UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nevena Mijajlović

METODI ZA RJEŠAVANJE KVAZI-VARIJACIONIH NEJEDNAKOSTI

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Podgorica, 2015

UNIVERSITY OF MONTENEGRO

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

Nevena Mijajlović

METHODS FOR SOLVING QUASI-VARIATIONAL INEQUALITIES

-PHD THESIS-

Podgorica, 2015

Podaci i informacije o doktorantu

Ime i prezime: Nevena Mijajlović

Datum i mjesto rođenja: 04.10.1985. godine, Podgorica

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka: Matematika, 2009

Podaci i informacije o mentoru

Ime i prezime: Milojica Jaćimović

Titula: doktor matematičkih nauka

Zvanje: redovni profesor

Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet

Članovi komisije:

Dr Milojica Jaćimović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Vera Kovačević Vujičić, red. prof. FON-a, Univerzitet u Beogradu

Dr Milenko Mosurović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Oleg Obradović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Radoje Šćepanović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Datum odbrane:

4. decembar 2015. godine

Podaci o doktorskoj disertaciji

Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

Naslov disertacije: Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti

Rezime: Cilj ove disertacije je razvoj novih metoda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Neke od klasičnih metoda optimizacije, kao što su metod projekcije gradijenta prvog i drugog reda, proksimalni, ekstra-gradijentni i Njutnov metod prilagođeni su za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Za prva tri metoda izučavane su iterativne i neprekidne varijante.

Za svaki razmatrani metod dati su dovoljni uslovi pod kojima odgovarajući procesi konvergiraju ka rješenju kvazi-varijacione nejednakosti i izvedene su ocjene brzine konvergencije.

Ključne riječi: kvazi-varijacione nejednakosti, metod projekcije gradijenta, metodi višeg reda, proksimalni metod, ekstra-gradijentni metod, Njutnov metod.

Naučna oblast: Matematička analiza

Uža naučna oblast: Metodi optimizacije

UDK broj: 517.97

Information on the PhD thesis

Course of study: Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Montenegro

Thesis title: Methods for solving quasi-variational inequalities

Summary: The goal of this dissertation is to develop new methods for solving quasi-variational inequalities. Some of classical optimization methods such as first and second order gradient projection method, proximal, extra-gradient and Newton's methods are adapted for solving the quasi-variational inequalities. For the first three methods are analyzed iterative and continuous variants.

For every considered method sufficient conditions, under which the corresponding processes converge to the solution of quasi-variational inequalities, are established, and estimates of the convergence rate are obtained.

Key words: quasi-variational inequalities, gradient projection method, methods of high order, proximal method, extra-gradient method, Newton method

Scientific field: Mathematical analysis

Science topic: Methods of optimization

UDC: 517.97

Predgovor

Teorija kvazi-varijacionih nejednakosti se počela razvijati sredinom sedamdesetih godina prošlog vijeka u radovima A. Bensusana i J. L. Lionsa [13]-[15] koji su proučavali teoriju impulsnih upravljanja.

Poslednjih godina, ova teorija počinje da zaokuplja pažnju mnogih matematičara jer nalazi primjenu u modeliranju raznih problema širokog kruga zadataka u teoriji igara (vidjeti [12, 28, 32, 54]), mehanici (vidjeti [10, 16, 43, 51, 52]), ekonomiji (vidjeti [32, 69]), statistici (vidjeti [39]), transportu (vidjeti [18, 26, 37, 36, 61]), biologiji (vidjeti [27]) i drugim sferama života i nauke.

Kvazi-varijacione nejednakosti su generalizacija varijacionih nejednakosti. Dobro je poznato da se varijaciona nejednakost može posmatrati kao neophodan uslov optimalnosti za problem minimizacije funkcije. Kao posledica ove činjenice, mnogi metodi za rješavanje zadataka minimizacije mogu se prilagoditi za rješavanje varijacionih nejednakosti. Kako su metodi za rješavanje zadataka minimizacije dobro izučeni, time je i teorija varijacionih nejednakosti, kao i metodi za njihovo rješavanje detaljno sagledana u literaturi (vidjeti [23, 64] i obimnu bibliografiju navedenu u ovim monografijama). Međutim, to nije slučaj sa kvazi-varijacionim nejednakostima. U ovom trenutku, možemo ukazati samo na nekoliko radova koji se odnose na teoriju egzistencije rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti [38, 47, 50, 54] i metoda za njihovo rješavanje [47, 57, 58]. Razlog je taj što rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti zahtijeva simultano rješavanje varijacionih nejednakosti i rješavanje problema fiksne tačke multifunkcije, pa mnoge poznate tehnike za varijacione nejednakosti nisu pogodne za kvazi-varijacione nejednakosti.

Cilj disertacije je prilagđavanje nekih od poznatih metoda optimizacije za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti.

Izložimo strukturu disertacije. Disertacija se satoji od četiri glave.

U prvoj glavi formalno definišemo problem kvazi-varijacionih nejednakosti kao zadatak određivanja tačke $x_* \in C(x_*)$ koja zadovoljava uslov

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C(x_*), \tag{1}$$

gdje je $C(x) : H \to 2^H$ multifunkcija sa nepraznim, zatvorenim, konveksnim slikama $C(x) \subseteq H$ za svako $x \in H$ i preslikavanje $F : H \to H$. Dajemo takođe pregled osnovnih definicija i teorema koje će biti korišćene u daljem radu. Dokazi teorema 1.2.1, 1.2.2 i 1.2.3 mogu se naći u [64].

Glavni i dobro poznati rezultati o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja varijacionih nejednakosti vezani su za uslove jake monotonosti i Lipšic neprekidnosti preslikavanja F. U teoriji egzistencije kvazi-varijacionih nejednakosti postoji nekoliko generalnih pristupa. Prvi od njih zasniva se na izučavanju uslova pod kojima multifunkcija ima fiksnih tačaka. Razne modifikacije i uopštenja ovih uslova razmatrani su u [10, 23, 38, 50, 54]. U ovoj glavi napomenućemo samo jednu teoremu iz [54] u kojoj su formulisani uslovi koji obezbeđuju egzistenciju rješenja kvazi-varijacione nejednakosti. Drugi pristup, na kome se mogu zasnovati metodi rješavanja kvazi-varijacionih nejednakosti, i koji će nas dakle više interesovati, zasnovan je na preformulaciji problema kvazi-varijacione nejednakosti na problem fiksne tačke neke funkcije. U tu svrhu dokazali smo tvrđenje koje daje potrebne i dovoljne uslove da tačka x_* bude rješenje kvazi-varijacione nejednakosti. Zbog kompletnosti rada i sveobuhvatnog razumijevanja metoda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti preuzeli smo teoremu 1.3.2 iz [50] i teoremu 1.3.3 iz [47] o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja. Ove dvije teoreme se često korsite u dokazima konvergencija kasnije predloženih metoda. Uslov

$$\|\mathcal{P}_{C(x)}(z) - \mathcal{P}_{C(y)}(z)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y, z \in H, \tag{2}$$

gdje je $\mathcal{P}_{C(x)}(z)$ projekcija tačke z na skup $C(x)$ je neki oblik svojstva kontraktivnosti za multifunkciju $C(x)$. Poznatu klasu multifunkcija koje zadovoljavaju ovaj uslov preuzeli smo iz [47]. Ako je $C(x) = C$ tada možemo postaviti $\lambda = 0$ i dobijamo dobro poznato tvrđenje o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja varijacionih nejednakosti, bez obzira na odnos parametra jake monotonosti i Lipšicove konstante preslikavanja F.

Na kraju ove glave konstruišemo nekoliko jednostavnih primjera kvazi-varijacionih nejednakosti kako bismo bolje predstavili složenost problema. Na njima pokazujemo da se teoreme o varijacionim nejednakostima ne mogu jednostavno adaptirati na kvazi-varijacione nejednakosti.

Da bismo objasnili široku primjenu kvazi-varijacionih nejednakosti, u drugoj glavi prezentujemo realne probleme koji mogu biti formulisani i rješavani u okviru teorije kvazi-varijacionih nejednakosti.

Nešova ravnoteža je fundamentalni koncept ravnoteže u nekooperativnoj teoriji igara koja se može predstaviti kao rješenje kvazi-varijacione nejednakosti. U radovima [12, 28, 32, 54, 55, 56] razmatrana je veza između uopštene Nešove igre i kvazi-varijacionih nejednakosti. U prvom paragrafu ove glave izložena je uopštena Nešova igra i njena kvazi-varijaciona formulacija koja je preuzeta iz [54].

Drugi paragraf je posvećen modeliranju transportne mreže u terminima kvazi-varijacionih nejednakosti. Ovaj problem je razmatran u [18, 26, 37, 36, 61], a u ovom radu je korišćena prezentacija iz [26]. Iz pretpostavke da svaki učesnik u saobraćaju, da bi stigao do željene destinacije, bira od svih mogućih maršuta onu koja zahtjeva minimalne troškove, potrebno je odrediti transportnu ravnotežu. Ispostavlja se da se ta ravnoteža može izraziti kao rješenje kvazi-varijacione nejednakosti.

Oligopolistički modeli imaju prirodnu kvazi-varijacionu formulaciju (vidjeti [11, 22, 46, 69]). U trećem paragrafu razmatra se jedan primjer dinamičkog oligopolističkog tržista iz [11]: istu homogenu robu proizvodi nekoliko firmi; svaka firma nastoji da poveća svoj profit rješavajući zadatak optimizacije za određivanje količine proizvodnje i distribucije robe, pod pretpostavkom da znaju proizvodnju i distribuciju ostalih firmi; funkcija proizvodnje zavisi i od vremena i od evaluacije količine robne pošiljke. U [11] je dokazana ekvivalencija ravnoteže za ovo oligopolističko tržiste i rješenja odgovarajuće kvazi-varijacione nejednakosti.

Prve dvije glave ovog rada se odnose na poznate stvari o kvazi-varijacionim nejednakostima i one su izložene u ovoj disertaciji zbog kompletnosti i sveobuhvatnijeg razumijevanja problema.

U trećoj glavi se razmatraju metodi za rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti (1). Pretpostavlja se da je preslikavanje F jako monotono sa parametrom jake monotonosti $\mu > 0$ i Lipšic neprekidno sa Lipšicovom konstantom $L > 0$ i da multifunkcija C zadovoljava uslov (2), pri čemu je $\lambda < \frac{\mu^2}{L^2+L\sqrt{L^2-\mu^2}}$. Na osnovu teorema iz prve glave, pod ovim uslovima kvazi-varijaciona nejednakost (1) ima jedinstveno rješenje. U ovoj glavi se razmatraju različite varijante metoda projekcije gradijenta. Gradijentni metodi predstavljaju jedan od osnovnih pristupa za rješavanje zadataka minimizacije i varijacionih nejednakosti (vidjeti [2, 64]). U prvoj glavi je pokazano da je $x_* \in C(x_*)$ rješenje kvazi-varijacione nejednakosti ako i samo ako je

$$x_* = \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)], \tag{3}$$

gdje je $\alpha > 0$ parametar. Intuitivno je jasno, korak $\mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] - x$ različit je od nule za proizvoljan element $x \in H$, smanjuje se što se više približavamo ka x_* i jednak je nuli u tački x_*. Na osnovu ove činjenice formiramo diferencijalnu jednačinu:

$$x'(t) - x(t) = \mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t)], \quad t \geq 0, \ x(0) = x_0, \tag{4}$$

gdje je $x_0 \in H$ proizvoljna tačka, $\alpha(t) > 0$ parametar metoda. Iz (4) slijedi dinamička interpretacija nepokretne tačke x_* iz (3) kao tačke trajektorije u kojoj je brzina jednaka nuli. Neprekidni metod (4) za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti razmatran je u radu [35] i nije nam poznato da ga je neko ranije koristio za kvazi-varijacione nejednakosti. Kada je $C(x) = C$, ovaj metod se svodi na poznati neprekidni metod projekcije gradijenta za rješavanje zadataka minimizacije i varijacionih nejednakosti (vidjeti [2, 34, 64]).

Diskretni analog metoda (4) je

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha_k F(x_k)], \ k \geq 0, \tag{5}$$

gdje je početna tačka $x_0 \in H$ proizvoljno izabrana i $\alpha_k > 0$ je parametar metoda. Ovaj metod je detaljno obrađen u teoriji zadataka minimizacije i varijacionih nejednakosti [2, 17, 20, 23, 64]. U radu [47], Yu. Nesterov koristi ovaj metod za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Zbog važnosti metoda i kompletnosti rada dokaz konvergencije prenosimo u cjelosti.

Da bi se ubrzala konvergencija, u praksi se umjesto (5) može koristiti opštija varijanta metoda projekcije gradijenta:

$$x_{k+1} = (1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \quad k = 0, 1, \ldots$$

gdje se parametri $0 < a_k \leq 1, \alpha > 0$ mogu birati na različite načine a $x_0 \in H$ je početna aproksimacija. U trećem paragrafu treće glave dati su uslovi pod kojima metod konvergira ka jedinstvenom rješenju i izvedena je ocjena brzine konvergencije. Ranije ovaj metod, koliko je nama poznato, nije korišćen za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti (1).

U disertaciji je prvi put formulisan i metod drugog reda

$$\begin{aligned} u_k &= (1 - b_k)x_k + b_k \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(u_k)}[u_k - \alpha F(u_k)], \end{aligned}$$

gdje su $0 \leq a_k, b_k \leq 1$ za svako $k \geq 0$ i $\alpha > 0$ parametri metoda i $x_0 \in H$ je proizvoljna početna aproksimacija. Na osnovu ovog metoda, slijedeći [49], konstruisan je i odgovarajući metod trećeg reda:

$$\begin{aligned} u_k &= (1 - c_k)x_k + c_k \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \\ w_k &= (1 - b_k)x_k + b_k \mathcal{P}_{C(u_k)}[u_k - \alpha F(u_k)]. \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(w_k)}[w_k - \alpha F(w_k)], \end{aligned}$$

pri čemu su $0 \leq a_k, b_k, c_k \leq 1$ za svako $k \geq 0$ i $\alpha > 0$ parametri metoda. Dio dokaza konvergencije metoda trećeg reda se poklapa sa dokazom konvergencije metoda drugog reda pa zbog toga je samo detaljno izložen dokaz konvergencije metoda trećeg reda.

Kao što smo već napomenuli, uslov (2) koji uz jaku monotonost i Lipšic neprekidnost preslikavanja F, garantuje egzistenciju i jedinstvenost rješenja nije lako provjerljiv. Klasa problema za koju znamo jasne uslove egzistencije i jedinstvenosti rješenja i konvergencije metoda je klasa kvazi-varijacionih nejednakosti za koje je multifunkcija C definisana sa

$$C(x) = c(x) + C_0, \tag{6}$$

gdje je c Lipšic neprekidna funkcija i C_0 neprazan, konveksan, zatvoren skup u Hilbertovom prostoru H. U četvrtoj glavi razmatramo metode za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti gdje je C definisano kao u (6). Ova klasa kvazi-varijacionih nejedankosti je najčešće razmatrana u literaturi.

Iterativni i neprekidni procesi metoda projekcije gradijenta koji su definisani u prethodnoj glavi razmatrani su i u ovom specijalnom slučaju i izvedene su nove ocjene brzine konvergencije. Dobijene ocjene ukazuju na šire mogućnosti izbora parametra metoda nego u opštem slučaju. Na osnovu izloženog neprekidnog procesa (4) moguće je konstruisati različite iterativne metode, koji predstavljaju odgovarajuće diskretne analoge. Jedan takav proces je konstruisan u [57]:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} + x_{k+1} - c(x_{k+1}) = \mathcal{P}_{C_0}\big[x_{k+1} - c(x_{k+1}) - \alpha_k F(x_{k+1})\big], \quad k = 0, 1, \ldots$$

gdje je element $x_0 \in H$ zadat proizvoljno, parametri (τ_k) i (α_k) su nizovi pozitivnih brojeva. Uslovi konvergencije izvedeni u ovoj disertaciji različiti su od uslova iz rada [57].

U drugom paragrafu ove glave navedeni su metodi projekcije gradijenta drugog reda. Iterativni proces, koji je izložen u radu [8], definisan je sa

$$x_{k+1} - c(x_{k+1}) = \mathcal{P}_{C_0}\big[x_k - c(x_k) - \alpha_k F(x_k) - \beta_k(x_{k-1} - x_k)\big], \; k = 1, 2, \ldots$$

gdje su nizovi (α_k), (β_k) parametri metoda i $x_0, x_1 \in C_0$ proizvoljne početne tačke. Za $\beta_k = 0$ za svako $k \geq 0$, ovaj metod se svodi na (5). Odgovarajući neprekidni proces

$$\beta(t)x''(t) + x'(t) + x(t) - c(x(t)) = \mathcal{P}_{C_0}[x(t) - \alpha(t)F(x(t)) - c(x(t))], \quad t \geq 0,$$

koji je predstavljen u radu [7], izložen je u ovoj glavi sa kompletnim dokazom izvođenja ocjene brzine konvergencije.

Treći paragraf ove glave posvećen je proksimalnim metodima za rješavanje specijalnih oblika kvazi-varijacionih nejednakosti. U osnovi ovih metoda nalazi se pojam proksimalnog operatora koji svakoj tački $x \in H$ i broju $\alpha > 0$ pridružuje odgovarajuće rješenje $pr(x, \alpha)$ takvo da važi

$$\langle pr(x,\alpha) - x + \alpha F(pr(x,\alpha)), z - pr(x,\alpha)\rangle \geq 0, \quad \forall z \in C(x).$$

Odavde, koristeći karakteristično svojstvo projekcije tačke na skup, dobijamo vezu između proksimalnog operatora i operatora projektovanja:

$$pr(x,\alpha) = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(pr(x,\alpha))], \quad \forall x \in H, \quad \alpha > 0.$$

Na osnovu ove veze, konstruisani su iterativni i neprekidni procesi proksimalnog metoda i izvedene su ocjene brzine konvergencije ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti [44]. Inače, proksimalni metod za konveksne zadatke minimizacije razmatran je [1, 2, 59, 64]. Nije nam poznato da je neko razmatrao proksimalni metod za kvazi-varijacione nejednakosti.

U četvrtom paragrafu za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti prvi put se razmatra ekstra-gradijentni metod. Ovaj metod je neki oblik uopštenja metoda projekcije gradijenta, koji je prvi razmatrao G. M. Korpelevič u radu [42]. U metodu se u svakoj iteraciji izvršavaju po dvije projekcije. U prvom koraku u svakoj iteraciji računa se pomoćna aproksimacija, koja ima prognozerski (ekstrapolacioni) karakter. Metod je dat sa

$$\begin{aligned} \bar{x_k} &= \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \\ x_{k+1} &= \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(\bar{x_k})], \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Formulisana je i dokazana teorema u kojoj su dati uslovi konvergencije ka rješenju kvazi-varijacione nejednakosti i izvedena je ocjena brzine konvergencije. Ekstra-gradijentni metodi za rješavanje zadataka minimizacije i varijacionih nejednakosti razmatrani su u [4, 6, 19, 29, 40, 42, 62, 63].

Sve ocjene brzine konvergencije dobijene u prethodnim paragrafima su linearne. U petom paragrafu se razmatra Njutnov metod za koji je pokazano, da pod određenim uslovima ima kvadratnu brzinu konvergencije. Njutnov metod generiše niz (x_k), gdje je x_0 početna aproksimacija i x_{k+1} je rješenje kvazi-varijacione nejednakosti dobijene linearizacijom preslikavanja F u trenutnoj iteraciji x_k, to jest, x_{k+1} je takvo da važi $x_{k+1} - c(x_{k+1}) \in C_0$ i

$$\langle F(x_k) + \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k), z - x_{k+1}\rangle \geq 0, \tag{7}$$

za svako z za koje je $z - c(x_{k+1}) \in C_0$. Njutnov metod za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti se primijenjuje u slučajevima kada nije teško računati izvodno preslikavanje $\nabla F(x)$ i kada se pomoćni zadatak (7) relativno jednostavno rješava. Prednost Njutnovog metoda je visoka brzina konvergencije. Zbog toga, iako je teže odrediti svaku iteraciju nego kod ostalih metoda, može se desiti da ukupni obim rada neophodan za rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti sa traženom tačnošću bude manji nego kod jednostavnijih metoda.

Niz generisan Njutnovim metodom kvadratno konvergira ka rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti ako je zadata tačka x_0 izabrana dovoljno blizu x_*. Zbog toga se ovaj metod, kao i kod zadataka minimizacije, koristi u završnoj etapi traženja rješenja kvazi-varijacione nejednakosti, kada se pomoću drugih sporijih, manje zahtjevnih metoda nađe neka aproksimacija koja je dovoljno blizu rješenju. Napomenimo da je lokalna varijanta Njutnovog metoda za kvazi-varijacione nejednakosti razmatrana samo u [53], a metod i uslovi konvergencije se značajno razlikuju od onih dobijenih u ovoj disertaciji.

Cjelokupni materijal je podijeljen na glave, glave su podijeljene na paragrafe a neki paragrafi su podijeljeni na podparagrafe. Oznaku paragrafa čine dva broja. Prvi ukazuje na glavu, a drugi na redni broj paragrafa u toj glavi. Podparagraf je označen sa tri broja, od kojih prva dva određuju broj paragrafa (sadrži oznaku glave kome paragraf pripada) a treći je broj podparagrafa. Numeracija formula, teorema, lema, definicija je standardna.

Tokom doktorskih studija i rada na izradi doktorske disertacije, u časopisu koji se nalazi na SCI/SCIE listi, objavljeni su sljedeći radovi

- **N. Mijajlović**, M. Jaćimović, *Proximal methods for solving quasi-variational inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 55, No. 12, pp. 1981–1985, (2015)

- A. S. Antipin, **N. Mijajlović**, M. Jaćimović, *A Second-Order Iterative Method for Solving Quasi-Variational Inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 53, No. 3, pp. 258–264, (2013)

- A. S. Antipin, **N. Mijajlović**, M. Jaćimović, *A Second-Order Continuous Method for Solving Quasi-Variational Inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 51, No. 11, pp. 1856–1863, (2011)

čiji su rezultati korišćeni prilikom izrade ove teze.

Na kraju se iskreno zahvaljujem profesorima Milojici Jaćimoviću i Anatoliju S. Antipinu na postavljenim problemima, pomoći i savjetima pruženim u toku izrade ove disertacije.

Izvod iz teze

Kvazi-varijacione nejednakosti predstavljaju značajna uopštenja varijacionih nejednakosti. Poznato je da se varijacione nejednakosti mogu posmatrati kao neophodni uslovi optimalnosti za probleme minimizacije funkcija. Kao posledica ove činjenice, mnogi metodi za rješavanje zadataka minimizacije prilagođeni su za rješavanje varijacionih nejednakosti. S druge strane, rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti zahtijeva istovremeno rješavanje varijacionih nejednakosti i rješavanje problema fiksne tačke multifunkcije, pa mnoge poznate tehnike za varijacione nejednakosti nisu pogodne za kvazi-varijacione nejednakosti. U ovoj disertaciji neki od metoda optimizacije su adaptirani za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti.

Predloženi su iterativni i neprekidni procesi projekcije gradijenta i dokazana je njihova konvergencija. Metod projekcije gradijenta je uopšten i na osnovu toga su formirani odgovarajući metodi prvog, drugog i trećeg reda, čija konvergencija je, takođe dokazana u opštem slučaju kvazi-varijacionih nejednakosti.

Uslovi koji garantuje egzistenciju i jedinstvenost rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti u opštem slučaju nisu lako provjerljivi, pa se u litaraturi razmatra jedan specijalni oblik kvazi-varijacionih nejednakosti. U ovom specijalnom slučaju, dokazana je konvergencija metoda projekcije gradijenta prvog i drugog reda, proksimalnog, ekstra-gradijentnog i Njutnovog metoda ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti. Za prva tri metoda razmatrani su iterativni i neprekidni procesi, a za preostala dva samo iterativni procesi.

Za svaki razmatrani metod dati su dovoljni uslovi pod kojima odgovarajući procesi konvergiraju ka rješenju kvazi-varijacione nejednakosti i izvedene su ocjene brzine konvergencije.

Abstract

Quasi-variational inequalities are a notable generalization of the variational inequalities. It is well known that variational inequality can be interpreted as a necessary optimality condition in the problem of minimizing the function. As a result, many methods for solving optimization problems can be adapted for solving variational inequalities. On the other hand, solving quasi-variational inequality requires that the corresponding variational inequality be solved concurrently with the calculation of a fixed point of the multifunction. This implies that methods for solving variational inequalities cannot be used for solving quasi-variational inequalities. In this dissertation, some optimization methods are adapted for solving the quasi-variational inequalities.

There are proposed iterative and continuous processes of gradient projection and proved their convergence. Gradient projection method is generalized and based on that, the appropriate methods of the first, second and third order are formed, whose convergence is, also proved in the general case of quasi-variational inequalities.

The conditions that guarantee the existence and uniqueness of solutions of quasi-variational inequalities, in general, are not easily verifiable, and in the literature deals with one special form of the quasi-variational inequalities. In this special case, the convergence to the unique solution of quasi-variational inequalities of gradient projection method of first and second order, proximal, extra-gradient and Newton's method is investigated. For the first three methods are discussed iterative and continuous process, and for other two iterative processes.

For every considered method sufficient conditions, under which the corresponding processes converge to the solution of quasi-variational inequalities, are established, and estimates of the convergence rate are obtained.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi ćemo formalno definisati problem kvazi-varijacionih nejednakosti. Pored toga navešćemo poznate definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem tekstu, kao i neke teoreme koje se odnose na egzistenciju rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti. Da bismo bolje predstavili složenost problema, na kraju ove glave konstruisaćemo nekoliko jednostavnih primjera kvazi-varijacionih nejednakosti i na njima pokazati da se teoreme o varijacionim nejednakostima ne mogu jednostavno primijeniti na kvazi-varijacione nejednakosti.

1.1 Formulacija problema

Neka je H Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|$ i skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Za dati operator $F : H \to H$ razmatramo sljedeću kvazi-varijacionu nejednakost: naći $x_* \in C(x_*)$ takvo da

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C(x_*), \tag{1.1}$$

gdje je $C : H \to 2^H$ multifunkcija sa nepraznim, zatvorenim i konveksnim slikama $C(x) \subseteq H$, za svako $x \in H$.

Ako $C(x)$ ne zavisi od x, to jest, ako je za svako $x \in H$, $C(x) = C$ za neki zatvoren konveksan skup $C \subseteq H$, tada kvazi-varijaciona nejednakost postaje varijaciona nejednakost. Dobro je poznato, ako je $F(x) = f'(x)$ potencijani operator, tada se varijaciona nejednakost može posmatrati kao neophodan uslov optimalnosti za problem minimizacije funkcije f na skupu C. Zadaci minimizacije su dosta obrađivani u literaturi i za njihovo rješavanje su razvijeni mnogi metodi. Većina tih metoda je adaptirana i za rješavanje varijacionih nejednakosti.

Ako je $F(x)$ identički jednako nuli u (1.1), tada se kvazi-varijaciona nejednakost svodi na nalaženje vektora x koji zadovoljava uslov $x \in C(x)$. Takav vektor se naziva fiksnom tačkom multifunkcije C. Dakle, rješavanjem kvazi-varijacione nejednakosti mi istovremeno rješavamo dva problema: rješavamo varijacionu nejednakost i problem nalaženja fiksne tačke multifunkcije C. Zbog toga se mnogi metodi za rješavanje varijacionih nejednakosti ne mogu primijeniti na kvazi-varijacione nejednakosti.

1.2 Osnovne definicije i teoreme

Radi kompeltnosti rada, navešćemo poznate definicije i teoreme koje će biti korišćene u dokazima tvrđenja koja slijede. Sve navedene definicije i dokazi teorema koje navodimo mogu se pronaći u monografiji [64] i radovima [21, 47, 50].

