



**UNIVERZITET „VELJKO VLAHOVIĆ”  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET  
TITOGRAD**

---

**Mr LJUBIŠA STANKOVIĆ**

**MODIFIKOVANI METOD NAJMANJIH KVADRATA  
I NJEGOVA PRIMJENA NA PROBLEME DIFRAKCIJE I  
TALASOVODA SLOŽENOG POPREČNOG PRESJEKA**

**– doktorska teza –**

**Titograd, aprila 1988. godine**

(V) = 52xMx

519.654:621.372.82(043.3)



Mm IV 395

8951

Ideju da se posvetim proučavanju ovih problema dao je mentor prof. dr. Svetozar Jovičević čija je dragocjena i svesrdna pomoć pratila izradu teze. Osim toga profesoru Jovičeviću dugujem zahvalnost na stalnom podsticajnom djelovanju prilikom rada na tezi kao i sugestijama prilikom njenog završnog oblikovanja.

Želim da zahvalim i Radosavu Puzoviću na pomoći pri računarskoj, kao i Duški Jeknić i Stevanu Stevanoviću pri tehničkoj obradi teze.

Titograd, aprila 1988.

LJ. Stanković

## S A D R Ź A J

1. UVOD	.....1
2. PREGLED NUMERIČKIH METODA	.....6
3. RAZVOJ GRANIČNIH USLOVA PO BAZNIM FUNKCIJAMA METODOM NAJMANJIH KVADRATA	.....14
3.1 TEORIJSKA OSNOVA	.....16
3.2 PRIMJENA U ELEKTROSTATICI	.....23
3.3 ODREĐIVANJE RASPODJELE VREMENSKI PROMJENLJIVOG POLJA	.....29
3.4 ANALIZA TALASOVODA	.....36
3.4.1 Pregled teorije	.....36
3.4.2 Primjena metoda najmanjih kvadrata na analizu talasovoda	.....41
3.4.3 Numerički rezultati	.....42
3.5 ZAKLJUČAK	.....57
4. RAZVOJ GRANIČNIH USLOVA PO BAZNIM FUNKCIJAMA KORISTEĆI FFT ALGORITME	.....58
4.1 TEORIJSKA RAZMATRANJA	.....59
4.2 PRIMJENA MODIFIKOVANOG METODA	.....67
4.2.1 Difrakcija elektromagnetnih talasa sa periodičnih površina	.....67
4.2.1.1 Teorijski osvrt na difrakciju sa periodičnih struktura	.....68
4.2.1.2 Modifikovani metod u problemima difrakcije	.....70
4.2.1.3 Numerički rezultati	.....72
4.2.1.4 Problemi difrakcije sa otvorenih periodičnih struktura	.....78
4.2.2 Analiza talasovoda složenog poprečnog presjeka primjenom modifikovanog metoda	.....85
4.2.2.1 Eliptični talasovod sa urezom	.....85
4.2.2.2 N-to ugao ni talasovod	.....91
4.2.2.3 Pravougaoni talasovod sa urezom	.....92
4.5 ZAKLJUČAK	.....97
5. O SINTEZI TALASOVODA SLOŽENOG POPREČNOG PRESJEKA	.....98
5.1 TEORIJSKA OSNOVA SINTEZE	.....98
5.2 NUMERIČKI REZULTATI	...102
6. ZAKLJUČAK	...105
7. LITERATURA	...107
8. PROGRAMI	...112



## ABSTRACT

The wider application of microwave elements requires more complex shapes. This rises the necessity of reliable and adequate methods for their analysis and synthesis. Although a large variety of numerical methods is available (a survey of these methods is given in the first chapter of this work) a further research of more sophisticated methods still remains an important task.

This work demonstrates the applicability of boundary condition expansion on basis functions using least square method, which is becoming popular in the last decade. It has been shown that the method, developed in the microwave domain, can effectively be used in other areas of electrical engineering, where it has not been used yet (electrostatics, eddy currents). The particular attention has been paid to the applicability of the method in the analysis of the complex cross-section waveguides. Some cross-sections different from those usually used ( $E$  and  $H$  waveguides) has been studied. It appears that some of them, such as round ridge waveguide, has better performances than the commonly used shapes. Besides, their practical realization seems to be less complicated.

In the second part of the work the modification of the least square boundary method, using the Fast Fourier Transform (FFT), has been introduced. Two possible variants of this modification has been offered, both of them enabling the

very substantial saving in computation time, which is due to the advantages of FFT algorithms. This numerical approach has been applied to the diffraction of electromagnetic waves from some open and closed periodic structures. The diffracted field has been represented in the Rayleigh's form, which produced very accurate results even in deep structures, for which the Rayleigh's form is usually believed inadequate. The new numerical method has been applied to the waveguide analysis. For all studied shapes, from classic elliptical to the more complex forms such as elliptical with round ridge, n-gonal and rectangular ones with different ridges, the method has been found as a very accurate and effective. Some of those complex forms offer good advantages in comparison with classical ones.

The work also offers an approach to the synthesis of waveguide with a given cut-off frequency and outer dimensions. In such a way several cross-sections have been found and also the comparison of their attenuation has been performed. The work also points out the further ways of the waveguide synthesis.

The numerical method developed here has more general significance, since it can be easily transferred to the other classes of differential equations not only in electromagnetics but also in other fields of physics and engineering.

## 1. U V O D

U radu je izvedena modifikacija metoda najmanjih kvadrata koristeći algoritme brze Fourierove transformacije (FFT algoritmi). Koristeći metod najmanjih kvadrata i njegovu modifikaciju izvršena je analiza talasovoda složenog poprečnog presjeka. Primjenljivost metoda je demonstrirana i na nekim drugim elektromagnetnim problemima.

Današnje vrijeme je okarakterisano značajnim i veoma brzim napredkom u svim oblastima nauke i tehnologije, a posebno elektronike koja postaje obilježje doba u kome živimo. U razvoju elektronike bitno mjesto zauzimaju mikrotalasne strukture, čija primjena je sve šira posebno sa osvajanjem novih područja primjene elektromagnetnih talasa. Uporedo sa razvojem primjene mikrotalasnih elemenata postavlja se i zadatak proširenja širokopojasnosti, smanjenja težine i dimenzija elemenata posebno za rad u nestacionarnim uslovima. Ti zahtjevi vode ka sve značajnijem uslođjavanju mikrotalasnih elemenata, a samim tim i ka izgradnji talasovoda i ostalih struktura koje se karakterišu složenim graničnim površinama. Samim tim i pred teorijom se postavlja zadatak iznalaženja efikasnih i preciznih metoda koji će dati adekvatan model mikrotalasnih elemenata i

omogućiti njihovu fizičku i kvantitativnu analizu.

Bez obzira na to što je objavljeno već dosta radova posvećenih teorijskom i eksperimentalnom ispitivanju talasovoda i ostalih elemenata sa složenim oblikom graničnih površina, rastuća potreba za mikrotalasnim elementima zahtijeva dalji razvoj i traži nove puteve rješavanja elektromagnetnih problema vezanih za određivanje polja u elementima sa složenom konfiguracijom.

U okviru mikrotalasnih elemenata sa složenim poprečnim presjekom najznačajnije mjesto zauzimaju talasovodi dobijeni deformacijom pravougaonih. Najčešće su analizirani  $\Pi$  i H talasovodi (lit. /1/-/5/) koji se zbog svojih karakteristika već i komercijalno koriste za proizvodnju kompleta mikrotalasnih elemenata (firme Phillips, Litton) kao što su: širokopojasni oscilatori, cirkulatori, usmjereni filtri, attenuatori, koaksijalno-talasovodni prelazi itd. Značajan komercijalni efekat pri primjeni ovih elemenata se ogleda u tome da ovi elementi imaju znatno širi propusni opseg i mogu zamijeniti čak i nekoliko komponenti sačinjenih od standardnih pravougaonih elemenata.  $\Pi$  i H talasovodi imaju uz iste spoljašnje dimenzije znatno širi propusni opseg i nižu kritičnu učestanost, ali i veće gubitke, kao i koncentrisano polje na ivicama ureza, što znatno smanjuje maksimalnu snagu pri kojoj se mogu koristiti. Neke modifikacije ovih oblika radi prilagođavanja praktičnim uslovima rada su analizirane i predložene u literaturi. Za primjenu kod širokopojasnih

Gunnovih oscilatora su analizirani  $\Pi$  i H talasovodi sa dvostrukim urezima lit./6/, a u lit./7/ je predložena modifikacija ureza u obliku slova T radi poboljšanja karakteristika i smanjenja težine. U ovom radu su predloženi i analizirani oblici koji uz zadržavanje pozitivnih karakteristika, širokopojasnosti i niske kritične učestanosti, ublažavaju nedostatke usled koncentracije polja i povećanja subitaka.

Osim talasovoda izvedenih iz pravougaonih oblika sa intenzivnim razvojem tehnologije značajno mjesto zauzimaju i talasovodi izvedeni iz kružnog oblika, posebno eliptični talasovodi koji zadržavaju stabilnu prostornu polarizaciju duž pravca prostiranja, a uz to mogu imati i manje subitke uz isti obim i od pravougaonih i od kružnih (lit./8/-/11/). U radu je analiziran uticaj deformacije oblika eliptičnog talasovoda u cilju proširenja propusnog opsega i smanjenja kritične učestanosti. Analizirani su i drugi oblici za koje se može reći da su izvedeni iz kružnog u cilju dobijanja stabilne polarizacije.

Sa povećavanjem složenosti elemenata razvijaju se i numerički metodi za rješavanje elektromagnetnih problema. Metodi postaju sve efikasniji sa razvojem moćnih digitalnih računara. Neka veoma interesantna teorijska razmatranja su bila poznata već decenijama ali i beskorisna u nedostatku numeričkih algoritama za tačno izračunavanje. Tako sada uz razvijanje novih algoritama za što tačnija izračunavanja uz što manji broj računskih operacija imamo i aktueliziranje

nekih metoda koji su poznati od ranije, ali koji su bili beskorisni zbog nedostatka moćnih računskih mašina.

Kratak presled numeričkih metoda koji se koriste za rješavanje elektromagnetnih problema je dat u drugoj glavi.

U trećoj glavi rada izložen je metod najmanjih kvadrata. Primjenom tog metoda je izvršena analiza talasovoda koji se dobijaju deformacijom pravougaonih, a pokazano je da mogu znatno ublažiti nedostatke standardnih talasovoda sa složenim poprečnim presjekom. Metod je proširen i na probleme skin efekta, raspodjele elektrostatičkog kao i vremenski promjenljivog harmonijskog i neharmonijskog polja, gdje do sada nije bio korišćen. U svim ovim slučajevima metod se pokazao kao jednostavan za korišćenje i veoma precizan.

U četvrtoj glavi je izvedena modifikacija metoda najmanjih kvadrata koristeći algoritme brze Fourierove transformacije i pokazano je da se veoma tačni rezultati mogu dobiti uz bitno smanjenje broja neophodnih računskih operacija. Modifikovani metod je primijenjen na rješavanje problema talasovoda dobijenih deformacijom pravougaonih, eliptičnih i kružnih oblika. Ukazano je na prednosti i nedostatke koje ovi oblici talasovoda imaju u odnosu na standardne oblike. Primjenom modifikovanog metoda riješeni su i problemi difrakcije elektromagnetnog talasa sa periodičnih idealno provodnih otvorenih i zatvorenih struktura.

U petoj glavi je obrnutim redom, na osnovu zadate kritične učestanosti i spoljašnjih dimenzija, određen oblik talasovoda. Izvršeno je poređenje koeficijenata slabljenja dobijenih talasovoda uz jednake naprijed pomenute parametre.

Na kraju je priložen računarski program za analizu i sintezu talasovoda složenog poprečnog presjeka. Priložen je i program za rješavanje problema difrakcije talasa sa savršeno provodne periodične rešetke. Programi su napisani na programskom jeziku VAX-11 FORTRAN V3.0.

## 2. PREGLED NUMERIČKIH METODA

Elektromagnetne probleme možemo najopštije podijeliti na dvije kategorije: determinističke probleme i probleme sopstvenih brojeva. U prvoj kategoriji elektromagnetna veličina se određuje direktno, a u drugoj se prvo određuju parametri problema za koje postoji netrivialno rješenje, a onda se određuje samo rješenje. I za jednu i za drugu kategoriju problema numeričke metode za njihovo rješavanje možemo podijeliti na razne načine u zavisnosti od toga koja nas osobina određenog metoda interesuje. Metodi se međusobno mogu razlikovati po tome da li se elektromagnetni problemi rješavaju direktno, na osnovu Maxwelllovih diferencijalnih jednačina ili njihovih ekvivalentnih integralnih formi ili bilo kog ekvivalentnog oblika koji transformiše te diferencijalne ili integralne jednačine raznim matematičkim modelima u sistem linearnih jednačina koji se onda rješava standardnim metodima linearne algebre. Razlika se može uočiti i na osnovu tretiranja problema sa beskonačnim granicama. Međutim, najčešće se podjela metoda vrši u zavisnosti od oblika rješenja datog elektromagnetnog problema. U odnosu na oblik rješenja sve metode možemo podijeliti u tri velike klase: prva daje rješenje u obliku skupa vrijednosti tražene veličine u diskretnim tačkama,



druga daje rješenje u obliku skupa izraza od kojih svaki važi za određenu podoblast posmatrane oblasti u kojoj se traži rješenje, a treća klasa daje traženu veličinu u obliku izraza koji važi u čitavoj posmatranoj oblasti.

U cilju poboljšanja tačnosti pojedinih numeričkih metoda razvijen je veliki broj hibridnih metoda kombinujući pojedine klase tako da su dobijeni neki veoma efikasni i jednostavni hibridni metodi.

U prvu klasu metoda koja daje rješenje u obliku numeričkih vrijednosti traženog rješenja u diskretnom skupu tačaka spada metod konačnih razlika i sve varijante njegovog poboljšanja. Metod konačnih razlika je najstarija, a i najčešće korišćena tehnika rješavanja graničnih problema lit./12/-/17/. Zasniva se na aproksimaciji parcijalnih diferencijalnih jednačina diferencnim jednačinama i rješavanju tako dobijenog sistema.

U cilju efikasnije primjene ovog metoda razvijeno je niz varijanti koristeći: iterativne postupke, nepravilni raspored tačaka, varijacioni pristup itd. lit./15/.

U drugu klasu spadaju metodi konačnih elemenata koji se veoma brzo razvijaju i često koriste za rješavanje brojnih elektromagnetnih i fizičkih problema uopšte. Oblast u kojoj se traži rješenje dijeli se na veliki broj najčešće trougaonih elemenata, a veličina koja se traži predstavlja se onda skupom polinoma, a zatim se postavljaju granični

uslovi na dodirnim površinama različitih elemenata. Koristeći varijacioni oblik Maxwellovih jednačina ili jednačina izvedenih iz njih dobija se sistem jednačina koji se rješava standardnim metodima lit./17/-/20/.

Dok je varijacioni pristup u metodu konačnih razlika jedna od varijanti metoda, dotle je varijacioni pristup kod metoda konačnih elemenata neophodan. Postoje varijacioni pristupi koji ukazuju da su prethodne dvije klase metoda u određenim slučajevima identične, kao na primjer u jednodimenzionim problemima i dvodimenzionim problemima sa pravougaonim granicama lit./16/. Razvijen je veliki broj varijacija u ovoj klasi metoda u cilju njenog prilagođavanja u rješavanju problema sa beskonačnim granicama, a veliki broj varijanti je razvijen i u cilju eliminisanja nepravilnih rješenja koja se mogu dobiti kao rezultat primjene metoda iz ove klase lit./21/.

Treću klasu metoda lit./22/ kojoj pripada i metod, korišćen i predložen u ovom radu, analiziraćemo nešto detaljnije. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu:

$$L[u(\vec{r})] = G(\vec{r}) \quad \dots(2.1)$$

gdje je  $L$  linearni vektorski diferencijalni operator u nekoj oblasti  $V$ , uz granični uslov:

$$l[u(\vec{r})] = g(\vec{r}) \quad \dots(2.2)$$

gdje je  $l$  operator definisan na graničnoj površini  $S$ . Rješenje jednačine (2.1) uz granični uslov (2.2) tražimo

u obliku zbira linearno nezavisnih funkcija  $f_k(\vec{r})$ :

$$u_M(\vec{r}) = \sum_{k=1}^M B_k f_k(\vec{r}) \quad \dots (2.3)$$

gdje se koeficijenti razvoja traže minimiziranjem funkcionala:

$$||L[u_M(\vec{r})] - G(\vec{r})||_V + k_t ||l[u_M(\vec{r})] - g(\vec{r})||_S \quad \dots (2.4)$$

$k_t$  je težinski koeficijent zadovoljenja graničnih uslova i bira se u zavisnosti od toga da li nam treba tačnije rješenje blizu granice ili u unutrašnjosti.

