a}_{n+1}) &= u_0^{[n+1]}(a_{n+1} - \varepsilon^\mu), \quad \hat{a}_{n+1} = a_{n+1} - \varepsilon^\mu, \\
f'(\hat{u}_0^{[n+1]}(x)) &= -\hat{K}_{n+1}x + \hat{b}_{n+1}, \quad x \in [\hat{a}_{n+1}, a_n], \\
\hat{u}_{\varepsilon 0}^{[n+1]}(x) &= \hat{u}_{\varepsilon 0}^{[n+1]}(\hat{a}_{n+1}), \quad x \leq \hat{a}_{n+1}, \\
\hat{u}_0^{[n+1]}(x) &= \hat{u}_0^{[n+1]}(a_{-k}), \quad x \geq \hat{a}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je novi udarni talas koji je koncentrisan u \hat{a}_{n+1} u slučaju nove particije pojavljuje u isto vrijeme kao udarni talas u slučaju particije od koje smo počeli. Sa druge strane, novi udarni talas ima manju snagu i zato manju brzinu. Iz tog razloga ovaj talas prelazi manju distancu od prvobitnog udarnog talasa što znači da je simultana interakcija između a_{n+1} , a_{k_1} i a_{k_2} izbjegnuta.

Na kraju, primijetimo da ako imamo legitimnu particiju koja sadrži n tačaka i dodamo joj jednu tačku sa lijeve ili desne strane tada možemo dobiti najviše $\mathcal{O}(n^2)$ simultanih interakcija između tri ili više tačaka. Naš koncept aproksimacije početnog uslova obezbjeđuje $n \leq M\varepsilon^{-\mu}$. Pošto možemo izabrati μ_1 proizvoljno blizu jedinici, važi $\varepsilon^\mu > \varepsilon^{-2\mu} \cdot \varepsilon^{\mu_1}$. Dakle, možemo modifikovati početni uslov dovoljno puta da ne pokvatimo njegovu monotonost, i da, istovremeno, izbjegnemo simultane interakcije (dovoljno je uzeti $\mu_1 > 3\mu$).

□

5 Asimptotsko glatko po $t \in \mathbf{R}^+$ rješenje skalarnog zakona održanja sa početnim uslovom aproksimiranim Heavisideovom funkcijom

U ovom poglavlju konstruisaćemo glatku aproksimaciju dopustivog slabog rješenja skalarnog zakona održanja sa konveksnom nelinearšću. Početni uslov aproksimiraćemo regularizovanom dio po dio konstantnom funkcijom. Podsjećamo da je u slučaju "random choice" i "wave front tracking" metoda početni uslov aproksimiran dio po dio konstantnom funkcijom, ali je vremenski interval podijeljen i u svakom od tih podintervala traženo je slabo rješenje problema. Funkcija dobijena povezivanjem rješenja na tim intervalima je aproksimacija slabog rješenja jednačine. Jasno je da ovakva aproksimacija nije ni neprekidna, te je, da bi se dobilo pravilno slabo rješenje, bilo neophodno koristiti uslove dopustivosti. U našem slučaju, pokazujemo kako se nakon aproksimacije početnog uslova, proces opisan datim zakonom održanja može glatko pratiti što nas oslobađa obaveze da koristimo uslove dopustivosti da bismo kao limit naše aproksimacije dobili dopustivo slabo rješenje.

Kako ćemo problem nalaženja glatke po $t \in \mathbf{R}$ aproksimacije rješenja skalarnog zakona održanja dati koristeći strožiju u smislu regularnosti aproksimaciju početnog uslova ovdje ćemo samo pokazati kako se glatko po t opisuje interakcija dva udarna talasa (Potpoglavlje 5.1), kako se dobija glatko po t asimptotsko rješenje date jednačine kada početni uslov ima n udarnih talasa (Potpoglavlje 5.2) i na kraju, dokazaćemo da je moguće aproksimirati početni uslov stepenastom funkcijom (ovu aproksimaciju nazivamo dopustivom) tako da nijedna tri udarna talasa ne interaguju istovremeno (Potpoglavlje 5.3). Kako smo u prethodnom tekstu vidjeli, ovo je najteži korak u nalaženju slabo asimptotskog rješenja odgovarajućeg Cauchyevog problema budući da već imamo opisane interakcije udarnih talasa.

5.1 Interakcija i prostiranje dva udarna talasa za skalarni zakon održanja za skalarni zakon održanja sa proizvoljnom konveksnom nelinearnošću

U ovom potpoglavlju konstruisaćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (1) sa početnim uslovom:

$$u_0(x) = u_0^0 + u_1^0 \theta(a_1 - x) + u_2^0 \theta(a_2 - x). \quad (75)$$

Ne gubeći opštost (a dobijajući jednostavnost) pretpostavićemo da je $u_0^0 = 0$. Slabo asimptotsko rješenje problema (1), (75) tražićemo u obliku:

$$u_\varepsilon(x, t) = u_1^0 \theta_{1\varepsilon}(\varphi_1(t) - x) + u_2^0 \theta_{2\varepsilon}(\varphi_2(t) - x). \quad (76)$$

Zbog jednostavnosti, pišaćemo $\theta_{i\varepsilon}$ umjesto $\theta_\varepsilon(\varphi_i(t) - x)$. Ovdje pretpostavljamo da $\varphi_1(0) = a_1$ i $\varphi_2(0) = a_2$.

Zamjenjujući (75) u (1) i koristeći (19) dobijamo (pod φ_i imamo u vidu $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbf{R}^+$),

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon t} + (f(u_\varepsilon))_x = \\ - [-u_1^0 \varphi_{1t} + f(u_1^0 + u_2^0)B_1 + f(u_1^0)B_2 - f(u_2^0)B_1 - f(0)B_2] \delta(\varphi_1 - x) - \\ [-u_2^0 \varphi_{2t} + f(u_1^0 + u_2^0)B_2 - f(u_1^0)B_2 + f(u_2^0)B_1 - f(0)B_1] \delta(\varphi_2 - x) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

gdje $B_i = B_i(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon})$. Sa ρ označimo količnik $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}$. Izostavljajući sabirak reda $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ iz prethodnog izraza i koristeći linearnu nezavisnost δ distribucija koje se tamo pojavljuju dobijamo sljedeći sistem jednačina:

$$u_1^0 \varphi_{1t} = f(u_1^0 + u_2^0)B_1 + f(u_1^0)B_2 - f(u_2^0)B_1 - f(0)B_2 \quad (77)$$

$$u_2^0 \varphi_{2t} = f(u_1^0 + u_2^0)B_2 - f(u_1^0)B_2 + f(u_2^0)B_1 - f(0)B_1. \quad (78)$$

Neka je $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$. U tom slučaju važi $B_1(\rho) = 1 - B_2(\rho) = 0$ do na to $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$. Tako, zamjenjujući $B_1 = 0$ i $B_2 = 1$ u (77) i (78) dobijamo jednačine koje opisuju rješenje prije formiranja udarnog talasa:

$$\begin{aligned} \varphi_{10t} &= \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_1^0} \\ \varphi_{20t} &= \frac{f(u_2^0 + u_1^0) - f(u_1^0)}{u_2^0}. \end{aligned}$$

Rješenja ovog sistema su:

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(t) &= \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_1^0} t + a_1 \\ \varphi_{20}(t) &= \frac{f(u_2^0 + u_1^0) - f(u_1^0)}{u_2^0} t + a_2.\end{aligned}\quad (79)$$

Oдавде vidimo da dva udarna talasa data u početnom uslovu interaguju u trenutku $t = t^*$ takvom da $\varphi_{10}(t^*) = \varphi_{20}(t^*)$. Direktno se izračunava da

$$t^* = \frac{a_1 - a_2}{\frac{f(u_1^0 + u_2^0) - f(u_1^0)}{u_2^0} - \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_1^0}}.$$

Da bismo analizirali interakciju datih udarnih talasa uvodimo "brzu promjenljivu" $\tau = \frac{\varphi_{20} - \varphi_{10}}{\varepsilon} = \frac{\psi_0}{\varepsilon}$ i razmatramo ρ kao funkciju koja zavisi od τ .

Oduzimajući (77) od (78) dobijamo:

$$(\varphi_2 - \varphi_1)_t = K - MB_1, \quad (80)$$

gdje

$$\begin{aligned}K &= \frac{f(u_2^0 + u_1^0) - f(u_1^0)}{u_2^0} - \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_1^0} \\ M &= \frac{f(u_2^0 + u_1^0) - f(u_2^0)}{u_1^0} - \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_1^0} + \\ &\quad \frac{f(u_2^0 + u_1^0) - f(u_1^0)}{u_2^0} - \frac{f(u_1^0) - f(0)}{u_2^0}.\end{aligned}$$

Pošto je f' rastuća funkcija očigledno $M > 0$. Dalje, pošto $(\varphi_2 - \varphi_1)_t = \varepsilon \rho_\tau \tau_t$ (od sad pa na dalje podrazumijevamo $\rho_\tau = \dot{\rho}$) jednačina (80) postaje,

$$\dot{\rho} = 1 - \frac{M}{K} B_1(\rho). \quad (81)$$

Pošto je $\rho|_{\tau \rightarrow -\infty} = 1$ početni uslov za ovu jednačinu, iz standardne teorije običnih diferencijalnih jednačina znamo da $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \rho = \rho_0$ gdje je ρ_0 najmanje stacionarno rješenje jednačine (81). Pošto je B_1 rastuća funkcija zaključujemo da (81) ima jedinstveno stacionarno rješenje ρ_0 takvo da $B_1(\rho_0) = \frac{K}{M}$. Zamjenjujući ovo u (77) i (78) vidimo da poslije interakcije važi

$$\varphi_{1t}^+ = \frac{f(u_1^0 + u_2^0) - f(0)}{u_1^0 + u_2^0} = \varphi_{2t}^+. \quad (82)$$

Da bismo konstruisali formule koje su glatke po $t \in \mathbf{R}$ funkcije φ_i , $i = 1, 2$, tražimo u obliku:

$$\varphi_i(t, \varepsilon) = \varphi_{i0}(t) + \psi_0(t)\phi_i(\tau), \quad i = 1, 2.$$

Zamjenjujući ovo u (77) i (78) dobijamo da ϕ_i , $i = 1, 2$, zadovoljavaju obične diferencijalne jednačine:

$$\frac{d\varphi_{i0}(t)}{dt} + \frac{d\psi_0(t)}{dt} \frac{d}{d\tau} [\tau \phi_i(\tau)] = F_i(\rho(\tau)),$$

sa početnim uslovom $\phi_i(-\infty) = 0$. Ovdje, $\dot{\phi}_i = (\phi_i)'_{\tau}$, $i = 1, 2$, i funkcija ρ zadovoljava jednačinu (81) sa početnim uslovom $\rho|_{\tau \rightarrow -\infty} = 1$. Takođe znamo

$$F_1(\rho) = \frac{f(u_1^0 + u_2^0)B_1(\rho) + f(u_1^0)B_2(\rho) - f(u_2^0)B_1(\rho) - f(0)B_2(\rho)}{u_1^0}$$

i

$$F_2(\rho) = \frac{f(u_1^0 + u_2^0)B_2(\rho) - f(u_1^0)B_2(\rho) + f(u_2^0)B_1(\rho) - f(0)B_1(\rho)}{u_2^0}.$$

Sada je lako napisati izraze za ϕ_i , $i = 1, 2$. Važi,

$$\phi_i(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{F_i(\rho(\tau')) - \frac{d\varphi_{i0}(t)}{dt}}{\frac{d\psi_{0t}(t)}{dt}} d\tau', \quad i = 1, 2.$$

Primjedba 33. Primijetimo da poslije interakcije imamo $\varphi_1 = \varphi_2$ i, iz tog razloga, da bismo dobili pravu informaciju o ponašanju rješenja za $t > t^*$ treba sabrati (77) i (78) uzeti u obzir da $\varphi_1 = \varphi_2 := \varphi$. Funkcija φ dobijena na taj način je u stvari jednaka funkcijama φ_i^+ , $i = 1, 2$, iz (82). Razlog za ovako jednostavnu situaciju leži u prosto formi početnog uslove što opet uzrokuje prostu formu ansatza (76) koji nam obezbjeđuje da su brzine φ_{1t} i φ_{2t} konstantne poslije interakcije. Ipak, ovo nije prepreka koja nam onemogućuje da primijenimo metod na slučaj složenijih početnih uslova.

U ovom poglavlju imali smo samo jednu interakciju udarnih talasa tokom cijelog vremenskog intervala. Ipak, poslije svake interakcije brzina novoformiranog udarnog talasa će biti konstantna u dovoljno dugom vremenskom intervalu. Ovo nam omogućava da napišemo glatko po t asimptotsko rješenje pomoću razbijanja jedinice vremenskog intervala.

5.2 Interakcije i prostiranje n udarnih talasa za skalarni zakon održanja sa proizvoljnom konveksnom nelinearnošću

U ovom poglavlju daćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (1) sa početnim uslovom u sljedećem obliku:

$$u_0(x) = u_1^0 \theta(a_1 - x) + u_2^0 \theta(a_2 - x) + \dots + u_n^0 \theta(a_n - x), \quad (83)$$

gdje $u_0^i > 0$, $i = 1, \dots, n$, i $a_i > a_j$ za $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Slabo asimptotsko rješenje imamo u obliku:

$$u_\varepsilon(x, t) = u_1^0 \theta_{1\varepsilon}(\varphi_1(t, \varepsilon) - x) + u_2^0 \theta_{2\varepsilon}(\varphi_2(t, \varepsilon) - x) + \dots + u_n^0 \theta_{n\varepsilon}(\varphi_n(t, \varepsilon) - x). \quad (84)$$

U ovom slučaju pretpostavljamo da će u trenutku $t = t_{m(i)}^*$, funkcija m je permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, tač ka a_{i+1} stići tačku a_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ (odnosno udarni talas koncentrisan u a_{i+1} će interagovati sa udarnim talasom koncentrisanim u a_i). Neophodan uslov ovdje je da nijedna tri udarna talasa neće interagovati u istom trenutku. Zato ćemo tako i pretpostavljati. Da bismo pojednostavili naše izlaganje, ne gubeći opštost, dodatno ćemo pretpostaviti da nijedan par tačaka ne interaguje istovremeno. Takođe pretpostavljamo da će u trenutku t_m^* interagovati tačke $a_{l(m)}$ i $a_{l(m)-1}$.

Uvodimo pomoćne pojmove i oznake.

Sa $\varphi_i^{[m]}$ i $u_\varepsilon^{[m]}$, $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, n-1$, označavamo izraze za φ_i i u_ε , respektivno, u intervalima $[0, t_1^* + \sigma_1)$ i $[t_m^*, t_{i+1}^* + \sigma_{m+1})$, $m = 1, \dots, n-2$, gdje $t_{n-1}^* + \sigma_{n-1} = +\infty$

Dalje, definišimo

$$\begin{aligned} t_0^* &= 0, & u_0^0 &= 0, \\ \rho_i^m &= \frac{\varphi_{i+1}^{[m]} - \varphi_i^{[m]}}{\varepsilon}, & \tau^{i,i+1} &= \frac{\varphi_{i+1,0} - \varphi_{i,0}}{\varepsilon}, \\ \psi_0^{i,i+1} &= \varphi_{i+1,0} - \varphi_{i,0}, & i &= 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

where

$$\varphi_{i,0} = \frac{f(\sum_{s=0}^i u_s^0) - f(\sum_{s=0}^{i-1} u_s^0)}{u_i^0} t + a_i.$$

Konstante $K_i^{m(i)}$ i $M_i^{m(i)}$, $i = 1, \dots, n$, date su sa (pišemo $m = m(i)$, $\varphi_0^{[m]} = 0$):

$$K_i^m = \frac{f(\sum_{s=0}^{p(m)} u_s^0) - f(\sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0)}{\sum_{s=0}^{l(m)} u_s^0 - \sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0} - \frac{f(\sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0) - f(\sum_{s=0}^{k(m)-1} u_s^0)}{\sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0 - \sum_{s=0}^{k(m)-1} u_s^0},$$

$$M_i^m = K_i^m + \frac{f(\sum_{s=0}^{p(m)} u_s^0) - f(\sum_{s=j(m)+1}^{p(m)} u_s^0)}{\sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0 - \sum_{s=0}^{k(m)-1} u_s^0} - \frac{f(\sum_{s=j(m)+1}^{p(m)} u_s^0) - f(\sum_{s=0}^{k(m)-1} u_s^0)}{\sum_{s=0}^{p(m)} u_s^0 - \sum_{s=0}^{j(m)} u_s^0}.$$

Ovdje,

$$p(m) = \max\{j : \varphi_i^{[m]} = \varphi_j^{[m]}\}$$

$$j(m) = \max\{j : \varphi_{i-1}^{[m]} = \varphi_i^{[m]}\}$$

$$k(m) = \min\{j : \varphi_{i-1}^{[m]} = \varphi_j^{[m]}\}.$$

Sa $B_k^{i,i+1} = B_k^{i,i+1}(z)$, $z \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, označavamo glatku funkciju takvu da za svako $i = 1, \dots, n-1$ važi

$$B_1^{i,i+1}(-\infty) = 0, \quad B_1^{i,i+1}(+\infty) = 0, \quad B_1^{i,i+1}(z) + B_2^{i,i+1}(z) = 1.$$

Sada ćemo analizirati transformaciju datog početnog uslova duž vremenske ose.

1. Interval $[0, t_1^* + \sigma_1)$.

Podsjećamo da smo pretpostavili da u trenutku t_1^* interaguju tačke $a_{l(1)}$ i $a_{l(1)-1}$. Pretpostavimo da važi $u_0^0 = 0$ i $\varphi_0^{[m]} = 0$ za $m = 1, 2, \dots, n$.