Definicija 1.2.1 *Za preslikavanje $F : H \to H$ kažemo da je*

(a) jako monotono na H ako postoji konstanta $\mu \geq 0$ takva da je

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in H. \tag{1.2}$$

(b) Lipšic neprekidno na H ako postoji konstanta $L > 0$ takva da je

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

Konstanta μ se naziva parametar jake monotonosti preslikavanja F. Ako je $\mu = 0$, kažemo da je F monotono preslikavanje. U radu ćemo uglavnom pretpostavljati da je $\mu > 0$. Konstanta L se naziva Lipšicova konstanta preslikavanja F. Iz definicije se lako vidi da uvijek važi

$$\mu\|x - y\|^2 \leq \langle F(x) - F(y), x - y\rangle \leq L\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in H,$$

odakle slijedi da je $\mu \leq L$.

Teorema 1.2.1 [64] *Neka je C konveksan skup u Hilbertovom prostoru H i preslikavanje $F : C \to H$ jako monotono sa parametrom jake monotonosti μ i Lipšic neprekidno sa Lipšicovom konstantom L. Tada važi*

$$\|F(x) - F(y)\|^2 + \mu L\|x - y\|^2 \leq (L + \mu)\langle F(x) - F(y), x - y\rangle, \; \forall x, y \in C.$$

Teorema 1.2.2 [64] *Neka je C konveksan skup sa nepraznom unutrašnošću i $F : C \to H$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje. F je jako monotono na C ako i samo ako postoji konstanta $\mu > 0$ takva da je*

$$\langle \nabla F(x)\xi, \xi \rangle \geq \mu \|\xi\|^2$$

za svako $x \in C$ i za svako $\xi \in H$.

Pri opisu metoda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti koristićemo svojstva operatora projektovanja pa ih zato navodimo.

Definicija 1.2.2 *Neka je C neki skup iz prostora H. Projekcija tačke $x \in H$ na skup C je najbliža tačka $y \in C$ tački x, t.j. to je tačka $y \in C$ takva da važi*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Projekciju tačke x na skup C označavaćemo sa $\mathcal{P}_C(x) = y$. Pošto je $\rho(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ rastojanje tačke x do skupa C, tada iz prethodne definicije slijedi da je

$$\rho(x, C) = \|x - \mathcal{P}_C(x)\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in C, \; \forall x \in H.$$

Ako je $x \in C$ tada je, očigledno, $\mathcal{P}_C(x) = x$. Projekcija na skup ne postoji uvijek. Na primjer, ako je $C = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$ - otvorena jedinična lopta u R^n, tada nijedna tačka $x \notin C$ nema projekciju na taj skup. Ako je skup C zatvoren tada svaka tačka $x \in H$ ima projekciju na skup C, ali ta projekcija ne mora biti jedinstvena. Ipak, za konveksne skupove takva situacija je nemoguća. Navešćemo teoremu koja to tvrdi.

Teorema 1.2.3 [64] *Neka je C konveksan, zatvoren skup iz H. Tada:*

1) *svaka tačka $x \in H$ ima jedinstvenu projekciju na taj skup;*

2) *tačka $y \in C$ je projekcija tačke $x \in H$ na skup C ako i samo ako važi sljedeća nejednakost*

$$\langle y - x, z - y \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C; \tag{1.4}$$

3)

$$|\mathcal{P}_C(x) - \mathcal{P}_C(z)\| \leq \|x - z\|, \; \forall x, z \in H. \tag{1.5}$$

Sljedeća jednostavna lema, koju ćemo često koristiti u daljim razmatranjima, manje je poznata pa ćemo je ovde dokazati.

Lema 1.2.1 *Neka je C konveksan, zatvoren skup u H i funkcija $c : H \to H$. Tada za proizvoljno $x, z \in H$ važi*

$$\mathcal{P}_{c(x)+C}(z) = c(x) + \mathcal{P}_C(z - c(x)).$$

Dokaz. Označimo sa $y' = \mathcal{P}_{c(x)+C}(z)$ i $y = \mathcal{P}_C(z - c(x))$. Kako je y' projekcija tačke z na skup $c(x) + C$, tada iz (1.4) slijedi da je

$$\langle y' - z, u' - y' \rangle \geq 0, \quad \forall u' \in c(x) + C.$$

Kako je $u' \in c(x) + C$ to postoji $u \in C$ takvo da $u' = c(x) + u$. Tada je

$$\langle y' - z, u - y' + c(x) \rangle \geq 0, \quad \forall u \in C.$$

S druge strane je

$$\langle y + c(x) - z, u - y \rangle \geq 0, \quad \forall u \in C.$$

Iz poslednje dvije nejednakosti zaključujemo da je $y' = y + c(x)$, čime je lema dokazana. $\square$

1.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovom paragrafu razmatramo pitanja egzistencije rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti. U teoriji varijacionih nejednakosti ovaj problem je detaljno obrađen. Glavni rezultati egzistencije i jedinstvenosti rješenja varijacione nejednakosti vezani su za uslove jake monotonosti i Lipšic neprekidnosti preslikavanja F. U primjerima koji slijede pokazaćemo da ovi uslovi ne obezbjeđuju egzistenciju rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti.

Teorija egzistencije rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti je i dalje u razvoju. Ipak, postoji nekoliko generalnih pristupa za dobijanje rezultata o egzistenciji. Prvi od njih se zasniva na izučavanju uslova pod kojima multifunkcija ima fiksnih tačaka. Razne modifikacije i uopštenja ovih uslova su razmatrani u [10, 23, 38, 54]. Drugi pristup, na kome se mogu zasnovati metodi rješavanja kvazi-varijacionih nejednakosti, i koji će nas dakle više interesovati, zasnovan je na preformulaciji problema kvazi-varijacione nejednakosti na problem fiksne tačke neke funkcije. U tu svrhu, korisna je sljedeća lema.

Lema 1.3.1 *Neka je $C(x)$ multifunkcija sa nepraznim, konveksanim, zatvorenim slikama $C(x) \subseteq H$ za svako $x \in H$ i $F : H \to H$. x_* je rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1) ako i samo ako važi jednakost*

$$x_* = \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)], \; \forall \alpha > 0. \tag{1.6}$$

Dokaz. Pretpostavimo da važi (1.6). Tada je $x_* \in C(x_*)$. Saglasno (1.5), jednakost (1.6) ekvivalentna je sa nejednakošću

$$\langle x_* - (x_* - \alpha F(x_*)), z - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C(x_*),$$

odnosno $\alpha\langle F(x_*), z - x_* \rangle \geq 0$ za svako $\forall z \in C(x_*)$. Kako prethodna nejednakost važi za svako $\alpha > 0$ dobijamo da važi

$$\langle F(x_*), z - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C(x_*).$$

Time je dokazano da je x_* rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1). Slično se dokazuje i obrnuto tvrđenje. $\square$

Geometrijsko značenje uslova (1.6) je jednostavno: korak duž $F(x_*)$ iz tačke x_* poslije projektovanja na skup $C(x_*)$ je opet u tački x_*.

Ovim smo razmatranje egzistencije rješenja kvazi-varijacione nejednakosti sveli na razmatranje funkcije

$$\Phi_\alpha(x) = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)], \quad x \in dom\ C.$$

Da bi iskoristili jednačinu (1.6) kako bi utvrdili postojanje rješenja kvazi-varijacione nejednakosti, prvo treba obezbijediti neprekidnost preslikavanja Φ_α. Jasno, ovo nije trivijalno pitanje jer i skup na koji se projektuje zavisi od x. U lemi 2.8.2 u [23] su dati potrebni i dovoljni uslovi pod kojima je projekcija $\mathcal{P}_{C(x)}(y)$ neprekidna funkcija od dva argumenta (x, y). Dalje, mogu se iskoristiti poznate teoreme o fiksnim tačkama preslikavanja ili neke topološke metode. Navešćemo jednu teoremu iz [54] koja obezbjeđuje egzistenciju bar jednog rješenja kvazi-varijacione nejednakosti u konačno-dimenzionalnom slučaju.

Teorema 1.3.1 *Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje i neka je $C : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ multifunkcija. Ako postoji kompaktan, konveksan skup $T \subset \mathbb{R}^n$ takav da*

(a) za svako $x \in T$, skup $C(x)$ je neprazan, zatvoren, konveksan podskup od T;

(b) C je neprekidno u svakoj tački iz T,

tada kvazi-varijaciona nejednakost ima rješenje.

Važna osobina kvazi-varijacionih nejednakosti je da skup rješenja, u opštem slučaju, nije povezan, a kamoli da je jednočlan skup. Dobro je poznato u literaturi o varijacionim nejednakostima da ako je C kompaktan i konveksan skup i ako je F monotono preslikavanje, da je skup rješenja varijacione nejednakosti kompaktan i konveksan. Ipak, i u slučaju jake monotonosti preslikavanja F, skup rješenja kvazi-varijacione nejednakosti nije povezan, a posebno ne jednočlan.

Posebnu pažnju posvetićemo teoremama iz [47] i [50] koje daju uslove postojanja jedinstvenog rješenja kvazi-varijacionih nejednakosti. Ova dva tvrdjenja se često koriste u dokazima konvergencija kasnije predloženih metoda.

Teorema 1.3.2 [50] *Pretpostavimo da važi sljedeće:*

(a) Operator F je Lipšic neprekidan i jako monoton na H sa konstantama L i $\mu > 0$, redom;

(b) Postoji konstanta $\lambda \geq 0$ takva da važi

$$\|\mathcal{P}_{C(x)}(z) - \mathcal{P}_{C(y)}(z)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y, z \in H; \tag{1.7}$$

(c) $\lambda + \sqrt{1 - \mu^2/L^2} < 1$.

Tada kvazi-varijaciona nejednakost (1.1) ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. Iz leme 1.3.1 zaključujemo da je kvazi-varijaciona nejednakost (1.1) ekvivalentna sa nalaženjem fiksne tačke preslikavanja

$$\Phi_\alpha(x) = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] : H \to H,$$

za neko $\alpha > 0$. Jasno je da je $\frac{\mu}{L} \leq 1$ i iz definicija Lipšic neprekidnosti i jake monotonosti dobijamo

$$\begin{aligned}
& \|x - \alpha F(x) - (y - \alpha F(y))\|^2 \\
= \; & \|x - y\|^2 - 2\langle F(x) - F(y), x - y\rangle + \alpha^2 \|F(x) - F(y)\|^2 \\
\leq \; & (1 - 2\mu\alpha + L^2\alpha^2)\|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Tada, zbog uslova (b) i činjenice da je projekcija sažimajuće preslikavanje važi

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\alpha(x) - \Phi_\alpha(y)\| &= \|\mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] - \mathcal{P}_{C(y)}[y - \alpha F(y)]\| \\
&\leq \|\mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] - \mathcal{P}_{C(y)}[x - \alpha F(x)]\| \\
&+ \|\mathcal{P}_{C(y)}[x - \alpha F(x)] - \mathcal{P}_{C(y)}[y - \alpha F(y)]\| \\
&\leq \lambda \|x - y\| + \|x - \alpha F(x) - (y - \alpha F(y))\| \\
&\leq \left(\lambda + \sqrt{1 - 2\mu\alpha + L^2\alpha^2}\right) \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Izaberimo $\bar{\alpha} = \frac{\mu}{L^2}$ i postavimo u prethodnu nejednakost. Tada dobijamo

$$\|\Phi_{\bar{\alpha}}(x) - \Phi_{\bar{\alpha}}(y)\| \leq \left(\lambda + \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{L^2}}\right) \|x - y\| \tag{1.8}$$

Preslikavanje $\Phi_{\bar{\alpha}}$ je kontrakcija zbog (c), pa postoji jedinstvena fiksna tačka $x_* \in C(x_*)$, koja je u isto vrijeme i jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1). □

Ako je $C(x) = C$ tada možemo izabrati $\lambda = 0$ u pretpostavci (b). Tada je i pretpostavka (c) zadovoljena. U ovom slučaju dobijamo da postoji jedinstveno rješenje varijacione nejednakosti, bez obzira na odnos parametara μ i L, što je poznato tvrđenje u teoriji varijacionih nejednakosti.

Napomenimo da je pretpostavka (1.7) neki oblik svojstva kontraktivnosti za multifunkciju $C(x)$. U sledećoj lemi daćemo primjer takvog preslikavanja.

Lema 1.3.2 [47] *Neka je funkcija $c(x) : H \to H$ Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom l i neka je C_0 zatvoren, konveksan skup u H. Tada*

$$C(x) = c(x) + C_0$$

zadovoljava uslov (1.7) sa koeficijentom $\lambda = l$.

Dokaz. Na osnovu leme 1.2.1 dobijamo da za proizvoljne x i z iz H važi

$$\mathcal{P}_{C(x)}(z) = c(x) + \mathcal{P}_{C_0}(z - c(x)).$$

Označimo $z_1 = z - c(x)$, $z_2 = z - c(y)$.Tada imamo

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{P}_{C(x)}(z) - \mathcal{P}_{C(y)}(z)\|^2 = \|\mathcal{P}_{c(x)+C_0}(z) - \mathcal{P}_{c(y)+C_0}(z)\|^2 \\
= \ & \|c(x) + \mathcal{P}_{C_0}[z - c(x)] - c(y) - \mathcal{P}_{C_0}[z - c(y)]\|^2 \\
= \ & \big\|z_2 - z_1 - \big(\mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\big)\big\|^2 \\
= \ & \|z_2 - z_1\|^2 - 2\langle z_2 - z_1, \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\rangle + \|\mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\|^2.
\end{aligned}$$

Napomenimo da zbog tvrdjenja 2) iz teoreme 1.2.3 važi

$$\begin{aligned}
& \langle z_2 - z_1, \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\rangle \\
= \ & \langle z_2 - \mathcal{P}_{C_0}(z_2) + \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - z_1, \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\rangle \\
\geq \ & \langle \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1) + \mathcal{P}_{C_0}(z_1) - z_1, \mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\rangle \\
\geq \ & \|\mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\|^2.
\end{aligned}$$

Konačno, dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_{C(x)}(z) - \mathcal{P}_{C(y)}(z)\|^2 & \leq \|z_2 - z_1\|^2 - \|\mathcal{P}_{C_0}(z_2) - \mathcal{P}_{C_0}(z_1)\|^2 \\
& \leq \|z_2 - z_1\|^2 = \|c(x) - c(y)\|^2 \\
& \leq l^2\|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

čime je lema dokazana. □

Uslov *(c)* iz teoreme 1.3.2 je oslabio Yu. Nesterov u [47]. Radi kompletnosti rada izlažemo taj rezultat.

Za problem (1.1) uvodimo relaksacioni operator $T(x) = x_*(C(x))$. Kada je operator F jako monoton tada je operator T potpuno definisan sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} T(x) &\in C(x), \\ \langle F(T(x)), y - T(x)\rangle &\geq 0 \quad \forall y \in C(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jasno je da je rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1) fiksna tačka operatora

$$x_* = T(x_*).$$

Teorema 1.3.3 [47] *Neka je operator F Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom $L > 0$ i jako monoton sa parametrom jake monotonosti $\mu > 0$. Pretpostavimo da postoji $\lambda \geq 0$ takvo da*

$$\|\mathcal{P}_{C(x)}(z) - \mathcal{P}_{C(y)}(z)\| \leq \lambda\|x - y\|, \quad \forall x, y, z \in H. \tag{1.10}$$

Tada je operator $T(x)$ Lipšic neprekidan sa konstantom $\lambda L/\mu$.

Dokaz. Fiksirajmo dvije proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in H$. Označimo

$$T_i = T(x_i), \quad F_i = F(x_i), \quad C_i = C(x_i), \quad i = 1, 2.$$

Fiksirajmo $\alpha > 0$. Po definiciji,

$$T_1 = \mathcal{P}_{C_1}(T_1 - \alpha F_1).$$

Označimo $y_2 = \mathcal{P}_{C_2}(T_1 - \alpha F_1)$. Zbog uslova (1.10) imamo

$$\|y_2 - T_1\| \leq \lambda\|x_1 - x_2\|. \tag{1.11}$$

S druge strane, $\langle y_2 - (T_1 - \alpha F_1), T_2 - y_2\rangle \geq 0$. Odavde dobijamo

$$\begin{aligned} \langle y_2 - T_1, T_2 - y_2\rangle &\geq \alpha\langle F_1, y_2 - T_2\rangle = \alpha\langle F_1, y_2 - T_1\rangle + \alpha\langle F_1, T_1 - T_2\rangle \\ &\geq \alpha\langle F_1, y_2 - T_1\rangle + \alpha\langle F_2, T_1 - T_2\rangle + \alpha\mu\|T_1 - T_2\|^2 \\ &\geq \alpha\langle F_1 - F_2, y_2 - T_1\rangle + \alpha\mu\|T_1 - T_2\|^2. \end{aligned}$$

Tada slijedi

$$\begin{aligned} \alpha\mu\|T_1 - T_2\|^2 &\leq \alpha\langle F_1 - F_2, T_1 - y_2\rangle + \langle y_2 - T_1, T_2 - y_2\rangle \\ &\leq \alpha\langle F_1 - F_2, T_1 - y_2\rangle + \langle y_2 - T_1, T_2 - T_1\rangle \\ &\leq (1 + \alpha L) \cdot \|T_1 - T_2\| \cdot \|y_2 - T_1\|. \end{aligned}$$

Uvrstimo ocjenu (1.11) u prethodnu nejednakost. Dobijamo

$$\|T_1 - T_2\| \leq \frac{1+\alpha L}{\alpha} \frac{\lambda}{\mu} \|x_1 - x_2\|$$

Ova nejednakost je ispunjena za proizvoljno $\alpha > 0$, pa za veliko α važi

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \frac{\lambda L}{\mu} \|x_1 - x_2\|,$$

tj. operator T je Lipšic neprekidan sa konstantom $\lambda L/\mu$. Ovim je teorema dokazana. □

Kao posledicu prethodnog razmatranja dobijamo sljedeći rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja kvazi-varijacione nejednakosti.

Posljedica 1.3.1 [47] *Ako je $\lambda < \frac{\mu}{L}$ tada postoji jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1).*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je operator T Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom $\lambda L/\mu$. Kako je $\lambda < \frac{\mu}{L}$ to dobijamo da je Lipšicova konstanta operatora T manja od 1, odnosno, operator T je kontrakcija. Dakle, postoji jedinstvena fiksna tačka x_* takva da

$$T(x_*) = x_*,$$

a to je ujedno i rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (1.1), kao što smo ranije napomenuli. □

Navedimo par jednostavnih primjera kvazi-varijacionih nejednakosti. Svuda ćemo pretpostaviti da je data funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i multifunkcija $C : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$.

Primjer 1 *Neka je $F(x) = x$ i $C(x) = \{x\}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.*

Funkcija F zadovoljava uslove jake monotonosti i Lipšic neprekidnosti, sa parametrima $\mu = 1$ i $L = 1$. Direktnom provjerom zaključujemo da kvazi-varijaciona nejednakost ima beskonačno mnogo rješenja. Zaista, za svako $x \in \{x\}$ važi $\langle x, y - x\rangle \geq 0$, $\forall y \in \{x\}$.

Primjer 2 *Neka je $F(x) = x$ i $C(x) = [x, x+1]$, za svako $x \in \mathbb{R}_+$.*

Funkcija F je ista kao u prethodnom primjeru pa važi $\mu = 1$ i $L = 1$. Multifunkciju C možemo predstaviti kao $C(x) = x + [0, 1]$, za $x \in \mathbb{R}_+$, ili koristeći oznake iz leme 1.3.2 imamo da je $\mathrm{c}(x) = x$ i $C_0 = [0, 1]$. Funkcija c je, takodje, Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom $l = 1$ i skup C_0 je zatvoren i konveksan. Ipak kvazi-varijaciona nejednakost ima beskonačno mnogo resenja. Zadovoljeni su svi uslovi posledice (1.3.1), osim uslova $l < \frac{\mu}{L}$, koji je neophodan za jedinstvenost rješenja.

Primjer 3 *Neka je* $F(x) = x$ *i* $C(x) = [x-1, x]$, *za svako* $x \geq 1$.

U ovom slučaju kvazi-varijaciona nejednakost nema rješenja.

Primjer 4 *Neka je* $F(x) = x$ *i* $C(x) = [\frac{x}{2}, \frac{x+2}{2}]$, *za svako* $x \in [0, 2]$.

Kao što smo već rekli, funkcija F je jako monotona sa konstantom $\mu = 1$ i Lipšic neprekidna sa konstantom $L = 1$. Multifunkciju $C(x)$ možemo zapisati u obliku $C(x) = c(x) + C_0$, gdje je $c(x) = \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$ i $C_0 = [0, 1]$. Jasno je da je funkcija c Lipšic neprekidna sa konstantom $l = \frac{1}{2}$ a skup C_0 je konveksan i zatvoren u $\mathbb{R}$. Dakle, ispunjeni su uslovi leme 1.3.2 pa kvazi-varijaciona nejednakost ima jedinstveno rješenje $x_* = 0$.

Primjer 5 *Neka je* $F(x) = x$ *i*

$$C(x) = \begin{cases} [1/2, 1], & ako \;\; x \in [0, 1/2) \\ [0, 1]\,, & ako \;\; x = 1/2 \\ [0, 1/2]\,, & ako \;\; x \in (1/2, 1] \end{cases} .$$

Multifunkcija C ima jedinstvenu fiksnu tačku $1/2$, ali to nije rješenje kvazi-varijacione nejednakosti.

Glava 2

Primjeri kvazi-varijacionih nejednakosti

Kvazi-varijacione nejednakosti su veoma moćno sredstvo za rješavanje kompleksnih problema ravnoteže u teoriji igara, inžinjeringu, ekonomiji i mnogim drugim oblastima. Vezu između uopštene Nešove igre i kvazi-varijacionih nejednakosti prvi je prepoznao Bensusan [12] 1974. godine proučavajući ove probleme sa kvadratnim funkcionalima u Hilbertovom prostoru. Harker [28] je razmatrao ove probleme u Euklidovom prostoru. Pang i Fukušima [54] su primijenili te rezultate da bi formulisali nekooperativnu igru sa više lidera u terminima uopštene Nešove igre, koja se pod određenim pretpostavkama može izraziti kao kvazi-varijaciona nejednakost. Kočvara i Otrata [41] su se bavili primijenom kvazi-varijacionih njednakosti u inžinjerstvu. Robinson [55, 56] je diskutovao primjenu uopštene Nešove igre na modele igre kojima se opisuje borba sa dva učesnika. Bleimer i Bovi [18] su razmatrali kvazi-varijacionu formulaciju problema dinamičkog saobraćaja, a takođe u radovima [37, 61] može se vidjeti kako se ravnoteža u transportnoj mreži izražava kao rješenje kvazi-varijacione nejednakosti. Vei i Smirs [69] su formulisali jedan oligopolistički model u energetici u terminima kvazi-varijacionih nejednakosti. Primjene kvazi-varijacionih nejednakosti na neke ekonomske i finansijske modele mogu se naći u [32, 67]. Kvazi-varijacione nejednakosti imaju i široku primjenu u mehanici [10, 16, 43], statistici [39], bilogiji [27] i drugim oblastima.

Da bismo objasnili široku primjenu kvazi-varijacionih nejednakosti, u ovoj glavi prezentovaćemo neke poznate probleme koji mogu biti formulisani i rješavani u okviru teorije kvazi-varijacionih nejednakosti.

2.1 Uopštena Nešova igra

Fundamentalni koncept ravnoteže u nekooperativnoj teoriji igara je uveo Džon Neš, dobitnik Nobelove nagrade za Ekonomiju 1994. godine za taj doprinos. Određivanje Nešove ravnoteže može se svesti na rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti [12, 23, 28, 54]. U ovom paragrafu objasnićemo taj pristup određivanja Nešove ravnoteže.

Uopštenu Nešovu igru sa N igrača možemo definisati na sljedeći način. Za $i = 1, \dots, N$, neka je $C^i : \mathbb{R}^{n_{-i}} \to \mathbb{R}^{n_i}$ dato skupovno preslikavanje, gdje je svako n_i pozitivan cijeli broj,

$$n \equiv \sum_{i=1}^{N} n_i \quad \text{i} \quad n_{-i} \equiv n - n_i;$$

tako da za svako $x^{-i} \in \mathbb{R}^{n_{-i}}$, $C^i(x^{-i})$ je podskup od $\mathbb{R}^{n_i}$ i predstavlja skup strategija igrača i. Napišimo vektor $x \in \mathbb{R}^n$ u obliku

$$x \equiv (x^i)_{i=1}^N \quad \text{gdje svako} \quad x^i \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Pretpostavimo da se $C^i(x^{-i})$ može predstaviti pomoću konačnih konveksnih nejednakosti. Da bi opisali tu reprezentaciju i problem svakog igrača pretpostavimo da su date funkcije $g^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$, $h^i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{l_i}$ i $\Theta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdje su m_i i l_i pozitivni cijeli brojevi. Za svako $i = 1, \dots, N$ formirajmo sljedeće pretpostavke o konveksnosti:

- svaka funkcija h^i_j je neprekidno diferencijabilna i konveksna na $\mathbb{R}^{n_i}$, za svako $j = 1, \dots, l_i$;
- za svako $x^{-i} \in \mathbb{R}^{n_{-i}}$, funkcije $\Theta_i(x^{-i}, \cdot)$ i $g^i_j(x^{-i}, \cdot)$ su neprekidno diferencijabilne i konveksne po argumentu x^i, za svako $j = 1 \dots, m_i$.

Funkcije g^i i h^i se razlikuju po svojim argumentima: g^i zavisi od vektora $x \in \mathbb{R}^n$, dok h^i zavisi samo od podvektora x^i. Ova razlika je motivisana primjenama uopštene Nešove igre, gdje je vektor x^i vektor strategija igrača i, a x predstavlja vektor strategija svih N igrača koji učestvuju i igri.

Skup strategija i-tog igrača predstavimo na sljedeći način

$$C^i(x^{-i}) \equiv \{x^i \in \mathbb{R}^{n_i} : g^i(x) \leq 0, \ h^i(x^i) \leq 0\}.$$

Zbog pretpostavke o konveksnosti funkcija g^i i h^i jasno je da je skup $C^i(x^{-i})$ zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^{n_i}$. Primijetimo da skup strategija i-tog igrača formiramo na dva načina: prvo, taj skup zavisi od strategija svih igrača $g^i(x) \leq 0$ i drugo, zavisi od sopstvene strategije $h^i(x^i) \leq 0$.

Uopštena Nešova igra se sastoji u nalaženju n-torke $x_* \equiv (x^{*,i}) \in \mathbb{R}^n$, koja se naziva uopštena Nešova ravnoteža, takve da za svako $i = 1, \ldots, N$, $x^{*,i}$ je optimalno rješenje konveksnog problema optimizacije po promjenljivoj x^i gdje je x^{-i} fiksirano u $x^{*,-i}$:

$$\begin{aligned} \Theta_i(x^{*,-i}, x^i) &\longrightarrow \min \\ x^i &\in C^i(x^{*,-i}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definišimo

$$C(x) \equiv \prod_{i=1}^{N} C^i(x^{-i}) \quad \text{za} \quad x \equiv (x^i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^n$$

i

$$F(x) = (\nabla_{x^i} \Theta_i(x))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^n.$$

Sada problem (2.1) možemo napisati na sljedeći način $x_* \in C(x_*)$ i

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C(x_*).$$

Dakle, dobijamo da je x_* rješenje uopštene Nešove igre ako i samo ako je rješenje kvazi-varijacione nejednakosti. Uopštena Nešova igra, a samim tim i kvazi-varijacione nejednakosti, imaju široku primjenu u raznim oblastima.

Harker je u radu [28] konstruisao primjer uopštene Nešove igre i razmatrao odnos između varijacione i kvazi-varijacione formulacije tog problema. Pokazao je da odgovarajuća varijaciona nejednakost ima jedinstveno rješenje, dok skup rješenja odgovarajuće kvazi-varijacione nejednakosti čini tačka koja je rješenje varijacione nejednakosti i sve tačke sa neke duži. Dakle, svodjenjem uopštene Nešove igre na varijacionu nejednakost "preskačemo" određena rješenja. Traženje uopštene Nešove ravnoteže ekvivalentno je rješavanju odgovarajuće kvazi-varijacione nejednakosti.

Motivisan tim primjerom, Harker je formulisao i dokazao sljedeću teoremu o odnosu rješenja varijacione i kvazi varijacione nejednakosti.

Teorema 2.1.1 ([28]) *Neka su date funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i multifunkcija $C : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Pretpostavimo da postoji neprazan, kompaktan, konveksan skup Γ takav da*

(i) $C(x) \subseteq \Gamma \ \forall x \in \Gamma$,

(ii) $x \in C(x) \ \forall x \in \Gamma$.