U okviru ove klase možemo dalje razlikovati dvije grupe metoda: variacionu grupu i grupu metoda razvoja po baznim funkcijama. Kod variacionih metoda funkcije  $f_k(\vec{r})$  u razvoju (2.3) identički zadovoljavaju granični uslov (2.2) i najčešće se koriste u slučaju homogenos graničnos uslova tj. kada je:

$$l[u(\vec{r})] = 0 \quad \dots (2.5)$$

U tom slučaju svaka funkcija  $f_k(\vec{r})$  zadovoljava uslov:

$$l[f_k(\vec{r})] = 0 \quad \dots (2.6)$$

Rješenja se traže iz uslova da funkcional:

$$||L[u_M(\vec{r})] - G(\vec{r})||_V \quad \dots (2.7)$$

bude minimalan.

Potpuno analosno imamo i ekvivalentne metode za

određivanje rješenja razvojem po baznim funkcijama. Rješenje se traži u obliku sume funkcija koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu (2.1) a koeficijenti se određuju iz uslova da suma što bolje zadovoljava granični uslov (2.2), tj. iz uslova da funkcional:

$$||l[u_M(\vec{r})]-g(\vec{r})||_S \quad \dots(2.8)$$

bude minimalan.

U zavisnosti od toga koji se funkcional koristi, razlikujemo u okviru ove klase sljedeće metode:

1) Galerkinov metod (Galerkin-Ritzov), predložen veoma davno od strane ruskog inženjera Galerkina koji za određivanje koeficijenata razvoja koristi sistem linearnih jednačina:

$$\sum_{k=1}^M B_k (L[f_k(\vec{r})], f_j(\vec{r})) = (G(\vec{r}), f_j(\vec{r})) \quad \dots(2.9)$$

$j=1,2,\dots,M$

gdje je sa  $(f_m(\vec{r}), f_j(\vec{r}))$  označen skalarni proizvod funkcija  $f_m(\vec{r})$  i  $f_j(\vec{r})$  po zapremini  $V$ . Analogno ako koristimo razvoj po baznim funkcijama jednačine (2.1) imamo sistem:

$$\sum_{k=1}^M B_k (l[f_k(\vec{r})], f_j(\vec{r})) = (g(\vec{r}), f_j(\vec{r})) \quad \dots(2.10)$$

$j=1,2,\dots,M$

gdje je sa malim zagradama sada označen skalarni proizvod funkcija po graničnoj površini. Primjena ovog metoda u rješavanju elektromagnetnih problema je veoma česta lit./1/-/4/, /6/-/7/, /23/.

2) Metod Treftza, kod koga se postavlja takav

funkcional koji dostiže minimum pri rješavanju jednačine (2.1) uz uslov (2.2). Na primjer za Laplaceovu jednačinu takav funkcional može biti izabran u obliku:

$$\int_V |\text{grad } u(\vec{r})|^2 dV \quad \dots (2.11)$$

a koeficijenti se onda određuju iz sistema:

$$\sum_{k=1}^M B_k(f_k(\vec{r}), \frac{\partial f_j(\vec{r})}{\partial n}) = (g(\vec{r}), \frac{\partial f_j(\vec{r})}{\partial n}) \quad \dots (2.12)$$

$j=1, 2, \dots, M$

3) Metod najmanjih kvadrata lit./24/--/26/ kod koga je funkcional integral kvadratne greške po zapremini  $V$ , a koeficijenti razvoja se dobijaju iz sistema:

$$\sum_{k=1}^M B_k(L[f_k(\vec{r})], L[f_j(\vec{r})]) = (G(\vec{r}), L[f_j(\vec{r})]) \quad \dots (2.13)$$

$j=1, 2, \dots, M$

a u slučaju razvoja po baznim funkcijama iz sistema:

$$\sum_{k=1}^M B_k(l[f_k(\vec{r})], l[f_j(\vec{r})]) = (g(\vec{r}), l[f_j(\vec{r})]) \quad \dots (2.14)$$

$j=1, 2, \dots, M$

4) Kolokacioni metod je najstariji, najjednostavniji i najčešće primjenjivan metod iz ove klase lit./13/--/15/, /27/ kod koga se koeficijenti određuju iz uslova da rješenje zadovoljava diferencijalnu jednačinu u  $M$  tačaka unutar zapremine  $V$  tj.:

$$\sum_{k=1}^M B_k L[f_k(\vec{r}_j)] = G(\vec{r}_j) \quad \dots (2.15)$$

$j=1, 2, \dots, M$

odnosno da zadovolji granični uslov u  $M$  tačaka na graničnoj površi:

$$\sum_{k=1}^M B_k^{-1}[f_k(\vec{r}_j)] = g(\vec{r}_j) \quad \dots (2.16)$$

$$j=1,2,\dots,M$$

5) Metod momenata lit./23/ koji ustvari obuhvata sve prethodne metode i za određivanje koeficijenata koristi sistem oblika:

$$\sum_{k=1}^M B_k(L[f_k(\vec{r})], B[f_j(\vec{r})]) = (G(\vec{r}), B[f_j(\vec{r})]) \quad \dots (2.17)$$

$$j=1,2,\dots,M$$

gdje je  $B$  proizvoljni operator koji zadovoljava uslove:  $B^{-1}$  ograničen, a operator  $(L-B)B^{-1}$  neprekidan operator.

Uzimajući da je  $B$  jedinični operator dobije se Galerkinov metod, za  $B=L$  dobije se metod najmanjih kvadrata, a uzimajući  $B[f_j(\vec{r})] = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$  dobija se kolokacioni metod, odnosno uzimajući  $B = \frac{\partial}{\partial n}$  dobija se metod Treftza za slučaj Laplaceove jednačine. Analogno, u slučaju razvoja po baznim funkcijama ovaj metod koristi sistem oblika:

$$\sum_{k=1}^M B_k(l[f_k(\vec{r})], b[f_j(\vec{r})]) = (g(\vec{r}), b[f_j(\vec{r})]) \quad \dots (2.18)$$

pri čemu se jednostavno može vidjeti da svi prethodni oblici i u ovom slučaju mogu biti izvedeni iz ovog, uzimajući da operator  $b$  ima određeni oblik.

U ovu klasu metoda se može uvrstiti i rješavanje sistema koristeći jednačinu koja se dobija zamjenom sume integralom:

$$u(\vec{r}) = F(\vec{r}) + \int_V Q(\vec{r})K(\vec{r})dV \quad \dots (2.19)$$

$$\int_S Q(\bar{r})K(\bar{r})dS = F(\bar{r}) \quad \dots(2.20)$$

gdje su  $F(\bar{r})$  i  $K(\bar{r})$  date funkcije a  $Q(\bar{r})$  nepoznata težinska funkcija koja se određuje iz jednačine (2.20), a onda se rješenje dobija na osnovu jednačine (2.19).

Greška koja se pravi rješavajući diferencijalnu jednačinu (2.1) uz granični uslov (2.2) koristeći ovu klasu metoda jednaka je razlici zadate i izračunate vrijednosti. Apriorno određivanje vrijednosti greške bilo bi teorijski moguće u većem broju slučajeva, ali se uglavnom koristi aposteriorno određena greška koja se dobija računajući izraz:

$$e = |L[u_M(\bar{r})]-G(\bar{r})| + k_t |1[u_M(\bar{r})]-g(\bar{r})| \quad \dots(2.21)$$

Na osnovu korektnosti zadatog problema u vidu jednačine (2.1) i graničnog uslova (2.2) može se zaključiti da je za male vrijednosti greške date izrazom (2.21) i greška koja se pravi aproksimacijom tačnog rješenja funkcijom  $u_M(\bar{r})$  mala.

### 3. RAZVOJ GRANIČNIH USLOVA PO BAZNIM FUNKCIJAMA METODOM NAJMANJIH KVADRATA

Grupa metoda koja se zasniva na razvoju graničnih uslova po baznim funkcijama analizirana u prethodnom poglavlju u okviru treće klase metoda ima niz prednosti u odnosu na ostale numeričke metode. Kao i čitava klasa ovih metoda daje mogućnost rješavanja kako unutrašnjih tako i spoljašnjih graničnih problema. Prednost ove grupe metoda je u tome što daje jednostavnu mogućnost aposteriornog određivanja greške jer, pošto je diferencijalna jednačina tačno zadovoljena, jedini uzročnik greške je ne sasvim tačno zadovoljenje graničnih uslova. Sledeća prednost ovih metoda je u tome što omogućavaju rješavanje graničnih problema ako granična vrijednost nije zadata na pojedinim djelovima granice. Ova grupa u odnosu na varijacionu grupu metoda iste klase štedi znatno vremena potrebnog za računanje koeficijenata jer se koeficijenti računaju na osnovu skalarnog proizvoda po površini, a ne po zapremini kao što je slučaj u prvoj grupi metoda. Treba istaći i veliku prednost koju daju rješenja dobijena u obliku kontinualnih funkcija. Ako se tome dodaju i relativno jednostavni i rutinski algoritmi za njihovu implementaciju onda nije teško uvidjeti pogodnost korišćenja metoda iz ove klase, odnosno grupe metoda koji se zasnivaju na razvoju graničnih uslova po baznim funkcijama.



Kolokacioni metod je najstariji i najčešće korišćen iz ove grupe. Bitan nedostatak ovog metoda je u slaboj podešenosti matrice koja služi za određivanje koeficijenata razvoja. Metod je veoma osjetljiv na izbor tačaka u kojima će granični uslov biti zadovoljen. Razvijeno je niz varijanti ovog metoda uvodeći nepravilan raspored tačaka u cilju poboljšanja tačnosti. Međutim, metod je zbog tih nedostataka često kritikovan a pokazano je da u nekim slučajevima i ne daje korektne rezultate lit./28/-/29/.

Metod najmanjih kvadrata koji pripada ovoj grupi metoda je uveden kao mogućnost poboljšanja kolokacionog metoda. Za rješavanje problema difrakcije opisan je u lit./25/ i nazvan "poboljšani kolokacioni metod". Za rješavanje problema karakterističnih brojeva je primijenjen u lit./24/ i /35/. Metod je korišćen uspješno pri rješavanju dielektričnih talasovoda lit./30/, za rješavanje problema prostiranja zvučnih talasa lit./31/, a njegova primjena za rješavanje elektrostatičkih, harmonijskih i neharmonijskih raspodjela polja je opisana u lit./32/-/33/. Primjenom ovog metoda se eliminiše problem slabe podešenosti matrice. Jednostavna primjena čini metod veoma atraktivnim za široku klasu elektromagnetnih problema. Gotovo jedina teškoća je u pogodnom izboru baznih funkcija mada je i ovaj izbor ograničen lit./34/ i gotovo uvijek je jasan na osnovu prirode problema. Najčešće se bazne funkcije biraju tako da što bolje odgovaraju konfiguraciji problema i eventualno identički zadovoljavaju granične uslove na pojedinim djelovima granice. O izboru baznih funkcija će biti više riječi pri primjeni metoda u konkretnim slučajevima.

U prvom dijelu ove glave je dato teorijsko izvođenje metoda najmanjih kvadrata u slučaju dvojnog graničnog uslova. Data je analiza ocjene greške koja se pravi primjenom ovog metoda.

U drugom dijelu glave prikazana je primjena metoda na analizu raspodjele elektrostatičkog polja, kao i na određivanju raspodjele elektromagnetnog polja koje se mijenja prostoperiodično i aperiodično, a opširnije su analizirani talasovodi složenog poprečnog presjeka.

### 3.1. TEORIJSKA OSNOVA

Pogledajmo homogenu diferencijalnu jednačinu:

$$L[u(\vec{r})] = 0 \quad \dots(3.1)$$

gdje je  $L$  linearni vektorski operator definisan unutar zapremine  $V$  koja je ograničena površinom  $S$ . Granični uslov može biti zadat u obliku Dirichletovog tipa na dijelu granične površi  $S_1$ :

$$u(\vec{r}) = g_1(\vec{r}) \quad \text{na } S_1 \quad \dots(3.2)$$

i Neumanovog tipa na dijelu granične površine  $S_2$ :

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} = g_2(\vec{r}) \quad \text{na } S_2 \quad \dots(3.3)$$

pri čemu su površine  $S_1$  i  $S_2$  djelovi površine  $S$ . Ako je  $S_1=S$ , a  $S_2=0$  onda je granični uslov na čitavoj površini samo Dirichletovog tipa i obrnuto. Ako se površine  $S_1$  i  $S_2$  preklapaju onda na zajedničkom dijelu površina  $S_1$  i  $S_2$  imamo

dvojni granični uslov. Unija graničnih površina  $S_1$  i  $S_2$  ne mora biti jednaka  $S$  tj. na nekim dijelovima granice granični uslov ne mora biti zadat.

Označimo sa  $f_k(\vec{r})$  ( $k=1,2,\dots,M$ ) skup baznih funkcija od kojih svaka zadovoljava diferencijalnu jednačinu tj.

$$L[f_k(\vec{r})] = 0 \quad \dots(3.4)$$

onda i njihova suma:

$$u_M(\vec{r}) = \sum_{k=1}^M B_k f_k(\vec{r}) \quad \dots(3.5)$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu. Koeficijente ćemo odrediti iz uslova da izraz (3.5) što bolje zadovoljava granične uslove (3.2) i (3.3). U nekoj tački definisanoj radius vektorom  $\vec{r}$  kvadrat greške je dat sa:

$$e^2(\vec{r}) = (u_M(\vec{r}) - g_1(\vec{r}))^2 + k_n \left( \frac{\partial u_M(\vec{r})}{\partial n} - g_2(\vec{r}) \right)^2 \quad \dots(3.6)$$

gdje je  $k_n$  težinski koeficijent Neumanovog uslova u odnosu na Dirichletov.

Množeći grešku sa elementom površine  $dS$  i sabirajući po površini gdje su definisani pojedini sabirci dobijamo ukupnu kvadratnu grešku na graničnoj površini:

$$e^2 = \int_{S_1} (u_M(\vec{r}) - g_1(\vec{r}))^2 dS + k_n \int_{S_2} \left( \frac{\partial u_M(\vec{r})}{\partial n} - g_2(\vec{r}) \right)^2 dS \quad \dots(3.7)$$

Ako u prethodnom izrazu zamijenimo aproksimativno rješenje  $u_M(\vec{r})$  izrazom (3.5) poslije kvadriranja i zamjene redosleda sumiranja i integraliranja dobijamo:

$$e^2 = \int_{S_1} g_1^2(\vec{r}) dS + k_n \int_{S_2} g_2^2(\vec{r}) dS - 2 \sum_{k=1}^M B_k b_k + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M B_k B_l a_{kl} \quad \dots(3.8)$$

gdje je sa  $a_{kl}$  označena vrijednost:

$$a_{kl} = \int_{S_1} f_k(\vec{r}) f_l(\vec{r}) dS + k_n \int_{S_2} \frac{\partial f_k(\vec{r})}{\partial n} \frac{\partial f_l(\vec{r})}{\partial n} dS \quad \dots (3.9)$$

a sa  $b_k$  označena vrijednost:

$$b_k = \int_{S_1} f_k(\vec{r}) g_1(\vec{r}) dS + k_n \int_{S_2} \frac{\partial f_k(\vec{r})}{\partial n} g_2(\vec{r}) dS \quad \dots (3.10)$$

U cilju minimiziranja integrala kvadratne greške koeficijente  $B_k$  ćemo odrediti iz uslova da njegov prvi izvod po koeficijentima razvoja bude minimalan, tj. iz uslova:

$$\frac{\partial e^2}{\partial B_k} = 0 \quad k=1,2,\dots,M \quad \dots (3.11)$$

što vodi ka sistemu linearnih jednačina:

$$\sum_{l=1}^M B_l a_{kl} = b_k \quad k=1,2,\dots,M \quad \dots (3.12)$$

koji može biti zapisan u matricnom obliku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{vmatrix} \quad \dots (3.13)$$

U slučaju da je rješenje neophodno izraziti u nešto složenijem obliku koristeći dva skupa baznih funkcija:

$$U_M(\vec{r}) = \sum_{k=1}^M (B_k^{(1)} f_k^{(1)}(\vec{r}) + B_k^{(2)} f_k^{(2)}(\vec{r})) \quad \dots (3.14)$$

onda se i ovakav problem može tretirati uz jednostavne modifikacije kao i prethodni slučaj. Uvodeći novu funkciju:

$$f_k(\vec{r}) = \begin{cases} f_k^{(1)}(\vec{r}) & 1 \leq k \leq M \\ f_{k-M}^{(2)}(\vec{r}) & M+1 \leq k \leq 2M \end{cases} \quad \dots (3.15)$$

pri čemu  $k$  može imati vrijednosti  $k=1,2,\dots,2M$  a rješenje se može napisati u obliku:

$$u_{2M}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{2M} B_k f_k(\vec{r}) \quad \dots (3.16)$$

U opštem slučaju ako koristimo  $N$  skupova baznih funkcija možemo formirati ekvivalentni skup baznih funkcija:

$$f_k^*(\vec{r}) = \begin{cases} f_k^{(1)}(\vec{r}) & 1 \leq k \leq M \\ f_{k-M}^{(2)}(\vec{r}) & M+1 \leq k \leq 2M \\ \vdots \\ f_{k-(N-1)M}^{(N)}(\vec{r}) & (N-1)M+1 \leq k \leq NM \end{cases} \quad \dots (3.17)$$

a rešenja se onda traže u obliku

$$u_{NM}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{NM} B_k f_k(\vec{r}) \quad \dots (3.18)$$

Za razliku od metoda konačnih elemenata ili konačnih razlika rešenje koje se dobija primenom ovog metoda u potpunosti zadovoljava diferencijalnu jednačinu, a jedini izvor greške je nepotpuno zadovoljenje graničnog uslova tako da se, što je velika podobnost ovog metoda, greška može dobiti određujući razliku aproksimativnog i tačnog rešenja tj. računajući izraz (3.6). Za male vrijednosti greške i razlika tačnog i približnog rešenja je mala što se može zaključiti na osnovu korektnosti zadatog problema u vidu diferencijalne jednačine (3.1) i njenog graničnog uslova (3.2) i (3.3).