U ovom intervalu slabo asimptotsko rješenje ima oblik:

$$u_\varepsilon^{[1]}(x, t) = u_1^0 \theta_{1\varepsilon}(\varphi_1^{[1]}(t) - x) + u_2^0 \theta_{2\varepsilon}(\varphi_2^{[1]}(t) - x) + \dots + u_n^0 \theta_{n\varepsilon}(\varphi_n^{[1]}(t) - x).$$

Funkcije $\varphi_i = \varphi_i^{[1]}$, $i = 1, \dots, n$, zadovoljavaju sljedeće jednačine:

$$\begin{aligned}
& u_{l(1)-1}^0(\varphi_{l(1)-1}^{[1]})_t = \\
& f\left(\sum_{s=0}^{l(1)} u_s^0 B_1(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) + f\left(\sum_{s=0}^{l(1)-1} u_s^0 B_2(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) - \\
& f\left(\sum_{s=0}^{l(1)} u_s^0 B_1(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) - f\left(\sum_{s=0}^{l(1)-2} u_s^0 B_2(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) \\
& u_{l(1)}^0(\varphi_{l(1)})_t = \\
& f\left(\sum_{s=0}^{l(1)} u_s^0 B_2(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) - f(u_{l(1)-1}^0 B_2(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))) + \\
& f(u_{l(1)}^0 B_1(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))) - f\left(\sum_{s=0}^{l(1)-2} u_s^0 B_1(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))\right) \\
& u_k^0 \varphi_{kt}^{[1]} = (\varphi_{k,0})'_t, \quad k \neq l(1) \text{ and } k \neq l(1) - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

sa sljedećim početnim uslovima: $\varphi_k^{[1]}(0) = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Rješenja ovog sistema su

$$\begin{aligned}
& \varphi_{l(1)-1}^{[1]}(t) = \varphi_{l(1)-1,0}(t) + \psi_0^{l(1)-1, l(1)}(t) \phi_1(\tau^{l(1)-1, l(1)}) \\
& \varphi_{l(1)}^{[1]}(t) = \varphi_{2,0}(t) + \psi_0^{l(1)-1, l(1)}(t) \phi_2(\tau^{l(1)-1, l(1)}) \\
& \varphi_k^{[1]}(t) = \varphi_{k,0}, \quad k \neq l(1) \text{ i } k \neq l(1) - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

gdje

$$\phi_k(\tau^{l(1)-1, l(1)}) = \frac{1}{\tau^{l(1)-1, l(1)}} \int_0^{\tau^{l(1)-1, l(1)}} \frac{F_k(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau')) - \frac{d\varphi_{k0}^{[1]}(t)}{dt}}{\frac{d\psi_{0'}^{l(1)-1, l(1)}(t)}{dt}} d\tau', \quad k = 1, 2.$$

Ovdje,

$$\begin{aligned}
F_1(\rho_{l(1)}^{[1]}) &= \\
& \frac{f(\sum_{s=0}^{l(1)} u_s^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})) + f(\sum_{s=0}^{l(1)-1} u_s^0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)-1}^0} - \\
& \frac{f(u_2^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})) - f(0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)-1}^0}, \\
F_2(\rho_{l(1)}^{[1]}) &= \\
& \frac{f(u_1^0 + u_2^0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{1,2})) - f(u_1^0) B_2(\rho_1^{[1]}(\tau^{1,2}))}{u_{l(1)}^0} + \\
& \frac{f(u_2^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{1,2})) - f(0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)}^0},
\end{aligned}$$

i $\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})$ zadovoljava jednačinu

$$\dot{\rho}_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}) = K_{l(1)}^1 - M_{l(1)}^1 B_1(\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))$$

sa početnim uslovom $\frac{\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})}{\tau^{l(1)-1, l(1)}} = 1 + \mathcal{O}(\tau^{l(1)-1, l(1)})^{-N}$, $\tau^{l(i)-1, l(i)} \rightarrow -\infty$, $N \in \mathbf{N}$.

2. Intervali $[t_i^*, t_{i+1}^* + \sigma_i)$, $i = 1, \dots, n-3$, i $[t_{n-2}^*, +\infty)$.

U ovom intervalu slabo asimptotsko rješenje je

$$u_\varepsilon^{[i]}(x, t) = u_1^0 \theta_{1\varepsilon}(\varphi_1^{[i]}(t) - x) + u_2^0 \theta_{2\varepsilon}(\varphi_2^{[i]}(t) - x) + \dots + u_n^0 \theta_{n\varepsilon}(\varphi_n^{[i]}(t) - x).$$

Funkcije $\varphi_k^{[i]}$, $i = 2, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n$, zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{aligned}
\varphi_s^{[i]} &= \varphi_s^{[i-1]}, \quad s < k(l(i)) \text{ and } s > p(l(i)), \\
\sum_{s=k(l(i))}^{j(l(i))} u_s^0(\varphi_{l(i)-1})_t &= \\
& f\left(\sum_{s=0}^{l(i)} u_s^0 B_2(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) - f\left(\sum_{s=0}^{k(i)-1} u_s^0 B_2(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) + \\
& f\left(\sum_{s=0}^{p(l(i))} u_s^0 B_1(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) - f\left(\sum_{s=j(l(i))+1}^{p(l(i))} u_s^0 B_1(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right), \\
\sum_{s=j(l(i))+1}^{p(l(i))} u_s^0(\varphi_{l(i)})_t &= \\
& f\left(\sum_{s=0}^{p(i)} u_s^0 B_2(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) - f\left(\sum_{s=0}^{l(i)} u_s^0 B_2(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) + \\
& f\left(\sum_{s=l(i)+1}^{p(l(i))} u_s^0 B_1(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right) - f\left(\sum_{s=0}^{k(i)-1} u_s^0 B_1(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))\right), \\
\varphi_s^{[i]} &= \varphi_{l(i)}^{[i]}, \quad s = j(l(i)) + 1, \dots, p(l(i)), \\
\varphi_s^{[i]} &= \varphi_{l(i)-1}^{[i]}, \quad s = k(l(i)), \dots, j(l(i)),
\end{aligned}$$

sa sljedećim početnim uslovima: $\varphi_k^{[i]}(t_i^*) = \lim_{t \rightarrow t_i^*+} \varphi_k^{[i-1]}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Rješenja ovog sistema su

$$\begin{aligned}
\varphi_{l(i)-1}^{[i]}(t) &= \varphi_{l(i)-1,0}(t) + \psi_0^{l(i)-1, l(i)}(t) \phi_1(\tau^{l(i)-1, l(i)}) \\
\varphi_{l(i)}^{[i]}(t) &= \varphi_{2,0}(t) + \psi_0^{l(i)-1, l(i)}(t) \phi_2(\tau^{l(i)-1, l(i)}),
\end{aligned}$$

gdje

$$\phi_k(\tau^{l(i)-1, l(i)}) = \frac{1}{\tau^{l(i)-1, l(i)}} \int_0^{\tau^{l(i)-1, l(i)}} \frac{F_k^{[i]}(\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau')) - \frac{d\varphi_{k0}^{[i]}(t)}{dt}}{\frac{d\psi_{0l}^{l(i)-1, l(i)}(t)}{dt}} d\tau', \quad k = 1, 2.$$

Ovdje,

$$\begin{aligned}
F_1^{[i]}(\rho_{l(i)}^{[i]}) = & \frac{f(\sum_{s=0}^{p(l(i))} u_s^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})) + f(\sum_{s=0}^{j(l(1))} u_s^0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)-1}^0} - \\
& \frac{f(\sum_{s=j(l(i))+1}^{p(l(i))} u_s^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})) - f(\sum_{s=0}^{k(l(i))-1} u_s^0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)-1}^0}, \\
F_2^{[i]}(\rho_{l(1)}^{[1]}) = & \frac{f(\sum_{s=0}^{p(l(i))} u_s^0) B_2(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{1,2})) - f(\sum_{s=0}^{j(l(1))} u_s^0) B_2(\rho_1^{[1i]}(\tau^{1,2}))}{u_{l(1)}^0} + \\
& \frac{f(\sum_{s=j(l(i))+1}^{p(l(i))} u_s^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{1,2})) - f(\sum_{s=0}^{k(l(i))-1} u_s^0) B_1(\rho_{l(1)}^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)}))}{u_{l(1)}^0},
\end{aligned}$$

i $\rho_1^{[1]}(\tau^{l(1)-1, l(1)})$ zadovoljava jednačinu:

$$\dot{\rho}_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}) = K_{l(i)}^i - M_{l(i)}^i B_1(\rho_1^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)}))$$

sa početnim uslovom $\frac{\rho_{l(i)}^{[i]}(\tau^{l(i)-1, l(i)})}{\tau^{l(i)-1, l(i)}} = 1 + \mathcal{O}((\tau^{l(i)-1, l(i)})^{-N})$, $\tau^{l(i)-1, l(i)} \rightarrow -\infty$, $N \in \mathbb{N}$.

U zajedničkim djelovima intervala $[t_i^*, t_{i+1}^* + \sigma_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, funkcije $\varphi_i^{[m]}$, $i = 1, \dots, n$, $m = m(i) = 1, \dots, n-1$, su iste (do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$). Zato su i slabo asimptotska rješenja $u_\varepsilon^{[i]}$, $i = 1, \dots, n-1$, problema (1), (83) u ista do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$ u intervalima $[t_i^*, t_{i+1}^* + \sigma_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, respektivno. Zato globalno slabo asimptotsko rješenje problema (1), (83) možemo napisati u obliku:

$$u_\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i u_\varepsilon^{[i]},$$

gdje su funkcije $\eta_i = \eta_i(t) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ takve da:

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= 1, \text{ za } t \in [0, t_1^*), \\ \eta_1(t) &= 0, \text{ za } t \in [t_1^* + \sigma_1, +\infty), \\ \eta_i(t) &= 1, \text{ za } t \in [t_{i-1}^* + \sigma_{i-1}, t_i^*), \\ \eta_i(t) &= 0, \text{ za } t \notin [t_{i-1}^*, t_i^* + \sigma_i), \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \eta_{n-1}(t) &= 1, \text{ za } t \in [t_{n-2}^* + \sigma_{n-2}, \infty), \\ \eta_{n-1}(t) &= 0, \text{ za } t \in [0, t_{n-2}^*).\end{aligned}$$

5.3 Postojanje dopustive aproksimacije početnog uslova regularizovanom stepenastom funkcijom

Na početku uvešćemo pretpostavke o obliku početnih uslova. Naime pretpostavićemo da ne postoji interval u \mathbf{R} za koji važi

$$(f'(u_0(x)))'' = 0.$$

Ukoliko imamo takav interval, početni uslov $u_0(x)$ možemo transformisati za neki mali parametar ε^μ , $0 < \mu < 1$, tako da dobijemo funkciju $u_{0\varepsilon}(x)$ koja zadovoljava tražene uslove, a od funkcije $u_0(x)$ se razlikuje za $\mathcal{O}(\varepsilon^\mu)$ u L_1^{loc} smislu.

Dokazaćemo da je uvijek moguće izabrati tačke a_i , $i = 1, 2, \dots$, na x -osi tako da nijedne tri uzastopne tačke ne interaguju simultano. Drugim riječima, ako označimo funkciju koja opisuje kretanje tačke a_i sa φ_i , $i = 1, 2, \dots$, ne smije biti $\varphi_{i-1}(t) = \varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t)$ za ma koje $t < t_i^*$, $i = 2, \dots$, gdje t_i^* označava vrijeme interakcije tačaka a_i i a_{i+1} . Odaberimo dvije tačke a_1 i a_2 na x -osi takve da $(f'(u_0(a_2)))'' \neq 0$. Dokazaćemo da je uvijek moguće odabrati tačku a_3 tako da udarni talasi koncentrisani u tačkama a_1 , a_2 i a_3 neće interagovati u isto vrijeme. Ne gubeći opštost pretpostavićemo da $a_1 > a_2$ i odabraćemo tačke a_3 tako da $a_2 < a_3$. Iz prethodnog dijela znamo da je vrijeme interakcije t_1^* tačaka a_2 i a_1 :

$$t_1^* = \frac{a_1 - a_2}{\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} - \frac{f(u_1) - f(0)}{u_1}}, \quad (85)$$

dok je vrijeme interakcije tačaka a_3 i a_2 :

$$t_2^* = \frac{a_2 - a_3}{\frac{f(u_3) - f(u_2)}{u_3 - u_2} - \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}}. \quad (86)$$

Ovdje, $u_i = u_0(a_i)$, $i = 1, 2, 3$. Želimo da dokažemo da jednakost $t_1^* = t_2^*$ ne može važiti a_3 . Označavajući sa $F(u_0(a_3))$ funkciju $\frac{f(u_3) - f(u_2)}{u_3 - u_2}$ iz (86) imamo

$$F(u_0(a_3))t_2^* = (a_2 - a_3) + t_2^* \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}.$$

Nalazeći izvod po a_3 u ovom izrazu imamo

$$(F(u_0(a_3)))'' = 0.$$

Puštajući da $a_3 \rightarrow a_2$ dobijamo da $(f'(u_0(a_2)))'' = 0$ što je u kontradikciji sa našim pretpostavkama o početnom uslovu. Osim toga, vidimo da $t_1^* = t_2^*$ može biti tačno samo u nekom gustom skupu tačaka. Sada pretpostavimo da smo odabrali tačke a_i , $i = 1, \dots, n$, tako da se nijedne tri uzastopne tačke ne interaguju simultano. Tačku a_{n+1} odabraćemo po sljedećem postupku.

Označimo sa t_{ij}^* trenutak interakcije tačaka a_i i a_j , $i > j$, $i = 1, \dots, n+1$. Kao u slučaju tri udarna talasa, vidimo da jednakost $t_{ij}^* = t_{ks}^*$, $i, j, k, s = 1, \dots, n+1$, $i \neq k$ or $j \neq s$, može biti tačna samo u nigdje gustom skupu tačaka (tačnije, za konačno tačaka realne ose). Praveći uniju svih tačaka a_{n+1} takvih da za neke $i, j, s, k = 1, \dots, n+1$, $i \neq k$ ili $j \neq s$, važi $t_{ij}^* = t_{ks}^*$ opet dobijamo nigdje gust skup tačaka. Birajući neku tačku u komplementu ovog skupa (ovaj komplement je svuda gust) dobijamo potrebnu particiju.

Primjedba 34. Primijetimo da prethodnim postupkom biramo tačke a_i , $i = 1, 2, \dots$, tako da čak ni jedan par tačaka ne interaguje istovremeno.

6 Prelazak iz neprekidnog u prekidno; jednostavni slučaj

Kao što smo najavili u uvodu, da bismo našli glatku po $t \in \mathbf{R}^+$ aproksimaciju rješenja Košijevog problema (1), (3) neophodno je prvo analizirati jednačinu (1) sa jednostavnom funkcijom kao početnim uslovom i u tom slučaju objasniti prelaz sa glatkog na prekidno stanje rješenja. Zato u ovom poglavlju razmatramo (podsjećamo na oblik jednačine (1)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (87)$$

gdje pretpostavljamo $f \in C^3(\mathbf{R})$ i $f''(u) > 0$ u oblasti u kojoj u uzima vrijednosti. Razmatraćemo jednostavni početni uslov za jednačinu (87):

$$u|_{t=0} = u_0^0 + (u_1(x) - u_0^0)H(a_1 - x) + (U - u_1(x))H(a_2 - x), \quad (88)$$

gdje su u_0^0 , U , i $a_1 > a_2$ konstante, H je Heavisideova funkcija, funkcija $u_1(x)$ je određena jednačinom:

$$f'(u_1(x)) = -Kx + b, \quad K, b = \text{const}, \quad (89)$$

i, uz to pretpostavljamo da $u_1(a_1) = u_0^0$ i $u_1(a_2) = U$.

Primjedba 35. Primijetimo da razrjeđujući talas zadovoljava uslove kao i jednostavna funkcija s tom razlikom što je u slučaju razrjeđujućeg talasa konstanta K negativna.

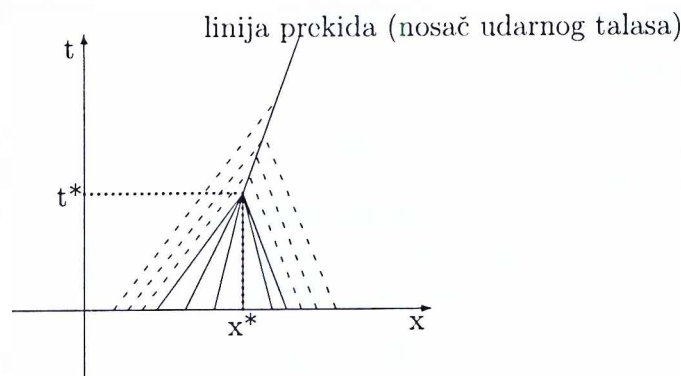
Razmotrimo sistem karakteristika za problem (87), (88). On glasi (nepoznate funkcije x i u zavise od t):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f'(u), \quad \dot{u} = 0 \\ x(0) &= x_0, \quad u(0) = u_0(x_0), \quad x_0 \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0, \quad u(t) = u_0(x_0).$$

Ako sada kroz proizvoljnu tačku $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ uočimo karakteristiku $x(t)$ vrijednost rješenja $u(x, t)$ problema (87), (88) u tački (x, t) biće jednaka $u_0(x_0)$ gdje je x_0 tačka presjeka karakteristike sa pravom $t = 0$. Drugim



Slika 2: Karakteristike jednačine (87)

riječima, tražimo inverznu funkciju funkcije $x(t)$ u odnosu na x_0 . Da bi inverzna funkcija postojala na osnovu teoreme o inverznoj funkciji mora biti $\frac{\partial x}{\partial x_0} \neq 0$. Dakle, rješenje zadato karakteristikama postojaće na vremenskom intervalu $[0, T]$ na kom $\frac{\partial x}{\partial x_0} \neq 0$. Kako za $x_0 \in [a_2, a_1]$ važi $\frac{\partial x}{\partial x_0} = -Kt + 1$ slijedi da će rješenje postojati na intervalu $[0, \frac{1}{K})$. U trenutku $t^* = 1/K$, sve karakteristike će se naći u istoj tački (pucanje klasičnog rješenja) i grafik funkcije $u(x, t)$ u (x, u) ravni će biti:

Dakle, iz ovakvog izbora početnog uslova slijedi da će aproksimativno rješenje problema (87)–(88) (slabo asimptotsko rješenje) za svako $t \in \mathbf{R}^+$ biti element asimptotske podalgebre nad prstenom glatkih po $t \in \mathbf{R}^+$ funkcija

$$\mathcal{L}\{1, H_{1\varepsilon}(x - \varphi_1), H_{2\varepsilon}(x - \varphi_2)\},$$

gdje su $H_{i\varepsilon}$, $i = 1, 2$, aproksimacije Heavisideove funkcije.

Grubo govoreći, ovo znači da je u ma kom trenutku vremena granica slabo asimptotskog rješenja linearna kombinacija Heavisideovih funkcija $H(x - \varphi_1)$ i $H(x - \varphi_2)$ sa glatkim po $t \in \mathbf{R}^+$ koeficijentima (što znači da nema dodatnih skokova). Kako je već rečeno, ovo znači da se u trenutku

$$t^* = \frac{a_1 - a_2}{f'(U) - f'(u_0^0)}$$

sve karakteristike sreću u istoj tački $x^* = a_i + V_i t^*$, $V_1 = f'(u_0^0)$, $V_2 = f'(U)$, $i = 1, 2$.