Tada je svako rješenje varijacione nejednakosti: naći $x_* \in \Gamma$ takvo da važi $\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0$ za svako $y \in \Gamma$ ujedno i rješenje kvazi-varijacione nejednakosti: naći $x_* \in C(x_*)$ takvo da $\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0$ za svako $y \in C(x_*)$, ali obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Ključna pretpostavka u ovoj teoremi je (ii) koja tvrdi da je svaka tačka $x \in \Gamma$, fiksna tačka multifunkcije C. Ova pretpostavka isključuje, na primjer, preslikavanja koja su projekcije na pravi podskup od Γ.

2.2 Transportni problemi

Poslednjih decenija transportni problemi privlače sve više pažnju matematičara. Engleski analitičar Dž. G. Vardrop je 1952. godine u [68] formulisao dva principa koja su dobila naziv po njemu:

prvi princip: Korisnici transportne mreže, nezavisno jedan od drugog, biraju svoje maršute putovanja tako da transportni rashodi budu minimalni.

drugi princip: Korisnici transportne mreže biraju maršutu putovanja tako da opšti rashodi u mreži budu minimalni.

Distribucija transportnih tokova saglasno prvom Vardropovom principu odgovara konkurentnoj nekooperativnoj ravnoteži, tj. pretpostavlja se da svaki učesnik u saobraćaju da bi stigao do željene destinacije bira od svih mogućih maršuta onu koja zahtjeva minimalne troškove. Zbog toga se ovaj princip naziva korisnička optimizacija. Primijetimo da se kod ovog principa podrazumijeva da svaki učesnik zna unaprijed troškove na svim maršutama, da bi mogao izabrati onu koja mu najviše odgovara. U poslednje vrijeme ovo nije teško ispuniti jer se razvojem tehnike (navigacioni sistemi, internet, radio i dr.) omogućava korisnicima da saznaju sve te informacije unaprijed.

Primjene kvazi-varijacionih nejednakosti u transportnim problemima razmatrane su u [18, 26, 37, 36, 61]. Saglasno prvom Vardropovom principu opisaćemo problem transportne mreže i dati njenu kvazi-varijacionu formulaciju.

Transportnu mrežu predstavljamo u obliku orijentisanog grafa $G(V, E)$, gdje je V skup čvorova, E skup grana. Svaka grana u grafu predstavlja realni dio puta bez presijecanja, a svaki čvor je raskrsnica puteva ili mjesto gdje se mijenjaju karakteristike puta. Usmjerena grana određuje smjer kretanja između dva čvora. Magistralama sa dvosmjernim kretanjem odgovaraju sparene suprotno orijentisane grane. Skup čvorova podijelimo na dva podskupa. Prvi, $S \subseteq V$ sadrži čvorove koji predstavljaju mjesta odakle počinju kretanja; elemente skupa S nazivamo polazištima. Drugi, $D \subseteq V$ sadrži čvorove koji predstavljaju destinacije; elemente skupa D nazivamo odredištima. Primijenjeno u realnoj situaciji, na primjer u jutarnjim časovima kada većina stanovnika kreće na posao je velika gužva u saobraćaju, polazišta predstavljaju prigradska naselja a odredišta su djelovi grada ka kojima svi ujutru idu. Skup svih parova koji spajaju polazišta i odredišta predstavimo u obliku

Dekartovog proizvoda

$$W = S \times D = \{w = (i, j) \ : \ i \in S, j \in D\}.$$

Putem ili maršutom u mreži G koji spaja čvorove i i j nazivamo niz grana

$$e_1 = (i \to k_1), \ e_2 = (k_1 \to k_2), \ldots, e_{m+1} = (k_m \to j),$$

gdje $e_l \in E$ za svako $l = 1, \ldots, m+1$. U maršutama se pretpostavlja odsustvo petlji i ciklusa. Označimo sa P_w skup alternativnih maršuta koje odgovaraju paru $w \in W$. Skup svih maršuta u mreži G označimo sa $P = \cup_{w \in W} P_w$.

Krećući se od polazišta ka odredištu, korisnici mreže biraju odgovarajuću maršutu kretanja. Označimo sa x_p troškove koji se prave ako se ide po putu $p \in P$. Tada vektor $x = (x_p : \ p \in P)$ predstavlja troškove u mreži.

Izbor nekog puta $p \in P$ zavisi od troškova. Po pravilu, pod troškovima se podrazumijevaju finansijski troškovi ili vrijeme. Označimo sa F_p troškove po putu p. Pošto na troškove po jednoj maršuti mogu uticati i drugi putevi (npr. presjeci glavnih i sporednih puteva), u opštem slučaju F_p predstavlja funkciju troškova na cijeloj mreži, tj. $F_p = F_p(x)$. Na osnovu prvog Vardropovog principa, vozači biraju put x_p^* sa najmanjim transportnim rashodima, pa za svaki par w ispunjeni su uslovi: ako po putu $p \in P_w$ ide nenulti tok x_p^* tada su troškovi po tom putu minimalni, tj.

$$\text{ako } x_p^* > 0 \text{ tada } G_p(x_*) = \min_{q \in P_w} G_p(x_*) = u_w(x_*), \tag{2.2}$$

gdje su $u_w(x_*)$ minimalni transportni troškovi po odgovarajućoj maršuti para $w \in W$, koji su poznati pri formiranju mreže, određene vektorom x_*. Relacija (2.2) za svaki par $w \in W$ definiše uslove ravnoteže transportnih tokova. Tokovi $x^* = (x_p^* \ : \ p \in P)$ koji zadovoljavaju (2.2) nazivaju se ravnotežama. Za kompletnu sliku neophodno je uvesti ograničenja na dopustivim tokovima.

Svakom paru polazište-odredište $w = (i, j) \in P$ odgovara ρ_w $-$ obim korisnika mreže koji iz tačke i treba da stignu u tačku j. Matrica $(\rho_w \ : \ w \in W)$ naziva se matricom korespondencije. U opštem slučaju pretpostavlja se da matrica korespondencije zavisi od minimalnih troškova u mreži, to jest $\rho_w = \rho_w(u_w^*)$, gdje je $u^* - w = u_w(x_*)$.

Tradicionalno za transportne zadatke, tokovi su nenegativne promjenljive koje zadovoljavaju balansna ograničenja. Zbog toga je dopustiv skup za razmatranje tokova dat sa

$$C(x_*) = \left\{ x \geq 0 : \ \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w(u_w(x_*)), \ w \in W \right\},$$

oznaka $x \geq 0$ znači da su sve komponente $x_p \geq 0$.

Osnovni pristup rješavanja transportnih problema je svođenje na odgovarajući problem optimizacije ili na (kvazi)varijacionu nejednakost. Prikazaćemo kako se transportni problem može izraziti u terminima kvazi-varijacione nejednakosti.

Objedinimo komponente $F_p(x)$ u vektorsku funkciju $F(x) = (F_p(x) : p \in P)$. Tada vektor $x_* \in C(x_*)$ zadovoljava uslov transportne ravnoteže (2.2) ako i samo ako je rješenje kvazi-varijacione nejednakosti

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C(x_*).$$

2.3 Oligopolistički modeli

Među mnogim praktičnim primjenama koncepta Nešove ravnoteže, vrijedan je pomena poznati Neš-Kurnoov proizvodnja/distribucija problem. Ovdje istu homogenu robu proizvodi nekoliko firmi koji predstavljaju Nešove igrače u Nešovoj igri. Svaka firma nastoji da poveća svoj profit rješavajući problem optimizacije za određivanje količine proizvodnje i distribucije robe pod pretpostavkom da znaju proizvodnju i distribuciju drugih firmi. Oligopolistički model ima prirodnu kvazi-varijacionu formulaciju i mi ćemo ga ovdje izložiti. Napomenimo da je ovaj model razmatran u [11, 22, 46, 69].

Razmatramo m firmi P_i, $i = 1, \ldots, m$ koje proizvode homogenu robu i n tržišta Q_j, $j = 1, \ldots, n$ koja su prostorno razdvojena. Pretpostavimo da su homogeni proizvodi proizvedeni u m firmi i potrošeni na n tržišta za vrijeme $[0, T]$, $T > 0$.

Neka $x_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, označava nenegativnu pošiljku robe između snadbevačkog tržišta P_i i potrošačkog tržišta Q_j za vrijeme $t \in [0, T]$. Specijalno, neka vektor $x_i(t) = (x_{i1}(t), \ldots, x_{im}(t))$, $i = 1, \ldots, m$ i $t \in [0, T]$, predstavlja strategiju firme P_i.

Grupišimo pošiljke u matričnu funkciju $x : [0, T] \to \mathbb{R}_+^{mn}$ i pretpostavimo da $x \in L^2([0, T], \mathbb{R}_+^{mn})$. Pretpostavimo još da pošiljka x_{ij} zadovoljava sljedeće uslove: postoje dvije nenegativne funkcije $\underline{x}, \bar{x} : [0, T] \to \mathbb{R}_+^{mn}$ takve da

$$0 \leq \underline{x}_{ij}(t) \leq x_{ij}(t) \leq \bar{x}_{ij}(t), \quad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1, \ldots, n, \ \text{s.s. na } [0, T],$$

i pretpostavimo da $\underline{x}, \bar{x} \in L^2([0, T], \mathbb{R}_+^{mn})$.

Označimo sa

$$D = \Big\{ x \in L^2([0, T], \mathbb{R}_+^{mn}) \ : \ \underline{x}_{ij}(t) \leq x_{ij}(t) \leq \bar{x}_{ij}(t), \\ \forall i = \overline{1, m}, \ \forall j = \overline{1, n}, \ \text{s.s. na } [0, T] \Big\}.$$

Lako se provjerava da je D neprazan, kompaktan i konveksan podskup od $L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn})$. Sa $p_i(t,x(t))$, $i=1,\ldots,m$, označimo robu koja je proizvedena u firmi P_i za vrijeme $t\in[0,T]$ i grupišimo ih u vektorsku funkciju $p:[0,T]\times D\to\mathbb{R}^{mn}_+$. Proizvodni otpad u firmi P_i za vrijeme $t\in[0,T]$ označimo sa $\epsilon_i(t)$, $i=1,\ldots,m$.

Jasno je da prosječna količina proizvedena u svakoj firmi P_i u vremenskom intervalu $[0,T]$ mora biti jednaka robi koja je poslata od te firme ka svim potrosačkim tržištima uvećana za proizvodni otpad, za vrijeme $t\in[0,T]$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t)+\epsilon_i(t)=\frac{1}{T}\int_0^T p_i(t,x_*(\tau))d\tau,\quad i=1,\ldots,m,\ \text{s.s. na } [0,T]. \quad (2.3)$$

Zaista, proizvodnja treba da zavisi od evaluacije firme za robne pošiljke. Može se očekivati da proizvođači ne procijenjuju trenutno tržišno stanje nego prosječno, u odnosu na cijeli vremenski interval. Zanemarivanjem proizvodnog otpada u (2.3) dobijamo

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t)\le\frac{1}{T}\int_0^T p_i(t,x_*(\tau))d\tau,\quad i=1,\ldots,m,\ \text{s.s. na } [0,T].$$

Dalje, označimo sa

$f_i=f_i(t,x(t))$, $i=1,\ldots,m$, cijenu proizvodnje robe u firmi P_i,

$d_j=d_j(t,x(t))$, $j=1,\ldots,n$, prodajnu cijenu robe za tržište Q_j,

$g_i=g_i(t,x(t))$, $i=1,\ldots,m$, cijenu skladištenja robe proizvedene u firmi P_i,

$c_{ij}=c_{ij}(t,x(t))$, $i=1,\ldots,m$ i $j=1,\ldots,n$, cijenu prevoza robe od firme P_i do potrošačkog tržišta Q_j.

Tada je profit $v_i(t,x(t))$, $i=1,\ldots,m$, firme P_i u vremenu $t\in[0,T]$ jednak prodajnoj cijeni koju treba da plate potrošačka tržišta umanjen za troškove proizvodnje, skladištenja i prevoza, tj.

$$\begin{aligned} v_i(t,x(t)) &= \sum_{j=1}^{n} d_j(t,x(t))x_{ij}(t)-f_i(t,x(t))-g_i(t,x(t)) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t,x(t))x_{ij}(t). \end{aligned}$$

Skup dopustivih vektora $x \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$ je dat multifunkcijom $C : D \to 2^{L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)}$ sa

$$\begin{aligned} C(x_*) \;=\; & \Big\{ x \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}) \;: \\ & \underline{x}_{ij}(t) \leq x_{ij}(t) \leq \bar{x}_{ij}(t),\;\; \forall i = \overline{1,m},\;\; \forall j = \overline{1,n} \text{ s.s. na } [0,T], \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) \leq \frac{1}{T}\int_0^T p_i(t, x_*(\tau))d\tau,\;\; \forall i = \overline{1,m},\;\; \text{s.s. na } [0,T] \Big\}. \end{aligned}$$

Označimo sa $x_i = \{x_{ij}\}_{j=\overline{1,m}}$ i $\nabla_D v = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{ij}}\right)_{i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n}}$. Neka važe sljedeće pretpostavke:

(i) $v_i(t,x(t))$ je neprekidno diferencijabilna funkcija za svako $i = 1\ldots,m$ na segmentu $[0,T]$,

(ii) $\nabla_D v$ je Karateodorijeva funkcija takva da

$$\exists \gamma \in L^2([0,T]) \;:\; \|\nabla_D v(t,x)\|_{mn} \leq \gamma(t) + \|x\|_{mn},\;\; \forall x \in \mathbb{R}^{mn} \text{ na } [0,T],$$

(iii) $v_i(t,x(t))$ je pseudokonkavna u odnosu na promjenljivu x_i, $i = 1,\ldots,m$ na $[0,T]$, tj. važi

$$\langle \nabla_D v_i(t,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m), x_i - y_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i(t,x)}{\partial x_{ij}}(x_{ij} - y_{ij}) \geq 0$$

$$\Longrightarrow v_i(t,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m) \geq v_i(t,x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_m).$$

Dinamičko oligopolističko tržište sastoji se od m firmi koje proizvode robu u nekooperativnim uslovima i svaka nastoji da maksimizira svoj profit. Treba odrediti nenegativnu funkciju x_* za m firmi i n potrošačkih tržišta koja će biti u ravnoteži u odnosu na dinamički Neš-Kurnotov princip.

$x_* \in C(x_*)$ je dinamička oligopolistička tržišna ravnoteža ako i samo ako za svako $i = 1,\ldots,m$ važi

$$v_i(t,x_*(t)) \geq v_i(t,x_i(t),\hat{x}_i^*(t)),\;\; \text{s.s. na } [0,T],$$

gdje je $x_i(t) = (x_{i1}(t),\ldots,x_{in}(t))$ i $\hat{x}_i^*(t) = (x_1^*(t),\ldots,x_{i-1}^*(t),x_{i+1}^*(t),\ldots,x_m^*(t))$ za $i = 1,\ldots,m$ na segmentu $[0,T]$. Dakle, svaka firma P_i nastoji da poveća svoj profit uzimajući u obzir date optimalne strategije $\hat{x}_i^*$ ostalih firmi.

Teorema 2.3.1 *Neka su ispunjene pretpostavke (i), (ii) i (iii). Tada je* $x_* \in C(x_*)$ *dinamička oligopolistička tržišna ravnoteža ako i samo ako je zadovoljena sljedeća nejednakost*

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\partial v_i(t, x_*(t))}{\partial x_{ij}(t)} \right) \big(x_{ij}(t) - x^*_{ij}(t) \big) dt \geq 0, \quad \forall x \in C(x_*). \qquad (2.4)$$

Podsjetimo se da je u Hilbertovom prostoru $L^2([0,T], \mathbb{R}^k)$ bilinearna forma definisana sa

$$\langle\langle \phi, \omega \rangle\rangle = \int_0^T \langle \phi(t), \omega(t) \rangle dt,$$

gdje je $\phi \in (L^2([0,T], \mathbb{R}^k))^* = L^2([0,T], \mathbb{R}^k)$, $\omega \in L^2([0,T], \mathbb{R}^k)$ i važi

$$\langle \phi(t), \omega(t) \rangle = \sum_{l=1}^{k} \phi_l(t) \omega_l(t).$$

Na osnovu toga, nejednakost (2.4) možemo napisati u obliku

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\partial v_i(t, x_*(t))}{\partial x_{ij}(t)} \right) \big(x_{ij}(t) - x^*_{ij}(t) \big) dt = \langle\langle -\nabla_D v(x_*), x - x_* \rangle\rangle$$

$$= \int_0^T \langle -\nabla_D v(t, x_*(t)), x(t) - x_*(t) \rangle dt \geq 0, \quad \forall x \in C(x_*).$$

Posljednja nejednakost je ekvivalentna sa sljedećom kvazi-varijacionom nejednakošću:

$$\langle F(t, x_*(t)), x(t) - x_*(t) \rangle \geq 0, \quad \forall x(t) \in C(t, x_*), \ t \in [0,T],$$

gdje je

$$F(t, x_*(t)) = -\nabla_D v(t, x_*(t))$$

i

$$C(t, x_*) = \Big\{ x(t) \in \mathbb{R}^{mn}_+ \ : \ \underline{x}_{ij}(t) \leq x_{ij}(t) \leq \bar{x}_{ij}(t), \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) \leq \frac{1}{T} \int_0^T p_i(t, x_*(\tau)) d\tau, \ \forall i = 1, \ldots, m \Big\}$$

Glava 3

Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti

U ovoj glavi biće izložene različite metode za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Kao što smo napomenuli u literaturi postoji mnogo metoda za rešavanje zadataka minimizacije i većina od njih se može prilagoditi za rješavanje varijacionih nejednakosti. Međutim, kako kod kvazi-varijacionih nejednakosti moramo rješavati varijacionu nejednakost uz uslov da to rješenje bude nepokretna tačka multifunkcije $C(x)$, to mnoge metode za rješavanje varijacionih nejednakosti ne možemo primijeniti za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti.

U ovoj glavi razmatramo sljedeću kvazi-varijacionu nejednakost: naći $x_* \in C(x_*)$ takvo da

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C(x_*), \tag{3.1}$$

gdje je $C(x) : H \to 2^H$ multifunkcija sa nepraznim, zatvorenim, konveksnim slikama $C(x) \subseteq H$ za svako $x \in H$.

Projekcioni metodi su konceptualno najjednostavniji metodi za rješavanje varijacionih, a samim tim i kvazi-varijacionih nejednakosti. Oni imaju dva zajednička svojstva koja ih odlikuju. Prvo, njihova implementacija zahtijeva efektivno računanje projekcije na zatvoren, konveksan skup $C(x)$. Ovo ograničava njihovu primjenu jer je često zahtjevno odrediti projekciju na neki skup. Druga karakteristika je da ti metodi ne zahtjevaju korišćenje izvoda preslikavanja F, pa samim tim nema drugih kompleksnih operacija osim projekcije tačke na skup. S jedne strane, ova osobina čini metode veoma pogodnim kada se projekcija jednostavno računa. S druge strane, ne korišćenje informacija o izvodu utiče ograničavajuće na brzinu konvergencije.

Iterativni metod projekcije gradijenta za kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) opisan je u [47]. U ovoj glavi dokazaćemo konvergenciju i odgovarajućeg neprekidnog metoda projekcije gradijenta i definisaćemo novi metod, za koji se može reći da je uopštenje metoda projekcije gradijenta. Taj metod ćemo proširiti i formulisaćemo odgovarajuće metode drugog i trećeg reda za koje ćemo, takođe, pokazati konvergenciju.

3.1 Metod projekcije gradijenta

Počinjemo sa osnovnim projekcionim metodom, metodom projekcije gradijenta. Ovaj jednostavni metod je prototip za ostale složenije metode, koje ćemo izložiti u nastavku.

3.1.1 Iterativni procesi

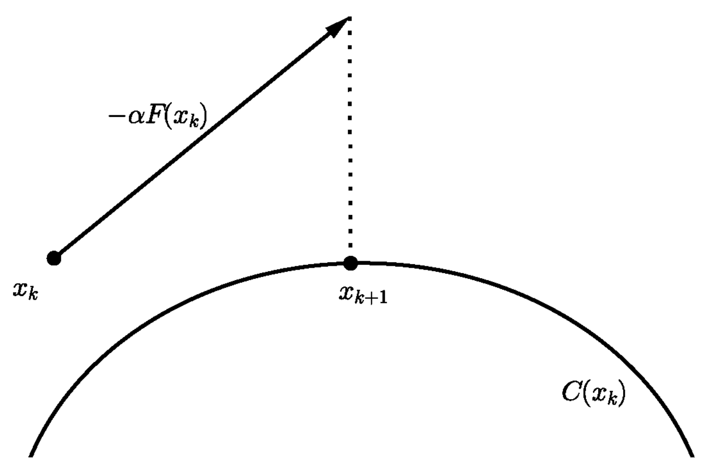
Kao što je pokazano u lemi 1.3.1, rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) je fiksna tačka preslikavanja

$$x \to \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)],$$

i obrnuto. Zbog toga, za rješavanje problema (3.1) možemo koristiti diskretni metod projekcije gradijenta prvog reda:

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha_k F(x_k)], \ k \geq 0, \tag{3.2}$$

gdje je početna tačka $x_0 \in H$ proizvoljna, a $\alpha_k > 0$ je parametar metoda. Jedna iteracija je prikazana na slici 3.1. Napomenimo da tačka x_k pripada



Slika 3.1: Jedna iteracija metoda projekcije gradijenta

skupu $C(x_{k-1})$, a u opštem slučaju ne znamo njenu relaciju sa skupom $C(x_k)$. Na slici je predstavljen slučaj kada se x_k nalazi van skupa $C(x_k)$.

Metod (3.2) je ranije razmatran u literaturi ([47]). Zbog svoje važnosti i kompletnosti rada, dokaz konvergencije detaljno izlažemo.

Ako je $C(x)$ konveksan, zatvoren skup i način izbora parametra α u (3.2) je zadat, tada na osnovu teoreme 1.2.3 niz (x_k) je jednoznačno određen uslovom (3.2). Ako se u (3.2) u nekoj iteraciji pojavi da je $x_{k+1} = x_k$ tada se proces (3.2) prekida. U tom slučaju tačka x_k zadovoljava neophodan i dovoljan uslov optimalnosti $x_k = \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)]$, pa je x_k rješenje kvazi-varijacione nejednakosti.

U zavisnosti od izbora parametra α_k u (3.2) moguće je dobiti različite varijante metoda projekcije gradijenta. Razmotrićemo slučaj kada je $\alpha_k = \alpha$, i u sljedećoj teoremi dokazujemo konvergenciju niza (x_k) ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1).

Teorema 3.1.1 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1) *Operator $F : H \to H$ je jako monoton sa parametrom jake monotonosti $\mu : 0$ i Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom L;*

2) *Multifunkcija $C(x)$ zadovoljava uslov (1.7) sa $\lambda < \frac{\mu^2}{L(L+\sqrt{L^2-\mu^2})}$;*

3) *Parametar metoda je $\alpha = \frac{\mu}{L^2}$.*

Tada diskretni metod projekcije gradijenta prvog reda (3.2) konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) i pri tome je

$$\|x_k - x_*\| \leq \left(\lambda + \frac{\sqrt{L^2-\mu^2}}{L}\right)^k \|x_0 - x_*\|, \quad k \geq 0.$$

Dokaz. Kako preslikavanje $C(x)$ zadovoljava uslov (1.7) sa

$$\lambda < \frac{\mu^2}{L(L+\sqrt{L^2-\mu^2})} = \frac{L-\sqrt{L^2-\mu^2}}{L} = 1 - \sqrt{1-\frac{\mu^2}{L^2}}, \tag{3.3}$$

to na osnovu teoreme 1.3.2 zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (3.1). Označimo to jedinstveno rješenje sa $x_* \in$

$C(x_*)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &= \left\|\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)] - x_*\right\| \\
&= \left\|\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\right\| \\
&= \left\|\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k - \alpha F(x_k)]\right\| \\
&+ \left\|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\right\| \\
&\leq \lambda\|x_k - x_*\| + \left\|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\right\|.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Za ocjenu drugog sabirka u gornjoj nejednakosti koristićemo jaku monotonost i Lipšic neprekidnost operatora F. Važi

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\|^2 \\
\leq\ &\|(x_k - \alpha F(x_k)) - (x_* - \alpha F(x_*))\|^2 \\
=\ &\|x_k - x_*\|^2 - 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle + \alpha^2\|F(x_k) - F(x_*)\|^2 \\
\leq\ &\left(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2\right)\|x_k - x_*\|^2,
\end{aligned}$$

za $k \geq 0$. Prethodnu nejednakost uvrstimo u (3.4) i dobijamo

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left(\lambda + \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}\right)\|x_k - x_*\|,$$

za svako $k \geq 0$. Funkcija $1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2$ dostiže minimum u tački $\alpha = \frac{\mu}{L^2}$, pa za tu vrijednost parametra α važi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left(\lambda + \frac{\sqrt{L^2 - \mu^2}}{L}\right)\|x_k - x_*\|, \quad k \geq 0.$$

Dobijena nejednakost važi za svako $k \geq 0$, pa slijedi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left(\lambda + \frac{\sqrt{L^2 - \mu^2}}{L}\right)^k \|x_0 - x_*\|, \quad k \geq 0.$$

Pozitivna konstanta $\lambda + \frac{\sqrt{L^2-\mu^2}}{L}$ je manja od 1, zbog (3.3), pa je

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lambda + \frac{\sqrt{L^2 - \mu^2}}{L}\right)^k = 0.$$

Ovim je pokazana konvergencija niza (x_k) ka jedinstvenom rješenju x_*. Teorema je dokazana. $\square$

Napomena: Vidimo da je kvazi-varijaciona nejednakost (3.1) rješiva pomoću gradijentnog metoda ako je stopa varijacije dopustivog skupa veoma mala u poređenju sa karakteristikom operatora F:

$$\lambda < \frac{\mu^2}{L(L + \sqrt{L^2 - \mu^2})} \approx \frac{1}{2\gamma^2},$$

gdje je $\gamma = \frac{L}{\mu} \geq 1$ karakteristika operatora F.

3.1.2 Neprekidni procesi

Važna klasa metoda rješavanja kvazi-varijacionih nejednakosti je klasa neprekidnih metoda, u kojima se proces opisuje diferencijalnim jednačinama. Interes konstrukcije neprekidnih metoda je višestruk. S jedne strane, pri ispitivanju konvergencije trajektorije neprekidnih procesa ka tački ravnoteže mogu se koristiti aparati dobijeni u teoriji diferencijalnih jednačina. S druge strane, ovi metodi daju slobodu pri izboru metoda numeričke integracije dobijene diferencijalne jednačine i tako obrazuju novu klasu diskretnih metoda. Dalje, pokazaćemo da su svojstva odgovarajućih neprekidnih i iterativnih procesa različita. Smanjenjem intervala diskretizacije vremena, iterativni procesi nisu glatki kao što je to slučaj kod neprekidnih procesa. Neprekidni metodi minimizacije i rješavanja varijacionih nejednakosti su dobro obrađeni u [2, 31, 64, 66]. Neprekidan metod za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti je razmatran u [35].

Za izračunavanje tačaka koje predstavljaju rješenja kvazi-varijacione nejednakosti (3.1), konstruisaćemo trajektoriju koja počinje u proizvoljnoj tački i s prolaskom vremena konvergira ka rješenju. Ideja za konstrukcije takvih trajektorija može biti više. Razmotrimo trajektoriju za koju je korak $\mathcal{P}_{C(x)}[x-\alpha F(x)] - x$ proporcionalan vektoru brzine trajektorije, to jest

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] - x. \tag{3.5}$$

Intuitivno je jasno, korak $\mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)] - x$ različit je od nule za proizvoljan element $x \in H$, smanjuje se što se više približavamo ka x_* i jednak je nuli u tački x_*.

