UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA MATEMATIKU I RAČUNARSKE NAUKE

DOKTORSKA DISERTACIJA

DINAMIČKI SISTEMI I GRANIČNA SVOJSTVA FUNKCIJA

Mr Jela T. Šušić

Podgorica, 2002. god.

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA MATEMATIKU I RAČUNARSKE NAUKE

DOKTORSKA DISERTACIJA

DINAMIČKI SISTEMI I GRANIČNA SVOJSTVA FUNKCIJA

Kandidat:

Mr Jela Šušić, dipl. mat.

Mentor:

Dr Žarko Pavićević, red. prof.

Podgorica, 2002. god.

Ovaj rad posvećujem mom ocu Tomislavu–Budu Šušiću

Najtopliju zahvalnost izražavam prof. dr Žarku Pavićeviću koji mi je kao mentor ovog rada pružao dragocjenu pomoć i podrušku i nizom ideja i zapažanja doprinio njegovom konačnom oblikovanju.

Zahvalnost izražavam i prof. dr V.I. Gavrilovu sa Moskovoskog državnog Unoverziteta " M.V. Lomonosov" koji je svojim sugestijama i predlozima predodredio moja dalja istraživanja iz ove oblasti.

SADRŽAJ

UVOD

Jedan od centralnih problema koji se izučava u teoriji funkcija je vezan za granična svojstva funkcija.

Još u XIX vijeku francuski matematičar Vajerštras, ruski matematičar Sahocki i italijanski matematičar Kazarti dobili su rezultat o graničnom ponašanju holomorfne funkcije u tačkama esencijalnog singulariteta. Taj rezultat sada predstavlja klasično tvrđenje kompleksne analize.

Početkom prošlog vijeka francuski matematičar Lindelef ([9] ili [11]) je dokazao da za ograničene holomorfne funkcije iz postojanja asimptotske granične vrijednosti slijedi postojanje ugaone granične vrijednosti.

Nakon pojave ovog rada matematičari nijesu dobijali nove rezultate iz ove teorije sve do 1957g. kada su finski matematičari Lehto i Virtanen ([12]) dokazali da normalne meromorfne funkcije imaju ista granična svojstva kao i ograničene holomorfne funkcije. Značaj tog rezultata, između ostalog, se ogleda i u tome što ograničene holomorfne funkcije na jediničnom krugu čine pravi podskup skupa normalnih meromorfnih funkcija.

Inače, normalne meromorfne funkcije prvi su definisali i izučavali japanski matematičari Yosida [20] i Noshiro [16] (1934g.).

Tek nakon pojave rada Lehta i Virtanena ([12]) veliki broj matematičara širom svijeta počeo je da se intenzivno bavi izučavanjem svojstava tih funkcija .

Posebno ističemo rezultate ruskog matematičara V. I. Gavrilova i njegovih učenika, koji su normalnost meromorfnih funkcija prvi počeli izučavati na podgrupama grupe konformnih automorfizama jediničnog kruga Δ. Naime, pokazali su da te meromorfne funkcije čine širu klasu od klase koju su izučavali Lehto i Virtanen i da meromorfne funkcije koje su normalne u odnosu na hiperboličke podgrupe imaju ista granična svojstva kao i meromorfne funkcije koje su normalne u odnosu na čitavu grupu konformnih automorfizama jediničnog kruga Δ tj. dokazali su da za njih važi teorema tipa Lindelefa-Lehta-Virtanena.

Ističemo, da rezultati iz teorije graničnih svojstava funkcija imaju primjenu u teoriji diferencijalnih jednačina, funkcionalnoj analizi, klasičnoj analizi, kompleksnoj analizi i dr.

Glavni zadatak u ovom radu su izučavanje graničnih svojstava proizvoljnih funkcija i meromorfnih funkcija, definisanih na jediničnom krugu $\Delta = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ kompleksne ravni C. Dokazana su tvrđenja (treća glava) koja daju potreban i dovoljan uslov da proizvoljna funkcija definisana na jediničnom krugu kompleksne ravni C, ima ugaonu i oricikličnu graničnu vrijednost u terminima graničnog skupa i normalnosti funkcije. Glavnu ulogu u postojanju ovih graničnih vrijednosti ima normalnost funkcije u odnosu na hiperbolički i parabolički dinamički sistem-kaskadu-polugrupu koju rađa hiperbolički, odnosno parabolički elemenat grupe konformnih automorfizama kruga Δ s privlačećim tačkama na jediničnoj kružnici. U dokazima smo se koristili rezultatima geometrije diskretnih grupa i teoremu jedinstvenosti kompleksne analize, a nijesmo koristili teoriju harmonijske mjere kako je do sada rađeno u dokazima klasičnih rezultata tog tipa za holomorfne i meromorfne funkcije (teorema Lindelefa, teorema Lehta-Virtanena, teoreme V.I. Gavrilova i dr.)

U poglavlju 2.4 ovog rada pokazuje se da normalnost meromorfnih funkcija, u odnosu na hiperbolički, odnosno parabolički dinamički sistem-kaskadu koji čini cikličnu grupu, a koju rađa samo jedan elemenat hiperboličke, odnosno paraboličke grupe, dovodi do normalnosti te funkcije u odnosu na čitavu hiperboličku, odnosno paraboličku grupu ([31]). Ovaj rezultat je motivisao dalja istraživanja koja su se sastojala u izučavanju uticaja algebarske, analitičke i geometrijske strukture grupa, kao i analitičke i geometrijske strukture meromorfne funkcije na njenu normalnost a takođe i njena granična svojstva.

Dobijeni rezultati u poglavlju 2.5 pokazuju da meromorfne funkcije koje su normalne u odnosu na proizvoljni hiperbolički odnosno parabolički dinamički sistem kaskadu-polugrupu, koju rađa jedan elemenat hiperboličke odnosno paraboličke grupe, čine šire klase od do tada izučavanih klasa normalnih meromorfnih funkcija. Za funkcije iz tih klasa dokazali smo rezultate tipa teorema Lindelefa-Lehta-Virtanena i Bagemil-Zajdela o ugaonim i oricikličnim graničnim vrijednostima. Ključno mjesto u dokazima tih rezultata, kao što smo istakli igra normalnost tih funkcija u odnosu na hiperboličke i paraboličke polugrupe.

Posebno ističemo rezultate poglavlja 3.2 koji pokazuju da proizvoljna funkcija ako ima ugaonu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ mora biti normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu koju rađa hiperbolički elemenat grupe konformnih automorfizama jediničnog kruga čija je privlačeća tačka $e^{i\theta}$. Iz tih rezultata, naprimjer, slijedi tvrđenje da i za meromorfne funkcije iz Nevanlinine klase kao i za holomorfne funkcije iz Hardijevih klasa važe teoreme tipa Lindelefa-Lehta-Virtanena a što do sada nije bilo poznato. Otuda dalje slijedi da za funkcije iz tih klasa važi ocjena sfernog izvoda $f^{\#}(z)=|f'(z)|\left(1+|f'(z)|^{2}\right)^{-1}=O\left(\left(1-|z|^{2}\right)^{-1}\right)$ na hipercikličnim oblastima.

U poglavlju 3.3 smo dokazali rezultate koji se odnose na dobijanje oriciklične granične vrijednosti (tangencijalno granično svojstvo) iz postojanja asimptotske granične vrijednosti u oricikličnim oblastima. Koliko je nama poznato rezultati toga tipa do sada nijesu dobijeni.

Skrećemo pažnju, da naprijed navedeni rezultati koji su vezani za granično ponašanje funkcija imaju lokalni karakter. Oni se mogu dobiti zahvaljujući činjenici da su ciklične polugrupe "utopljene" u ciklične hiperboličke grupe, a ove u grupu konformnih automorfizama kruga Δ koje "dobro funkcionišu" unutar hiperboličke geometrije jediničnog kruga.

Rezultati ovog rada izlagani su na seminaru ***Teorija funkcija*** Prirodno -matematičkog fakulteta u Podgorici, kojim je rukovodio ***prof. dr Žarko Pavićević,*** na ***International Conference of Generalized Functions - Linear and Nonlinear Prolems*** koja je održana od 31 avgusta do 4 septembra 1996. godine u Novom Sadu, na **PRIM-u** održanom od 3 do 6 juna 1996. godine u Budvi, na seminaru ***Granični skupovi*** Mehaničko-matematičkog fakulteta na Moskovskom Državnom Univerzitetu "M.V. Lomonosov", kojim je rukovodio prof. dr V.I. Gavrilov i **Naučnom seminaru Odsjeka za matematiku i računarske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta u** Podgorici.

1. GEOMETRIJA HIPERBOLIČKIH I PARABOLIČKIH KASKADA

Ova glava ima pomoćni karakter. U njoj su date osnovne definicije i rezultati teorije Mebijusovih preslikavanja, hiperboličke geometrije i dinamičkih sistema, koji su neophodni za dobijanje rezultata druge i treće glave.

Opširnije o ovim teorijama može se naći, na primjer, u monografijama ([3]) i ([5]).

1.1. MEBIJUSOVA PRESLIKAVANJA

Neka su N, Z, Q, R i C, redom, skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva, R^+ skup pozitivnih realnih brojeva, a $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$, $n \in N$, n-dimenzioni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, $x, y \in R^n$. Tada je sa $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ definisana norma u R^n. Prostor R^n sa skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ je Euklidov vektorski prostor, a $\|\cdot\|$ se zove Euklidovom normom u R^n. Skup $S(a, r) = \{x \in R^n \mid \|x - a\| = r\}$, $a \in R^n, r \in R^+$, je sfera sa centrom u tački a i poluprečnikom r.

Definicija 1. Inverzijom u odnosu na sferu $S(a,r)$ naziva se preslikavanje $\varphi: R^n \setminus \{a\} \to R^n$ definisano sa

$$\varphi(x) = a + \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(x - a), \quad x \in R^n \setminus \{a\}. \tag{1}$$

Inverzija φ se još naziva i simetrijom u odnosu na sferu $S(a,r)$. Dalje ćemo za inverziju upotrebljavati taj naziv.

Ako je u definiciji 1 $a = 0 \in R^n$, a $r = 1$, dobija se simetrija φ u odnosu na sferu $S(0,1)$, koja se zadaje sa

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|x\|^2} x, \quad x \in R^n \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Ako je $x^* = \frac{1}{\|x\|^2} x, \quad x \in R^n \setminus \{0\}$, tj. ako sa x^* označimo simetričnu tačku tačke $x \in R^n \setminus \{0\}$ u odnosu na sferu $S(0,1)$, tada se iz (2) dobija

$$\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^*, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}, \tag{3}$$

pa (1) postaje

$$\varphi(x) = a + r^2 (x-a)^*, \quad x \in R^n \setminus \{a\}. \tag{4}$$

Neka je $\hat{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$. Tada se simetrija φ u odnosu na sferu $S(a,r)$ može dodefinisati u tačkama a i ∞ na sljedeći način: $\varphi(a) = \infty$ i $\varphi(\infty) = a$.

Ako je $\varphi^n(x) = \underbrace{\varphi(\varphi ... (\varphi}_{\text{n-puta}}(\mathrm{x}))...)$, $n \in N$, tada je:

1. $\varphi^2(x) = x, \quad x \in \hat{R}^n$;
2. φ je bijektivno preslikavanje skupa $\hat{R}^n$;
3. $\varphi(x) = x$ ako i samo ako je $x \in S(a,r)$..

Ravan u R^n, odnosno u $\hat{R}^n$, je skup $P(a,t) = \{x \in R^n | \ (x,a) = t\} \cup \{\infty\}, \quad a \in R^n \setminus \{0\}, \quad t \in R.$

Definicija 2. Neka je $a \in R^n \setminus \{0\}$. Preslikavanje $\varphi : R^n \to R^n$ definisano sa

$$\varphi(x) = x + \lambda a, \quad x \in R^n, \tag{5}$$

gdje je $\lambda \in R$ izabrano tako da je $\frac{1}{2}(x + \varphi(x)) \in P(a,t)$ za $x \in R^n$, naziva se simetrijom u skupu $\hat{R}^n$ u odnosu na ravan *P(a,t)*.

Koristeći naprijed navedeno, iz (5) se dobija

$$\varphi(x) = x - 2((x,a) - t) \cdot a^*, \quad x \in R^n. \tag{6}$$

Ako se simetrija φ u odnosu na ravan *P(a,t)* dodefiniše u tački ∞ tako da je $\varphi(\infty) = \infty$, lako se pokazuje da za φ važi:

1. $\varphi^2(x) = x, \quad x \in \hat{R}^n$;
2. φ je bijektivno preslikavanje skupa $\hat{R}^n$;
3. $\varphi(x) = x$ ako i samo ako je $x \in P(a,t)$.

Iz (1) slijedi da je simetrija φ u odnosu na sferu $S(a,r)$ neprekidno preslikavanje na $R^n \setminus \{a\}$, a iz (6) slijedi da je simetrija φ u odnosu na ravan $P(a,t)$ takođe neprekidno preslikavanje na R^n. Pri tome je neprekidnost razmatrana u odnosu na metriku (topologiju) koju radja Euklidova norma na R^n.

Dalje ćemo se baviti Euklidovim vektorskim prostorima R^2 i R^3, skupovima $\hat{R}^2$ i $\hat{R}^3$ i simetrijama u odnosu na sferu i ravan u tim skupovima.

Na $\hat{R}^2$ se može definisati metrika tako da simetrije u odnosu na kružnice i prave u $\hat{R}^2$ budu neprekidna preslikavanja na $\hat{R}^2$. Naime, neka je $\psi : \hat{R}^2 \to \hat{R}^3$ preslikavanje definisano sa

$$\psi(x) = \begin{cases} (x^1, x^2, 0), & x \in R^2 \\ \infty, & x = \infty \end{cases}.$$

Neka je $e_3 = (0,0,1) \in \hat{R}^3$. Skup $P(e_3,0)$ je ravan u $\hat{R}^3$. Preslikavanje ψ slika $\hat{R}^2$ bijektivno na ravan $P(e_3,0)$. Preslikavanje π: $P(e_3,0) \to \hat{R}^3$ definisano sa

$$\pi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2x^1}{\|x\|^2+1}, \dfrac{2x^2}{\|x\|^2+1}, \dfrac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right), & x \in P(e_3,0) \setminus \{\infty\} \\ e_3 = (0,0,1)\ , & x = \infty \end{cases}$$

je bijektivno preslikavanje ravni $P(e_3,0)$ na sferu $S(0,1)$ iz $\hat{R}^3$. Preslikavanje π se naziva sferna projekcija ravni $P(e_3,0)$ na sferu $S(0,1)$ iz $\hat{R}^3$.

Kompozicija $\pi \circ \psi$ je bijektivno preslikavanje skupa $\hat{R}^2$ na sferu $S(0,1)$, $S(0,1) \subset \hat{R}^3$.

Na sferi $S(0,1)$ može se posmatrati metrika d koju indukuje metrika iz Euklidovog vektorskog prostora R^3. Metrika d se zove tetivnom metrikom sfere $S(0,1)$.

Ako je $\rho(x,y) = d((\pi \circ \psi)(x), (\pi \circ \psi)(y))$, $x, y \in \hat{R}^2$, tada je sa ρ definisana metrika na $\hat{R}^2$. Metrika ρ se naziva tetivnom metrikom na $\hat{R}^2$. Skup $\hat{R}^2$ sa topologijom koju rađa metrika ρ naziva se Rimanovom sferom. Otuda slijedi da se $\hat{R}^2$ sa topologijom koju rađa metrika ρ topološki može identifikovati sa sferom $S(0,1)$ na kojoj topologiju rađa metrika d. Niame, preslikavanje $\pi \circ \psi$ je homeomorfizam tih topoloških prostora.

Pokazuje se da je

$$\rho(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2\|x-y\|}{\left(1+\|x\|^2\right)^{1/2}\left(1+\|y\|^2\right)^{1/2}}, & x,y\in R^2\\[2ex] \dfrac{2}{\left(1+\|x\|^2\right)^{1/2}}, & y=\infty\end{cases} \tag{7}$$

Iz (7) se vidi da je metrika ρ ekvivalentna metrici koju rađa norma $\|\cdot\|$ na R^2. Otuda slijedi da su preslikavanja iz R^2 u R^2, koja su neprekidna u topologiji koju rađa metrika ρ takođe neprekidna u topologiji koju rađa norma $\|\cdot\|$ u R^2. Važi i obrnuto.

Kako je $\hat{R}^2$ kompaktan skup u odnosu na topologiju koju rađa metrika ρ, tada $\hat{R}^2$ predstavlja kompaktifikaciju skupa R^2 sa jednom tačkom. Kako je preslikavanje φ neprekidno na R^2, njegovu neprekidnost je dovoljno ispitati u tačkama a i ∞ ako je φ simetrija u odnosu na kružnicu *S(a,r)* i u tački ∞ ako je φ simetrija u odnosu na pravu *P(a,t)*. Da su navedene simetrije neprekidne u tačkama a i ∞ može se direktno dobiti iz (7) i definicija tih preslikavanja.

Iz naprijed rečenog slijedi da su simetrije φ homeomorfizmi skupa $\hat{R}^2$ u odnosu na tetivnu metriku.

Ubuduće ćemo za svako $x\in R^2$ koristiti oznaku $\|x\|=|x|$.

Na skupu $\hat{R}^2$ se uvodi i takozvana sferna metrika. Naime, neka je $ds=\dfrac{|dx|}{1+|x|^2}$, $x\in R^2$, i γ neprekidno-diferencijabilna kriva koja spaja tačke $x_1,x_2\in\hat{R}^2$. Tada se

$$L(\gamma)=\int_\gamma ds=\int_\gamma\frac{|dx|}{1+|x|^2}$$

naziva sfernom dužinom krive γ.

Neka je dalje $\Gamma=\{\gamma \mid \gamma\ \textit{je neprekidno-diferencijabilna kriva koja spaja tacke } x_1\ i\ x_2\}$.

Sferno rastojanje tačaka $x_1,x_2\in\hat{R}^2$ je

$$s(x_1,x_2)=\inf_{\gamma\in\Gamma}L(\gamma).$$

Pokazuje se da je za svako $x_1,x_2\in\hat{R}^2$ važi

$$2\rho(x_1,x_2)\le s(x_1,x_2)\le\pi\rho(x_1,x_2),$$

iz čega slijedi da su ρ i s ekvivalentne metrike. Otuda slijedi da je sasvim svejedno u kojoj od njih će se ispitivati neprekidnost, odnosno konvergencija.

Definicija 3. Kompozicija konačnog broja simetrija u odnosu na prave i kružnice naziva se Mebijusovim preslikavanjem u $\hat{R}^2$.

Za Mebijusova preslikavanja važi:

1. Svako Mebijusovo preslikavanje je homeomorfizam $\hat{R}^2$ na $\hat{R}^2$.
2. Kompozicija dva Mebijusova preslikavanja je Mebijusovo preslikavanje.
3. Inverzno preslikavanje Mebijusovog preslikavanja je Mebijusovo preslikavanje (ako je $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_m$, gdje su φ_i simetrije, tada je $\varphi^{-1} = \varphi_m \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$).
4. Identično preslikavanje $\hat{R}^2$ na $\hat{R}^2$ je Mebijusovo preslikavanje.

Iz 2, 3 i 4 slijedi da skup svih Mebijusovih preslikavanja sa operacijom kompozicija preslikavanja čini grupu.

Definicija 4. Opštom Mebijusovom grupom nazivamo grupu svih Mebijusovih preslikavanja definisanih na $\hat{R}^2$. Oznaka: $GM(\hat{R}^2)$.

Razmotrimo sada neke primjere Mebijusovih preslikavanja.

Primjer 1. Translacija $x \mapsto x + a,\quad a \in R^2$ je Mebijusovo preslikavanje. Ona se može prikazati kao kompozicija simetrija u odnosu na ravni $(x \cdot a) = 0$ i $(x \cdot a) = \frac{|a|^2}{2}$.

Primjer 2. Rastezanje $x \mapsto k \cdot x,\quad k > 0$ je Mebijusovo preslikavanje. Ono se može prikazati kao kompozicija simetrija u odnosu na sfere $S(0,1)$ i $S(0,\sqrt{k})$.

Primjer 3. Preslikavanje $\psi(x) = r \cdot x + a$ je Mebijusovo preslikavanje. Za njega važi da je $\varphi = \psi \circ \varphi^* \circ \psi^{-1}$, gdje ~~su~~ φ i φ^* redom simetrije u odnosu na kružnice $S(a,r)$ i $S(0,1)$.

Teorema 1. Svaka Euklidova izometrija u R^2 je kompozicija ne više od dvije simetrije u odnosu na prave.

Dokaz: Pošto je svaka simetrija u odnosu na pravu izometrija, dovoljno je razmotriti izometriju φ za koju je $\varphi(0)=0$. Za nju važi

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x)-0\| = \|\varphi(x)-\varphi(0)\| = \|x-0\| = \|x\|$$

$$2(\varphi(x)\cdot\varphi(y)) = \|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(x\cdot y),$$

tj. čuva dužinu vektora i skalarni proizvod. To znači da su vektori $\varphi(e_1)$ i $\varphi(e_2)$ ortogonalni, pa su i linearno nezavisni ($e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$). Kako ih ima 2, oni obrazuju bazu vektorskog prostora R^2. Tada je za svako $x=(x_1,x_2)\in R^2$

$$\varphi(x)=\lambda_1\cdot\varphi(e_1)+\lambda_2\cdot\varphi(e_2),\quad \lambda_1,\lambda_2\in R.$$

Otuda je

$$(\varphi(x)\cdot\varphi(e_i))=\lambda_i \quad \text{i} \quad (\varphi(x)\cdot\varphi(e_i))=(x\cdot e_i)=x_i, \text{ pa je } \lambda_i=x_i,\ i=1,2.$$

Na taj način dobijamo da važi

$$\varphi(x)=\lambda_1\cdot\varphi(e_1)+\lambda_2\cdot\varphi(e_2)=x_1\cdot\varphi(e_1)+x_2\cdot\varphi(e_2) \text{ za svako } x\in R^2,$$

tj. $\varphi(x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2)=x_1\cdot\varphi(e_1)+x_2\cdot\varphi(e_2)$. To pokazuje da je φ linearno preslikavanje R^2 na R^2. Ako je A matrica preslikavanja φ u odnosu na bazu e_1,e_2, to je $A=\begin{pmatrix}\varphi(e_1)\\ \varphi(e_2)\end{pmatrix}$, pa je $\varphi(x)=x\cdot A$. Dalje je

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}(\varphi(e_1)\cdot\varphi(e_1)) & (\varphi(e_1)\cdot\varphi(e_2))\\ (\varphi(e_2)\cdot\varphi(e_1)) & (\varphi(e_2)\cdot\varphi(e_2))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(e_1\cdot e_1) & (e_1\cdot e_2)\\ (e_2\cdot e_1) & (e_2\cdot e_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Dakle, matrica A je ortogonalna.

Sada dokažimo da je φ kompozicija ne više od 2 simetrije u odnosu na prave.

Neka je $a_1=\varphi(e_1)-e_1$. Ako je $a_1\neq 0$, uzmimo da je ψ_1 simetrija u odnosu na ravan $P(a_1,0)$, a ako je $a_1=0$ neka je ψ_1 identično preslikavanje. Tada je $\psi_1(\varphi(e_1))=e_1$.

Preslikavanje $\varphi_1=\psi_1\circ\varphi$ je izometrija i $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(e_1)=e_1$.

Neka je dalje $a_2=\varphi_1(e_2)-e_2$. Ako je $a_2\neq 0$ uzmimo da je ψ_2 simetrija u odnosu na pravu $P(a_2,0)$, a ako je $a_2=0$ neka je ψ_2 identično preslikavanje. Neka je $\varphi_2=\psi_2\circ\varphi_1$. Tada važi: φ_2 je izometrija, $\varphi_2(0)=0$, $\varphi_2(e_1)=e_1$ i $\varphi_2(e_2)=e_2$. Prema već dokazanom φ_2 je linearno preslikavanje, pa je φ_2 identično preslikavanje *i*. Dakle, $\psi_2\circ\psi_1\circ\varphi=i$, tj. $\varphi=\psi_1\circ\psi_2$. □

Iz teoreme 1 slijedi da je svaka izometrija u R^2 Mebijusovo preslikavanje.

Teorema 2. Preslikavanje φ je Euklidova izometrija ako i samo ako se može predstaviti u obliku $\varphi(x) = x \cdot A + x_o$, gdje je A ortogonalna matrica, a $x_o \in R^2$.

Dokaz: Neka je φ Euklidova izometrija. Tada je i $\varphi(x) - \varphi(0)$ Euklidova izometrija, pa se kao i u dokazu teoreme 1 može zaključiti da je matrica preslikavanja $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ ortogonalna, tj. $\psi(x) = x \cdot A$, gdje je A ortogonalna matrica. Otuda slijedi da je $\varphi(x) = x \cdot A + \varphi(0)$.

Neka je sada $\varphi(x) = x \cdot A + x_0$, $x \in R^2$, gdje je A ortogonalna matrica i $x_o \in R^2$. Tada je $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x \cdot A - y \cdot A\| = \|(x-y) \cdot A\| = \|x - y\|$, jer A čuva dužinu vektora. Slijedi da je φ Euklidova izometrija. □

Teorema 3. Svaka simetrija mijenja orijentaciju i čuva ugao.

Dokaz: Neka je φ_a simetrija u odnosu na pravu $P(a,t)$, to jest $\varphi_a(x) = x - 2[(x \cdot a) - t] \cdot a^*$. Diferenciranjem dobijamo

$$\varphi_a'(x) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2a_1^2}{|a^2|} & \dfrac{-2a_1a_2}{|a|^2} \\ \dfrac{-2a_1a_2}{|a|^2} & 1 - \dfrac{2a_2^2}{|a^2|} \end{pmatrix},$$

pa je $\varphi_a'(x) = E - 2 \cdot Q_a$, gdje je

$$Q_a = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1^2}{|a|^2} & \dfrac{a_1 \cdot a_2}{|a|^2} \\ \dfrac{a_1 \cdot a_2}{|a|^2} & \dfrac{a_2^2}{|a|^2} \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je $Q_a^2 = Q_a$. Otuda je

$$\varphi_a'(x) \cdot (\varphi_a'(x))^T = (\varphi_a'(x))^2 = (E - 2 \cdot Q_a)^2 = E - 4 \cdot Q_a + 4 \cdot Q_a = E.$$

Dakle, $\varphi_a'(x)$ je ortogonalna matrica. Otuda slijedi da je φ_a konformno preslikavanje.

Neka je $D(a) = \det \varphi_a'(x)$. Tada je $\pm 1 = D(a) \neq 0$. Međutim, $D(a)$ je neprekidna funkcija iz $R^2 \setminus \{a\}$. Pošto je $R^2 \setminus \{a\}$ povezan skup, to je $D(a)$ stalnog znaka u $R^2 \setminus \{0\}$. Za $a = e_1$ imamo da je $\varphi(x_1, x_2) = (-x_1 + 2t, x_2)$, pa je $D(a) = \det \varphi'_a(x) = -1$. Odavde zaključujemo da je $D(a)<0$ za svako $a\neq 0$. Dakle, svaka simetrija u odnosu na ravan mijenja orjentaciju.