Preciznije, za $0 < t < t^*$, rješenje problema (1)–(2) dato je formulom:

$$u = u_0^0 + (u_1(x_0(x, t)) - u_0^0)H(\varphi_1 - x) + (U - u_1(x_0(x, t)))H(\varphi_2 - x), \quad (90)$$

gdje funkcija $u_1(x_0(x, t))$ ima oblik

$$u_1(x_0(x, t)) = u_1\left(a_i + \frac{x - \varphi_i(t)}{\psi_0} \psi_0^0\right) = u_1\left(\frac{x - bt}{1 - Kt}\right).$$

Ovdje $\varphi_i(t) = a_i + V_i t$, $i = 1, 2$, $\psi_0 = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, i $\psi_0^0 = a_1 - a_2$.

Primijetimo da ako stavimo

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u_1(x_0(x, t)), & t < t^*, \quad t > t^*, \\ u_0^0, & t = t^*, \quad x < x^*, \\ U, & t = t^*, \quad x > x^*, \\ \bar{u} \in [u_0^0, U], & t = t^*, \quad x = x^*, \end{cases}$$

tada je funkcija $\bar{u}(x, t)$ definisana za sve vrijednosti $t \in \mathbf{R}^+$ i za $t < t^*$, predstavlja rješenje jednačine (87) koje zadovoljava početni uslov (88) za $t = 0$. Naš cilj je da "popravimo" funkciju $\bar{u}(x, t)$ da bismo dobili analitičku formulu koja za $t < t^*$, određuje funkciju "blizu" $\bar{u}(x, t)$ i, za $t > t^*$, funkciju "blizu" funkciji

$$u = u_0^0 + H(c(t - t^*) - (x - x^*))U, \quad (91)$$

gdje

$$c = \frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=ct} = \frac{f(U) - f(u_0^0)}{U - u_0^0}.$$

Primijetimo da je funkcija u određena relacijom (89) za $t < t^*$ glatka svuda osim na tačkama koje leže na krivama $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, i, na tačkama ovih krivih, funkcija ima slabe diskontinuitete (izvod funkcije ima izvode u ovim tačkama). Zato je formiranje udarnog talasa (91) iz (89) može biti tretirano kao rezultat interakcije slabih diskontinuiteta.

6.1 Oblik slabo asimptotskog rješenja

Da bismo konstruisali slabo asimptotsko rješenje koje opisuje prelaz sa (90) u (91), uvešćemo pomoćne pojmove i oznake.

Uvodimo funkciju $U_1(x_0, \rho)$, stavljajući

$$U_1(x_0, \rho) = B_2(\rho)u_1(x_0) + B_1(\rho)(U + u_0^0 - u_1(x_0)), \quad (92)$$

gdje su funkcije $B_i(\rho)$, $i = 1, 2$, definisane u Lemi 18, funkcija $\rho = \rho(\tau)$ je definisana sa (98). Dalje,

$$\tau = \frac{\varphi_{10}(t) - \varphi_{20}(t)}{\varepsilon}, \quad \varphi_{i0}(t) = a_i + f'(u_1(a_i))t, \quad i = 1, 2,$$

$$\psi_0(t) = \varphi_{10}(t) - \varphi_{20}(t).$$

Primijetimo da na osnovu formula za B_i , $i = 1, 2$, na kraju Leme 18 važi:

$$U_1(x_0, \rho) = u_1(x_0) + O(\rho^{-N}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (93)$$

Sada možemo uvesti osnovnu teoremu ovog poglavlja.

Teorema 36. *Slabo asimptotsko rješenje problema (87)–(88) dato je u obliku*

$$u_\varepsilon(x, t) = u_0^0 + \left(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho) - u_0^0 \right) \omega_1 \left(\frac{\phi_1 - x}{\varepsilon} \right) + \left(U - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho) \right) \omega_2 \left(\frac{\phi_2 - x}{\varepsilon} \right), \quad (94)$$

gdje je $\omega_i(z) \rightarrow 0, 1$ dok $z \rightarrow \mp\infty$, $\frac{d^\alpha \omega_i}{dz^\alpha} = O(|\tau|^{-N})$, kada $|z| \rightarrow \infty$, dok $\alpha > 0$ i $N > 0$ su proizvoljni realni brojevi. Nepoznate funkcije $\phi_i = \phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, $x_0(x, t, \tau)$ date su relacijama (103) i (95).

Primjedba 37. Primijetimo da funkcije $\omega_i((\phi_i - x)/\varepsilon)$ aproksimiraju Heavisidove funkcije $H(\phi_i - x)$, odnosno,

$$\omega_i \left(\frac{\phi_i - x}{\varepsilon} \right) = H(\phi_i - x) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Dokaz Dokaz počinjemo određivanjem funkcija $\phi_i(t)$, $i = 1, 2$ i $x_0(x, t, \tau)$, $x, \tau \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}^+$ (ovakve relacije će važiti i ubuduće ako ne naglasimo drugačije).

Funkcije $\phi_i = \phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, tražićemo u obliku

$$\phi_i = \hat{\phi}_i(t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}(t, \tau), \quad i = 1, 2. \quad (95)$$

Ovdje, $\hat{\phi}(t, \tau)$ je takvo da zadovoljava $\hat{\phi}(t, \tau)|_{\tau \rightarrow \infty} = 0$. Funkcije $\hat{\phi}_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, nalazimo iz jednačina novih karakteristika (96) i, kad $\tau \rightarrow \infty$ (t.j., prije

interakcije slabih diskontinuiteta), ove funkcije su "blizu" trajektorijama $\varphi_i(t)$ iz formule (90).

Da bismo našli funkciju $x_0(x, t, \tau)$, uvodimo diferencijalnu jednačinu "novih karakteristika":

$$\frac{dx}{dt} = B_2(\rho)f'(U_1(x_0, \rho)) + B_1(\rho)f'(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) + q(\tau, \rho), \quad x \Big|_{t=0} = x_0. \quad (96)$$

Pretpostavlja se da je funkcija $q(\tau, \rho)$ glatka i da zadovoljava relaciju

$$|\tau q(\tau, \rho)| \leq \text{const}. \quad (97)$$

Uvođenje ovakve funkcije uzrokovano je činjenicom da funkcija $U_1(x, \rho)$, koja zamjenjuje funkciju $u_1(x_0)$ u formuli (90), zavisi od vremenske promjenljive (kroz funkciju $\rho = \rho(\tau)$ određenu u (99), (100)). Zato funkcija $U_1(x, \rho)$ ne zadržava svoju vrijednost duž klasičnih karakteristika koje odgovaraju problemu (87), (88). "Nove trajektorije" date su upravo jednačinom (96), gdje je funkcija ρ određena na sljedeći način. Sa $x(x_0, t, \tau)$ označimo rješenje (96) i uvedimo funkcije $\hat{\varphi}_i(t, \tau) = x(a_i, t, \tau)$, $i = 1, 2$. Stavimo

$$\rho = \frac{\hat{\varphi}_1(t, \tau) - \hat{\varphi}_2(t, \tau)}{\varepsilon} = \frac{\phi_1(t, \tau) - \phi_2(t, \tau)}{\varepsilon}. \quad (98)$$

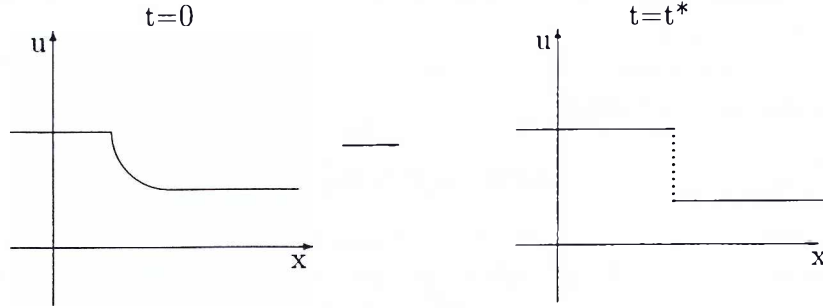
Primijetimo da $U_1(a_1, \tau) = B_2u_0^0 + B_1U$ i $U_1(a_2, \tau) = B_2U + B_1u_0^0$; stoga iz (96) dobijamo sljedeću jednačinu za $\rho = \rho(\tau)$ (zamijenimo $x_0 = a_1$ i $x_0 = a_2$ u (96), oduzmemo dobijene relacije i pređemo sa promjenljive t na τ):

$$\frac{d\rho}{d\tau} = (B_2(\rho) - B_1(\rho))(f'(B_2u_0^0 + B_1U) - f'(B_2U + B_1u_0^0))(\psi'_0)^{-1}. \quad (99)$$

Očigledno, po definiciji

$$\rho\tau^{-1} \rightarrow 1 \quad \text{kad} \quad \tau \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \frac{d\rho}{d\tau} > 0 \quad (\text{pošto} \quad \psi'_0 < 0). \quad (100)$$

Označimo desnu stranu (99) sa $G(\rho)$. Očigledno, $G(\rho_0) = 0$, gdje je ρ_0 broj takav da $B_1(\rho_0) = B_2(\rho_0)$ i $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \rho = \rho_0$. Ovo znači da se za $t > t^*$ formira udarni talas (ovo zaključujemo kao u slučaju jednačine (34)).



Slika 3: Formiranje singulariteta u slučaju jednačine (87)

Direktno dobijamo da $\left. \frac{dG}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0$, i

$$\left. \frac{d^2G}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} = -8B_{2\rho}'^2(U - u_0^0)f''\left(\frac{U + u_0^0}{2}\right)(\psi_0^0)^{-1} \neq 0. \quad (101)$$

Iz jednačine (99) i nejednakosti (101) koristeći Taylorov razvoj u okolini $\rho = \rho_0$ odnosno $\tau = \infty$ dobijamo da važe relacije:

$$\rho \rightarrow \rho_0 + O(1/|\tau|), \quad \dot{\rho} = O(1/|\tau|^2) \quad (102)$$

kada $\tau \rightarrow -\infty$.

Tako, nezavisno od (96), funkcija $\rho = \rho(\tau)$ je definisana kao rješenje problema (99), (100). Zato je funkcija $x(x_0, t, \tau)$ iz (96) takođe definisana:

$$\hat{x}(x_0, t, \tau) = X(x_0, t) + \psi_0 X_1(x_0, \tau), \quad (103)$$

gdje

$$X(x_0, t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t = x_0\psi_0(\psi_0^0)^{-1} + bt.$$

Zamjenjujući \hat{x} u (96) umjesto x dobijamo:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) + B_1(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) \right. \\
&\quad \left. + q(\tau', \rho) - f'(u_0(x_0)) \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) + B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) \right. \\
&\quad \left. + q(\tau', \rho) \right] d\tau' - (\psi_0^0)^{-1} x_0 - b(\psi'_0)^{-1}. \tag{104}
\end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da funkcija \hat{x} data formulom (103) nije tačno rješenje problema (96). Naime, za $t = 0$ (t.j. za $\tau \rightarrow +\infty$) iz (103) dobijamo

$$\begin{aligned}
(X_0 + \psi_0 X_1)|_{t=0} &= x_0 + \frac{\varepsilon}{(a_1 - a_2)\psi'_0} \int_0^\tau \left[B_2(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) + \right. \\
&\quad \left. B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) + q(\tau', \rho) - f'(u_0(x_0)) \right] d\tau' = x_0 + \varepsilon g(x_0),
\end{aligned}$$

Odatle vidimo da za $t \in [0, T]$, $T \in \mathbf{R}$, važi:

$$x(x_0, t, \tau) = \hat{x}(x_0, t, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Preciznije, term $\mathcal{O}(\varepsilon)$ u prethodnoj relaciji ima oblik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\varepsilon) &= \psi_0 X_1 \Big|_{t=0} = \frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\infty \left[B_2(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) + \right. \\
&\quad \left. B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) + q(\tau', \rho) - f'(u_0(x_0)) \right] d\tau' \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon g(x_0).
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo:

$$x(x_0, t, \tau) = \hat{x}(x_0, t, \tau) + \varepsilon g(x_0).$$

Izračunajmo izvod $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}$. Iz (103), (104), važi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x_0} &= \frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial x_0} \left[B_2(\rho) f'(U_1(x_0, \rho)) + B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) \right] d\tau \\
&= \frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2(\rho) f''(U_1(x_0, \rho)) - B_1(\rho) f''(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_0}(x_0, \rho) d\tau \tag{105}
\end{aligned}$$

Neka simbol \sim označava sljedeću relaciju:

$$f \sim g \leftrightarrow \lim \frac{f}{g} = \text{const} \neq 0.$$

Tada kad $\tau \rightarrow -\infty$, važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} &\sim B_1 - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\tau}, & B_2 - \frac{1}{2} &\sim \frac{1}{\tau}, \\ U_1(x_0, \rho) &\rightarrow \frac{U + u_0^0}{2}, & U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho) &\rightarrow \frac{U + u_0^0}{2}. \end{aligned}$$

Zato,

$$\left[B_2(\rho) f''(U_1(x_0, \rho)) - B_1(\rho) f''(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) \right] \sim \frac{1}{\tau}.$$

Stoga integral u (105) konvergira dok $\tau \rightarrow -\infty$ i

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} \sim \frac{\psi_0}{\psi_0' \tau}, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Kad $\tau \rightarrow \infty$, važi $U_1(x_0, \rho) \rightarrow u_1(x_0)$ (pošto $B_2 \rightarrow 1$) i integrand u (105) teži ka:

$$f''(u_1(x_0)) \frac{\partial u_1}{\partial x_0}(x_0) = \frac{\psi_0'}{\psi_0^0}.$$

Zato

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} \rightarrow \frac{\psi_0}{\psi_0^0}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Dakle, odredili smo trajektorije po kojima rješenje datog problema ostaje konstantno (do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$). Treba još dokazati da kroz svaku tačku prostora $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ prolazi tačno jedna takva trajektorija, odnosno treba pokazati postojanje inverzne funkcije po x_0 za funkciju $x(x_0, \tau)$. Da bismo iskoristili teoremu o inverznoj funkciji koristićemo sljedeću aproksimaciju rješenja za problem (96):

$$\tilde{x}(x_0, t, \tau) = \hat{x}(x_0, t, \tau) + \varepsilon(g(x_0) + Ax_0),$$

gdje je $A > 0$, $A = \text{const.}$ Jasno, važi:

$$\tilde{x} \Big|_{t=0} = x_0 + \varepsilon Ax_0.$$

i zato $x_0(x, t, \tau)|_{t=0} = \tilde{x} - \varepsilon A \tilde{x} + O(\varepsilon)$ što znači da je početni uslov iz (88) zadovoljen sa tačnošću do na $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$. Dokažimo da konstanta A može biti izabrana tako da je zadovoljena nejednakost:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x_0} > 0$$

za svako $t \in \mathbf{R}^+$ (neophodan uslov teoreme o inverznoj funkciji).

Važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 - Kt + \frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2 f''(U_1(x_0, \rho)) - B_1 f''(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) - \right. \\ \left. f''(u_1(x_0)) \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_0} d\tau' + \varepsilon g'(x_0) + \varepsilon A. \end{aligned}$$

Podsjetimo da $t^* = K^{-1}$, $\psi_0(t^*) = 0$, $\tau = \psi_0(t)/\varepsilon$. Stoga za $t \leq t^*$, po Lemi 22, imamo ocjenu

$$\frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2 f''(U_1(x_0, \rho)) - B_1 f''(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) - f''(u_1(x_0)) \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_0} d\tau' = O(\varepsilon)$$

Slično, za $t \geq t^*$, važi

$$\frac{\psi_0}{\psi'_0 \tau} \int_0^\tau \left[B_2 f''(U_1(x_0, \rho)) - B_1 f''(U + u_0^0 - U_1(x_0, \rho)) \right] d\tau' = O(\varepsilon),$$

odakle slijedi da je moguće izabrati traženu konstantu A . Dakle, jednačina:

$$X_0(x_0, t) + \psi_0 X_1(x_0, t, \varepsilon) + \varepsilon(g(x_0) + Ax_0) = x \quad (106)$$

može se globalno riješiti u odnosu na x_0 .

U ovom slučaju, izvod tačnog rješenja jednačine (96) razlikuje se od funkcije na desnoj strani (106) i od funkcije $\hat{x}(x_0, t, \tau)$ od $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Zato ubuduće možemo ravnopravno koristiti funkcije x , \hat{x} i \tilde{x} kao rješenje problema (96).

Pređimo sada na dokaz da je (94) slabo asimptotsko rješenje datog problema. Zamijenimo funkciju $u_\varepsilon(x, t)$ iz (94) u jednačinu (87). Koristeći Lemu

18 dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u_\varepsilon) &= \phi_{1t}(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho) - u_0^0)\delta(x - \phi_1) \\
&+ \phi_{2t}(U - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho))\delta(x - \phi_2) \\
&+ \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] \\
&+ \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} [B_2(\rho) f'(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho)) \\
&+ B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho))] [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] \\
&- \delta(x - \phi_1) \left[B_2(\rho) \left(f(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho)) - f(u_0^0) \right) \right. \\
&+ \left. B_1(\rho) \left(f(U) - f(U + u_0^0 - U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho)) \right) \right] \\
&- \delta(x - \phi_2) \left[B_1(\rho) \left(f(U + u_0^0 - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho)) - f(u_0^0) \right) \right. \\
&+ \left. B_2(\rho) \left(f(U) - f(U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho)) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial U_1}{\partial t}(x_0, \rho) \Big|_{x_0=x_0(x, t, \tau)} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \quad (107)
\end{aligned}$$

I pored velikog broja sabiraka u ovoj formuli, nije je teško razumjeti. Sabirci koji sadrže faktor $(H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x))$ odgovaraju zamjeni funkcije u_ε u jednačinu (87) za $x \in (\phi_2, \phi_1)$ sa Lemom 18 uzetom u obzir.