Pri analizi greške možemo razlikovati dva njena izvora. Greška pri računanju koeficijenata koja ponovo može biti posledica dva faktora: greška usled računanja integrala i greške u rešavanju linearnog sistema. Greška usled računanja integrala se može smanjiti uzimanjem dovoljnog broja podeoka i izborom pogodnog algoritma za numeričku integraciju.

Greška pri rješavanju sistema linearnih jednačina može biti velika ako se ne izvrši posredna normalizacija koeficijenata i upotrijebi odgovarajući metod za rješavanje sistema.

Ukoliko se zanemari postojanje greške pri određivanju koeficijenata onda nam preostaje drugi izvor greške koja se sastoji u aproksimaciji beskonačnog reda konačnim redom koji ima  $M$  članova. Ovaj dio greške može biti i analitički izračunat. U cilju pojednostavljenja izvođenja označimo granični uslov, bilo da je on Dirichletovog ili Neummanovog tipa sa:

$$l[u(\vec{r})] = g(\vec{r}) \quad \dots(3.19)$$

Sistem (3.12) napišimo u obliku:

$$\sum_{k=1}^M \beta_k (l[f_k(\vec{r})], l[f_1(\vec{r})]) = (g(\vec{r}), l[f_1(\vec{r})]) \quad \dots(3.20)$$

što je ekvivalentno obliku:

$$\left( \sum_{k=1}^M \beta_k (l[f_k(\vec{r})] - g(\vec{r}), l[f_1(\vec{r})]) \right) = 0 \quad \dots(3.21)$$

Ukupna kvadratna greška se može napisati u ekvivalentnom obliku i kao skalarni proizvod:

$$e^2 = \left( \sum_{k=1}^M \beta_k (l[f_k(\vec{r})] - g(\vec{r}), \sum_{k=1}^M \beta_k (l[f_k(\vec{r})] - g(\vec{r})) \right) \quad \dots(3.22)$$

odnosno množeći član po član i imajući u vidu izraz (3.22) dobija se:

$$e^2 = (g(\vec{r}), g(\vec{r})) - \sum_{k=1}^M \beta_k (l[f_k(\vec{r})], g(\vec{r})) \quad \dots(3.23)$$

dodajući ovu jednačinu sistemu jednačina (3.20) dobija se  $M+1$  jednačina. Da bi sistem imao rješenja rang proširene

matrice sistema kome je dodata jednačina (3.23) mora biti  $M$ , tj.

$$\det \left| \begin{array}{ccc|c} (1f_1, 1f_1) & \dots & (1f_1, 1f_M) & (1f_1, g) \\ \vdots & & & \\ (1f_M, 1f_1) & \dots & (1f_M, 1f_M) & (1f_M, g) \\ (g, 1f_1) & \dots & (g, 1f_M) & (g, g) - e^2 \end{array} \right| = 0 \quad \dots (3.24)$$

gdje je  $1f_i = 1[f_i(\bar{r})]$ .

Iz predhodne jednačine se dobija izraz za grešku:

$$e^2 = \frac{\left| \begin{array}{ccc|c} (1f_1, 1f_1) & \dots & (1f_1, 1f_M) & (1f_1, g) \\ \vdots & & & \\ (1f_M, 1f_1) & \dots & (1f_M, 1f_M) & (1f_M, g) \\ (g, 1f_1) & \dots & (g, 1f_M) & (g, g) \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} (1f_1, 1f_1) & \dots & (1f_1, 1f_M) \\ \vdots & & \\ (1f_M, 1f_1) & \dots & (1f_M, 1f_M) \end{array} \right|} \quad \dots (3.25)$$

Ovaj se izraz može koristiti za apriornu ocjenu greške. Međutim, pošto je i za ove vrijednosti neophodno izračunati sve skalarne proizvode baznih funkcija to se ipak znatno češće koristi aposteriorna ocjena koja uključuje i ostale faktore kao što je greška usled računanja koeficijenata. U daljem radu kada je riječ o grešci biti riječ o njenoj aposteriorno izračunatoj vrijednosti. Ocjena konvergencije reda se može dobiti posmatrajući zavisnost greške u funkciji broja članova reda  $M$ .

Na kraju možemo sumirati postupak primjene metoda razvoja graničnih uslova po baznim funkcijama koristeći minimizaciju ukupne kvadratne greške.

1) Treba izabrati pogodan skup baznih funkcija koje zadovoljavaju datu diferencijalnu jednačinu i što bolje odgovaraju konfiguraciji problema.

2) Izračunati koeficijente sistema linearnih jednačina računajući integrale proizvoda baznih funkcija prema jednačinama (3.9) i (3.10)

3) Izvršiti normalizaciju koeficijenata da bi se izbjegao račun sa prevelikim ili premalim koeficijentima.

4) Pogodnim metodom riješiti sistem linearnih jednačina (3.13) i tako odrediti nepoznate koeficijente razvoja (3.5).

5) Izračunati grešku na granici i ako ne zadovoljava željenu tačnost povećati red aproksimacije tj.  $M$  i ponoviti korake od 2) do 5).

6) Izračunati ostale veličine datog elektromagnetnog problema neophodne za njegovu analizu koristeći već dobijeno kontinualno rješenje.



### 3.2. PRIMJENA U ELEKTROSTATICI

Rješavanje elektrostatičkih problema se u suštini svodi na određivanje potencijala ili vektora električnog polja u nekoj oblasti  $V$ . Kao što je poznato elektrostatički potencijal u izotropnoj sredini zadovoljava Poissonovu diferencijalnu jednačinu:

$$\Delta V(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon} \quad \dots(3.26)$$

Za slučaj da u oblasti  $V$  nema slobodnih naelektrisanja jednačina (3.26) prelazi u Laplaceovu jednačinu:

$$\Delta V(\vec{r}) = 0 \quad \dots(3.27)$$

Jednoznačna rješenja ovih jednačina se određuju na osnovu graničnih uslova koji može biti u vidu zadatog potencijala na dijelu granice  $S_1$  tj. Dirichletovog tipa graničnih uslova kao:

$$V(\vec{r}) = V_S(\vec{r}) \quad \text{na } S_1 \quad \dots(3.28)$$

ili u vidu zadatog polja na dijelu granice  $S_2$  tj. Neumanovog tipa:

$$\nabla V(\vec{r}) = - \vec{E}_S(\vec{r}) \quad \text{na } S_2 \quad \dots(3.29)$$

Kao što je izloženo u predhodnom poglavlju rješenje ćemo tražiti u obliku zbira baznih funkcija diferencijalne jednačine (3.27). U pravougaonom koordinatnom sistemu bazne funkcije Laplaceove diferencijalne jednačine mogu biti uzete u obliku:

$$f_k(x,y) = (\sin k_x x + B \cos k_x x) (C \sinh k_y y + D \cosh k_y y) \quad \dots(3.30)$$

gdje su  $k_x$ , B, C, D proizvoljne konstante.

A u polarnom koordinatnom sistemu u obliku:

$$f_k(r, z) = (J_0(k_x r) + BN_0(k_x r)) (C \sinh k_x z + D \cosh k_x z) \quad \dots (3.31)$$

gdje je  $J_0(x)$  Besselova funkcija prve vrste nultog reda, a  $N_0(x)$  Neumanova funkcija nultog reda. I jedan i drugi oblik mogu biti uprošćeni ako problem ima određeni stepen simetrije što je u praksi čest slučaj.

Greška na granici u ovom slučaju ima oblik:

$$e^2(\vec{r}) = (v_S(\vec{r}) - \sum_{k=1}^M B_k f_k(\vec{r}))^2 + k_n |\vec{E}_S(\vec{r}) + \sum_{k=1}^M B_k \nabla f_k(\vec{r})|^2 \quad \dots (3.32)$$

Integralači kvadratnu grešku po granici, mijenjajući redosled sumiranja i integraljenja i diferenciranjem po koeficijentima razvoja dobija se sistem jednačina:

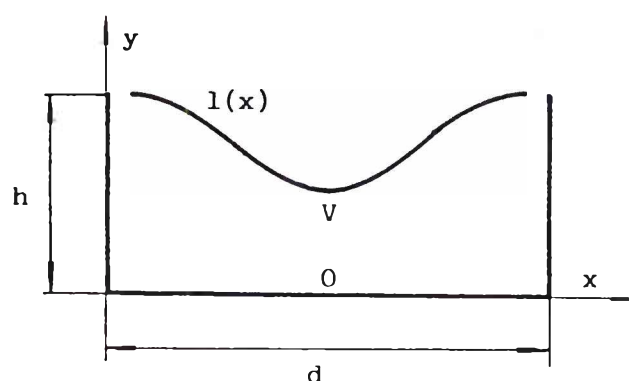
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{vmatrix} \quad \dots (3.33)$$

gdje su:

$$a_{k1} = \int_{S_1} f_k(\vec{r}) f_1(\vec{r}) dS + k_n \int_{S_2} \nabla f_k(\vec{r}) \nabla f_1(\vec{r}) dS \quad \dots (3.34)$$

$$b_k = \int_{S_1} f_k(\vec{r}) v_S(\vec{r}) dS + k_n \int_{S_2} \nabla f_k(\vec{r}) \vec{E}_S(\vec{r}) dS \quad \dots (3.35)$$

a) Posmatrajmo planparalelno polje unutar domena oivičenog sa tri zida:  $x=0, x=d$ , i  $y=0$  na nultom potencijalu i četvrtim zidom na potencijalu  $V$  čiji je oblik definisan izrazom  $y=1(x)=0.75+0.25\cos(2\pi x/d)$  koji je prikazan na slici 3.1.



Sl. 3.1. Poprečni presjek elektrostatičkog sistema

Rješenje u ovom slučaju može biti traženo u obliku zbira funkcija koje identički zadovoljavaju granicni uslov na pravilnom dijelu granica tj. u obliku:

$$U_M(x,y) = \sum_{k=1}^M B_k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{d}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{d}\right) \quad \dots(3.36)$$

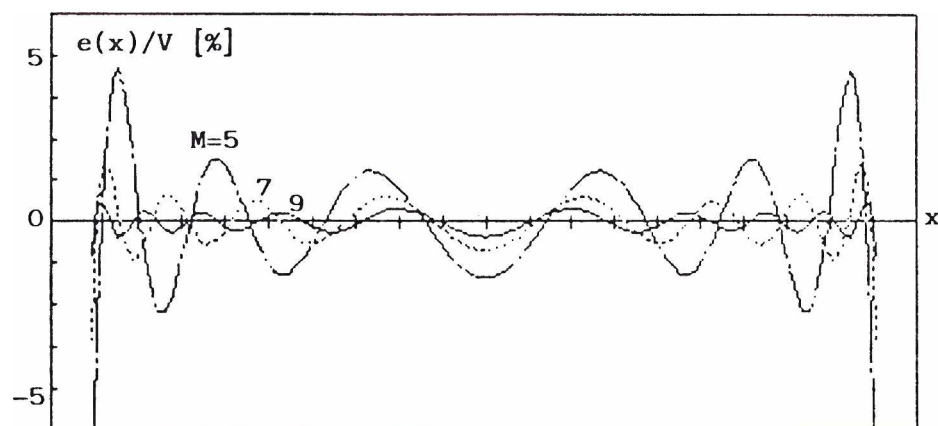
Pri računanju koeficijenata površinski integrali u ovom slučaju prelaze u linijske koje računamo samo duž nepravilne ivice, pošto je granični uslov identički zadovoljen duž pravih ivica:

$$a_{kl} = \int_L f_k(x, l(x)) f_l(x, l(x)) dl \quad \dots(3.37)$$

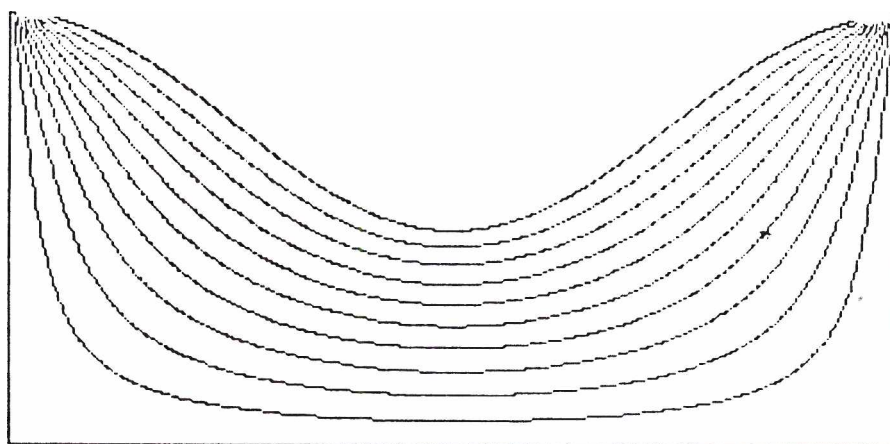
$$b_k = \int_L v f_k(x, l(x)) dl \quad \dots(3.38)$$

Rješenje sistema linearnih jednačina, a samim tim i koeficijenti razvoja, je određeno koristeći Gaussov metod uz iterativna poboljšanja. Uvriednost greške u funkciji broja članova reda  $M$  je data na slici 3.2.

Uzimajući  $M=9$  nacrtane su ekvipotencijalne linije koje su određene koristeći razvoj po baznim funkcijama (3.36).

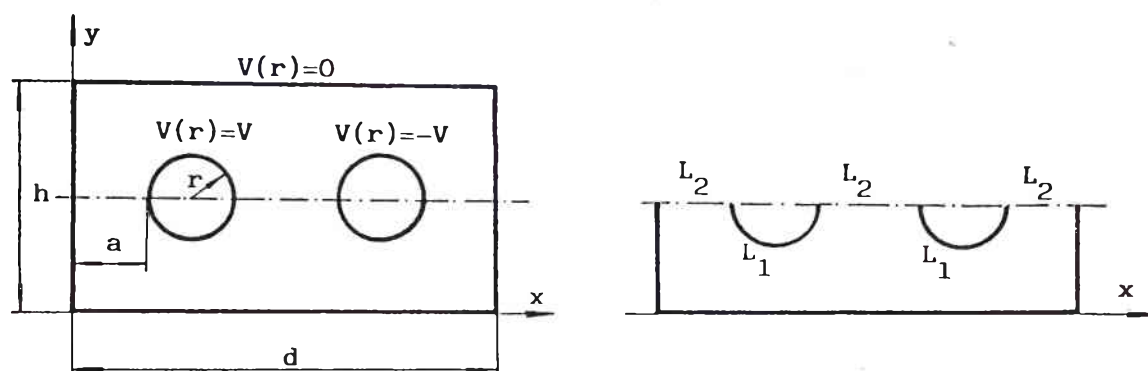


Sl. 3.2. Vrijednost greške u funkciji broja članova reda  $M$



Sl. 3.3. Ekvipotencijalne linije

b) U drugom primjeru je razmatran slučaj mješovitog graničnog uslova. Uzet je dvožični vod unutar uzemljenog pravougaonog žljeba. Dimenzije problema su odabrane tako da je u velikoj mjeri izražen efekat blizine.