Analogno rasuđivanje primjenjujemo i u slučaju simetrije u odnosu na kružnicu. Neka je φ simetrija u odnosu na kružnicu $S(0,1)$, tj. $\varphi(x)=\frac{x}{|x|^2}$. Tada je za $x\neq 0$

$$\varphi'(x)=\begin{pmatrix} \frac{x_2^2-x_1^2}{|x|^4} & \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} \\ \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} & \frac{x_1^2-x_2^2}{|x|^4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^2}-\frac{2x_1^2}{|x|^4} & \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} \\ \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} & \frac{1}{|x|^2}-\frac{2x_2^2}{|x|^4} \end{pmatrix}=\frac{1}{|x|^2}(E-2Q_x),$$

gdje je

$$Q_x=\begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{|x|^2} & \frac{x_1x_2}{|x|^2} \\ \frac{x_1x_2}{|x|^2} & \frac{x_2^2}{|x|^2} \end{pmatrix},$$

odakle kao u prethodnom slučaju slijedi da je $\varphi'(x)\cdot(\varphi'(x))^T=E$, pa je φ konformno preslikavanje. Kako je $D=\det\varphi'(x)=\frac{-1}{|x|^2}<0$, to φ mijenja orijentaciju. Dokaz za slučaj simetrije φ u odnosu na $S(a,r)$ dobijamo primjenom jednakosti $\varphi=\psi\circ\varphi^*\circ\psi^{-1}$, gdje je φ* simetrija u odnosu na kružnicu S(0,1) a $\psi(x)=r\cdot x+a$ (primjer 3). □

Iz prethodne teoreme slijedi da proizvod parnog broja simetrija čuva orijentaciju, a proizvod neparnog broja simetrija mijenja orijentaciju.

Dakle, Mebijusovo preslikavanje u $\hat{R}^2$ je konformno preslikavanje. Važi i obrnuto (pogledati [18]).

***Definicija** 5.* Mebijusova preslikavanja iz $GM(\hat{R}^2)$ koja čuvaju orijentaciju čine grupu koju ćemo zvati Mebijusovom grupom. Oznaka: $M(\hat{R}^2)$.

Mebijusova preslikavanja slikaju kružnice i prave u kružnice ili prave (pogledati [3] ili [18]). Zbog toga ćemo, radi kratkoće izlaganja, ubuduće koristiti termin "kružnica" za označavanje kružnice ili prave. Pri tome ćemo kružnicu $S(a,r)$ zvati Euklidovom kružnicom ili prosto kružnica tipa $S(a,r)$.

***Teorema** 4.* Neka je φ Mebijusovo preslikavanje i Σ proizvoljna kružnica. Tada je φ(Σ) kružnica.

Dokaz: Kružnica Σ predstavlja skup tačaka x iz $\hat{R}^2$ definisan sljedećom jednačinom:

$$\varepsilon|x|^2 - 2(x \cdot a) + t = 0 \qquad \varepsilon, t \in R, \quad a \in R^2. \tag{8}$$

Po dogovoru uzimamo da $z = \infty$ zadovoljava jednačinu (8) ako i samo ako je $\varepsilon = 0$. Ako je $x \in \sum$, tj. ako x zadovoljava jednačinu (8), stavljajući $y = x^* = \frac{x}{|x|^2}$, dobijamo $\varepsilon - 2(y \cdot a) + t|y|^2 = 0$, što je jednačina sfere Σ_1. Ako je $\varphi^*(x) = x^*$ dobijamo da je $\varphi^*(\Sigma) \subset \Sigma_1$. Analogno razmatranje pokazuje da je $\varphi^*(\Sigma_1) \subset \Sigma$. Dakle, $\varphi^*(\Sigma) = \Sigma_1$. Saglasno (4) i koristeći prethodno rečeno vidimo da je $\varphi(\Sigma)$ kružnica kada je φ simetrija u odnosu na Euklidovu kružnicu. Ako je φ simetrija u odnosu na pravu iz R^2, lako se vidi da je $\varphi(\Sigma)$ kružnica. Takođe je pri preslikavanju $\varphi(x) = kx$, $k > 0$, $\varphi(\Sigma)$ kružnica. Kako je Mebijusovo preslikavanje proizvod simetrija to dolazimo do traženog rezultata. □

Svako Mebijusovo preslikavanje φ definisano na $\hat{R}^2$ na jedinstven način se može proširiti do Mebijusovog preslikavanja $\widetilde{\varphi}$ definisanog na $\hat{R}^3$. Naime, neka je $x = (x_1, x_2)$, $x \in \hat{R}^2$ i $\widetilde{x} = (x_1, x_2, 0)$, $\widetilde{x} \in \hat{R}^3$. Za svako preslikavanje φ definisano na $\hat{R}^2$ neka je preslikavanje $\widetilde{\varphi}$ definisano na $\hat{R}^3$ na sljedeći način: ako je φ simetrija u odnosu na $S(a, r)$, $a \in R^2$, tada je $\widetilde{\varphi}$ simetrija u odnosu na $S(\widetilde{a}, r)$, a ako je φ simetrija u odnosu na $P(a, t)$, tada je $\widetilde{\varphi}$ simetrija u odnosu na $P(\widetilde{a}, t)$.

Ako je $x \in \hat{R}^2$ i $y = \varphi(x)$ tada je

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, 0) = (y_1, y_2, 0) = (\varphi(x))^{\sim}. \tag{9}$$

Ako R^3 identifikujemo sa $R^2 \times R^1$, tada (9) možemo zapisati u obliku $\widetilde{\varphi}(x, 0) = (\varphi(x), 0)$.

Pošto je svako Mebijusovo preslikavanje φ definisano u $\hat{R}^2$ proizvod konačnog broja simetrija φ_j, tj. $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_m$, tada Mebijusovo preslikavanje $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2 \circ \ldots \circ \widetilde{\varphi}_m$ predstavlja proširenje preslikavanja φ sa $\hat{R}^2$ na $\hat{R}^3$ u smislu (9).

Definicija 6. Puankareovim proširenjem preslikavanja $\varphi \in GM(\hat{R}^2)$ naziva se preslikavanje $\widetilde{\varphi} \in GM(\hat{R}^3)$.

Ako su $\varphi, \psi \in GM(\hat{R}^2)$, tj. $\varphi = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_m$ i $\psi = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_k$, to je Puankarevo proširenje za $\varphi \circ \psi$ preslikavanje

$$(\varphi \circ \psi)^{\sim} = (\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_m \circ \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_k)^{\sim} = \widetilde{\varphi}_1 \circ \ldots \circ \widetilde{\varphi}_m \circ \widetilde{\psi}_1 \circ \ldots \circ \widetilde{\psi}_k = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}.$$

Otuda slijedi da je preslikavanje $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ injektivni homomorfizam $GM(\hat{R}^2)$ u $GM(\hat{R}^3)$.

Ako je $\widetilde{\varphi}$ simetrija u odnosu na sferu $S(\widetilde{a}, r)$, $a \in R^2$, to je

$$|\widetilde{\varphi}(y) - \widetilde{\varphi}(x)| = r^2 |(y-\widetilde{a})^* - (x-\widetilde{a})^*| = r^2 \left(\frac{1}{|y-\widetilde{a}|^2} - \frac{2(x-\widetilde{a})(y-\widetilde{a})}{|x-\widetilde{a}|^2 |y-\widetilde{a}|^2} + \frac{1}{|x-\widetilde{a}|^2} \right)^{1/2} =$$

$$= r^2 \frac{|y-x|}{|x-\widetilde{a}||y-\widetilde{a}|}, \quad x, y \in \hat{R}^3,$$

$$\frac{|\widetilde{\varphi}(y) - \widetilde{\varphi}(x)|}{|y-x|} = \frac{r^2}{|x-\widetilde{a}||y-\widetilde{a}|}.$$

Označimo j-tu komponentu od $\widetilde{\varphi}(x)$ sa $[\widetilde{\varphi}(x)]_j$. Pošto je $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{a} + r^2 (x - \widetilde{a})^*$, to je

$$[\widetilde{\varphi}(x)]_3 = 0 + \frac{r^2 x_3}{|x-\widetilde{a}|^2}.$$

Lako je sada pokazati da je $\frac{|y-x|^2}{y_3 x_3}$ invarijanta preslikavanja $\widetilde{\varphi}$.

Neka je $\widetilde{\varphi}$ simetrija u odnosu na ravan $P(\widetilde{a}, t)$, $a \in R^2$. Ona je Euklidova izometrija, pri čemu je $[\widetilde{\varphi}(x)]_3 = x_3$. Otuda slijedi da je i u ovom slučaju $\frac{|y-x|^2}{y_3 x_3}$ invarijantno za $\widetilde{\varphi}$. Otuda dalje slijedi da je $\frac{|y-x|^2}{y_3 x_3}$ invarijantno u odnosu na sva Puankareova proširenja. Kao neposrednu posljedicu te invarijantnosti dobija se da je za svako $\varphi \in GM(\hat{R}^2)$ Puankareovo proširenje $\widetilde{\varphi}$ izometrija prostora $H^3 = \{x \in R^3 | \, x_3 > 0\}$ snadbjevenog metrikom ρ koja se definiše formom $ds_1 = \frac{|dx|}{x_3}$.

Prostor H^3 predstavlja model hiperboličkog prostora sa hiperboličkom metrikom ρ. Prostor (H^3, ρ) služi za izučavanje podgrupa grupe $GM(\hat{R}^2)$. Naime, obrazujući za svako φ iz podgrupe G grupe $GM(\hat{R}^2)$ Puankareovo proširenje, tada grupu G možemo izučavati kao grupu izometrija u H^3.

Kvaternion je kompleksna matrica drugog reda oblika

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Skup svih kvaterniona označavamo sa H. Sabiranje i množenje kvaterniona obavljamo kao sabiranje i množenje matrica. Za skup H važi:

1) H je Abelova grupa u odnosu na sabiranje.

2) $H \setminus \{0\}$ je grupa u odnosu na množenje.

3) H je realni vektorski prostor s bazom

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad i=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad k=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je:

$$i^2=j^2=k^2=-1;\quad i\cdot j=k;\quad j\cdot k=i;\quad k\cdot i=j;$$
$$j\cdot i=-k;\quad k\cdot j=-i;\quad i\cdot k=-j.$$

Skup kvaterniona sadrži kopiju C, zato što preslikavanje $x+i\cdot y \to x\cdot 1+y\cdot i$ iz C u H čuva sabiranje i množenje.
Ako je u (10) $z=x+i\cdot y$ a $w=u+i\cdot v$, dobijamo

$$q=(x\cdot 1+y\cdot i)+(u\cdot j+v\cdot k)=(x\cdot 1+y\cdot i)+(u\cdot 1+v\cdot i)\cdot j,\qquad q\in H. \tag{11}$$

Uzimajući u obzir (11), podesno je (kvaternion) q zapisati u obliku $q=z+\overline{w}\cdot j$. Proizvod dva takva izraza (kvaterniona) tada je definisan na sljedeći način:

$$(z_1+w_1\cdot j)\cdot(z_2+w_2\cdot j)=(z_1\cdot z_2-w_1\cdot\overline{w}_2)+(z_1\cdot w_2+w_1\cdot\overline{z}_2)\cdot j.$$

U slučaju da su z i w iz C, tada je

$$j\cdot z=\overline{z}\cdot j;\qquad (z+w\cdot j)(\overline{z}-w\cdot j)=\left(|z|^2+|w|^2\right).$$

Posljednja jednakost omogućava nalaženje inverznog kvaterniona, tj.

$$(z+w\cdot j)^{-1}=\frac{\overline{z}-w\cdot j}{|z|^2+|w|^2},\quad \text{gdje je}\quad \det(z+w\cdot j)=|z|^2+|w|^2.$$

Ako R^2 posmatramo kao kompleksnu ravan C, tada nam algebarska struktura od C daje mogućnost da Mebijusova preslikavanja izučavamo pomoću algebarskog jezika. Identifikujemo tačku $(x,y,t)\in R^3$ s kvaternionom

$$x+yi+tj, \tag{12}$$

a proširenu kompleksnu ravan $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ indentifikujemo sa $\hat{R}^2$. Tada u terminima kvaterniona imamo $H^3 = \{ z + tj \mid z \in C, t > 0 \}$, pri čemu granica od H^3 u $\hat{R}^3$ je skup $\hat{C}$.

Mebijusova preslikavanja za $\hat{C}$ obično se uvode kao preslikavanja oblika

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in C, \quad ad - bc \neq 0 \tag{13}$$

Uslov $ad - bc \neq 0$ garantuje da g nije konstanta, tj. da c i d nijesu istovremeno jednaki nuli. Na taj način g je definisano na C za $c=0$ i na $C \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ ako je $c \neq 0$.

Uzimamo da je $g(\infty) = \infty$ za $c=0$, a $g\left(\frac{-d}{c} \right) = \infty$ i $g(\infty) = \frac{a}{c}$ za $c \neq 0$.

Dakle, g je uzajamno jednoznačno preslikavanje $\hat{C}$ na sebe. Pokazuje se da je g^{-1} preslikavanje oblika preslikavanja g. Skup M preslikavanja oblika g čini grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja. Pokazuje se da je $M = M(\hat{R}^2)$.
Kvaternion (12) se može zapisati kao $z + tj$, gdje je $z = x + iy$. Tada je Puankareovo proširenje $\tilde{g}$ od g dato formulom

$$\tilde{g}(z+tj) = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}t^2 + |ad-bc|tj}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2} \tag{14}$$

Skup regularnih matrica tipa 2×2 s elementima iz C čini grupu u odnosu na operaciju množenja matrica. Ona se naziva opštom linearnom grupom i označava sa $GL(2,C)$.

Podgrupa $SL(2,C)$ grupe $GL(2,C)$, čiji elementi su kompleksne matrice A za koje važi da je $\det(A) = 1$, naziva se specijalnom linearnom grupom.

Svaka matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iz grupe $GL(2,C)$ indukuje preslikavanje $g_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $g_A \in M$.

Neka je $\Phi : A \mapsto g_A$ preslikavanje sa $GL(2,C)$ na grupu M. Lako se pokazuje da je $g_A(g_B(z)) = g_{AB}(z)$, $z \in \hat{C}$, gdje je AB proizvod matrica A i B. Otuda slijedi da je Φ homomorfizam grupe $GL(2,C)$ na grupu M. Kako se jezgro K homomorfizma Φ sastoji iz matrica $A \in GL(2,C)$ za koje je $\Phi(A) = g_A(z) = i_{\hat{C}}(z)$, gdje je $i_{\hat{C}}(z) = z$, za svako $z \in \hat{C}$, to je $K = Ker\ \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$. Otuda slijedi da je grupa M izomorfna sa $GL(2,C)/K$. Jezgro restrikcije Φ na $SL(2,C)$ je $K_0 = K \cap SL(2,C) = \{I, -I\}$. Kako je $GL(2,C)/K$

izomorfno sa $SL(2,C)/\{I,-I\}$, to je M izomorfno sa $SL(2,C)/\{I,-I\}$. Dalje će nam biti potrebne sljedeće dvije funkcije definisane na M:

$$trace^2(g)=\frac{tr^2(A)}{\det(A)} \quad \text{i} \quad \|g\|=\frac{\|A\|}{|\det(A)|^{1/2}},$$

gdje je $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ odgovarajuća matrica (predstavnik) za g i

$$\det(A)=ad-bc, \quad tr(A)=a+d, \quad \|A\|=\sqrt{[A,A]}, \quad [A,A]=tr(AA^*)=|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2$$

$$A^*=(\overline{A})^t=\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

Kako izučavamo Mebijusovu grupu M, a M je izomorfna sa $SL(2,C)/\{I,-I\}$, to će nam ubuduće $tr^2(g)$ označavati $trace^2(g)$, jer je $tr^2(g)=trace^2(g)$ za $g\in M$.

Neka je O proizvoljna oblast iz $\hat{C}$. Bijektivno preslikavanje $\varphi: O\to O$ zove se automorfizam oblasti O. Lako se pokazuje da skup svih automorfizama oblasti O, u oznaci Aut O, čini grupu u odnosu na operaciju kompoziciju preslikavanja.

Ubuduće ćemo za oznaku grupe upotrebljavati oznaku koja se odnosi na skup te grupe. U prethodnom dijelu teksta to je već rađeno za Mebijusova preslikavanja.

Kanoničnom oblašću zvaćemo jednu od sljedećih skupova: jedinični krug $\Delta=\{z\,|\,|z|<1\}$, kompleksnu ravan C i proširenu kompleksnu ravan $\hat{C}=\hat{R}^2$.

Poznato je da je svaki konformni automorfizam kanoninče oblasti neko Mebijusovo preslikavanje, tj. preslikavanje oblika $\dfrac{az+b}{cz+d}$, gdje je $ad-bc\neq 0$. ([18]).

Takođe je poznato ([18]) da su grupe konformnih automorfizama kanoničnih oblasti u oznaci *Aut(.)* sljedeće grupe:

$$Aut\Delta=\left\{e^{i\theta}\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\,\Big|\, w\in\Delta,\ \theta\in[0,2\pi)\right\};$$

$$AutC=\{az+b\,|\, a\in C\setminus\{0\},\ b\in C\};$$

$$Aut\hat{C}=M.$$

Iz prethodnog slijedi da su $Aut\Delta$ i $AutC$ podgrupe Mebijusove grupe $Aut\hat{C}=M$.

1.2. DINAMIČKI SISTEMI

Postoje dva tipa dinamičkih sistema: ***tok*** i ***kaskada***.

Definicija 1. Algebarska struktura $(D_M, \circ)$, gdje je $\circ$ kompozicija preslikavanja, a $D_M = \{g^t | g^t$ su preslikavanja definisana na skupu M, t $\in$ R ili t $\in$ R$^+$, zove se ***tokom*** ako je:

1. $g^0 = 1_M$ -identično preslikavanje
2. $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ za svako $t,s \in R$ ($t,s \in R^+$).

Lako se vidi da ako je u toku $t \in R$, tada je tok grupa, a ako je $t \in R^+$, tada je tok polugrupa.

Ako se u definiciji 1 skupovi R i R$^+$ zamijene sa skupovima Z i Z$^+$, redom, dobija se diskretni dinamički sistem koji se naziva ***kaskadom***.

Dalje navodimo neke karakteristične podgrupe grupe Mebijusovih preslikavanja M koje će nam u ovom radu biti potrebne. One su podgrupe grupe $Aut\Delta$.

Naime, $H^\theta = \left\{ s_a^\theta(z) = \dfrac{z + ae^{i\theta}}{1 + ae^{-i\theta} z} \mid a \in (-1,1) \right\}$, $\theta \in [0,\pi)$ fiksirano, je hiperbolička podgrupa grupe $Aut\,\Delta$.

$P^\theta = \left\{ s_u^\theta(z) = \dfrac{(u+i)z - ue^{i\theta}}{-(u-i) + ue^{-i\theta} z} \middle| u \in (-\infty,+\infty) \right\}$, $\theta \in [0,2\pi)$ fiksirano, je parabolička podgrupa grupe Aut Δ

$E^{z_0} = \left\{ s_\theta^{z_0} = \dfrac{\left(1 - |z_0|^2 e^{i\theta}\right) z - z_0\left(1 - e^{i\theta}\right)}{\overline{z_0}\left(1 - e^{i\theta}\right) z + e^{i\theta} - |z_0|^2} \middle| \theta \in [0,2\pi) \right\}$, $z_0 \in \Delta$ fiksirano, je eliptička podgrupa grupe Aut Δ.

Navedene podgrupe predstavljaju dinamičke sisteme-tok.
Za nas će biti interesantni sljedeći dinamički sistemi-kaskade:

Neka je $g \in H^\theta, g \neq i, 0 \leq \theta < \pi$, proizvoljno. Tada je $(H_g^\theta, \circ)$ jedna hiperbolička kaskada, gdje je $H_g^\theta = \{g^n | n \in Z\}$, $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g$, $g^0 = i_\Delta$, a $g^{-n} = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1}, n \in N$. Lako se vidi da skup H_g^θ u odnosu na operaciju kompoziciju preslikavanja čini cikličnu podgrupu hiperboličke grupe H^θ, odnosno grupe Aut Δ.

Neka je $g \in P^\theta, g \neq i, 0 \leq \theta < 2\pi$, proizvoljno. Tada je $(P_g^\theta, \circ)$ parabolička kaskada, gdje je $P_g^\theta = \{g^n | n \in Z\}$, $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g$, $g^0 = i_\Delta$, $g^{-n} = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1}, n \in N$. Skup P_g^θ u odnosu na operaciju kompoziciju preslikavanja čini cikličnu podgrupu paraboličke grupe P^θ, odnosno grupe Aut Δ.

U ovom poglavlju ćemo razmatrati odnos između nekih algebarskih pojmova i geometrijskih ideja koja se tiču nepokretnih tačaka. U početku ćemo o tom odnosu govoriti uopšteno , pa se nećemo ograničavati na Mebijusova preslikavanja.

Neka je X neki neprazan skup. Permutacijom skupa X zvaćemo uzajamno jednoznačno (bijektivno) preslikavanje X na samog sebe. Tako na primjer, simetrija u odnosu na sferu $S(a,r)\subset \hat{R}^2$ je permutacija skupa $\hat{R}^2$.

Nepokretna tačka permutacije $g: X\to X$ je tačka $x\in X$ za koju je $g(x)=x$. Ako je x nepokretna tačka za g, govorićemo da g ostavlja nepokretnom (fiksnom) tu tačku. Skup permutacija skupa X čini grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja. Neka je G grupa permutacija skupa X. Stabilizatorom tačke $x\in X$ u G naziva se skup $G_x=\{g\in G \mid g(x)=x\}$. Lako se pokazuje da je G_x podgrupa grupe G. Orbitom (ili G-orbitom) tačke x naziva se skup $G(x)=\{g(x)\in X \mid g\in G\}$. Postoji prirodno pridruživanje između skupova lijevih klasa G/G_x i orbita $G(x)$. Ako su g i h elementi iz G, tada je $h(x)=g(x)$ ako i samo ako je $hG_x=gG_x$. Iz prethodnog tvrđenja slijedi da je $hG_x\mapsto h(x)$ uzajamno jednoznačno preslikavanje sa G/G_x na $G(x)$. Iz iskazanog takođe slijedi da lijeve klase hG_x predstavljaju skup svih elemenata $g\in G$ koji preslikavaju x u $h(x)$.

Dvije podgrupe G_0 i G_1 grupe G su konjugovane ako postoji $h\in G$ tako da važi $G_0=hG_1h^{-1}$. Kako g fiksira x ako i samo ako hgh^{-1} fiksira $h(x)$, to je $G_{h(x)}=hG_xh^1$. Otuda slijedi da ako x i y imaju jednake orbite, tada su G_x i G_y konjugovane podgrupe grupe G. Konjugovane podgrupe su izomorfne. Nas će prije svega interesovati geometrijsko dejstvo podgrupa iz M. Uopšte, mi ćemo dalje dati rezultate u oblicima koji su invarijantni u odnosu na konjugovanje.

Neka je F_g skup svih nepoketnih tačaka za g. Ako je $gh=hg$, tada je

$$g(F_h)=F_h \qquad \text{i} \qquad h(F_g)=F_g. \tag{15}$$

Naravno, ako je $x\in F_h$ tada je $h(g(x))=g(h(x))=g(x)$, tj. $g(x)\in F_h$. Znači $g(F_h)\subset F_h$. Zamjenjujući g sa g^{-1} dobijamo $g^{-1}(F_h)\subset F_h$, odakle slijedi da je $F_h\subset g(F_h)$, pa je $g(F_h)=F_h$. Analogno dobijamo da je $h(F_g)=F_g$. Kasnije ćemo vidjeti da u slučaju kada je G grupa Mebijusovih preslikavanja važi i obrnuto tvrđenje.

Vratimo se sada izučavanju preslikavanja iz M. Mebijusovo preslikavanje g u $\hat{C}$ može imati ili jednu ili dvije nepokretne tačke ili je identično preslikavanje. Ovo daje jednu klasifikaciju preslikavanja iz M. Međutim, može se dobiti detaljnija klasifikacija Mebijusovih preslikavanja grupe M koristeći se nepokretnim tačkama njihovih Puankareovih proširenja. Ta nova klasifikacija je invarijantna u odnosu na konjugaciju. Na taj način se dobija bolja (finija) klasifikacija koja daje klasifikaciju po konjugovanim klasama.

Uvodimo normalizovana Mebijusova preslikavanja. Naime, za proizvoljno $k \in C$, $k \neq 0$, neka je $m_k(z) = kz$ ako je $k \neq 1$ i $m_1(z) = z + 1$. Ova preslikavanja nazivaju se standardnim formama. Primijetimo da za svako k (uključujući $k = 1$) važi

$$tr^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2. \tag{16}$$

Ako je $g \in M$, $g \neq i$, tada ili g ima u $\hat{C}$ tačno dvije nepokretne tačke α, β ili jednu nepokretnu tačku α. U posljednjem slučaju izabraćemo tačku β koja je različita od α. Neka je sada h Mebijusovo preslikavanje za koje je $h(\alpha) = \infty$, $h(\beta) = 0$ i $h(g(\beta)) = 1$ ako je $g(\beta) \neq \beta$. Tada je

$$hgh^{-1}(\infty) = \infty \quad \text{i} \quad hgh^{-1}(0) = \begin{cases} 0, & g(\beta) = \beta \\ 1, & g(\beta) \neq \beta \end{cases}.$$

Ako g fiksira α i β, tada hgh^{-1} fiksira 0 i ∞, pa je $hgh^{-1} = m_k$ za neko $k \neq 1$. Ako g fiksira samo α, tada hgh^{-1} fiksira samo ∞, pri čemu je $hgh^{-1}(0) = 1$, pa je $hgh^{-1} = m_1$. Ovo pokazuje da je svako Mebijusovo preslikavanje $g \in M, g \neq i$,konjugovano jednoj od standardnih formi m_k. Ovo omogućava da se jednostavno dokaže sljedeći rezultat.

Teorema 1. Neka su $f, g \in M$, $f \neq i$ i $g \neq i$. Tada su f i g konjugovani ako i samo ako $tr^2(f) = tr^2(g)$.

Ako su f i g konjugovana preslikavanja, tada ćemo to zapisivati sa $f \sim g$.

Dokaz: Da iz $f \sim g$ slijedi $tr^2(f) = tr^2(g)$ dobija se na osnovu poznatog rezultata iz teorije matrica.

Neka je sada $tr^2(f) = tr^2(g)$. Kako su f i g konjugovani nekim od standardnih formi, neka je $f \sim m_p$ i $g \sim m_q$. Tada je $tr^2(m_p) = tr^2(f) = tr^2(g) = tr^2(m_q)$, pa iz (16) slijedi da je $p = q$ ili $p = \frac{1}{q}$. Kako je $m_p \sim m_{\frac{1}{p}}$ (što je trivijalno za $p = 1$, a ako je $p \neq 1$ tada je $hm_p h^{-1} = m_{\frac{1}{p}}$, gdje je $h(z) = -\frac{1}{z}$), tada je $m_p \sim m_q$. Kako je konjugovanje relacija ekvivalencije, slijedi da je $f \sim g$.□

Sada ćemo klasifikovati Mebijusova preslikavanja iz M u terminima nepokretnih tačaka u $\hat{R}^3$ njihovih Puankareovih proširenja. Prirodno je prvo početi izučavanja nepokretnih tačaka u slučaju standardnih formi. Koristeći (14) (iz poglavlja 1.1) dobijamo

$$\tilde{m}_k(z+tj)=kz+|k|tj,\quad k\neq 1;\quad \tilde{m}_1(z+tj)=z+1+tj.$$

Ovo omogućava nalaženje nepokretnih tačaka za svako $\tilde{m}_k$ u $\hat{R}^3$. Očigledno važi

1) $\tilde{m}_1$ fiksira ∞, ali ne fiksira druge tačke u $\hat{R}^3$;
2) $\tilde{m}_k$, gdje je $|k|\neq 1$, fiksira 0 i ∞, ali ne fiksira druge tačke u $\hat{R}^3$;
3) u slučaju $\tilde{m}_k$, $|k|=1$, $k\neq 1$, skup nepokretnih tačaka je $\{tj \mid t\in R\}\cup\{\infty\}$.