Sabirci koji sadrže faktore $\delta(x - \phi_i)$, $i = 1, 2$, pojavljuju se zbog činjenice da $U(x_0(\phi_i(t, \tau), \rho)) \neq u_0^0$ i $U(x_0(\phi_i(t, \tau), \rho)) \neq U$, ali kad $\tau \rightarrow \infty$ (t.j. prije interakcije) važi $\rho \sim \tau$ (vidi (100)) i stoga, za svako $N > 0$, važi

$$U(x_0(\phi_1(t, \tau), \rho)) - u_0^0 = O(\varepsilon^N), \quad U(x_0(\phi_2(t, \tau), \rho)) - U = O(\varepsilon^N).$$

Analizirajmo sabirke u (107) počevši od posljednjeg (on ima $O(\varepsilon^{-1})$ ocjenu u C -normi):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial t} &= \varepsilon^{-1} \psi'_0 \dot{\rho} [B'_{2\rho} u_1(x_0) + B'_{1\rho} (U + u_0^0 - u_1(x_0))] \\
&= \varepsilon^{-1} \psi'_0 \dot{\rho} B'_{2\rho} [U + u_0^0 - 2u_1(x_0(x, t, \tau))]. \quad (108)
\end{aligned}$$

Primijenimo Taylorovu formulu u tačkama $x = \phi_1$ i $x = \phi_2$, za proizvoljnu

funkciju $\eta(x)$ da dobijemo

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \psi'_0 \dot{\rho} B'_2 \int_{\phi_2}^{\phi_1} [U + u_0^0] \eta(x) dx \\ = \frac{\psi'_0}{2} \rho \dot{\rho} B'_{2\rho} (U + u_0^0) \langle \{\delta(x - \phi_1) + \delta(x - \phi_2)\}, \eta(x) \rangle + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (109)$$

i $B'_{2\rho} = O(|\rho|^{-N})$ za svako $N > 0$ i $\rho \rightarrow \infty$, $B'_{2\rho} \rightarrow \text{const}$ dok $\rho \rightarrow \rho_0$ ($\tau \rightarrow -\infty$), i $\dot{\rho} = O(|\tau|^{-2})$ dok $\tau \rightarrow -\infty$ (vidi (102)).

Razmotrimo posljednji sabirak formule (108). Važi:

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} u_1(x_0(x, t, \tau)) \eta(x) dx = \int_{a_2}^{a_1} u_1(x_0) \eta(x(x_0, t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}) \frac{dx}{dx_0} dx_0. \quad (110)$$

Primijetimo da važi (vidi (103))

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \psi_0 \left((\psi_0^0)^{-1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right) = \varepsilon \tau \left((\psi_0^0)^{-1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right). \quad (111)$$

Zato je desna strana u (108) ograničena u slabom smislu dok $\varepsilon \rightarrow 0$. Primijetimo da važi sljedeća relacija:

$$\begin{aligned} \eta(x(x_0, t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}) &= \eta(x(a_i, t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}) + \eta'_x \frac{\partial x}{\partial x_0} \Big|_{x_0=c_i}, \quad i = 1, 2, \\ c_1 &\in (x_0, a_1), \quad c_2 \in (a_2, x_0). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da $x(a_i, t, \tau) = \hat{\varphi}_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, i ponovo koristeći (111), (100) i (102) dobijamo

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \psi'_0 \dot{\rho} B'_2 \int_{\phi_2}^{\phi_1} u_1(x_0(x, t, \tau)) \eta(x) dx \\ = \frac{1}{2} \langle \delta(x - \phi_1) + \delta(x - \phi_2), \eta(x) \rangle \psi'_0 \dot{\rho} \tau B'_2 \\ \times \int_{a_2}^{a_1} u_1(x_0) \left((\psi_0^0)^{-1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right) dx_0 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Konačno važi:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] = g(\tau, \rho) (\delta(x - \phi_1) + \delta(x - \phi_2)) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),$$

gdje

$$g(\tau, \rho) = \frac{\psi'_0}{2} \rho \dot{\rho} B'_{2\rho}(U + u_0^0) - \psi'_0 \dot{\rho} \tau B'_{2\rho} \int_{a_2}^{a_1} u_1(x_0) \left((\psi_0^0)^{-1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right) dx_0. \quad (112)$$

Po formuli (102) vidimo da važi

$$|\tau^2 g(\tau, \rho)| \leq \text{const.}$$

Dalje, funkcija $g(\tau, \rho)$ je integrabilna i integral $\int_0^\tau g(\tau, \rho) d\tau$ konvergira. Naime, integral prvog sabirka konvergira zbog ocjena datih poslije formule (109), dok se integral drugog sabirka poklapa sa posljednjim integralom u formuli (149).

Razmotrimo preostale sabirke koji sadrže razliku $H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)$ u proizvodu. Za svaku funkciju $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, uzimajući u obzir relaciju

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = -\frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \left(B_2(\rho) f'(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + B'_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho)) \right) \right] (H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)), \eta(x) \right\rangle \\ &= \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \left[-\frac{\partial x}{\partial t} + B_2(\rho) f'(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho)) \right. \\ & \quad \left. + B_1(\rho) f'(U + u_0^0 - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho)) \right] \eta(x) dx. \end{aligned} \quad (113)$$

Na osnovu (96), izraz u srednjim zagradama na desnoj strani (113) je upravo $q(\tau, \rho)$.

Razmotrimo integral

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \eta(x) dx$$

i pređimo na promjenljivu x_0 kao u (110). Dobijamo

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \eta(x) dx = \int_{a_2}^{a_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \eta(x(x_0, t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}) dx_0.$$

Podsjetimo da

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \sim \frac{1}{\tau}, \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \rightarrow \frac{\partial u_1(x_0)}{\partial x_0}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Iz nejednakosti (97) za funkciju $q(\tau, \rho)$, koristeći Taylorovu formulu kao u (109), dobijamo

$$q \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \eta(x) dx = \frac{q}{2} \int_{a_2}^{a_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} dx_0 \langle \delta(x - \phi_1) + \delta(x - \phi_2), \eta(x) \rangle + O(\varepsilon).$$

Uzimajući u obzir definiciju funkcije $U_1(x_0, \rho)$, možemo izračunati integral na desnoj strani posljednje formule da dobijamo:

$$\begin{aligned} q \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \eta(x) dx \\ = \frac{q(B_2 - B_1)(u_0^0 - U)}{2} \langle \delta(x - \phi_1) + \delta(x - \phi_2), \eta(x) \rangle + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (114)$$

Izaberimo funkciju $q(\tau, \rho)$ tako da je sljedeća relacija zadovoljena

$$q(B_2 - B_1)(u_0^0 - U) = -g(\tau, \rho). \quad (115)$$

Očigledno važi

$$\begin{aligned} q(\tau, \rho) \sim g(\tau, \rho) &= O(\tau^{-N}) \quad \forall N, \quad \tau \rightarrow \infty; \\ q(\tau, \rho) \sim \tau g(\tau, \rho) &\sim \frac{1}{\tau}, \quad \tau \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Zato je ocjena (97) tačna i konstrukcija koja dovodi do (114) je korektna.

Ostalo je da dobijemo funkciju $\hat{\phi}$ koja se pojavljuje u definiciji funkcija ϕ_i , $i = 1, 2$. Da bismo ovo uradili iskoristićemo analizu iz Potpoglavlja 2.1. Izjednačavajući sa nulom preostale koeficijente uz $\delta(x - \phi_i)$, $i = 1, 2$, (samo oni su ostali (mod $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$) na desnoj strani relacije (107)), dobijamo

$$\begin{aligned} \phi_{1t}(U(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho) - u_0^0) - B_2(\rho)(f(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho)) - f(u_0^0)) \\ - B_1(\rho)(f(U) - f(U + u_0^0 - U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho))) = 0, \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2t}(U - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho)) - B_2(\rho)(f(U) - f(U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho))) \\ - B_1(\rho)(f(U + u_0^0 - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho)) - f(u_0^0)) = 0. \end{aligned} \quad (117)$$

Na osnovu Potpoglavlja 2.1 treba dokazati da su prethodne jednačine tačne kada $\tau \rightarrow \pm\infty$ i naći $\hat{\phi}$ tako da je njihova suma jednaka nuli.

Po definiciji funkcija $\phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, važi da kad $\tau \rightarrow \infty$ (t.j., prije interakcije), granični izrazi na lijevoj strani relacija (114), (115) jednaka je nuli, i za ove relacije važi ocjena $O(\tau^{-N})$ za svako $N > 0$ dok $\tau \rightarrow \infty$. Ovo slijedi iz relacija: $\rho/\tau \rightarrow 1$ dok $\tau \rightarrow \infty$ i

$$B_2 = 1 + O(\rho^{-N}), \quad B_1 = O(\rho^{-N}), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (\tau \rightarrow \infty). \quad (118)$$

Napišimo limite ovih relacija kad $\tau \rightarrow -\infty$. Podsjetimo da

$$B_i(\rho) = \frac{1}{2} + O(|\tau|^{-1}), \quad \rho = \rho_0 + O(|\tau|^{-1}), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad i = 1, 2. \quad (119)$$

Zato, označavajući limit od ϕ_{it} as $\tau \rightarrow -\infty$ sa ϕ_{it}^- , $i = 1, 2$, dobijamo

$$\phi_{it}^- \left(\frac{U - u_0^0}{2} \right) = \frac{1}{2} (f(U) - f(u_0^0)), \quad i = 1, 2, \quad (120)$$

or

$$\phi_{1t}^- = \frac{f(U) - f(u_0^0)}{U - u_0^0} = \phi_{2t}^-. \quad (121)$$

Kao i obično označavajući

$$\frac{f(U) - f(u_0^0)}{U - u_0^0} = \frac{[f]}{[u]},$$

možemo odrediti zajednički limit $\phi^-(t)$ funkcija $\phi_i(\tau, t)$, $i = 1, 2$, dok $\tau \rightarrow -\infty$ relacijama

$$\phi^- = \phi^-(t^*) + \frac{[f]}{[u]}(t - t^*). \quad (122)$$

Relacije (121) (ili (123)) znače da za $t > t^*$, trajektorije $x = \phi_1$ i $x = \phi_2$ su "blizu" linije

$$x - x^* = \frac{f(U) - f(u_0^0)}{U - u_0^0}(t - t^*),$$

t.j., trajektoriji udarnog talasa (91).

Analizirajmo trajektorije $x = \phi_i$, $i = 1, 2$, detaljnije.

Označimo sa $\omega(z)$ funkciju koja zadovoljava iste uslove kaok funkcije ω_i , $i = 1, 2$, iz (94).

Dokažimo da važi sljedeća relacija:

$$\phi_i(t, \tau) - \tilde{\phi}_i(t, \tau) = O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad (123)$$

gdje

$$\tilde{\phi}_i(t, \tau) = (1 - \omega(\tau))\hat{\varphi}_i(\tau, t) + \omega(\tau) \left(x^* + \frac{[f]}{[u]}(t - t^*) \right).$$

Ovdje $\hat{\varphi}_i(\tau, t) = X(a_i, t) + \psi_0 X_1(a_i, \tau)$, (vidi (147)), $x^* = \varphi_{10}(t^*) = \varphi_{20}(t^*)$, i $\phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, su tražene trajektorije singulariteta određenih da na (mod $O(\varepsilon)$) relacijama

$$\phi_i(t, \tau) = \hat{\varphi}_i(\tau, t) + \psi_0 \hat{\phi}_i.$$

Da dokažemo (123), dovoljno je staviti $\phi^-(t^*) = x^*$ u (122) i primijetiti da $\hat{\varphi}_i(0, t^*) = x^*$, $i = 1, 2$. Ostaje da se primijeti da se funkcije $\hat{\varphi}_i(\tau, t)$ mogu predstaviti u obliku

$$\hat{\varphi}_i(\tau, t) = x^* + \psi_0(\psi'_0 \tau)^{-1} \int_0^\tau [B_2 f'(U(a_i, \rho)) + B_1 f'(U + u_0^0 - U(a_i, \rho)) + q(\tau', \rho)] d\tau'. \quad (124)$$

Ovo slijedi iz (103), (104) uz relaciju $x^* = bt^* = -b\psi_0^0/\psi'_0$ uzetu u obzir (vidi formulu (89)).

Primijenimo sada Lemu 22 čime dokazujemo (123). Tvrdjenje koje smo dokazali znači da $\tilde{\phi}_i$ iz (123) zadaju familiju trajektorija koje aproksimiraju trajektorije koje želimo da konstruišemo. Ove aproksimativne trajektorije, su sa tačnošću $O(\varepsilon)$, nezavisne od izbora funkcije $\omega(\tau)$. Jedino se traži da ova funkcija zadovoljava iste uslove kao i funkcije ω_i , $i = 1, 2$, iz (94).

Izračunajmo sada funkciju $x_0(\phi_i, t, \tau)$, $i = 1, 2$. Po definiciji ovo je početna tačka trajektorije $x = \phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$. Jasno, za $t < t^*$, važi $\phi_i(t, \tau) = \tilde{\phi}_i(t, \tau) + O(\varepsilon)$ i $x_0(\phi_i, t, \tau) = a_i$. Za $t > t^*$, važi $\phi_i(t, \tau) - \phi^-(t) \rightarrow 0$ dok $\varepsilon \rightarrow 0$. Po relaciji (24), za $\phi^-(t^*) = x^*$, vidimo da je u ovom slučaju početna tačka

$$\tilde{x} = \phi^-(0) = x^* - \frac{[f]}{[u]} t^*.$$

Na osnovu nejednakosti $f'(U) < [f]/[u] < f'(u_0^0)$, ovo implicira $\tilde{x} \in (a_2, a_1)$.

Stavimo

$$\tilde{X}_0(\phi_i, \tau) = a_i + \Omega(\tau)(\tilde{x} - a_i), \quad i = 1, 2,$$

gdje je $\Omega(\tau)$ funkcija koja zadovoljava iste uslove kao i funkcija ω_i , $i = 1, 2$, iz (94).

Dokažimo relacije

$$\phi_i(t, \tau) - (x(\hat{X}_0(\phi_i, \tau), t, \tau) + \psi_0 \hat{\phi}) = O(\varepsilon), \quad i = 1, 2. \quad (125)$$

Ograničimo se na slučaj $i = 1$. Važi

$$\begin{aligned} U_1(a_1, \rho) &= U_1(\hat{X}_0, \rho) - \Omega(\tilde{x} - a_i) \frac{\partial U_1}{\partial x_0}(a_1 + \alpha \Omega(\tilde{x} - a_i), \rho), \\ U + u_0^0 - U_1(a_1, \rho) &= U + u_0^0 - U_1(\hat{X}_0, \rho) - (\tilde{x} - a_i) \frac{\partial U_1}{\partial x_0}(a_1 + \alpha \Omega(\tilde{x} - a_i), \rho), \end{aligned}$$

gdje $\alpha \in (0, 1)$.

Iz ovih relacija dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(t, \tau) - x(\hat{X}_0(\phi_1, \tau), t, \tau) & \\ &= (\tilde{x} - a_i) \psi_0 (\psi_0' \tau)^{-1} \int_0^\tau \left[B_2 \frac{\delta f'}{\delta u}(U_1(a_1, \rho); U_1(\hat{X}_0, \rho)) \right. \\ &\quad \left. - B_1 \frac{\delta f'}{\delta u}(U + u_0^0 - U_1(a_1, \rho); U + u_0^0 - U_1(\hat{X}_0, \rho)) \right] \\ &\quad \times \Omega \frac{\partial U_1}{\partial x_0}(a_1 + \alpha \Omega(\tilde{x} - a_i), \rho) d\tau' \end{aligned} \quad (126)$$

gdje

$$\frac{\delta f'}{\delta u}(A, B) = \frac{f'(A) - f'(B)}{A - B} \xrightarrow{A \rightarrow B} f''(A).$$

Primijetimo da integral na desnoj strani (127) konvergira dok $\tau \rightarrow +\infty$ pošto je funkcija Ω sadržana u integrandu. Konvergencija integrala dok $\tau \rightarrow -\infty$ provjerava se na isti način kao konvergencija posljednjeg integrala na desnoj strani (149). Stoga, po "complex germ" lemi, važi:

$$\hat{\varphi}_1(t, \tau) - x(\hat{X}_0(\phi_1, \tau), t, \tau) = O(\varepsilon),$$

i stoga, po (123) i (124), dobijamo (126). Iz (126) dobijamo relaciju

$$U_1(x_0(\phi_i, t, \tau), \rho) - U_1(\hat{X}_0(\phi_i, \tau), \rho) = O(\varepsilon), \quad i = 1, 2. \quad (127)$$

Po konstrukciji, limiti izraza na lijevoj strani u (116) i (117) su jednaki nuli dok $\tau \rightarrow \infty$ (t.j. prije interakcije). Dalje, razlika između graničnog i predgraničnog izraza je $O(\rho^{-N}) = O(\tau^{-N})$ za svako $N > 0$.

Po (117), ovi izrazi takođe teže nuli dok $\tau \rightarrow -\infty$, i razlika između graničnog i predgraničnog izraza je $O(B_1 - 1/2) = O(\rho - \rho_0) = O(|\tau|^{-1})$, $\tau \rightarrow -\infty$. Zato je, na osnovu Potpoglavlja 2.1, da bi suma sabiraka sa δ -funkcijama u (107) bila jednaka $O_{\mathcal{D}}(\varepsilon)$, dovoljno da suma izraza na lijevoj strani relacija (116) i (117) bude jednaka nuli. Na taj način dobijamo jednačinu

$$\begin{aligned} & \phi_{2t}(U - U_{1(2)}) + \phi_{1t}(U_{1(1)} - u_0^0) \\ &= B_2(\rho)(f(U_{1(1)}) - f(u_0^0)) + B_1(\rho)(f(U) - f(\hat{U}_{1(1)})) \\ & \quad + B_2(\rho)(f(U) - f(U_{1(2)})) + B_1(\rho)(f(\hat{U}_{1(2)}) - f(u_0^0)). \end{aligned} \quad (128)$$

Ovdje smo koristili sljedeću notaciju:

$$U_{1(i)} = U_1(x_0(\phi_i, t, \tau), \rho), \quad \hat{U}_{1(i)} = U + u_0^0 - U_1(x_0(\phi_i, t, \tau), \rho), \quad i = 1, 2.$$

Primijetimo da

$$\phi_{it} = \hat{\varphi}_{it} + \psi_0' \frac{d}{d\tau}(\tau \hat{\phi}) + \varepsilon \tau \hat{\phi}_t, \quad i = 1, 2.$$

Označimo sa $f \approx g$ ako

$$\lim \frac{f}{g} = 1.$$

Lako se vidi da dok $\tau \rightarrow \infty$, važi

$$U - U_{1(2)} \approx U_{1(1)} - u_0^0 \approx U - \hat{U}_{1(1)} \approx \hat{U}_{1(2)} - u_0^0 \approx B_1(U - u_0^0). \quad (129)$$

Slično,

$$\begin{aligned} f(U_{1(1)}) - f(u_0^0) &\approx f'(u_0^0)B_1(U - u_0^0), \\ f(U) - f(U_{1(2)}) &\approx f'(U)B_1(U - u_0^0), \\ f(U) - f(U_{1(1)}) &\approx f'(U)B_1(U - u_0^0), \\ f(\hat{U}_{1(2)}) - f(u_0^0) &\approx f'(u_0^0)B_1(U - u_0^0). \end{aligned} \quad (130)$$

Da bismo dobili rješenje jednačine (128), primijetimo da do na $O(\varepsilon)$, na osnovu (126), možemo zamijeniti argument $x_0(\phi_i, t, \tau)$ sa $X_0(\phi_i, \tau)$ u funkciji $U_{i(j)}$, i po (123), funkcija $X_0(\phi_i, \tau)$ može se odrediti nezavisno od funkcija ϕ_i (svuda ovdje $i, j = 1, 2$). Takođe podsjećamo da je dovoljno naći funkciju $\hat{\phi}$ koja do na $O(\varepsilon)$ zadovoljava jednačinu (128). Ukoliko iz nje uklonimo sabirak

$\varepsilon\tau\hat{\phi}_t$ vidimo da jednačina postaje linearna diferencijalna jednačina u odnosu na $\hat{\phi}$ i njeno rješenje se lako nalazi (napominjemo da je ovo rješenje do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$).