Sistem (3.5) je sistem običnih diferencijalnih jednačina. Pošto je operator projektovanja kontrakcija (teorema 1.2.3, svojstvo 3)) tada desna strana jednakosti (3.5) ima oblik $g(x,t)$, gdje je funkcija $g(x,t)$ Lipšicova po x za svako fiksirano $t \geq 0$ i neprekidna po t za svako fiksirano $x \in H$. Zaista, zbog uslova (1.7) koji zadovoljava multifunkcija $C(x)$, važi

$$\begin{aligned}
\|g(x,t)-g(y,t)\| &= \|\mathcal{P}_{C(x)}[x-\alpha F(x)]-x-\mathcal{P}_{C(y)}[y-\alpha F(y)]+y\| \\
&\leq \|x-y\|+\|\mathcal{P}_{C(x)}[x-\alpha F(x)]-\mathcal{P}_{C(x)}[y-\alpha F(y)]\| \\
&+ \|\mathcal{P}_{C(x)}[y-\alpha F(y)]-\mathcal{P}_{C(y)}[y-\alpha F(y)]\| \\
&\leq \|x-y\|+\|x-\alpha F(x)-y+\alpha F(y)\|+\lambda\|x-y\| \\
&\leq (2+\alpha L+\lambda)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da diferencijalna jednačina (3.5), za proizvoljni početni uslov $x_0 \in H$, ima jedinstveno rješenje klase C^1 definisano na proizvoljnom konačnom intervalu $[0,T]$ ili drugim riječima, za svako $t \geq 0$, (vidjeti [30]).

Napišimo sistem (3.5) u obliku

$$x'(t)+x(t)=\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t)-\alpha(t)F(x(t)], \quad t\geq 0, \ x(0)=x_0, \tag{3.6}$$

gdje je x_0 data početna tačka a parametar metoda $\alpha(t) > 0$ je neprekidna pozitivna funkcija za $t \geq 0 \geq 0$.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove egzistencije i konvergencije trajektorije diferencijalne jednačine (3.6) ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1).

Teorema 3.1.2 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1) *Operator $F : H \to H$ je jako monoton i Lipšic neprekidan sa konstantama μ i L, redom;*

2) *Multifunkcija $C(x)$ zadovoljava uslov (1.7) sa $\lambda < 1 - \frac{1}{L}\sqrt{L^2-\mu^2}$.*

3) *Parametar $\alpha(t) \in C([0,+\infty))$ je takav da*

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_1, \quad \textit{za svako } t \geq 0,$$

$$\alpha_0 > \frac{\mu-\sqrt{\mu^2-L^2(2\lambda-\lambda^2)}}{L^2}, \quad \alpha_1 < \frac{\mu+\sqrt{\mu^2-L^2(2\lambda-\lambda^2)}}{L^2}.$$

Tada neprekidni metod projekcije gradijenta prvog reda (3.6) konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) sljedećom brzinom konvergencije

$$\|x(t)-x_*\| \leq \exp\{-a_0 t/2\}\|x_0-x_*\|,$$

gdje je

$$a_0 = 1-\left(\lambda+\sqrt{1-2\alpha_1\mu+\alpha_0^2L^2}\right)^2.$$

Dokaz. Isto kao u dokazu prethodne teoreme, zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ kvazi-varijacione nejednakosti (3.1). Za ocjenjivanje brzine konvergencije koristićemo Ljapunovljevu funkciju

$$V(t) = \frac{1}{2}\|x(t) - x_*\|^2, \quad V(0) = \frac{1}{2}\|x_0 - x_*\|^2 = V_0.$$

Dovoljno je dokazati da važi

$$V(t) \to 0 \text{ kada } t \to \infty.$$

Razmotrimo izvod Ljapunovljeve funkcije:

$$V'(t) = \langle x(t) - x_*, x'(t) \rangle, \quad t \geq 0.$$

Kako je $x_* = \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]$ dobijamo

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \langle x(t) - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)], \mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - x(t) \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]\|^2 \\
&- \frac{1}{2}\|\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - x(t)\|^2 \\
&- \frac{1}{2}\|x(t) - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]\|^2, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Sada ocijenimo svaki od sabiraka iz prethodne jednakosti.

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]\| \\
\leq\ & \|\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))]\| \\
+\ & \|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]\| \\
\leq\ & \lambda\|x(t) - x_*\| + \|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] \\
-\ & \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \lambda(t)F(x_*)]\| \quad t \geq 0. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Operator $\mathcal{P}$ je sažimajući i F je jako monoton i Lipšic neprekidan operator, pa važi sljedeća ocjena

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha(t)F(x_*)]\|^2 \\
\leq\ & \|[x(t) - \alpha(t)F(x(t))] - [x_* - \alpha(t)F(x_*)]\|^2 \\
=\ & \|x(t) - x_*\|^2 - 2\alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle \\
+\ & \alpha^2(t)\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 \\
\leq\ & \|x(t) - x_*\|^2 - 2\alpha(t)\mu\|x(t) - x_*\|^2 + \alpha^2(t)L^2\|x(t) - x_*\|^2 \\
=\ & \left(1 - 2\alpha(t)\mu + \alpha^2(t)L^2\right)\|x(t) - x_*\|^2, \quad t \geq 0. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Kombinujući (3.7) i (3.8) dobijamo

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t)-\alpha(t)F(x(t))]-\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_*-\alpha(t)F(x_*)]\|^2\\ \le\ &\left(\lambda+\sqrt{1-2\alpha(t)\mu+\alpha^2(t)L^2}\right)^2\|x(t)-x_*\|^2,\quad t\ge 0.\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $x_*=\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_*-\alpha(t)F(x_*)]$, konačno dobijamo

$$V'(t)\le\frac{1}{2}\left[\left(\lambda+\sqrt{1-2\alpha(t)\mu+\alpha^2(t)L^2}\right)^2-1\right]\|x(t)-x_*\|^2,\quad t\ge 0,$$

odnosno

$$V'(t)\le\left[\left(\lambda+\sqrt{1-2\alpha(t)\mu+\alpha^2(t)L^2}\right)^2-1\right]V(t),\quad t\ge 0.$$

Kako, iz uslova *2)* teoreme, važi $\lambda<1-\frac{1}{L}\sqrt{L^2-\mu^2}$ to je uslov za α, u *3)* dobro definisan. Zaista, potkorjena veličina $\mu^2-L^2(2\lambda-\lambda^2)$ ima pozitivnu vrijednost manju od μ^2. Za izbor parametra α kao u *3)* važi

$$\lambda+\sqrt{1-2\alpha_1\mu+\alpha_0^2L^2}<1,$$

pa je $a_0=1-\left(\lambda+\sqrt{1-2\alpha_1\mu+\alpha_0^2L^2}\right)^2>0$. Konačno,

$$V'(t)\le -a_0V(t),\quad t\ge 0.$$

Rješavanjem ove diferencijalne nejednačine dobijamo

$$V(t)\le V_0\exp\{-a_0t\},\quad t\ge 0,$$

pa $V(t)\to 0$ kada $t\to\infty$, t.j. $x(t)$ eksponencijalno konvergira ka jedinstvenom rješenju x_*. Ovim je teorema dokazana. □

3.2 Uopštenje metoda projekcije gradijenta

3.2.1 Metod prvog reda

Da bi se ubrzala konvergencija, umjesto (3.2) može se koristi opštija varijanta metoda projekcije gradijenta:

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+a_k(\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k-\alpha F(x_k)]-x_k)\\&=(1-a_k)x_k+a_k\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k-\alpha F(x_k)],\quad k=0,1,\ldots\end{aligned}\tag{3.9}$$

gdje se parametri $0<a_k\le 1$ i $\alpha>0$ mogu birati na različite načine, a $x_0\in H$ je početna tačka. Formulišimo teoremu koja daje dovoljne uslove konvergencije metoda (3.9).

Teorema 3.2.1 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1) *Operator $F : H \to H$ je jako monoton i Lipšic neprekidan sa konstantama μ i L, redom;*

2) *Multifunkcija $C(x)$ zadovoljava uslov (1.7) sa $\lambda < \frac{1}{2L}(L - \sqrt{L^2 - \mu^2})$.*

3) *Za parametre α i a_k važi*

$$\left|\alpha - \frac{\mu}{L^2}\right| < \frac{\sqrt{\mu^2 - L^2\lambda(2-\lambda)}}{L^2}, \quad \lambda(2-\lambda) < \frac{\mu^2}{L^2}$$

$$0 \le a_k \le 1, \text{ za svako } k \ge 0, \quad i \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty.$$

Tada metod (3.9) konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) pri čemu je

$$\|x_{k+1} - x_*\| \le \prod_{i=0}^{k}[1 - (1-\theta)a_i]\|x_0 - x_*\|, \tag{3.10}$$

gdje je $\theta = \lambda + \sqrt{1 - 2\mu\alpha + \alpha^2 L^2}$.

Dokaz. Kao u teoremi 3.1.1 zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje x_* kvazi-varijacione nejednakosti (3.1). Iz (1.7), (3.9) i leme 1.6 dobijamo

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &= \|(1-a_k)x_k + a_k\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k) - \alpha F(x_k)] - (1-a_k)x_* \\
&\quad + a_k\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_*) - \alpha F(x_*)]\| \\
&\le \|(1-a_k)(x_k - x_*)\| + a_k\|\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k) - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_*) - \alpha F(x_*)]\| \\
&= \|(1-a_k)(x_k - x_*)\| + a_k\|\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k) - \alpha F(x_*)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k) - \alpha F(x_k)]\| \\
&\quad + a_k\|\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_k) - \alpha F(x_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_*) - \alpha F(x_*)]\| \\
&\le (1-a_k)\|x_k - x_*\| + \lambda a_k\|x_k - x_*\| + a_k\|x_k - x_* - \alpha(F(x_k) - F(x_*))\|.
\end{aligned}$$

Kako je operator F jako monoton sa parametrom jake monotonosti $\mu > 0$ i Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom $L > 0$, dobijamo da važi

$$\begin{aligned}
& \|x_k - x_* - \alpha(F(x_k) - F(x_*))\|^2 \\
= \; & \|x_k - x_*\|^2 - 2\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle + \alpha^2\|F(x_k) - F(x_*)\|^2 \\
\le \; & (1 - 2\mu\alpha + \alpha^2 L^2)\|x_k - x_*\|^2.
\end{aligned}$$

Dobijenu ocjenu uvrstimo u prethodnu nejednakost

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &\le (1-a_k)\|x_k - x_*\| + \lambda a_k\|x_k - x_*\| \\
&\quad + a_k\sqrt{1 - 2\mu\alpha + L^2\alpha^2}\|x_k - x_*\| \\
&= (1-a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\theta\|x_k - x_*\|,
\end{aligned}$$

gdje je

$$\theta = \lambda + \sqrt{1 - 2\mu\alpha + L^2\alpha^2}.$$

Da bi θ bilo manje od 1 treba da važi

$$\sqrt{1 - 2\mu\alpha + L^2\alpha^2} < 1 - \lambda,$$

odnosno

$$L^2\alpha^2 - 2\mu\alpha + \lambda(2 - \lambda) < 0.$$

Rješenje ove kvadratne nejednačine po α je

$$\frac{\mu}{L^2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - L^2\lambda(2-\lambda)}}{L^2} < \alpha < \frac{\mu}{L^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - L^2\lambda(2-\lambda)}}{L^2}.$$

Konstanta λ zadovoljava uslove

$$0 < \lambda < 1, \quad \sqrt{\lambda(2-\lambda)} < \frac{\mu}{L}.$$

Iz navedenog zaključujemo da je, pod datim uslovima 3) iz teoreme, $0 < \theta < 1$.

Konačno, dobijamo

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| &\leq (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\theta\|x_k - x_*\| \\ &= (1 - (1-\theta)a_k)\|x_k - x_*\| \\ &\leq \prod_{i=0}^{k}(1 - (1-\theta)a_i)\|x_0 - x_*\|. \end{aligned}$$

Pošto red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira i $1 - \theta > 0$ tada važi

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k}(1 - (1-\theta)a_i) = 0.$$

Dakle, dokazali smo da niz (x_k) konvergira ka jedinstvenom rješenju x_* kvazi varijacione nejednakosti (3.1) i izveli ocjenu brzine konvergencije (3.10), čime je teorema dokazana. □

3.2.2 Metod drugog reda

U ovom paragrafu definisaćemo metod drugog reda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti, koji se zasniva na metodu (3.9).

Kao što smo već napomenuli, x je rješenje kvazi-varijacione nejdnakosti ako i samo ako važi (1.6), tj. ako je

$$x = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)],$$

za svako $\alpha > 0$. Ovu relaciju možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(x)], \\ x &= \mathcal{P}_{C(u)}[u - \alpha F(u)]. \end{aligned}$$

Na osnovu toga, možemo definisati novi metod drugog reda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Za početnu tačku $x_0 \in H$, metod ima oblik:

$$\begin{aligned} u_k &= (1 - b_k)x_k + b_k \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(u_k)}[u_k - \alpha F(u_k)], \end{aligned}$$

gdje su $0 \le a_k, b_k \le 1$ za svako $k \ge 0$ i $\alpha > 0$ parametri metoda.

Ovaj metod konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) pod istim uslovima kao u prethodnoj teoremi, uz dodatni uslov $b_k \ge 0$. U daljem tekstu, razmatraćemo odgovarajući metod trećeg reda za koji ćemo izvesti brzinu konvergencije. Dio dokaza konvergencije metoda trećeg reda se poklapa sa dokazom konvergencije metoda drugog reda (3.11), pa zbog toga ovdje nećemo izlagati kompletan dokaz nego ćemo samo napomenuti da važi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \le \prod_{i=0}^{k} (1 - a_i(1 - \theta)(1 + b_i \theta)) \|x_0 - x_*\|,$$

gdje je $\theta = \lambda + \sqrt{1 - 2\mu\alpha + \alpha^2 L^2}$ i x_* jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (3.1).

3.2.3 Metod trećeg reda

U prethodnom paragrafu na osnovu metoda (3.9) konstruisali smo metod drugog reda. Na sličan način, konstruišemo metod trećeg reda. Početnu aproksimaciju $x_0 \in H$ izaberimo proizvoljno. Pretpostavimo da je $k-$ta aproksimacija x_k već konstruisana. Pomoćne tačke u_k i w_k nalazimo iz

$$u_k = (1 - c_k)x_k + c_k \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \tag{3.11}$$

$$w_k = (1 - b_k)x_k + b_k \mathcal{P}_{C(u_k)}[u_k - \alpha F(u_k)]. \tag{3.12}$$

Tada sljedeću aproksimaciju x_{k+1} definišemo na sljedeći način:

$$x_{k+1} = (1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(w_k)}[w_k - \alpha F(w_k)]. \tag{3.13}$$

Ovo važi za svako $k = 0, 1, 2, \dots$, pri čemu su $0 \le a_k, b_k, c_k \le 1$ za svako $k \ge 0$ i $\alpha > 0$ parametri metoda.

U sljedećoj teoremi razmatramo konvergenciju predloženog metoda.

Teorema 3.2.2 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1) *Operator $F : H \to H$ je jako monoton sa parametrom jake monotonosti $\mu > 0$ i Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom $L > 0$;*

2) *Multifunkcija $C(x)$ zadovoljava uslov (1.7) sa $\lambda < 1 - \sqrt{1 - \mu^2/L^2}$;*

3) *Za parametre α, a_k, b_k i c_k važi*

$$\left|\alpha - \frac{\mu}{L^2}\right| < \frac{\sqrt{\mu^2 - L^2\lambda(2-\lambda)}}{L^2},$$

$$0 \le a_k, b_k, c_k \le 1 \quad \forall k \ge 0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty.$$

Tada diskretni metod trećeg reda konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (3.1) sljedećom brzinom

$$\|x_{k+1} - x_*\| \le \prod_{i=0}^{k}(1 - a_i(1-\theta)(1 + b_i\theta + b_i c_i \theta^2))\|x_0 - x_*\|, \tag{3.14}$$

gdje je $\theta = \lambda + \sqrt{1 - 2\mu\alpha + \alpha^2 L^2}$.

Dokaz. Ispunjeni su uslovi teoreme 1.3.2 pa postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ kvazi-varijacione nejednakosti (3.1). Tada, iz leme 1.3.1 vidimo da važi

$$\begin{aligned} x_* &= (1 - c_k)x_* + c_k \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)], && (3.15)\\ &= (1 - b_k)x_* + b_k \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)], && (3.16)\\ &= (1 - a_k)x_* + a_k \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)], && (3.17) \end{aligned}$$

gdje su $0 < a_k, b_k, c_k < 1$ konstante. Korišćenjem (3.13), (3.17) i svojstva (1.7) imamo

$$\begin{aligned} &\|x_{k+1} - x_*\| = \|(1 - a_k)x_k + a_k \mathcal{P}_{C(w_k)}[w_k - \alpha F(w_k)] \\ &-(1 - a_k)x_* + a_k \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\| \\ \le\ & (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\|\mathcal{P}_{C(w_k)}[w_k - \alpha F(w_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\| \\ \le\ & (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\|\mathcal{P}_{C(w_k)}[w_k - \alpha F(w_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[w_k - \alpha F(w_k)]\| \\ & + a_k\|\mathcal{P}_{C(x_*)}[w_k - \alpha F(w_k)] - \mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\| \\ \le\ & (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\lambda\|w_k - x_*\| + a_k\|w_k - x_* - \alpha(F(w_k) - F(x_*))\|, \end{aligned} \tag{3.18}$$

za svako $k \geq 0$.

Operator F je jako monoton sa konstantom $\mu > 0$ i Lipšic neprekidan sa konstantom $L > 0$ pa važi sljedeća ocjena

$$\begin{aligned}\|w_k - x_* - \alpha(F(w_k) - F(x_*))\|^2 &= \|w_k - x_*\|^2 - 2\alpha\langle F(w_k) - F(x_*), w_k - x_*\rangle \\ &\quad + \alpha^2\|F(w_k) - F(x_*)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2)\|w_k - x_*\|^2.\end{aligned}$$

Uvrštavajući ovu ocjenu u nejednakost (3.18) dobijamo

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_*\| &\leq (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\left(\lambda + \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}\right)\|w_k - x_*\| \\ &= (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\theta\|w_k - x_*\|, \qquad (3.19)\end{aligned}$$

gdje je

$$\theta = \lambda + \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}.$$

Zbog uslova $\left|\alpha - \frac{\mu}{L^2}\right| < \frac{\sqrt{\mu^2 - L^2\lambda(2-\lambda)}}{L^2}$ zaključujemo da je $0 < \theta < 1$. Napomenimo da je taj uslov dobro definisan jer je $\lambda < 1 - \sqrt{1 - \mu^2/L^2}$ pa je potkorjena veličina $\mu^2 - L^2\lambda(2 - \lambda)$ pozitivna.

Dalje, iz (3.12) i (3.16) dobijamo

$$\begin{aligned}\|w_k - x_*\| &= \big\|(1 - b_k)x_k + b_k\mathcal{P}_{C(u_k)}[u_k - \alpha F(u_k)] \\ &\quad -(1 - b_k)x_* + b_k\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\big\| \\ &\leq (1 - b_k)\|x_k - x_*\| + b_k\theta\|u_k - x_*\|. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Analogno, iz (3.11) i (3.15) dobijamo

$$\begin{aligned}\|u_k - x_*\| &= \big\|(1 - c_k)x_k + c_k\mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)] \\ &\quad -(1 - c_k)x_* + c_k\mathcal{P}_{C(x_*)}[x_* - \alpha F(x_*)]\big\| \\ &\leq (1 - c_k)\|x_k - x_*\| + c_k\theta\|x_k - x_*\| \\ &= (1 - c_k(1 - \theta))\|x_k - x_*\| \qquad (3.21)\end{aligned}$$

Iz (3.20) i (3.21) imamo

$$\begin{aligned}\|w_k - x_*\| &\leq (1 - b_k)\|x_k - x_*\| + b_k\theta(1 - c_k(1 - \theta))\|x_k - x_*\| \\ &= (1 - b_k(1 - \theta(1 - c_k(1 - \theta))))\,\|x_k - x_*\|. \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem (3.22) u (3.19) dobijamo

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_*\| &\leq (1 - a_k)\|x_k - x_*\| + a_k\theta\|w_k - x_*\| \\ &\leq (1 - a_k(1 - \theta)(1 + b_k\theta + b_k c_k\theta^2))\|x_k - x_*\| \\ &\leq \prod_{i=0}^{k}(1 - a_i(1 - \theta)(1 + b_i\theta + b_i c_i\theta^2))\|x_0 - x_*\|.\end{aligned}$$

Red $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ je divergentan, konstanta $(1-\theta)$ je veća od 0 i $b_i, c_i \in [0,1]$ za svako $i = 0, 1, \dots$ tako da važi

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} (1 - a_i(1-\theta)(1 + b_i\theta + b_i c_i \theta^2)) = 0.$$

Dakle, dobili smo da niz (x_k) jako konvergira ka jedinstvenom rješenju x_* kvazi varijacione nejednakosti (3.1) i pri tome je izvedena ocjena brzine konvergencije (3.14), čime je teorema dokazana. $\square$

Glava 4

Metodi za rješavanje specijalnih oblika kvazi-varijacionih nejednakosti

Kao što smo već napomenuli, kod rješavanja kvazi-varijacionih nejednakosti u opštem slučaju postoji mnogo poteškoća. Iz praktičnog ugla, uslov (1.7) koji obezbjeđuje egzistenciju i jedinstvenost rješenja nije lako provjerljiv. Klasa problema za koju znamo jasne uslove egzistencije i jedinstvenosti rješenja i konvergencije metoda je klasa kvazi-varijacionih nejednakosti za koje je multifunkcija C definisana kao u lemi 1.3.2. U ovoj glavi razmatraćemo taj slučaj. Naime, rješavamo sljedeću kvazi-varijacionu nejednakost: naći $x_* \in C(x_*)$ takvo da

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C(x_*), \tag{4.1}$$

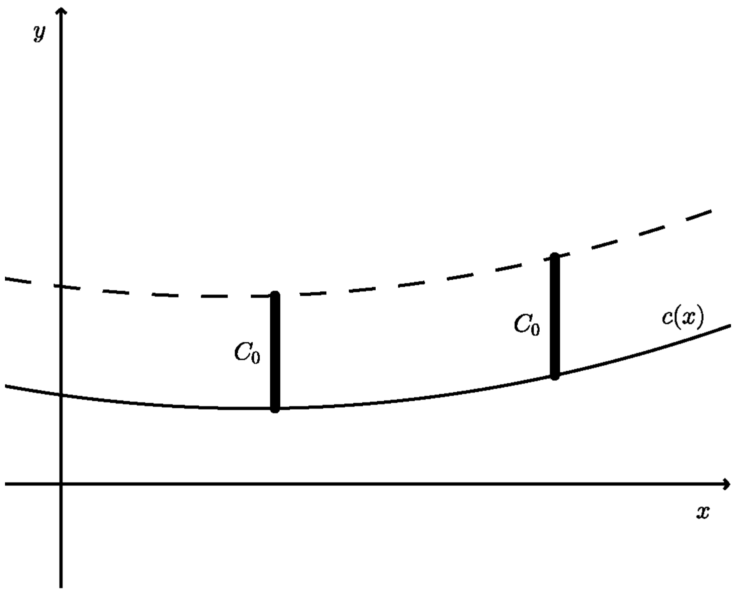
pri čemu je multifunkcija C zadata u obliku

$$C(x) = c(x) + C_0, \tag{4.2}$$

gdje je funkcija $c : H \to H$ Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom l i C_0 konveksan, zatvoren skup u Hilbertovom prostoru H.

Geometrijska interpretacija multifunkcije C u slučaju kada je $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prikazana je na slici 4.1. Skup C se nalazi između isprekidane i neprekidne linije.

Kvazi-varijaciona nejednakost (4.1), kao što smo već vidjeli u lemi 1.3.2, ima jedinstveno rješenje ako je $l < \mu/L$. U daljem tekstu definišemo nove metode za rješavanje ovih kvazi-varijacionih nejednakosti i svuda ćemo pretpostaviti da jedinstveno rješenje postoji. Dakle, akcenat stavljamo na sam metod i na njegovu konvergenciju ka tom jedinstvenom rješenju.



Slika 4.1: Primjer skupa $c(x) + C_0$

4.1 Metod projekcije gradijenta prvog reda

U ovom paragrafu razmatramo gradijentne metode koji su uvedeni u prethodnoj glavi i primjenjujemo ih na specijalan slučaj kada je C oblika (4.2).

4.1.1 Iterativni procesi

U prethodnoj glavi razmatrali smo diskretni metod projekcije gradijenta i dokazali njegovu konvergenciju za opšti slučaj kvazi-varijacionih nejedankosti. Naravno, ovaj metod konvergira ka jedinstvenom rješenju i u ovom specijalnom slučaju i važi ocjena dobijena u teoremi 3.1.1. Radi kompletnosti, ukratko ćemo izložiti dokaz konvergencije tog metoda u specijalnom slučaju, kada je $C(x)$ oblika (4.2). Dobijene ocjene ukazuju na šire mogućnosti izbora parametra metoda nego u opštem slučaju.

Metod (3.2) u slučaju kada je $C(x) = \mathrm{c}(x) + C_0$ možemo zapisati u obliku lemu 1.2.1)

$$x_{k+1} - c(x_k) = \mathcal{P}_{C_0}[x_k - c(x_k) - \alpha F(x_k)], \tag{4.3}$$

gdje je $x_0 \in H$ početna tačka i $\alpha > 0$ parametar metoda.

Pretpostavimo da postoji jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i označimo ga sa $x_* \in C(x_*)$. Iz definicije niza (x_k) zaključujemo da svako x_{k+1} pripada skupu $C(x_k)$, pa element $x_{k+1} - c(x_k) \in C_0$. Kako je x_* rješenje kvazi-varijacione nejednakosti to nejednakost (4.1) važi za svako $y \in C(x_*)$, pa specijalno i za $y = x_{k+1} - c(x_k) + c(x_*) \in C(x_*)$:

$$\langle F(x_*), x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq 0. \tag{4.4}$$

Iz (4.3) imamo da je $x_{k+1} - c(x_k)$ projekcija nekog elementa na skup C_0, pa na osnovu teoreme 1.2.3, (4.3) možemo predstaviti u obliku varijacione nejednakosti

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(x_k), z - x_{k+1} + c(x_k)\rangle \geq 0,$$

koja važi za svako $z \in C_0$. Pošto je x_* rješenje kvazi-varijacione nejednakosti tada se element $x_* - c(x_*)$ nalazi u skupu C_0 i možemo ga postaviti u prethodnu nejednakost umjesto z. Tada je

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(x_k), x_* - x_{k+1} + c(x_k) - c(x_*)\rangle \geq 0. \tag{4.5}$$

Nejednakost (4.4) pomnožimo sa $\alpha > 0$ i saberimo sa (4.5). Tada dobijamo

$$\begin{aligned} & \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ \leq\ & \alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_* - x_{k+1} + c(x_k) - c(x_*)\rangle, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Prethodnu nejednakost pomnožimo sa 2 i napišimo u obliku

$$\begin{aligned} & 2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle + 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ +\ & 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle \\ \leq\ & 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_{k+1}\rangle + 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), c(x_k) - c(x_*)\rangle, \end{aligned}$$

za svako $k \geq 0$. Lako se provjerava da važi

$$2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \|x_k - x_*\|^2.$$

Uvrštavanjem u prethodnu nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \|x_k - x_*\|^2 \\ +\ & 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle + 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ \leq\ & 2\alpha\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_{k+1}\rangle \\ +\ & 2\alpha_k\langle F(x_k) - F(x_*), c(x_k) - c(x_*)\rangle \geq 0, \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Koristeći ε-nejednakost: $2ab \leq \varepsilon a^2 + 1/\varepsilon b^2$ i Lipšic neprekidnost funkcije c imamo da

$$2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq -\frac{1}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 - 2l^2\|x_k - x_*\|^2,$$

$$2\alpha\langle F(x_k)-F(x_*),x_k-x_{k+1}\rangle \le 2\alpha^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+\frac{1}{2}\|x_k-x_{k+1}\|^2,$$
$$2\alpha\langle F(x_k)-F(x_*),c(x_k)-\mathrm{c}(x_*)\rangle \le \alpha^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+l^2\|x_k-x_*\|^2.$$

Uvrštavajući dobijene ocjene u nejednakost (4.6) dobijamo

$$\begin{aligned}
& \|x_{k+1}-x_k\|^2+\|x_{k+1}-x_*\|^2-\|x_k-x_*\|^2-\frac{1}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2\\
+ \; & 2\alpha\langle F(x_k)-F(x_*),x_k-x_*\rangle-2l^2\|x_k-x_*\|^2\\
\le \; & 2\alpha^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+\frac{1}{2}\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
+ \; & \alpha^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+l^2\|x_k-x_*\|^2 \ge 0, \quad k\ge 0,
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x_*\|^2 \;\le\; & (1+3l^2)\|x_k-x_*\|^2-2\alpha\langle F(x_k)-F(x_*),x_k-x_*\rangle\\
+ \; & 3\alpha^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2, \quad k\ge 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Operator F je jako monoton i Lipšic neprekidan pa su ispunjeni uslovi teoreme 1.2.1 i važi

$$\|F(x)-F(y)\|^2+L\mu\|x-y\|^2 \le (L+\mu)\langle F(x)-F(y),x-y\rangle, \qquad (4.8)$$

za svako $x,y\in H$. Osim toga, pokažimo da važi

$$\mu\|x-y\| \le \|F(x)-F(y)\| \le L\|x-y\|, \quad \forall x,y\in H. \qquad (4.9)$$

Na osnovu nejednakosti Koši-Bunjakovskog, iz (4.8) proističe

$$\|F(x)-F(y)\|^2+L\mu\|x-y\|^2 \le (L+\mu)\|F(x)-F(y)\|\cdot\|x-y\|.$$

Označimo sa $u=\|F(x)-F(y)\|$. Tada posljednju nejednakost možemo napisati u obliku $u^2-(L+\mu)\|x-y\|u+L\mu\|x-y\|^2\le 0$. Kvadratni trinom na lijevoj strani nejednačine ima korijene $u_1=\mu\|x-y\|$ i $u_2=L\|x-y\|$, pa je rješenje nejednačine $u_1\le u\le u_2$, t.j. važi (4.9).