Definicija 2. Neka je g, $g\neq i$, Mebijusovo preslikavanje iz M. Kažemo da:
1) g je paraboličko ako g ima samo jednu nepokretnu tačku u C (ili što je ekvivalentno da je $g\sim m_1$);
2) g je loksodromsko ako njegovo Puankareovo proširenje $\tilde{g}$ ima tačno dvije nepokretne tačke u R^3 (ili što je ekvivalentno da je $g\sim m_k$ za neko k, $|k|\neq 1$);
3) g je eliptičko ako njegovo Puankareovo proširenje $\tilde{g}$ ima beskonačno mnogo nepokretnih tažaka u $\hat{R}^3$ (ili što je ekvivalentno da je $g\sim m_k$, za neko k, $|k|=1$, $k\neq 1$).

Klasu svih loksodromskih preslikavanja moguće je razbiti na dvije podklase u zavisnosti da li ima invarijantan krug ili ga nema.

Definicija 3. Neka je g loksodromsko preslikavanje. g se naziva hiperboličkim Mebijusovim preslikavanjem ako je $g(D)=D$, za neki otvoreni krug ili poluravan D iz $\hat{C}$. U protivnom ćemo reći da je g strogo loksodromsko Mebijusovo preslikavanje.

Data klasifikacija Mebijusovih preslikavanja invarijantna je u odnosu na konjugovanje. Teorema 1 omogućava da se dokaže tvrđenje kojim se pomoću $tr^2(g)$ ustanovljava kojoj klasi pripada Mebijusovo preslikavanje $g\in M$. Naime važi

Teorema 2. Neka je g, $g\neq i$ Mebijusovo preslikavanje. Tada važi

1) g je paraboličko ako i samo ako je $tr^2(g)=4$;
2) g je eliptičko ako i samo ako je $tr^2(g)\in[0,4)$;
3) g je hiperboličko ako i samo ako je $tr^2(g)\in(4,\infty)$;
4) g je strogo loksodromsko ako i samo ako je $tr^2(g)\notin(0,\infty)$.

Neka je g paraboličk Mebijusovo preslikavanje sa nepokretnom tačkom α. Tada je za neko h, $h(\alpha)=\infty$, $(hgh^{-1})(z)=z+t$, $t\neq 0$. Otuda slijedi da je $(hg^n h^{-1})(z)=z+nt$, $n\in N$, pa je $g^n(z)=h^{-1}(h(z)+nt)$, $n\in N$. Otuda se lako vidi da $(hg^n h^{-1})(z)\to\infty$, kada $n\to\infty$, za svako $z\in\hat{C}$, iz čega dalje slijedi da za paraboličko Mebijusovo preslikavanje g je $g^n(z)\to\alpha$, kada $n\to\infty$, za svako $z\in\hat{C}$.

Ako preslikavanje g nije paraboličko , tada g ima dvije nepokretne tačke , npr. α i β. Za neko h je $h(\alpha)=\infty$ i $h(\beta)=0$, pa je $(hgh^{-1})(z)=tz$, $t\neq 0{,}1$, iz čega slijedi da je $(hgh^{-1})(z)=t^n z$, $n\in N$, tj. $g^n(z)=h^{-1}(t^n h(z))$, $n\in N$.

Ako je preslikavanje g loksodromsko, tj. $|t|\neq 1$, a $z\neq\alpha$ i $z\neq\beta$, tada je $g^n(z)\neq\alpha$ i $g^n(z)\neq\beta$, $n\in N$. Iz naprijed izloženog sada nije teško vidjeti da $g^n(z)$ konvergira ili α ili β, kada $n\to\infty$. Ako recimo $g^n(z)\to\alpha$, $n\to\infty$, $z\notin\hat{C}\setminus\{\beta\}$, tada se α naziva privlačećom (atraktivnom) nepokretnom tačkom za g , dok se β zove odbijajućom (repulzivnom) tačkom za g. Tada je $g^{-n}(z)\to\beta$, $n\to\infty$, za svako $z\in\hat{C}\setminus\{\alpha\}$.

Ako je g eliptičko Mebijusovo preslikavanje ($|t|=1$), tada g ima invarijantni krug. U suštini proizvoljan krug, u odnosu na koji su tačke α i β inverzne, je g-invarijantan krug i svaka orbita koja je definisana (određena) za stepen g mora da leži na jednom od tih krugova.

Iz naprijed izloženog dobijamo sljedeće tvrđenje:

Teorema 3. 1) Neka je $g\in M$ paraboličko Mebijusovo preslikavanje sa nepokretnom tačkom α. Tada $g^n(z)\to\alpha$, $n\to\infty$, za svako $z\in\hat{C}$, gdje je konvergencija ravnomjerna na svakom kompaktnom podskupu iz $\hat{C}\setminus\{\alpha\}$.

2) Neka je $g\in M$ loksodromsko Mebijusovo preslikavanje. Tada jedna od nepokretnih tačaka ili α ili β, naprimjer α, posjeduje svojstvo $g^n(z)\to\alpha$, $n\to\infty$, za svako $z\neq\beta$, pri tome je konvergencija ravnomjerna na proizvoljnom kompaktnom podskupu iz $\hat{C}\setminus\{\beta\}$.

3) Neka je $g\in M$ eliptičko Mebijusovo preslikavanje sa nepokretnim tačkama α i β. Tada g ostavlja invarijantnim svaki krug u odnosu na koji su α i β uzajamno inverzne tačke.

Iz teoreme 3 slijedi da je za $g\in H^\theta$, $g\neq i$ ili $e^{i\theta}$ ili $-e^{i\theta}$ privlačeća (atraktivna) tačka za g, tj. ili $g^n \underset{K}{=} e^{i\theta}$ ili $g^n \underset{K}{=} -e^{i\theta}$, gdje je K kompaktan podskup od Δ. Ako je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka za g tada je $-e^{i\theta}$ odbijajuća (repulzivna) tačka za g, odnosno $-e^{i\theta}$ je privlačeća tačka za g^{-1}. Dalje , iz teoreme 3 slijedi da je $e^{i\theta}$ privlačeća (atraktivna) tačka za $g\in P^\theta$, tj. $g^n \underset{K}{=} e^{i\theta}$, gdje je K je kompaktan podskup od Δ.

1.3. GEOMETRIJA HIPERBOLIČKIH I PARABOLIČKIH KASKADA

Neka je $d\sigma = \dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$ hiperbolički elemenat dužine luka u Δ. Ako je $\gamma = \{z \in \Delta \mid z = z(t), t \in [a,b]\}$ neprekidno-diferencijabilna kriva, tj. $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, gdje su $x(t), y(t)$ neprekidno-diferencijabilne funkcije na $[a,b]$, tada se hiperbolička dužina $\lambda(\gamma)$ krive γ računa na sljedeći način:

$$\lambda(\gamma) = \int_\gamma d\sigma = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}\,dt, \tag{17}$$

$$|z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}, \qquad t \in [a,b]$$

Neka je $w = \Phi(z) = e^{i\theta}\,\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}, a \in \Delta,\ \theta \in [0,2\pi)$. Po Švarc-Pikovoj lemi (pogledati npr. [9]) važi sljedeća jednakost:

$$\frac{|\Phi'(z)|}{1-|\Phi(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \Delta. \tag{18}$$

Iz (17) i (18) slijedi

$$\lambda(\Phi(\gamma)) = \int_{\Phi(\gamma)} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \lambda(\gamma).$$

Znači, hiperbolička dužina krive γ je invarijanta elemenata grupe $Aut\Delta = \left\{ e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid a \in \Delta, \theta \in [0,2\pi) \right\}$.

Neka je l_r, $0 < r < 1$, segment $[0,r]$ sa x-ose, tj. $l_r = \{z \in \Delta \mid z(t) = t + i0,\ \ t \in [0,r]\}$. Hiperbolička dužina segmenta l_r je $\lambda(l_r) = \displaystyle\int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$. Ako je γ proizvoljna neprekidno-diferencijabilna kriva koja spaja tačke 0 i r, tada je:

$$\gamma = \{z \in \Delta \mid z = z(t) = x(t) + iy(t),\ \ t \in [0,r]\}$$

$$\lambda(\gamma)=\int_0^r \frac{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}{1-\left((x(t))^2+(y(t))^2\right)}dt \geq \int_0^r \frac{|x'(t)|}{1-(x(t))^2}dt \geq \int_0^r \frac{x'(t)}{1-(x(t))^2}dt = \begin{pmatrix} x=x(t) & t\in(0,r) \\ dx=x'(t) & x\in(0,r) \end{pmatrix} =$$

$$=\int_0^r \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}=\lambda(l_r).$$

Znači, dobijamo da je $\lambda(l_r)\leq\lambda(\gamma)$ za svaku neprekidno-diferencijabilnu krivu γ iz Δ koja spaja tačke *0* i r. Jednakost važi ako i samo ako je $y(t)\equiv 0$ na $[0,r]$.

Iz prethodnog slijedi da najmanju hiperboličku dužinu od svih neprekidno diferncijabilnih krivih koje spajaju tačke 0 i r ima kriva-segment $l_r=[0,r]$, i to je jedinstvena kriva sa tim svojstvom.

Neka su z_1 i z_2 proizvoljne tačke kruga Δ i neka je $\Phi(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$. Tada je

$\Phi(z_1)=0$ i $|\Phi(z_2)|=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|=r,\quad 0<r<1$. Kako je hiperbolička dužina krive γ, koja spaja tačke z_1 i z_2, invarijantna u odnosu na Mebijusova preslikavanja kruga Δ na samog sebe, tada će najkraću hiperboličku dužinu imati kriva γ koja spaja tačke z_1 i z_2 za koju je $\Phi(\gamma)=[0,r]$. Otuda je

$$\lambda(\gamma)=\lambda(\Phi(\gamma))=\lambda(l_r)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}.$$

Znači, kriva koja spaja tačke z_1 i z_2 i koja ima najkraću hiperboličku dužinu (između tačaka z_1 i z_2) je kriva γ čija je hiperbolička dužina

$$\lambda(\gamma)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}.$$

Kako se segment $[0,r]$ nalazi na x-osi, a x-osa je ortogonalna na kružnicu $\partial\Delta:|z|=1$, i kako Mebijusovo preslikavanje čuva uglove (to je konformno preslikavanje) a prave i kružnice slika u prave i kružnice, to je kriva γ sa najmanjom hiperboličkom dužinom između tačaka z_1 i z_2 ili prava ili kružnica koja je ortogonalna na kružnicu $\partial\Delta$ i prolazi kroz tačke z_1 i z_2.

Definicija 1. Hiperboličko rastojanje između tačaka z_1 i z_2 jednako je hiperboličkoj dužini geodezijske krive između tačaka z_1 i z_2, tj.

$$d_h(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|},\quad z_1,z_2\in\Delta. \tag{19}$$

Pokazuje se da je d_h metrika na Δ (pogledati npr. [18]).

Definicija 2. L-kriva koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2 kruga Δ je neprekidno-diferencijabilna kriva koja spaja tačke z_1 i z_2 i koja ima najmanju hiperboličku dužinu.

Pokazuje se (pogledati [5]) da su L-krive geodezijske krive kruga Δ za hiperboličku metriku koju rađa forma $d\sigma$.

Iz prethodnog slijedi da su geodezijske krive u krugu Δ za formu $d\sigma$ dijelovi pravih i kružni lukovi kružnica koje su ortogonalne na kružnicu $\partial\Delta$, a leže u krugu Δ.

Dijelovi pravih u krugu Δ su geodezijske krive ako i samo ako te prave prolaze kroz koordinatni početak, tj. ako i samo ako su prečnici kruga Δ.

Znači hiperboličko rastojanje između dvije tačke u Δ jednako je hiperboličkoj dužini dijela L - krive koja spaja te tačke.

Definicija 3. Funkcija $\sigma_1:\Delta\times\Delta\to R^+\cup\{0\}$ definisana na sljedeći način: $\sigma_1(z_1,z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|$, naziva se pseudohiperboličkim rastojanjem između tačaka z_1 i z_2 iz Δ.

Iz definicije 2 i definicije 3 slijedi da je $d_h(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sigma_1(z_1,z_2)}{1-\sigma_1(z_1,z_2)}$, odnosno, $\sigma_1(z_1,z_2)=\frac{e^{2d_h(z_1,z_2)}-1}{e^{2d_h(z_1,z_2)}+1}=th(d_h(z_1,z_2))$.

Skup $D_h(z_0,r)=\{z\in\Delta\,|\,d_h(z,z_0)<r\}$, $0<r<+\infty$, zove se hiperboličkim krugom sa centrom u tački $z_0\in\Delta$ i hiperboličkim poluprečnikom r.

Skup $\Delta(z_0,r_1)=\{z\in\Delta\,|\,\sigma_1(z,z_0)<r_1\}$, $r_1\in(0,1)$ zove se pseudohiperboličkim krugom sa centrom u tački z_0 i pseudohiperboličkim poluprečnikom r_1.

Lako se vidi da je $\Delta(z_0,r_1)=D_h(z_0,r)$, gdje je $r_1=thr$.

Pokazuje se da je pseudohiperbolički krug $\Delta(z_0,r_1)$ Euklidov krug

$$D(c,R)=\{z\in\Delta \,|\, |z-c|<R\},\quad \text{gdje je}\quad c=\frac{1-r_1^2}{1-r_1^2|z_0|^2}\cdot z_0 \quad \text{a} \quad R=\frac{1-|z_0|^2}{1-r_1^2|z_0|^2}\cdot r_1 .$$

Hiperbolička metrika na krugu Δ daje Puankareov model geometrije Lobačevskog, (pogledati [3], [5] ili [8]).

Definicija 4. Kružnica koja leži u Δ a sa $\partial\Delta$ nema zajedničkih tačaka naziva se ciklom u Δ.

Cikl predstavlja granicu hiperboličkog kruga u Δ.

Definicija 5. Kružnica koja leži u Δ i sa $\partial\Delta$ ima jednu zajedničku tačku naziva se oriciklom u Δ.

Definicija 6. Prečnici kruga Δ i krive u Δ koje su kružni lukovi kružnica iz C koji sa $\partial\Delta$ imaju dvije zajedničke tačke, nazivaju se hiperciklom u Δ.

Definicija 7. Skup čiji su elementi hipercikli koji imaju dvije zajedničke tačke sa $\partial\Delta$ zove se pramenom hipercikla.

Lema 1.([5]) Skup čiji se elementi nalaze na konstantnom hiperboličkom rastojanju od hipercikla *H* je hipercikl koji pripada pramenu hipercikla koji je definisan hiperciklom *H*.

Lema 2.([5]) Neka je p hiperboličko rastojanje hipercikla H od prečnika P kruga Δ. Tada je ugao koji zaklapaju hipercikl H i prečnik P $\alpha=\frac{\pi}{2}-arctg\, e^{\pm 2p\sqrt{\pi}}$.

Lema 3. Skup $\Delta_H(\theta,r)=\bigcup_{a\in(-1,1)} D_h(ae^{i\theta},r)$, $r\in(0,+\infty)$, je oblast kruga Δ ograničena sa dva hipercikla koji su na hiperboličkom rastojanju r od prečnika Λ_θ kruga Δ koji spaja tačke $e^{i\theta}$ i $-e^{i\theta}$. Ti hipercikli sa $\partial\Delta$ imaju zajedničke tačke $e^{i\theta}$ i $-e^{i\theta}$.

Lema 3 je direktna posljedica leme 1.

Lema 4. $\Delta_H(\theta,r)=\bigcup_{g\in H^\theta} g(\Delta(0,thr)),\quad r\in(0,+\infty).$

Ako je za svako $g\in H^\theta$ $g(A)=A,\quad A\subset\Delta$, tada se kaže da je A stabilizirajući skup za grupu H^θ.

Lema 5. Za svako $g\in H^\theta$ je $g(\Lambda_\theta)=\Lambda_\theta$, tj. prečnik Λ_θ je stabilizirajući skup hiperboličke podgrupe H^θ.

Lema 6. Skup $\Delta_H(\theta,r), r\in(0,+\infty)$, je stabilizirajući skup za hiperboličku grupu H^θ.

Leme 5 i 6 neposredno slijede iz definicija grupe H^θ i skupova Λ_θ i $\Delta_H(\theta,r)$, kao i svojstva da elementi hiperboličke podgrupe H^θ čuvaju hiperboličku metriku.

Neka je $h_\alpha^\theta,\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tetiva kruga Δ koja sa prečnikom Λ_θ u tački $e^{i\theta}$ zaklapa ugao α. Sa $\Delta(\theta,\alpha)$ označimo Štolcov ugao kruga Δ čiji su kraci tetive h_α^θ i $h_{-\alpha}^\theta$, a sa $\Delta(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ označimo Štolcov ugao kruga Δ čiji su kraci $h_{\varphi_1}^\theta$ i $h_{\varphi_2}^\theta$ a tjeme tačka $e^{i\theta}\in\partial\Delta$.

Lema 7. Za svako $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ postoje $r\in(0,+\infty)$ i $r_1\in(0,1)$, takvi da je $\left\{z \mid |z-e^{i\theta}|<r_1\right\}\cap\Delta(\theta,\alpha)\subset\left\{z \mid |z-e^{i\theta}|<r_1\right\}\cap\Delta_H(\theta,r)$. Za svako $r\in(0,+\infty)$, postoji $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tako da je $\Delta_H(\theta,r)\subset\Delta\ (\theta,\alpha)$.

Lema 7 direktno slijedi iz leme 2.

Lema 8. Skup $\Delta_P(\theta,r)=\bigcup_{a\in(-\infty,+\infty)} D_h\left(\frac{ae^{i\theta}}{a+i},r\right)$, $r\in(0,1)$, je oblast kruga Δ ograničena sa dva oricikla koji prolaze kroz tačku $e^{i\theta}$ i tačke $thre^{i\theta}$ i $-thre^{i\theta}$ redom. Za proizvoljno $r\in(0,1)$ oricikli i oblast $\Delta_P(\theta,r)$ su invarijantni u odnosu na preslikavanja iz grupe P^θ.

Definicija 8. Skup čiji su elementi oricikli koji imaju jednu zajedničku tačku sa $\partial\Delta$ zove se pramenom oricikla.

Lema 9. ([5]) Skup čiji se elementi nalaze na konstantnom hiperboličkom rastojanju od oricikla O je oricikl koji pripada pramenu oricikla koji je definisan oriciklom O.

Lema 10. $\Delta_P(\theta,r)=\bigcup_{g\in P^\theta} g(\Delta(0,thr)),\ r\in(0,+\infty).$

Lema 11. Skup $\Delta_P(\theta,r)$, r $\in(0,+\infty)$, je stabilizirajući skup za paraboličku grupu P^θ.

Leme 10 i 11 neposredno slijedi iz definicije grupe P^θ i skupa $\Delta_P(\theta,r)$, r $\in(0,+\infty)$, kao i svojstva da elementi paraboličke grupe P^θ čuvaju hiperboličku metriku.

Označimo sa $O_*^\theta=\left\{z\in\Delta \,\middle|\, \left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|=\frac{1}{2}\right\}$.

Lema 12. Neka je $g\in P^\theta$. Tada je $g^n(0)\in O_*^\theta$ za svako $n\in N$.

Lema 12 neposredno slijedi iz definicije grupe P^θ i skupa O_*^θ.

2. NORMALNE FAMILIJE I NORMALNE FUNKCIJE

U poglavljima 2.1, 2.2 i 2.3 se daju poznati rezultati za familije normalnih meromorfnih funkcija, normalne meromorfne funkcije kao i za meromorfne funkcije koje su normalne na hiperboličkim podgrupama grupe $Aut\Delta$, a koje imaju nepokretne tačke na $\partial\Delta$. Većina tih rezultata je data sa dokazima s ciljem da se ukaže na tehnike koje se koriste u njima, kao i da se obezbijedi kompletnost izložene teorije. Služe i za upoređivanje novodobijenih rezultata sa njima.

Naši rezultati su dati u poglavljima 2.4 i 2.5. Posebno ističemo rezultate iz poglavlja 2.5. Naime, u tom poglavlju se pokazuje da su klase meromorfnih funkcija koje su normalne na polugrupama grupe $Aut\Delta$ šire od dotada proučavanih klasa normalnih meromorfnih funkcija, kao i da za njih važe slični rezultati koji se odnose na do tada izučavane klase normalnih meromorfnih funkcija. Takođe se dokazuje, u poglavlje 2.4 da se klase meromorfnih funkcija normalnih na cikličnim podgrupama hiperboličkih i paraboličkih grupa poklapaju sa klasama meromorfnih funkcija normalnih na samim hiperboličkim i paraboličkim grupama, koje su izučavane u ([8]) i ([13]).

2.1. NORMALNE FAMILIJE FUNKCIJA

Neka je G proizvoljna oblast kompleksne ravni C, i $\Im = \{f(z)\}$ proizvoljna familija funkcija $f: G \to \hat{C}$. Konvergencija familije $\Im$ izučava se u odnosu na tetivnu (ili sfernu) metriku $\rho(x,y)$, $x,y \in \hat{C}$, koja je definisana u poglavlju 1.1 I glave.

Definicija 1. Za niz funkcija $(f_n(z))$, $f_n(z) \in \Im$, $n = 1,2,\ldots$ kaže se da ravnomjerno konvergira u oblasti G funkciji $f_0(z)$, ako $\rho(f_n(z), f_0(z)) \to 0$, kada $n \to \infty$, ravnomjerno na svakom kompaktu K, $K \subset G$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n \geq N)(\forall z \in K)(\rho(f_n(z), f_0(z)) < \varepsilon).$$

Definicija 2. Familija $\Im = \{f(z)\}$ se naziva normalnom familijom u tački $z_0 \in G$, ako svaki beskonačni niz $\{f_n(z)\}$ funkcija iz $\Im$ sadrži podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ koji ravnomjerno konvergira funkciji $f_0(z)$ u nekoj okolini U tačke z_0.

Definicija 3. Familija $\Im$ se naziva normalnom familijom u oblasti G, ako je ona normalna u svakoj tački $z_0 \in G$.

Definiciju 3 je dao G. Žilia ([15]).

Definicija 4. Familija $\Im$ je normalna familija u oblasti G ako svaki beskonačni niz $(f_n(z))$ funkcija $f_n(z) \in \Im$, $n = 1,2,\ldots$, sadrži podniz $(f_{n_k}(z))$ koji ravnomjerno konvergira u oblasti G meromorfnoj funkciji $f_0(z)$.

Definiciju 4 je dao P. Montel ([15]).

Iz definicija 1, 2, 3 i 4 slijedi ekvivalentnost definicije 3 sa definicijom 4. Za normalnost familije $\Im$ date tim definicijama uobičajeno je da se kaže da je to normalnost familije $\Im$ u smislu Montela.

Lema 1. Familija $\Im$ neprekidnih funkcija f u oblasti G je normalna familija u toj oblasti ako i samo ako je ravnomjerno neprekidna u svakoj tački iz G, tj. ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $z_0 \in G$ postoji okolina U tačke z_0 da je $\rho(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ za svako $z \in U$ i za svako $f \in \Im$.

Lema 2. Familija $\Im$ holomorfnih funkcija f u oblasti G je normalna familija u toj oblasti ako i samo ako je ravnomjerno ograničena u oblasti G, tj. ako i samo ako za svaki kompakt K, $K \subset G$, postoji konstanta $M = M(K)$, $0 < M < +\infty$ takva da je $|f(z)| \leq M$ za svako $z \in K$ i svako $f \in \Im$.

Dokazi lema 1 i 2 mogu se naći u ([15]).

Definicija 5. Sfernim izvodom za meromorfnu funkciju $f(z)$, koja je definisana u oblasti G kompleksne ravni C, naziva se funkcija

$$f^{\#}(z) = |f'(z)|\left(1 + |f(z)|^2\right)^{-1}, \quad z \in G.$$

U polovima meromorfne funkcije f po definiciji se uzima da je $f^{\#}(z) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}(z)$.

Sferni izvod je prvi definisao A. Ostrovski ([17]), i koristio ga je za izučavanje normalnosti familija meromorfnih funkcija.

Kasnije sferni izvod postaje jedan od osnovnih objekata teorije meromorfnih funkcija, pomoću kojeg se izučavaju svojstva tih funkcija.

Sljedeće tvrđenje je u literaturi poznato kao Martijev kriterijum za normalnost familije meromorfnih funkcija. On daje potreban i dovoljan uslov za normalnost.

Teorema 1. **(Martijev kriterijum)** Neka je $\Im$ familija meromorfnih funkcija definisanih u oblasti G. Familija $\Im$ je normalna u oblasti G ako i samo ako je familija

$\{f^{\#}(z) \mid f \in \Im\}$ ravnomjerno ograničena u oblasti G, tj. ako i samo ako za svaki kompaktan skup K, $K \subset G$, postoji $M = M(K)$, $0 < M < +\infty$, da je za svako $f \in \Im$ i svako $z \in K$ $f^{\#}(z) \leq M$.

Dokaz: Neka je familija $\Im$ normalna u oblasti G i pretpostavimo da familija $\{f^{\#}(z) \mid f \in \Im\}$ nije ravnomjerno ograničena u oblasti G, tj. da postoji kompaktan podskup E od G i postoji niz (z_n), $z_n \in E$, $n = 1,2,\ldots$, i $f_n(z) \in \Im$, $n = 1,2,\ldots$, takav da važi

$$\lim_{n\to\infty} f^{\#}(z_n) = +\infty \tag{1}$$

Ne mijenjajući mnogo niz (z_n), možemo dobiti da $f_m(z_n) \neq \infty$ za svako m, n i $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, $z_0 \in E$ i $f_n(z_n) \to w$, gdje je w kompleksan broj ili $w = \infty$. Primijetimo da je funkcija $f^{\#}(z)$ neprekidna u svim tačkama gdje je $f(z)$ regularna. U polu z_0 funkcije $f(z)$ uzmimo da je $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, gdje je $\varphi(z)$ regularna u z_0. Pretpostavimo da podniz $f_{n_p}(z) \to f(z)$ ravnomjerno u krugu $|z - z_0| < \delta$. Tada $f'_{n_p}(z) \to f'(z)$ ravnomjerno u $|z - z_0| < \dfrac{\delta}{2}$. Na taj način dobijamo

$$f_{n_p}(z) = f(z) + o(1); \quad f'_{n_p}(z) = f'(z) + o(1), \text{ kada } \quad p \to \infty, \quad |z - z_0| \leq \frac{\delta}{2},$$

iz čega se dobija

$$f_{n_p}{}^{\#}(z) = \frac{|f'_{n_p}(z)|}{1 + |f_{n_p}(z)|^2} = \frac{|f'(z)| + o(1)}{1 + (|f(z)| + o(1))^2} = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} + o(1) = O(1), \quad p \to \infty, \quad |z - z_0| \leq \frac{\delta}{2}$$

a to je kontradikcija sa (1). Analogno dobijamo protivurječnost ako $\dfrac{1}{f_{n_p}(z)} \to \dfrac{1}{f(z)}$ ravnomjerno u krugu $|z - z_0| \leq \delta$.