Ovo rješenje ima oblik

$$\begin{aligned}\hat{\phi} = & (\psi'_0\tau)^{-1} \int_0^\tau (U - u_0^0 - U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_2, \tau), \rho) + U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_1, \tau), \rho))^{-1} \\ & \times \left(-\hat{\varphi}_2[U - U_1(\hat{X}_0(\phi_2, \tau), \rho)] - \hat{\varphi}_1[U_1(\hat{X}_0(\phi_1, \tau), \rho) - u_0^0] \right. \\ & + \{B_2(\rho)(f(U_{1(1)}) - f(u_0^0)) + B_1(\rho)(f(U) - f(\hat{U}_{1(1)})) \\ & \left. + B_2(\rho)(f(U) - f(U_{1(2)})) + B_1(\rho)(f(\hat{U}_{1(2)}) - f(u_0^0))\} \right) d\tau'. \quad (131)\end{aligned}$$

Po (119), (129) i (130), integral na desnoj strani u posljednjoj relaciji konvergira dok $\tau \rightarrow \infty$ i $\hat{\phi} = O(\tau^{-1})$ dok $\tau \rightarrow \infty$. Na kraju ostaje da primijetimo da $\hat{\phi}$ ne zavisi od t tako da je posljednji sabirak na desnoj strani (129) jednak

nuli. Time je dokaz završen. □

7 Evolucija nelinearnih talasa

U ovom poglavlju pokazaćemo kako konstruisati slabo asimptotsko rješenje jednačine (87) sa proizvoljnim početnim uslovom. Radi preciznosti i jednostavnosti pretpostavićemo da je početni uslov opadajući što ne predstavlja gubitak opštosti budući da se na rastućim djelovima početnog uslova struktura rješenja ne mijenja (poznato je da se udarni talas javlja u intervalu gdje početni uslov $u_0(x)$ opada (vidi sliku 1)).

Primijetimo tačku $x_0 \in \mathbf{R}$ takvu da

$$t^* = \min_{x \in \mathbf{R}} -\frac{1}{f''(u_0(x))u'_0(x)} = -\frac{1}{f''u_0(x_0))u'_0(x_0)}.$$

Pretpostavimo da je ovo $x_0 \in \mathbf{R}$ jedinstveno. U tom slučaju udarni talas će se pojaviti na trajektoriji (karakteristiki) po kojoj se kreće tačka x_0 , ili, drugim riječima, "pucanje" klasičnog rješenja događa se na visini $u_0(x_0)$ u trenutku t^* (t.j. početni uslovi se mijenjaju kao na slici 4). Da bismo opisali ovaj fenomen glatko po $t \in \mathbf{R}^+$, na prvom koraku definišemo funkciju $u_1(x)$ takvu da:

$$f'(u_1(x)) = -Kx + b, \quad x \in \mathbf{R},$$

a K i b su konstante koje određujemo iz uslova (σ je neki fiksirani broj):

$$u_1(x_0 - \sigma) = u_0(x_0 - \sigma), \quad u_1(x_0 + \sigma) = u_0(x_0 + \sigma).$$

Zatim zamijenjujemo dio početnog uslova $u_0(x)$ u nekoj maloj okolini ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$) tačke x_0 funkcijom $u_1(x)$, $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$. Iz ovog malog dijela oko tačke x_0 u trenutku $t^* = \frac{1}{K}$ pojaviće se udarni talas snage $|u_0(x_0 - \delta) - u_0(x_0 + \delta)|$ dok će za $t < t^*$ rješenje u našeg problema (sa transformisanim početnim uslovom) biti neprekidna funkcija (vidi sliku 5).

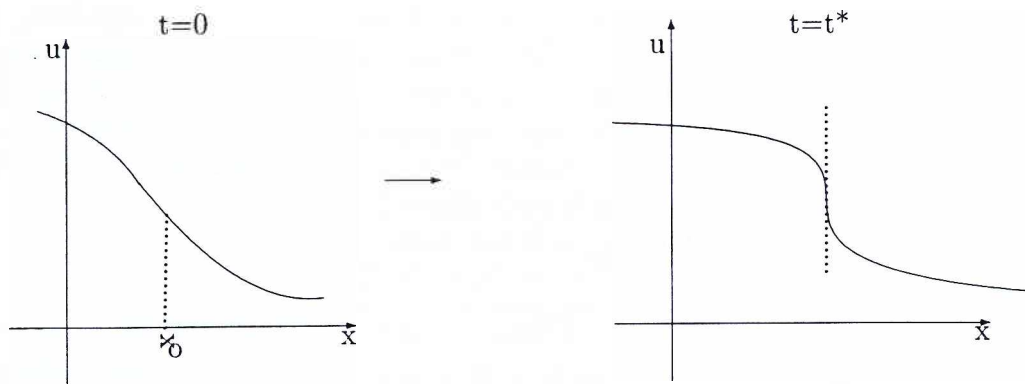
7.1 Transformacija standardnog početnog uslova

Razmatramo problem (87) sa (standardnim) početnim uslovom:

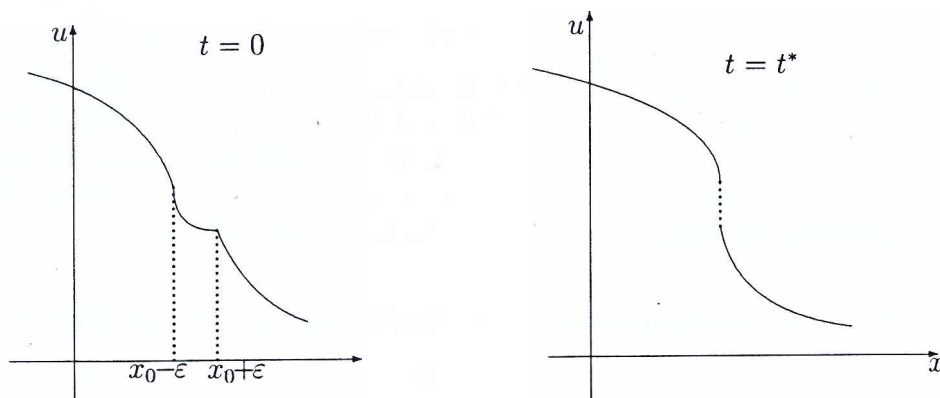
$$u(x, 0) = v(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}^+. \quad (132)$$

Funkcija $v(x)$ ima oblik:

$$v(x) = \begin{cases} u_0(x), & x < a_2 \\ u_1(x), & a_2 < x < a_1, \\ U(x), & x > a_1. \end{cases} \quad (133)$$



Slika 4: Transformacija datih početnih uslova



Slika 5: Transformacija transformisanih početnih uslova

Ovdje je funkcija u_1 takva da

$$\begin{aligned} u_1(a_1) = u_0(a_1) = u_0^0, \quad u_1(a_2) = U(a_2) = U^0, \quad a_2 > a_1, \\ f'(u_1(x)) = -Kx + b, \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

pri čemu su K i b konstante takve da

$$\begin{aligned} f'(u_0^0) &= -Ka_1 + b, \\ f'(U^0) &= -Ka_2 + b. \end{aligned} \quad (134)$$

Dalje pretpostavljamo da funkcije $u_0(x)$ i $U(x)$ zadovoljavaju

$$-\frac{1}{f''(u_0(x))u_0'(x_0)} \geq C > \frac{1}{K}, \quad -\frac{1}{f''(U(x))U'(x_0)} \geq C > \frac{1}{K}. \quad (135)$$

Ovu pretpostavku uvodimo da bismo obećijedili da se gradijentna katastrofa dogodi poslije trenutka C u intervalu $(-\infty, a_2) \cup (a_1, \infty)$. Dokažimo sljedeću teoremu:

Teorema 38. *Slabo asimptotsko rješenje Košijevog problema (87), (132) ima oblik:*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) = u_0(x, t) + \left(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho, t) - u_0(x, t) \right) \omega_1 \left(\frac{\phi_1(t, \tau) - x}{\varepsilon} \right) \\ + \left(U(x, t) - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho, t) \right) \omega_2 \left(\frac{\phi_2(t, \tau) - x}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (136)$$

Ovdje

$$\tau = \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}, \quad \psi_0(t) = \varphi_{10}(t) - \varphi_{20}(t), \quad \varphi_{20}(t) = f'(U^0)t + a_2, \quad \varphi_{10}(t) = f'(u_0^0)t + a_1,$$

i funkcija $U_1(x_0, \rho, t)$ je takva da:

$$\begin{aligned} U_1(x_0, \rho, t) = B_2(\rho)v(x_0) + B_1(\rho) (U(\phi_2(t), t) + u_0(\phi_1(t), t) - v(x_0)), \\ x_0, \rho \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, \frac{1}{K} + \delta), \end{aligned}$$

gdje $\delta < C - \frac{1}{K}$, K je dato o jednadžinama (134) dok je C konstanta iz (135).

Dalje pretpostavljamo $\omega_i(z) \rightarrow 0, 1$ kad $z \rightarrow \mp\infty$, $\frac{d^\alpha \omega_i}{dz^\alpha} = O(|\tau|^{-N})$, gdje $|z| \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$ i $N > 0$ su proizvoljni brojevi.

Funkcija $x_0(x, t, \tau)$ je inverzna funkcija funkcije $x(x_0, t, \tau)$ definisane kao rješenje (143) dok je $\phi_i = \phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, date sa (144).



Primjedba 39. Uбудućе, ukoliko ne dovodi do zabune, pišaćemo ϕ_i umjesto $\phi_i(t, \tau)$.

Dokaz Počinjemo dokaz uvođenjem funkcije

$$\rho = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\varepsilon}.$$

Zamjenjujući (136) in (87) i koristeći Lemu 18 dobiamo (H je Heavisidcova, a δ Diracova distribucija):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] + \\ & \frac{\partial U_1}{\partial t} [H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)] - \frac{\partial u_0}{\partial t} H(\phi_1 - x) + \frac{\partial U}{\partial t} H(\phi_2 - x) + \\ & \phi_{1t}(U_1 - u_0)\delta(\phi_1 - x) + \phi_{2t}(U - U_1)\delta(\phi_2 - x) + \\ & f'(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + H(\phi_1 - x) [B_2(\rho) f'(u_1) \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} - B_2(\rho) f'(u_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x}] + \\ & H(\phi_1 - x) [B_1(\rho) f'(U) \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} - B_1(\rho) f'(U + u_0 - U_1) \left(\frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \right)] + \\ & H(\phi_2 - x) [B_1(\rho) \left(f'(U + u_0 - U_1) \left(\frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \right) - f'(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \\ & B_2(\rho) \left(f'(U) \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} - f'(U_1) \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \right)] - \\ & \delta(\phi_1 - x) [B_2(\rho) (f(U_1) - f(u_0)) + B_1(\rho) (f(U) - f(U + u_0 - U_1))] - \\ & \delta(\phi_2 - x) [B_1(\rho) (f(U + u_0 - U_1) - f(u_0)) + B_2(\rho) (f(U) - f(U_1))] = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (137)$$

Množeći ovo sa $\eta(x) \in C_0^1(\mathbf{R})$, integraleći u odnosu na $x \in \mathbf{R}$, a zatim dijeleći domen integracije na tri podoblasti $(-\infty, \phi_2)$, (ϕ_2, ϕ_1) i $(\phi_1, +\infty)$, $t \in \mathbf{R}^+$,

dobijamo:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\phi_2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} f'(u_0) \right] dx + \\
& \int_{\phi_2}^{\phi_1} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + B_2 f'(U_1) \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial t} + B_1 f'(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. B_1 f'(U) \frac{\partial U}{\partial x} - B_1 f'(U + u_0 - U_1) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \right) \right] dx + \\
& \int_{\phi_1}^{+\infty} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} f'(U) \right] dx + \\
& \phi_{1t} (U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t) - u_0(\phi_1, t)) + \phi_{2t} (U(\phi_2, t) - U_1(x_0(\phi_2(t), t, \tau), \rho, t)) - \\
& \left[B_2(\rho) (f(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t)) - f(u_0(\phi_1, t))) + \right. \\
& B_1(\rho) (f(U(\phi_1, t)) - f(U(\phi_1, t) + u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t))) \left. \right] - \\
& \left[B_1(\rho) (f(U(\phi_2, t) + u_0(\phi_2, t) - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho, t)) - f(u_0(\phi_2, t))) + \right. \\
& B_2(\rho) (f(U(\phi_2, t)) - f(U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho, t))) \left. \right] = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{138}
\end{aligned}$$

Napravićemo sada dodatne pretpostavke za funkcije $U(x, t)$ i $u_0(x, t)$. Na osnovu oblika pretpostavljenog slabo asimptotskog rješenja iz (136), vidimo da funkcija $u_\varepsilon(x, t)$ ne zavisi od vrijednosti funkcija $U(x, t)$ i $u_0(x, t)$ u intervalu $\phi_2 < x < \phi_1$. U stvari, treba nam samo da funkcije $U(x, t)$ i $u_0(x, t)$ budu takve da njihovi izvodi po x budu ograničeni, što znači da možemo pretpostaviti sljedeće:

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= u(\phi_1, t), \quad x < \phi_1, \\
U(x, t) &= U(\phi_2, t), \quad x > \phi_2.
\end{aligned}$$

Ako sada izjednačimo sa nulom terme koji se pojavljuju pod integralima $\int_{-\infty}^{\phi_2}$ i $\int_{\phi_1}^{+\infty}$ dobijamo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f'(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{139}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + f'(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \tag{140}$$

Jednačine (139) i (140) su kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda čije klasično rješenje postoji bar do trenutka $t = C$, C definisano

u (135). Rješenja jednačina su data sa, respektivno:

$$U(x, t) = U(x_{01}(x, t)), \quad (141)$$

$$u_0(x, t) = u_0(x_{02}(x, t)). \quad (142)$$

Ovdje, $x_{01}(x, t)$ i $x_{02}(x, t)$ su inverzne funkcije funkcija $x(x_{01}, t)$ i $x(x_{02}, t)$ koje zadovoljavaju sljedeće sisteme običnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f'(U), \quad \dot{U} = 0, \quad x(0) = x_{01}, \quad U(0) = U(x_{01}), \quad x_{01} \in (-\infty, a_2], \\ \dot{x} &= f'(u_0), \quad \dot{u}_0 = 0, \quad x(0) = x_{02}, \quad u_0(0) = u_0(x_{02}), \quad x_{02} \in [a_1, \infty), \end{aligned}$$

Sada uvodimo jednačine "novih karakteristika":

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= B_2(\rho)f'(U_1(x_0, \rho, t)) + B_1(\rho)f'(U(\phi_2, t) + u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0, \rho, t)) + \\ &\quad q(\tau, t), \quad x|_{t=0} = x_0, \end{aligned} \quad (143)$$

gdje se pretpostavlja da je funkcija $q(\tau, t)$ glatka i zadovoljava ocjenu:

$$|\tau q(\tau, t)| \leq \text{const.}$$

Sa $x(x_0, t, \tau)$ označimo rješenje jednačine (143) i uvedimo funkcije $\hat{\varphi}_i(t, \tau) = x(a_i, t, \tau)$, $i = 1, 2$. Stavimo:

$$\phi_i(t, \tau) = \hat{\varphi}_i(t, \tau) + \psi_0(t)\hat{\phi}(t, \tau), \quad i = 1, 2, \quad (144)$$

gdje $\hat{\phi}(t, \tau)$ zadovoljava $\hat{\phi}(t, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-N})$, $\tau \rightarrow +\infty$, $N \in \mathbb{N}$ proizvoljno.