Primijenom nejednakosti (4.8) za $x=x_k$ i $y=x_*$ dobijamo

$$\langle F(x_k)-F(x_*),x_k-x_*\rangle \ge (L+\mu)^{-1}\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+(L+\mu)^{-1}L\mu\|x_k-x_*\|^2,$$

koja važi za svako $k\ge 0$. Uvrstimo to u nejednakost (4.7) i dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x_*\|^2 \le & \left(1+3l^2-\frac{2\alpha L\mu}{L+\mu}\right)\|x_k-x_*\|^2\\
& +\alpha\left(3\alpha-\frac{2}{L+\mu}\right)\|F(x_k)-F(x_*)\|^2, \quad k\ge 0.
\end{aligned} \qquad (4.10)$$

Pretpostavimo da je $l < \frac{1}{3}$.

Razmotrimo dva moguća slučaja:

1^o Ako je $\frac{1}{3\mu}(1 - \sqrt{1 - 9l^2}) < \alpha < \frac{2}{3(L+\mu)} \leq \frac{1}{3\mu}$, iz (4.10) i lijeve nejednakosti (4.9) imamo

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|^2 &\leq \left(1 + 3l^2 - \frac{2\alpha L\mu}{L+\mu} + \alpha\mu^2\left(3\alpha - \frac{2}{L+\mu}\right)\right)\|x_k - x_*\|^2 \\ &= \left(1 + 3l^2 + 3\alpha^2\mu^2 - 2\alpha\mu\right)\|x_k - x_*\|^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Konstanta uz $\|x_k - x_*\|^2$ je manja od 1 pod uslovom da je $l^2 < \frac{2\mu}{3(L+\mu)}$.

2^o Ako je $\frac{1}{3L} \leq \frac{2}{3(L+\mu)} \leq \alpha < \frac{1}{3L}(1 + \sqrt{1 - 9l^2})$, iz (4.10) i desne nejednakosti (4.9) slijedi

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|^2 &\leq \left(1 + 3l^2 - \frac{2\alpha L\mu}{L+\mu} + \alpha L^2\left(3\alpha - \frac{2}{L+\mu}\right)\right)\|x_k - x_*\|^2 \\ &= \left(1 + 3l^2 + 3\alpha^2 L^2 - 2\alpha L\right)\|x_k - x_*\|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Konstanta $1 + 3l^2 + 3\alpha^2L^2 - 2\alpha L$ je manja od 1 kada je $l^2 < \frac{8\mu}{9(L+\mu)}$.

Objedinjavajući oba slučaja dobijamo ocjenu brzine konvergencije niza (x_k) ka rješenju x_*

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq q(\alpha)\|x_k - x_*\|^2, \quad k \geq 0,$$

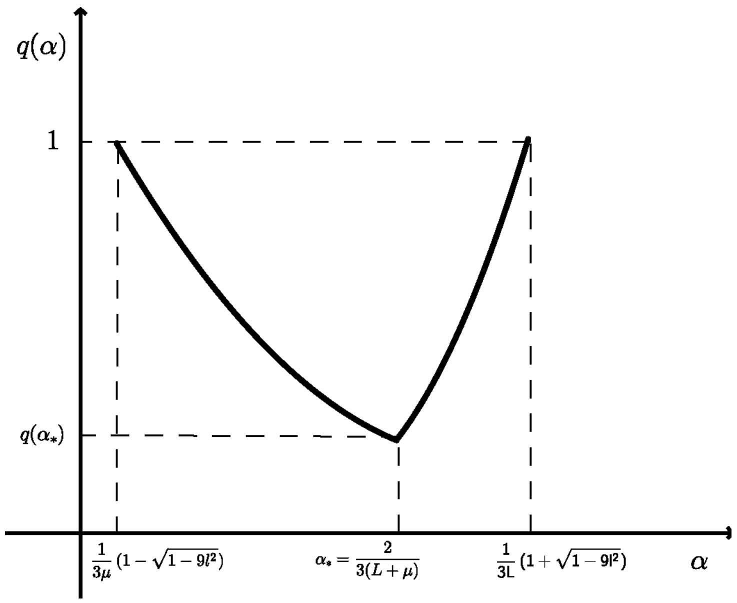
gdje je

$$q(\alpha) = \begin{cases} 1 + 3l^2 - \alpha\mu(2 - 3\alpha\mu), & \text{ako } \frac{1}{3\mu}(1 - \sqrt{1 - 9l^2}) < \alpha < \frac{2}{3(L+\mu)} \\ 1 + 3l^2 - \alpha L(2 - 3\alpha L), & \text{ako } \frac{2}{3(L+\mu)} \leq \alpha < \frac{1}{3L}(1 + \sqrt{1 - 9l^2}) \end{cases}.$$

Funkcija $q(\alpha)$ je predstavljena na slici 4.2. Vidimo da funkcija $q(\alpha)$ dostiže minimum na skupu $\frac{1}{3\mu}(1 - \sqrt{1 - 9l^2}) < \alpha < \frac{1}{3L}(1 + \sqrt{1 - 9l^2})$ u tački $\alpha_* = \frac{2}{3(L+\mu)}$, pri čemu je $q(\alpha_*) = 1 + 3l^2 - \frac{4L\mu}{3(L+\mu)^2}$. Ovim je dokazana sljedeća teorema

Teorema 4.1.1 *Neka je H Hilbertov prostor, operator $F : H \to H$ jako monoton i Lipšic neprekidan sa parametrima μ i L, redom. Neka je multifunkcija C oblika $C(x) = \mathrm{c}(x) + C_0$ $(\forall x \in H)$, gdje je $c : H \to H$ Lipšic neprekidna funkcija sa parametrom l takvim da $l^2 < \min\{(2\mu)/(3(L+\mu)), 1/9\}$ i skup C_0 je zatvoren, konveksan podskup od H i parametar metoda $\alpha \in ((1 - \sqrt{1 - 9l^2})/(3\mu), (1 + \sqrt{1 - 9l^2})/(3L))$. Tada niz (x_k), jednoznačno određen u (4.3), konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i važi*

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq q^k(\alpha)\|x_0 - x_*\|^2, \quad k = 0, 1 \ldots$$



Slika 4.2: Funkcija $q(\alpha)$

Na osnovu izloženog neprekidnog procesa (4) moguće je konstruisati različite iterativne metode, koji predstavljaju odgovarajuće diskretne analoge. Jedan takav proces je konstruisan u [57]: Uslovi konvergencije izvedeni u ovoj disertaciji različiti su od uslova iz rada [57].

Sada ćemo izložiti još jednu varijantu iterativnog metoda projekcije gradijenta za rješavanje problema (4.1), koja predstavlja diskretni analog neprekidnog procesa (3.6) . Ovaj metod je konstruisan u [57]. Neke uslove konvergencije smo oslabili zbog čega navodimo detaljan dokaz ocjene brzine konvergencije. Metod je određen sa

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_k}+x_{k+1}-c(x_{k+1}) = \mathcal{P}_{C_0}\big[x_{k+1}-c(x_{k+1})-\alpha_k F(x_{k+1})\big],\ \ k=0,1,2,\dots \tag{4.13}$$

gdje je element $x_0 \in H$ zadat proizvoljno, (τ_k) i (α_k) su nizovi pozitivnih brojeva. Koristeći teoremu 1.2.3, jednakost (4.13) prevodimo na ekvivalentnu varijacionu nejednakost

$$\left\langle \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_k} + \alpha_k F(x_{k+1}), y - \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_k} - x_{k+1} + c(x_{k+1}) \right\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C_0. \tag{4.14}$$

Pri tome, element $(x_{k+1}-x_k)/\tau_k + x_{k+1} - c(x_{k+1}) \in C_0$. Označimo sa $u_k = (x_{k+1}-x_k)/\tau_k + x_{k+1} \in C(x_{k+1})$, pa je

$$x_{k+1} = \frac{\tau_k u_k + x_k}{1+\tau_k}, \qquad \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_k} = \frac{u_k - x_k}{1+\tau_k}.$$

U novim oznakama, nejednakost (4.14) postaje

$$\left\langle \frac{u_k - x_k}{1+\tau_k} + \alpha_k F\left(\frac{\tau_k u_k + x_k}{1+\tau_k}\right), z - u_k \right\rangle \geq 0,$$
$$\forall z \in C(x_{k+1}) = C\left(\frac{\tau_k u_k + x_k}{1+\tau_k}\right),$$

pri čemu $u_k \in C(x_{k+1})$. Odavde zaključujemo da je u_k rješenje kvazi-varijacione nejednakosti: naći $u^* \in \tilde{C}(u^*)$ tako da

$$\left\langle \frac{u^* - x_k}{1+\tau_k} + \alpha_k F\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right), z - u^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall z \in \tilde{C}(u^*),$$

gdje je

$$\tilde{C}(u^*) = C\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right).$$

Poslednju nejednakost možemo napisati u obliku: naći $u^* \in \tilde{C}(u^*)$ tako da

$$\langle \tilde{F}(u^*), z - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \tilde{C}(u^*), \tag{4.15}$$

gdje za svako $x \in H$ važi

$$\tilde{C}(x) = \tilde{c}(x) + C_0, \ \ \tilde{c}(x) = c\left(\frac{\tau_k x + x_k}{1+\tau_k}\right), \ \ \tilde{F}(x) = \frac{x - x_k}{1+\tau_k} + \alpha_k F\left(\frac{\tau_k x + x_k}{1+\tau_k}\right).$$

Koristeći svojstvo jake monotonosti operatora F, proizilazi

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{F}(x_*) &- \tilde{F}(u^*) \rangle \\
&= \left\langle x_* - u^* + \alpha_k \left(F\left(\frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k}\right) - F\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right)\right), x_* - u^* \right\rangle \\
&= \|x_* - u^*\|^2 + \frac{1+\tau_k}{\tau_k}\alpha_k \Big\langle F\left(\frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k}\right) - F\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right), \\
&\qquad \frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k} - \frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k} \Big\rangle \\
&\geq \|x_* - u^*\|^2 + \frac{1+\tau_k}{\tau_k}\alpha_k \mu \left\| \frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k} - \frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k} \right\|^2 \\
&= \left(1 + \frac{\tau_k \alpha_k \mu}{1+\tau_k}\right) \|x_* - u^*\|^2.
\end{aligned}$$

Operator F je i Lipšic neprekidan pa važi

$$\begin{aligned}
\|\tilde{F}(x_*) - \tilde{F}(u^*)\| &= \left\| x_* - u^* + \alpha_k \left(F\left(\frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k}\right) - F\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right)\right)\right\| \\
&\leq \|x_* - u^*\| + \alpha_k L \left\| \frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k} - \frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k} \right\| \\
&\leq \left(1 + \frac{\alpha_k \tau_k L}{1+\tau_k}\right) \|x_* - u^*\|.
\end{aligned}$$

Slično, zbog Lipšic neprekidnosti funkcije c imamo

$$\begin{aligned}
\|\tilde{c}(x_*) - \tilde{c}(u^*)\| &= \left\| c\left(\frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k}\right) - c\left(\frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k}\right)\right\| \\
&\leq l \left\| \frac{\tau_k x_* + x_k}{1+\tau_k} - \frac{\tau_k u^* + x_k}{1+\tau_k} \right\| \\
&= \frac{\tau_k l}{1+\tau_k} \|x_* - u^*\|.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je operator $\tilde{F}$ jako monoton sa konstantom $\tilde{\mu} = 1 + \frac{\tau_k \alpha_k \mu}{1+\tau_k}$ i Lipšic neprekidan sa konstantom $\tilde{L} = 1 + \frac{\alpha_k \tau_k L}{1+\tau_k}$. Takođe, i funkcija c je Lipšic neprekidna sa konstantom $\tilde{l} = \frac{\tau_k l}{1+\tau_k}$. Iz posledice 1.3.1, kvazi-varijaciona nejednakost (4.15), a posljedično i nejednakost (4.13), ima jedinstveno rješenje x_{k+1} ako $\tilde{l} < \tilde{\mu}/\tilde{L}$, odnosno

$$\frac{\tau_k}{1+\tau_k} l < \frac{1 + \tau_k + \tau_k \alpha_k \mu}{1 + \tau_k + \tau_k \alpha_k L}. \tag{4.16}$$

Dalje, pretpostavimo da su nizovi (α_k) i (τ_k) izabrani tako da važi nejednakost (4.16).

Postavimo $y = x_* - c(x_*) \in C_0$ u nejednakost (4.14). Nejednakost (4.1) pomnožimo sa α_k i postavimo $y = (x_{k+1} - x_k)/\tau_k + x_{k+1} - c(x_{k+1}) + c(x) \in C(x)$. Sabirajući tako dobijene nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} + \alpha_k F(x_{k+1}), x_* - x_{k+1} - \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} + c(x_{k+1}) - c(x_*) \right\rangle \\
+ \quad & \alpha_k \left\langle F(x_*), \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} + x_{k+1} - x_* - c(x_{k+1}) + c(x_*) \right\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau_k^2}\|x_{k+1}-x_k\|^2+\frac{1}{\tau_k}\langle x_{k+1}-x_k, x_{k+1}-x_*\rangle \\
+ \quad & \frac{1}{\tau_k}\langle x_{k+1}-x_k, c(x_*)-c(x_{k+1})\rangle+\alpha_k\langle F(x_{k+1})-F(x_*), x_{k+1}-x_*\rangle \\
+ \quad & \frac{\alpha_k}{\tau_k}\langle F(x_{k+1})-F(x_*), x_{k+1}-x_k\rangle \\
+ \quad & \alpha_k\langle F(x_{k+1})-F(x_*), c(x_*)-c(x_{k+1})\rangle \leq 0. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Primjenjujući nejednakost ([64], strana 160)

$$\phi(u)-\phi(v) \leq \langle \phi'(u), u-v\rangle$$

na funkcional $\phi(u)=\|u\|^2/2$, dobijamo

$$\frac{\|x_{k+1}-x_*\|^2}{2}-\frac{\|x_k-x_*\|^2}{2} \leq \langle x_{k+1}-x_*, x_{k+1}-x_k\rangle.$$

Ocijenimo i ostale sabirke iz nejednakosti (4.17). Operator F je jako monoton pa je

$$\langle F(x_{k+1})-F(x_*), x_{k+1}-x_*\rangle \geq \mu\|x_{k+1}-x_*\|^2.$$

Koristeći ε-nejednakost ($ab \leq (\varepsilon/2)a^2+(1/2\varepsilon)b^2$) i Lipšic neprekidnost operatora F i c dobijamo

$$\langle F(x_{k+1})-F(x_*), x_k-x_{k+1}\rangle \leq \frac{1}{4}L\|x_{k+1}-x_*\|^2+L\|x_{k+1}-x_k\|^2,$$

$$\langle c(x_{k+1})-c(x_*), x_{k+1}-x_k\rangle \leq \frac{1}{4}l\|x_{k+1}-x_*\|^2+l\|x_{k+1}-x_k\|^2,$$

$$\langle F(x_{k+1})-F(x_*), c(x_{k+1})-c(x_*)\rangle \leq Ll\|x_{k+1}-x_*\|^2.$$

Poslije uvrštavanja prethodnih ocjena u nejednakost (4.17) i množenja cijele nejednakosti sa τ_k^2 dobijamo

$$
\begin{aligned}
& (1-\tau_k(\alpha_k L+l))\,\|x_{k+1}-x_*\|^2 \\
& +\frac{\tau_k}{2}\left(1+2\alpha_k\tau_k\mu-\frac{\alpha_k L}{2}-\frac{l}{2}-2\alpha_k\tau_k lL\right)\|x_{k+1}-x_*\|^2 \\
\leq \quad & \frac{\tau_k}{2}\|x_k-x_*\|^2, \quad k \geq 0. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da je

$$1-\tau_k(\alpha_k L+l) \geq 0, \quad A_k=2\alpha_k\tau_k\mu-\frac{\alpha_k L}{2}-\frac{l}{2}-2\alpha_k\tau_k lL \geq 0, \quad k \geq 0. \qquad (4.19)$$

Tada, iz (4.18) dobijamo ocjenu

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq \left(1 - \frac{A_k}{1 + A_k}\right) \|x_k - x_*\|^2. \tag{4.20}$$

Ovim smo dokazali sljedeću teoremu:

Teorema 4.1.2 *Neka je H Hilbertov prostor, operator $F : H \to H$ jako monoton sa konstantom μ i Lipšic neprekidan sa konstantom L, multifunkcija C oblika (4.2), gdje je funkcija $c : H \to H$ Lipšic neprekidna sa konstantom l tako da $l < \mu/L$ i skup C_0 je zatvoren, konveksan podskup od H. Neka su (α_k) i (τ_k) nizovi pozitivnih realnih brojeva takvi da važi (4.16), (4.19), i brojni red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{1 + A_k} \tag{4.21}$$

divergira (A_k je definisano u (4.19)). Tada niz (x_k), jednoznačno određen u (4.13), za proizvoljni početni element $x_0 \in H$ konvergira ka jedinstvenom rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti (4.1), pri čemu je

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq \exp\left(-\sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 + A_i}\right) \|x_0 - x_*\|^2.$$

Napomena: Ako u uslovima teoreme 4.1.2 dodatno pretpostavimo da važi

$$0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_k \leq \alpha_1, \quad 0 < \tau_0 \leq \tau_k \leq \tau_1, \quad k = 0, 1, \ldots$$

tada će uslovi (4.16) i (4.19) biti ispunjeni ako

$$l\left(\frac{1 + \alpha_1\tau_1 L}{1 + \alpha_0\tau_0\mu} + 1\right) < \frac{1 + \tau_0}{\tau_1},$$

$$1 - \tau_1(\alpha_1 L + l) \geq 0, \quad 2\alpha_0\tau_0\mu - \frac{\alpha_1 L}{2}(1 + 4\tau_1 l) - \frac{l}{2} \geq A > 0,$$

i pri tomeće red (4.21) biti divergentan.

4.1.2 Neprekidni procesi

Neprekidni metod projekcije gradijenta (3.6), u slučaju kada je C definisano kao u (4.2), ima oblik

$$x'(t) + x(t) = c(x(t)) + \mathcal{P}_{C_0}[x(t) - c(x(t)) - \alpha(t)F(x(t))], \ t \geq 0, \tag{4.22}$$

gdje je $x(0) = x_0$ početna tačka i parametar metoda $\alpha(t)$ pozitivna neprekidna funkcija za $t \geq 0 \geq 0$ takva da

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_1. \tag{4.23}$$

Iz karakterističnog svojstva operatora projektovanja (1.4) i iz (4.22) dobijamo sljedeću varijacionu nejednakost

$$\langle x'(t) + \alpha(t)F(x(t)), x'(t) + x(t) - c(x(t)) - z\rangle \geq 0, \ \forall z \in C_0, \ t \geq 0. \tag{4.24}$$

Pretpostavimo da postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ kvazi-varijacione nejednakosti (4.1). Iz (4.22) slijedi da je $x'(t)+x(t)-c(x(t)) \in C_0$, pa element $x'(t) + x(t) - c(x(t)) + c(x_*)$ pripada skupu $C(x_*)$. Kako je nejednakost (4.1) zadovoljena za svako $y \in C(x_*)$ to ona važi i za $y = x'(t) + x(t) - c(x(t)) + c(x_*) \in C(x_*)$ i imamo da je

$$\alpha(t)\langle F(x_*), x'(t) + x(t) - c(x(t)) + c(x_*) - x_*\rangle \geq 0,$$

za svako $\alpha(t) > 0$. Dalje, $z = x_* - c(x_*) \in C_0$ postavimo u nejednakost (4.24) i dobijamo

$$\langle x'(t) + \alpha(t)F(x(t)), x'(t) + x(t) - c(x(t)) - x_* + c(x_*)\rangle \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Saberimo poslednje dvije nejednakosti . Tada je

$$\begin{aligned} & \langle x'(t), x'(t) + x(t) + c(x_*) - c(x(t)) - x_*\rangle \\ \leq \ & \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x_* - x'(t) - x(t) + c(x(t) - c(x_*)))\rangle, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} & \langle x'(t), x'(t)\rangle + \langle x'(t), x(t) - x_*\rangle + \langle x'(t), c(x_*) - c(x(t))\rangle \\ \leq \ & \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), -x'(t)\rangle + \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x_* - x(t)\rangle \\ & +\alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), c(x(t) - c(x_*)))\rangle. \ \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Sada ćemo ocijeniti svaki od članova iz (4.25).

Primijetimo da važe jednakosti

$$\langle x'(t), x'(t)\rangle = \|x'(t)\|^2, \tag{4.26}$$

i

$$\langle x'(t), x(t) - x_*\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t) - x_*\|^2. \tag{4.27}$$

Pošto je c Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom l i važi nejednakost $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, za svako $a, b \in H$, dobijamo

$$\begin{aligned} & \langle x'(t), c(x_*) - c(x(t)) \rangle \geq -\|x'(t)\| \cdot \|c(x_*) - c(x(t))\| \\ \geq & -\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|c(x_*) - c(x(t))\|^2 \geq -\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - \frac{1}{2}l^2\|x(t) - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Operator F je jako monoton i Lipšic neprekidan (parametar jake monotonosti je μ a Lipšicova konstanta je L) pa zadovoljava sljedeću nejednakost (vidi teoremu 1.2.1)

$$\|F(u) - F(v)\|^2 \leq (L + \mu)\langle F(u) - F(v), u - v \rangle - L\mu\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in H.$$

Kombinovnjem ove nejednakosti i pomenute ε-nejednakosti dobijamo ocjenu

$$\begin{aligned} & \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), -x'(t) \rangle \\ \leq & \frac{\alpha^2(t)}{2}\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 + \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 \\ \leq & \frac{\alpha^2(t)}{2}\big((L + \mu)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle - L\mu\|x(t) - x_*\|^2\big) \\ & + \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2. \end{aligned}$$

Iz Lipšic neprekidnosti funkcija F i c (Lipšicove konstante su L i l, redom) i Koši-Bunjakovski nejednakosti proizilazi

$$\langle F(x(t)) - F(x_*), c(x_*) - c(x(t))) \rangle \leq Ll\|x(t) - x_*\|^2.$$

Dobijene ocjene zamijenimo u (4.67). Tako dobijamo nejednakost

$$\begin{aligned} & 2\|x'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\|x(t) - x_*\|^2 - \|x'(t)\|^2 - l^2\|x(t) - x_*\|^2 \\ \leq & \ \alpha^2(t)\big((L + \mu)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle - L\mu\|x(t) - x_*\|^2\big) \\ + & \ \|x'(t)\|^2 - 2\alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle \\ + & \ 2lL\alpha(t)\|x(t) - x_*\|^2, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\|x(t) - x_*\|^2 \leq \big(l^2 - \alpha^2(t)L\mu + 2lL\alpha(t)\big)\|x(t) - x_*\|^2 + \\ & \alpha(t)\left(2 - \alpha(t)(L + \mu)\right)\langle F(x(t)) - F(x_*), x_* - x(t) \rangle. \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je

$$2 - \alpha(t)(L + \mu) > 0, \quad t \geq 0. \tag{4.28}$$

Tada, zbog jake monotonosti operatora F dobijamo nejednakost

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x(t)-x_*\|^2 &\leq \left(l^2-\alpha^2(t)L\mu+2lL\alpha(t)\right)\|x(t)-x_*\|^2\\
&- \mu\alpha(t)\left(2-\alpha(t)(L+\mu)\right)\|x(t)-x_*\|^2\\
&= \left(l^2+2lL\alpha(t)+\mu^2\alpha^2(t)-2\mu\alpha(t)\right)\|x(t)-x(*)\|^2.
\end{aligned}$$

Neka je

$$A_0 = 2\mu\alpha_0 - l^2 - 2lL\alpha_1 - \mu^2\alpha_1^2 > 0.$$

Tada dobijamo sljedeću nejednakost

$$\frac{d}{dt}\|x(t)-x_*\|^2 \leq -A_0\|x(t)-x_*\|^2, \quad t \geq 0.$$

Rješavanjem ove diferencijalne nejednačine dobijamo da

$$\|x(t)-x_*\|^2 \leq \exp\{-A_0 t\}\|x_0-x_*\|^2.$$

Slijedi, trajektorija $x(t)$ konvergira ka jedinstvenom rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) kada $t \to \infty$. Ovim je dokazana sljedeća teorema

Teorema 4.1.3 *Neka je H Hilbertov prostor, operator $F : H \to H$ je jako monoton sa parametrom jake monotonosti μ i Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstantom L, multifunkcija C je oblika (4.2), gdje je $c : H \to H$ Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom l tako da $l < \mu/L$ i skup C_0 je zatvoren, konveksan podskup od H. Pretpostavimo još da je funkcija $\alpha(t)$ neprekidna za $t \geq 0$ i važi (4.23) i (4.28) . Tada $x(t)$ za $t \to \infty$ konvergira po normi prostora H ka jedinstvenom rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti (4.1), pri čemu je*

$$\|x(t)-x_*\| \leq \exp\{-A_0 t/2\}\|x_0-x_*\|,$$

gdje je

$$A_0 = 2\mu\alpha_0 - l^2 - 2lL\alpha_1 - \mu^2\alpha_1^2.$$

4.2 Metodi projekcije gradijenta drugog reda

Metodi drugog reda imaju brojne prednosti u poređenju sa metodima prvog reda. Neke od njih su brža konvergencija, sposobnost preskakanja lokalnih ekstremuma u višeekstremalnim zadacima. Zbog toga ovdje razmatramo neprekidnu i diskretnu varijantu metoda projekcije gradijenta drugog reda za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti (4.1).

4.2.1 Iterativni procesi

U metodu projekcije gradijenta drugog reda za rešavanje kvazi-varijacionih nejednakosti, koji je razmatran u [8], konstruiše se niz (x_n) po sljedećem pravilu: pretpostavlja se da su početne tačke $x_0, x_1 \in H$ zadate; ukoliko je tačka $x_k \in C(x_{k-1})$, za neko $k \geq 0$ već poznata, to sljedeću aproksimaciju x_{k+1} nalazimo iz

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{C(x_k)}\big[x_k - \alpha_k F(x_k) - \beta_k(x_{k-1} - x_k)\big], \ k \geq 1.$$

Ovdje su nizovi (α_k), (β_k) parametri metoda. Za $\beta_k = 0$ za svako $k \geq 0$, ovaj metod se svodi na (3.2).