Pretpostavimo sada da je

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M, \quad f(z) \in \Im, \quad |z - z_0| \leq \delta. \tag{2}$$

Tada za $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq \delta$, dobijamo

$$|\, arctg|f(z)| - arctg|f(z_0)| \,| \leq \int_0^r \frac{|\, f'(z_0 + \rho e^{i\theta})|}{1 + |\, f(z_0 + \rho e^{i\theta})|} \cdot d\rho \leq M\delta.$$

Prvo pretpostavimo da je $|f(z_0)| \leq 1$ i izaberimo $\delta \leq \frac{\pi}{12M}$. Tada je

$$arctg|f(z)| \leq \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{12}\pi = \frac{1}{3}\pi, \qquad |f(z)| \leq \sqrt{3}, \qquad |z - z_0| \leq \delta.$$

Analogno, ako je $|f(z_0)| \geq 1$, tada je $arctg|f(z)| \geq \frac{\pi}{6}$, pa slijedi $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ za $|z - z_0| \leq \delta$.Na taj način, ako je uslov (2) ispunjen u krugu $|z - z_0| \leq \delta$, tada imamo $|f(z)| \leq \sqrt{3}$ ili $|(f(z))^{-1}| \leq \sqrt{3}$ u $|z - z_0| \leq \frac{\pi}{6M}$. Za dati niz $f_n(z)$ funkcija iz $\Im$ koje zadovoljavaju uslov (2) možemo naći beskonačni podniz $(f_{n_p}(z))$ za koji je

$$|f_{n_p}(z)| \leq \sqrt{3} \tag{3}$$

ili

$$|(f_{n_p}(z))^{-1}| \leq \sqrt{3} \tag{4}$$

Iz (3) zaključujemo da postoji podniz $f_{n_{p_k}}(z) = g_p(z)$ koji je konvergentan u svakoj tački niza (z_m) svuda gustog u $|z - z_0| \leq \delta$. Lako se provjerava da niz $(g_p(z))$ ravnomjerno konvergira na $|z - z_0| \leq \delta$. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_N$ N tačaka iz svuda gustog niza (z_m) u $|z - z_0| \leq \delta$ takvih da za svaku tačku z iz $|z - z_0| \leq \delta$ važi $|z - z_\nu| < \frac{\varepsilon}{12M}$. Pošto je niz $(g_p(z))$ konvergentan u svakoj od tačaka $z_1, z_2, \ldots, z_N$, to važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists p_0 \in N)(\forall p, q > p_0)|g_p(z) - g_q(z_\nu)| < \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \nu = 1,2,\ldots,N.$$

Tada za $z \in O^\delta(z_0) = \{z \mid |z - z_0| \leq \delta\}$ izaberimo z_ν tako da bude $|z - z_\nu| < \frac{\varepsilon}{12M}$. Tada dobijamo

$$g_p(z) = f_{n_{p_k}}(z) \to f(z), \qquad z \in O^\delta(z_0).$$

Analogno ako je ispunjen uslov (4), možemo naći podniz $(f_{n_{p_k}}(z))$ takav da $(f_{n_{p_k}}(z))^{-1} \to (f(z))^{-1}$ u skupu $O^\delta(z_0)$.□

Navedeni dokaz je iz ([10]). Dokaz Martijevog kriterijuma može se naći i u [19].

Definicija 6. Neka je $\Im$ familija funkcija definisanih na krugu Δ. Za familiju $\Im$ kaže se da je invarijantna familija grupe $Aut\,\Delta$ ako je $f \circ g \in \Im$ za svako $f \in \Im$ i za svako $g \in Aut\,\Delta$.

Teorema 2. Familija $\Im$ meromorfnih na krugu Δ funkcija, koja je invarijantna u odnosu na grupu $Aut\,\Delta$, normalna je na Δ ako i samo ako postoji konstanta M, $0 < M < +\infty$, da je $f^{\#}(0) \le M$ za svako $f \in \Im$.

Dokaz: Neka je $\Im$ familija funkcija meromorfnih na krugu Δ, koja je invarijantna i normalna na krugu Δ u odnosu na grupu $Aut\,\Delta$. Tada iz teoreme 1 ovog poglavlja slijedi da za svaki kompaktan skup K, $K \subset \Delta$, postoji $M = M(K)$, $0 < M < +\infty$, da je za svako $f \in \Im$ i za svako $z \in K$ $f^{\#}(z) \le M$. Uzimajući za $K = \{0\}$, dobijamo da je $f^{\#}(0) \le M$ za svako $f \in \Im$.

Neka je sada $\Im$ invarijantna u odnosu na grupu $Aut\,\Delta$ familija meromorfnih na Δ funkcija za koju je $f^{\#}(0) \le M$, $0 < M < +\infty$, za svako $f \in \Im$. Kako je $f \circ g \in \Im$ za svako $g \in Aut\,\Delta$, tada je $(f \circ g)^{\#}(0) \le M$ za svako $f \in \Im$ i za svako $g \in Aut\,\Delta$. Otuda je

$$(f \circ g)^{\#}(0) = \left(1 - |w|^2\right) f^{\#}(w) \le M, \quad w \in \Delta, \quad f \in \Im, \tag{5}$$

jer je

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}, \quad w \in \Delta, \quad \theta \in R.$$

Neka je sada K proizvoljan kompaktan podskup od Δ. Tada iz (5) dobijamo

$$f^{\#}(z) \le \frac{1}{1 - |z|^2} \cdot M, \quad z \in K, \quad f \in \Im.$$

Otuda je

$$f^{\#}(z) \le C < +\infty, \quad z \in K, \quad f \in \Im, \tag{6}$$

gdje je $C = \dfrac{M}{d}$, $d = \min\limits_{z \in K}\left(1 - |z|^2\right)$, $0 < d < 1$.

Iz (6) i teoreme 1 slijedi da je $\Im$ normalna familija meromorfnih funkcija na krugu Δ. □

Teorema 3. Neka je $\Im$ familija holomorfnih funkcija na oblasti G, $G \subset C$. Ako svaka funkcija familije $\Im$ ne uzima dvije vrijednosti iz C, tada je $\Im$ normalna familija.

Teorema 4. Neka je $\Im$ familija meromorfnih funkcija na oblasti G, $G \subset C$. Ako svaka funkcija familije $\Im$ ne uzima tri vrijednosti iz $\hat{C}$, tada je $\Im$ normalna familija.

***Teorema 5.* (Teorema Gurviča)** Neka je $\Im$ normalna familija meromorfnih funkcija u oblasti G i neka je $w \in C$ tako da je $f(z) \ne w$ za svako $z \in G$. Tada za svaku meromorfnu funkciju f za koju postoji niz (f_n), $f_n \in \Im$, $n \in N$, koji na kompaktima K, $K \subset G$, ravnomjerno konvergiraju funkciji f važi: ili je $f(z) \neq w$ za svako $z \in G$ ili je $f(z) \equiv w$ na G.

Dokazi teorema 3 , 4 i 5 mogu se naći u ([15]) ili u ([19]).

Definicija 7. Tačka $z_0 \in G$ se naziva iregularnom tačkom familije $\Im$ ako familija $\Im$ nije normalna u tački z_0 u smislu definicije 2.

Lema 3. Ako je $z_0 \in G$ iregularna tačka familije $\Im$ meromorfnih funkcija na G, tada postoji niz (f_n), $f_n \in \Im$, $n \in N$, takav da funkcije f_n, $n \in N$ u okolinama $O(z_0)$, $O(z_0) \subset G$, tačke z_0 uzimaju sve vrijednosti iz $\hat{C}$, osim eventualno dvije vrijednosti $a, b \in \hat{C}$.

Lema 3 je direktna posljedica teoreme 4.

Lako se vidi da funkcije f_n, $n \in N$, iz leme 3, u okolinama $O(z_0)$, $O(z_0) \subset G$, tačke z_0 uzimaju beskonačno puta sve vrijednosti iz $\hat{C}$, osim eventualno dvije vrijednosti $a, b \in \hat{C}$.

Lema 4. Familija $\Im$ je normalna u oblasti G ako i samo ako u G nema iregularnih tačaka.

Lema 4 direktno slijedi iz definicija 3 i 6.

2.2. NORMALNE MEROMORFNE FUNKCIJE U ODNOSU NA GRUPU AUTΔ

Normalne meromorfne funkcije prvi su izučavali japanski matematičari K. Josida ([20]) i K. Nošira ([16]).

Rezultati koje su za te funkcije dobili finski matematičari O. Lehto i K. V. Virtanen ([12]) stimulisali su mnoge matematičare da ih intezivno izučavaju (pogledati ([14]), ([19])).

U ovom poglavlju daćemo rezultate koje su za normalne meromorfne funkcije dobili O. Lehto i K. V. Virtanen u ([12]) i V. I. Gavrilov u ([7]).

Definicija 1. Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ je normalna na krugu Δ ako je $orb_{Aut\,\Delta} f = \{ f \circ \varphi \mid \varphi \in Aut\,\Delta \}$ normalna familija funkcija na krugu Δ u smislu definicije 3 (odnosno definicije 4), tj. u smislu Montela. Oznaka: $f \in \mathcal{N}$.

Znači, $\mathcal{N}$ će nam ubuduće predstavljati oznaku za skup svih meromorfnih funkcija na krugu Δ, koje su normalne na tom krugu u smislu definicije 1.

Iz teoreme 3 prethodnog poglavlja i definicije 1 slijedi da su funkcije holomorfne na Δ koje ne uzimaju dvije vrijednosti iz C normalne funkcije na Δ. Otuda dalje slijedi da su ograničene po modulu holomorfne funkcije na Δ normalne funkcije na Δ. Obratno tvrđenje ne važi (pogledati ([14]) ili ([19])).

Teorema 1. **(Teorema Lehto-Virtanena** ([12])) Za meromorfnu funkciju f na krugu Δ sljedeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $f \in \mathcal{N}$;

(ii) $\sup\limits_{z\in\Delta}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z) \le C_f < +\infty.$

Dokaz: Kako je $orb_{Aut\,\Delta}f$ invarijantna familija meromorfnih funkcija na krugu Δ u odnosu na grupu $Aut\,\Delta$ i kako je za $\varphi \in Aut\,\Delta,\ \varphi(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z},\ w \in \Delta,\ \theta \in R,$

$$(f \circ g)^{\#}(0) = (1-|w|^2)f^{\#}(w). \tag{7}$$

tada tvrđenje teoreme 1 direktno slijedi iz (7) i teoreme 2 prethodnog poglavlja.

Ako se u definiciji 1 krug Δ zamijeni prosto povezanom oblašću G, dobijamo meromorfne funkcije koje su normalne na G. Za te funkcije važi tvrđenje teoreme 1 kada se Δ zamijeni sa G (pogledati ([12])).

Dalje u ovom poglavlju dajemo rezultate V. I. Gavrilova iz ([7]).

Definicija 2. Niz (z_n), $z_n \in \Delta$, $n \in N$, je P-niz za funkciju $f : \Delta \to C$ ako zadovoljava sljedeće uslove:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1$;

2) za svaki podniz $\left(z_{n_k}\right)$ niza (z_n) i svako $\varepsilon > 0$ funkcija f na $\bigcup\limits_{k\in N} D_h\left(z_{n_k}, \varepsilon\right)$ beskonačno mnogo puta uzima sve vrijednosti iz $\hat{C}$ osim eventualno najviše dvije.

Iz definicije 2 direktno slijedi da je svaki podniz $\left(z_{n_k}\right)$ P-niza (z_n) funkcije f sam za sebe P-niz funkcije f.

Lema 1. ([7]) Neka je (z_n) P-niz funkcije $f : \Delta \to \hat{C}$. Ako je (z'_n) niz u krugu Δ za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n, z'_n) = 0$, tada je (z'_n) P-niz funkcije f.

Dokaz: Iz $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n, z'_n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty}|z'_n| = 1$. Neka je (z'_{n_k}) proizvoljni podniz niza (z'_n) i $\varepsilon > 0$ fiksiran broj. Iz uslova $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n, z'_n) = 0$ dalje slijedi da postoji K, $K \in N$, da za svako $k \geq K$ hiperbolički krug $D_h\left(z'_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sadrži član z_{n_k} niza (z_n). Podniz (z_{n_k}) niza (z_n) je P-niz funkcije f, jer je (z_n) P-niz za f. Otuda slijedi da funkcija f na $\bigcup\limits_{k\in N} D_h\left(z_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ beskonačno mnogo puta uzima sve vrijednosti iz $\hat{C}$, osim eventualno najviše dvije. Kako je $D_h\left(z_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset D_h(z'_{n_k}, \varepsilon)$, za $k \geq K$, tada funkcija f na skupu $\bigcup\limits_{k\in N} D_h(z'_{n_k}, \varepsilon)$ beskonačno mnogo puta uzima sve vrijednosti iz $\hat{C}$ osim eventualno najviše dvije. Time je pokazano da proizvoljni podniz (z'_{n_k}) niza (z'_n) ima svojstvo 2) iz definicije 2. Otuda slijedi da je (z'_n) P-niz funkcije f.□

Ističemo da se P-nizovi mogu definisati za proizvoljne funkcije $f : \Delta \to \hat{C}$. Tada bi lema 1 važila za proizvoljne funkcije.

Teorema 2. ([7]) Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ u krugu Δ ima P-niz ako i samo ako je

$$\limsup_{|z|\to 1} \left(1 - |z|^2\right) f^{\#}(z) = +\infty, \tag{8}$$

tj. ako i samo ako $f \notin \mathcal{N}$.

Dokaz: Neophodnost. Neka je (w_n) P-niz funkcije f u krugu Δ. Tada u svakoj okolini tačke 0 podniz $(f \circ g_{w_{n_k}})$ niza $(f \circ g_{w_n})$, $g_{w_n}(z) = \dfrac{z - w_n}{1 - \overline{w}_n z}$, $n \in N$, uzima beskonačno mnogo puta sve vrijednosti iz $\hat{C}$, osim eventualno najviše dvije. Otuda i iz leme 3 prethodnog poglavlja slijedi da je 0 iregularna tačka familije $orb_{Aut\,\Delta} f$, tj. $f \notin \mathcal{N}$, odakle i iz teoreme 1 ovog poglavlja slijedi (8).

Dovoljnost. Neka je (z_n) niz iz Δ koji zadovoljava uslov (8), tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - |z_n|^2\right) f^{\#}(z_n) = +\infty. \tag{9}$$

Dokazaćemo da je (z_n) P-niz za funkciju f. Pretpostavimo suprotno, tj. da (z_n) nije P-niz za f. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da u svakom hiperboličkom krugu $D_h(z_n, \varepsilon)$, $n \in N$, funkcija f ne uzima tri iste vrijednosti iz $\hat{C}$. Otuda slijedi da niz $(f \circ g_{z_n})$, $g_{z_n}(z) = \dfrac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}$, $n \in N$, na krugu $D(0, \varepsilon)$ ne uzima tri vrijednosti iz $\hat{C}$, odakle na osnovu teoreme 4 prethodnog poglavlja slijedi da je $\{f \circ g_{z_n} \mid n \in N\}$ normalna familija na $D(0,\varepsilon)$. Tada iz Martijevog kriterijuma za normalnost meromorfnih funkcija (teorema 1 prethodnog poglavlja) slijedi da za kompaktan skup $K \subset D(0,\varepsilon)$, $0 \in K$, postoji $M > 0$ da je

$$(f \circ g_{z_n})^{\#}(z) \leq M, \quad z \in K, \quad \text{za svako} \quad n \in N.$$

Specijalno je

$$(f \circ g_{z_n})^{\#}(0) \leq M < +\infty, \quad n \in N. \tag{10}$$

Kako je $(f \circ g_{z_n})^{\#}(0) = f^{\#}(z_n)(1-|z_n|^2)$, $n \in N$, to (10) protivurječi (9), čime se dobija da je (z_n) P-niz za funkciju f. □

Iz dokaza teoreme 2 slijedi sljedeće tvrđenje:

Posljedica 1. Neka za niz (z_n), $z_n \in \Delta$, $n \in N$, i meromorfnu na Δ funkciju f važi $\lim\limits_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)f^{\#}(z_n) = +\infty$. Tada je (z_n) P-niz funkcije f.

Obrnuto tvrđenje posljedice 1 ne važi. To pokazuje primjer meromorfne funkcije

$$f(z) = \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) \qquad \text{iz} \quad [7].$$

Za dokaz naredne teoreme 3 potrebno je sljedeće tvrđenje:

Lema 2. ([7]) Za svako $M > 0$ i proizvoljne tačke $a, b \in \Delta$ za koje je $d_h(a,b) < M$, važi

$$\frac{1}{1+\alpha_M}(1-|b|^2) \leq 1-|a|^2 \leq (1+\alpha_M)(1-|b|^2), \tag{11}$$

gdje je $\alpha_M = \dfrac{2th\,M}{1-th\,M}$.

Teorema 3. ([7]) Da bi niz (z_n), $z_n \in \Delta$, $n \in N$, takav da $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1$, bio P-niz meromorfne na krugu Δ funkcije f potrebno je i dovoljno da postoji niz (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{D_h(z_n,\varepsilon_n)}(1-|z|^2)f^{\#}(z)\right) = \infty. \tag{12}$$

Dokaz: Dovoljnost. Neka važi (12). Tada postoji niz (z'_n), $z'_n \in D_h(z_n, \varepsilon_n)$, $n \in N$, da je $\lim_{n\to\infty}(1-|z'_n|^2)f^{\#}(z'_n) = +\infty$. Tada iz posljedice 1 slijedi da je (z'_n) *P*-niz za *f*. Otuda i iz leme 1 slijedi da je i (z_n) *P*-niz za *f*.

Neophodnost. Pretpostavimo da je (z_n) *P*-niz za *f*, a da za (z_n) ne važi (12), tj. da važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{D_h(z_n,\varepsilon_n)}(1-|z|^2)f^{\#}(z)\right) \le M < +\infty\ , \tag{13}$$

za svaki niz (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, $n \in N$, takav da je $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$

Za svaki podniz (z_{n_k})niza (z_n) funkcija f na $\bigcup_{k\in N} D_h(z_{n_k}, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < +\infty$, uzima beskonačno mnogo puta sve vrijednosti iz $\hat{C}$, osim najviše dvije. Kako je niz (z_n) sam za sebe podniz, naprijed rečeno važi i za sam niz (z_n). Otuda slijedi da familija $\{f \circ g_{z_n} | n \in N\}$ nije normalna na krugovima $D(0,r)$ za svako $r \in (0,1)$, jer je tačka $z=0$ iregularna tačka za familiju $\{f \circ g_{z_n} | n \in N\}$. Iz Martijevog kriterijuma za normalnost familije meromorfnih funkcija slijedi da postoji niz (z'_k), $\lim_{k\to\infty} z'_k = 0$, da je $\lim_{k\to\infty}(f \circ g_{z_k})^{\#}(z'_k) = \infty$. Neka je sada (ε_n) proizvoljan niz za koji je $0 < \varepsilon_n < 1$, $n \in N$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ i neka je $\varepsilon'_n = th\dfrac{1-|z_n|^2}{1-\varepsilon_n^2|z_n|^2}\varepsilon_n$, $n \in N$. Tada je $\lim_{n\to\infty}\varepsilon'_n = 0$ i postoji $N \in N$ da je za svako $n \ge N$ $z'_{k_n} \in D(0,\varepsilon'_n)$, tj. $g_{z_{n_{k_n}}}(z'_{k_n}) \in D_h(z_{n_{k_n}}, \varepsilon_n)$, $n \ge N$. Ako je $w_n = g_{z_{n_{k_n}}}(z'_{k_n})$, $n \ge N$, tada je $w_n \in D_h(z_{n_{k_n}}, \varepsilon_n)$ Koristeći nejednakost (11) iz leme 2 dobijamo da je $\lim_{n\to\infty}(1-|w_n|^2)f^{\#}(w_n) = \infty$, $w_n \in D_h(z_{n_{k_n}}, \varepsilon_n)$, $n \ge N$, što je suprotno sa (13). Znači, važi (12). □

Teorema 4. ([7]) Neka za meromorfnu funkciju $f : \Delta \to \hat{C}$ važi $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$, $\alpha \in \hat{C}$, $z_n \in \Delta$, $n \in N$, $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$. Ako postoji niz pozitivnih brojeva (δ_n), $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, takav da u svakom hiperboličkom krugu $D_h(z_n, \delta)$, $n \in N$, postoje tačke z'_n da je $|f(z'_n) - \alpha| > \varepsilon$, za svako $n \in N$, ako je $\alpha \in C$, odnosno $|f(z'_n)| < \dfrac{1}{\varepsilon}$ za svako $n \in N$ ako je $\alpha = \infty$, gdje je $\varepsilon > 0$, tada niz (z_n) sadrži podniz koji je *P*-niz za funkciju *f*.

2.3. NORMALNE MEROMORFNE FUNKCIJE U ODNOSU NA HIPERBOLIČKE, PARABOLIČKE I ELIPTIČKE PODGRUPE GRUPE AUT Δ

V. I. Gavrilov i E. F. Burkova u ([8]) definišu i izučavaju klasu meromorfnih na krugu Δ funkcija normalnih u odnosu na podgrupu H^θ, $\theta \in [0,\pi)$ fiksirano.

Definicija 1. Meromorfna funkcija f na disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{H^\theta}$ ako je $orb_{H^\theta} f = \{f \circ \varphi \mid \varphi \in H^\theta\}$, normalna familija na Δ u smislu Montela.

Sljedeća tvrđenja daju potrebne i dovoljne uslove da meromorfna funkcija f pripada klasi $\mathcal{N}_{H^\theta}$.

Teorema 1. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{H^\theta}$, $\theta \in [0,\pi)$ fiksirano, ako i samo ako za svako r, $0 \le r < +\infty$, postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$, da je $\sup\limits_{z \in \Delta_H(\theta,r)} (1-|z|^2) f^\#(z) = C_f(r) < +\infty$.

Teorema 2. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{H^\theta}$, $\theta \in [0,\pi)$ fiksirano, ako i samo ako funkcija f ni u jednoj oblasti $\Delta_H(\theta,r)$, $0 < r < +\infty$, nema P-nizova.

Dokazi ovih teorema su dati u ([8]).

U([8]) se pokazuje da su klase $\mathcal{N}_{H^\theta}$, $\theta \in [0,\pi)$ fiksirano, šire od klase $\mathcal{N}$. Takođe je pokazano da funkcije iz klase $\mathcal{N}_{H^\theta}$ imaju ista granična svojstva kao i funkcije iz klase $\mathcal{N}$.

G.D. Ljovšina u ([13]) definiše i izučava klase meromorfnih na krugu Δ funkcija normalnih u odnosu na podgrupe P^θ i E^{z_0}, $\theta \in [0,2\pi)$ fiksirano i $z_0 \in \Delta$ fiksirano.

Definicija 2. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{P^\theta}$ ako je $orb_{P^\theta} f = \{f \circ \varphi \mid \varphi \in P^\theta\}$ normalna familija na Δ u smislu Montela.

Sljedeća tvrđenja daju potreban i dovoljan uslov da meromorfna funkcija f pripada klasi $\mathcal{N}_{P^\theta}$.

Teorema 3. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{P^\theta}$, $\theta \in [0,2\pi)$ fiksirano, ako i samo ako za svako r, $0 \le r < +\infty$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$ da je $\sup\limits_{z \in \Delta_P(\theta,r)} (1-|z|^2) f^\#(z) = C_f(r) < +\infty.$.

Teorema 4. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{P^\theta}$, $\theta \in [0,2\pi)$ fiksirano, ako i samo ako f ni u jednoj oblasti $\Delta_P(\theta,r)$, $0 < r < +\infty$ nema P-nizova.

Definicija 3. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{E^{z_0}}$, $z_0 \in \Delta$ fiksirano, ako je $orb_{E^{z_0}} f = \{f \circ \varphi | \varphi \in E^{z_0}\}$ normalna familija na Δ u smislu Montela.

Sljedeća tvrđenja daju potreban i dovoljan uslov da meromorfna funkcija f pripada klasi $\mathcal{N}_{E^{z_0}}$

Teorema 5. Meromorfna funkcija f na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{E^{z_0}}$, $z_0 \in \Delta$ fiksirano, ako i samo ako za svako r, $0 \le r < +\infty$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$ da je $\sup\limits_{z \in D_h(z_0,r)} (1-|z|^2) f^\#(z) = C_f(r) < +\infty$.

Teorema 6. Svaka meromorfna funkcija na jediničnom disku Δ pripada klasi $\mathcal{N}_{E^{z_0}}$.

Dokazi teorema 3, 4, 5 i 6 dati su u ([13]).
Eliptički slučaj nije interesantan zbog teoreme 6.

2.4. NORMALNE MEROMORFNE FUNKCIJE U ODNOSU NA HIPERBOLIČKE I PARABOLIČKE CIKLIČNE GRUPE

Za proizvoljni elemenat $g \in H^\theta, g \ne i, 0 \le \theta < \pi$, neka je $H_g^\theta = \{g^n | n \in Z\}$, gdje je $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g, n \in N$, $g^0 = i_\Delta$, $g^{-n} = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1}, n \in N$. Lako se vidi da skup H_g^θ u odnosu na operaciju kompoziciju preslikavanja čini dinamički sistem - kaskadu, odnosno cikličnu podgrupu hiperboličke grupe H^θ, odnosno grupe $Aut\,\Delta$.

Iz teoreme 3 poglavlja 1.7 slijedi da je ili $e^{i\theta}$ ili $-e^{i\theta}$ privlačeća (atraktivna) tačka za g, tj. za svako $z \in \Delta$ $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(z) = e^{i\theta}$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(z) = -e^{i\theta}$. Ako je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka za g, tada je $-e^{i\theta}$ odbijajuća (repulzivna) tačka za g, odnosno $-e^{i\theta}$ je privlačeća tačka za g^{-1}.

Neka je $\Delta_g(\theta,r)=\bigcup_{n\in Z} g^n(D_h(0,r)),\quad r\in(0,+\infty).$

Lema 1. $\Delta_g(\theta,r)=\bigcup_{n\in Z} D_h(g^n(0),r),\quad r\in(0,+\infty).$

Lema 1 direktno slijedi iz tvrđenja da je hiperbolička metrika invarijantna u odnosu na $g\in Aut\,\Delta$.

Lema 2. Za svako $r\in(0,+\infty)$ postoji $r_1\in(0,+\infty)$ da je $\Delta_H(\theta,r)\subset\Delta_g(\theta,r_1)$, dok je za svako $r\in(0,+\infty)$ $\Delta_g(\theta,r)\subset\Delta_H(\theta,r)$.

Dokaz: Neka je $z\in\Delta_H(\theta,r)$. Tada postoji $a\in(0,+\infty)$ da je $z\in D_h(ae^{i\theta},r)$. Kako je $ae^{i\theta}\in\Lambda_\theta$ i kako je $g^n(0)\in\Lambda_\theta$ za svako $n\in Z$, to postoji $N\in Z$ da se $ae^{i\theta}$ nalazi između tačaka $g^N(0)$ i $g^{N+1}(0)$ ili se poklapa sa jednom od njih. Neka je $0<M=d_h(0,g(0))<+\infty$. Tada je $M=d_h(g^n(0)g^{n+1}(0))$, $n\in Z$, pa je

$$d_h(g^N(0),z)\le d_h(g^N(0),ae^{i\theta})+d_h(ae^{i\theta},z)\le d_h(g^N(0),g^{N+1}(0))+d_h(ae^{i\theta},z)<M+r.$$

Znači, za svaku tačku $z\in\Delta_H(\theta,r)$ postoji $N\in Z$ da je

$$d_h(g^N(0),z)<M+r \tag{14}$$

M i r iz (14) ne zavise ni od z ni od N.

Kako je po lemi 1,
$\Delta_g(\theta,M+r)=\bigcup_{n\in Z} D_h(g^n(0),M+r)$ a $D_h(g^N(0),M+r)\subset\Delta_g(\theta,M+r)$, to je $z\in\Delta_g(\theta,M+r)$.
Znači, uzimajući $r_1=M+r$, $M=d_h(0,g(0))$, dobijamo da je $\Delta_H(\theta,r)\subset\Delta_g(\theta,r_1)$.