Sl. 3.4. Poprečni presjek oklopljenog dvožičnog voda

Problem je rješavan tako što je posmatrana samo polovina stvarnog domena. Birajući bazne funkcije u obliku:

$$f_k(x,y) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{d}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{d}\right) \quad \dots(3.39)$$

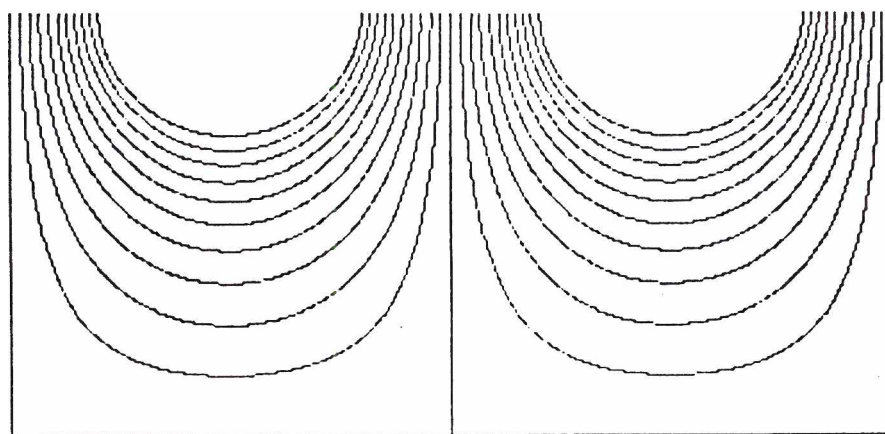
granični uslovi su zadovoljeni na tri zida dok je na četvrtom dijelu granice duž linije  $L_1$  zadat Dirichletov granični uslov  $V(\vec{r}) = V$ , a duž linije  $L_2$  Neumannov granični uslov  $E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ . Koefficienti u ovom slučaju imaju oblik:

$$a_{kl} = \int_{L_1} f_k(x,l(x)) f_l(x,l(x)) dl + k_n \int_{L_2} \frac{\partial f_k(x,l(x))}{\partial y} \frac{\partial f_l(x,l(x))}{\partial y} dl \quad \dots(3.40)$$

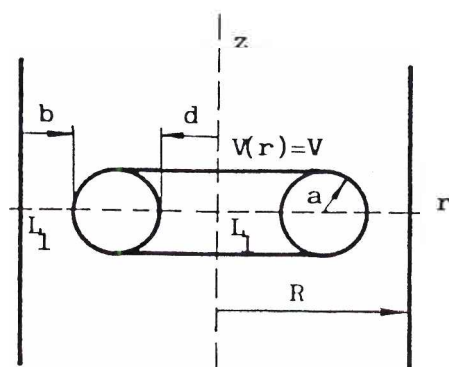
$$b_k = \int_{L_1} V f_k(x,l(x)) dl$$

Uzimajući dimenzije  $d=2$ ,  $h/d=1$ ,  $a=0.25$  i  $r=0.25$  veoma dobri rezultati su dobijeni već pri  $M=5$ . Ekvipotencijalne linije su nacrtane na slici 3.5.

c) Efikasnost metoda je provjerena i u cilindričnom koordinatnom sistemu na problemu dugog cilindra i aksijalnog torusa (sl. 3.6) čije rješavanje drugim metodima nije jednostavno.



Sl. 3.5. Ekvipotencijalne linije oklopljenog dvožičnog voda

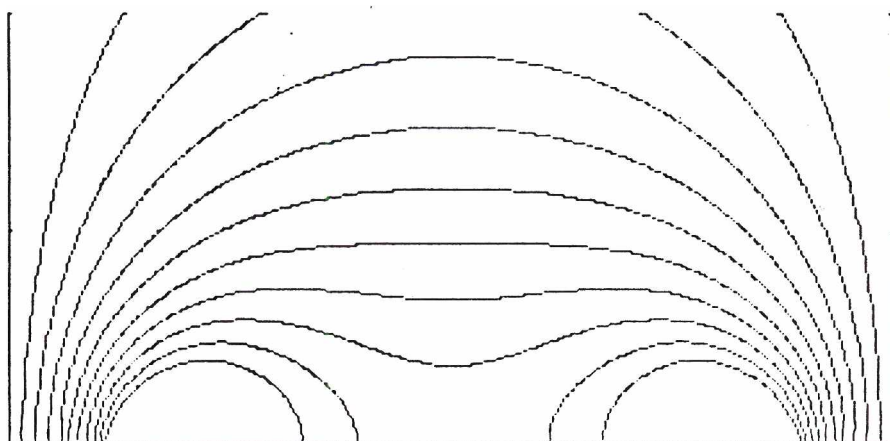


Sl. 3.6 Poprečni presjek cilindra u čijoj unutrašnjosti je torus doveden na potencijal  $V$

Rješenje problema je traženo u formi:

$$u_M(r, z) = \sum_{k=1}^M B_k J_0(x_k r/R) \exp(-x_k z/R) \quad \dots (3.41)$$

gdje su  $x_k$  nule Besselove funkcije prve vrste nultog reda. Ovim oblikom rješenja ispunjen je zahtjev simetrije u odnosu na  $z$  osu, a granični uslov na cilindru je identički zadovoljen. Isto tako je ispunjen uslov da vrijednost potencijala teži nuli kada  $z$  teži beskonačnosti. Koeficijente treba odrediti iz uslova da  $z$  komponenta polja duž linije  $L_1$  bude jednaka nuli i da potencijal po površini torusa bude



Sl. 3.7. Ekvipotencijalne linije naelektrisanos torusa unutar uzemljenos cilindra

Jednak zadatoj vrijednosti. Pri  $M=9$  i za dimenzije  $R=2.4$   $d=1.1$   $a=0.4$  izračunati su koeficijenti razvoja po predhodno opisanoj proceduri i nacrtane ekvipotencijalne linije na slici 3.7.

### 3.3 ODREĐIVANJE RASPODJELE VREMENSKI PROMJENLJIVOG POLJA

Odredjivanje raspodjele vremenski promjenljivog magnetnog polja je jedan od najčešćih problema u elektrotehnici. Zbog toga je razvijen veliki broj tehnika za njegovo rješavanje. Rješavanje skin efekta u višeprovodnom sistemu je analizirano u lit./36/ koristeći metod konačnih elemenata. Primjena integralnih jednačina pri rješavanju ovog problema je data u lit./37/, a primjena tehnike graničnih elemenata u lit./38/.

Problem se svodi na rješavanje diferencijalne jednačine:

$$\Delta \vec{H} - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \dots (3.42)$$

uz zadate početne i granične uslove. Za slučaj prostoperiodičnih promjena uvodeći kompleksnu jačinu magnetnog polja  $H(\vec{r})$  dobijamo jednačinu:

$$\Delta \vec{H} - j\omega \mu \vec{H} = 0 \quad \dots (3.43)$$

Rješenje prema opisanom metodu se traži u obliku linearne kombinacije baznih funkcija jednačine (3.43) koje mogu biti uzete u obliku:

$$H_k(x,y) = (\sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y) \quad \dots (3.44)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = -j\omega\mu\delta$$

Uzimajući da je  $H_0(\vec{r})$  zadana vrijednost polja na granici koeficijenti razvoja se dobijaju iz sistema linearnih jednačina (3.33) u kome su:

$$a_{kl} = \int_S \bar{H}_k(\vec{r}) \bar{H}_l^*(\vec{r}) dS = (\bar{H}_k(\vec{r}), \bar{H}_l^*(\vec{r}))_S \quad \dots (3.45)$$

koeficijenti uz nepoznate, a:

$$b_k = \int_S \bar{H}_0(\vec{r}) \bar{H}_k^*(\vec{r}) dS = (\bar{H}_0(\vec{r}), \bar{H}_k^*(\vec{r}))_S \quad \dots (3.46)$$

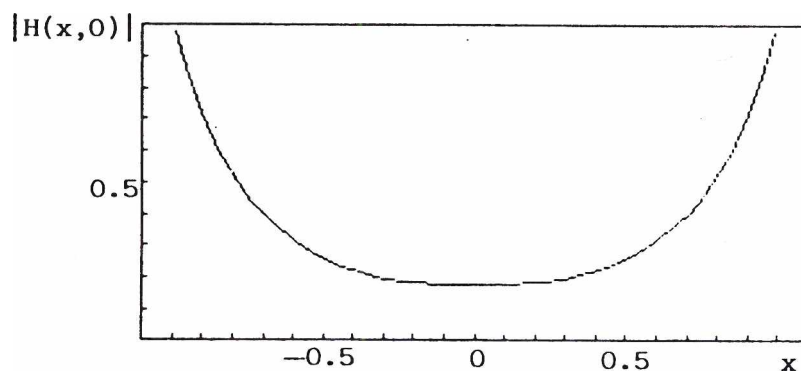
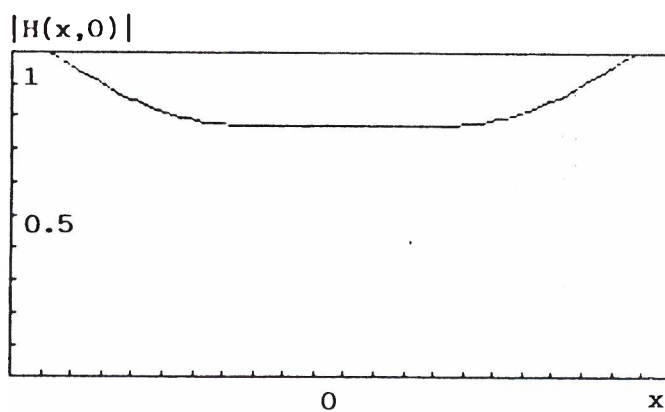
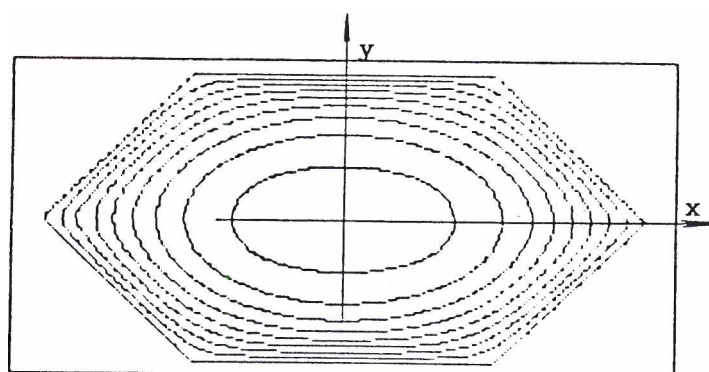
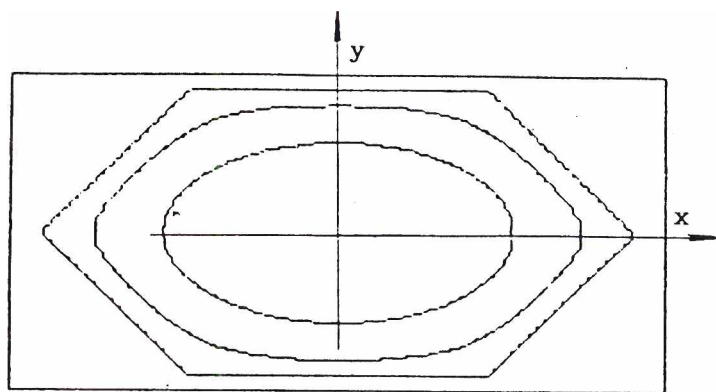
slobodni koeficijenti.

Kao primjer posmatrajmo provodnu sredinu šestougaoznog oblika koja ima poprečni presjek prikazan na slici 3.8. i nalazi se u prostoperiodičnom polju koje ima samo  $x$  komponentu. Bazne funkcije su uzete u obliku:

$$f_k(x,y) = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \cos \sqrt{-j\omega\mu\delta - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2a}\right)^2} y \quad \dots (3.47)$$

Formirajući i računajući koeficijente sistema na osnovu jednačina (3.45) i (3.46) i rješavajući sistem linearnih jednačina određeni su koeficijenti razvoja. Za slučaj  $\mu\delta\omega a^2=5$  greška manja od 0.5% je dobijena za  $M=9$  a ekviamplitudske linije su nacrtane na sl. 3.8a. Za slučaj kada je  $\mu\delta\omega a^2=25$  uzeto je  $M=13$  a ekviamplitudske linije su nacrtane na slici 3.8b. Na slici 3.8c. i 3.8d. su date vrijednosti amplitude polja duž linije  $y=0$  za predhodne slučajeve.



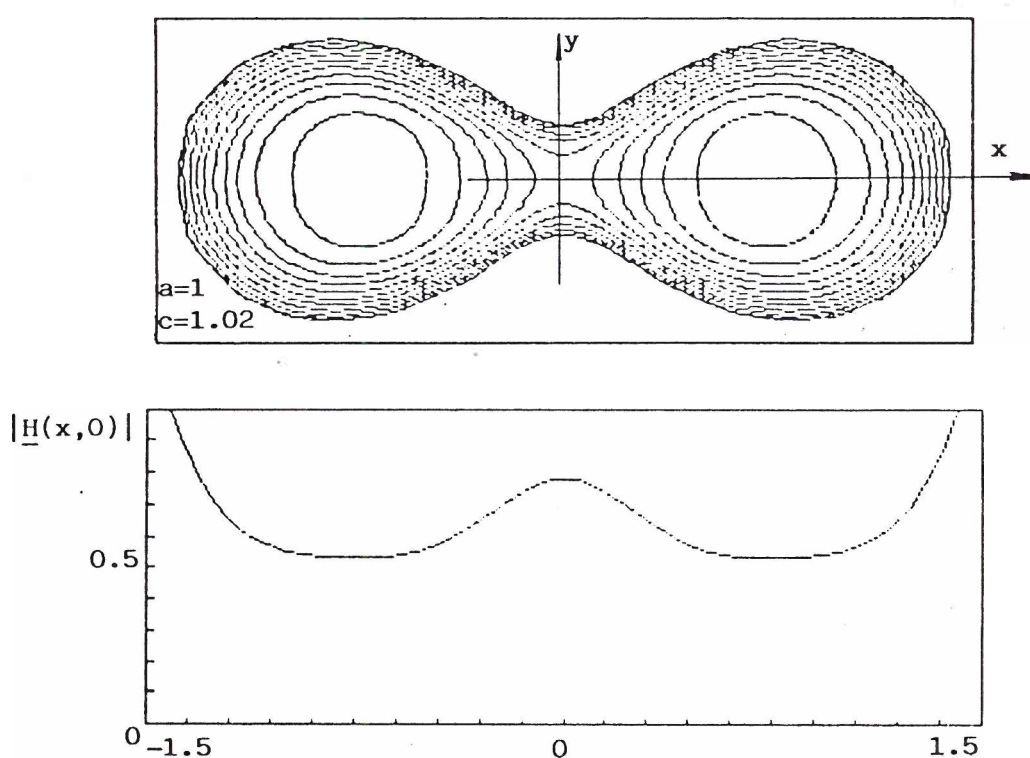


S1.3.8<sub>2</sub> Ekviampitudske linije za šestouglasti presjek  
 a)  $\mu\delta\omega a^2=5$ , b)  $\mu\delta\omega a^2=25$ , c) vrijednost amplitude polja  
 duž  $y=0$  za  $\mu\delta\omega a^2=5$ , d) vrijednost amplitude polja duž  $y=0$   
 za  $\mu\delta\omega a^2=25$

Koristeći iste bazne funkcije i isto spoljašnje polje određena je vrijednost polja po poprečnom presjeku provodne sredine čija je spoljašnja ivica definisana funkcijom:

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4 \quad \dots (3.48)$$

Za  $\mu\delta\omega a^2 = 25$  sreška manja od 0.5% dobijena je sa  $M=13$ , a ekviamplitudske linije su date na slici 3.9.