Primjenjujući lemu 1.2.1 na skup $C(x)$ koji je zadat sa (4.2), prethodna jednakost je ekvivalentna sa

$$x_{k+1} = c(x_k) + \mathcal{P}_{C_0}[x_k - c(x_k) - \alpha_k F(x_k) - \beta_k(x_{k-1} - x_k)], \ k \geq 1. \quad (4.29)$$

Sljedeća teorema nam daje ocjenu konvergencije metoda (4.29) ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione njednakosti (4.1).

Teorema 4.2.1 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1. *Operator $F : H \mapsto H$ je jako monoton i Lipšic neprekidan sa kontstantama $\mu > 0$ i $L > 0$, redom;*

2. *$C_0 \in H$ je zatvoren, konveksan skup u Hilbertovovm prostoru H, $c(x) : H \mapsto H$ je Lipšic neprekidna funkcija sa kontsantom $l \leq \frac{\mu}{L}$ i $C : H \to 2^H$ je multifunkcija oblika $C(x) = c(x) + C_0$ $(x \in H)$;*

3. *Nizovi (α_k) and (β_k) zadovoljavaju uslove:*

$$\begin{aligned} &0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}, \quad \beta_{k+1} \geq \beta_k, \quad k \geq 0, \\ &\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta_\infty > 0, \quad \underline{\alpha} \geq \frac{6l^2}{\mu}, \\ &\bar{\alpha} < \frac{2}{5}(L+\mu)^{-1}, \quad 8\beta_\infty + 2\bar{\alpha}\mu \leq 1 + 6l^2. \end{aligned}$$

Tada diskretan metod drugog reda (4.29) konvergira ka jedinstvenom rješenju problema (4.1) sljedećom brzinom konvergencije

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq \frac{(1 - \underline{\alpha}\mu + 6l^2)^k}{\bar{\alpha}\mu} A_1, \quad k \geq 1, \quad (4.30)$$

gdje je

$$A_1 = (\frac{1}{2} - \beta_0)\|x_1 - x_0\|^2 + \|x_1 - x_*\|^2 - \beta_0\|x_0 - x_*\|^2.$$

Dokaz. Kako su zadovoljeni uslovi posledice 1.3.1 zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ kvazi-varijacione nejednakosti (4.1). Pokažimo da niz (x_k), definisan u (4.29) konvergira ka x_*.

Relaciju (4.29) napišimo u obliku varijacione nejednakosti

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha_k F(x_k) + \beta_k(x_{k-1} - x_k), z - x_{k+1} + c(x_k)\rangle \geq 0, \tag{4.31}$$

gdje $z \in C_0$, $k \geq 1$.

Postavljajući $y = x_{k+1} + c(x_*) - c(x_k) \in C(x_*)$ u (4.1), $z = x_* - c(x_*) \in C_0$ u (4.31) i množeći (4.1) sa $\alpha_k > 0$, u sumi dobijenih nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} & \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ + \quad & \beta_k \langle x_{k-1} - x_k, x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ \leq \quad & \alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), x_* - x_{k+1} + c(x_k) - c(x_*)\rangle, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Prethodnu nejednakost pomnožimo sa 2 i napišimo u obliku

$$\begin{aligned} & 2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle + 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ + \quad & 2\beta_k \left(\langle x_{k-1} - x_*, x_{k+1} - x_*\rangle + \langle x_* - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle\right) \\ + \quad & 2\beta_k \langle x_{k-1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle + 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle \\ \leq \quad & 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_{k+1}\rangle + 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), c(x_k) - c(x_*)\rangle, \end{aligned}$$

za svako $k \geq 1$. Iz jednakosti $2\langle v - w, v - u\rangle = \|v - w\|^2 + \|v - u\|^2 - \|w - u\|^2$ koja važi za svako u, v, $w \in H$, dobijamo

$$2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \|x_k - x_*\|^2,$$

$$2\langle x_{k-1} - x_*, x_{k+1} - x_*\rangle = \beta_k \|x_{k-1} - x_*\|^2 + \beta_k \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k \|x_{k+1} - x_{k-1}\|^2,$$

$$2\langle x_* - x_k, x_* - x_{k+1}\rangle = -\beta_k \|x_k - x_*\|^2 - \beta_k \|x_{k+1} - x_*\|^2 + \beta_k \|x_{k+1} - x_k\|^2.$$

Tada gornja nejednakost postaje

$$\begin{aligned} & (1 + \beta_k)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - (1 + \beta_k)\|x_k - x_*\|^2 \\ + \quad & \beta_k \|x_{k-1} - x_*\|^2 - \beta_k \|x_{k+1} - x_{k-1}\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \\ + \quad & 2\beta_k \langle x_{k-1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle + 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_*\rangle \\ \leq \quad & 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_{k+1}\rangle \\ + \quad & 2\alpha_k \langle F(x_k) - F(x_*), c(x_k) - c(x_*)\rangle, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Napomenimo da nejednakost $2|uv| \leq \varepsilon u^2 + \frac{1}{\varepsilon} v^2$ važi za svako $\varepsilon > 0$. Zbog toga i Lipšic neprekidnosti funkcije c, imamo

$$2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq -\frac{1}{4}\|x_{k+1} - x_k\|^2 - 4l^2 \|x_k - x_*\|^2,$$

$$2\beta_k\langle x_{k-1}-x_k, c(x_*)-c(x_k)\rangle \geq -\beta_k^2\|x_{k-1}-x_k\|^2 - l^2\|x_k-x_*\|^2,$$

$$2\alpha_k\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_{k+1}\rangle \leq 4\alpha_k^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+\frac{1}{4}\|x_k-x_{k+1}\|^2,$$

$$2\alpha_k\langle F(x_k)-F(x_*), c(x_k)-\mathrm{c}(x_*)\rangle \leq \alpha_k^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2+l^2\|x_k-x_*\|^2.$$

Iz nejednakosti trougla i pomenute ε-nejednakosti proističe

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x_{k-1}\|^2 &= \|x_{k+1}-x_k+x_k-x_{k-1}\|^2 \\
&\leq \|x_{k+1}-x_k\|^2+2\langle x_{k+1}-x_k, x_k-x_{k-1}\rangle+\|x_k-x_{k-1}\|^2 \\
&\leq 2\|x_{k+1}-x_k\|^2+2\|x_k-x_{k-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene ocjene u nejednakost (4.32) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-\beta_k\right)\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|x_{k+1}-x_*\|^2-(1+\beta_k+6l^2))\|x_k-x_*\|^2 \\
+\ &\beta_k\|x_{k-1}-x_*\|^2-(2\beta_k+\beta_k^2)\|x_k-x_{k-1}\|^2\rangle \\
+\ &2\alpha_k\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_*\rangle \leq 5\alpha_k^2\|F(x_k)-F(x_*)\|^2, \quad k\geq 1. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Operator F je jako monoton sa parametrom jake monotonosti $\mu>0$ i Lipšic neprekidan sa Lipšicovom konstanom L pa su zadovoljeni uslove teoreme 1.2.1. Tada važi nejednakost

$$\|F(x_k)-F(x_*)\|^2 \leq (L+\mu)\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_*\rangle-\mu L\|x_k-x_*\|^2.$$

Sada nejednakost (4.33) postaje

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-\beta_k\right)\|x_{k+1}-x_k\|^2-\left(1+\beta_k+6l^2-5\mu L\alpha_k^2\right)\|x_k-x_*\|^2 \\
+\ &\beta_k\|x_{k-1}-x_*\|^2-(2\beta_k+\beta_k^2)\|x_k-x_{k-1}\|^2\rangle+\|x_{k+1}-x_*\|^2 \\
+\ &\alpha_k(2-5\alpha_k(L+\mu))\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_*\rangle \leq 0, \quad k\geq 1. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Iz uslova $0<\alpha_k\leq\bar{\alpha}$ i $\bar{\alpha}\leq\frac{2}{5}(L+\mu)^{-1}$ slijedi da je $2-5\alpha_k(L+\mu)>0$ za svako $k\geq 1$. Dakle, koeficijent uz $\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_*\rangle$ u nejednakosti (4.34) je pozitivan, pa možemo iskoristiti nejedankost (1.2) za jako monoton operator F. Tada je

$$\alpha_k(2-5\alpha_k(L+\mu))\langle F(x_k)-F(x_*), x_k-x_*\rangle \geq \alpha_k\mu(2-5\alpha_k(L+\mu))\|x_k-x_*\|^2.$$

Tada, uvrštavanjem prethodne nejednakosti i uslova o monotonosti niza (β_k) u (4.34) dobijamo

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{2}-\beta_k)\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|x_{k+1}-x_*\|^2-(2\beta_k+\beta_k^2)\|x_k-x_{k-1}\|^2 \\
-\ &\left(1+\beta_k+6l^2-\mu\alpha_k(2-5\mu\alpha_k)\right)\|x_k-x_*\|^2+\beta_{k-1}\|x_{k-1}-x_*\|^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

za $k \geq 1$. Prikažimo ovu nejednakost u obliku

$$
\begin{aligned}
& (\frac{1}{2} - \beta_k)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k\|x_k - x_*\|^2 \\
- & (1 - \alpha_k\mu + 6l^2)\Bigg(\left(\frac{1}{2} - \beta_{k-1}\right) \|x_k - x_{k-1}\|^2 + \|x_k - x_*\|^2 \\
& \qquad -\beta_{k-1}\|x_{k-1} - x_*\|^2\Bigg) \\
\leq & \beta_{k-1}(6l^2 - \alpha_k\mu)\|x_{k-1} - x_*\|^2 + \left(5(\alpha_k\mu)^2 - \alpha_k\mu\right) \|x_k - x_*\|^2 \\
+ & \left(2\beta_k + \beta_k^2 - (1 - \alpha_k\mu + 6l^2)(\frac{1}{2} - \beta_{k-1})\right) \|x_k - x_{k-1}\|^2, \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

za svako $k \geq 1$. Iz uslova $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}$ $(k \geq 1)$, $\underline{\alpha} \geq \frac{6l^2}{\mu}$ i $\bar{\alpha} \leq \frac{2}{5}(L + \mu)^{-1}$ zaključujemo da je

$$6l^2 - \alpha_k\mu \leq 0, \quad 5(\alpha_k\mu)^2 - \alpha_k\mu \leq 0,$$

za svako $k \geq 1$. Niz (β_k) je monoton i važi $8\beta_\infty + 2\bar{\alpha}\mu \leq 1 + 6l^2$, pa imamo

$$
\begin{aligned}
& 2\beta_k + \beta_k^2 - (1 - \alpha_k\mu + 6l^2)\left(\frac{1}{2} - \beta_{k-1}\right) \leq 4\beta_k + \frac{1}{2}\alpha_k\mu + \beta_k(6l^2 - \alpha_k\mu) \\
& -\frac{1}{2} - 3l^2 \leq 4\beta_k + \frac{1}{2}\alpha_k\mu - \frac{1}{2} - 3l^2 \leq 0, \text{ za svako } k \geq 1.
\end{aligned}
$$

Dakle, svi koeficijenti na desnoj strani nejednakosti (4.35) su negativni pa i cijeli izraz na desnoj strani nejednakosti je manji ili jednak od nule, pa važi

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \beta_k\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k\|x_k - x_*\|^2 \\
\leq & (1 - \alpha_k\mu + 6l^2)\Bigg(\left(\frac{1}{2} - \beta_{k-1}\right) \|x_k - x_{k-1}\|^2 + \|x_k - x_*\|^2 \\
& \qquad -\beta_{k-1}\|x_{k-1} - x_*\|^2\Bigg).
\end{aligned}
$$

Ova nejednakost važi za svako $k \geq 1$, pa dobijamo

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \beta_k\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k\|x_k - x_*\|^2 \\
\leq & \cdots \leq \left(1 - \underline{\alpha}\mu + 6l^2\right)^k A_1, \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

gdje je

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} - \beta_0\right) \|x_1 - x_0\|^2 + \|x_1 - x_*\|^2 - \beta_0\|x_0 - x_*\|^2.$$

Koristeći nejednakost

$$\|x_k - x_*\|^2 \le 2\|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\|x_{k+1} - x_*\|^2,$$

ocijenimo odozdo lijevu stranu nejednakosti (4.36):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \beta_k\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k\|x_k - x_*\|^2 \\ \ge \; & \left(\frac{1}{2} - 3\beta_k\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 + (1 - 2\beta_k) \|x_{k+1} - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Iz uslova $8\beta_\infty + 2\bar{\alpha}\mu \le 1 + 6l^2$ i monotonosti niza (β_k) slijedi $\frac{1}{2} - 3\beta_k > \bar{\alpha}\mu$ i $1 - 2\beta_k > \bar{\alpha}\mu$, za svako $k \ge 1$. Tada je

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \beta_k\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \beta_k\|x_k - x_*\|^2 \\ \ge \; & \bar{\alpha}\mu \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2\right), \quad k \ge 1. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Konačno, iz (4.36) i (4.37) dobijamo

$$\bar{\alpha}\mu \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2\right) \le \left(1 - \underline{\alpha}\mu + 6l^2\right)^k A_1, \quad k \ge 1.$$

Kako je iz uslova teoreme pozitivni koeficijent $1 - \underline{\alpha}\mu + 6l^2$ manji od 1 to je ovim pokazana konvergencija niza (x_k) ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti i pri tome brzina konvergencije je

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \le (\bar{\alpha}\mu)^{-1}\left(1 - \underline{\alpha}\mu + 6l^2\right)^k A_1, \quad k \ge 1.$$

Teorema je dokazana. □

4.2.2 Neprekidni procesi

Za rješavanje problema (4.1) razmotrimo neprekidni metod drugog reda, koji je izložen u [7]. Metod je dat diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$\begin{aligned} & \beta(t)x''(t) + x'(t) + x(t) = \mathcal{P}_{C(x(t))}[x(t) - \alpha(t)F(x(t))], \\ & x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \end{aligned} \tag{4.38}$$

gdje su parametri metoda $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ nenegativne funkcije za svako $t \geq 0$ i x_0, x_1 su početne tačke.

Diferencijalni sistem (4.38) za $C(x) = C$ za svako $x \in H$, sa konstantnim parametrima α i β, predstavlja metod drugog reda za rješavanje zadataka minimizacije koji je predložio A. S. Antipin u radu [2].

Kako je multifunkcija $C(x)$ data sa (4.2), metod (4.38) možemo napisati u obliku

$$\beta(t)x''(t) + x'(t) + x(t) = c(x(t)) + \mathcal{P}_{C_0}[x(t) - \alpha(t)F(x(t)) - c(x(t))], \quad t \geq 0. \tag{4.39}$$

Saglasno [30], jedinstveno rješenje diferencijalne jednačine (4.39) postoji na $[0, +\infty)$ za proizvoljne početne uslove $x(0) = x_0 \in H$, $x'(0) = x_1 \in H$. Formulišimo i dokažimo teoremu koja obezbjeđuje konvergenciju trajektorije metoda (4.38) ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione njednakosti (4.1).

Teorema 4.2.2 *Pretopstavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1. *$C_0 \subseteq H$ je zatvoren i konveksan skup u Hilbertovom prostoru H, $c : H \to H$ je Lipšic neprekidna funkcija sa Lipšicovom konstantom $l > 0$ i multifunkcija $C : H \to 2^H$ je data sa $C(x) := c(x) + C_0$, $x \in H$;*

2. *$F : H \to H$ je jako monoton i Lipšic neprekidan operator sa konstantama $\mu > 0$ i $L > 0$, redom;*

3. $$l < \min\left\{\frac{\mu}{L}, \frac{2\mu}{L^2}\left(L + \mu - \sqrt{\mu(2L+\mu)}\right)\right\}$$

4. *Parametri metoda $\alpha(\cdot) \in C^1[0, +\infty)$ i $\beta(t) = const$ zadovoljavaju uslove:*

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) > 0,\ \beta > 0,\ \alpha'(t) \leq 0, \quad t \geq 0; \quad \alpha(0) < 2(L+\mu)^{-1},\\
&\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha_\infty > 0, \quad \sqrt{1 - 4A(0)\beta} \geq 4\beta - 1,\\
&1 - 4\mu\alpha_\infty\beta(2 - \mu\alpha_\infty) - 4l\beta(1 + L\alpha_\infty) > 0,
\end{aligned}$$

gdje je

$$b(t) = \frac{1}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - 4A(t)\beta}\right),$$

$$A(t) = \alpha(t)\mu(2 - \alpha(t)\mu) - l - lL\alpha(t) > 0.$$

Tada trajektorija $x(t)$ definisana u (4.39) konvergira ka rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i važi:

$$\|x(t)-x_*\|^2 \le \|x(0)-x_*\|^2 \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) + C_0\rho(t)\exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right),$$

gdje je

$$f(t) = \frac{1}{2\beta}\left(1+\sqrt{1-4A(t)\beta}\right) > 0,$$

$$C_0 = (1-l)\beta h(0)\|x'(0)\|^2 + h(0)\left(1-\beta b(0)\right)\|x(0)-x_*\|^2,$$

$$\rho(t) = h(t)H^{-1}(t)\int_0^t H(s)(\beta h(s))^{-1}ds.$$

Dokaz. Ispunjeni su uslovi posledice 1.3.1 pa kvazi-varijaciona nejednakost (4.1) ima jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$.

Uslov (4.39) je ekvivalentan sa varijacionom nejednakošću

$$\langle \beta x''(t) + x'(t) + \alpha(t)F(x(t)), z - \beta x''(t) - x'(t) - x(t) + c(x(t))\rangle \ge 0.$$

Prethodna nejdankost važi za svako $z \in C_0$. Specijalno, važi i za $z = x_* - c(x_*) \in C_0$. Tada je

$$\langle \beta x''(t) + x'(t) + \alpha(t)F(x(t)), x_* - \beta x''(t) - x'(t) - x(t) + c(x(t)) - c(x_*)\rangle \ge 0. \tag{4.40}$$

Iz (4.39) slijedi da za svako $t \ge 0$ važi $y = \beta x''(t) + x'(t) + x(t) + c(x_*) - c(x(t)) \in c(x_*) + C_0 = C(x_*)$. Takvo $y \in C(x_*)$ postavimo u (4.1) i dobijenu nejednakost pomnožimo sa $\alpha(t) > 0$. Tada dobijamo

$$\alpha(t)\langle F(x_*), \beta x''(t) + x'(t) + x(t) - x_* + c(x_*) - c(x(t))\rangle \ge 0. \tag{4.41}$$

Iz zbira nejednakosti (4.40) i (4.41) proističe

$$\begin{aligned}
& \langle \beta x''(t) + x'(t), \beta x''(t) + x'(t)\rangle + \langle \beta x''(t) + x'(t), x(t) - x_*\rangle \\
+ \;& \langle \beta x''(t) + x'(t), c(x(t)) - c(x_*)\rangle \\
\le \;& \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x_* - x(t)\rangle \\
+ \;& \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), -\beta x''(t) - x'(t)\rangle \\
+ \;& \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), c(x(t)) - c(x_*)\rangle, \quad t \ge 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Za gornju ocjenu desne strane prethodne nejednakosti koristićemo nejednakost $ab \le a^2/2 + b^2/2$, koja važi za svako $a, b \in H$. Tada je

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), -\beta x''(t) - x'(t)\rangle \;&\le\; \frac{\alpha^2(t)}{2}\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 \\
&+\; \frac{1}{2}\|\beta x''(t) + x'(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Uz uslov da je funkcija c Lipšic neprekidna sa konstantom l imamo da

$$\begin{aligned}
&\langle \beta x''(t) + x'(t), c(x(t)) - c(x_*)\rangle \geq -l\|\beta x''(t) + x'(t)\| \cdot \|x(t) - x_*\| \\
&\geq -\frac{l}{2}\|\beta x''(t) + x'(t)\|^2 - \frac{l}{2}\|x(t) - x_*\|^2, \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

I operator F je Lipšic neprekidan sa konstantom L pa važi

$$\begin{aligned}
& \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), c(x(t)) - c(x_*)\rangle \\
\leq \;& \alpha(t)\|F(x(t)) - F(x_*)\| \cdot \|c(x(t)) - c(x_*)\| \\
\leq \;& L l \alpha(t)\|x(t) - x_*\|^2. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Ako uvrstimo (4.43), (4.44) i (4.45) u nejednakost (4.42), dobijamo nejednakost

$$\begin{aligned}
& \|\beta(t)x''(t) + x'(t)\|^2 + \langle \beta x''(t) + x'(t), x(t) - x_*\rangle \\
- \;& \frac{l}{2}\|\beta(t)x''(t) + x'(t)\|^2 - \frac{l}{2}\|x(t) - x_*\|^2 \\
\leq \;& \frac{\alpha^2(t)}{2}\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 + \frac{1}{2}\|\beta x''(t) + x'(t)\|^2 + L l \alpha(t)\|x(t) - x_*\|^2 \\
+ \;& \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x_* - x(t)\rangle,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2}\right)\|\beta(t)x''(t) + x'(t)\|^2 + \langle \beta x''(t) + x'(t), x(t) - x_*\rangle \\
- \;& \left(\frac{l}{2} + L l \alpha(t)\right)\|x(t) - x_*\|^2 \qquad (4.46) \\
\leq \;& \frac{\alpha^2(t)}{2}\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 - \alpha(t)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_*\rangle.
\end{aligned}$$

Primijenom nejednakosti iz teoreme 1.2.1 na operator F, koja važi za svako Lipšic neprekidno i jako monotono preslikavanje (sa Lipšicovom konstantom L i parametrom jake monotonosti μ) imamo da

$$\|F(x(t)) - F(x_*)\|^2 \leq (L + \mu)\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_*\rangle - L\mu\|x(t) - x_*\|^2.$$

Dobijenu ocjenu uvrstimo u nejednakost (4.46), pomnoženu sa 2:

$$\begin{aligned}
& (1 - l)\|\beta x''(t) + x'(t)\|^2 + 2\langle \beta x''(t) + x'(t), x(t) - x_*\rangle \\
- \;& (l - L\mu\alpha^2(t) + 2 L l \alpha(t))\|x(t) - x_*\|^2 \qquad (4.47) \\
+ \;& \alpha(t)[2 - (L + \mu)\alpha(t)]\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_*\rangle \leq 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Iz uslova $\alpha'(t) \leq 0$, $t \geq 0$ i $\alpha(0) < 2(L+\mu)^{-1}$ slijedi da $(L+\mu)\alpha(t) < 2$, $t \geq 0$, odnosno koeficijent uz izraz $\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle$ u (4.47) je pozitivan. Dakle, možemo primijeniti uslov jake monotonosti operatora F pa dobijamo

$$\begin{aligned} & \alpha(t)[2-(L+\mu)\alpha(t)]\langle F(x(t)) - F(x_*), x(t) - x_* \rangle \\ \geq \ & \mu\alpha(t)[2-(L+\mu)\alpha(t)]\|x(t)-x_*\|^2. \end{aligned}$$

Sada nejednakost (4.47) postaje

$$\begin{aligned} & (1-l)\|\beta x''(t) + x'(t)\|^2 + 2\langle \beta x''(t) + x'(t), x(t) - x_* \rangle \\ \leq \ & (l + 2Ll\alpha(t) - \mu\alpha(t)(2-\mu\alpha(t)))\,\|x(t)-x_*\|^2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} 2\langle x''(t), x'(t) \rangle &= \frac{d}{dt}\Big(\|x'(t)\|^2\Big), \\ \langle x'(t), x(t) - x_* \rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|x(t)-x_*\|^2\Big), \\ \langle x''(t), x(t) - x_* \rangle &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\|x(t)-x_*\|^2\Big) - \|x'(t)\|^2, \end{aligned}$$

pa nejednakost (4.48) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} & (1-l)\beta^2\|x''(t)\|^2 + (1-l-2\beta)\|x'(t)\|^2 + (1-l)\beta\frac{d}{dt}\left(\|x'(t)\|^2\right) \\ + \ & \beta\frac{d^2}{dt^2}\left(\|x(t)-x_*\|^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\|x(t)-x_*\|^2\right) + A(t)\|x(t)-x_*\|^2 \leq 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.49}$$

gdje je

$$A(t) = \alpha(t)\mu(2-\alpha(t)\mu) - l - 2lL\alpha(t) > 0, \quad t \geq 0$$

zbog izbora l u uslovu 3. u teoremi.

Pomnožimo nejednakost (4.49) sa $h(t) = \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right)$, gdje je $b(s) = \frac{1}{2\beta}\left(1-\sqrt{1-4\beta A(s)}\right)$ i integralimo je na segmentu $[0,t]$. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} & (1-l)\beta^2\int_0^t h(s)\|x''(s)\|^2 ds + (1-l)\beta h(t)\|x'(t)\|^2 \\ + \ & \beta h(t)\frac{d}{dt}\left(\|x(t)-x_*\|^2\right) + h(t)\left(1-\beta b(t)\right)\|x(t)-x_*\|^2 \\ + \ & \int_0^t h(s)\left(1-l-2\beta-\beta b(s)\right)\|x'(s)\|^2 ds \\ + \ & \int_0^t h(s)\left(\beta(b^2(s)+b'(s)) - b(s) + A(s)\right)\|x(s)-x_*\|^2 ds \\ \leq \ & C, \ t \geq 0, \end{aligned}$$

gdje je

$$C = (1-l)\beta h(0)\|x'(0)\|^2 + h(0)\left(1-\beta b(0)\right)\|x(0)-x_*\|^2,$$

i jasno je da C ne zavisi od t. Svi integrali na lijevoj strani prethodne nejednakosti su nenegativni pa imamo

$$\begin{aligned} & (1-l)\beta h(t)\|x'(t)\|^2 + \beta h(t)\frac{d}{dt}\left(\|x(t)-x_*\|^2\right) \\ + \quad & (1-\beta b(t))\, h(t)\|x(t)-x_*\|^2 \le C,\ t \ge 0. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Napomenimo da je prvi sabirak u (4.50) nenegativan i $1-\beta b(t) > 0$ za svako $t \ge 0$. Zbog toga, množeći nejednakost (4.50) sa $(\beta h(t))^{-1}$, dobijamo linearnu diferencijalnu nejednačinu

$$\frac{d}{dt}\left(\|x(t)-x_*\|^2\right) + \beta^{-1}(1-\beta b(t))\|x(t)-x_*\|^2 \le C\left(\beta h(t)\right)^{-1},\ t \ge 0.$$

Pomnožimo ovu nejednakost sa

$$H(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),\ \text{gdje je } f(s) = \beta^{-1}(1-\beta b(s)),$$

(jasno je da je $f(s)$ jednako $\frac{1}{2\beta}\left(1+\sqrt{1-4\beta A(s)}\right)$ kao što smo definisali u teoremi). Tada gornja nejednakost postaje

$$\frac{d}{dt}\left(\|x(t)-x_*\|^2 H(t)\right) \le CH(t)\left(\beta h(t)\right)^{-1},\ t \ge 0.$$

Integraleći ovu nejednakost na segmentu $[0,t]$, dobijamo

$$\|x(t)-x_*\|^2 H(t) \le \|x(0)-x_*\|^2 + C\int_0^t H(s)(\beta h(s))^{-1}ds,\ t \ge 0.$$

Kako je eksponencijalna funkcija H pozitivna za svako $t \ge 0$, prethodnu nejedankost možemo napisati u obliku

$$\|x(t)-x_*\|^2 \le \|x(0)-x_*\|^2 H^{-1}(t) + C_0\rho(t)h^{-1}(t),\ t \ge 0, \tag{4.51}$$

gdje je $\rho(t) = h(t)H^{-1}(t)\int_0^t H(s)(\beta h(s))^{-1}ds$.

Iz pretpostavki teoreme, slijedi

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} H(t) = +\infty.$$

Zaista, iz $\sqrt{1-4\beta A(0)} \geq 4\beta - 1$ dobijamo da je $f(s) \geq 2$ za svako $s \geq 0$, pa $\int_0^t f(s)ds \to +\infty$ kada $t \to \infty$. Dakle, pokazali smo da je $\lim_{t\to\infty} H(t) = +\infty$. Slično se pokazuje da je $\lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty$.