Da za svako $r\in(0,+\infty)$ važi $\Delta_g(\theta,r)\subset\Delta_H(\theta,r)$ direktno slijedi iz leme 4 poglavlja 1.3 I glave i leme 1 ovog poglavlja.□

Definicija 1. Meromorfna funkcija $f:\Delta\to\hat{C}$ je normalna u odnosu na cikličnu grupu H_g^θ ako je $orb_{H_g^\theta} f=\{f\circ\varphi|\ \varphi\in H_g^\theta\}=\{f\circ g^n|\ n\in Z\}, g\in H^\theta, g\neq i,$ normalna familija na krugu Δ u smislu Montela. Oznaka: $f\in\mathcal{N}_g^\theta$.

Iz definicije 1 poglavlja 2.3 i definicije 1 ovog poglavlja direktno slijedi da je $\mathcal{N}_{H^\theta}\subset\mathcal{N}_g^\theta$, $g\in H^\theta$, $g\neq i$, $0\le\theta<\pi$. Naš glavni rezultat u ovom poglavlja tvrdi da je za svako $g\in H^\theta$, $g\neq i$, $0\le\theta<\pi$, $\mathcal{N}_{H^\theta}=\mathcal{N}_g^\theta$, tj. klase koje smo mi izučavali poklapaju se sa klasama koje su izučavali Gavrilov i Burkova. Znači dovoljno je ispitivati normalnost u odnosu na proizvoljnu cikličnu podgrupu hiperboličke podgrupe grupe Aut Δ.

Teorema 1. Za meromorfnu funkciju $f:\Delta \to \hat{C}$ sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $f \in \mathcal{N}_g^\theta$;

(ii) Za svako $r \in (0,+\infty)$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$, da je

$$\sup_{\Delta_g(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) f^\#(z) \le C_f(r)$$

gdje je $g \in H^\theta$, $g \ne i$, $0 \le \theta < \pi$.

Dokaz: (i) $\Rightarrow$(ii). Neka je $f \in \mathcal{N}_g^\theta$. Tada po Martijevom kriterijumu (teorema 1, poglavlje 2.1) za svaki kompakt K, $K \subset \Delta$, postoji konstanta $C_f(K)$, $0 < C_f(K) < +\infty$, da je $(f \circ g^n)^\#(z) \le C_f(K)$, $n \in Z$, $z \in K$. Otuda slijedi da za proizvoljno $r_1 \in (0,+\infty)$, postoji konstanta $C_f(\overline{D}_{r_1}) = C_f(r_1)$, $0 < C_f(\overline{D}_{r_1}) < +\infty$, da je

$$\sup_{(n,z)\in Z\times \overline{D}_{r_1}} (f \circ g^n)^\#(z) \le C_f(r_1). \tag{15}$$

Kako je

$$(f \circ g^n)^\#(z) = \frac{|f'(g^n(z))|}{1+|f(g^n(z))|^2} \cdot \left|(g^n)'(z)\right| = \frac{|f'(g^n(z))|}{1+|f(g^n(z))|^2} \cdot \frac{1-|g^n(z)|^2}{1-|z|^2} \tag{16}$$

i kako za proizvoljne $w \in \Delta_g(\theta,r)$ postoje $z \in D_h(0,r)$ i $n \in Z$ da je $w = g^n(z)$, to iz (15) i (16) slijedi da za svako $r \in (0,+\infty)$ postoji $r_1 \in (0,+\infty)$ da je

$$\sup_{w\in\Delta_g(\theta,r)} \left(1-|w|^2\right) f^\#(w) = \sup_{(g^n,z)\in H_g \times D_h(0,r)} \left(1-|g^n(z)|^2\right) \cdot \frac{|f'(g^n(z))|}{1+|f(g^n(z))|^2} =$$

$$\sup_{(n,z)\in Z\times \overline{D}_{r_1}} (1-|z|)(f \circ g^n)^\#(z) \le \sup_{(n,z)\in Z\times \overline{D}_{r_1}} (f \circ g^n)^\#(z) \le C_f(r_1).$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Neka za svako $r \in (0,+\infty)$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$, da je

$$\sup_{z\in\Delta_g(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) \cdot f^\#(z) \le C_f(r).$$

Kako za svaki kompakt K, $K \subset \Delta$, postoji $r \in (0,+\infty)$ da je $K \subset D_h(0,r)$, i kako je

$$\sup_{(n,z)\in Z\times D_h(0,r)} \left(f\circ g^n\right)^{\#}(z) = \sup_{(n,z)\in Z\times D_h(0,r)} \frac{\left|f'\left(g^n(z)\right)\right|}{1+\left|f\left(g^n(z)\right)\right|^2}\cdot\left|\left(g^n\right)'(z)\right| =$$

$$\sup_{(n,z)\in Z\times D_h(0,r)} \frac{\left|f'\left(g^n(z)\right)\right|}{1+\left|f\left(g^n(z)\right)\right|^2}\cdot\frac{1-\left|g^n(z)\right|^2}{1-|z|^2} = \begin{pmatrix} g^n(z)=u \\ u\in\Delta_g(\theta,r)\end{pmatrix} = \sup_{\substack{u\in\Delta_g(\theta,r)\\ z\in D_h(0,r)}} \frac{|f'(u)|}{1+|f(u)|^2}\cdot\frac{1-|u|^2}{1-|z|} \le$$

$$\le C_f(r)\cdot\frac{1}{1-|z|^2} \le C_f(r)\cdot\frac{1}{1-C(r)} = M(r) < +\infty,$$

gdje je $C(r)=\max\limits_{z\in\overline{D}_h(0,r)}|z|,\quad 0<C(r)<1,$ to iz prethodno dobijene ocjene i Martijevog kriterijuma za normalnost familije funkcija slijedi da je $f\in\mathcal{N}_g^{\theta}$.□

Teorema 2. Neka je $\theta,\ 0\le\theta<\pi,$ fiksirano. Tada je $\mathcal{N}_{H^\theta}=\mathcal{N}_g^{\theta}$ za svako $g\in H^\theta,\ g\ne i,$ tj. meromorfna funkcija $f:\Delta\to\hat{C}$ je normalna u odnosu na hiperboličku grupu $H^\theta,\ 0\le\theta<\pi,$ ako i samo ako je normalna u odnosu na proizvoljnu cikličnu podgrupu $H_g^\theta,\ g\in H^\theta,\ g\ne i$, grupe $H^\theta,\ 0\le\theta<\pi$.

Teorema 2 direktno slijedi iz teoreme 1 poglavlja 2.3, teoreme 1 i leme 2 ovog poglavlja, jer je $\Delta_g(\theta,r)\subset\Delta_H(\theta,r)$ za svako $r\in(0,+\infty)$, a za svako $r\in(0,+\infty)$ postoji $r_1\in(0,+\infty)$ da je $\Delta_H(\theta,r)\subset\Delta_g(\theta,r_1)$.

Za proizvoljni $g\in P^\theta, g\ne i, 0\le\theta<2\pi,$ neka je $P_g^\theta=\{g^n|\ n\in Z\}$, gdje je $g^n=g\circ g\circ\ldots\circ g,\ n\in N,\ g^0=i_\Delta,\ g^{-n}=g^{-1}\circ g^{-1}\circ\ldots\circ g^{-1},\ n\in N.$ Lako se vidi da skup P_g^θ u odnosu na operaciju kompoziciju preslikavanja čini dinamički sistem-kaskadu, odnosno cikličnu podgrupu paraboličke grupe P^θ, odnosno grupe $Aut\,\Delta$.

Iz teoreme 3 poglavlja 1.2 slijedi da je $e^{i\theta}$ privlačeća (atraktivna) tačka za g tj. za svako $z\in\Delta$ je $\lim\limits_{n\to\infty}g^n(z)=e^{i\theta}$.

Neka je $\Delta_g(\theta,r)=\bigcup\limits_{n\in Z}g^n(D_h(0,r)),\quad r\in(0,+\infty).,\quad g\in P^\theta,\quad g\ne i.$

Lema 3. $\Delta_g(\theta,r)=\bigcup\limits_{n\in Z}D_h(g^n(0),r),\quad r\in(0,+\infty).,\quad g\in P^\theta,\quad g\ne i.$

Lema 3 direktno slijedi iz tvrđenja da je hiperbolička metrika invarijantna u odnosu na $g\in Aut\Delta$.

Lema 4. Za svako $r \in (0,+\infty)$ postoji $r_1 \in (0,+\infty)$ da je $\Delta_P(\theta,r) \subset \Delta_g(\theta,r_1)$, dok je $\Delta_g(\theta,r) \subset \Delta_P(\theta,r)$ za svako $r \in (0,+\infty)$.

Dokaz: Neka je $O^\theta_\bullet = \left\{ z \in \overline{\Delta} \,\middle|\, \left| z - \frac{1}{2}e^{i\theta} \right| = \frac{1}{2} \right\}$ oricikl i neka je $z \in \Delta_P(\theta,r)$ proizvoljno. Za svako $n \in Z$ je $g^n(0) \in O^\theta_\bullet$. Neka je w tačka presjeka geodezijske krive koja prolazi kroz z i $O^\theta_\bullet$. Tada postoji $N \in Z$ takvo da se ili w nalazi između tačaka $g^N(0)$ i $g^{N+1}(0)$ ili je $w = g^N(0)$ ili je $w = g^{N+1}(0)$. Posmatrajmo hiperbolički krug $D_h(g^N(0),R)$, gdje je $R = d_h(g^N(0),g^{N+1}(0)) = d_h(g^{N-1}(0),g^N(0)) = d_h(0,g(0))$. Tačke $g^{N-1}(0)$, $g^N(0)$, w i $g^{N+1}(0)$ leže na luku oricikla $O^\theta_\bullet$ koji leži u $D_h(g^N(0),R)$, zato što je $g^N(0) \in D_h(g^N(0),R)$. Otuda slijedi da je i $g^{N-1}(0)$, $g^N(0)$, $w \in \overline{D_h}(g^N(0),R)$. Znači, $w \in D_h(g^N(0),R)$, iz čega slijedi da je

$$d_h(g^N(0),z) \le d_h(g^N(0),w) + d_h(w,z) < R + d_h(w,z) \le R + r = r_1 .$$

Dakle, $z \in D_h(g^N(0),r_1) \subset \bigcup_{n \in Z} D_h(g^n(0),r_1)$, gdje je $r_1 = R + r$, $R = d_h(0,g(0))$ i r_1 ne zavisi od n, N, z, w. Dakle, $\Delta_P(\theta,r) \subset \bigcup_{n \in Z} D_h(g^n(0),r_1) = \Delta_g(\theta,r_1)$. Iz definicije slijedi da je $\Delta_P(\theta,r) \supset \bigcup_{n \in Z} D_h(g^n(0),r) = \Delta_g(\theta,r)$ za svako $r \in (0,+\infty)$.

Definicija 2. Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ je normalna u odnosu na cikličnu grupu P^θ_g ako je $orb_{P^\theta_g} f = \{ f \circ \varphi \mid \varphi \in P^\theta_g \} = \{ f \circ g^n \mid n \in Z \}, g \in P^\theta, g \ne i,$ normalna familija na krugu Δ u smislu Montela. Oznaka: $f \in \mathcal{N}^\theta_g$.

Iz definicije 2 poglavlja 2.3 i definicije 2 ovog poglavlja direktno slijedi da je $\mathcal{N}_{P^\theta} \subset \mathcal{N}^\theta_g$, $g \in P^\theta$, $g \ne i$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Teorema 3. Za meromorfnu funkciju $f : \Delta \to \hat{C}$ sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $f \in \mathcal{N}^\theta_g$;

(ii) Za svako $r \in (0,+\infty)$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$, da je

$$\sup_{\Delta_g(\theta,r)} \left(1 - |z|^2\right) f^\#(z) \le C_f(r)$$

gdje je $g \in P^\theta$, $g \ne i$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Dokaz teoreme 3 je analogan dokazu teoreme 1.

Teorema 4. Neka je θ, $0 \le \theta < 2\pi$, fiksirano. Tada je $\mathcal{N}_{P^\theta} = \mathcal{N}_g^\theta$ za svako $g \in P^\theta$, $g \ne i$, tj. meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ je normalna u odnosu na paraboličku grupu P^θ, $0 \le \theta < 2\pi$, ako i samo ako je normalna u odnosu na proizvoljnu cikličnu podgrupu P_g^θ, $g \in P^\theta$, $g \ne i$, grupe P^θ, $0 \le \theta < 2\pi$.

Dokaz teoreme 4 direktno slijedi iz teoreme 3 poglavlja 2.3, teoreme 3 i leme 4 ovog poglavlja.

2.5. NORMALNE MEROMORFNE FUNKCIJE U ODNOSU NA HIPERBOLIČKE I PARABOLIČKE CIKLIČNE POLUGRUPE

Za svaki elemenat g, $g \ne i$, grupe H^θ, $0 \le \theta < \pi$, neka je $\mathcal{H}_g^\theta = \{g^n | n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je $g^0 = i$, $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g$. Ako g ima privlačeću tačku $e^{i\theta}$, tada ćemo $\mathcal{H}_g^\theta$ označavati sa $\mathcal{H}_g^{+\theta}$, a ako g ima za privlačeću tačku $-e^{i\theta}$ tada ćemo $\mathcal{H}_g^\theta$ označavati sa $\mathcal{H}_g^{-\theta}$.

Skupovi $\mathcal{H}_g^{+\theta}$ i $\mathcal{H}_g^{-\theta}$ sa operacijom kompozicijom preslikavanja obrazuju polugrupe, odnosno dinamičke sisteme-kaskade.

Za $\mathcal{H}_g^{+\theta}$ neka je $\Delta_g(+\theta, r) = \bigcup_{n \in N} g^n(D_h(o,r))$,

a za $\mathcal{H}_g^{-\theta}$ neka je $\Delta_g(-\theta, r) = \bigcup_{n \in N} g^n(D_h(o,r))$.

Lako se vidi da za svako $g \in H^\theta$, $g \ne i$, $0 \le \theta < \pi$, važi: ako je $\mathcal{H}_g^\theta = \mathcal{H}_g^{-\theta}$, onda je $\mathcal{H}_{g^{-1}}^\theta = \mathcal{H}_{g^{-1}}^{+\theta}$, a ako je $\mathcal{H}_g^\theta = \mathcal{H}_g^{+\theta}$, onda je $\mathcal{H}_{g^{-1}}^\theta = \mathcal{H}_{g^{-1}}^{-\theta}$.

Takođe se lako vidi da je $\Delta_g(+\theta, r) \cup \Delta_{g^{-1}}(-\theta, r) = \Delta_g(\theta, r)$.

Dalje ćemo se baviti izučavanjem normalnosti meromorfnih na Δ funkcija u odnosu na polugrupe $\mathcal{H}_g^{+\theta}$. Dobijeni rezultati za $\mathcal{H}_g^{+\theta}$ važe i za $\mathcal{H}_g^{-\theta}$.

Definicija 1. Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ je normalna u odnosu na kaskadu (polugrupu) $\mathcal{H}_g^{+\theta}$ ako je familija $orb_{\mathcal{H}_g^{+\theta}} f = \{f \circ \varphi | \varphi \in \mathcal{H}_g^{+\theta}\} = \{f \circ g^n | n \in N \cup \{0\}\}$ normalna na Δ u smislu Montela. Oznaka: $f \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$.

Teorema 1. Za meromorfnu funkciju $f : \Delta \to \hat{C}$ sljedeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $f \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$.

(ii) Za svako $r \in (0, +\infty)$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0 < C_f(r) < +\infty$ da je

$$\sup_{\Delta_g(+\theta, r)} \left(1 - |z|^2\right) f^{\#}(z) \le C_f(r).$$

(iii) Za svako $r \in (0, +\infty)$ funkcija f u $\Delta_g(+\theta, r)$ nema P-nizove.

gdje je $g \in H^\theta, g \ne i, 0 \le \theta < \pi$

Dokaz: Dokaz da je (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je isti kao dokaz teoreme 3 prethodnog poglavlja.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Dokazaćemo da za svako $r \in (0,+\infty)$ funkcije f u $\Delta_g(+\theta, r)$ nema P-nizova. Naime, pokazaćemo da je za svaki niz (ε_k), $\varepsilon_k > 0$, $k \in N$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_k = 0$, i svaki niz

$$(z_k),\quad z_k \in \Delta_g(+\theta, r),\quad k \in N,\quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\sup_{D_h(z_k,\varepsilon_k)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z)\right) \le C < +\infty.$$

Neka je (ε_k) proizvoljni niz za koji je $\varepsilon_k > 0$, $k \in N$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, i (z_k) proizvoljni niz iz $\Delta_g(+\theta, r)$ za koji je $\lim_{k\to\infty} z_k = e^{i\theta}$. Neka je dalje $\varepsilon = \sup\{\varepsilon_k \mid k \in N\}$. Kako je $z_k \in \Delta_g(+\theta, r) = \bigcup_{n\in N} D_h(g^n(0), r)$, to je $z_k \in D_h(g^{n_k}(0), r)$, $k \in N$. Ako je $r_1 = r + \varepsilon$, $r_1 \in (0,+\infty)$ tada je $D_h(z_k, \varepsilon_k) \subset D_h(g^{n_k}(0), r_1)$ za svako $k \in N$, jer za $z \in D_h(z_k, \varepsilon_k)$ važi

$$d_h(g^{n_k}(0), z) \le d_h(g^{n_k}(0), z_n) + d_h(z_n, z) < r + \varepsilon_n \le r + \varepsilon = r_1.$$

Otuda je $D_h(z_k, \varepsilon_k) \subset \Delta_g(+\theta, r_1)$, $k \in N$. Kako je $f \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$, to iz (ii) slijedi da postoji konstanta C, $0 < C < +\infty$, da je $\sup_{\Delta_g(+\theta, r_1)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z) < C$, pa je

$$\sup_{D_h(z_k,\varepsilon_k)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z) < C,\quad k \in N. \tag{17}$$

Iz (17) slijedi

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\sup_{D_h(z_k,\varepsilon_k)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z)\right) \le C. \tag{18}$$

Iz (18) i teoreme 2 poglavlja 2.2 dalje slijedi da (z_k) nije P- niz funkcije f.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da iz (iii) ne slijedi (ii). Tada važi suprotno od (ii), tj. postoji $r \in (0,+\infty)$ da je $\sup_{\Delta_g(+\theta, r)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z) = +\infty$. Otuda slijedi da postoji niz (z_n), $z_n \in \Delta_g(+\theta, r)$, $n \in N$ da je $\lim_{n\to\infty}\left(1-|z_n|^2\right)f^{\#}(z_n) = +\infty$. Tada iz leme 2 poglavlja 2.2 slijedi da je (z_n) P-niz za funkciju f, što protivurječi (iii).□

Posljedica 1. Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ pripada klasi $\mathcal{N}_g^{+\theta}$, $g \in H^\theta$, $g \ne i_\Delta$, ako i samo ako funkcija f u skupovima $\Delta(\theta, \alpha) \cap \{z \,|\, |z - e^{i\theta}| < r\}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $r \in (0,2)$, odnosno skupovima $\Delta_H(+\theta, r_1) = \bigcup_{g\in H^{+\theta}} g(\Delta(0, thr_1))$, $H^{+\theta} = \left\{ g(z) = \frac{z + te^{i\theta}}{1 + te^{-i\theta}z} \mid t \in (0,1) \right\}$, $r_1 \in (0, +\infty)$, nema P-nizova.

Dokaz: Posljedica 1 direktno slijedi iz prethodne teoreme, leme 7 poglavlja 1.3 i leme 2 poglavlja 2.3.

Teorema 2. $\mathcal{N}_g^\theta = \mathcal{N}_{H^\theta}$ je pravi podskup od $\mathcal{N}_g^{+\theta}$ $\left(\mathcal{N}_{g^{-1}}^{-\theta}\right)$, $g \in H^\theta, g \neq i, 0 \leq \theta < \pi$.

Dokaz: Iz definicija klasa $\mathcal{N}_{H^\theta}$, $\mathcal{N}_g^\theta$ i $\mathcal{N}_g^{+\theta}$ i teoreme 2 prethodnog poglavlja slijedi da je $\mathcal{N}_{H^\theta} = \mathcal{N}_g^\theta \subset \mathcal{N}_g^{+\theta}$. Pokazaćemo da je $\mathcal{N}_{H^\theta}$ pravi podskup od $\mathcal{N}_g^{+\theta}$. Naime, konstruisat ćemo meromorfnu funkciju f takvu da je $f \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$ a $f \notin \mathcal{N}_{H^\theta}$.

Neka je $z_k = -\rho_k e^{i\theta}$, $\rho_k > 0$, $k \in N$, izabrano tako da je $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 1$ i $\lim_{k\to\infty} d_h(z_k, z_{k+1}) = 0$. Članovi niza (z_k) su elementi skupa $\Lambda_\theta \cap \Delta_{g^{-1}}(-\theta, r)$. Dalje izaberimo niz (ε_k) tako da je:

1) $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, $k \in N$;
2) $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$;
3) Krugovi $D(z_k, \varepsilon_k)$, $k \in N$, se međusobno ne sijeku;
4) $\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{z\in D(z_k,\varepsilon_k)} d_h(z, z_k) \right) = 0$;
5) $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$.

Neka je $a_k = \varepsilon_k^3$, $k \in N$, i $f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_k)$. Funkcija f_0 je meromorfna na krugu Δ čiji su polovi tačke z_k, $k \in N$. Kako je $f_0(z_k) = \infty$, $k \in N$, $|f_0(z_k + \varepsilon_k)| < C$, $k \in N$, i $\lim_{k\to\infty} d_h(z_k, z_l + \varepsilon_k) = 0$, to iz teoreme 2 poglavlja 2.2 slijedi da je (z_k) P-niz za f_0. Kako su $z_k \in \Delta(\theta, r)$, $r > 0$, $k \in N$, to otuda slijedi da $f_0 \notin \mathcal{N}_{H^\theta}$. Međutim, kako je za svako $z', z'' \in \Delta \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D(z_k, \varepsilon_k)$ $|f_0(z') - f_0(z'')| \leq |z' - z''| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = C < +\infty$, i kako $\Delta_g(+\theta, r)$, $r \in (0, +\infty)$, sadrži konačan broj tačaka z_k, i kako je $\Delta_g(+\theta, r)$ invarijanta od g^n, $n \in N$, to se lako pokazuje da je niz $(f \circ g^n)^\#$, $n \in N$, ograničen na kompaktnim podskupovima od Δ, odatle i iz Martijevog kriterijuma za normalnost familije meromorfnih funkcija slijedi da je $f_0 \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$.

Teorema 3. Za svako θ, $0 \leq \theta < \pi$, važi $\mathcal{N}_g^{+\theta} \cap \mathcal{N}_{g^{-1}}^{-\theta} = \mathcal{N}_{H^\theta} = \mathcal{N}_g^\theta$.

Dokaz: Kako je $\Delta_g(\theta,r)=\Delta_g(+\theta,r)\cup\Delta_{g^{-1}}(-\theta,r)$, $r\in(0,+\infty)$, to tvrđenje teoreme 3 slijedi iz teoreme 1 poglavlja 2.3 i teoreme 1 ovog poglavlja.

Za svaki elemenat g, $g\neq i$, grupe P^{θ}, $0\leq\theta<2\pi$, neka je $\mathcal{P}_g^{\theta}=\{g^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je $g^0=i$, $g^n=g\circ g\circ\ldots\circ g$. Skup $\mathcal{P}_g^{\theta}$ sa operacijom kompozicija preslikavanja obrazuje cikličnu polugrupu, odnosno dinamički sistem-kaskadu. Kako g ima privlačeću tačku $e^{i\theta}$ to ćemo $\mathcal{P}_g^{\theta}$ označavati sa $\mathcal{P}_g^{+\theta}$.

Neka je $\Delta_g(+\theta,r)=\bigcup\limits_{n\in N}g^n(D_h(o,r))$, $g\in P^{\theta}, g\neq i$.

Definicija 2. Meromorfna funkcija $f:\Delta\to\hat{C}$ je normalna u odnosu na polugrupu $\mathcal{P}_g^{+\theta}$ ako je familija $orb_{\mathcal{P}_g^{+\theta}}f=\{f\circ\varphi \mid \varphi\in\mathcal{P}_g^{+\theta}\}=\{f\circ g^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$ normalna na Δ u smislu Montela. Oznaka: $f\in\mathcal{N}_g^{+\theta}$.

Teorema 4. Za meromorfnu funkciju $f:\Delta\to\hat{C}$ sljedeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $f\in\mathcal{N}_g^{+\theta}$.

(ii) Za svako $r\in(0,+\infty)$ postoji konstanta $C_f(r)$, $0<C_f(r)<+\infty$ da je
$$\sup_{\Delta_g(+\theta,r)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z)\leq C_f(r).$$

(iii) Funkcija f za svako $r\in(0,+\infty)$, u $\Delta_g(+\theta,r)$ nema P-nizove.

gdje je $g\in P^{\theta}, g\neq i, 0\leq\theta<2\pi$.

Dokaz teoreme 4 je analogan dokazu teoreme 1.

Teorema 5. Za svako θ, $0\leq\theta<2\pi$, važi $\mathcal{N}_g^{+\theta}\cap\mathcal{N}_{g^{-1}}^{-\theta}=\mathcal{N}_{\mathcal{P}^{\theta}}=\mathcal{N}_g^{\theta}$.

Dokaz: Kako je $\Delta_g(\theta,r)=\Delta_g(+\theta,r)\cup\Delta_{g^{-1}}(-\theta,r)$, $r\in(0,+\infty)$, to tvrđenje teoreme 5 slijedi iz teoreme 3 poglavlja 2.3 i teoreme 4 ovog poglavlja.

3. GRANIČNA SVOJSTVA NORMALNIH MEROMORFNIH FUNKCIJA

U ovoj glavi, poglavlje 3.1, su formulisane i dokazane teorema Lindelefa za ograničene holomorfne funkcije i teorema Lehta i Virtanena za normalne meromorfne funkcije o ugaonim graničnim vrijednostima, kao i teoreme Bagemila i Zajdela koje predstavljaju "poboljšanje" teoreme Lehta i Virtanena.

Naši rezultati su dati u poglavljima 3.2 i 3.3. U njima su izloženi rezultati koji rješavaju za nas postavljeni glavni zadatak. Naime, glavni zadatak koji se izučava u ovom radu je izučavanje graničnih svojstava proizvoljnih funkcija i meromorfnih funkcija, definisanih na jediničnom krugu $\Delta = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ kompleksne ravni C. Dokazana su tvrđenja koja daju potreban i dovoljan uslov da proizvoljna funkcija definisana na jediničnom krugu kompleksne ravni C, ima ugaonu i oricikličnu graničnu vrijednost u terminima graničnog skupa i normalnosti funkcije. Glavnu ulogu u postojanju ovih graničnih vrijednosti ima normalnost funkcije u odnosu na hiperbolički i parabolički dinamički sistem-kaskadu-polugrupu koju rađa hiperbolički, odnosno parabolički elemenat grupe konformnih automorfizama kruga Δ s privlačećim tačkama na jediničnoj kružnici. U dokazima smo se koristili rezultatima geometrije diskretnih grupa i teoremu jedinstvenosti kompleksne analize, a nijesmo koristili teoriju harmonijske mjere kako je do sada rađeno u dokazima klasičnih rezultata tog tipa za holomorfne i meromorfne funkcije (teorema Lindelefa, teorema Lehta-Virtanena, teoreme V.I. Gavrilova i dr.)