Zamjenjujući $x_0 = a_1$ i $x_0 = a_2$ u (143), zatim oduzimajući dobijene izraze i prelazeći sa promjenljive t na τ dobijamo (podsjećamo da je ovo standardna procedura):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = (B_2(\rho) - B_1(\rho)) (f'(B_2(\rho)u_0^0 + B_1(\rho)U^0) - f'(B_2(\rho)U^0 + B_1(\rho)u_0^0)) (\psi_0')^{-1}. \quad (145)$$

Ovaj izraz je identičan izrazu (99) (prethodno poglavlje). Zato funkcija ρ ima iste osobine kao i funkcija ρ koja se tamo pojavljuje. Ove osobine su:

$$\begin{aligned} \rho \tau^{-1} &\rightarrow 1 \text{ kad } \tau \rightarrow \infty \text{ and } \frac{d\rho}{d\tau} > 0, \\ \rho &\rightarrow \rho_0 + \mathcal{O}(1/|\tau|), \quad \dot{\rho} = \mathcal{O}(1/|\tau|^2), \text{ kad } \tau \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (146)$$

Razmotrimo sada jednačinu novih karakteristika. Stavimo:

$$\hat{x}(x_0, t, \tau) = X(x_0, t) + \psi_0(t)X_1(x_0, \tau), \quad (147)$$

gdje

$$X(x_0, t) = x_0 + f'(v(x_0))t = x_0\psi_0(t)(\psi_0^0)^{-1} + bt.$$

Zamjenjujući \hat{x} u (143) umjesto x dobijamo:

$$\begin{aligned} X_1 = & \frac{1}{\psi_0'\tau} \int_0^\tau \left[B_2(\rho)f'(U_1(x_0, \rho, t)) \right. \\ & \left. + B_1(\rho)f'(U(\phi_2, t) + u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0, \rho, t)) + q(\tau', \rho, t) - f'(v(x_0)) \right] d\tau' \end{aligned} \quad (148)$$

Kao u prethodnom poglavlju, vidimo da rješenje \hat{x} dato formulom (148) nije tačno rješenje jednačine (143). U stvari, za $t = 0$ imamo

$$\begin{aligned} (X_0 + \psi_0 X_1)|_{t=0} = & x_0 + \frac{\varepsilon}{\psi_0'} \int_0^{\tau(0)} \left[B_2(\rho)f'(U_1(x_0, \rho, t)) + \right. \\ & \left. B_1(\rho)f'(U(\phi_2(t), t) + u_0(\phi_1(t), t) - U_1(x_0, \rho, t)) + q(\tau', \rho) - f'(v(x_0)) \right] d\tau' = \\ & x_0 + \varepsilon g(x_0, \varepsilon), \end{aligned}$$

Pošto

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

važi:

$$x(x_0, t, \tau) = \hat{x}(x_0, t, \tau) + \varepsilon g(x_0, \varepsilon).$$

Izračunajmo izvod $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}$. Po (147), (148), imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} = & \frac{\psi_0}{\psi_0'\tau} \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial x_0} \left[B_2(\rho)f'(U_1(x_0, \rho, t)) + B_1(\rho)f'(U(\phi_2, t) + \right. \\ & \left. u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0, \rho, t)) \right] d\tau = \frac{\psi_0}{\psi_0'\tau} \int_0^\tau \left[B_2(\rho)f''(U_1(x_0, \rho, t)) - \right. \\ & \left. B_1(\rho)f''(U(\phi_2, t) + u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0, \rho, t)) \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_0}(x_0, \rho, t) d\tau \end{aligned} \quad (149)$$

Koristeći oznake iz prethodnog poglavlja dobijamo da kad $\tau \rightarrow -\infty$ važi:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \sim B_1 - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\tau}, \quad B_2 - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\tau},$$

$$U_1(x_0, \rho, t) \rightarrow \frac{U^0 + u_0^0}{2}.$$

Zato,

$$\left[B_2(\rho) f''(U_1(x_0, \rho, t)) - B_1(\rho) f''(U(\phi_2(t), t) + u_0(\phi_1(t), t) - U_1(x_0, \rho, t)) \right] \sim \frac{1}{\tau}.$$

Stoga integral u (148) konvergira dok $\tau \rightarrow -\infty$ i

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} \sim \frac{\psi_0}{\psi_0' \tau}, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Dok $\tau \rightarrow \infty$, važi $U_1(x_0, \rho, t) \rightarrow v(x_0)$ (pošto $B_2 \rightarrow 1$) i integrand u (149) teži ka

$$f''(v(x_0)) \frac{\partial v}{\partial x_0} = \frac{\psi_0'}{\psi_0^0}.$$

Tako,

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} \rightarrow \frac{\psi_0}{\psi_0^0}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Kao u prethodnom poglavlju, zbog rješivosti jednačine $x(x_0, t, x) = x$ u odnosu na x_0 globalno po t , koristićemo sljedeći aproksimativni izraz za rješenje jednačine (143):

$$\tilde{x}(x_0, t, \tau) = \hat{x}(x_0, t, \tau) + \varepsilon(g(x_0, \varepsilon) + Ax_0) = x(x_0, t, \tau) + \varepsilon Ax_0,$$

gdje je $A > 0$, $A = \text{const.}$ Jasno, važi

$$\tilde{x} \Big|_{t=0} = x_0 + \varepsilon Ax_0,$$

i zato $x_0(x, t, \tau)|_{t=0} = \tilde{x} - \varepsilon A\tilde{x} + O(\varepsilon)$.

Ovo znači da, u smislu $O_{\mathcal{D}'}$ -ocjena, početni uslov u (143) će biti zadovoljen sa tačnošću $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$. Kao u prethodnom poglavlju dokazujemo da postoji konstanta A tako da je ispunjena nejednakost:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x_0} > 0$$

za svako $t \in \mathbf{R}$. Kako je dokaz u potpunosti analogan izostavićemo njegove detalje.

Razmotrimo relaciju (138) ponovo. Podsjetimo da smo odredili funkcije $U(x, t)$ i $u_0(x, t)$ tako da su termi ispod integrala $\int_{-\infty}^{\phi_2}$ i $\int_{\phi_1}^{+\infty}$ jednaki nuli. Ostalo je da dokažemo da za sljedeći sabirak u (138) važi:

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} \left(-\frac{\partial x}{\partial t} + B_2 f'(U_1(x_0(x, t, \tau), \rho, t)) + B_1 f'(U(\phi_2, t) + u_0(\phi_1, t) - U_1(x_0(x, t, \tau), \rho, t)) \right) + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial t} \right] \eta(x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (150)$$

Ako iskoristimo činjenicu da $x_0(x(t), t, \tau) = x_0$, važi:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} = 0. \quad (151)$$

Na osnovu jednačine novih karakteristika, važi:

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} q(t, \tau) + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \eta(x) dx + \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} \eta(x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (152)$$

Kao u prethodnom poglavlju, dobijamo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)) = r(\tau, \rho) (\delta(x - \phi_1) - \delta(x - \phi_2)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \\ & \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} (H(\phi_1 - x) - H(\phi_2 - x)) \\ & = \frac{(B_2(\rho) - B_1(\rho)) (u_0(\phi_1, t) - U(\phi_2, t))}{2} (\delta(x - \phi_1) - \delta(x - \phi_2)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Funkcija $r(\tau, \rho)$ data je sa:

$$\begin{aligned} r(\tau, \rho) &= \frac{\psi'_0}{2} \rho \dot{\rho} B'_{2\rho} (U(\phi_2, t) + u_0(\phi_1, t)) \\ &\quad - \psi'_0 \dot{\rho} \tau B'_{2\rho} \int_{a_2}^{a_1} u_1(x_0) \left(\frac{\varepsilon}{a_1 - a_2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right) dx_0. \end{aligned}$$

Isto kao u prethodnom poglavlju odaberimo funkciju $q(\tau, t)$ tako da:

$$q(\tau, t) (B_2(\rho) - B_1(\rho)) (u_0(\phi_1, t) - U(\phi_2, t)) = -r(\tau, t).$$

Birajući takvo $q(\tau, t)$ dobijamo da će relacija (150) biti zadovoljena ako

$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} \eta(x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (153)$$

Ako se prisjetimo oblika funkcije $U_1(x_0, \rho, t)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} \eta(x) dx &= \int_{\phi_2}^{\phi_1} B_1(\rho) \frac{\partial}{\partial t} (U(\phi_2, t) - u_0(\phi_1, t)) \eta(x) dx = \\ &= \varepsilon \rho B_1(\rho) \cdot \frac{1}{\phi_2 - \phi_1} \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\partial}{\partial t} (U(\phi_2, t) - u_0(\phi_1, t)) \eta(x) dx. \end{aligned}$$

Dalje, primijetimo da je izvod $\frac{\partial}{\partial t} (U(\phi_2, t) - u_0(\phi_1, t))$ ograničen. Tada, pošto za $t < t^*$ važi $\tau \rightarrow \infty$ i $B_1(\rho) = \mathcal{O}(\rho^{-N})$ za svako $N \in \mathbf{N}$ i $\rho \rightarrow \rho_0$ dok $\tau \rightarrow -\infty$ važi

$$\rho B_1(\rho) \cdot \frac{1}{\phi_2 - \phi_1} \int_{\phi_2}^{\phi_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (U(\phi_2, t) - u_0(\phi_1, t)) \right) \eta(x) dx < \infty$$

što implicira da je (150) zadovoljeno.

Ostalo je da dobijemo funkciju $\hat{\phi}$ iz (144) kao i da anuliramo (do na $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$) izraze u (137) koje sadrže δ distribuciju. Ponovimo proceduru iz prethodnog poglavlja. Izjednačavajući sa nulom preostale koeficijente uz $\delta(x - \phi_i)$, $i = 1, 2$, (samo oni do na mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ su ostali na desnoj strani od (137)), dobijamo

$$\begin{aligned} &\phi_{1t}(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t) - u_0(\phi_1(t), t)) - \\ &B_2(\rho)(f(U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t)) - f(u_0(\phi_1(t), t))) - B_1(\rho)(f(U(\phi_2(t), t)) - \\ &f(U(\phi_2(t), t) + u_0(\phi_1(t), t) - U_1(x_0(\phi_1, t, \tau), \rho, t))) = 0, \quad (154) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\phi_{2t}(U(\phi_2(t), t) - U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho, t)) - B_2(\rho)(f(U(\phi_2(t), t)) - \\ &- f(U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho, t))) - B_1(\rho)(f(U(\phi_2(t), t) + u_0(\phi_1(t), t)) - \\ &U_1(x_0(\phi_2, t, \tau), \rho, t) - f(u_0(\phi_1(t), t))) = 0. \quad (155) \end{aligned}$$

Na osnovu Potpoglavlja 2.1 treba dokazati da su prethodni izrazi tačni kada $\tau \rightarrow \pm\infty$ i naći $\hat{\phi}$ tako da je njihova suma jednaka nuli.

Po definiciji funkcija $\phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, dok $\tau \rightarrow \infty$ (t.j., prije interakcije), granični izrazi na lijevoj strani relacija (154), (155) jednaki su nuli, i za ove relacije važi ocjena $O(\tau^{-N})$ za svako $N > 0$ dok $\tau \rightarrow \infty$. Dokaz je u potpunosti isti kao dokaz analognog tvrđenja u prethodnom poglavlju pa ga nećemo provoditi.

Označimo dalje, kao i obično,

$$\frac{f(U(\phi_2, t)) - f(u_0(\phi_1, t))}{U(\phi_2, t) - u_0(\phi_1, t)} = \frac{[f]}{[u]}(t).$$

Tada je zajednički limit $\phi^-(t)$ funkcija ϕ_i , $i = 1, 2$, dok $\tau \rightarrow -\infty$ određen relacijama

$$\phi^-(t) = x^* + \int_{t^*}^t \frac{[f]}{[u]}(t') dt', \quad (156)$$

gdje $x^* = \varphi_{10}(t^*) = \varphi_{20}(t^*)$.

Dalje, označimo sa $\omega(z)$ funkciju koja zadovoljava iste uslove kao i funkcije ω_i , $i = 1, 2$, iz (136).

Kao u prethodnom poglavlju može se dokazati da važi:

$$\phi_i(t, \tau) - \check{\phi}_i(t, \tau) = O(\varepsilon), \quad i = 1, 2,$$

gdje

$$\check{\phi}_i(t, \tau) = (1 - \omega(\tau))\hat{\phi}_i(\tau, t) + \omega(\tau) \left(x^* + \int_{t^*}^t \frac{[f]}{[u]}(t') dt' \right).$$

Ovdje $\hat{\phi}_i(\tau, t) = X(a_i, t) + \psi_0 X_1(a_i, \tau)$, (vidi (147)), $x^* = \varphi_{10}(t^*) = \varphi_{20}(t^*)$, i $\phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, su trajektorije singulariteta određene do na (mod $O(\varepsilon)$) relacijama (144).

Sada možemo dati oblik nepoznate funkcije $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & (\psi_0' \tau)^{-1} \int_0^\tau (U(\check{\phi}_2, t) - u_0(\check{\phi}_1, t) - U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_2, \tau, t), \rho, t) + U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_1, \tau, t), \rho, t))^{-1} \\ & \times \left(-\hat{\phi}_2[U(\hat{\phi}_2, t) - U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_2, \tau, t), \rho, t)] - \hat{\phi}_1[U_1(\hat{X}_0(\check{\phi}_1, \tau, t), \rho, t) - u_0(\check{\phi}_1, t)] \right. \\ & + \{B_2(\rho)(f(U_1(\check{\phi}_1)) - f(u_0(\check{\phi}_1, t))) + B_1(\rho)(f(U(\check{\phi}_2, t)) - f(\hat{U}_1(\check{\phi}_1))) \\ & \left. + B_2(\rho)(f(U(\check{\phi}_2, t)) - f(U_1(\check{\phi}_2))) + B_1(\rho)(f(\hat{U}_1(\check{\phi}_2)) - f(u_0(\check{\phi}_1, t))) \} \right) d\tau'. \end{aligned}$$

Dokaz da ova formula daje traženu funkciju $\tilde{\phi}$ potpuno je isti kao i dokaz korektnosti formule (131). \square

7.2 Interakcija udarnih talasa sa promjenljivom amplitudom

U ovom poglavlju daćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (87) sa početnim uslovom koji ima dva udarna talasa povezana opadajućim krivim. Notacija je ista kao i u prethodnom poglavlju.

Preciznije, daćemo slabo asimptotsko rješenje jednačine (87) sa početnim uslovom oblika:

$$u(x, 0) = u_0(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))\theta(a_1 - x) + (u_3(x) - u_2(x))\theta(a_2 - x), \quad (157)$$

gdje su funkcije $u_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, neprekidne opadajuće funkcije koje zadovoljavaju:

$$\begin{aligned} u_1(a_1) &< u_2(a_1), \\ u_2(a_2) &< u_3(a_2). \end{aligned}$$

Jasno, funkcija $u_0(x)$ ima dva skoka u tačkama a_1 i a_2 i oni će početi da se kreću u saglasnosti sa Rankine-Hugoniotovim uslovima dok se spoje u momentu t^* . Budući da hoćemo da ispitamo interakciju udarnih talasa pretpostavićemo da

$$-\frac{1}{f''(u_i(x))u_i'(x)} > t^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ovaj uslov nam obezbjeđuje da se gradientna katastrofa ne dogodi prije nego se dva udarna talasa sudare.

Uvedimo pomoćne oznake.

Sa $\phi_{i0}(t)$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbf{R}^+$, označimo rješenja sljedećih Cauchyevih problema:

$$\begin{aligned} \phi_{i0t}(t) &= \frac{f(u_{i+1}(\phi_{i0}(t), t)) - f(u_i(\phi_{i0}(t), t))}{u_{i+1}(\phi_{i0}(t), t) - u_i(\phi_{i0}(t), t)}, \quad \phi_{i0}(0) = a_i. \\ \phi_t(t) &= \frac{f(u_3(\phi(t), t) - f(u_1(\phi(t), t))}{u_3(\phi(t), t) - u_1(\phi(t), t)}, \quad \phi(t^*) = \phi_i(t^*). \end{aligned} \quad (158)$$

Sada možemo dokazati sljedeću teoremu:

Teorema 40. *Slabo asimptotsko rješenje Cauchyevog problema (87), (157) imamo u obliku:*

$$u_\varepsilon(x, t) = u_1(x, t) + \left(u_2(x, t, \varepsilon) - u_1(x, t) \right) \omega \left(\frac{\phi_1(\tau, t) - x}{\varepsilon} \right) + \left(u_3(x, t) - u_2(x, t, \varepsilon) \right) \omega \left(\frac{\phi_2(\tau, t) - x}{\varepsilon} \right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, t^* + \delta), \quad (159)$$

za δ pozitivno dovoljno malo. Ovdje:

$$\tau = \frac{\phi_{10}(t) - \phi_{20}(t)}{\varepsilon}.$$

Funkcije $u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, su diferencijabilne osim u tačkama $x = \phi_i$, $i = 1, 2$, i imaju sljedeće osobine:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_1(\phi_1, t), \quad x > \phi_1, & u_3(x, t) &= u_3(\phi_2, t), \quad x < \phi_2, \\ u_2(x, t) &= u_2(\phi_1, t), \quad x > \phi_1, & u_2(x, t) &= u_2(\phi_1, t), \quad x < \phi_2 \end{aligned}$$

Dalje, zadovoljavaju kvazilinearne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + f'(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0, \quad x > \phi_1(t), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + f'(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, \quad \phi_2(t) \leq x \leq \phi_1(t), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + f'(u_3) \frac{\partial u_3}{\partial x} &= 0, \quad x < \phi_2(t). \end{aligned} \quad (160)$$

Funkcije $\rho = \rho(\tau, t)$ date su sa:

$$\rho(\tau, t) = \frac{\phi_1(\tau, t) - \phi_2(\tau, t)}{\varepsilon}$$

i funkcije $\phi_i(t, \tau)$, $i = 1, 2$, date su jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{f(u_2(\phi_1)) - f(u_1(\phi_1))}{u_2(\phi_1) - u_1(\phi_1)} B_2(\rho) + \\ &\quad \frac{f(u_3(\phi_1) - u_2(\phi_1) + u_1(\phi_1)) - f(u_3(\phi_1))}{u_2(\phi_1) - u_1(\phi_1)} B_1(\rho), \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \frac{f(u_3(\phi_2)) - f(u_2(\phi_2))}{u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2)} B_2(\rho) + \\ &\quad \frac{f(u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2) + u_1(\phi_2)) - f(u_1(\phi_2))}{u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2)} B_1(\rho), \end{aligned} \quad (162)$$

uz sljedeće početne i granične uslove:

$$\begin{aligned}\phi_1(0, \tau) &= a_1 & \phi_2(0, \tau) &= a_2, \\ \phi_i(t, \infty) &= \phi_{i0}(t), & t < t^* \\ \phi_i(t, -\infty) &= \phi(t), & t \geq t^*, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Dalje, funkcija $\rho(\tau, t)$ je takva da za svako fiksirano $t > t^*$ važi:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \rho(\tau, t) = \rho_0(t),$$

gdje je $\rho_0 = \rho_0(t)$ takva da

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \\ &\frac{f(u_2(\phi_1)) - f(u_1(\phi_1))}{u_2(\phi_1) - u_1(\phi_1)} B_2(\rho_0) + \\ &\frac{f(u_3(\phi_1) - u_2(\phi_1) + u_1(\phi_1)) - f(u_3(\phi_1))}{u_2(\phi_1) - u_1(\phi_1)} B_1(\rho_0) = \\ &\frac{f(u_3(\phi_2)) - f(u_2(\phi_2))}{u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2)} B_2(\rho_0) + \\ &\frac{f(u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2) + u_1(\phi_2)) - f(u_1(\phi_2))}{u_3(\phi_2) - u_2(\phi_2)} B_1(\rho_0) = \\ &\frac{f(u_3(\phi_3)) - f(u_1(\phi_2))}{u_3(\phi_3) - u_1(\phi_2)}.\end{aligned}$$

Primjedba 41. Primijetimo da $\tau = \tau(t, \varepsilon)$ i da za $t = t^*$ (t.j. u momentu interakcije) važi $\tau = 0$.