Sl. 3.9. Ekviamplitudske linije i vrijednost amplitude polja za  $\mu\delta\omega a^2 = 25$

Kada polje na granici nije prostoperiodično mogući su dva pristupa rješavanju problema. Prvi se sastoji u tome da se bazne funkcije odaberu tako da zadovoljavaju jednačinu (3.42), a zatim se rješenje traži u obliku:

$$H_M(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M B_{kl} H_{kl}(\vec{r}, t) \quad \dots (3.49)$$

pri čemu bazne funkcije mogu biti izabrane u obliku:

$$H_{kl}(x,y,t) = (\cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{6\mu} t} \dots (3.50)$$

$k_x, k_y, B, C, D$  proizvoljne konstante

Koeficijenti razvoja  $B_k$  određuju se iz uslova da ukupna greška na granici U ODREĐJENOM VREMENSKOM INTERVALU bude minimalna. Ukoliko bazne funkcije ne zadovoljavaju početni uslov onda treba dodati i ukupnu kvadratnu grešku po posmatranoj oblasti u trenutku  $t=t_0$ . Ako inicijalni uslov označimo sa  $H_0(\vec{r}, t_0)$  onda je:

$$e^2 = \int_S \int_T (H_M(\vec{r}, t) - H_0(\vec{r}, t))^2 dS dt + k_t \int_V (H_M(\vec{r}, t_0) - H_0(\vec{r}, t_0))^2 dV \dots (3.51)$$

gdje je  $k_t$  težinski koeficijent početnog uslova u odnosu na granični. Označavajući sa  $(H_{mn}, H_{kl})_{ST}$  skalarne proizvode funkcija  $H_{mn}(\vec{r}, t)$  i  $H_{kl}(\vec{r}, t)$  po granici i vremenu, a sa  $(H_{mn}, H_{kl})_V$  skalarne proizvode funkcija  $H_{mn}(\vec{r}, t_0)$  i  $H_{kl}(\vec{r}, t_0)$  po posmatranoj oblasti i sa  $(H_{mn}, H_{kl})$  zbir ovih skalarnih proizvoda tj:

$$(H_{mn}, H_{kl}) = (H_{mn}, H_{kl})_{ST} + k_t (H_{mn}, H_{kl})_V \dots (3.52)$$

onda iz uslova da greška data sa (3.51) bude minimalna na osnovu izlaganja u poglavlju 3.1 dobija se sistem:

$$\begin{vmatrix} (H_{11}, H_{11}) & \dots & (H_{11}, H_{MM}) \\ \vdots & & \vdots \\ (H_{MM}, H_{11}) & \dots & (H_{MM}, H_{MM}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{MM} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (H_{11}, H_0) \\ \vdots \\ (H_{MM}, H_0) \end{vmatrix} \dots (3.53)$$

Na osnovu sistema (3.53) se mogu odrediti nepoznati koeficijenti jednačine (3.42), a time i traženo polje. Kao primjer posmatrajmo provodnik romboidnog poprečnog presjeka

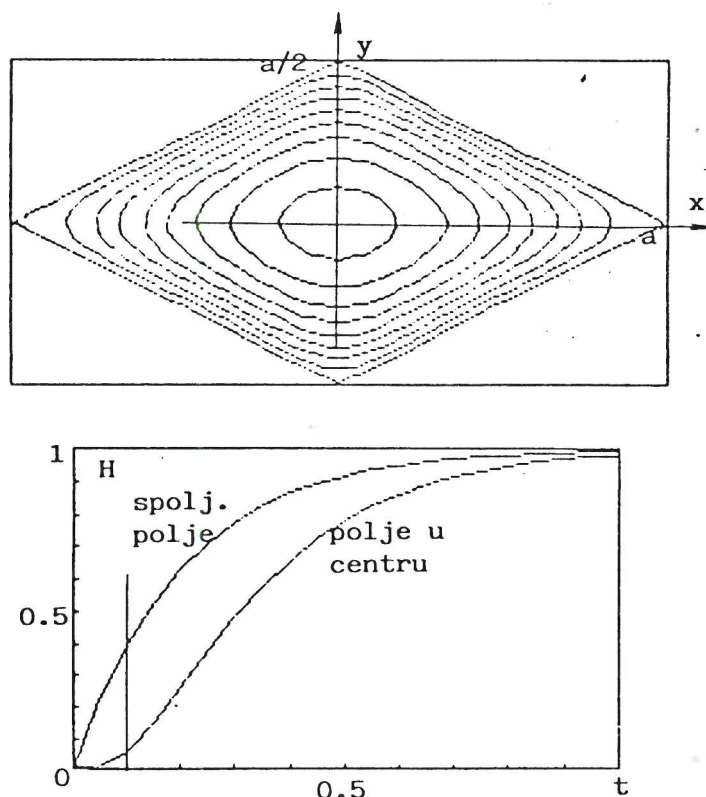
i spoljašnje polje koje se mijenja po zakonu:

$$H_0(\vec{r}, t) = (1 - \exp(-5t)) \quad \dots (3.54)$$

Uzimajući bazne funkcije u obliku:

$$H_{kl}(x, y, k) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2l-1)\pi y}{2b} e^{-\frac{(\frac{(2k-1)\pi}{2a})^2 + (\frac{(2l-1)\pi}{2b})^2}{6\mu} t} \dots (3.55)$$

formirani su skalarni proizvodi i riješen sistem (3.53) za slučaj  $\mu\delta = 2.5$ . Rezultantno polje u trenutku  $t=0.1$  je dato na sl. 3.10a, a promjena polja u centru u funkciji vremena na sl. 3.10b. Greška na granici je pri  $M=7$  manja od 2%.



Sl. 3.10. a) Vrijednost polja u trenutku  $t=0.1$   
b) Polje u centru u funkciji vremena

Drugi prilaz rješavanju problema se sastoji u razvoju vremenski promjenljivog polja na granici u Fourierov red u intervalu koji se posmatra a onda se problem rješava kao prostoperiodični slučaj, a rješenje se dobija kao skup

prostoperiodičnih komponenti. Diferencijalna jednačina za  $k$ -ti harmonik ima oblik:

$$\Delta \vec{H}_k - jk\omega_0 \epsilon \mu \vec{H}_k = 0 \quad \dots (3.56)$$

gdje je sa  $H_k(\vec{r})$  označen  $k$ -ti harmonik traženog polja. Tražeći rješenje u obliku sume baznih funkcija jednačine (3.56) i određujući koeficijente iz uslova da  $H_k(\vec{r})$  bude što bliže vrijednosti  $k$ -tog harmonika polja na granici dobija se ukupno polje:

$$\vec{H}_M(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^M |\vec{H}_{Mk}(\vec{r})| \cos(k\omega_0 t + \phi_{Mk}(\vec{r})) \quad \dots (3.57)$$

gdje je  $\phi_{Mk}(\vec{r})$  faza  $H_{Mk}(\vec{r})$ . Na ovaj način se rješavanje u slučaju složene pobude svodi na rješavanje sistema sa prostoperiodičnim pobudama.

### 3.4 ANALIZA TALASOVODA

U ovom poglavlju će biti prikazana primjena razvoja graničnih uslova po baznim funkcijama na primjerima talasovoda složenog poprečnog presjeka, dobijenih deformacijom pravougaonog talasovoda. Deformisani pravougaoni talasovodi, kao što je rečeno, imaju praktičnu primjenu i to uglavnom u obliku  $\Pi$  i H talasovoda, za izgradnju: širokopojasnih Gunnovih oscilatora lit./39/--/40/, sprežnjaka lit./41/, talasovodnih transformatora lit./42/ i mikrotalasnih filtara lit./43/. U prvom dijelu ovog poglavlja dat je kratak pregled teorije neophodne za analizu talasovoda. U drugom dijelu je opisan postupak primjene razvoja graničnih uslova po baznim funkcijama koristeći metod najmanjih kvadrata za analizu talasovoda, a u trećem su dati numerički rezultati za nekoliko profila talasovoda.

#### 3.4.1 PREGLED TEORIJE

Rješavanje problema prostiranja talasa duž talasovoda spada u grupu problema sopstvenih brojeva. Prije odredjivanja polja neophodno je odrediti karakteristični broj talasovoda koji definiše opses u kome je moguće prostiranje određenog tipa talasa. Sve talase kao što je poznato možemo

podijeliti na: transverzalne elektromagnetne TEM koji imaju samo komponente normalne na pravac prostiranja i predstavljaju osnovne oblike talasa kod linija sa povratnim provodnikom, transverzalne električne TE talase (H-talasi) koji imaju vektor električnog polja normalan na pravac prostiranja a magnetni vektor ima komponentu u pravcu prostiranja, transverzalne magnetne TM (E-talasi) kod kojih samo vektor električnog polja ima komponentu u pravcu prostiranja i hibridni talasi kod kojih i vektor električnog i vektor magnetnog polja imaju komponentu u pravcu prostiranja.

Kod talasovoda su gotovo uvijek dominantni talasi H tipa pa će njihovoj analizi biti posvećeno najviše pažnje. Analiza E tipa talasa može biti izvršena potpuno analogno, dok se hibridni talasi mogu dobiti slaganjem H tipa i E tipa talasa.

Za slučaj H tipa talasa uzimajući da se osa prostiranja poklapa sa z-osom komponenta polja u pravcu prostiranja može biti napisana u obliku  $\vec{H}_z = (0, 0, H_{zo})$ . Koristeći Maxwelllove jednačine može se dobiti da se vektor  $\vec{H}_z$  povezan sa vektorima  $\vec{H}$  i  $\vec{E}$  preko relacija:

$$\vec{E} = j\omega\mu_0\vec{H}_z e^{j\omega t} \quad \dots(3.58)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu}(\text{grad div}\vec{H}_z + \omega^2\epsilon\mu\vec{H}_z)e^{j\omega t}$$

gdje vektor  $\vec{H}_z$  ( koji se naziva Hertzovim vektorom ) zadovoljava jednačinu:

$$\frac{\partial^2 H_{zo}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{zo}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{zo}}{\partial z^2} + \omega^2\epsilon\mu H_{zo} = 0 \quad \dots(3.59)$$

Uzimajući da se polje duž z ose mijenja po eksponencijalnom zakonu :

$$H_{z0} = H_z e^{-j\gamma z} \quad \dots(3.60)$$

dobija se jednačina:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z = 0 \quad \dots(3.61)$$

gdje je  $k^2 = -\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$  sopstveni broj diferencijalne jednačine (3.61). Može se vidjeti da za  $k > \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 2\pi f/c$  eksponent u (3.60) ima realne vrijednosti tj. energija se ne prostire duž talasovoda. Frekvencija pri kojoj je  $k = 2\pi f/c$  naziva se kritičnom frekvencijom za dati talasovod. Da bi odredili sopstveni broj  $k$ , odnosno vektor  $\vec{H}_z$  na osnovu diferencijalne jednačine (3.61) treba koristiti još i granične uslove koji su za H tip talasa definisani kao:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \dots(3.62)$$

na provodnoj površini, odnosno:

$$H_z = 0 \quad \dots(3.63)$$

na magnetnom zidu.

Ostale komponente polja se mogu odrediti na osnovu jednačina (3.58) koje u razvijenoj formi imaju oblik:

$$H_x = -j \frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \dots(3.64)$$

$$H_y = -j \frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$



$$E_x = -j \frac{\omega \mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = j \frac{\omega \mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Za slučaj E tipa talasa Hertzov vektor ima oblik  $\vec{E}_z = (0, 0, E_z)$  a ostale komponente polja se dobijaju na osnovu relacija:

$$\vec{H} = j\omega \operatorname{rot} \vec{E}_z e^{j\omega t} \quad \dots (3.65)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}_z + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}_z) e^{j\omega t} \quad \dots (3.66)$$

Veličina  $E_z$  se određuje na osnovu jednačine koja je ekvivalentna jednačini (3.61) i ima oblik:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0 \quad \dots (3.67)$$

dok granični uslovi imaju oblik:

$$E_z = 0 \quad \dots (3.68)$$

na provodnom zidu, odnosno:

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0 \quad \dots (3.69)$$

na magnetnom zidu.

Struktura polja može biti određena na osnovu činjenice da linije  $H_z(x, y) = \text{const.}$  predstavljaju linije električnog polja u slučaju H tipa talasa, a linije  $E_z(x, y) = \text{const.}$  linije magnetnog polja u slučaju E tipa talasa, lit. /1/.

Gubici energije pri prostiranju talasa karakterišu se koeficijentom slabljenja. U opštem slučaju koeficijent

slabljenja, kao i subici, je posledica nekoliko faktora: slabljenja usled nesavršene provodnosti zidova, slabljenja usled nesavršenosti sredine kroz koju se talas prostire i na kraju raznih rasipanja energije usled nesavršenih prilagodjenja na spojevima. Ako je sredina prostiranja vazduh onda se druga komponenta slabljenja može zanemariti. Treća neće biti tretirana u ovom radu tako da će se smatrati da su subici posledica samo nesavršene provodnosti zidova.

Potpuno tačno teorijsko tretiranje nesavršenih zidova bi bilo veoma složeno jer bi trebalo uzeti u obzir da postoji tangencijalna komponenta električnog polja na zidu talasovoda pa granični uslovi dati predhodnim relacijama ne bi važili. Međutim, pošto je u svim praktičnim slučajevima tangencijalna komponenta znatno manja od normalne to se određivanje polja može izvršiti koristeći granične uslove kao u idealnom slučaju a onda pri računanju koeficijenta slabljenja uzeti u obzir konačnu provodnost.

Promjena snage u funkciji z koordinate je data u obliku:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad \dots(3.70)$$

gdje je  $\alpha = -\text{Im}[\gamma]$  koeficijent slabljenja u talasovodu i, uz predhodne komentare i ograničenja, može biti računat iz poznate formule:

$$\alpha = \frac{1}{2} R_s \frac{\int_L |H_t|^2 dl}{\int_S |H_T|^2 dl} \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \quad \dots(3.71)$$

gdje je  $H_t$  ukupna tangencijalna komponenta magnetnog polja

duž zida talasovoda, a  $H_T$  transverzalna komponenta po poprečnom presjeku talasovoda.

### 3.4.2 PRIMJENA METODA NAJMANJIH KVADRATA NA ANALIZU TALASOVODA

Odredjivanje elektromagnetnog polja unutar talasovoda za slučaj H-tipa talasa svodi se na rješavanje diferencijalne jednačine (3.61) uz granične uslove (3.62) i (3.63).

Rješenje tražimo u obliku reda:

$$H_z(x,y) = \sum_{m=1}^M B_m f_m(x,y) \quad \dots(3.72)$$

gdje je  $f_k(x,y)$  skup funkcija koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu (3.61) i može biti uzet u obliku:

$$f_m(x,y) = (\cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad \dots(3.73)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad \dots(3.74)$$

U slučaju da se koristi polarni koordinatni sistem sve predhodne jednačine treba transformisati u polarnu formu, a bazne funkcije  $f_k(r,\theta)$  mogu biti uzete u obliku:

$$f_m(r,\theta) = (J_m(kr) + B N_m(kr))(C \cos m\theta + D \sin m\theta) \quad \dots(3.75)$$

Integral kvadratne greške duž granice je:

$$e^2 = \int_L \left( \frac{\partial H_z}{\partial n} \right)^2 dl = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M B_m B_n \int_L \frac{\partial f_m(x,y)}{\partial n} \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial n} dl \quad \dots(3.76)$$

gdje je  $\frac{\partial}{\partial n}$  izvod po normali koji se u pravougaonom koordinatnom sistemu može računati na osnovu izraza:

$$\frac{\partial f_m(x,y)}{\partial n} = (-1'(x) \frac{\partial f_m(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f_m(x,y)}{\partial y}) / \sqrt{1+l'(x)^2} \quad \dots (3.77)$$

gdje je  $l(x)$  funkcija koja opisuje zid talasovoda.

Za određivanje koeficijenata  $B_m$  i sopstvene vrijednosti  $k$  iz uslova da integral kvadratne greške duž granice bude minimalan dobijamo sistem od  $M$  linearnih jednačina.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (3.78)$$

gdje su

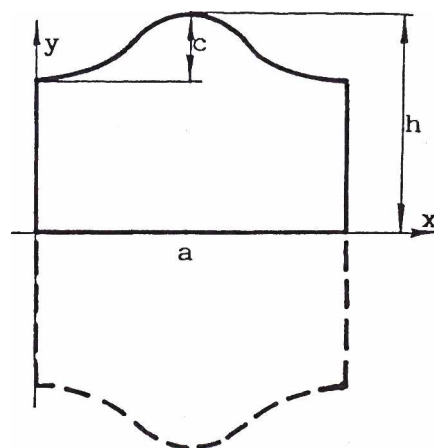
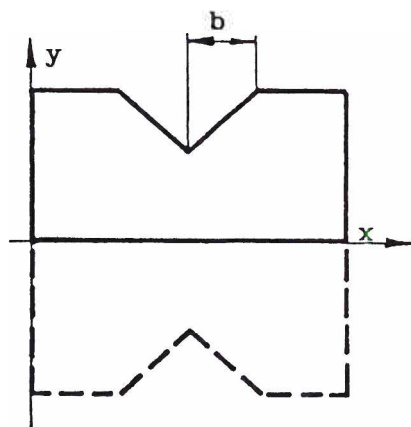
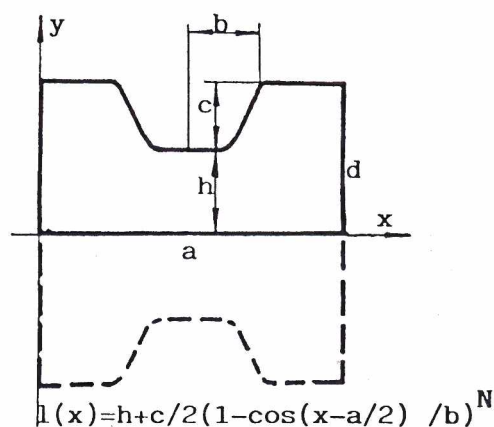
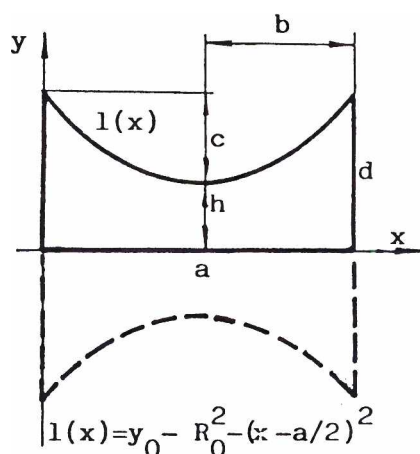
$$a_{mn} = \int_L \frac{\partial f_m(x,y,k)}{\partial n} \cdot \frac{\partial f_n(x,y,k)}{\partial n} dl \quad \dots (3.79)$$

Koeficijenti  $a_{mn}$  i  $e^2$  funkcije su sopstvenos broja  $k$  koji se može odrediti iz uslova da linearni homogeni sistem (3.78) ima netrivialna rješenja tj. da je  $\det \|a_{mn}\| \neq 0$ . Međutim zbog velikih razlika u vrijednostima koeficijenata računanje determinante za veliki red sistema je često veoma nestabilno pa u ovom radu nije tražena nula determinante već je računata vrijednost integrala kvadratne greške (izraz (3.76)) u funkciji sopstvenos broja  $k$  i određivan minimum funkcije  $e^2$  u zavisnosti od  $k$ .