Posebno ističemo rezultate poglavlja 3.2 koji pokazuju da proizvoljna funkcija ako ima ugaonu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ mora biti normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu koju rađa hiperbolički elemenat grupe konformnih automorfizama jediničnog kruga čija je privlačeća tačka $e^{i\theta}$. Iz tih rezultata, naprimjer, slijedi tvrđenje da i za meromorfne funkcije iz Nevanlinine klase kao i za holomorfne funkcije iz Hardijevih klasa važe teoreme tipa Lindelefa-Lehta-Virtanena a što do sada nije bilo poznato. Otuda dalje slijedi da za funkcije iz tih klasa važi ocjena sfernog izvoda $f^{\#}(z) = |f'(z)|\left(1 + |f(z)|^2\right)^{-1} = O\left(\left(1 - |z|^2\right)^{-1}\right)$ na hipercikličnim oblastima.

U poglavlju 3.3 smo dokazali rezultate koji se odnose na dobijanje oriciklične granične vrijednosti (tangencijalno granično svojstvo) iz postojanja asimptotske granične vrijednosti u oricikličnim oblastima. Koliko je nama poznato rezultati toga tipa do sada nijesu dobijeni.

3.1. LOKALNA I GLOBALNA GRANIČNA SVOJSTVA MEROMORFNIH FUNKCIJA

U ovom poglavlju navodimo osnovne rezultate za harmonijsku mjeru koji će nam biti dalje potrebni. (pogledati ([9]) ili ([11])).

Neka je D prosto povezana oblast kompleksne ravni C čija je granica ∂D dio po dio glatka kriva i neka je E najviše prebrojiv skup lukova granice ∂D. Tada na osnovu rezultata za harmonijske funkcije poznatog pod nazivom Dirihleov zadatak (problem), postoji harmonijska funkcija oblasti D koja je jednaka 1 na E a 0 na $\partial D / E$. Ona je neprekidna u tačkama neprekidnosti karakteristične funkcije skupa E, $E \subset \partial D$,

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in E \\ 0, & \xi \in \partial D / E \end{cases}.$$

Ta harmonijska funkcija se označava sa $\omega(z, E, D)$, $z \in D$, i naziva se harmonijskom mjerom skupa E, $E \subset \partial D$, u odnosu na oblast D i tačku z, $z \in D$.

Iz principa maksimalnosti i minimalnosti za harmonijske funkcije slijedi

$$0 \le \omega(z, E, D) \le 1, \quad z \in D.$$

Teorema 1. Ako je E najviše prebrojiv skup, tada je $\omega(z, E, D) \equiv 0$, $z \in D$. Ako je $\partial D / E$ najviše prebrojiv skup, tada je $\omega(z, E, D) \equiv 1$, $z \in D$.

Teorema 2. Ako su E_1 i E_2 disjunktni skupovi granice ∂D koji se sastoji od lukova, tada je $\omega(z, E_1 \cup E_2, D) = \omega(z, E_1, D) + \omega(z, E_2, D)$.

Teorema 3. Neka je $w : D \to D'$ konformno preslikavanje oblasti D na oblast D' i neka je $w(E) = E'$. Tada je $\omega(z, E, D) = \omega(w(z), E', D')$.

Teorema 4. **(Princip raširenja)** Ako se oblast D povećava na račun dijela granice $\partial D / E$, tada se harmonijska mjera $\omega(z, E, D)$ povećava, a ako se oblast D povećava na račun dijela granice E, $E \subset \partial D$, tada se harmonijska mjera $\omega(z, E, D)$ smanjuje.

Povećanje oblasti D na račun dijela granice $\partial D / E$ podrazumijeva da se oblast D zamijeni oblašću D', $D \subset D'$, tako da je $E \subset \partial D'$. Na isti način se definiše povećanje oblasti D na račun granice E.

Teorema 5. **(Teorema o dvije konstante)** Neka je $f : D \to C$ holomorfna funkcija na oblasti D. Ako je za svako $\xi \in E, E \subset \partial D$, i svako $\eta \in \partial D / E$, $\limsup_{z \to \xi, z \in D} |f(z)| < m$ i $\limsup_{z \to \eta, z \in D} |f(z)| < M$, tada je za svako $z \in D$

$$\ln|f(z)| \le \omega(z, E, D) \ln m + (1 - \omega(z, E, D)) \ln M. \tag{1}$$

Iz prethodne teoreme slijedi sljedeće tvrđenje.

Teorema 6. Neka je $f : D \to C$ ograničena holomorfna funkcija na D i neka je za svako $\xi \in E, E \subset \partial D$, i za svako $\eta \in \partial D / E$, $\limsup\limits_{z\to\xi, z\in D} |f(z)| \le m < +\infty$ i $\limsup\limits_{z\to\eta, z\in D} |f(z)| \le M < +\infty$. Tada za svaki zatvoren skup K, $K \subset D$, postoje pozitivne konstante λ_1 i λ_2, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, koje ne zavise od funkcije *f*, takve da je za svako $z \in K$, $|f(z)| \le m^{\lambda_1} \cdot M^{\lambda_2}$.

Sa J^+ označavaćemo gornju poluravan kompleksne ravni C, tj. skup $\{ z = x + iy \mid x \in R, y \in R^+ \}$.

Sa D_r, $r > 0$, ubuduće ćemo označavati skup $D(0, r)$, tj. Euklidov krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika *r*.

Primjer: Neka je I interval na x-osi. Pokazuje se (pogledati npr. ([6]) ili ([9])) da je $\omega(z, I, J^+) = \dfrac{\alpha}{\pi}$, gdje je α ugao pod kojim se interval I vidi iz tačke z.

Lema 1. Neka je $B_r = D_r \cap J^+$, $r > 0$, α_r interval $(0, r)$ na x-osi i $D_r^\theta = \{ z \mid z \in D_r,\ 0 \le \arg z \le \pi - \theta \}$, $0 < \theta < \pi$, kružni isječak u D_r. Tada postoje C, $C > 0$, i r', $0 < r' < r$, da je $\omega(z, \alpha_r, B_r) \ge C > 0$ za svako $z \in D_r^\theta$.

Dokaz: Funkcija $w = 4rz\dfrac{1}{(z-r)^2}$ preslikava B_r na J^+, α_r slika na pozitivni dio x-ose koji ćemo označavati sa X^+, a $z = 0$ preslikava u $w = 0$. Iz teoreme 3 ovog poglavlja slijedi da je

$$\omega(z, \alpha_r, B_r) = \omega(w, X^+, J^+) . \tag{2}$$

Iz (2) i rezultata iz prethodnog primjera slijedi da je

$$\omega(z, \alpha_r, B_r) = \frac{\pi - \arg w}{\pi}, \quad w = 4rz\frac{1}{(z-r)^2}, \quad z \in B_r.$$

Otuda je

$$\omega(z, \alpha_r, B_r) = 1 - \frac{1}{\pi}\arg\left(4z\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{r}\right)^2} \right), \quad z \in B_r.$$

Neka je $u(z)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{z}{r}\right)^2}$ i $z\in D_r^\theta$. Kako je $0\le \arg 4z\le \pi-\theta$ za svako $z\in D_r^\theta$, to je

$$\arg u(z)\le \arg 4z+\arg u(z)\le \pi-\theta+\arg u(z),\quad z\in D_r^\theta,$$

odnosno

$$0<\arg u(z)\le \arg 4z\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{r}\right)^2}\le \pi-\theta+\arg u(z),\quad z\in D_r^\theta. \tag{3}$$

Iz (3) slijedi

$$1-\frac{1}{\pi}(\pi-\theta+\arg u(z))\le 1-\frac{1}{\pi}\arg 4z\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{r}\right)^2}\le 1-\frac{1}{\pi}\arg u(z),\quad z\in D_r^\theta,$$

tj.

$$\frac{\theta}{\pi}-\frac{1}{\pi}\arg u(z)\le \omega(z,\alpha_r,B_r)\le 1-\frac{1}{\pi}\arg u(z),\quad z\in D_r^\theta. \tag{4}$$

Kako je $\lim\limits_{z\to 0,z\in D_r^\theta} u(z)=1$, to je $\lim\limits_{z\to 0,z\in D_r^\theta}(\arg u(z))=0$. Otuda i iz (4) slijedi da postoji r', $0<r'<r$, da je

$$0<\frac{\theta}{2\pi}\le \omega(z,\alpha_r,B_r)\le 1-\frac{\theta}{2\pi}\quad , z\in D_{r'}^\theta. \tag{5}$$

Uzimajući $C=\dfrac{\theta}{2\pi}$ iz (5) dobijamo tvrđenje leme 1.

Lema 2. Neka je $E_r^\theta=\{z|\, z\in D_r,\ \ \theta\le \arg z\le \pi\}$, $0<\theta<\pi$. Tada postoji C, $C>0$, i r', $0<r'<r$, da je za svako $z\in E_{r'}^\theta$, $\omega(z,\beta_r,B_r)\ge C>0$, gdje je β_r interval $(-r,0)$ sa x-ose.

Lema 2 se dokazuje na isti način kao lema 1.

Definicija 1. Neka je $f:D\to \hat{C}$, $D\subset C$, $\xi\in\partial D$. Ako je $D'\subset D$ i $\xi\in\partial D'$, tada se skup $A=\left\{w\in\hat{C}\,\middle|\,(z_n)\subset D',\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n=\xi,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=w\right\}$ naziva graničnim skupom funkcije f u tački ξ po skupu D'. Oznaka: $A=C(f,\xi,D')$.

Neka je $\Delta(x,\theta)=\{z=x+\rho e^{i\theta} \mid \rho\in R^{+},\theta<\varphi<\pi-\theta,\theta\in(0,\pi),x\in R\}$. Skup $\Delta(x,\theta)$ je ugao iz J^{+} sa tjemenom u tački x x-ose i kracima koji u tački x sa pozitivnim dijelom x-ose zaklapaju uglove θ i $\pi-\theta$.

Definicija 2. Neka je $f:J^{+}\to\hat{C}$. Ako je za svako $\theta\in(0,\pi)$ $C(f,x,\Delta(x,\theta))=\{w\}\subset\hat{C}$, tada kažemo da u tački x funkcija f ima ugaonu graničnu vrijednost w a x se zove Fatuovaom tačkom funkcije *f*. Oznake: $x\in F(f)$ ili $C(f,x)=\{w\}$ i $f(x)=w$.

Lako se vidi da je za $x\in F(f)$ *i* $f(x)=w$, $\{w\}=\bigcup\limits_{\theta\in(0,\pi)}C(f,x,\Delta(x,\theta))$.

Sljedeći rezultati se mogu naći u ([9]) ili ([11]).

Teorema 7. **(Teorema Lindelefa)** Neka je $f:J^{+}\to C$ ograničena holomorfna funkcija i neka je γ Žordanova kriva, $\gamma\subset J^{+}$ koja se završava u 0. Ako je $\lim\limits_{z\to0,z\in\gamma}f(z)=w$, tada je $0\in F(f)$ i $C(f,0)=\{w\}$.

Dokaz : Bez smanjenja opštosti dokaza može se uzeti da je $w=0$ i $|f(z)|<1$, $z\in J^{+}$.

Neka je ε, $0<\varepsilon<1$, fiksirano. Izaberimo r, $0<r<1$, tako da je za svako $z\in J^{+}\cap D_r\cap\gamma$ $|f(z)|<\varepsilon$. Takvo r postoji, jer je $\lim\limits_{z\to0,z\in\gamma}f(z)=0$.

Neka je $\gamma_r=J^{+}\cap D_r\cap\gamma$. Kriva γ_r dijeli polukrug $B_r=J^{+}\cap D_r$ na dvije oblasti B_r' i B_r''. Neka je B_r' ona koja naliježe na negativni dio x-ose. Ako na B_r' primijenimo nejednakost (1) poglavlja 3.1 dobijamo da je

$$\ln|f(z)|\le\omega(z,\gamma_r,B_r')\ln\varepsilon. \tag{6}$$

Dalje će se ocjenjivati harmonijska mjera $\omega(z,\gamma_r,B_r')$ luka (krive) γ_r. Neka je $\beta_r=\partial B_r'/\gamma_r$, $\gamma_r'=\partial B_r/\beta_r$ i γ_r'' interval $(0,r)$ x-ose.

Iz principa raširenja (teorema 4) i teoreme 2 ovog poglavlja slijedi da je

$$\omega(z,\gamma_r,B_r')\ge\omega(z,\gamma_r',B_r)\ge\omega(z,\gamma_r'',B_r). \tag{7}$$

Iz leme 1 ovog poglavlja slijedi da postoje C_1, $C_1>0$, i r', $r'>0$, da je za svako $z\in D_r^{\theta}$ $\omega(z,\gamma_r'',B_r)\ge C_1>0$, pa iz (6) i (7) slijedi da je $|f(z)|\le\varepsilon^{C_1}$ za svako $z\in D_{r'}^{\theta}\cap B_r'$

Slično kao naprijed, se pokazuje se, koristeći lemu 2 ovog poglavlja, da postoje C_2, $C_2 > 0$, i r'', $r'' > 0$, da je za svako $z \in E^{\theta}_{r''} \cap B''_r$ $|f(z)| \leq \varepsilon^{C_2}$.

Neka je $C = \max\{C_1, C_2\}$ i $\delta = \min\{r', r'', r\}$. Tada je

$$|f(z)| < \varepsilon^{C} \qquad \text{za svako } z \in E^{\theta}_{\delta} \cup D^{\theta}_{\delta}. \tag{8}$$

Kako je $E^{\theta}_{\delta} \cup D^{\theta}_{\delta} = \Delta(0,\theta)$, tada iz (8) slijedi da je $\lim\limits_{z \to 0, z \in \Delta(0,\theta)} f(z) = 0$, $0 < \theta < \pi$, iz čega slijedi da je $\bigcup\limits_{\theta \in (0,\pi)} C(f, 0, \Delta(0,\theta)) = \{0\}$, tj. 0 je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački 0. □

Kako je krug Δ konformno ekvivalentan poluravni J^{+}, i kako je harmonijska mjera konformno invarijantna (teorema 3), tada iz teoreme 7 slijedi sljedeće tvrđenje:

Teorema 8. Neka je $f : \Delta \to C$ ograničena holomorfna funkcija i neka je γ Žordanova kriva iz Δ koja se završava u tački $e^{i\theta} \in \partial\Delta$. Ako je $\lim\limits_{z \to e^{i\theta}, z \in \gamma} f(z) = w$, tada je $\bigcup\limits_{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}} C(f, e^{i\theta}, \Delta(\theta, \alpha)) = \{w\}$., tj. funkcija f u tački $e^{i\theta}$ ima ugaonu graničnu vrijednost w, pa je $e^{i\theta} \in F(f)$.

Sljedeće tvrđenje je rezultat O. Lehta i I. V. Virtanena iz ([12]) koji se odnosi na ugaone granične vrijednosti normalnih meromorfnih funkcija. On predstavlja prenošenje rezultata Lindelefa (teorema 7) sa ograničenih holomorfnih funkcija na širu klasu normalnih meromorfnih funkcija.

Neka je G prosto povezana oblast kompleksne ravni C i G^{*} ograničena podoblast oblasti G čija se granica ∂G^{*} sastoji iz lukova γ granice ∂G i analitičke krive γ' iz G.

Teorema 9. ([12]) Neka je $f : G \to \hat{C}$ normalna meromorfna funkcija na oblasti G koja zadovoljava sljedeće uslove:

(i) Za svaku tačku $\xi \in \gamma$ je $\limsup\limits_{z \to \xi, z \in G} |f(z)| \leq m$;

(ii) Za svako $z \in G^{*}$ je $|f(z)| \leq M$;

(iii) Postoji $z_0 \in \gamma'$ da je $|f(z_0)| = M$.

Tada važi

$$m \geq M \exp\left[-C_f \lambda_0 \left(M + \frac{1}{M}\right)\right], \tag{9}$$

gdje je $C_f = \sup_{z\in G}(1-|z|)f^{\#}(z)$, $\lambda_0 = \lambda(z_0)$, $\lambda(z) = \frac{d\sigma_G(z)}{|dz|}\left(\frac{\partial\omega(z,\gamma,G^*)}{\partial n}\right)$, $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ je izvod funkcije $\omega(z,\gamma,G^*)$ po unutrašnjoj normali krive γ' oblasti G^*, a $d\sigma_G(z)$ je element hiperboličke dužine krive oblasti G.

Dokaz: Funkcija $\ln\frac{M}{|f(z)|}$ je pozitivna i harmonijska na G^*, isključujući logaritamske singularitete. Na γ je $\ln\frac{M}{|f(z)|} \geq \frac{M}{m}$, gdje je $|f(\xi)| = \limsup_{z\to\xi, z\in G}|f(z)|$ i $\ln\frac{M}{|f(z)|} \geq 0$ na γ'. Iz teoreme o dvije konstante (teorema 5) slijedi da je $\ln\frac{M}{|f(z)|} \geq \omega(z,\gamma,G^*)\ln\frac{M}{m}$, $z \in G^*$, pa je

$$|f(z)| \leq M\left(\frac{m}{M}\right)^{\omega(z,\gamma,G^*)}, \quad z \in G^*. \tag{10}$$

Kako je f normalna meromorfna funkcija na G, tada postoji C_f, $0 < C_f < +\infty$, da je

$$\sup_{z\in G}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z) = C_f. \tag{11}$$

Sferno (tetivno) rastojanje između M i $|f(z)|$ je

$$\rho(M,|f(z)|) = \int_{|f(z)|}^{M}\frac{dt}{1+t^2} = arctg\frac{M-|f(z)|}{1+M|f(z)|}, \tag{12}$$

gdje je uzeta ona grana funkcije $arctgw$, za koju je $|arctgw| < \frac{\pi}{2}$. Iz (11) dobijamo

$$\rho(M,|f(z)|) \leq \int_z^{z_0} f^{\#}(z)|dz| \leq C_f\int_z^{z_0} d\sigma_G(z). \tag{13}$$

Za tačke $z \in G^*$ koje su dosta blizu tački z_0, desna strana u nejednakosti (13) je manja od $\frac{\pi}{2}$. Otuda i iz (12) i (13) slijedi

$$|f(z)| \geq \frac{M - tg\left(C_f\int_z^{z_0} d\sigma_G(z)\right)}{1 + M\cdot tg\left(C_f\int_z^{z_0} d\sigma_G(z)\right)}. \tag{14}$$

Iz (10) i (14) za tačke z iz G^* koje su dosta blizu tački z_0, dobija se

$$\frac{M - tg\left(C_f \int_z^{z_0} d\sigma_G(z)\right)}{1 + M \cdot tg\left(C_f \int_z^{z_0} d\sigma_G(z)\right)} \leq |f(z)| \leq M \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\omega(z,\gamma,G^*)}. \tag{15}$$

Računajući izvod u tački $z_0 \in \gamma'$ po unutrašnjoj normali oblasti G^*, iz (15) se dobija nejednakost (9). □

Neka je sada oblast G teoreme 9 gornja poluravan J^+, a oblast G^* kružni odsječak sa tetivom γ na x-osi kojoj odgovara periferijski ugao α, $0 < \alpha < \pi$. Ako su krajevi tetive γ, r i $-r$, tada je $\omega(z,\gamma,T_\alpha) = \frac{1}{\pi - \alpha}\left[\arg\frac{z-r}{z+r} - \alpha\right]$, dok je $\lambda(z) = \frac{\pi - \alpha}{2\sin\alpha}$. Za naprijed navedeni slučaj, nejednakost (9) postaje

$$m \geq M \exp\left[-\frac{\pi - \alpha}{2\sin\alpha} C_f\left(M + \frac{1}{M}\right)\right]. \tag{16}$$

Desna strana u nejednakosti (16) teži 0 kada $M \to +\infty$, dok dostiže maksimum za

$$M = \left\{1 + \left[1 + \left(\frac{\pi - \alpha}{\sin\alpha} \cdot C_f\right)^2\right]^{1/2}\right\}\left(\frac{\pi - \alpha}{\sin\alpha} \cdot C_f\right)^{-1}. \tag{17}$$

Navedenu vrijednost iz (17) označićemo sa $M(\alpha, C_f)$. Tada važi sljedeće tvrđenje koje se dobija iz teoreme 9.

Teorema 10. ([12]) Neka je f normalna meromorfna funkcija na J^+ i neka je $\limsup\limits_{z \to \xi, z \in J^+} |f(z)| \leq m$ za svako $\xi \in \gamma$, gdje je γ odsječak na x-osi. Tada je

$$m \geq M \exp\left[-\frac{\pi - \alpha}{2\sin\alpha} C_f\left(M + \frac{1}{M}\right)\right], \tag{18}$$

gdje je M proizvoljan pozitivan broj takav da je $M \leq \sup_{z \in T_\alpha} |f(z)|$ kada je $\sup_{z \in T_\alpha} |f(z)| < M(\alpha, C_f)$. Ako je $\sup_{z \in T_\alpha} |f(z)| < M(\alpha, C_f)$, tada se u (18) dobija najbolja ocjena kada je $M = \sup_{z \in T_\alpha} |f(z)|$, dok se za $\sup_{z \in T_\alpha} |f(z)| \geq M(\alpha, C_f)$ dobija najbolja ocjena kada je $M = M(\alpha, C_f)$.

Dalje će naše izlaganje, osim formulacije tvrđenja, imati heuristički karakter.

Kako su harmonijska mjera i normalnost meromorfnih funkcija prosto povezanih oblasti konformno invarijantni, tada teorema 2 ovog poglavlja na krugu Δ daje sljedeći rezultat: *Neka je f normalna meromorfna funkcija na krugu* Δ *i neka je* B_α *oblast kruga* Δ *koja je ograničena lukom* γ *kružnice* $\partial\Delta$ *i lukom kružnice koja sa lukom* γ *obrazuje ugao* α, $0 < \alpha < \pi$. *Tada za svako* ε, $\varepsilon > 0$, *postoji pozitivan broj* $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$, *takav da ako je* $\limsup_{z \to \xi, z \in \Delta} |f(z)| \leq \delta$ *za svako* $\xi \in \gamma$, *tada je* $\sup_{z \in B_\alpha} |f(z)| < \varepsilon$.

Naprijed formulisani rezultat se koristi za dokaz tvrđenja Lehta i Virtanena ([12]) o ugaonim graničnim vrijednostima normalnih meromorfnih funkcija. Sam dokaz pripada Pomerenkeu ([21]) i on se razlikuje od dokaza Lehta i Virtanena iz ([12]). Međutim i Lehto i Virtanen u dokazu tog tvrđenja koriste rezultate koji se dokazuju tehnikom teorije harmonijskih funkcija i harmonijske mjere (pogl. ([12])).

Teorema 11. **(Teorema Lehto-Virtanena)** Neka je f normalna na Δ meromorfna funkcija, tj. $f \in \mathcal{N}$, i neka je γ Žordanova kriva iz Δ koja se završava u tački $e^{i\theta} \in \partial\Delta$. Ako je $\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in \gamma} f(z) = w$, tada je $\bigcup_{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}} C(f, e^{i\theta}, \Delta(\theta, \alpha)) = \{w\}$, tj. $e^{i\theta} \in F(f)$ a w je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$.

Dokaz: Ne narušavajući opštost dokaza možemo uzeti da je $\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in \gamma} f(z) = 0$. Za proizvoljno δ, $\delta > 0$, neka je γ_δ dio krive γ, na kojoj je $|f(z)| \leq \delta$. Neka je dalje $z = \varphi(s)$ konformno preslikavanje kruga $\Delta_s = \{s \in C \mid |s| < 1\}$ na oblast $\Delta \setminus \gamma_\delta$ i neka je $F(s) = f(\varphi(s))$. Tada krivoj γ_δ iz Δ odgovara luk l_δ sa $\partial\Delta_s$ i za svako $s \in l_\delta$ je $|F(s)| \leq \delta$. Neka je α, $0 < \alpha < \pi$, fiksirani ugao. Tada za dosta malo $r = r(\delta)$, $r > 0$, inverzna slika oblasti $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2) \cap \{z \in C \mid |z - e^{i\theta}| < r\}$ za svako $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, preslikavanja $z = \varphi(s)$, će ležati u nekoj oblasti $B_\alpha = B_\alpha(\delta)$ sa granicom $l_\delta \subset \partial\Delta_s$ za fiksirano α. Funkcija $F(s)$ je normalna na Δ_s i važi $C_F \leq C_f$, gdje su C_F i C_f konstante iz tvrđenja (ii) teoreme 1 poglavlja 2.2. Tada iz naprijed formulisanog tvrđenja za normalne na Δ meromorfne funkcije slijedi da je $|F(s)| \leq \varepsilon$ za svako $s \in B_\alpha$, ako je δ izabrano dovoljno malo. Otuda slijedi da je za svako $z \in \Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2) \cap \{z \in C \mid |z - e^{i\theta}| < r\}$ $|f(z)| \leq \varepsilon$, iz čega slijedi da je $\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in \Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)} f(z) = 0$, tj. $C(f, e^{i\theta}, \Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)) = \{0\}$ za svako $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. □

Upoređujući dokaz teoreme 11 (teoreme Lehto-Virtanena) sa dokazom teoreme 7 (teorema Lindelofa) vidi se da su ideje koje se u njima koriste iste.

Analizirajući dokaz teoreme 11, vidi se da se ona dobija kao posljedica nejednakosti (9) teoreme 9, a nejednakost (9) se dobija kao posljedica nejednakosti $\sup_{z\in G^*}\left(1-|z|^2\right)\cdot f^{\#}(z)\leq C_f<+\infty$, koja ima lokalni karakter jer je vezana za oblast G^*, odnosno ugao $\Delta(\theta,\varphi_1,\varphi_2)\cap\left\{z\in C\,\middle|\,|z-e^{i\theta}|<r\right\}$.

Sljedeća dva tvrđenja, koja su dokazali američki matematičari Bagemil i Zajdel ([2]), daju precizniju (finiju) formulaciju rezultata Lehta i Virtanena o ugaonim graničnim vrijednostima normalnih meromorfnih funkcija (teorema 11). Međutim, ta tvrđenja se dokazuju korišćenjem samog rezultata Lehta i Virtanena. Interesantno je istaći da se ti rezultati mogu dobiti i iz rezultata V. I. Gavrilova ([7]).

Teorema 12 ([2])**.** Neka je $f:\Delta\to\hat{C}$ normalna meromorfna na Δ funkcija, (tj. $f\in\mathcal{N}$) takva da je za svako $z\in\Delta$ $f(z)\neq w$, $w\in\hat{C}$. Ako postoji $M, M>0$, i niz (z_n), $z_n\in\Delta$, $n\in N$, za koje važi: $\lim_{n\to\infty}z_n=e^{i\theta}$, $d_h(z_n,z_{n+1})<M$, $n\in N$ i $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w$, tada je $e^{i\theta}\in F(f)$, a w je ugaona granična vrijednost funkcije f, tj. $\bigcup_{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}}C\left(f,e^{i\theta},\Delta(\theta,\alpha)\right)=\{w\}$.

Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da je $\Im=\left\{g_n(z)=f\left(\dfrac{z+z_n}{1+\bar{z}_n z}\right)\middle|\, n\in N\right\}$ normalna familija meromorfnih funkcija na Δ i $\lim_{n\to\infty}g_n(0)=w$. Koristeći teoremu Gurviča (teorema 5, poglavlje 2.1) i svojstva ravnomjerne konvergencije koja važe za familiju $\Im$, pokazuje se da niz $(g_n(z))$ ravnomjerno na kompaktnim podskupovima od Δ konvergira konstanti w. Posmatrajmo kompakte $D_\lambda^n=\left\{z\in\Delta\,\middle|\,d_h(z_n,z)\leq\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right\}$, gdje je $th\,M<\lambda<1$, $n\in N$. Skupovi D_λ^n, $n\in N$, su zatvoreni hiperbolički krugovi sa hiperboličkim centrom z_n i poluprečnicima $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Ako je $\varphi_n(z)=\dfrac{z+z_n}{1+\bar{z}_n z}$, $n\in N$, tada je $\varphi_n(\overline{D}_\lambda)=D_\lambda^n$, $n\in N$, i $g_n(z)=f(\varphi_n(z))$.. Neka je Γ_n L-kriva koja spaja tačke z_n i z_{n+1}, $n\in N$. Tada je $P=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ Žordanova kriva koja se završava u tački $e^{i\theta}$. Kako iz prethodnog slijedi da $f(\varphi_n(z))\underset{\overline{D}_\lambda}{\to}w$, to otuda, dalje slijedi da je $\lim_{z\to e^{i\theta},z\in P}f(z)=w$, pa iz teoreme 3 (rezultat Lehta i Virtanena) slijedi da je $e^{i\theta}\in F(f)$, a w je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$. □

Teorema 13 ([2])**.** Neka je $f:\Delta\to\hat{C}$ normalna na Δ meromorfna funkcija i (z_n) niz iz Δ za koji je $\lim_{n\to\infty}z_n=e^{i\theta}$ i $\lim_{n\to\infty}d_h(z_n,z_{n+1})=0$. Ako je $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w$, $w\in\hat{C}$, tada je $e^{i\theta}\in F(f)$, a w je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$.

Za dokaz teoreme 13 Bagemil i Zajdel koriste sljedeći rezultat.

Lema. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ normalna na Δ meromorfna funkcija i $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$, $w \in \hat{C}$, $z_n \in \Delta$, $n \in N$, i $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$. Ako je $\lim_{n\to\infty} d_h(z_n, z'_n) = 0$, $z'_n \in \Delta$, $n \in N$, tada je $\lim_{n\to\infty} f(z'_n) = w$.

Lako se vidi da rezultat naprijed formulisane leme direktno slijedi iz teorema 2 i 4 poglavlja 2.2. koje je dobio V. I. Gavrilov ([7]). Ističemo da se dokaz leme koju su dali Bagemil i Zajdel u ([2]) razlikuje od dokaza koji slijedi iz naprijed datih teorema 10 i 12. Inače teorema 12 predstavlja bolji rezultat od rezultata naprijed date leme. Ta teorema će nam omogućiti da dokažemo tvrđenje analogno tvrđenju teoreme 13 ovog poglavlja za meromorfne na Δ funkcije koje su normalne na ciklične hiperboličke polugrupe $\mathcal{K}_g^{+\theta}$ hiperboličkih grupa H^θ.

Dokaz teoreme 13. Neka su Γ_n L-krive koje spajaju tačke z_n i z_{n+1}, $n \in N$. Neka je dalje $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Skup P je Žordanova kriva koja se završava u tački $e^{i\theta}$. Dokazaćemo da je $\lim_{z\to e^{i\theta}, z\in P} f(z) = w$. Pretpostavimo da to nije tačno. Otuda slijedi da postoji niz (z'_k), $z'_k \in P$, $k \in N$, da je

$$\lim_{k\to\infty} f(z'_k) \neq w \tag{19}$$

Iz $z'_k \in P$, $k \in N$, slijedi da postoji $n_k \in N$ da je $z'_k \in \Gamma_{n_k}$ za svako $k \in N$, tj. z'_k je između tačaka z_{n_k} i $z_{n_{k+1}}$ L_{n_k}-krive. Kako je $d_h(z_{n_k}, z'_k) \leq d_h(z_{n_k}, z_{n_{k+1}})$, a $\lim_{k\to\infty} d_h(z_{n_k}, z_{n_{k+1}}) = 0$, to je i $\lim_{k\to\infty} d_h(z_{n_k}, z'_k) = 0$. Iz uslova teoreme 5 slijedi da je $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = w$, pa na osnovu gornje leme slijedi da je $\lim_{k\to\infty} f(z'_k) = w$, što je suprotno sa (19). Znači, za svaki niz (z'_k), $z'_k \in P$, $k \in N$, važi $\lim_{k\to\infty} f(z'_k) = w$, iz čega slijedi da je $\lim_{z\to e^{i\theta}, z\in P} f(z) = w$. Otuda i teoreme 11 (rezultat Lehta i Virtanena) ovog poglavlja slijedi da je w ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$ i da je $e^{i\theta} \in F(f)$.□

Bagemil i Zajdel u ([2]) konstruišu proizvode Bljaškea koji pokazuju da se uslovi za hiperbolička rastojanja $d_h(z_n, z_{n+1})$ niza (z_n) u teoremama 12 i 13 ne mogu oslabiti.

Analiza rezultata koji se koriste za dokaz teoreme 11 (rezultata Lehta i Virtanena) kao i samog dokaza te teoreme, pokazuje da ocjena sfernog izvoda

$$f^{\#}(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right) \tag{20}$$

koja važi na skupovima $O(e^{i\theta})\cap\Delta$, gdje su $O(e^{i\theta})$ neke okoline tačke $e^{i\theta}\in\partial\Delta$, ima ključno mjesto u dokazu tih rezultata i teoreme 11.

Nije teško vidjeti da se, zahvaljujući rezultatima leme 7 poglavlja 1.3, leme 1 poglavlja 2.4 i tvrđenja (ii) teoreme 1 poglavlja 2.5, može na isti način kao i teorema 11 (rezultat Lehta i Virtanena) dokazati sljedeći rezultat.

Teorema 14. Neka je $f\in\mathcal{N}_g^{+\theta}$, $g\in H^\theta$, $g\neq i$, i neka je γ Žordanova kriva koja leži u nekom uglu $\Delta(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$, $\varphi_1,\varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, a koja se završava u tački $e^{i\theta}$. Ako je $\lim\limits_{z\to e^{i\theta},z\in\gamma} f(z)=w$, $w\in\hat{C}$, tada je $e^{i\theta}\in F(f)$, a w je ugaona granična vrijednost funkcije f, tj. $\bigcup\limits_{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}} C(f,e^{i\theta},\Delta(\theta,\alpha))=\{w\}$.

Ističemo da je u teoremi 11 Žordanova kriva γ proizvoljna kriva kruga Δ koja se završava u tački $e^{i\theta}$, dok je u teoremi 14 ovog poglavlja Žordanova kriva γ kriva koja leži u nekom Štolcovom uglu $\Delta(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$, $\varphi_1,\varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Naime taj uslov je potreban jer rast sfernog izvoda koji je dat sa (20) za funkcije iz klase $\mathcal{N}_g^{+\theta}$ važi samo u Štolcovim uglovima čija su tjemena tačke $e^{i\theta}$ (teorema 1, poglavlje 2.5). Iz leme 2 poglavlja 2.4 slijedi da se uslov u teoremi 14 da kriva γ leži u Štolcovom uglu $\Delta(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ može zamijeniti uslovom da kriva γ leži u skupu $\Delta_H(\theta,r)$, odnosno skupu $\Delta_g(+\theta,r)$, za neko $r\in(0,+\infty)$.

Teorema 15. Neka je $f\in\mathcal{N}_g^{+\theta}$, $g\in H^\theta$, $g\neq i$, i neka je (z_n) niz za koji postoji $r\in(0,+\infty)$ da je $z_n\in\Delta_g(+\theta,r)$, $n\in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=e^{i\theta}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n,z_{n+1})=0$. Ako je

$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=w$, $w\in\hat{C}$, tada je $e^{i\theta}\in F(f)$, a w je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, t j. $\bigcup\limits_{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}} C(f,e^{i\theta},\Delta(\theta,\alpha))=\{w\}$.

Dokaz: Iz leme 7 poglavlja 1.3 i leme 2 poglavlja 2.4 slijedi da je uslov $z_n\in\Delta_g(+\theta,r)$, $n\in N$, iz teoreme 15 ekvivalentan uslovu $z_n\in\Delta(\theta,\alpha)$ za neko $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $n\in N$, odnosno $z_n\in\Delta_H(+\theta,r)$ za neko $r\in(0,+\infty)$, $n\in N$. Neka su, kao i u teoremi 5 prethodnog poglavlja, Γ_n L-krive koje spajaju tačke z_n i z_{n+1} niza (z_n) i neka je $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$. Skup P je Žordanova kriva koja se završava u tački $e^{i\theta}$.

Iz uslova $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n,z_{n+1})=0$ teoreme 15 slijedi da je $\sup\{d_h(z_n,z_{n+1})|\, n\in N\}=\lambda<+\infty$. Tada je $P\subset\Delta_H(+\theta,r+\lambda)$. Naime, ako je $z\in P$, tada je

$z \in \Gamma_n$ za neko $n \in N$. Kako su $z_n \in \Delta_H(+\theta, r)$, $n \in N$, tada za svako $n \in N$ postoji $k_n \in N$ da je $z_n \in D_h(g^{k_n}(0), r)$, $n \in N$, jer je $\Delta_g(+\theta, r) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_h(g^k(0), r)$. Pokazaćemo da je $\Gamma_n \subset D_h(g^{k_n}(0), r+\lambda)$ za svako $n \in N$. Neka je $z \in \Gamma_n$. Tada je

$$d_h(g^{k_n}(0), z) \leq d_h(g^{k_n}(0), z_n) + d_h(z_n, z) \leq d_h(g^{k_n}(0), z_n) + d_h(z_n, z_{n+1}) < r + \lambda. \quad (21)$$

Iz (21) slijedi da je $z \in D_h(g^{k_n}(0), r+\lambda)$. Iz naprijed dobijenog slijedi da je $\Gamma_n \subset D_h(g^{k_n}(0), r+\lambda)$, a otuda da je $P \subset \Delta_H(+\theta, r+\lambda)$. Znači, Žordanova kriva P leži u skupu $\Delta_H(+\theta, R)$, $R = r + \lambda \in (0, +\infty)$. Pokazaćemo da je

$$\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in P} f(z) = w \quad (22)$$

Pretpostavimo da ne važi (22). Tada postoji niz (w_k), $w_k \in P$, takav da za niz $(f(w_k))$ w nije granična vrijednost. Za svako w_k, $k \in N$, postoje $n_k \in N$ da je $w_k \in \Gamma_{n_k}$, tj. da je w_k između z_{n_k} i $z_{n_{k+1}}$. Otuda slijedi da je $\lim_{k\to\infty} w_k = e^{i\theta}$, $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = e^{i\theta}$, $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = w$, $\lim_{k\to\infty} d_h(z_{n_k}, w_k) = 0$, i $\lim_{k\to\infty} f(w_k) \neq w$. Iz naprijed dobijenog i teoreme 4 poglavlja 2.2 slijedi da niz (z_{n_k}) sadrži podniz koji je P-niz za funkciju f. Kako je niz (z_{n_k}) iz $\Delta_H(+\theta, R)$, to $\Delta_H(+\theta, R)$ sadrži P-niz funkcije f, što je suprotno sa tvrđenjem posljedice 1 poglavlja 2.5. Znači, imamo da je $P \subset \Delta_H(+\theta, R)$ i $\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in P} f(z) = w$. Tada iz teoreme 14 ovog poglavlja slijedi da je w ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, a $e^{i\theta} \in F(f)$. □

Teorema 16. Neka je $f \in \mathcal{N}_g^{+\theta}$, $g \in H^\theta$, $g \neq i_\Delta$, i $w \in C$ tako da je $f(z) \neq w$ za svako $z \in \Delta$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:

(i) Postoji $z_0 \in \Delta$ da je $\lim_{n\to\infty} f(g^n(z_0)) = w$;

(ii) Za svako $z \in \Delta$ je $\lim_{n\to\infty} f(g^n(z)) = w$;

(iii) $e^{i\theta} \in F(f)$ i $\bigcup_{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}} C(f, e^{i\theta}, \Delta(e^{i\theta}, \alpha)) = \{w\}$, tj. w je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$.

Dokaz : Kako je $d_h(g^{n-1}(z_0), g^n(z_0)) = c$, $c > 0$ $n \in N$, to c ne zavisi od n, pa dokaz da je (i) $\Leftrightarrow$ (iii) izvodi kao i dokaz teoreme 12 ovog poglavlja, uzimajući u njemu da je familija $\Im = \{f \circ g^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, za niz (z_n) $z_n = g^n(z_0)$, $n \in N$, a $M = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} + c$, $M \in (0,+\infty)$. Dalje, (ii) $\Rightarrow$ (i) je trivijalno. Da važi (iii) $\Rightarrow$ (ii) slijedi iz činjenice da za svako $z \in \Delta$, uzimajući $r > \frac{1}{2}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}$, slijedi da je $g^n(z) \in \Delta_g(+\theta, r)$, $n \in N$, i svojstva da je $e^{i\theta}$ atraktivna tačka za g.

Normalne meromorfne funkcije imaju dobra lokalna granična svojstva (postojanje ugaonih graničnih vrijednosti iz postojanja asimptotskih graničnih vrijednosti), a neke druge klase meromorfnih i holomorfnih funkcija imaju dobra globalna granična svojstva. Najpoznatije od tih klasa su Nevanlinina klasa meromorfnih funkcija na jediničnom disku Δ i Hardijeva klasa holomorfnih funkcija na jediničnom disku Δ.

Definicija 3. Holomorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ pripada Hardijevoj klasi H^p ako je $\sup\limits_{0 \le r < 1} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty$, gdje je p proizvoljan pozitivan realan broj. Oznaka: $f \in H^p$.

Definicija 4. Meromorfna funkcija $f : \Delta \to \hat{C}$ pripada Nevanlininoj klasi BC ako je $\sup\limits_{0 \le r < 1} \int\limits_0^r \frac{1}{t}\left(\iint\limits_{|z|<r} (f^{\#}(z))^2 dxdy \right) dt = \lim\limits_{r \to 1-0} \int\limits_0^r \frac{1}{t}\left(\iint\limits_{|z|<r} (f^{\#}(z))^2 dxdy \right) dt < +\infty$. Oznaka: $f \in BC$.

Sa H^∞ označavamo klasu ograničenih holomorfnih funkcija na jediničnom disku Δ.

Poznato je ([33]) da za pozitivne realne brojeve p i q, ako je $0 < q < p$, važi $H^\infty \subset H^p \subset H^q \subset BC$, gdje su inkluzije prave.

Teorema 17. ([33]) Funkcija koja pripada klasi BC ima ugaone granične vrijednosti skoro svuda na jediničnoj kružnici.

Kako je $H^\infty \subset H^p \subset BC$ za svako $p \in R^+$ to teorema 17 vrijedi i za klase H^∞ i H^p, $p \in R^+$.

O Hardijevim i Nevanlininim klasama napisano je više monografija (pogl. npr. ([10]),([33]),([34]) i ([35]).

3.2. LOKALNA GRANIČNA SVOJSTVA PROIZVOLJNE FUNKCIJE NA JEDINIČNOM DISKU

U ovom poglavlju dokazujemo tvrđenja koja daju neophodan i dovoljan uslov da proizvoljna funkcija definisana na jediničnom krugu $\Delta = \{z \in C \,|\, |z| < 1\}$ kompleksne ravni C ima ugaonu i oriciklićnu (tangentnu) graničnu vrijednost u terminima graničnog skupa i normalnosti funkcije. Pokazuje se da glavnu ulogu u postojanju ovih graničnih vrijednosti ima normalnost funkcije u odnosu na hiperbolički i parabolički ciklični dinamički sistem-kaskadu (polugrupu) koji rađa hiperbolički i parabolički element grupe konformnih automorfizama kruga Δ s privlačećim nepokretnim tačkama na jediničnoj kružnici $\partial\Delta = \{z \in C \,|\, |z| = 1\}$. Za njihove dokaze koriste se rezultati geometrije diskretnih grupa i teorema jedinstvenosti kompleksne analize, a ne koristimo rezultate teorije harmonijske mjere, kako je do sada rađeno u dokazima klasičnih rezultata tog tipa (teorema Lindelefa, teorema Lehto-Virtanena i dr.([8], [12] [13] [14],...).

Neka je

$$\tilde{\Delta}_H(\theta,r) = \bigcup_{a\in[0,1]} D_h\left(ae^{i\theta},r\right), \qquad \tilde{\tilde{\Delta}}_H(\theta,r) = \bigcup_{a\in[-1,0]} D_h\left(ae^{i\theta},r\right)$$

$$\tilde{\Delta}_P(\theta,r) = \bigcup_{a\in[0,+\infty)} D_h\left(\frac{ae^{i\theta}}{a+i},r\right), \qquad \tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r) = \bigcup_{a\in(-\infty,0]} D_h\left(\frac{ae^{i\theta}}{a+i},r\right)$$

Oblasti $\tilde{\Delta}_H(\theta,r)$ i $\tilde{\tilde{\Delta}}_H(\theta,r)$ zvaćemo hipercikličnim oblastima kruga Δ, a oblasti $\tilde{\Delta}_P(\theta,r)$ i $\tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r)$ zvaćemo oricikličnim oblastima kruga Δ.

Lema 1. Za svako $g_a \in H^\theta$, $g_a \neq i$, za koje je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka i za svako *r*, *r>0*, postoji r_1, $r_1>0$ tako da je $\bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r)) \subset \tilde{\Delta}_H(\theta,r) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(o,r_1))$.

Lema 2. Za svako $g_a \in P^\theta$, $g \neq i$, i za svako *r*, *r>0*, postoji r_1, $r_1>0$ tako da je

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r)) \subset \tilde{\Delta}_P(\theta,r) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(o,r_1)), \quad a>0 \qquad \text{i}$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r)) \subset \tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(o,r_1)), \quad a<0.$$

Dokazi lema 1 i 2 se izvode kao i dokazi lema 2 i 4 iz poglavlja 2.4.

Teorema 1. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ proizvoljna funkcija, g_a proizvoljni hiperbolički element grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka i K proizvoljan kompaktan podskup od Δ. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $f \circ g_a^n \underset{K}{=} c, \quad c \in \hat{C}$.

(ii) $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}$.

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Ako je $c \in C$, tada iz (i) slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 = N_1(\varepsilon))(\forall n \geq N_1)(\forall z \in K)\left(\left|(f \circ g_a^n)(z) - c\right| < \varepsilon\right), \tag{1}$$

tj.

$$f\left(\bigcup_{n=N_1}^{\infty} g_a^n(K)\right) \subset \{w \in C \mid |w - c| < \varepsilon\}.$$

Poznato je da za svaki kompaktan podskup K od C (i od Δ) važi $g_a^n \underset{K}{=} e^{i\theta}$ (vidjeti teoremu 3 iz poglavlja 1.2). Znači,

$$(\forall \delta > 0)(\exists N_2 = N_2(\delta))(\forall n \geq N_2)(\forall z \in K)\left(\left|g_a^n(z) - e^{i\theta}\right| < \delta\right), \tag{2}$$

tj.

$$\left(\forall z \in \bigcup_{n=N_2}^{\infty} g_a^n(K)\right)\left(\left|z - e^{i\theta}\right| < \delta\right). \tag{2'}$$

Neka je (z_n) proizvoljni niz iz $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g_a^n(K)$ za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$. Tada iz (2) tj. (2') slijedi

$$(\exists N_3 = N_3((z_n), N_2))(\forall n \geq N_3)\left(z_n \in \bigcup_{k=N_2}^{\infty} g_a^k(K)\right). \tag{3}$$

Ako je $N_1 \leq N_2$, tada je $\bigcup\limits_{n=N_2}^{\infty} g_a^n(K) \subset \bigcup\limits_{n=N_1}^{\infty} g_a^n(K)$, odakle i iz (3) slijedi da je $z_n \in \bigcup\limits_{n=N_1}^{\infty} g_a^n(K)$ za $\forall n \geq N_3$. Otuda i iz (1) dobijamo

$$(\forall n \geq N_3)\left(|f(z_n) - c| < \varepsilon\right) \tag{4}$$

Ako je $N_1 \leq N_2$, tada iz niza (z_n) osim $z_1, \ z_2, \ldots, z_{N_3}$ odbacimo i one članove koji se nalaze u $\bigcup_{k=1}^{N_1} g_a^k(K)$. Njih je konačno mnogo. Znači postoji N_4 takvo da je $z_n \in \bigcup_{n=N_1}^{\infty} g_a^n$ za $\forall n \geq N_4$. Tada ponovo iz (1) dobijamo

$$(\forall n \geq N_4)\left(\left|f(z_n)-c\right| < \varepsilon\right). \tag{5}$$

Znači, iz (4) i (5) dobijamo da je $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$.

Kako smo za proizvoljni niz (z_n) iz $\bigcup_{n=0}^{\infty_1} g_a^k(K)$ dobili da je $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$, to znači da je $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}$.

Ako je $c = \infty \in \hat{C}$, dokaz se sprovodi na isti način, samo što Euklidovu metriku zamijenimo tetivnom metrikom.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neka je $c \in C$ i $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}$. To znači da je $\left(\forall (z_n) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K), \ \lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}\right) \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$, tj. $\lim_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n}} f(z) = c$, tj

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon))\left(\forall z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right)\left(\left|z - e^{i\theta}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(z)-c\right| < \varepsilon\right). \tag{6}$$

Iz (6) dobijamo

$$f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K) \cap \left\{ z \in \Delta \,\middle|\, \left|z - e^{i\theta}\right| < \delta \right\}\right) \subset \left\{ w \in C \,\middle|\, |w - c| < \varepsilon \right\}. \tag{7}$$

Kako $g_a^n \underset{K}{\rightrightarrows} e^{i\theta}$, to za $\delta > 0$ postoji $N = N(\delta)$ takvo da za svako $n \geq N$ i $z \in K$ važi $\left|g_a^n(z) - e^{i\theta}\right| < \delta$, tj.

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} g_a^n(K) \subset \left\{ z \in \Delta \,\middle|\, \left|z - e^{i\theta}\right| < \delta \right\}. \tag{8}$$

Iz (7) i (8) dobijamo

$$f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) \subset \left\{ w \in C \,\middle|\, |w - c| < \varepsilon \right\}, \text{ pa je}$$

$(\forall n \geq N)(\forall z \in K)\left(\left|f(g^n(z)) - c\right| < \varepsilon\right)$. Znači $f \circ g_a^n \underset{K}{\rightrightarrows} c, \quad c \in \hat{C}$.

Ako je $c = \infty$, dokaz se sprovodi na isti način, samo umjesto Euklidove metrike na C treba uzeti tetivnu metriku na sferi $\hat{C}$.

Teorema 2. Neka su $f:\Delta \to \hat{C}$ proizvoljna funkcija i g_a proizvoljni parabolički element grupe P^θ, $g_a \neq i$ i K proizvoljan kompaktan podskup od Δ. Tada su sljedeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $f \circ g_a^n \underset{K}{\Rightarrow} c, \quad c \in \hat{C}$.

(ii) $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}$.

Dokaz teoreme 2 se izvodi na isti način kao i dokaz teoreme 1.

Teorema 3. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ proizvoljna funkcija, g_a proizvoljni hiperbolički element grupe $H^\theta, g_a \neq i$, za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) Tačka $c \in \hat{C}$ je ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $f(e^{i\theta}) = c$.

(ii) $(\forall r \in (0,1)) \quad \left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r))\right) = \{c\}\right)$.

(iii) $(\forall K \subset \Delta) \left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}\right)$, gdje je K je kompaktan podskup od Δ.

(iv) $(\exists r_0 \in (0,1)) \quad (\forall r \in (r_0,1)) \quad \left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r))\right) = \{c\}\right)$.

(v) $(\forall r \in (0,1)) \quad \left(f \circ g_a^n \underset{D_h(0,r)}{\Rightarrow} c\right)$.

(vi) $(\forall K \subset \Delta) \quad \left(f \circ g_a^n \underset{K}{\Rightarrow} c\right)$.

(vii) $(\exists r_0 \in (0,1)) \quad (\forall r \in (r_0,1)) \quad \left(f \circ g_a^n \underset{D_h(0,r)}{\Rightarrow} c\right)$.

Kako za svaki kompakt $K \subset \Delta$ postoji r, $r \in (0,1)$ takvo da je $K \subset D_h(0,r) \subset \overline{D_h(0,r)}$ to teorema 3 neposredno slijedi iz definicije ugaone granične vrijednosti, leme 1 i teoreme 1.

Definicija 1. Ako se unija $\bigcup C\left(f, e^{i\theta}, \tilde{\Delta}_P(\theta,r)\right)$ po svim oricikličnim uglovima $\tilde{\Delta}_P(\theta,r)$, $r>0$, sastoji iz jedinstvene tačke, tu tačku nazivamo gornjom poluoricikličnom graničnom vrijednošću funkcije f u tački $e^{i\theta}$ i označavamo je sa $\tilde{f}(e^{i\theta})$.

Definicija 2. Ako se unija $\bigcup C\left(f,e^{i\theta},\tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r)\right)$ po svim oricikličnim uglovima $\tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r)$, *r>0*, sastoji iz jedinstvene tačke, tu tačku nazivamo donjom poluoricikličnom graničnom vrijednošću funkcije f u tački $e^{i\theta}$ i označavamo je sa $\tilde{\tilde{f}}\left(e^{i\theta}\right)$.

Definicija 3. Ako se unija $\bigcup C\left(f,e^{i\theta},\Delta_P(\theta,r)\right)$ po svim oricikličnim uglovima $\Delta_P(\theta,r)$, *r>0*, sastoji iz jedinstvene tačke, tu tačku nazivamo oricikličnom graničnom vrijednošću funkcije f u tački $e^{i\theta}$ i označavamo je sa $f_O\left(e^{i\theta}\right)$.

Posljedica 1. Da bi proizvoljna funkcija $f:\Delta\to\hat{C}$ imala ugaonu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ neophodno je da ona bude normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka.

Posljedica 1 neposredno se dobija iz teoreme 3.

Postoje primjeri (holomorfnih) funkcija koji pokazuju da uslovi iz posljedice 1 nijesu dovoljni.

Pošto je normalnost meromorfnih funkcija u krugu Δ u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu (kaskadu) $\{g_a^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka, ekvivalentna normalnosti te funkcije u odnosu na polugrupu $H^{+\theta}=\{g_a \mid g_a\in H^\theta, a\in(0,1)\}$, to iz posljedice 1 dobijamo da meromorfna funkcija u krugu Δ koja ima ugaonu graničnu vrijednost mora biti normalna u odnosu na polugrupu $H^{+\theta}$.

Iz teoreme 1 poglavlja 2.5 i posljedice 1 ovog poglavlja dobijamo sljedeće tvrđenje.

Posljedica 2. Ako meromorfna funkcija f na krugu Δ ima u tački $e^{i\theta}$ ugaonu graničnu vrijednost, tada za svako *r*, *r>0*, postoji konstanta $C=C(f,r)$, $0<C<+\infty$, takva da je $\sup\limits_{z\in\Delta_H(\theta,r)}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z)\le C<+\infty$.

Iz teoreme 17 poglavlja 3.1 i posljedica 1 i 2 ovog poglavlja dobijamo sljedeća tvrđenja.

Posljedica 3. Za svako $f\in BC$ postoji skup $E=E(f)$, $E\subset\partial\Delta$, Lebegove mjere 2π takav da je $f\in\bigcap\limits_{e^{i\theta}\in E}N_g^{+\theta}$.

Posljedica 3 pokazuje da za meromorfne funkcije sa ograničenom Nevanlininom karakteristikom važi tvrđenje tipa teoreme Lindelef-Lehta-Virtanena, tj. da iz postojanja asimptotskih graničnih vrijednosti slijedi postojanje ugaonih graničnih vrijednosti.