Dokaz Zamijenimo (159) u jednačinu (87) i primijenimo Lemu 18. Dobi-

jamo:

$$\begin{aligned}
& u_{1t} + (u_{2\varepsilon t} - u_{1t})\theta_1 + (u_{3t} - u_{2\varepsilon t})\theta_2 + \phi_{1t}(u_{2\varepsilon}(\phi_1) - u_1(\phi_1))\delta(\phi_1 - x) + \\
& \quad \phi_{2t}(u_3(\phi_2) - u_{2\varepsilon}(\phi_2))\delta(\phi_2 - x) + u_{1x}f'(u_1) \\
& \quad + \theta_1 \left[(u_{3x}f'(u_{3x}) - f(u_1 + u_3 - u_{2\varepsilon})(u_{1x} + u_{3x} - u_{2\varepsilon x}))B_1 + \right. \\
& \quad \left. (f'(u_{2\varepsilon})u_{2\varepsilon x} - f'(u_1)u_{1x})B_2 \right] + \theta_2 \left[(u_{3x}f'(u_3) - u_{2\varepsilon x}f'(u_2))B_2 + \right. \\
& \quad \left. (f'(u_1 + u_3 - u_{2\varepsilon})(u_{1x} + u_{3x} - u_{2\varepsilon}) - f'(u_1)u_{1x})B_1 \right] - \\
& \quad \left[B_1(f(u_1(\phi_1) + u_3(\phi_1) - u_{2\varepsilon}(\phi_1)(u_{1x} - u_{3x} - u_{2\varepsilon x}) - f'(u_1)u_{1x}B_1) - \right. \\
& \quad \left. [B_1(f(u_3(\phi_1)) - f(u_1 + u_3 - u_{2\varepsilon})(\phi_1)))\delta_1 + B_2(f(u_2(\phi_1)) - f(u_1(\phi_1)))\delta_1 - \right. \\
& \quad \left. [B_2(f(u_3(\phi_2)) - f(u_{2\varepsilon}(\phi_2))) + B_1(f((u_1 + u_3 - u_{2\varepsilon})(\phi_2)) - f(u_1(\phi_2)))\delta_2 \right. \\
& \quad \left. = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \quad (163)
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili oznake (δ i θ su Diracova i Heavisideova funkcija respektivno):

$$\begin{aligned}
& \delta_i = \delta(x - \phi_i(t)), \quad \theta_i = \theta(x - \phi_i(t)), \quad i = 1, 2. \\
& u_j(\phi_i) = u_j(\phi_i(t), t), \quad u_{2\varepsilon}(\phi_i) = u_2(\phi_i(t), t, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 3.
\end{aligned}$$

Razmotrimo dobijeni izraz (163) u intervalima $(-\infty, \phi_2)$, (ϕ_2, ϕ_1) i (ϕ_1, ∞) . U intervalu $(-\infty, \phi_2)$ važi $u_{2\varepsilon x} = u_{3x} = 0$ i $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Odavde dobijamo da važi prva jednačina iz (160). Na sličan način, razmatrajući interval (ϕ_2, ϕ_1) dobijamo da važi druga od jednačina (160). Uzimajući u obzir da u (ϕ_1, ∞) važi $u_{1x} = u_{2\varepsilon x}$ i $\theta_1 = \theta_2 = 0$ dobijamo da važi i treća jednačina iz (160). Primijetimo dalje da ovakvo razmatranje ima smisla samo ako dokažemo drugi dio teoreme koji (grubo govoreći) kaže da uvijek važi $\phi_1 \geq \phi_2$. Da bi ovo važilo potrebno je dokazati da $\rho(\tau, t)$ ne teži ka $+\infty$ kad $\tau \rightarrow -\infty$ (kao u prethodnom poglavlju). Na isti način kao i u ranijem tekstu dokazaćemo da $\dot{\rho} = F(\rho)$, $\dot{\rho}$ izvod u odnosu na τ , gdje je $F(\rho) < 0$ na intervalu (ρ_0, ∞) .

Izjednačavajući koeficijente uz δ_1 i δ_3 sa nulom dobijamo jednačine (161) i (162). Ako oduzmemo (161) od (162) i pređemo na promjenljivu τ u izrazu $\frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial t}$ dobijamo izraz $\dot{\rho} = F(\rho)$. Na osnovu graničnih uslova kad $\tau \rightarrow \infty$ vidimo da $F(\rho) \Big|_{\tau \rightarrow \infty} < 0$. Kako u tom slučaju $\rho \rightarrow \infty$ dovoljno je pokazati da ako $\rho \rightarrow -\infty$ tada $F(\rho) > 0$. Međutim to je očigledno na osnovu osobina

funkcija $B_i(\rho)$, $i = 1, 2$, i konveksnosti funkcije f . Dakle, postoji tačka ρ_0 takva da $F(\rho_0) = 0$. Na osnovu standardne teorije običnih diferencijalnih jednačina slijedi da kad $\tau \rightarrow -\infty$ važi $\rho \rightarrow \rho_0$ pri čemu je ρ_0 najmanja nula jednačine $F(\rho) = 0$. Dakle, kad $\tau \rightarrow -\infty$ to jest kada $t > t^*$ važi $\phi_1 > \phi_2$ do na $\mathcal{O}(\varepsilon)$ tako da su jednačine (166) globalno zadovoljene. Kako slabo asimptotsko rješenje konvergira ka dopustivom slabom rješenju slijedi da ρ_0

mora zadovoljavati Rankine Hugoniotove uslove (158). \square

7.3 Skalarni zakon održanja sa opadajućim početnim uslovom

U ovom poglavlju iskoristićemo rezultate prethodna dva poglavlja za rješavanje jednačine (87) sa proizvoljnim opadajućim početnim uslovom

$$u|_{t=0} = v(x). \quad (164)$$

Pretpostavićemo još da je funkcija $v(x)$ takva da postoji najise konačno tačaka u kojima

$$-\frac{1}{f''(v(x))v'(x)}, \quad x \in \mathbf{R}$$

dostiže minimum. Označimo ovaj skup sa $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Pretpostavimo i da $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Primjedba 42. Mada smo već objasnili razloge za ovakve pretpostavke koje se odnose na početne uslove uradićemo to još jednom. Na početku treba pogledati [14], Teoremu 6.1.1. Tamo se tvrdi da klasično rješenje postoji tačno do trenutka $t^* = \max_{x \in \mathbf{R}} -\frac{f''(v(x))}{v'(x)}$. Ovo znači da karakteristike koje izviru iz tačaka koje pripadaju skupu $\{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0)\}$ u (x, t) ravni prve ulaze u liniju diskontinuiteta rješenja datog problema (vidi sliku *).

Sada nastavljamo po ranije opisanoj proceduri. Oko svake tačke $x_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, uočimo ε -okolinu oblika $(x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu)$, $\mu \in (0, 1)$. Zatim, transformišemo početni uslov tako što u pomenutim okolinama funkciju $v(x)$ zamjenjujemo funkcijama $u_i(x)$, $x \in (x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu)$, takvim da za svako $i = 1, \dots, n$ važi:

$$f'(u_i(x)) = -K_i x + b_i, \quad x \in (x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu),$$

gdje su konstante K_i i b_i određene uslovima:

$$u_i(x_i - \varepsilon^\mu) = v(x_i - \varepsilon^\mu), \quad u_i(x_i + \varepsilon^\mu) = v(x_i + \varepsilon^\mu), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dakle, originalni početni uslov $v(x)$ zamijenili smo funkcijom:

$$\hat{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x), & x \in (-\infty, x_1 - \varepsilon^\mu) \cup (x_1 + \varepsilon^\mu, x_2 - \varepsilon^\mu) \cup \dots \\ & \cup (x_{n-1} + \varepsilon^\mu, x_n - \varepsilon^\mu) \cup (x_n + \varepsilon^\mu, \infty), \\ u_i(x), & x \in (x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (165)$$

Jasno je da $v(x) - \hat{v}_\varepsilon(x) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\mu)$. Dalje, pošto funkcija $f''(v(x))v'(x)$ dostiže maksimum u taškama $x_i \in S$ postoji okolina $\mathcal{U}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, takva da za svako $x \in \mathcal{U}(x_i)$ važi $f''(v(x))v'(x) > f''(v(y))v'(y)$ gdje $y \notin \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}(x_i)$. Trenutak "ispravljanja" krive koja povezuje $(x_i - \varepsilon^\mu, v(x_i - \varepsilon^\mu))$ i $(x_i + \varepsilon^\mu, v(x_i + \varepsilon^\mu))$ je (na osnovu Poglavlja 7 i Lagrangeove teoreme o srednjim vrijednostima)

$$t_i^* = \frac{2\varepsilon^\mu}{f'(v(x_i - \varepsilon^\mu)) - f'(v(x_i + \varepsilon^\mu))} = -\frac{1}{(f'(v(\hat{x}_i)))'},$$

za neko $\hat{x}_i \in (x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu)$. Odavde vidimo da za svako $i = 1, \dots, n$ važi $t_i^* < \frac{-1}{f''(v(y))v'(y)}$ gdje $y \notin \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}(x_i)$. Znajući ovo možemo opisati ponašanje slabo asimptotskog rješenja razmatranog problema.

Razmatrajmo transformaciju izmijenjenih početnih uslova $\hat{v}_\varepsilon(x)$. U intervalu $[0, t^*)$, limit slabo asimptotskog rješenja jednačine (87) sa početnim uslovom $\hat{v}_\varepsilon(x)$ će biti neprekidna funkcija. U trenutku $t = t^*$, kriva koja povezuje tačke $(x_i - \varepsilon^\mu, v(x_i - \varepsilon^\mu))$ i $(x_i + \varepsilon^\mu, v(x_i + \varepsilon^\mu))$, $i = 1, \dots, n$, po parovima će se ispraviti pa će u intervalu (t^*, t_2^*) nastaviti da se kreće kao udarni talas rastuće snage. U trenutku $t = t_2^*$, dvije opšte situacije su moguće:

a) na segmentima između parova formiranih udarnih talasa događa se gradientna katastrofa u trenutku t_2^* (jasno, prije interakcije odgovarajućih udarnih talasa).

ili

b) dva udarna talasa interaguju u momentu t_2^* prije gradijentne katastrofe u intervalu između njih.

U slučaju a) aproksimiramo odgovarajući dio limita slabo asimptotskog rješenja u trenutku t^* sa funkcijom $r_\varepsilon(x, t^*)$ takvom da $f'(r(x, t^*)) = -Kx + b$

za neke konstante K i b . Tako dobijamo funkciju $v_\varepsilon^*(x)$. Zatim koristeći rezultate Poglavlja 7, nalazimo slabo asimptotsko rješenje $u_\varepsilon^*(x, t)$ jednačine (87) sa početnim uslovom $v_\varepsilon^*(x)$ u intervalu $[t^*, t_3^*)$ gdje je t_3^* trenutak sljedeće promjene strukture rješenje to jest trenutak nove situacije iz **a)** ili **b)**. Zatim povezujemo slabo asimptotska rješenja iz intervala $[0, t_2^*)$ i $[t^*, t_3^*)$ razbijanjem jedinice intervala $[0, t_3^*)$.

U slučaju **b)** koristimo rezultate Poglavlja 7.2 na jednačinu (87) sa početnim uslovom $\tilde{v}(x, t^*)$ dobijenim kao slabi limit u odnosu na $x \in \mathbf{R}$ funkcije $u_\varepsilon(x, t)$ u trenutku t^* , a zatim povežemo ovo rješenje (dobijeno za $t \in [t^*, t_3^*)$) sa rješenjem iz intervala $[0, t_2^*)$ razbijanjem jedinice intervala $[0, t_3^*)$.

Pređimo na precizne formule. U intervalu $[0, t_2^*)$, slabo asimptotsko rješenje problema (87), (164) imaćemo u obliku:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{[1]}(x, t) = & v_0(x, t) + (U_1(x_0^1(x, t, \tau^1), \rho_1, t) - v_0(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_1^1(t, \tau^1) - x}{\varepsilon} \right) + \\ & (v_1(x, t) - U_1(x_0^1(x, t, \tau^1), \rho_1, t)) \omega \left(\frac{\phi_1^2(t, \tau^1) - x}{\varepsilon} \right) + \dots + \\ & (U_n(x_0^1(x, t, \tau^n), \rho_n, t) - v_{n-1}(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_n^1(t, \tau^n) - x}{\varepsilon} \right) + \\ & (v_n(x, t) - U_n(x_0^n(x, t, \tau^n), \rho_n, t)) \omega \left(\frac{\phi_n^2(t, \tau^n) - x}{\varepsilon} \right). \quad (166) \end{aligned}$$

Koristeći rezultate Poglavlja 7 možemo opisati sve funkcije koje se pojavljuju u (166). Važi:

$$\begin{aligned} U_i(x_0^i, \rho_i, t) = & B_2(\rho_i)v_{i-1}(x_0^{i-1}) + B_1(\rho_i) \left(U(\phi_2^i(t, \tau^i), t) + u_0(\phi_1^i(t, \tau^i), t) - \right. \\ & \left. v_{i-1}(x_0^{i-1}) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad x_0^i \in (x_i - \varepsilon^\mu, x_i + \varepsilon^\mu), \quad \rho_i \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, \frac{1}{K} + \delta), \end{aligned} \quad (167)$$

$$\phi_i^j(t, \tau) = \hat{\varphi}_i^j(t, \tau^i) + (\varphi_i^{10}(t) - \varphi_i^{20}(t)) \hat{\phi}_i(t, \tau^i), \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (168)$$

Ovdje

$$\begin{aligned} \varphi_i^{20}(t) = & f'(v(x_i - \varepsilon^\mu))t + x_i - \varepsilon^\mu, \quad \varphi_i^{10}(t) = f'(v(x_i + \varepsilon^\mu))t + x_i + \varepsilon^\mu, \\ i = 1, \dots, n, \quad \tau_i = & \frac{\varphi_i^{10}(t) - \varphi_i^{20}(t)}{\varepsilon}, \quad \rho_i = \rho_i(t, \tau_i) = \frac{\phi_i^1(t, \tau^i) - \phi_i^2(t, \tau^i)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

i ρ_i je rješenje sljedećeg Cauchyevog problema (analogno sa (145)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau^i} = & (B_2(\rho_i) - B_1(\rho_i)) \left(f'(B_2(\rho_i)v(x_i + \varepsilon^\mu) + B_1(\rho_i)v(x_i - \varepsilon^\mu)) \right. \\ & \left. - f'(B_2(\rho_i)v(x_i - \varepsilon^\mu) + B_1(\rho_i)v(x_i + \varepsilon^\mu)) \right) \left((\phi_i^{10}(t) - \phi_i^{20}(t))' \right)^{-1}, \\ & \lim_{\tau_i \rightarrow \infty} \frac{\rho_i}{\tau_i} = 1 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Funkcije $x_0^i(x, t, \tau^i)$ i $\varphi_i^j(t, \tau)$ dobijamo iz jednačina uopštenih karakteristika analognim jednačini (143). Naime, ako stavimo u (143) umjesto $U_1(x_0, \rho, t)$, $U(\phi_2, t)$ i $u_0(\phi_1, t)$ respektivno funkcije $U_i(x_0^i, \rho_i, t)$, $v_i(\phi_i^1(t, \tau_i), t)$ i $v_{i-1}(\phi_i^2(t, \tau_i), t)$ možemo izračunati inverznu funkciju funkcije $x(x_0^i, t, \tau_i)$ u odnosu na x_0^i što je u stvari funkcija $x_0^i(x, t, \tau_i)$ koja se pojavljuje u (166). Ako, zajedno sa pomenutim izmjenama u (143), stavimo $x_i - \varepsilon^\mu$ i $x_i + \varepsilon^\mu$ kao početni uslov, rješenje tih problema će biti funkcije ϕ_i^1 i ϕ_i^2 , respektivno.

Funkcije $v_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$, su klasična rješenja sljedećih Cauchyevih problema:

$$\begin{aligned} v_{it} + f'(v_i)v_{ix} &= 0, \\ v_i(x, 0) &= v(x), \quad t \in [0, t^* + \delta/2), \quad x \in \begin{cases} (-\infty, x_1 - \varepsilon^\mu), & i = 0, \\ (x_i + \varepsilon^\mu, x_{i+1} - \varepsilon^\mu), & i = 1, \dots, n-1, \\ (x_n + \varepsilon^\mu, +\infty), & i = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (169)$$

Kako smo već objasnili, u trenutku t_2^* imaćemo ili **a**), ili **b**) ili **a**) između neka dva udarna talasa i istovremeno **b**) između druga dva udarna talasa.