### 3.4.3 NUMERIČKI REZULTATI

Za talasovode prikazane na slici 3.11. uzeto je da su definisane veličine: širina talasovoda  $a$ , visina  $d$ , dubina

ureza  $c$  (ili visina  $h$ ) i širina ureza  $b$ . Na osnovu toga su određeni parametri funkcija koje definišu oblik zida. Razmatrani su: kružni, kosinusni, linearni, i polinomijalni urezi. Radi aproksimacije oblika standardnih  $\Pi$  i H talasovoda razmatrani su i slučajevi sa kosinusnim i polinomijalnim urezima višeg reda. Proračunate su karakteristike i jednog oblika talasovoda sa ispupčenjem.



Sl. 3.11. Poprečni presjeci talasovoda sa jednim i dva ureza (ispupčenja)

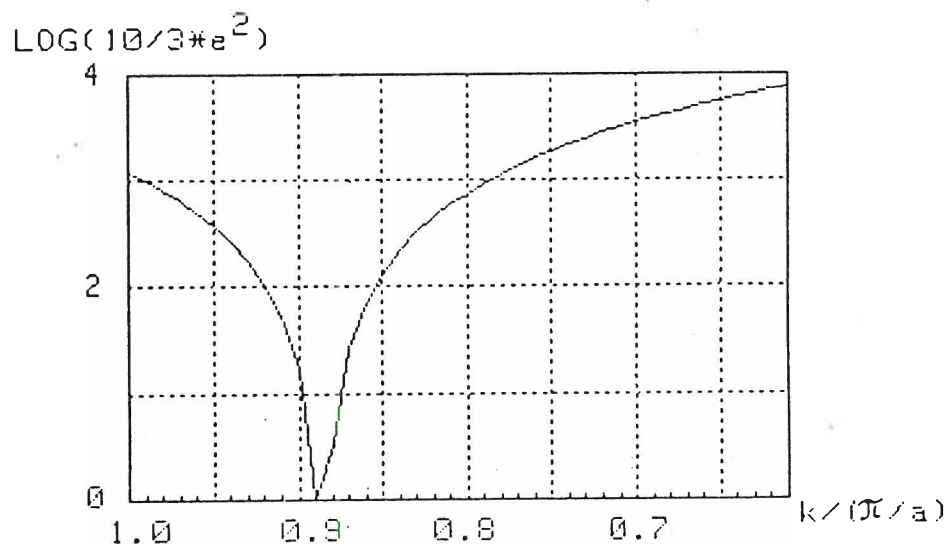
Za H10 tip talasa bazne funkcije su uzete u obliku:

$$f_m(x, y, k) = \cos k_x x \cos k_y y / \exp(k_x d) \quad \dots (3.80)$$

gdje je

$$k_x = \frac{(2m-1)\pi}{a} \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad \dots (3.81)$$

Ovako izabrane funkcije zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu (3.61), a osim toga zadovoljavaju i granični uslov (3.62) na zidovima  $x=0$ ,  $x=a$  i  $y=0$ . Zavisnost po  $x$ -osi je uzeta u obliku funkcije ovakvog tipa jer je  $z$ -komponenta H10 tipa talasa neparna funkcija u odnosu na  $x=a/2$  osu. Primjenom jednačine (3.79) određeni su koeficijenti  $a_{mn}$ , a zatim na osnovu sistema (3.78) uzimajući da je prvi koeficijent u razvoju  $B_1$  jednak jedinici određeni su ostali koeficijenti razvoja a onda i vrijednost kvadratne greške u funkciji  $k$  i njen minimum na osnovu izraza (3.76). Vrijednost kvadratne greške u funkciji sopstvenog broja  $k$  za slučaj kružnog ureza i  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $c=0.4$  i  $b=1$  je data na slici 3.12.



Sli. 3.12. Vrijednost kvadratne greške u funkciji sopstvenog broja  $k$  za  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $c=0.4$  i  $b=1$

Primjenom prethodno opisanog metoda određeni su sopstveni brojevi  $k$  za razne dimenzije i tipove ureza za H10 tip talasa i date u tablici 3.1a i 3.1b.

TABLICA 3.1a

H10 tip talasa

b/a=0.5

oblik	h/d	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
kružni		0.978	0.951	0.921	0.887	0.847	0.802	0.749
kosin.		0.972	0.939	0.900	0.855	0.805	0.748	0.693
troug.		0.978	0.951	0.919	0.881	0.838	0.780	0.726
polin.		0.982	0.961	0.935	0.903	0.863	0.786	0.729

TABLICA 3.1b

H10 tip talasa

b/a=0.3

	h/d	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
kružni		0.969	0.929	0.883	0.831	0.774	0.721
kosin.		0.972	0.936	0.891	0.844	0.793	0.732
troug.		0.975	0.946	0.904	0.860	0.869	0.843
polin.		0.964	0.922	0.873	0.816	0.742	0.691
cos**12		0.965	0.921	0.867	0.809	0.738	0.685
P 1./2/		0.962	0.913	0.856	0.795	0.728	0.654

Normalizovana vrijednost sopstvenog broja  $k/(\pi/a)$  za razne oblike talasovoda sa jednim i dva ureza u funkciji dubine i širine ureza

Karakteristični brojevi za H20 tip talasa su određeni koristeći naprijed izloženi metod pri čemu je, imajući u vidu da je z-komponenta H20 tipa talasa parna funkcija u odnosu na  $x=a/2$  osu, rešenje traženo u obliku:

$$H_z(x,y) = \sum_{m=1}^M B_m \cos \frac{2m\pi}{a} x \cos k_y y \quad \dots (3.82)$$

Koeficijentat širokopojasnosti određuje širinu opsega u kome je moguće proširivanje samo dominantnog tipa talasa, definiše se kao odnos kritičnih frekvencija, a time i odnos sopstvenih brojeva osnovnog i prvog sledećeg tipa talasa tj.  $T=k_2/k_1$ . U našem slučaju je to odnos sopstvenih brojeva H10

i. H20 tipa talasa koji je za neke od predhodno analiziranih oblika dat u tablici 3.2.

TABLICA 3.2 KOEFICIJENAT ŠIROKOPOJASNOSTI  $b/a=0.3$

h/d	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
kružni	2.069	2.190	2.295	2.458	2.662	2.875
kosin.	2.075	2.147	2.267	2.405	2.572	2.801
troug.	2.051	2.121	2.223	2.289	2.324	2.402
polin.	2.074	2.191	2.336	2.524	2.733	3.039
F 1./2/	2.079	2.191	2.337	2.529	2.765	3.082

Koeficijent širokopojasnosti za razne tipove talasovoda sa jednim i dva ureza u funkciji dubine i širine ureza

Treba napomenuti da su sopstveni brojevi talasovoda na slici 3.11 sa jednim i dva ureza isti s obzirom na simetriju oblika talasovoda u odnosu na x-osu.

Vrijednosti sopstvenog broja za  $\Pi$  i H talasovode, date u zadnjoj vrsti, su računate po obrascima (3.83) i (3.84) iz lit./2/.

$$\text{za H10} \quad \frac{\text{tg}kb}{k} = \frac{\text{hctg}k(a/2-b)}{kd} + \frac{2}{hd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 s_n h}{s_n^2} \frac{\text{ctg}p_n(a/2-b)}{p_n} \quad \dots (3.83)$$

$$\text{za H20} \quad \frac{\text{ctg}kb}{k} + \frac{\text{hctg}k(a/2-b)}{kd} = \frac{2}{hd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 s_n g}{s_n} \frac{\text{ctg}p_n(a/2-b)}{p_n} \quad \dots (3.84)$$

$$s_n = \pi n/d \quad s_n^2 + p_n^2 = k^2$$

I ove vrijednosti karakterističnih brojeva za standardne  $\Pi$  i H talasovode moguće je dobiti primjenom metoda najmanjih kvadrata vršeći integraciju po x i y koordinati duž granične ivice lit./44/.



Na osnovu rezultata iz tablice 3.1a može se zaključiti da je karakteristični broj uslavnom odredjen dubinom žljeba. Ipak može se primijetiti da pri istoj dubini postoji razlika medju vrijednostima karakterističnog broja u zavisnosti od oblika zida talasovoda. Ova činjenica može biti lako povezana i objašnjena imajući u vidu tablicu 3.1b gdje su dati karakteristični brojevi za uže ureze. Vidi se da se vrijednosti karakterističnih brojeva, a time i kritične frekvencije smanjuju sa smanjenjem širine ureza. Posmatrajući oblik kosinusnog ureza u predhodnom slučaju vidi se da je on znatno uži pri dnu i od polinomijalnog i od kružnog pa otuda i manja kritična učestanost za ovaj oblik u tablici 3.1a. Iz istog razloga i polinomijalni urez 4-tog reda pošto je nešto širi od ostalih ima višu kritičnu učestanost. Medjutim, smanjenje širine ureza ne vodi ka monotonom smanjenju sopstvenog broja već postoji neka optimalna širina iznad koje vrijednost karakterističnog broja ponovo raste. Do predhodnog zaključka se može doći posmatrajući sopstvene brojeve  $\Pi$  i  $H$  talasovoda date u lit./1/ i /2/. Na osnovu tih rezultata vidi se da je optimalna širina ureza reda polovine ukupne širine talasovoda. To se može vidjeti i na osnovu rezultata iz tablice 3.1b gdje kosinusni urez zbog male širine za slučaj  $b/a=0.3$  ne samo da nije dominantan već ima manje sniženje kritične učestanosti od ostalih oblika. Mala širina ureza pri dnu ureza je i razlog što trougaoni urez malo utiče na smanjenje karakterističnog broja.

Na osnovu tablice 3.1b se također može vidjeti da kritična

učestanost za oblik kosinusa 12-tog stepena i polinoma 4-tog veoma malo odstupa od kritične učestanosti  $\Pi$  i H talasovoda koja je data u zadnjoj vrsti a računata je na osnovu obrazaca (3.83).

Imajući u vidu još i koeficijent širokopojasnosti može se zaključiti da zaobljavanje ivica standardnih ureza veoma malo utiče na smanjenje kritične učestanosti i propusnog opsega što je bitna činjenica ako se ima u vidu da se time ublažava nedostatak usled koncentracije polja na ivicama kod standardnih F ili H talasovoda, a osim toga biće pokazano da se i koeficijent subitaka znatno smanjuje.

Na osnovu odredjenih vrijednosti sopstvenog broja  $k$  i uzimajući da je prvi koeficijent razvoja  $\beta_1=1$  odredjena je vrijednost  $\frac{\partial H_z}{\partial n}$  radi provjere tačnosti rezultata. Pokazano je da je odnos  $\frac{\partial H_z}{\partial n} / \frac{\partial H_z}{\partial t}$  tj. odnos tangencijalne i normalne komponente električnog polja na zidu talasovoda mali, što znači da se tangencijalna komponenta električnog polja može zanemariti odnosno da rješenje veoma dobro zadovoljava granični uslov (3.62). Vrijednosti  $\frac{\partial H_z}{\partial n}$  i  $\frac{\partial H_z}{\partial t}$  na zidu talasovoda sa polinomijalnim urezom 4-tog reda date su u tablici 3.3 za slučaj kada je  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $h=0.6$ ,  $b=0.6$  i za razne vrijednosti reda aproksimacije  $M$ .

Ispitivanjem konvergencije reda pokazalo se da za zadovoljenje graničnog uslova treba uzeti više članova za dublje i uže ureze. Kao zadovoljavajući red aproksimacije najčešće je uziman broj  $M=\text{int}(c/b*20+2)$ .

TABLICA 3.3					
$i \Delta x$	M=4	M=8	M=12	M=16	$\frac{\partial H_z}{\partial t}$
1	0.0711	-0.0497	-0.0344	0.0023	0.0000
2	0.0484	0.0232	0.0503	-0.0024	0.0145
3	-0.0036	0.0558	-0.0356	0.0000	0.0184
4	-0.0469	-0.0488	0.0238	0.0028	0.0329
5	-0.0448	-0.0257	-0.0072	-0.0037	0.0365
6	0.0121	0.0806	0.0077	-0.0022	0.0271
7	0.0931	-0.0915	-0.0446	0.0000	0.0369
8	-0.0063	0.0113	-0.0199	0.0003	0.0582
9	0.0024	-0.0311	0.0195	0.0038	0.1848
10	0.0161	0.0152	0.0074	-0.0025	0.2873
11	-0.0012	0.0260	-0.0081	0.0027	0.3679
12	-0.0377	0.0107	-0.0251	-0.0006	0.4129
13	-0.0712	-0.0037	-0.0261	-0.0020	0.4290
14	-0.0861	-0.0051	-0.0015	0.0016	0.4216
15	-0.0766	0.0014	0.0302	0.0012	0.4043
16	-0.0450	0.0044	0.0340	-0.0023	0.3950
$e^2$	0.0025	0.0013	0.0009	0.000005	

Vrijednost izvoda polja po normali i integrala kvadratne greške u funkciji reda aproksimacije M

U tablici 3.4 su date maksimalne vrijednosti električnog polja na zidu talasovoda za H10 tip talasa normalizovane u odnosu na maksimalnu vrijednost električnog polja kod pravougaonog talasovoda sa istim dimenzijama.

Može se primjetiti da maksimalno polje kod talasovoda veoma zavisi od širine ureza i da se dobijeno smanjenje kritične učestanosti i povećanje propusnog opsega ostvaruje uz povećanje maksimalnog polja i direktno prouzrokuje smanjenje maksimalne snage pri kojoj se talasovod može koristiti.

TABLICA 3.4a						
H10 tip talasa $b/a=0.5$						
	h/d 0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
kružni	1.074	1.131	1.176	1.201	1.213	1.214
kosin.	1.141	1.270	1.380	1.469	1.551	1.642
trous.	1.181	1.387	1.595	1.748	1.902	2.013
polin.	1.028	1.036	1.043	1.033	1.021	1.017

TABLICA 3.4b H10 tip talasa b/a=0.3

	h/d 0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
kružni	1.124	1.360	1.394	1.445	1.504	1.575
kosin.	1.282	1.549	1.755	1.865	1.987	2.061
troug.	1.288	1.641	2.055	2.239	2.421	2.608
polin.	1.255	1.258	1.292	1.319	1.351	1.420
cos**12	1.184	1.230	1.350	1.417	1.417	1.485

Normalizovana vrijednost maksimalnog polja u odnosu na maksimalnu vrijednost polja kod pravougaonog talasovoda, za talasovode sa jednim i dva kružna ureza u funkciji dubine i širine ureza

Linije električnog polja za H10 tip talasa su dobijene crtajući linije  $H_z(x,y)=const.$  i prikazane su za dva slučaja ureza na slici 3.13.