Posljedica 4. Za svako $f \in BC$ postoji skup $E = E(f)$, $E \subset \partial\Delta$, Lebegove mjere 2π takav da za svako $\tilde{\Delta}_H(\theta,r)$, *r>0*, postoji konstanta $C = C(f,\theta,r)$ tako da je $\sup_{z\in\tilde{\Delta}_H(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) f^{\#}(z) \le C < +\infty$.

Teorema 4. Za proizvoljnu funkciju $f:\Delta \to \hat{C}$ postoji oriciklična granična vrijednost $f_O\left(e^{i\theta}\right)$ ako i samo ako je ispunjeno:

a) postoje gornja poluoriciklična granična vrijednost $\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right)$ i postoji donja poluoriciklična granična vrijednost $\tilde{\tilde{f}}\left(e^{i\theta}\right)$ i

b) $\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) = \tilde{\tilde{f}}\left(e^{i\theta}\right)$

Tada je $f_O\left(e^{i\theta}\right) = \tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) = \tilde{\tilde{f}}\left(e^{i\theta}\right)$.

Kako je $\Delta_P(\theta,r) = \tilde{\Delta}_P(\theta,r) \cup \tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r)$, *r>0,* teorema 4 neposredno slijedi iz definicija 1, 2 i 3.

Teorema 5. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ proizvoljna funkcija, g_a proizvoljni parabolički element grupe P^θ, $g_a \neq i$, za koji je $a>0$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna.

(i) Tačka $c \in \hat{C}$ je gornja poluoriciklična granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) = c$.

(ii) $(\forall r \in (0,1))$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r))\right) = \{c\}\right)$.

(iii) $(\forall K \subset \Delta)$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K)\right) = \{c\}\right)$,gdje je K kompaktan podskup od Δ.

(iv) $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall r \in (r_0,1))$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r))\right) = \{c\}\right)$.

(v) $(\forall r \in (0,1))$ $\left(f \circ g_a^n \underset{D_h(0,r)}{\rightrightarrows} c\right)$.

(vi) $(\forall K \subset \Delta)$ $\left(f \circ g_a^n \underset{K}{\rightrightarrows} c\right)$.

(vii) $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall r \in (r_0,1))$ $\left(f \circ g_a^n \underset{D_h(0,r)}{\rightrightarrows} c\right)$.

Teorema 6. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ proizvoljna funkcija, g_a proizvoljni parabolički element grupe P^θ, $g_a \neq i$, za koji je $a<0$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna.

(i) Tačka $c \in \hat{C}$ je donja poluoriciklična granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $\underset{\approx}{f}\left(e^{i\theta}\right) = c$.

(ii) $(\forall r \in (0,1))$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r)) \right) = \{c\} \right)$.

(iii) $(\forall K \subset \Delta)$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(K) \right) = \{c\} \right)$, gdje je K kompaktan podskup od Δ.

(iv) $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall r \in (r_0,1))$ $\left(C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=0}^{\infty} g_a^n(D_h(0,r)) \right) = \{c\} \right)$.

(v) $(\forall r \in (0,1))$ $\left(f \circ g_a^n \underset{\mathrm{D_h}(0,r)}{\overline{\overline{\quad}}} c \right)$.

(vi) $(\forall K \subset \Delta)$ $\left(f \circ g_a^n \underset{\mathrm{K}}{=} c \right)$.

(vii) $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall r \in (r_0,1))$ $\left(f \circ g_a^n \underset{\mathrm{D_h}(0,r)}{\overline{\overline{\quad}}} c \right)$.

Kako za svaki kompakt $K \subset \Delta$ postoji r, $r \in (0,1)$, takvo da je $K \subset D_h(0,r) \subset \overline{D_h(0,r)}$, to teorema 5 i teorema 6 neposredno slijede iz definicija 1 i 2, leme 2 i teoreme 2.

Koristeći teoreme 4, 5 i 6 ovog poglavlja, dobijamo sljedeće rezultate.

Posljedica 5. Da bi proizvoljna funkcija $f:\Delta \to \hat{C}$ imala gornju poluoricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ neophodno je da ona bude normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu (kaskadu) $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a>0$.

Posljedica 6. Da bi proizvoljna funkcija $f:\Delta \to \hat{C}$ imala donju poluoricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ neophodno je da ona bude normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu (kaskadu) $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a<0$.

Posljedica 7. Da bi proizvoljna funkcija $f:\Delta \to \hat{C}$ imala oricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$ neophodno je da ona bude normalna u odnosu na cikličnu paraboličku podgrupu (kaskadu) $\{g_a^n \mid n \in Z\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe $P^\theta, a \neq 0$.

Posljedica 8. Ako meromorfna funkcija f na krugu Δ ima gornju poluoricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$, tada za svako *r, r>0,* postoji konstanta $C = C(f,r),\ 0 < C < +\infty$ tako da je $\sup\limits_{z\in\bar{\Delta}_P(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) f^{\#}(z) \leq C < +\infty$.

Posljedica 9. Ako meromorfna funkcija f na krugu Δ ima donju poluoricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$, tada za svako *r, r>0,* postoji konstanta $C = C(f,r),\ 0 < C < +\infty$ tako da je $\sup\limits_{z\in\bar{\bar{\Delta}}_P(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) f^{\#}(z) \leq C < +\infty$.

Posljedica 10. Ako meromorfna funkcija f na krugu Δ ima oricikličnu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$, tada za svako *r, r>0,* postoji konstanta $C = C(f,r),\ 0 < C < +\infty$ tako da je $\sup\limits_{z\in\Delta_P(\theta,r)} \left(1-|z|^2\right) f^{\#}(z) \leq C < +\infty$.

3.3. LOKALNA GRANIČNA SVOJSTVA MEROMORFNE FUNKCIJE NA JEDINIČNOM DISKU-TEOREME TIPA LINDELEFA-LEHTA-VIRTANENA I BAGEMIL-ZAJDELA

Teorema 1. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka. Ako funkcija f ima asimptotsku graničnu vrijednost $c \in \hat{C}$ u tački $e^{i\theta}$ duž krive γ, koja leži u nekoj oblasti $\tilde{\Delta}_H(\theta,r)$, *r>0* , tada *f* ima ugaonu graničnu vrijednost u tački $e^{i\theta}$, tj. $f\left(e^{i\theta}\right) = c$.

Dokaz: Neka je $0 < r < r_1 < 1$ i $\gamma \subset \tilde{\Delta}_H(\theta,r)$. Skup $\gamma \cap g_a^n\left(D_{r_1} \setminus D_r\right)$ sastoji se iz dvije krive, gdje je $D_r = \{z \in C \mid |z| < r\}$, $D_{r_1} = \{z \in C \mid |z| < r_1\}$. Sa γ_n označimo onu od tih krivih koja je bliža tački $e^{i\theta}$ i neka je $\Gamma_n = g_a^{-n}(\gamma_n)$. Pošto je funkcija f normalna na Δ u odnosu na $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, tada za $\overline{D}_{r_2} = \{z \in C \mid |z| \leq r_2\}$, $r_1 \leq r_2 < 1$, postoji podniz $\left(f \circ g_a^{n_k}\right)$ takav da $f \circ g_a^{n_k} \underset{\overline{D}_{r_2}}{\rightrightarrows} \varphi$, gdje je φ meromorfna funkcija na $\overline{D}_{r_2}$

Za svako $p \in N$ možemo izabrati podniz $\left(z_{n_{k_m}}^p\right)$ takav da je $\left(z_{n_{k_m}}^p\right) \subset \Gamma_{n_{k_m}}$ i $\lim\limits_{m\to\infty} z_{n_{k_m}}^p = z_0^p$. Posmatrajmo podniz $\left(f \circ g_a^{n_{k_m}}\right)$ niza $\left(f \circ g_a^{n_k}\right)$. Tada $f \circ g_a^{n_{k_m}} \underset{\overline{D}_{r_2}}{\rightrightarrows} \varphi$.

Dokažimo da je $\varphi(z_0^p)=c$ za svako $p\in N$. Za proizvoljno $\varepsilon>0$ pokažimo da je $|\varphi(z_0^p)-c|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}|\varphi(z_0^p)-c| &= \left|\varphi(z_0^p)-\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)+f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)-f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)+\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)-c\right|\le \\ &\le\left|\varphi(z_0^p)-\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)\right|+\left|\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)-f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)\right|+\left|f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)-c\right|\end{aligned} \tag{1}$$

Kako je φ neprekidna funkcija i $\lim\limits_{m\to\infty} z_{n_{k_m}}^p=z_0^p$, to za $\frac{\varepsilon}{3}>0$, $\exists M_2$ tako da za $\forall m\ge M_2$ važi

$$\left|\varphi(z_0^p)-\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Kako je $f\circ g_a^{n_k}\underset{\overline{D}_{r_2}}{\Rightarrow}\varphi$, to za $\frac{\varepsilon}{3}>0$, $\exists M_1$ tako da za $\forall m\ge M_1$, $\forall z\in\overline{D}_{r_2}$, $\left|f\circ g_a^{n_{k_m}}(z)-\varphi(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Pošto je $z_{n_{k_m}}^p\in\overline{D}_{r_2}$ za svako $p\in N$,to stavljajući $z=z_{n_{k_m}}^p$, dobijamo

$$\left|f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)-\varphi\left(z_{n_{k_m}}^p\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Dalje je $g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_{k_m}}^p\right)=w_{n_{k_m}}^p\in\gamma_{n_{k_m}}\subset\gamma$ i $\lim\limits_{m\to\infty} w_{n_{k_m}}^p=e^{i\theta}\in\gamma$, jer je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka za g_a. Tada, pošto je c asimptotska granična vrijednost funkcije *f*, slijedi da za $\frac{\varepsilon}{3}>0$, $\exists M_3$ tako da za svako $m\ge M_3$ važi

$$\left|f\left(w_{n_{k_m}}^p\right)-c\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Iz (2), (3), (4) i (1) dobijamo $|\varphi(z_0^p)-c|<\varepsilon$, za svako $\varepsilon>0$, tj. $\varphi(z_0^p)=c$.
Kako je $(z_0^p)\subset\overline{D}_{r_1}$, $p\in N$ to niz (z_0^p) ima u $\overline{D}_{r_1}\subset D_{r_2}$ graničnu vrijednost. Tada iz teoreme jedinstvenosti za meromorfnu funkciju dobijamo da je $\varphi(z)=c=const$ na D_{r_2}, pa je i $\varphi(z)=c=const$ na $\overline{D}_{r_2}$. Dokažimo da je tada i

$$f\circ g_a^n\underset{\overline{D}_r}{\Rightarrow}c \tag{5}$$

Pretpostavimo da (5) ne važi, tj.

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall K\in N)(\exists n_k\in N)\left(\exists z_{n_k}\subset\overline{D}_{r_2}\right)\left(\left|f\circ g_a^{n_{k_m}}\left(z_{n_k}\right)-c\right|\ge\varepsilon\right)$$

Tada posmatrajmo niz $f\circ g_a^{n_k}$. Kako je $\{f\circ g_a^n\}$ normalna familija na Δ, tada niz $f\circ g_a^{n_k}$ ima podniz $f\circ g_a^{n_{k_m}}$ za koji važi $f\circ g_a^{n_{k_m}} \underset{\overline{D}_{r_1}}{\Longrightarrow} c$, pa imamo kontradikciju. Dakle, važi $f\circ g_a^n \underset{\overline{D}_{r_2}}{\Longrightarrow} c$. Tada iz teoreme 3 ((vii)) poglavlja 3.2 dobijamo da je c ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $f(e^{i\theta})=c$.□

Teorema 2. Neka je $f:\Delta\to\hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a>0$. Ako funkcija f ima asimptotsku graničnu vrijednost $c\in\hat{C}$ u tački $e^{i\theta}$ duž krive γ, koja leži u nekoj oblasti $\tilde{\Delta}_P(\theta,r)$, $r>0$, tada f ima u tački $e^{i\theta}$ gornju poluoriciklično graničnu vrijednost $c\in\hat{C}$, tj. $\tilde{f}(e^{i\theta})=c$.

Teorema 3. Neka je $f:\Delta\to\hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a<0$. Ako funkcija f ima asimptotsku graničnu vrijednost $c\in\hat{C}$ u tački $e^{i\theta}$ duž krive γ, koja leži u nekoj oblasti $\approx{\Delta}_P(\theta,r)$, $r>0$, tada f ima u tački $e^{i\theta}$ donju poluoricikličnu graničnu vrijednost $c\in\hat{C}$, tj. $\approx{f}(e^{i\theta})=c$.

Kako za $g_a\in P^\theta$, $a\neq 0$, imamo topologiju kao i za $g_a\in H^\theta$, $a\neq 0$, a za meromorfnu funkciju važi teorema jedinstvenosti , to se dokazi teorema 2 i 3 izvode kao i dokaz teoreme 1.

Iz teoreme 4 poglavlja 3.2 i teorema 2 i 3 ovog poglavlja slijedi sljedeće tvrđenje.

Teorema 4. Ako je $f:\Delta\to\hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku podgrupu $\{g_a^n \mid n\in Z\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a\neq 0$, i ako postoje krive γ_1 i γ_2 takve da je $\gamma_1\subset\tilde{\Delta}_P(\theta,r)$, $r>0$, $\gamma_2\subset\approx{\Delta}_P(\theta,r_1)$, $r_1>0$ i f ima istu asimptotsku graničnu vrijednost duž krivih γ_1 i γ_2, koja je jednaka $c\in\hat{C}$, tada funkcija f ima u tački $e^{i\theta}$ oricikličnu graničnu vrijednost c, tj. $f_O(e^{i\theta})=c$.

Teorema 5. Ako je $f:\Delta\to\hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n\in N\cup\{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka, tada za svaki niz $(z_n)\subset\tilde{\Delta}_H(\theta,r)$, $r>0$, za koji je $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$

i $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c \in \hat{C}$, važi da je za svaki niz (x_n), $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ za koji je $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n) \subset \widetilde{\Delta}_H(\theta, r)$ za neko r, $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n)\right) = \{c\}$.

Pomoću teoreme 5 i teoreme 1 moguće je dobiti sljedeće tvrđenje tipa teoreme Bagemil-Zajdela.

Teorema 6. Neka je $f: \Delta \to \hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu hiperboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe H^θ za koji je $e^{i\theta}$ privlačeća tačka i neka je niz $(z_n) \subset \widetilde{\Delta}_H(\theta, r)$ za neko r takav da je

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$,
2) $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$, $c \in \hat{C}$,
3) $\lim_{n\to\infty} d_h(z_n, z_{n+1}) = 0$.

Tada je c ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $f(e^{i\theta}) = c$.

Dokaz: Neka je $x_n = 2d_h(z_n, z_{n+1})$. Tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Posmatrajmo $D_h(z_n, x_n) = \{z \in \Delta \mid d_h(z, z_n) < x_n\}$, tada iz teoreme 5 slijedi da je $C\left(f, e^{i\theta}, \bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n)\right) = \{c\}$. Kako je kriva $\gamma = \overline{z_1 z_2 \ldots z_n e^{i\theta}}$ podskup skupa $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n)$ to funkcija f ima asimptotsku graničnu vrijednost $c \in \hat{C}$ u tački $e^{i\theta}$ duž krive γ koja leži u $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n)$. Pošto je moguće odabrati r tako da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_h(z_n, x_n) \subset \widetilde{\Delta}_H(\theta, r)$, to je c asimptotska granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$ duž krive γ koja leži u $\widetilde{\Delta}_H(\theta, r)$. Tada iz teoreme 1 ovog poglavlja slijedi da je c ugaona granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $f(e^{i\theta}) = c$.

Teorema 7. Neka je $f: \Delta \to \hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a>0$, i neka je (z_n) niz takav da je $(z_n) \subset \widetilde{\Delta}_P(\theta, r)$ za neko r i koji ispunjava uslove:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$,
2) $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$, $c \in \hat{C}$,
3) $\lim_{n\to\infty} d_h(z_n, z_{n+1}) = 0$.

Tada je c gornja poluoriciklična granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = c$.

Teorema 8. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku polugrupu $\{g_a^n \mid n \in N \cup \{0\}\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ,$a<0$, i neka je (z_n) niz takav da je $(z_n) \subset \tilde{\tilde{\Delta}}_P(\theta,r)$ za neko r i za koji je ispunjeno:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c, \quad c \in \hat{C}$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n, z_{n+1}) = 0$.

Tada je c donja poluoriciklična granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $\tilde{\tilde{f}}(e^{i\theta}) = c$.

Teorema 9. Neka je $f:\Delta \to \hat{C}$ meromorfna funkcija normalna u odnosu na cikličnu paraboličku podgrupu $\{g_a^n \mid n \in Z\}$, gdje je g_a proizvoljni elemenat grupe P^θ, $a \neq 0$, i neka je (z_n) niz takav da je $(z_n) \subset \Delta_P(\theta,r)$ za neko r i za koji je ispunjeno:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{i\theta}$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c, \quad c \in \hat{C}$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} d_h(z_n, z_{n+1}) = 0$.

Tada je c oriciklična granična vrijednost funkcije f u tački $e^{i\theta}$, tj. $f_O(e^{i\theta}) = c$.

Dokazi teorema 7, 8 i 9 izvode se analogno kao dokaz teoreme 6 i zato ih izostavljamo.

LITERATURA

[1] *V. Ahlfors*, Complex Analysis, McGrow-Hill, New York,1979.

[2] *F. Bagemihl*, *W. Seidel*, Sequential and continuous limits of merhomorphic functions, Annales Acad. Sci. Fennice, se. A, I Math., 280 (1960).

[3] *A.F. Berdon*, The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag, 1983 (ruski prevod 1986).

[4] *C. Carateodory*, Theory of Functions of a Complex variable, v. I, New York, 1964.

[5] *Б. А. Фукс, Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений, Москва-Ленинград 1952.*

[6] *J.B. Garnett*, Bounded analytic functions, Academic press, 1981 (ruski prevod 1984).

[7] *В.И. Гаврилов, О распределении значений меромофных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Мат. Сбор, т. 67 (1965), 408- 427.*

[8] *В.И. Гаврилов, Е.Ф.Буркова, О мерморфных функциях, порождающих нормальные семейства на подгрупах автоморфизмов единичного круга, Доклады АН. СССР, т.* 245 (1979), 1293-1296.

[9] *Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва, 1952.*

[10] *W.K. Hayman*, Mermorphic functions, Oxford, 1964 (ruski prevod 1966.).

[11] *М.А. Евграфов, Аналитические функции, Из. во Наука, Москва, 1986.*

[12] *O. Lehto, K.I. Virtanen,* Boundary behaviour and normal meromorphic functions, Acta Math., 97 (1957), 47-65.

[13] *Г.Д. Лёвшина, О мерморфных функциях, нормальных и хипернормальных относительно подгрупп конформных автоморфизмов единичного круга, АН.СССР, т. 252 (1980),438-440.*

[14] *А. Ловатор, Граничное поведение аналитических функций, Математическии анализ, т. 10, Москва*, (1973), 99-259.

[15] *P. Montel*, Leçons sur les familles normales, des fonctions analytiques et leurs applications, Paris, 1927 (ruski prevod 1936).

[16] *K. Noshiro*, Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit circle, I.Fac. Sci. Hokkado Univ., 7 (1983), 149-159.

[17] *A. Ostrowsky*, Uber folugen analytischer funktionen und einge vershärungen des Picardschen santez, Math. Zeits., 24 (1925), 215-258.

[18] *Б.В. Шабат*, Введение в комплексный анализ, част I, Наука, Москва, 1985.

[19] *J.L. Schiff*, Normal Families, Springer-Verlag, 1993.

[20] *K. Yoshida*, On a class of mermorphic functions, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, ser. 3, (1934), 227-235.

[21] *Ch. Pommerenke*, Normal functions, Poc. NRC. Conf. on clas. Function Theory, Naval Research Laboratory, Washingotn, D.C. (1970) 191-212.

[22] *В.И. Гаврилов*, О множестве угловных граничных значений нормальных меромофных функций, А. Н. СССР, 141, 3, 1961, 525-526.

[23] *В.И. Гаврилов*, Меромофные в единичном круге функции с заданным растом сферической производной, Матем. Сбор., 71, 3, 1966, 386-404.

[24] К. Носиро, Предельные множества, Из-во "Мир", Москва, 1963.

[25] Э. Коллингвуд, А. Ловатор, Теория предельных множеств, Из-во "Мир", Москва, 1971.

[26] S. Yamashita, Functions of uniformly bounded characteristic, Annales Acad. Sci. Fennice, Seria A1. Math., 7 (1982), 349-367.

[27] N. Labudović, Ž. Pavićević, An integral Criterion for normal and Meromorphic and Bloch functions, Mathematica Montisnigri, v. V, 1995, 65-79.

[28] Ž. Pavićević, Meromorphic functions generating normal families in an arbitrary open subset of the unit disk, Now Zeland Journal of Math,. v. 28, No 1, 1999, 89-106.

[29] Ž. Pavićević, Two properties of Bloch functions, Italian Journal of Pure and Applied Math., No 7, 2000, 167-170.

[30] Ž. Pavićević, J. Šušić, The normality of meromorphic functions with respect to the hyperbolic cyclic groups and hyperbolic cyclic semigroups, Mathematica Montisnigri, v. XIII, 2001, 1-11.

[31] J. Šušić, Normalne funkcije na grupama Mebijusovih transformacija u R^2, magistarski rad, Podgorica, 1999.

[32] J. Šušić, Boundary properties of meromorphic functions which are normal with respect to the semigroups by some element of a hiperbolic group, Mathematica Montisnigri, v. XIV, 2002, 1-11.

[33] И.И. Привалов, Граничние свойства аналитических функции, Изд.2-е, М.-.Л, 1950.

[34] P.L. Duren, Theory of H^p spaces, Pure and Appl. Math. 38, Academic Press, New York, 1970.

[35] J. B. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

SUMMARY

Theory of normal families of functions plays very important role in the Function theory. Normal meromorphic functions were firstly studied by K. Yosida ([20]) and K. Noshiro ([16]). Results of Lindelf ([9]and [11]), O. Lehto and K.V. Virtanen ([12]) show that bounded holomorphic functions which are proper subset of the set of normal holomorphic functions as well as normal meromorphic functions have good boundary properties themselves. The results obtained in motivated further studying of normal meromorphic functions. Numerous results dealing with this subject permitted V.I. Gavrilov ([8]) to investigate the normality of meromorphic functions on (hyperbolic and parabolic) subgroups of the group of all conformal automorphisms of the open unit disk. Namely, it is shown that these meromorphic functions constitute wider classes than already examined classes of normal meromorphic functions by O. Lehto and K.V. Virtanen, and that functions from these classes have the same properties as meromorphic functions which are normal with respect to the group of all conformal automorphisms of the open unit disk.

In this dissertation we investigate boundary properties of an arbitrary meromorphic function defined on the open unit disk Δ of the complex plane. In Chapter 3 we prove the assertions which give necessary and sufficient conditions for an arbitrary meromorphic function on Δ to have an angular and oricyclic boundary value in terms of the cluster set and the normality of a function. The main role for the existence of these boundary values has the normality of meromorphic functions with respect to the hyperbolic and parabolic dynamical system (cascade)-a semigroup which is generated by a hyperbolic or parabolic element of the group of all conformal automorphisms of the disk Δ with the attractive point in the unit circle. In the proofs we use results of the Theory of the geometry of discretes groups and the uniqueness theorem of the complex analysis, and we not use the Theory of harmonic measures the so far used in the proofs of the corresponding classical results for holomorphic and meromorphic functions (Lindelo 's theorem, Lehto--Virtanen's theorem and Gavrilov's theorems).

In Chapter I we give preliminary notations, definitions and results related to the Theory of Mobius transformations and the hyperbolic geometry.

In Section 2.4 we show that the normality of a meromorphic functions with respect to the hyperbolic (parabolic) dynamical system-cascade that constitutes a cyclic group which is generated by an element of hyperbolic (parabolic) group, implies the normality of this function with respect to the whole hyperbolic (parabolic) group. This result has motivated our further investigations dealing with the examination of the influence of algebraic, analytic and geometric groups structure, as well as in the examination of the influence of analytic and geometric structure of meromorphic functions on its normality and boundary properties.

Results obtained in Section 2.5 show that the meromorphic functions which are normal with respect to any hyperbolic (parabolic) dynamical system-cascade-semigroup which is generated by some element of hyperbolic (parabolic) group, constitute wider classes than from the so far investigated classes of normal meromorphic functions. It is proved that for functions from these classes are valid theorems of the type Lindelćf-Lehto-Virtanen and the type Baghemil-Seidel related to the angular and oricyclic

boundary values. The proofs of these results are based on the normality of these functions with respect to the hyperbolic and parabolic semigroups.

We pointed out that results from Section 3.2 show that an arbitrary function that has the angular boundary value at a point $e^{i\theta}$ must be normal with respect to the cyclic hyperbolic semigroup which is generated by some element of the group of all conformal automorphisms of the disk Δ whose $e^{i\theta}$ the attractive point. As an application, we obtain the assertion which consists in the fact that for meromorphic functions from the Nevanlinna class as well as for holomorphic functions from Hardy class are valid theorems of the type Lindelćf-Lehto-Virtanen. It follows from this result the estimation $f^{\#}(z) = |f'(z)|\left(1+|f'(z)|^2\right)^{-1} = O\left(\left(1-|z|^2\right)^{-1}\right)$ concerning to the spherical derivative on hyperbolic domains.

In Section 3.3 we prove that from the fact on the existence of the asymptotic boundary value follows the existence of the oricyclic boundary value.

We draw attention that many results concerning the boundary behaviour of functions have locally character. They may be obtained owing to the fact that cyclic semigroups are embedded in the cyclic hyperbolic groups, and these are embedded in the group of conformal automorphisms of the disk Δ which "properly functioning" within the hyperbolic geometry of the open unit disk.

PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Jela Šušić

Godina rođenja 1972

E-mail jela@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore

Prirodno matematički fakultet

Naslov doktorske disertacije

Dinamički sistemi i granična svojstva funkcija

Prevod naslova na engleski jezik

Dynamic systems and boundary properties of functions

Datum odbrane oktobar 2002

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci[1]

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

[1] Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Dynamic systems and boundary properties of functions

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Dr Žarko Pavićević, red.prof UCG (mentor)
Dr V.I.Gavrilov, prof. MGU "M.V.Lomonosov"
Dr Miodrag Perović, red.prof UCG
Dr Milutin Obradović, red. prof. Univerziteta u Beogradu
Dr Romeo Meštrović, doc. UCG

Sažetak*

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

In this dissertation we investigate boundary properties of an arbitary meromorphic function defined on the open unite disk of the complex plane. It is proved that the assertions which give necessary and sufficient conditions for an arbitary meromorphic function on the unit disk to have an angular and oricyclic boundary value in terms of the cluster set and the normality of a function. The main role for the existence of these boundary values has the normality of meromorphic function with respect to the hyperbolic and parabolic dynamical system a semigroup which is generated by a hyperbolic or parabolic element of the group of all conformal automorphisms of the disk with the attractive point in the unit circle.

Ključne riječi dinami ki sistem, grani na svojstva funkcija

Ključne riječi na engleskom jeziku Dynamic systems, boundary properties of functions

Naučna oblast/uža naučna oblast

matemati ka analiza

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

mathematical analysis

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Dinami ki sistemi i grani na svojstva funkcija

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commmons), za koju sam se odlučio/la[1].

- Autorstvo
- Autorstvo – bez prerada
- Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
- Autorstvo – nekomercijalno
- ■ Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
- Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

J Šušić

u Podgorici, 9.01.2020g.

[1] Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)