Negubeći opštost možemo pretpostaviti da se tačno jedna interakcija udarnih talasa dogodila u t_2^* i da se tačno jedna gradijentna katastrofa desila u t_2^* (dakle imamo kombinaciju **a**) i **b**)). Ostalo je da postavimo početne uslove u $t = t^*$ da bismo dobili Cauchyev problem za jednačinu (132). Jednostavno ćemo staviti $t = t^*$ u (166) i iskoristiti činjenicu da do $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (što je zanemarljivo u našem konceptu) važi $\phi_i^1(t^*) = \phi_i^2(t^*)$, $i = 1, \dots, n$. **a**). Dakle,

dobijamo početni uslov:

$$\begin{aligned}
v_{[2]}(x, t^*) = & v_0(x, t^*) + (v_1(x, t^*) - v_0(x, t^*)) \omega \left(\frac{\phi_1^1(t^*, 0) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_1(x, t^*) - v_2(x, t^*)) \omega \left(\frac{\phi_2^1(t^*, 0) - x}{\varepsilon} \right) + \dots + \\
& (v_{n-1}(x, t^*) - v_{n-2}(x, t^*)) \omega \left(\frac{\phi_{n-1}^1(t^*, 0) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_n(x, t^*) - v_{n-1}(x, t^*)) \omega \left(\frac{\phi_n^1(t^*, 0) - x}{\varepsilon} \right). \quad (170)
\end{aligned}$$

Dalje, možemo pretpostaviti da se **a)** dogodilo u tački $x_{[2]}$ smještenoj između udarnih talasa koncentrisanim u tačkama $\phi_1^1(t^*, 0)$ i $\phi_2^1(t^*, 0)$ dok se slučaj **b)** dogodio između udarnih talasa koncentrisanih u tačkama $\phi_2^1(t^*, 0)$ i $\phi_3^1(t^*, 0)$. Za dio između $\phi_1^1(t^*, 0)$ i $\phi_2^1(t^*, 0)$ ponovićemo proceduru sa početka poglavlja. Naime, aproksimiraćemo funkciju $v_1(x, t^*)$ u okolini $(x_{[2]} - \varepsilon^\mu, x_{[2]} + \varepsilon^\mu)$ funkcijom $u_{[2]}(x)$ takvom da:

$$\begin{aligned}
f'(u_{[2]}(x)) &= -Kx + b, \quad u_{[2]}(x_{[2]} - \varepsilon^\mu) = v_1(x_{[2]} - \varepsilon^\mu, t^*), \\
u_{[2]}(x_{[2]} + \varepsilon^\mu) &= v_1(x_{[2]} + \varepsilon^\mu, t^*),
\end{aligned}$$

gdje se K i b odgovarajuće konstante. Označimo ovako dobijenu funkciju sa $\tilde{v}_{\varepsilon[2]}(x)$. Zatim rješavamo jednačinu (87) sa funkcijom $\tilde{v}_{\varepsilon[2]}$ kao početnim uslovom ali od momenta $t = t^*$. Prema poglavljima 7 i 7.2 slabo asimptotsko rješenje jednačine (87) sa početnim uslovom $u(x, 0) = \tilde{v}_{\varepsilon[2]}(x)$ u intervalu

$[t^*, t_3^*)$, dato je u obliku:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^{[2]}(x, t) = & v_0(x, t) + (v_{0[2]}(x, t) - v_0(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_1(t, \tau^1) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (U_{1[2]}(x_0^1(x, t, \tau_{[2]}), \rho_{[2]}, t) - v_{0[2]}(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_{[2]}^1(t, \tau_{[2]}) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_{1[2]}(x, t) - U_{1[2]}(x_0^1(x, t, \tau_{[2]}), \rho_{[2]}, t)) \omega \left(\frac{\phi_{[2]}^2(t, \tau_{[2]}) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_2(x, t) - v_{1[2]}(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_2(t, \tau^2) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_3(x, t) - v_2(x, t, \varepsilon)) \omega \left(\frac{\phi_3(t, \tau^2) - x}{\varepsilon} \right) + \dots + \\
& (v_{n-1}(x, t) - v_{n-2}(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_{n-1}(t, \tau^{n-1}) - x}{\varepsilon} \right) + \\
& (v_n(x, t) - v_{n-1}(x, t)) \omega \left(\frac{\phi_n(t, \tau^n) - x}{\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

Ovdje su funkcije ϕ_i , $i = 1, 4, \dots, n$, nezavisne od ε i date sljedećim Cauchyevim problemima:

$$\begin{aligned}
\phi_{1t} &= \frac{f(v_{0[2]}(\phi_1, t)) - f(v_0(\phi_1, t))}{v_{0[2]}(\phi_1, t) - v_0(\phi_1, t)}, \quad \phi_1(t^*) = \phi_1^1(t^*, 0), \\
\phi_{it} &= \frac{f(v_{i-1}(\phi_i, t)) - f(v_i(\phi_i, t))}{v_{i-1}(\phi_i, t) - v_i(\phi_i, t)}, \quad \phi_i(t^*) = \phi_i^1(t^*, 0), \quad i = 4, n, \quad t \in [t^*, t_3^*)
\end{aligned}$$

i, kao i obično,

$$\rho_{[2]} = \frac{\phi_{[2]}^1 - \phi_{[2]}^2}{\varepsilon}.$$

Ako sa $\phi_{20}(t)$ i $\phi_{30}(t)$ oznažimo rješenja sljedećih Cauchyevih problema:

$$\begin{aligned}
\phi_{20t} &= \frac{f(v_2(\phi_{20}, t)) - f(v_{1[2]}(\phi_{20}, t))}{v_2(\phi_{20}, t) - v_{1[2]}(\phi_{20}, t)}, \quad \phi_{20}(t^*) = \phi_2^1(t^*, 0), \\
\phi_{30t} &= \frac{f(v_3(\phi_{30}, t)) - f(v_2(\phi_{30}, t))}{v_3(\phi_{30}, t) - v_2(\phi_{30}, t)}, \quad \phi_{30}(t^*) = \phi_3^1(t^*, 0), \quad t \in [t^*, t^* + \delta + \delta_2/2),
\end{aligned}$$

možemo uvesti veličinu τ_2 definisan sa

$$\tau_2 = \frac{\phi_{20}(t) - \phi_{30}(t)}{\varepsilon}.$$

Ako dalje stavimo

$$\begin{aligned}\phi_{[2]t}^{10} &= f'(v(x_{[2]} + \varepsilon^\mu))t + x_{[2]} + \varepsilon^\mu, \\ \phi_{[2]t}^{20} &= f'(v(x_{[2]} - \varepsilon^\mu))t + x_{[2]} - \varepsilon^\mu, \quad t \in [t^*, t^* + \delta + \delta_2/2),\end{aligned}$$

imamo veličinu $\tau_{[2]}$ datu sa:

$$\tau_{[2]} = \frac{\phi_{[2]t}^{10}(t) - \phi_{[2]t}^{20}(t)}{\varepsilon}.$$

Funkcije $v_i(x, t)$, $i = 0, 2, 3, \dots, n$ su rješenja Cauchyevih problema (169) dok $v_{0[2]}(x, t)$ i $v_{1[2]}(x, t)$ zadovoljavaju, respektivno:

$$\begin{aligned}v_{0[2]t} + f'(v_{0[2]})v_{0[2]x} &= 0, \\ v_{0[2]}(x, 0) &= v(x), \quad t \in [t^*, t_3^*), \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{1[2]t} + f'(v_{1[2]})v_{1[2]x} &= 0, \\ v_{1[2]}(x, 0) &= v(x), \quad t \in [t^*, t_3^*), \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Funkcija $U_{1[2]}(x_0^1(x, t, \tau^1), \rho_1, t)$ je analogna funkciji $U_1(x_0^1, \rho_1, t)$ iz (167) sa jasnom razlikom u indeksiranju. Slično, ako izmijenimo notaciju na očigledan način vidimo da su funkcije $\phi_{[2]}^1(t, \tau_{[2]})$ i $\phi_{[2]}^2(t, \tau_{[2]})$ analogne funkcijama $\phi_1^1(t, \tau^1)$ i $\phi_1^2(t, \tau^1)$, respectively, iz (168), dok su funkcije $\phi_2(t, \tau^2)$ i $\phi_3(t, \tau^2)$ analogne funkcijama $\phi_1(t, \tau)$ i $\phi_2(t, \tau)$ iz (161) i (162).

Funkcije ϕ_i , $i = 1, 4, 5, \dots, n$, su sve nezavisne od ε i date su Rankine-Hugoniot uslovima:

$$\begin{aligned}\phi_{it} &= \frac{f(v_i(\phi_i, t)) - f(v_{i-1}(\phi_i, t))}{v_i(\phi_i, t) - v_{i-1}(\phi_i, t)}, \\ \phi_{1t} &= \frac{f(v_{0[1]}(\phi_1, t)) - f(v_0(\phi_1))}{v_{0[1]}(\phi_1, t) - v_0(\phi_1, t)}, \quad \phi_i(t^*) = \phi_i^1(t^*, 0), \quad i = 1, 4, 5, \dots, n.\end{aligned}$$

Tako smo opisali slabo asimptotska rješenja problema (87), (164) u intervalima $[0, t_2^*)$ i $[t^*, t_3^*)$ funkcijama $u_\varepsilon^{[1]}$ i $u_\varepsilon^{[2]}$, respektivno. Uočimo sada particiju jedinice $\eta(t) \in C_0^1(\mathbf{R}^+)$ vremenske ose koja zadovoljava:

$$\begin{aligned}\eta(t) &\equiv 1, \quad t \leq t^*, \\ \eta(t) &\equiv 0, \quad t \geq t_2^*.\end{aligned}$$

Ako stavimo

$$u_\varepsilon(x, t) = \eta(t)u_\varepsilon^{[1]}(x, t) + (1 - \eta(t))u_\varepsilon^{[2]}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_3^*],$$

i iskoristimo činjenicu da u intervalu (t^*, t_2^*) važi

$$u_\varepsilon^{[1]} = u_\varepsilon^{[2]} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),$$

vidimo da funkcija u_ε daje slabo asimptotsko rješenje problema (87), (164) u intervalu $[0, t_3^*)$. Nastavljajući rekursivno opisanu proceduru dobijamo rješenje na $[0, T]$ za $T \in \mathbb{R}^+$ proizvoljno.

7.4 Opravdanje slabo asimptotskog rješenja

U ovom poglavlju dokazaćemo da je naše slabo asimptotsko rješenje u nekom smislu "blizu" dopustivog slabog rješenja problema (87), (164).

Postojanje i jedinstvenost slabog dopustivog rješenja našeg problema postoji na osnovu teoreme Kružkova (vidi [14], Poglavlje 6).

Podsjetićemo se uslova dopustivosti neophodnih za postojanje i jedinstvenost slabog rješenja razmatranog problema.

Definicija 43. (Olecinik uslov dopustivosti) Kažemo da je slabo rješenje $u(t, x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$, problema (87), (164) dopustivo ako zadovoljava

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_-.$$

u svakoj tački prekida.

Primijetimo da ovakav uslov možemo iskoristiti samo ako je slabo rješenje u razmatranog problema dio po dio neprekidna funkcija za svako fiksirano $t \in \mathbb{R}^+$. U ovom slučaju Definicija 43 je ekvivalentna opštijem uslovu dopustivosti Kružkova (koji je primjenljiv na sve mjerljive funkcije):

Definicija 44. Kažemo da je slabo rješenje $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ problema (87), (164) dopustivo ako važi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \psi \eta(u) + \partial_x \psi q(u)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \eta(u_0(x)) dx \geq 0, \quad (171)$$

gdje $q(u) = \int \eta'(u) f'(u) du$ i $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ je proizvoljna konveksna funkcija.

Koristeći upravo ovu definiciju Kružkov je dokazao teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti dopustivog slabog rješenja.

Dokazaćemo da naše slabo asimptotsko rješenje teži u L^1 smislu dopustivom slabom rješenju problema (87), (164). Po definiciji slabog asimptotskog rješenja za sve $\varphi \in C^\infty([0, T]; C_0^\infty(\mathbb{R}^1))$ važi:

$$\int_{\mathbb{R}} [u_{\varepsilon t} + (f(u_{\varepsilon}))_x] \phi(x, t) dx = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Kako $\mathcal{O}(\varepsilon)$ u sebe uključuje funkcije koje su ograničene po $t \in \mathbb{R}$, integrirajući po t od 0 do T dobijamo:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [u_{\varepsilon t} + (f(u_{\varepsilon}))_x] \phi(x, t) dx dt = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Puštajući sada da $\varepsilon \rightarrow 0$ vidimo da je $u(x, t) = w - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(x, t)$ slabo rješenje problema (87), (164). Iz konstrukcije slabog asimptotskog rješenja vidimo da njegov slabi limit u svakom trenutku može imati najviše konačno tačaka prekidne te da stoga zadovoljava Oleinik uslov dopustivosti odakle slijedi da je zadovoljen uslov dopustivosti Kružkova. Dalje, koristeći Taylorov razvoj u okolini tačke u_{ε} za funkcije $\eta(u)$ i $q(u)$ te činjenicu da je u slabi limit od u_{ε} , dobijamo da važi:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \psi \eta(u_{\varepsilon}) + \partial_x \psi q(u_{\varepsilon})] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \eta(u_0(x)) dx \geq \varepsilon \mathcal{O}(1), \quad (172)$$

gdje je $q(u) = \int \eta'(u) f'(u) du$ i $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ je proizvoljna konveksna funkcija.

Ako sada doslovno ponovimo proceduru iz [14], Theorem 6.2.2, strana 87., dobijamo:

Teorema 45. *Neka u_{ε} i u zadovoljavaju (171) i (172), respektivno. Tada postoji $s > 0$ koje zavisi samo od $[u_0^0, U]$ (interval u kom početni uslov uzima vrijednosti) tako da za svako $t \in [0, T)$ i svako $r > 0$ važi:*

$$\|u(\cdot, t) - u_{\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L^1(|x| < r)} \leq (r + st) \cdot \varepsilon \mathcal{O}(1).$$

Literatura

- [1] V.I.Arnold, *Obiknovenie differencial'nie uravneniya*, Izdatel'stvo "NAUKA", Moskva 1971.
- [2] V. G. Danilov, G. A. Omel'yanov, and V. M. Shelkovich, *Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves*. In: *Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems*, M. V. Karasev, ed., AMS Transl., Ser. 2, Vol. 208, 33–164.
- [3] V. G. Danilov, *Generalized solutions describing singularity interaction*, Int. J. of Math. and Math. Sci. **29** (2002), no. 8, 481–494.
- [4] V. G. Danilov, D. Mitrović, *New Approach to Shock Generation for Conservation Laws. Example: Global Solution to Hopf Equation*, Matematički Vesnik 56 (2004), no. 1-2, 23–46; MR2110734.
- [5] D.Mitrović, *Uniform in time description of initial data transformation approximated by piecewise constant function in the case of one dimensional scalar conservation law with convex nonlinearity*, prihvaćeno za objavljivanje u Mathematica Montisnigri, Podgorica,
- [6] V. G. Danilov, D. Mitrović, *Weak asymptotic of shock wave formation process*, to be published in Journal of Nonlinear Analysis, Methods and Applications (NA4426, www.directscience.com).
- [7] V. G. Danilov, D. Mitrović, *From continuous function to gradient catastrophe in the case of convex scalar conservation law*, preprint.
- [8] O. A. Olcinik, *On uniqueness and stability of the generalized solution to the Cauchy problem for a quasilinear equation*, Uspekhi Mat. Nauk **14** (1959), no. 2, 165–170; English transl. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **23** (1963), 285–290.
- [9] A. Bressan *Hyperbolic System of Conservation Laws* Preprints S.I.S.S.A., Trieste, Italy.
- [10] J.Glim *The interaction of nonlinear hyperbolic waves*. Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 569–590.
- [11] S. N. Kruzhkov *First-order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. **10** (1970), 127–243.



- [12] A. Y. Goritskii, S. N. Kruzhkov, G. A. Ceckin *Partial Differential Equation of the First Order*, Russian edition, Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Moscow, 1999.
- [13] T. P. Liu *The deterministic version of the Glimm scheme*, Comm. Math. Phys., 57 (1975), 135-148.
- [14] C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2000.
- [15] A. M. Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Nauka, Moscow, 1989; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [16] V. G. Danilov and V. M. Shelkovich, *Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation*, Nonlinear Studies 8 (2001), no. 1, 211-245.
- [17] V. G. Danilov, G. A. Omelianov, *Weak asymptotic method for the study of propagation and interaction of infinitely narrow δ solitons*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003(2003), No.90, pp. 1-27, ISSN:1072-6691.
- [18] M. Nedeljkov, *Delta and singular delta locus for one dimensional systems of conservation laws*, to appear in Math. Mod. Appl. Sci.
- [19] J. Lax *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [20] V. P. Maslov, *Operational Methods*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russian); MIR, Moscow, 1976 (In English).
- [21] V. P. Maslov, *Complex WKB-Method in Nonlinear Equations*, Nauka, Moscow, 1977 (In Russian); *The Complex WKB Method for Nonlinear Equations*. I, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1994 (In English).
- [22] J. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley, New York, 1974.
- [23] A. M. Il'in, S. V. Zakharov, *Ot slabogo razriva k gradientnoi katastrofe*, Matematicheskii Zbornik, Tom 192, N°10, Moskva, 2001.



- [24] Rasskazov I.O. *Asymptotics of Solution of a Perturbed Problem on Decay of a Discontinuity*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl.1, 2003, pp. S168-183.



PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

| | |
|----------------------|------------------|
| Ime i prezime autora | Darko Mitrović |
| Godina rođenja | 12.01.1977. |
| E-mail | darkom@ucg.ac.me |

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet

Naslov doktorske disertacije

Formiranje i interakcija singulariteta kod skalarnih zakona održanja sa konveksnom nelinearnošću

Prevod naslova na engleski jezik

Formation and interaction of singularities for scalar conservation laws with convex nonlinearity

Datum odbrane 14.10.2005.

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci¹

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

¹ Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Formation and interaction of singularities for scalar conservation laws with convex nonlinearity

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

mentor: Miloica Jaćimović, redovni profesor
predsjednik komisije: Stevan Pilipović, redovni profesor
član: Oleg Obradović, vanredni profesor

Sažetak *

Tema disertacije je formiranje i interakcija udarnih talasa za skalarni zakon održanja sa konveksnim fluksom. U tu svrhu, razvijen je slabo asimptotski metod koji se zasniva na asimptotici Heavisideove funkcije. Osnovni aparat koji je korišten je teorija distribucija, teorija običnih diferencijalnih jednačina i opšta teorija skalarnih zakona održanja. Disertacija sadrži uvod i dva poglavlja u kojima je na dva načina pristupljeno problemu. Disertacija sadrži potencijal za primjenu na sisteme zakona održanja kao i za druge evolutivne parcijalne diferencijalne jednačine.

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

The topic of the dissertation is the formation and interaction of shock waves for scalar conservation laws with convex flux. For this purpose, a weak asymptotic method has been developed based on the asymptotics of the Heaviside function. Basic tools used in the thesis is distribution theory, the theory of ordinary differential equations and the general theory of scalar conservation laws. The dissertation contains an introduction and two chapters in which there is a two-way approach to the problem. The dissertation contains the potential for applying to systems of maintenance laws as well as for other evolutionary partial differential equations.

Ključne riječi

skalarni zakon održanja, slabo-asimptotski metod, formiranje singulariteta, interakcija singulariteta

Ključne riječi na engleskom jeziku

scalar conservation laws, weak-asymptotic method, formation of singularities, interaction of singularities

Naučna oblast/uža naučna oblast

matematika/parcijalne diferencijalne jednačine

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

mathematics/partial differential equations

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priloži dodatni prostor.

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Formiranje i interakcija singulariteta kod skalarnih zakona održanja sa konveksnom nelinearnošću

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.



Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

U

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.