Na osnovu izraza za H10 tip talasa datog jednačinom (3.72) uz određene koeficijente po prethodno opisanom metodu izračunata je konstanta slabljenja talasovoda koristeći se opštim obrascem:

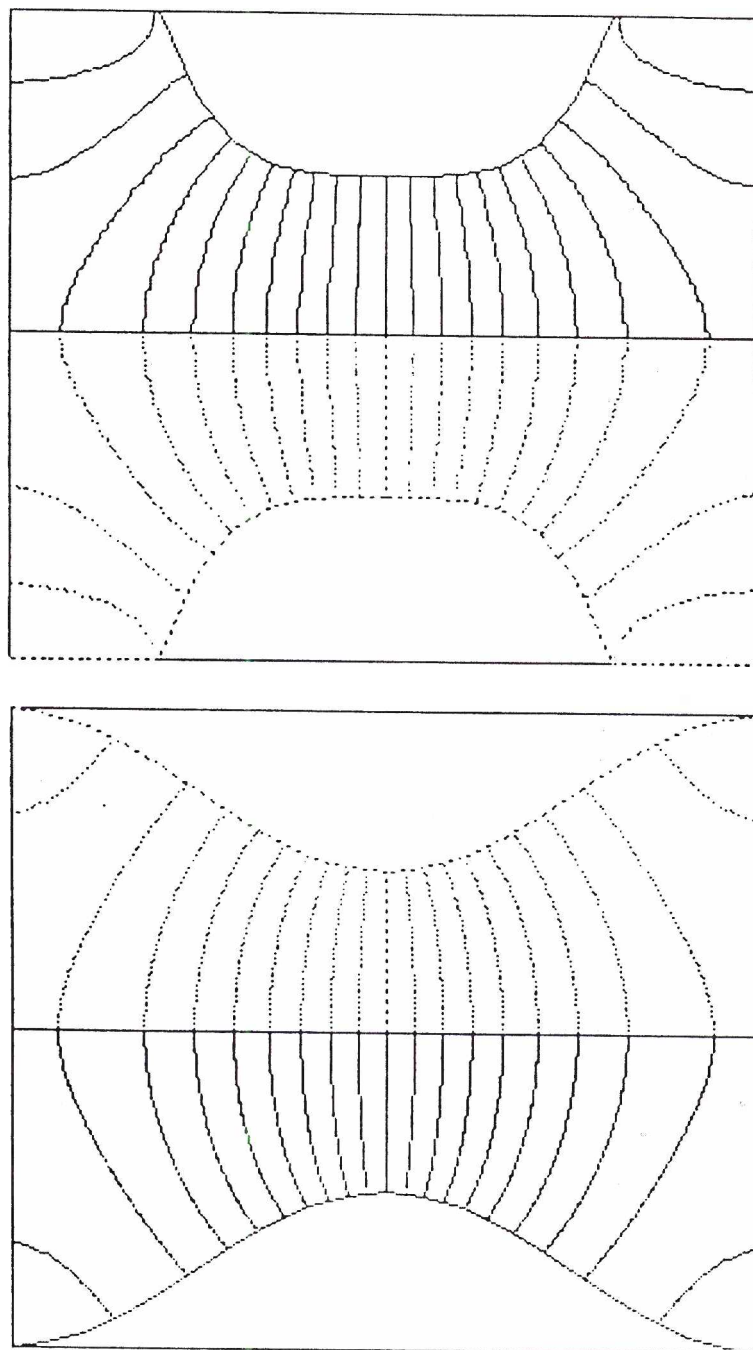
$$\alpha = \frac{1}{2} R_s \frac{L \int |H_t|^2 dl}{\int_S |H_T|^2 dl} \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \quad \dots (3.85)$$

Vrijednosti ostalih komponenti polja koje se koriste u izrazu (3.85) računata se na osnovu relacija (3.64) koristeći izraz za  $H_z$ .

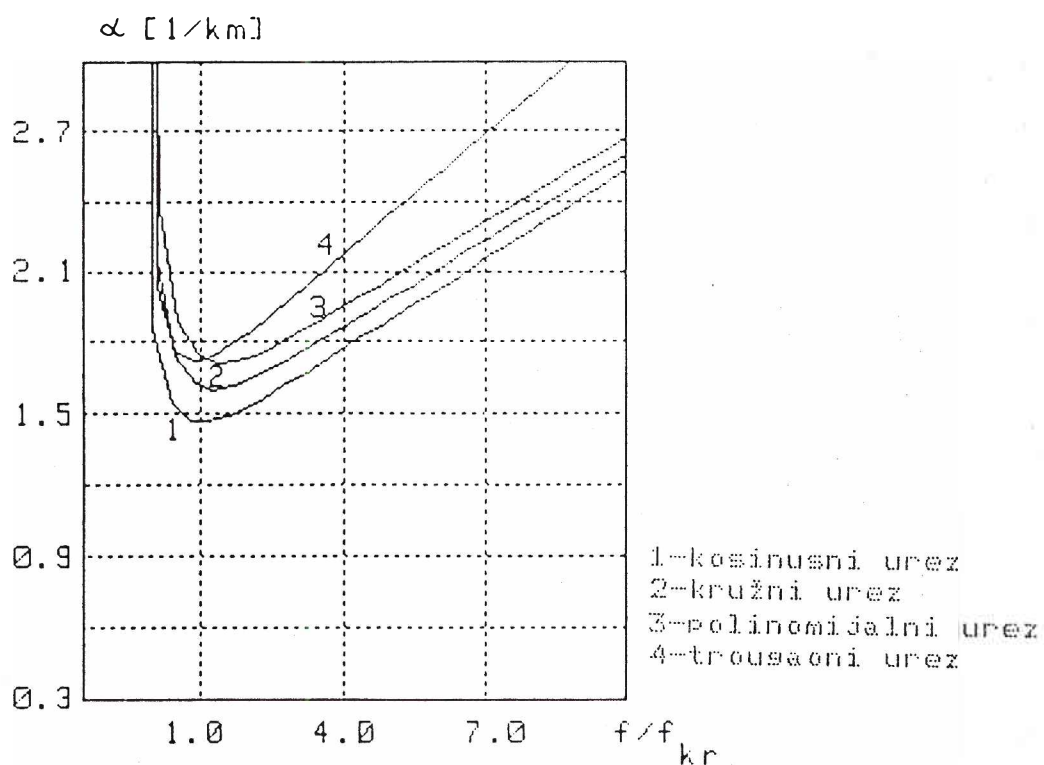
Vrijednosti konstante slabljenja su date na slikama 3.14. i 3.15. za razne oblike ureza sa jedne i dvije strane talasovoda. Radi posmatranja promjene konstante slabljenja u funkciji dubine i širine ureza na slikama 3.16., 3.17.,

3.18. i 3.19. je prikazana konstanta slabljenja za talasovode sa kružnim urezom.

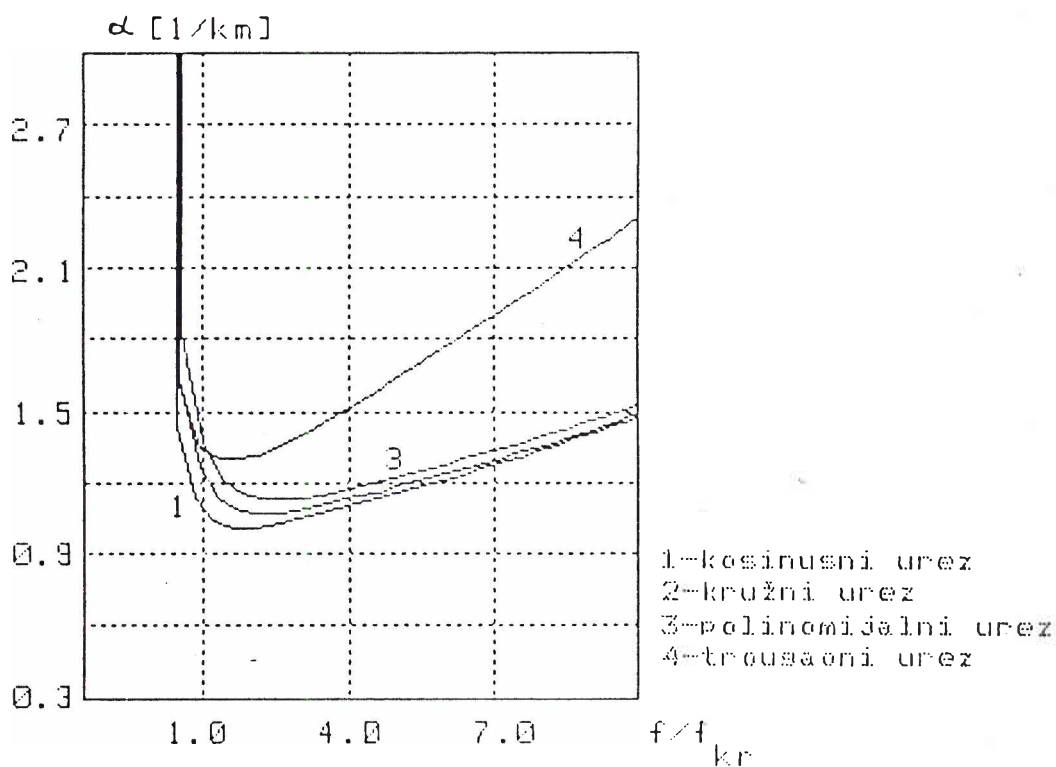
Gubici kod  $\Pi$  i H talasovoda računati su prema obrascu (3.86) lit./2/. i dati su na slici 3.20.



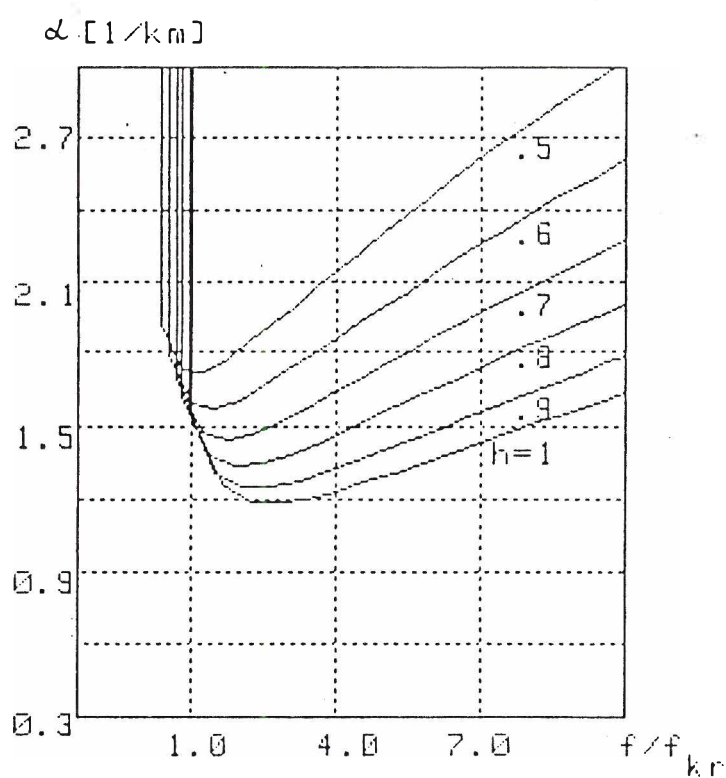
S1. 3.13. Linije električnog polja za H10 tip talasa kod talasovoda sa urezom



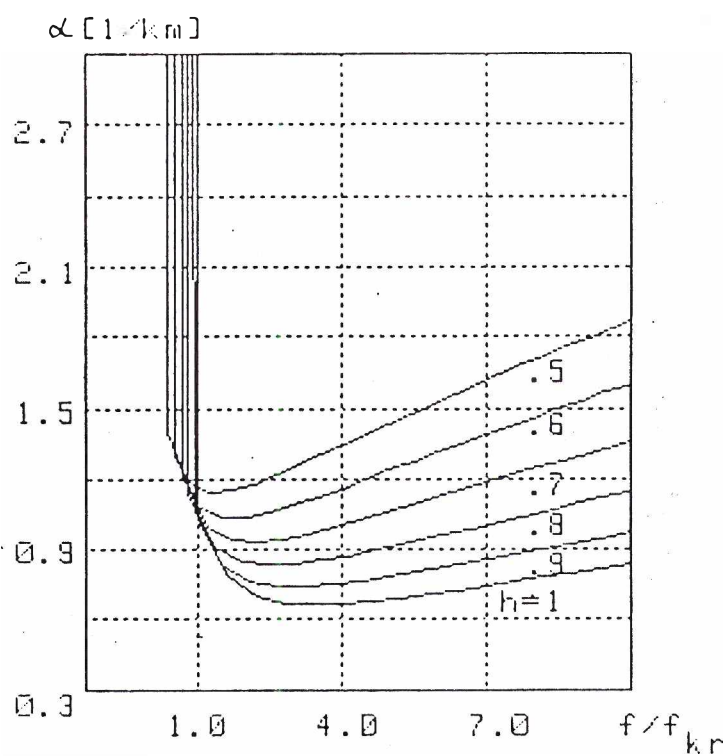
Sl. 3.14. Konstanta slabljenja za talasovod sa jednim urezom i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=1$ ,  $h=0.6$  za razne oblike talasovoda



Sl. 3.15. Konstanta slabljenja za talasovod sa dva ureza i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=1$ ,  $h=0.6$  za razne oblike talasovoda

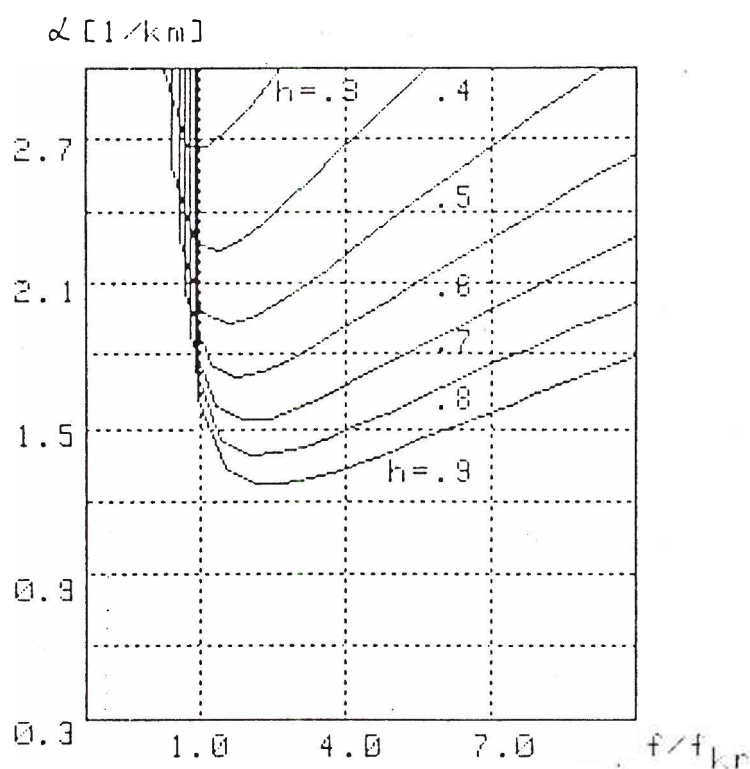


Sl. 3.16. Konstanta slabljenja za talasovod sa jednim kružnim urezom i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=0.6$  za razne vrijednosti dubine  $h$ .

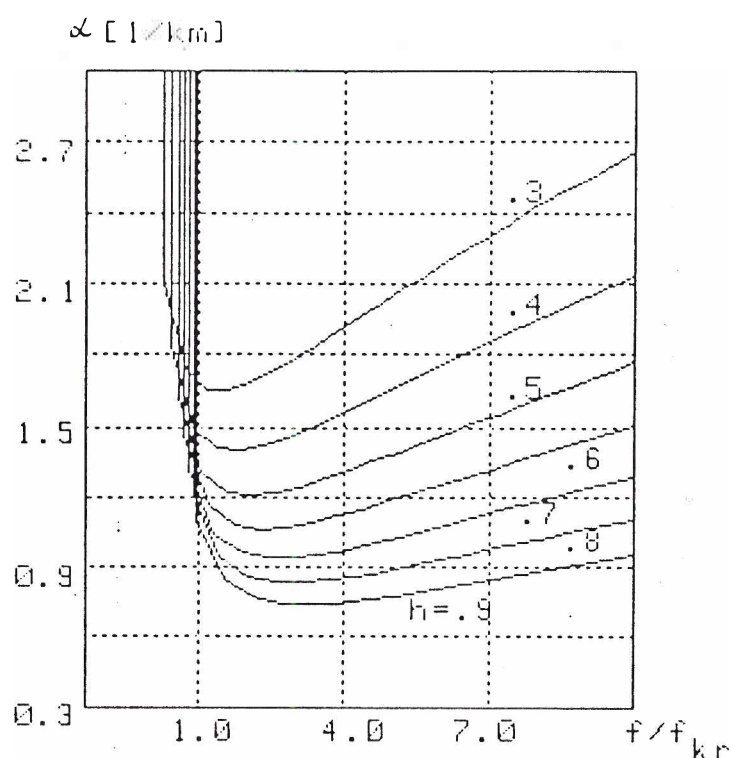


Sl. 3.17. Konstanta slabljenja za talasovod sa dva kružna ureza i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=0.6$  za razne vrijednosti dubine  $h$ .