Sada, pokažimo da je $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = const$. Označimo sa $g(t) = h^{-1}(t)H(t) = \exp\left(\int_0^t (f(s) - b(s))ds\right)$. Iz definicija funkcija $b(s)$ i $f(s)$ imamo

$$f(s) - b(s) = \beta^{-1}\sqrt{1-4\beta A(s)} > \beta^{-1}\sqrt{1-4\beta A(0)} = const > 0,$$

pa je $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. To povlači da je

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \beta^{-1} g(s)ds}{g(t)}.$$

Ako je $\int_0^t \beta^{-1} g(s)ds < +\infty$ tada je $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$. Ako je $\int_0^t \beta^{-1} g(s)ds = +\infty$ tada primijenom Lopitalovog pravila dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \rho(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta g(t)}{(f(t) - b(t))g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta^2}{\sqrt{1-4\beta A(t)}} \\ &= \frac{\beta^2}{(1 - 8\alpha_\infty \beta\mu + 4\alpha_\infty \beta\mu + 4\beta l + 4\alpha_\infty l L)^{1/2}} = const > 0.\end{aligned}$$

Sada iz nejednakosti (4.51) slijedi da trajektorija $x(t)$ konvergira ka rješenju x_* kada $t \to \infty$, i važi ocjena brzine konvergencije iz formulacije teoreme. Time je teorema dokazana. □

Napomena. Konvergencija metoda (4.39) može biti dokazana pod malo opštijim uslovima, tj. kada parametar β nije konstanta već funkcija koja zavisi od t:

$$\beta(t) \in C^2[0, +\infty), \quad \beta'(t) \leq 0, \ \beta''(t) \geq 0, \ t \geq 0;$$
$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \beta_\infty > 0.$$

U ovom slučaju uslovi u prethodnoj teoremi, koji se odnose na β biće oblika

$$1 - 4\mu\alpha_\infty\beta_\infty(2 - \mu\alpha_\infty) - 4l\beta_\infty(1 + L\alpha_\infty) > 0,$$
$$\sqrt{1 - 4A(0)\beta(0)} \geq 4\beta(0) - 1.$$

Neprekidni metod projekcije gradijenta prvog reda (4.22) dobija se iz (4.38) kada je $\beta = 0$. Uporedimo dobijene ocjene za $\alpha(t) = \alpha$.

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \frac{\exp(-\int_0^t b(s)ds)}{\exp(-A_0 t)} = \lim_{t\to\infty} exp\left(A_0 t - \int_0^t b(s)ds\right) \\ &= \exp\left(\lim_{t\to\infty} \int_0^t (A_0 - b(s))ds\right) = 0,\end{aligned}$$

u slučaju kada je $A_0 - b(s) < 0$, $s \geq 0$. Tada metod projekcije gradijenta drugog reda (4.38) asimptotski brže konvergira nego metod projekcije gradijenta prvog reda (4.22).

4.3 Proksimalni metod

Proksimalni metod predstavlja jedan od načina za rješavanje nediferencijabilnih konveksnih zadataka minimizacije: $f(x) \to \inf$ na skupu C. U osnovi metoda se nalazi pojam proksimalnog operatora koji je definisan na sljedeći način. Za fiksiranu tačku $x \in H$ i broj $\alpha > 0$ definišemo funkciju

$$\varphi(z, x, \alpha) = \frac{1}{2}\|z - x\|^2 + \alpha f(z).$$

Razmatramo zadatak minimizacije

$$\varphi(z, x, \alpha) \to \inf, \quad z \in C. \tag{4.52}$$

Kako je funkcija $\varphi(z, x, \alpha)$ jako konveksna na C sa konstantom jake konveksnosti, koja je za 1 veća od konstante jake konveksnosti funkcije f, to zadatak (4.52) ima jedinstveno rješenje $z_* = z_*(x, \alpha)$. Ovim je određen operator pr koji svakoj tački $x \in H$ i broju $\alpha > 0$ pridružuje odgovarajuće rješenje z_* zadatka (4.52). Taj operator se naziva proksimalnim operatorom. Zbog tog naziva i cijeli metod se naziva proksimalnim.

Ako skup C zavisi od trenutne tačke x i ako je funkcija f diferencijabilna na C, tj. ako postoji F takvo da $F = f'$, početni zadatak minimizacije se svodi na rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti. U tom slučaju je $\varphi_z(z, x, \alpha) = z - x + \alpha F(z)$. Tada za rješenje $pr(x, \alpha)$ važi

$$\langle pr(x, \alpha) - x + \alpha F(pr(x, \alpha)), z - pr(x, \alpha)\rangle \geq 0, \quad \forall z \in C(x).$$

Odavde, koristeći karakteristično svojstvo projekcije tačke na skup (nejednakost (1.4)), dobijamo sljedeću vezu između proksimalnog operatora i operatora projektovanja:

$$pr(x, \alpha) = \mathcal{P}_{C(x)}[x - \alpha F(pr(x, \alpha))], \quad \forall x \in H, \quad \alpha > 0. \tag{4.53}$$

Zbog ove veze proksimalnog operatora i operatora projektovanja i leme 1.3.1 lako se zaključuje da je x_* rješenje kvazi-varijacione nejednakosti ako i samo ako je

$$x_* = pr(x_*, \alpha), \quad \forall \alpha > 0.$$

Konvergencija proksimalnog metoda za konveksne probleme minimizacije dokazana je u [1, 2, 59, 64]. Za sad nam nije poznato da je neko razmatrao proksimalni metod za kvazi-varijacione nejednakosti. U daljem tekstu dokazujemo konvergenciju iterativnog i neprekidnog proksimalnog metoda za rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i izvodimo ocjene brzina konvergencija.

4.3.1 Iterativni procesi

Pređimo na konstrukciju proksimalnog metoda u ovom slučaju. Uzmimo za početnu aproksimaciju proizvoljnu tačku $x_0 \in C_0$. Neka je za neko $k \geq 0$ tačka $x_k \in C(x_{k-1})$ već poznata. Tačku $x_{k+1} \in C(x_k)$ nalazimo po sljedećem pravilu:

$$x_{k+1} = pr(x_k, \alpha), \quad k = 0, 1 \dots$$

ili primjenom (4.53) dobijamo da je

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_{k+1})], \quad k = 0, 1 \dots,$$

a kako je skup $C(x) = c(x) + C_0$, pri čemu je c Lipšic neprekidna funkcija i C_0 zatvoren, konveksan skup, tada koristeći lemu (1.2.1), prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$x_{k+1} - c(x_k) = \mathcal{P}_{C_0}[x_k - c(x_k) - \alpha F(x_{k+1})], \quad k = 0, 1 \dots,$$

Otuda, zbog karakterističnog svojstva projekcije iz teoreme 1.2.3, dobijamo

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(x_{k+1}), z - x_{k+1} + c(x_k) \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C_0. \tag{4.54}$$

Ovim je metod opisan. Formulišimo uslove na problem (4.1) i parametre α i l koji obezbeđuju jaku konvergenciju metoda (4.54).

Teorema 4.3.1 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. *skup $C_0 \subset H$ je zatvoren i konveksan u Hilbertovom prostoru H, funkcija $c(x) : H \to H$ je Lipšic neprekidna sa konstantom l i multifunkcija $C : H \to 2^H$ je oblika $C(x) := c(x) + C_0$, $(x \in H)$;*

2. *preslikavanje $F : H \to H$ je jako monotono sa konstantom $\mu > 0$ i Lipšic neprekidano sa konstantom $L > 0$;*

3. *parametar α i Lipšicova konstanta l su takvi da važi*

$$l < \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mu}{L}, \qquad \left|\alpha - \frac{\mu}{L^2}\right| < \frac{1}{L^2}\sqrt{\mu^2 - 2l^2L^2}.$$

Tada za proizvoljno izabranu početnu aproksimaciju $x_0 \in C_0$ niz (x_k), definisan procesom (4.54), konvergira ka jedinstvenom rješenju $x_* \in C(x_*)$ problema (4.1) brzinom

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq q^k(\alpha)\|x_0 - x_*\|,$$

gdje je

$$q(\alpha) = \sqrt{\frac{1 + 2l^2}{1 + 2\alpha\mu - \alpha^2 L^2}}$$

Dokaz. Iz uslova 1. i 3. teoreme slijedi da postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ problema (4.1). Tada nejednakost (4.1) važi za svako $y \in C(x_*)$, pa važi i za $y = x_{k+1} - c(x_k) + c(x_*) \in C(x_*)$. Tada je

$$\alpha\langle F(x_*), x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq 0.$$

Postavljajući $z = x_* - c(x_*) \in C_0$ u (4.54) imamo

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(x_{k+1}), x_* - x_{k+1} + c(x_k) - c(x_*)\rangle \geq 0.$$

Saberimo posledne dvije nejednakosti. Tada dobijamo

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(x_{k+1}) - \alpha F(x_*), x_* - x_{k+1} + c(x_k) - c(x_*)\rangle \geq 0.$$

Ovu nejednakost pomnožimo sa 2 i napišimo u obliku

$$\begin{aligned} & 2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle + 2\alpha\langle F(x_{k+1}) - F(x_*), x_{k+1} - x_*\rangle \\ + \quad & 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle + 2\alpha\langle F(x_{k+1}) - F(x_*), c(x_*) - c(x_k)\rangle \leq 0, \end{aligned} \tag{4.55}$$

za svako $k = 0, 1, \ldots$ Ocijenimo sada svaki sabirak iz prethodne nejednakosti. Kao što smo ranije napomenuli, važi jednakost

$$2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_*\rangle = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_*\|^2 - \|x_k - x_*\|^2.$$

Pošto je funkcija c Lipšic neprekidna na H, sa Lipšicovom kontsantom l i nejednakost $2ab \geq -\varepsilon a^2 - 1/\varepsilon b^2$ važi za svako $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\begin{aligned} 2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_*) - c(x_k)\rangle &\geq -\|x_{k+1} - x_*\|^2 - \|c(x_*) - c(x_k)\|^2 \\ &\geq -\|x_{k+1} - x_*\|^2 - l^2\|x_k - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Preslikavanje F je jako monotono sa parametrom jake monotonosti μ pa važi

$$2\alpha\langle F(x_{k+1}) - F(x_*), x_{k+1} - x_*\rangle \geq 2\alpha\mu\|x_{k+1} - x_*\|^2,$$

i F je Lipšic neprekidno sa Lipšicovom kontsantom L pa je

$$\begin{aligned}
&2\alpha\langle F(x_{k+1}) - F(x_*), c(x_*) - c(x_k)\rangle \\
\geq &- \alpha^2\|F(x_{k+1}) - F(x_*)\|^2 - \|c(x_*) - c(x_k)\|^2 \\
\geq &- \alpha^2L^2\|x_{k+1} - x_*\|^2 - l^2\|x_k - x_*\|^2.
\end{aligned}$$

Dobijene ocjene uvrstimo u (4.55). Imamo

$$\left(1 + 2\alpha\mu - \alpha^2L^2\right)\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq (1 + 2l^2)\|x_k - x_*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

ili

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq q(\alpha)\|x_k - x_*\| \leq q^k(\alpha)\|x_0 - x_*\|, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.56}$$

gdje je

$$q^2(\alpha) = \frac{1 + 2l^2}{1 + 2\alpha\mu - \alpha^2L^2} < 1,$$

za α koje zadovoljava uslove teoreme. Tada je $\lim_{k\to\infty} q^k(\alpha) = 0$, pa je dokazana konvergencija niza (x_k) ka jedinstvenom rješenju x_*. □

4.3.2 Neprekidni procesi

Neprekidni proces proksimalnog metoda definišemo sa

$$\frac{dx}{dt} = pr(x) - x, \quad x(0) = x_0.$$

Desna strana ovog sistema zadovoljava Lipšicov uslov jer je $pr(x)$ sažimajući operator. Tada je obezbeđena egzistencija i jedinstvenost trajektorije diferencijalne jednačine za svako $t \geq 0$, (vidjeti [30]).

Koristeći (4.53), metod postaje

$$x'(t) = \mathcal{P}_{C(x(t))}\left[x(t) - \alpha F\left(x(t) + x'(t)\right)\right] - x(t), \ t \geq 0.$$

U slučaju kada je C definisano kao u (4.2), prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$x'(t) + x(t) - c(x(t)) = \mathcal{P}_{C_0}[x(t) - c(x(t)) - \alpha F(x'(t) + x(t))], \ t \geq 0, \tag{4.57}$$

gdje je $x(0) = x_0$ početna tačka i $\alpha > 0$ parametar metoda.

Iz karakterističnog svojstva operatora projektovanja (1.4) i iz (4.57) dobijamo varijacionu nejednakost

$$\langle x'(t) + \alpha F(x'(t) + x(t)), z - x'(t) - x(t) + c(x(t))\rangle \geq 0, \ \forall z \in C_0, t \geq 0. \tag{4.58}$$

Formulišimo teoremu koja nam daje uslove pod kojima trajektorija definisana u (4.57) konvergira ka rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (4.1).

Teorema 4.3.2 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. *skup* $C_0 \subset H$ *je zatvoren i konveksan u Hilbertovom prostoru* H*, funkcija* $c : H \to H$ *je Lipšic neprekidna sa konstantom* l *i multifunkcija* $C : H \to 2^H$ *je oblika* $C(x) := c(x) + C_0$*,* $(x \in H)$*;*

2. *preslikavanje* $F : H \to H$ *je jako monotono sa parametrom jake monotonosti* $\mu > 0$ *i Lipšic neprekidano sa Lipšicovom konstantom* $L > 0$*;*

3. *parametar* α *je takav da važi*

$$\alpha > \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{\frac{\mu^2 - l^2L^2 + \mu^2 l^2}{\mu^2 - l^2L^2}} - 1\right), \quad l < \frac{\mu}{L}.$$

Tada za svaku proizvoljno izabranu početnu aproksimaciju $x(0) = x_0 \in C_0$ *trajektorija* $x(t)$*, definisana procesom (4.57), konvergira ka jedinstvenom rješenju* $x_* \in C(x_*)$ *problema (4.1) kada* $t \to \infty$ *i važi*

$$\|x(t) - x_*\| \leq \exp\{-At\}\|x_0 - x_*\|,$$

gdje je

$$A = \left(\alpha\mu - \frac{l^2}{2 + \alpha\mu} - \frac{\alpha l^2 L^2}{\mu}\right) \Big/ \left(1 + \alpha\mu\right).$$

Dokaz. Ispunjeni su uslovi posledice 1.3.1 pa postoji jedinstveno rješenje $x_* \in C(x_*)$ kvazi-varijacione nejednakosti (3.1). Pri tome je $x_* - c(x_*) \in C_0$, pa možemo postaviti $z = x_* - c(x_*)$ u (4.58). Dobijamo

$$\langle x'(t) + \alpha F(x'(t) + x(t)), x'(t) + x(t) - x_* + c(x(t)) - c(x_*)\rangle \leq 0. \quad (4.59)$$

Iz (4.57) zaključujemo da je $x'(t) + x(t) - c(x(t)) \in C_0$, pa postavimo $y = x'(t) + x(t) - c(x(t)) + c(x_*) \in C(x_*)$ u (4.1). Tada je

$$\langle F(x_*), x'(t) + x(t) - x_* - c(x(t)) + c(x_*)\rangle \geq 0. \quad (4.60)$$

Ako nejednakost (4.60) pomnožimo sa $\alpha > 0$ i saberemo sa (4.59), dobijamo

$$\begin{aligned} &\langle x'(t), x'(t) + x(t) - x_* + c(x_*) - c(x(t))\rangle \\ \leq\ &\alpha\langle F(x'(t) + x(t)) - F(x_*), x_* - x'(t) - x(t) + c(x(t) - c(x_*))\rangle, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &\langle x'(t), x'(t)\rangle + \langle x'(t), x(t) - x_*\rangle + \langle x'(t), c(x_*) - c(x(t))\rangle \\ +\ &\alpha\langle F(x'(t) + x(t)) - F(x_*), x'(t) + x(t) - x_*\rangle \\ +\ &\alpha\langle F(x'(t) + x(t)) - F(x_*), c(x_*) - c(x(t))\rangle \leq 0, \quad t \geq 0. \quad (4.61) \end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$\langle x'(t), x(t) - x_* \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|x(t) - x_*\|^2\big).$$

Funkcija c je Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom l i važi nejednakost $2|ab| \le \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2$, za svako $\varepsilon > 0$ pa dobijamo

$$\begin{aligned} & 2\langle x'(t), c(x_*) - c(x(t))\rangle \\ \ge\ & -\frac{1}{2+\alpha\mu}\|x'(t)\|^2 - (2+\alpha\mu)\|c(x_*) - c(x(t))\|^2 \\ \ge\ & -\frac{1}{2+\alpha\mu}\|x'(t)\|^2 - (2+\alpha\mu)l^2\|x(t) - x_*\|^2. \end{aligned}$$

I preslikavanje F je Lipšic neprekidno sa Lipšicovom konstantom L, pa na sličan način možemo ocijeniti poslednji sabirak u (4.61):

$$\begin{aligned} & 2\alpha\langle F(x'(t) + x(t)), c(x_*) - c(x(t))\rangle \\ \ge\ & -\frac{\alpha\mu}{L^2}\|F(x'(t) + x(t)) - F(x_*)\|^2 - \frac{\alpha L^2}{\mu}\|c(x_*) - c(x(t))\|^2 \\ \ge\ & -\alpha\mu\|x'(t) + x(t) - x_*\|^2 - \frac{\alpha L^2 l^2}{\mu}\|x(t) - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Svojstvo jake monotonosti preslikavanja F primijenimo na pretposlednji sabirak u nejednakosti (4.61). Tada je

$$\langle F(x'(t) + x(t)) - F(x_*), x'(t) + x(t) - x_*\rangle \ge \mu\|x'(t) + x(t) - x_*\|^2.$$

Dobijene ocjene uvrstimo u nejednakost (4.61), pomnoženu sa 2. Tada imamo

$$\begin{aligned} & -\ \alpha\mu\|x'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\big(\|x(t) - x_*\|^2\big) + \alpha\mu\|x'(t) + x(t) - x_*\|^2 \\ & -\ l^2\left(\frac{1}{2+\alpha\mu} + \frac{\alpha L^2}{\mu}\right)\|x(t) - x_*\|^2 \le 0, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Kako važi

$$\begin{aligned} \|x'(t) + x(t) - x_*\|^2 &= \|x'(t)\|^2 + 2\langle x'(t), x(t) - x_*\rangle + \|x(t) - x_*\|^2 \\ &= \|x'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\big(\|x(t) - x_*\|^2\big) + \|x(t) - x_*\|^2, \end{aligned}$$

to nejednakost (4.62) postaje

$$(1+\alpha\mu)\frac{d}{dt}\big(\|x(t) - x_*\|^2\big) \le \left(\frac{l^2}{2+\alpha\mu} + \frac{\alpha l^2 L^2}{\mu} - \alpha\mu\right)\|x(t) - x_*\|^2, \quad t \ge 0,$$

ili

$$\frac{d}{dt}\big(\|x(t)-x_*\|^2\big) \le -A\|x(t)-x_*\|^2, \quad t \ge 0,$$

gdje je A definisano u teoremi. Integraljenjem ove jednačine dobijamo

$$\|x(t)-x_*\| \le \exp\{-At/2\}\|x_0-x_*\|. \tag{4.63}$$

Iz uslova teoreme vidimo da važi $A > 0$, pa trajektorija $x(t)$ konvergira ka rješenju x_* kada $t \to \infty$. Ovim je teorema dokazana. □

4.4 Ekstra-gradijentni metod

Za nalaženje sedlastih tačaka glatkih konveksnih funkcija sa ograničenjima Korpelevič je u radu [42] predložio metod koji je neki oblik uopštenja metoda projekcije gradijenta. Algoritam izvršava po dvije projekcije u svakoj iteraciji. Prvi korak u iteraciji metoda, kada se računa pomoćna aproksimacija, ima prognozerski (ekstrapolacioni) karakter pa otuda i naziv ekstrapolacioni gradijentni metod ili kraće ekstra-gradijentni metod.

Nije nam poznato da je neko razmatrao ekstra-gradijentni metod za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti. Ovdje ćemo izložiti ekstra-gradijentni metod za rješavanje problema (4.1). Konstrukcija iteracionog procesa sastoji se u sljedećem: početnu aproksimaciju $x_0 \in C_0$ biramo proizvoljno; neka je k-ta aproksimacija $x_k \in C(x_{k-1})$ već konstruisana; tada sljedeću aproksimaciju x_{k+1} definišemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(x_k)], \\ x_{k+1} &= \mathcal{P}_{C(x_k)}[x_k - \alpha F(\bar{x}_k)], \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{4.64}$$

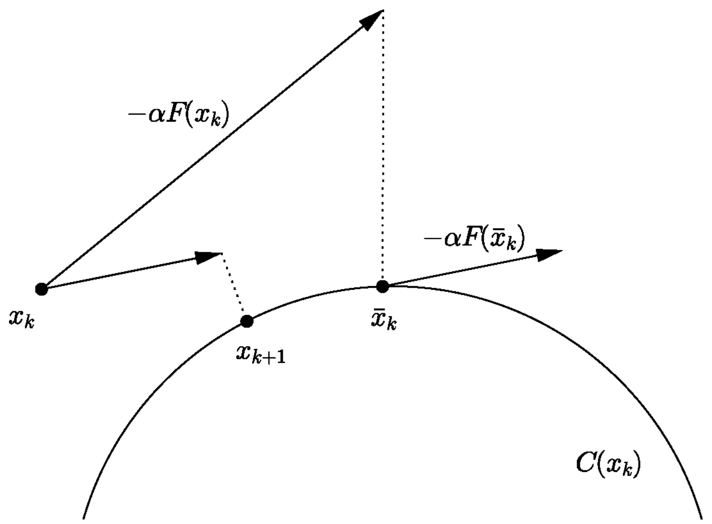
pri čemu je $\alpha > 0$ parametar metoda.

Određivanje tačaka $\bar{x}_k$ i x_{k+1} u k-toj iteraciji predstavljeno je na slici 4.3.

Da bi upotpunili sliku o ekstra-gradijentnom metodu, daćemo još jednu geometrijsku motivaciju (vidjeti [23]). Razmotrimo ekstra-gradijentni metod za rješavanje sistema monotonih jednačina ($C(x) = \mathbb{R}^n$, za svako $x \in H$). Tada (4.64) postaje

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= x_k - \alpha F(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k - \alpha F(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Neka je x_* rješenje sistema jednačina $F(x) = 0$. Definišimo hiperravan sa $H^k = \{x \in H : \langle F(\bar{x}_k), x - \bar{x}_k\rangle = 0\}$. Zbog monotonosti operatora F važi



Slika 4.3: Jedna iteracija ekstra-gradijentnog metoda

$\langle F(\bar{x}_k), x_* - \bar{x}_k\rangle \leq 0$. S druge strane, $\langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k\rangle = \alpha\langle F(\bar{x}_k), F(x_k)\rangle$. Kada α konvergira ka nuli, tada $\bar{x}_k$ konvergira ka x_k i otuda, za dovoljno malo α imamo $\langle F(\bar{x}_k), F(x_k)\rangle > 0$ (ne može $F(x_k)$ biti nula jer bi tada x_k bilo rješenje). Dakle, za dovoljno malo α, $\langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k\rangle > 0$ i H_k razdvajaju x_k od bilo kog rješenja x_*. Kao posljedicu ove činjenice imamo da se x_{k+1} pomjera od x_k u pravcu projekcije ove tačke na razdvajajuću hiperravan H_k, pa za dovoljno malo α, x_{k+1} je bliže rješenju sistema jednačina nego x_k.

Vratimo se rješavanju problema (4.1). Zbog oblika preslikavanja $C(x) = c(x) + C_0$ i leme 1.3.2 ekstra-gradijentni metod (4.64) možemo napisati u obliku

$$\bar{x}_k = c(x_k) + \mathcal{P}_{C_0}[x_k - c(x_k) - \alpha F(x_k)], \tag{4.65}$$

$$x_{k+1} = c(x_k) + \mathcal{P}_{C_0}[x_k - c(x_k) - \alpha F(\bar{x}_k)], \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.66}$$

U sljedećoj teoremi razmatraćemo konvergenciju ovog metoda.

Teorema 4.4.1 *Neka važe uslovi:*

1. *$C_0 \subset H$ je zatvoren, konveksan skup u Hilbertovom prostoru H, funkcija $c : H \to H$ je Lipšic neprekidna sa konstantom l i skupovno preslikavanje $C : H \to 2^H$ je oblika $C(x) := c(x) + C_0$, $(x \in H)$;*

2. *Operator $F : H \to H$ je jako monoton sa konstantom $\mu > 0$ i Lipšic neprekidan sa konstantom $L > 0$;*

3. *Parametar α i Lipšicova konstanta l su takvi da*

$$0 < \alpha < \frac{1}{L}, \quad 0 < l < \frac{\mu}{L}\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha^2L^2)}{(\alpha+1)(1-\alpha^2L^2+\alpha\mu)}}.$$

Tada ekstra-gradijentni metod (4.66) konvergira ka jedinstvenom rješenju kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i brzina konvergencije je

$$\|x_{k+1}-x_*\|^2 \leq A^k\|x_0-x_*\|^2, \quad k = 0,1,\ldots$$

gdje je

$$A = 1+(\alpha+1)\frac{L^2l^2}{\mu} - \alpha\mu + \frac{(\alpha\mu)^2}{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}.$$

Dokaz. Kvazi-varijaciona nejednakost (4.1) ima jedinstveno rješenje na osnovu posledice 1.3.1. Označimo to rješenje sa $x_* \in C(x_*)$.

Relacije (4.65) i (4.66) iz kojih se odredjuje $(k+1)$-va iteracija ekvivalentne su sljedećim varijacionim nejednakostima

$$\langle \bar{x_k} - x_k + \alpha F(x_k), x - \bar{x_k} + c(x_k)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C_0, \tag{4.67}$$

$$\langle x_{k+1} - x_k + \alpha F(\bar{x_k}), z - x_{k+1} + c(x_k)\rangle \geq 0, \quad \forall z \in C_0. \tag{4.68}$$

Iz konstrukcije metoda imamo da je $x_{k+1} \in C(x_k)$. A kako je $C(x)$ oblika $c(x) + C_0$ to zaključujemo da je $x_{k+1} - c(x_k) \in C_0$. Slično, $x_* \in C(x_*)$ pa je $x_* - c(x_*) \in C_0$. Postavimo $x = x_{k+1} - c(x_k)$ u (4.67), $z = x_* - c(x_*)$ u (4.68) i saberimo dobijene nejednakosti

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x_k} - x_k, x_{k+1} - \bar{x_k}\rangle + \langle x_{k+1} - x_k, x_* - x_{k+1}\rangle + \alpha\langle F(\bar{x_k}), x_* - \bar{x_k}\rangle + \\ &\alpha\langle F(\bar{x_k}) - F(x_k), \bar{x_k} - x_{k+1}\rangle + \langle x_{k+1} - x_k, c(x_k) - c(x_*)\rangle + \\ &\alpha\langle F(\bar{x_k}), c(x_k) - c(x_*)\rangle \geq 0, \quad k = 0,1,\ldots \end{aligned} \tag{4.69}$$

Kako je $\bar{x_k}$ projekcija neke tačke na skup $C(x_k)$ to važi $\bar{x_k} \in C(x_k)$, odnosno $\bar{x_k} - c(x_k) \in C_0$. Tada se $y = \bar{x_k} + c(x_*) - c(x_k)$ nalazi u skupu $C(x_*)$ pa zadovoljava nejednakost (4.1). Tada, nejednakost (4.1), pomnožena sa α postaje

$$\alpha\langle F(x_*), \bar{x_k} - x_* + c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq 0.$$

Gornju nejednakost saberimo sa nejednakošću (4.69). Dobijamo

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x_k} - x_k, x_{k+1} - \bar{x_k}\rangle + \langle x_{k+1} - x_k, x_* - x_{k+1}\rangle + \alpha\langle F(x_*) - F(\bar{x_k}), \bar{x_k} - x_*\rangle \\ &+\alpha\langle F(\bar{x_k}) - F(x_k), \bar{x_k} - x_{k+1}\rangle + \langle x_{k+1} - x_k, c(x_k) - c(x_*)\rangle \\ &+\alpha\langle F(x_*) - F(\bar{x_k}), c(x_*) - c(x_k)\rangle \geq 0, \ k = 0,1,\ldots \end{aligned} \tag{4.70}$$

Koristeći jednakost

$$2\langle u-w, v-u\rangle = \|v-w\|^2 - \|v-u\|^2 - \|w-u\|^2, \;\forall u,v,w \in H$$

dobijamo

$$\begin{aligned} & 2\langle \bar{x_k} - x_k, x_{k+1} - \bar{x_k}\rangle + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_* - x_{k+1}\rangle \\ = \;& \|x_k - x_*\|^2 - \|x_k - \bar{x_k}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x_k}\|^2 - \|x_{k+1} - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Pošto je operator F jako monoton sa konstantom μ, važi nejednakost

$$2\alpha\langle F(\bar{x_k}) - F(x_*), \bar{x_k} - x_*\rangle \geq 2\alpha\mu\|\bar{x_k} - x_*\|^2.$$

Koristeći Lipšic neprekidnost i nejednakost $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ koja je tačna za svako $\varepsilon > 0$ dobijamo sljedeće ocjene

$$2\alpha\langle F(\bar{x_k}) - F(x_k), \bar{x_k} - x_{k+1}\rangle \leq \alpha^2 L^2\|x_k - \bar{x_k}\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x_k}\|^2,$$

$$2\alpha\langle F(x_*) - F(\bar{x_k}), c(x_*) - c(x_k)\rangle \leq \alpha\mu L^2\|\bar{x_k} - x_*\|^2 + \frac{\alpha L^2 l^2}{\mu}\|x_k - x_*\|^2,$$

$$2\langle x_{k+1} - x_k, c(x_k) - c(x_*)\rangle \leq \frac{\mu}{L^2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{L^2 l^2}{\mu}\|x_k - x_*\|^2.$$

Dobijene ocjene uvrstimo u nejednakost (4.70)

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x_*\|^2 + (1-\alpha^2L^2)\|x_k - \bar{x_k}\|^2 + \alpha\mu\|\bar{x_k} - x_*\|^2 + \frac{\mu}{L^2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ \leq \;& \left(1 + \frac{L^2 l^2}{\mu}(\alpha+1)\right)\|x_k - x_*\|^2, \quad k = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Kako je

$$\|\bar{x_k} - x_*\|^2 = \|x_k - \bar{x_k}\|^2 + 2\langle \bar{x_k} - x_k, x_k - x_*\rangle + \|x_k - x_*\|^2,$$

to prethodna nejednakost postaje

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x_*\|^2 + \left(1 - \alpha^2L^2 + \alpha\mu\right)\|x_k - \bar{x_k}\|^2 + 2\alpha\mu\langle \bar{x_k} - x_k, x_k - x_*\rangle \\ & + \frac{\mu}{L^2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \left(1 + \frac{L^2 l^2}{\mu}(\alpha+1) - \alpha\mu\right)\|x_k - x_*\|^2, \quad k = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Zbog uslova $0 < \alpha < L^{-1}$ zaključujemo da je koeficijent uz drugi sabirak u prethodnoj nejednakosti nenegativan pa drugi i treći sabirak možemo napisati kao potpun kvadrat

$$\begin{aligned} & \left(1-\alpha^2L^2+\alpha\mu\right)\|x_k-\bar{x_k}\|^2+2\alpha\mu\langle\bar{x_k}-x_k,x_k-x_*\rangle \\ = & \left\|\sqrt{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}(\bar{x_k}-x_k)+\frac{\alpha\mu}{\sqrt{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}}(x_k-x_*)\right\|^2 \\ - & \frac{(\alpha\mu)^2}{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}\|x_k-x_*\|^2, \quad k=0,1,\ldots \end{aligned}$$

Tada dobijamo nejedakost

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1}-x_*\|^2+\left\|\sqrt{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}(\bar{x_k}-x_k)+\frac{\alpha\mu}{\sqrt{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}}(x_k-x_*)\right\|^2 \\ & +\frac{\mu}{L^2}\|x_{k+1}-x_k\|^2\leq\left(1+\frac{L^2l^2}{\mu}(\alpha+1)-\alpha\mu+\frac{(\alpha\mu)^2}{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}\right)\|x_k-x_*\|^2, \end{aligned}$$

koja važi za svako $k=0,1,\ldots$, pa je tim prije

$$\|x_{k+1}-x_*\|^2\leq\left(1+\frac{L^2l^2}{\mu}(\alpha+1)-\alpha\mu+\frac{(\alpha\mu)^2}{1-\alpha^2L^2+\alpha\mu}\right)\|x_k-x_*\|^2,\ k=0,1,\ldots$$

Konstantu na desnoj strani prethodne nejednakosti označimo sa A, kao u teoremi. Tada je

$$\|x_{k+1}-x_*\|^2\leq A\|x_k-x_*\|^2\leq A^k\|x_0-x_*\|^2,\ k=0,1,\ldots$$

Zbog izbora parametra α u uslovu 3. ove teoreme, nenegativna konstanta A je manja od 1, pa zaključujemo da niz (x_k) konvergira ka rješenju x_* kvazi-varijacione nejednakosti (4.1). Teorema je dokazana. $\square$

4.5 Njutnov metod

Svi do sada razmatrani metodi nisu zahtjevali poznavanje izvoda funkcije F i sve dobijene brzine konvergencije su bile linearne. Poznato je da Njutnov metod za rješavanje nelinearnih jednačina i zadataka minimizacije konvergira kvadratno. Definišimo metod Njutnovog tipa za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti (4.1). Njutnov metod generiše niz (x_k), gdje je x_0 početna tačka i x_{k+1} je dobijeno kao rješenje kvazi-varijacione nejednakosti dobijene linearizovanjem F u trenutnoj iteraciji x_k, to jest, x_{k+1} je takvo da važi $x_{k+1} - c(x_{k+1}) \in C_0$ i

$$\langle F(x_k) + \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k), z - x_{k+1} \rangle \geq 0, \tag{4.71}$$

za svako z za koje je $z - c(x_{k+1}) \in C_0$.

Njutnov metod za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti se primijenjuje u slučajevima kada nije teško naći izvodno preslikavanje $\nabla F(x)$ i kada se pomoćni zadatak (4.71) relativno jednostavno rješava. Prednost Njutnovog metoda je visoka brzina konvergencije. Zbog toga, iako je teže odrediti svaku iteraciju nego kod metoda prvog reda, može se desiti da ukupni obim rada neophodan za rješavanje kvazi-varijacione nejednakosti sa traženom tačnošću bude manji nego kod jednostavnijih metoda.

Pokazaćemo da, pod određenim pretpostavkama, niz generisan Njutnovim metodom kvadratno konvergira ka rješenju x_* početnog problema, ako je početna aproksimacija x_0 izabrana dovoljno blizu x_*. Napomenimo da je lokalna varijanta Njutnovog metoda za kvazi-varijacione nejednakosti razmatrana samo u [53], a metod i uslovi konvergencije se značajno razlikuju od onih dobijenih u ovoj disertaciji.

Teorema 4.5.1 *Pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uslovi:*

1. *Funkcija $F \in C^1(H)$ je jako monotona sa parametrom jake monotonosti $\mu > 0$ i*
$$\|\nabla F(x)\| \leq L, \quad \forall x \in H,$$
$$\|\nabla F(y) - \nabla F(z)\| \leq L\|y - z\|, \quad \forall y, z \in H.$$

2. *$C_0 \subset H$ je zatvoren, konveksan skup u Hilbertovom prostoru H, funkcija $c(x) : H \to H$ je Lipšic neprekidna sa konstantom $l < \mu/L$ i skupovno preslikavanje $C : H \to 2^H$ je oblika $C(x) := c(x) + C_0$, $(x \in H)$;*

3. *Početna aproksimacija $x_0 \in H$ je takva da*
$$q = \frac{L(1+l)}{2(\mu - lL)}\|x_0 - x_*\| < 1, \tag{4.72}$$
gdje je x_* rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (4.1).

Tada niz (x_k) generisan Njutnovim metodom (4.71) postoji, konvergira ka rješenju x_* i brzina konvergencije je

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{2(\mu - lL)}{L(1+l)} q^{2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.73}$$

Dokaz. Pvo primijetimo da smo slovom L označili Lipšicovu konstantu za ∇F i konstantu kojom je ograničen gradijent ∇F. Naime, ako su te konstante različite, i ako je jedna jednaka L_1 a druga L_2, tada je $L = max\{L_1, L_2\}$ zajednička konstanta.

Dalje, iz ograničenosti gradijenta ∇F slijedi da je preslikavanje F Lipšic neprekidno sa Lipšicovom konstantom L.

Ispunjeni su uslovi posledice 1.3.1 pa zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje kvazi-varijacione nejednakosti (4.1) i označimo ga sa $x_* \in C(x_*)$. Tada važi

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0,$$

za svako $y \in C(x_*)$, pa specijalno važi i za $y = x_{k+1} - c(x_{k+1}) + c(x_*) \in C(x_*)$, tj.

$$\langle F(x_*), x_{k+1} - x_* + c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \geq 0.$$

Postavimo $z = x_* - c(x_*) + c(x_{k+1}) \in C(x_{k+1})$ u (4.71) i imamo

$$\langle F(x_k) + \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_* - x_{k+1} - c(x_*) + c(x_{k+1}) \rangle \geq 0.$$

Sabirajući posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} & \langle F(x_*) - F(x_k), x_{k+1} - x_* \rangle - \langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle \\ + & \langle F(x_*) - F(x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \\ - & \langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Poslije jednostavnih transformacija proizilazi

$$\begin{aligned} & \langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_*), x_{k+1} - x_* \rangle \leq \langle F(x_*) - F(x_k), x_{k+1} - x_* \rangle \\ - & \langle \nabla F(x_k)(x_* - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle + \langle F(x_*) - F(x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \\ - & \langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_*), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \\ - & \langle \nabla F(x_k)(x_* - x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle, \quad k = 0, 1 \ldots \end{aligned} \tag{4.74}$$

Saglasno teoremi 1.2.2 za jako monotonu funkciju F važi

$$\langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_*), x_{k+1} - x_* \rangle \geq \mu \|x_{k+1} - x_*\|^2.$$

Primijenom formula o konačnom priraštaju i Lipšic neprekidnosti ∇F imamo (vidjeti [64], strana 103)

$$\begin{aligned}
& \langle F(x_*) - F(x_k), x_{k+1} - x_* \rangle - \langle \nabla F(x_k)(x_* - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle \\
= & \int_0^1 \langle \nabla F(x_k + t(x_* - x_k))(x_* - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle dt \\
- & \langle \nabla F(x_k)(x_* - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle \\
= & \int_0^1 \langle (\nabla F(x_k + t(x_* - x_k)) - \nabla F(x_k))(x_* - x_k), x_{k+1} - x_* \rangle dt \\
\leq & \int_0^1 L \| t(x_* - x_k) \| \cdot \| x_* - x_k \| \cdot \| x_{k+1} - x_* \| dt \\
= & \frac{L}{2} \| x_k - x_* \|^2 \| x_{k+1} - x_* \|.
\end{aligned}$$

Na sličan način ocijenimo preostala dva sabirka:

$$\begin{aligned}
& \langle F(x_*) - F(x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle - \langle \nabla F(x_k)(x_* - x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle \\
= & \int_0^1 \langle (\nabla F(x_k + t(x_* - x_k)) - \nabla F(x_k))(x_* - x_k), c(x_*) - c(x_{k+1}) \rangle dt \\
\leq & \frac{Ll}{2} \| x_k - x_* \|^2 \| x_{k+1} - x_* \|.
\end{aligned}$$

Iz ograničenosti gradijenta ∇F i Lipšic neprekidnosti funkcije c slijedi

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_*), c(x_{k+1}) - c(x_*) \rangle \\
\leq & \| \nabla F(x_k) \| \cdot \| x_{k+1} - x_* \| \cdot \| c(x_{k+1}) - c(x_*) \| \\
\leq & Ll \| x_{k+1} - x_* \|^2.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene ocjene u (4.74) dobijamo

$$\mu \| x_{k+1} - x_* \|^2 \leq \frac{L}{2}(1 + l) \| x_k - x_* \|^2 \| x_{k+1} - x_* \| + lL \| x_{k+1} - x_* \|^2,$$

ili

$$\| x_{k+1} - x_* \| \leq \frac{L(1 + l)}{2(\mu - lL)} \| x_k - x_* \|^2, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{4.75}$$

Koristeći matematičku indukciju, lako se dokazuje ocjena (4.73). Za $k = 0$ ta ocjena važi zbog (4.72): $\| x_0 - x_* \| = \frac{2(\mu - lL)}{L(1+l)} q$. Pretpostavimo da ocjena

(4.73) važi za neko $k \geq 0$. Tada, iz (4.75) imamo

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &\leq \frac{L(1+l)}{2(\mu - lL)} \|x_k - x_*\|^2 \\
&\leq \frac{L(1+l)}{2(\mu - lL)} \left(\frac{2(\mu - lL)}{L(1+l)} q^{2^k} \right)^2 \\
&= \frac{L(1+l)}{2(\mu - lL)} \left(\frac{2(\mu - lL)}{L(1+l)} \right)^2 q^{2^k \cdot 2} \\
&= \frac{2(\mu - lL)}{L(1+l)} q^{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ovim je teorema dokazana. □

Kao što se vidi iz ocjene (4.73), Njutnov metod (4.71) konvergira veoma brzo. Ipak, mana ovog metoda je ta što je za konvergenciju neophodno izabrati početnu aproksimaciju x_0 koja je dovoljno blizu traženom rješenju x_*. Taj zahtjev je u teoremi izražen uslovom (4.72), tj. $\|x_0 - x_*\| \leq 2(\mu - lL)/L(1+l)q$. Njutnov metod se obično, kao i kod zadataka minimizacije, koristi u završnoj etapi traženja rješenja kvazi-varijacione nejednakosti, kada se pomoću drugih sporijih, manje zahtjevnih metoda pronađe neka tačka koja je dovoljno blizu rješenju.

Literatura

[1] A. S. Antipin, *On a method for convex programs using a symmetrical modification of the Lagrange function*, Economika i Matem. Metody. Vol.XII. No.6. Pp.1164-1173, (1976) (Russian).

[2] A. S. Antipin, *Continuous and iterative processes with projection and projection-type operators*, Problems of Cybernetics. Computational Problems of the Analysis for Large Systems. Moscow. Acad. USSR. Pp.5–43, (1989) (Russian).

[3] A. S. Antipin, *Equilibrium programming: proximal methods*, Comp. Maths. Math. Phys. Vol.37. No.11. Pp.1285-1296. (1997)

[4] A. S. Antipin, *Gradient and extragradient approaches to bilinear equilibrium programming*, Computing Center RAS, Moscow 2002 (Russian)

[5] A. S. Antipin, A. Nedić, *A Continuous Second-Order Linearization Method for Convex Programming Problems*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15, Vychisl. Mat. Kibern., No. 2, 3 – 12 (1996) (Russian)

[6] A. S. Antipin, F. P. Vasiliev *The regularized extragradient method for solving variational inequalities*, Computational methods and programming, Vol. 3, 2002

[7] A. S. Antipin, N. Mijajlović, M. Jaćimović, *A Second-Order Continuous Method for Solving Quasi-Variational Inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 51, No. 11, pp. 1856–1863, (2011)

[8] A. S. Antipin, N. Mijajlović, M. Jaćimović, *A Second-Order Iterative Method for Solving Quasi-Variational Inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 53, No. 3, pp. 258–264, (2013)

[9] A. S. Antipin, N. Mijajlović, M. Jaćimović, *Extragradient method for solving quasi-variational inequalities*, (to be appear)

[10] A. Baiocchi, A. Capelo, *Variational and Quasi-variational Inequalities*, Wiley, New York, (1984)

[11] A. Barbagallo, P. Mauro, *A Quasi-Variational Approach for the Dynamic Oligopolistic Market Equilibrium Problem*, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2013, Article ID 952915

[12] A. Bensoussan: *Points de Nash dans le cas de fonctionnelles quadratiques et jeux differentiels lineaires a N personnes*, SIAM J. Control 12, 460–499 (1974)

[13] A. Bensoussan, M. Goursat, J. L. Lions, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles stationnaries*, Compte rendu de l'Academie des Sciences Paris, Serie A 276, 1279–1284, (1973)

[14] A. Bensoussan, J. L. Lions: *Nouvelle formulation de problémes de controle impulsionnel et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 276, 1189–1192 (1973)

[15] A. Bensoussan, J. L. Lions: *Nouvelles m éthodes en contrôle impulsionnel*, Appl. Math. Optim. 1, 289–312 (1975)

[16] P. Beremlijski, J. Haslinger, M. Kocvara, J. Outrata: *Shape optimization in contact problems with Coulomb friction*, SIAM J. Optim. 13, 561–587 (2002)

[17] V. A. Bereznyev, V. G. Karmanov, A. A. Tretyakov, *The stabilizing properties of the gradient method*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 26, 84–85, (1986) (Russian)

[18] M. Bliemer, P. Bovy: *Quasi-variational inequality formulation of the multiclass dynamic traffic assignment problem*, Transportation Research B, 37, 501–519, (2003)

[19] A. Bnouhachem, M. H. Xu, X.-L. Fu, S. Zhaohan, *Modified extragradient methods for solving variational inequalities*, Computers and Mathematics with Applications 57, 230–239, (2009)

[20] A. A. Brown, M. C. Bartholomew-Biggs, *Some effective methods for unconstrained optimization based on the solution of systems of ordinary differential equations*, Journal of Optimization Theory and Applications, Volume 62, Issue 2, Pages 211–224, (1989)

[21] D. Chan, J. S. Pang, *The generalized quasi-variational inequality problem*, Mathematics of Operations Research, Vol. 7, No 2, 211–222, (1982)

[22] A. Cournot, *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*, Competition Policy International, vol. 4, no. 1, pp. 283–305, (2008)

[23] F. Facchinei, J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Volumes I and II. Springer, New York (2003)

[24] M. Fukushima, *A class of gap functions for quasi-variational inequality problems*, J. Ind. Manag. Optim. 3 (2), 165–171 (2007)

[25] M. Fukushima, *Restricted generalized Nash equilibria and controlled penalty algorithm*, Comput. Manag. Sci. 8, 201–218 (2011)

[26] A. V. Gasnikov, *Introduction to mathematical modeling of traffic flows*, Moscow, MCNMO, (2013) (Russian)

[27] P. Hammerstein, R. Selten: *Game theory and evolutionary biology*, In: R.J. Aumann, S. Hart, (eds.) Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 2, pp. 929–993. North-Holland, Amsterdam (1994)

[28] P. T. Harker, *Generalized Nash games and quasivariational inequalities*, European Journal of Operations Research, Vol. 54, 81–94, (1991)

[29] N. Huang, C. Ma, Z Liu, *A new extragradient-like method for solving variational inequality problems* Fixed Point Theory and Applications, 2012:223 (2012)

[30] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, SIAM (2002)

[31] Yu. G. Evtushenko, V. G. Zhadan, *Application of the method of Lyapunov functions to the study of convergence of numerical methods*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 15 (1), 96-108, (1976)(Russian)

[32] T. Ichiishi: *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press, New York (1983)

[33] G. Idone and A. Maugeri, *Variational inequalities and a transport planning for an elastic and continuum model*, J. Ind. Manag. Optim.1, 81–86, (2005)

[34] M. Jaćimović, *On a Continuous Method with Changeable Metric for Solving Variational Inequalities*, Proc. Sect. Natur. Sci. Montenegrin Acad. Sci. and Arts 15, 8–19 (2003)

[35] M. Jaćimović, N. Mijajlović, *On a Conitnuous Gradient-type Method for Solving Quasi-variational Inequalities*, Proceedings of the montenegrin academy of sciences and arts, Vol. 19, (2010)

[36] M. De Luca, A. Maugeri, *Quasi-variational inequality and applications to equilibrium problems with elastic demands*, Proceedings of the IVth Course of the International School of Mathematics on "Non smooth Optimization and Related Topics", Erice, June 19-J+ I, Vol. 43 (Plenum, New York) 61–77,(1988)

[37] M. De Luca, A. Maugeri, *Quasi-variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem; discussion of a paradox*, Journal of Computational and Applied Mathematics 28, 163–171,(1989)

[38] Dj. Jovanov, *Existence of a solution of the quasi-variational inequality with semicontinuous operator*, Yugoslav Journal of Operations Research 16, Number 2, 147–152, (2006)

[39] I. Kharroubi, J. Ma, H. Pham, J. Zhang: *Backward SDEs with constrained jumps and quasi-variational inequalities* Ann. Probab. 38, 794–840 (2010)

[40] E. N. Khobotov, *Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., Volume 27, Number 10, 1462–1473 (1987)

[41] M. Kocvara, J. V. Outrata: *On a class of quasi-variational inequalities*, Optimization Methods and Software, Vol. 5, 275–295, (1995)

[42] G. M. Korpelevich, *The extragradient method for finding saddle points and other problems*, Matecon 12, 747–756, (1976)

[43] A.S. Kravchuk, P.J. Neittaanmaki,: *Variational and quasi-variational inequalities in mechanics*, Springer, Dordrecht (2007)

[44] N. Mijajlovic, M. Jaćimović, *Proximal methods for solving quasi-variational inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 55, No. 12, pp. 1981–1985, (2015)

[45] U. Mosco, *Implicit variational problems and quasi variational inequalities* In Proc. Summer School (Bruxelles, 1975) 'Nonlinear operations and Calculus of variations', Lectures Notes Math. No. 543, Springer-Verlag, berlin, 83–156, 1976

[46] A. Nagurney, P. Dupuis, D. Zhang, *A dynamical systems approach for network oligopolies and variational inequalities*, The Annals of Regional Science, vol. 28, no. 3, pp. 263–283, (1994)

[47] Yu. Nesterov, L. Scrimali, *Solving strongly monotone variational and quasi-variational inequalities*, Core discussion paper, 2006/107

[48] M. A. Noor, *Existence results for quasi variational inequalities*, Banach J. Math. Anal. 1, 186–194 (2007)

[49] M. A. Noor, K. I. Noor, A. G. Khan, *Three step iterative algorithms for solving class of quasi variational inequalities*, Afrika Mathematika, Vol. 25, (2015)

[50] M. A. Noor, W. Oettli, *On general nonlinear complementarity problems and quasi equilibria*, Le Mathematiche XLIX, 313–331, (1994)

[51] J. Outrata, M. Kocvara, *On a class of quasi-variational inequalities*, Optim. Methods Softw. 5, 275–295 (1995)

[52] J. Outrata, M. Kocvara, J. Zowe, *Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht and Boston (1998)

[53] J. V. Outrata, J. Zowe, *A Newton method for a class of quasi-variational inequalities*, Comput. Optim. Appl. 4 , no. 1, p. 5–21, (1995)

[54] J.-S. Pang, M. Fukushima: *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria and Multi-leader-follower games*, Computational Management Science, 1, 21–56 (2005)

[55] S. M. Robinson. *Shadow prices for measures of effectiveness. I. Linear model*, Operations Research 41 518–535, (1993) [Erratum: Operations Research 48 185, (2000)]

[56] S. M. Robinson, *Shadow prices for measures of effectiveness. II. General model*, Operations Research 4,1 536–548 (1993)

[57] I. P. Ryazantseva, *First-Order Methods for Certain Quasi-variational Inequalities in a Hilbert Space*, Comput. Math. Math. Phys. 47, (2007)

[58] I. P. Ryazantseva, *Second-Order Methods for Some Quasivariational Inequalities*, Differ. Equations 44, 1006–1017 (2008)

[59] R. T. Rockafellar, *Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming*, Math. of Oper. Res. 1, p. 97–116, (1976)

[60] R. T. Rockafellar, R.J.-B. Wets : *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1998)

[61] L. Scrimali, *Quasi-variational inequalities in transportation networks*, Math. Models Methods in Appl. Sci., 14 , 1541–1560, (2004)

[62] A. V. Zykina, N. V. Melen'chuk, *A Two-Step Extragradient Method for Variational Inequalities*, Russian Mathematics, Volume 54, Issue 9, pp 71-73, (2010)

[63] H. Zegeye, N. Shahzad, *Extragradient Method for Solutions of Variational Inequality Problems in Banach Spaces*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Vol. 2013

[64] F. P.Vasiliev, *Methods of Optimization*, Moscow, Factorial press, 2002 (in Russian)

[65] F. P. Vasiliev, A. Nedic, *A Regularized Continuous Gradient Projection Method of Second Order*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15, Vychisl. Mat. Kibern., No. 2, 3–11 (1994)

[66] V. I. Venec, M. V. Rybashov, *The method of Lyapunov function in the study of continuous algorithms of mathematical programming*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 17, 64-73, (1977) (Russian)

[67] J.C. Yao: *The generalized quasi-variational inequality problem with applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 158, 139–160 (1991)

[68] J. Wardrop, *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proceedings of the Institute of Civil Engineers, (1952)

[69] J.Y. Wei, Y. Smeers: *Spatial oligopolistic electricity models with Cournot generators and regulated transmission prices*, Operations Research, 47, 102–112 (1999).

Biografija

Nevena Mijajlović (djevojačko prezime Vujošević) je rođena 4.10.1985. godine u Podgorici. Osnovnu školu i Matematičku Gimnaziju završila je u Podgorici kao dobitnik diplome "Luča". Kao srednjoškolka učestvovala je na brojnim republičkim i saveznim takmičenjima iz oblasti matematike gdje je ostvarivala zapažene rezultate.

Prirodno-matematički fakultet upisuje 2004. godine u Podgorici, smjer Matematika i računarske nauke. Bečelor studije završava 2007. godine sa prosječnom ocjenom "A" (9.80) i na svečanoj sjednici Rektorata Univerziteta Crne Gore biva nagrađena kao najbolji diplomirani student PMF-a. Specijalističke studije završava na istom fakultetu u junu 2008. godine sa prosječnom ocjenom "A" (10).

U toku studija bila je dobitnik više nagrada od kojih su najznačajnije: Univerzitetska nagrada za najboljeg studenta PMF-a 2006. godine, nagrada Crnogorske akademije nauka i umjetnosti za najboljeg studenta prirodnih nauka 2007. godine, Studentska decembarska nagrada glavnog grada Podgorice za 2007. godinu, Stipendija za talentovane studente Ministarstva prosvjete i nauke za 2005/2006, 2006/2007 i 2007/2008 godinu.

U oktobru 2008. godine upisuje magistarske studije na PMF-u. Sve ispite predviđene planom i programom polaže sa najvećom ocjenom "A" (10). Magistarski rad pod nazivom "Varijacioni principi" odbranila je 2009. godine pod mentorstvom prof. dr Milojice Jaćimovića.

Od 2010. godine je student doktorskih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu, smjer Matematika gdje nastavlja saradnju sa profesorom Jaćimovićem.

Na Prirodno-matematičkom fakultetu zaposlena je od septembra 2008. godine kao saradnik u nastavi. Izvodila je vježbe iz predmeta Diferencijalne jednačine, Analiza 3, Analiza 4, Vjerovatnoća i statistika na Prirodno-matematičkom fakultetu, kao i Matematiku na Farmaceutskom fakultetu, Biotehničkom fakultetu i Metalurško-tehnološkom fakultetu Univerziteta Crne Gore.

Izjava o autortstvu

Potpisana Nevena Mijajlović
Broj indeksa/upisa: 1/2009

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom **"Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedila autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

Potpis doktoranta

U Podgorici, ____________ ____________________

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Nevena Mijajlović
Broj indeksa/upisa: 1/2009
Studijski program: Matematika
Naslov rada: "Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"
Mentor: prof. dr Milojica Jaćimović

Potpisana Nevena Mijajlović

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predala za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

Potpis doktoranta

U Podgorici, ____________ ____________________

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **"Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"**, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilozima predala sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranta

U Podgorici, ____________ ____________________

УНИ... ЦРНЕ ГОРЕ
Природно-... факултет
Број 1566
Подгорица, 17 JUN 2015 год.

Izjava o autortstvu

Potpisana Nevena Mijajlović
Broj indeksa/upisa: 1/2009

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom **"Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedila autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

Potpis doktoranta

U Podgorici, jun 2015. g.

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Nevena Mijajlović
Broj indeksa/upisa: 1/2009
Studijski program: Matematika
Naslov rada: "Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"
Mentor: prof. dr Milojica Jaćimović

Potpisana Nevena Mijajlović

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predala za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

Potpis doktoranta

U Podgorici, jun 2015.g.

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **"Metodi za rješavanje kvazi-varijacionih nejednakosti"**, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilozima predla sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

U Podgorici, 2015 g.

Potpis doktoranta

Autorstvo
Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno
Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.