Sl. 3.18. Konstanta slabljenja za talasovod sa jednim kružnim urezom i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=1.0$  za razne vrijednosti dubine  $h$ .



Sl. 3.19. Konstanta slabljenja za talasovod sa dva kružna ureza i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=1.0$  za razne vrijednosti dubine  $h$ .



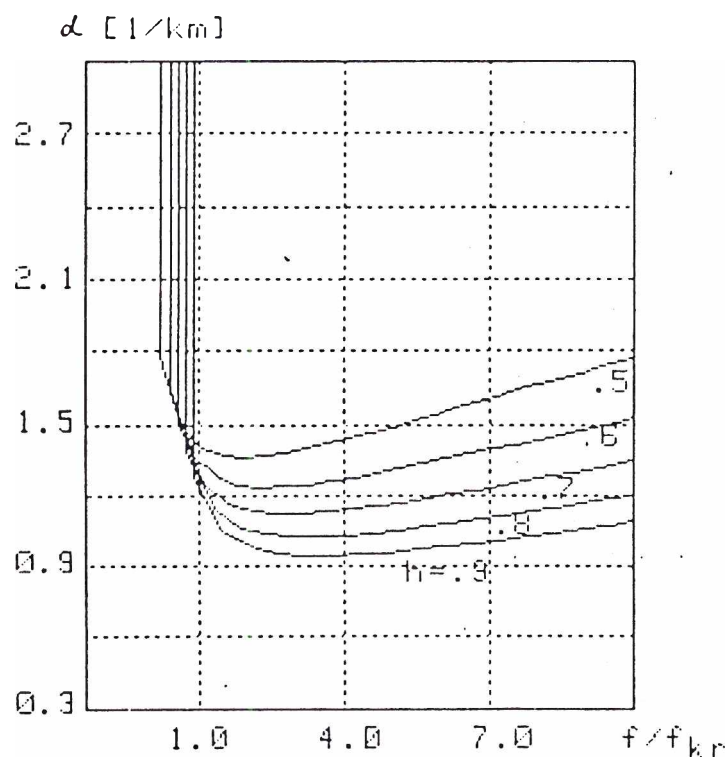
$$\alpha = \frac{R_s((f_{kr}/f)V + U)}{T\sqrt{1-(f_{kr}/f)^2}}$$

$$U = a + \frac{\sin 2kb}{2k} + \frac{k^2 \sin^2 kb}{d^2 \sin^2(k(a/2-b))} \left( a/2 - b - \frac{\sin 2k(a/2-b)}{2k} \right)$$

... (3.86)

$$V = \frac{h^2 \cos^2 kb}{d^2 \sin^2 k(a/2-b)} \left( \frac{\sin 2k(a/2-b)}{k} + 2(d+(d-h)\cos^2 k(a/2-b)) \right) - \frac{\sin 2kb}{k}$$

$$T = 240\pi h \left( b + \frac{\sin 2kb}{2k} + \frac{h \sin^2 kb}{d^2 \sin^2 k(a/2-b)} \left( a/2 - b - \frac{\sin 2k(a/2-b)}{2k} \right) \right)$$

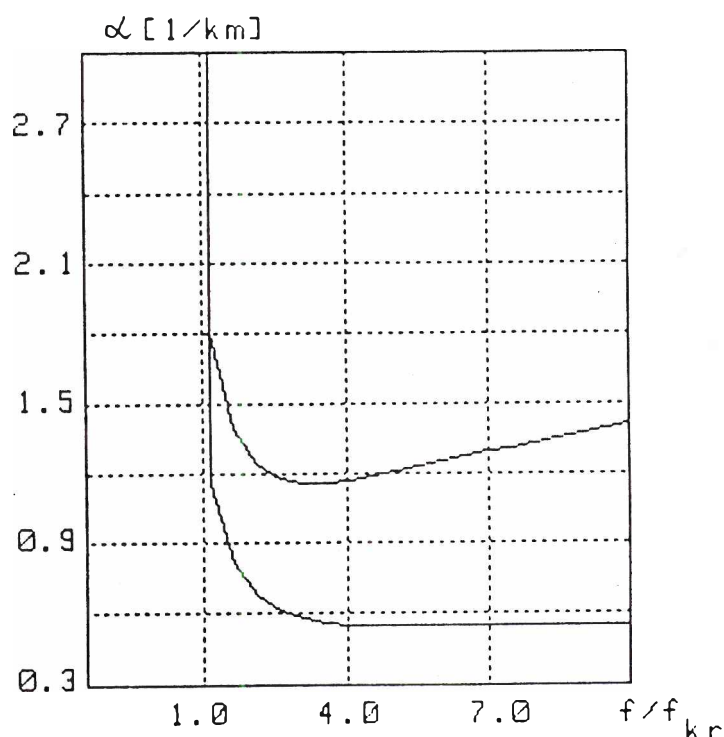


Sl. 3.20. Konstanta slabljenja za H talasovod sa dva pravougaona ureza i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=0.6$  za razne vrijednosti dubine  $h$ .

Upoređujući grafike za vrijednost konstante slabljenja vidi se da se sa smanjenjem širine ureza smanjuju

i subici kod talasovoda. Osim toga može se zaključiti da su subici kod talasovoda sa dvostrukim urezom znatno manji nego subici kod talasovoda sa jednim urezom, dok ostali parametri ostaju isti. Poredjenjem talasovoda sa pravougaonim i zaobljenim urezima može se zaključiti da su za iste dimenzije širine i dubine subici kod pravougaonih talasovoda veći.

Na kraju je analiziran i jedan oblik pravougaonog talasovoda sa ispupčenjem koji je prikazan na slici 3.11. Vrijednost kritičnog broja za H10 tip talasa je računata isto kao i u predhodnim slučajevima i dobijena je vrijednost  $k/(\pi/a) \approx 1.064$  odnosno nešto veća nego kod pravougaonog talasovoda. Maksimalna vrijednost polja u ovom talasovodu je svega 0.359 od vrijednosti maksimalnog polja pravougaonog talasovoda, a i subici su znatno manji što se može vidjeti sa slike 3.21.



Sli. 3.21. Konstanta slabljenja za talasovod sa jednim i dva ispupčenja i dimenzijama  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $b=1.0$ ,  $h=1.4$

### 3.5 ZAKLJUČAK

U ovoj glavi je izložen metod najmanjih kvadrata pri razvoju graničnih uslova po baznim funkcijama. Ukazano je na prednosti koje pruža primjena ovog metoda u odnosu na ostale numeričke metode pri rješavanju elektromagnetnih problema. Efikasnost metoda je provjerena na primjerima raspodjele elektrostatičkog polja, određivanju raspodjele vremenski promjenljivog kako periodičnog tako i aperiodičnog polja. Posebna pažnja je poklonjena primjeni ovog metoda na analizu talasovoda složenog poprečnog presjeka. Analizirano je nekoliko oblika deformisanih pravougaonih talasovoda koji se razlikuju od standardnih i ukazano na njihove prednosti i nedostatke u odnosu na  $E$  i  $H$  talasovode.

#### 4. RAZVOJ GRANIČNIH USLOVA PO BAZNIM FUNKCIJAMA KORISTEĆI FFT ALGORITME

U prethodnoj glavi je izložen razvoj graničnih uslova po baznim funkcijama metodom najmanjih kvadrata. Pokazano je da metod omogućava veoma efikasno rješavanje velikog broja elektromagnetnih problema. Jedini nedostatak metoda je bio u intenzivnom računanju koeficijenata sistema koristeći skalarne proizvode baznih funkcija. U cilju skraćanja vremena računanja korišćene su transformacije baznih funkcija. U radu /45/ je prikazana jedna mogućnost implementacije metoda najmanjih kvadrata koja, u cilju skraćanja vremena računanja, transformiše bazne funkcije u pravougaone impulse.

U ovoj glavi će biti prikazan pristup koji se bazira na algoritmima za brzo računanje Fourierovih transformacija (FFT algoritmi). Zahvaljujući tim algoritmima moguće je skratiti vrijeme računanja tj. broj operacija neophodnih za određivanje koeficijenata sistema lit./46/-/47/.

U prvom dijelu ove glave su izložene teorijske osnove dva pristupa koji koriste Fourierove transformacije baznih funkcija za dobijanje sistema na osnovu koga se određuju koeficijenti razvoja. U drugom dijelu glave je prikazana

njihova primjena pri rješavanju nekoliko elektromagnetnih problema. Analizirani su problemi difrakcije elektromagnetnih talasa sa periodičnih savršeno provodnih struktura. Kao druga grupa primjera na kojima je provjerena efikasnost modifikacija metoda korišćeni su talasovodi složenos poprečnos presjeka. Analizirani su eliptični talasovodi u cilju poređenja dobijenih rezultata sa analitičkim rezultatima, što se često čini, npr. u literaturi /9/-/10/. U cilju promjene karakteristika prije svega smanjenja kritične učestanosti, predloženi su i analizirani eliptični talasovodi sa urezom. Osim eliptičnih talasovoda sa i bez ureza, analizirani su i n-to ugaoeni talasovodi koji imaju, sa povećanjem broja strana  $n$ , karakteristike bliske kružnim, a za razliku od njih imaju stabilniju prostornu polarizaciju duž pravca prostiranja. Na kraju je demonstrirana primjena modifikacija na deformisane pravougaone talasovode sa urezom o kojima je bilo riječi u predhodnoj glavi.

#### 4.1. TEORIJSKA RAZMATRANJA

Posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu definisanu u domenu  $S$  diferencijalnim operatorom  $L$  :

$$L[u(x,y)] = 0 \quad \dots(4.1)$$

Granične uslove, bilo da su Dirichletovos ili Neummanovos tipa označimo sa:

$$l[u(x, l_g(x))] = g(x) \quad \dots(4.2)$$

gdje je sa  $l_g(x)$  označena funkcija koja opisuje graničnu ivicu.

Rješenje ćemo tražiti, kao i u predhodnoj glavi, u obliku sume baznih funkcija  $\varphi_m(x,y)$  diferencijalne jednačine (4.1)

$$u_M(x,y) = \sum_{m=1}^M B_m \varphi_m(x,y) \quad \dots(4.3)$$

Definišimo funkcije  $f_m(x)$  kao:

$$f_m(x) = 1[\varphi_m(x, l_g(x))] \quad \dots(4.4)$$

Pošto bazne funkcije razmatrane u predhodnoj glavi, kao i njihove transformacije primjenom operatora graničnog uslova, zadovoljavaju uslove za razvoj u Fourierov red, to ih možemo napisati, zadržavajući se na prvim  $N$  harmonika, u obliku:

$$f_m(x) = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_m(\nu) e^{j\frac{2\pi}{a}\nu x} \quad \dots(4.5)$$

gdje je sa  $a$  označena dužina ivice koja se posmatra duž  $x$  ose. Koeficijente  $\tilde{F}_m(\nu)$  na osnovu vrijednosti funkcije  $f_m(x)$ , možemo računati pomoću FFT algoritama:

$$\tilde{F}_m(\nu) = \text{FFT}[f_m(n)] \quad \dots(4.6)$$

gdje je  $f_m(n) = f_m(x)_{/x=\frac{2\pi}{a}n}$  označen  $n$ -ti odbirak  $m$ -te bazne funkcije na granici.

Odstupanje od graničnog uslova je:

$$e(x) = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} F_m(\nu) e^{j\frac{2\pi}{a}\nu x} - g(x) \quad \dots(4.7)$$

Označavajući sa  $\tilde{F}_g(\nu)$  Fourierovu transformaciju funkcije graničnog uslova  $g(x)$ :

$$\tilde{F}_g(\vartheta) = \text{FFT}[g(n)] \quad \dots (4.8)$$

i poslije zamjene redosleda sumiranja greška može biti napisana u obliku:

$$e(x) = \sum_{\vartheta=-N/2}^{N/2-1} \left( \sum_{m=1}^M \beta_m \tilde{F}_m(\vartheta) - \tilde{F}_g(\vartheta) \right) e^{j \frac{2\pi}{a} \vartheta x} \quad \dots (4.9)$$

Nepoznati koeficijenti razvoja  $\beta_m$  mogu biti izračunati uzimajući da je prvih  $M$  harmonika greške  $e(x)$  jednako nuli.

U tom slučaju dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_1(-M/2) & \tilde{F}_2(-M/2) & \dots & \tilde{F}_M(-M/2) \\ \tilde{F}_1(-M/2+1) & \tilde{F}_2(-M/2+1) & \dots & \tilde{F}_M(-M/2+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_1(M/2-1) & \tilde{F}_2(M/2-1) & \dots & \tilde{F}_M(M/2-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_g(-M/2) \\ \tilde{F}_g(-M/2+1) \\ \vdots \\ \tilde{F}_g(M/2-1) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Za  $M=N$  smo praktično došli do varijante kolokacionog metoda. Međutim, ovaj oblik je znatno povoljniji od standardnog. Elementi matrice kod standardnog kolokacionog metoda se malo međusobno razlikuju, te je primjena ovog metoda kod sistema visokog reda veoma nestabilna. Za razliku od standardnog metoda matrica u sistemu (4.10) je podešenija i numerički postupak njenog računanja je stabilniji, pošto je razlika među koeficijentima izražena. Osim toga, za razliku od standardnog kolokacionog metoda, ovdje je moguće jednostavno smanjiti red sistema uzimajući da je  $M < N$ . Na taj način se može izbjeći rad sa velikim matricama mada je i ovdje za tačnije rezultate potrebno uzeti dovoljno veliki broj harmonika.

Poboljšanje prethodne procedure se može postići minimiziranjem kvadratne greške umjesto izjednačavanja

koeficijenata sa nulom. Srednja vrijednost kvadratne greške na intervalu  $(0, a)$  jednaka je sumi srednjih vrijednosti svih harmonika.

$$|\bar{e}(x)|^2 = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \left( \sum_{m=1}^M B_m \tilde{F}_m(\nu) - \tilde{F}_g(\nu) \right) \left( \sum_{m=1}^M B_m^* \tilde{F}_m^*(\nu) - \tilde{F}_g^*(\nu) \right) \quad \dots (4.11)$$

Koeficijente razvoja ćemo odrediti iz uslova da desna strana izraza bude minimalna. Iz uslova da izvod izraza (4.11) po realnom dijelu koeficijenata razvoja  $B_m$  bude jednak nuli dobija se:

$$\sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=1}^M \operatorname{Re}[B_l \tilde{F}_l(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu)] = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \operatorname{Re}[\tilde{F}_g(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu)] \quad \dots (4.12)$$

Analogno se za izvod po imasinarnom dijelu dobija:

$$\sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=1}^M \operatorname{Im}[B_l \tilde{F}_l(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu)] = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \operatorname{Im}[\tilde{F}_g(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu)] \quad \dots (4.13)$$

Jednačine (4.12) i (4.13) se mogu napisati u sažetoj formi:

$$\sum_{l=1}^M B_l A_{ml} = B_m \quad m=1, 2, \dots, M \quad \dots (4.14)$$

gdje su sa  $A_{ml}$  i  $B_m$  označene vrijednosti:

$$A_{ml} = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_l(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu) \quad B_m = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_g(\nu) \tilde{F}_m^*(\nu) \quad \dots (4.15)$$

tako se za određivanje nepoznatih koeficijenata razvoja dobija sistem linearnih jednačina:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} \quad \dots (4.16)$$

kod koga je  $A_{ml} = A_{lm}^*$ .

U slučaju da granični uslov  $s(x)=0$  može se primijeniti isti



metod uzimajući da je  $B_1 = -1$  odnosno, da je  $g(x) = f_1(x)$  i određujući ostale koeficiente prema predhodno opisanom metodu.

Veza između procedura opisanih formulama (4.10) i (4.16) može biti nadjena tretirajući obje varijante kao varijante metoda momenata. Zahtjev  $e(x) = 0$  može biti napisan u obliku:

$$\sum_{m=1}^M B_m f_m(x) = g(x) \quad \dots (4.17)$$

Ako kao težinsku funkciju uzmemo konjugovano kompleksnu vrijednost samo jednog harmonika  $m$ -te bazne funkcije  $\tilde{f}_m^*(y) \exp(-2\pi i/a \cdot y)$  na osnovu (4.17) posle dijeljenja sa  $\tilde{f}_m^*(y)$  dobijamo sistem (4.10).

S druge strane ako kao težinske funkcije uzmemo konjugovane vrijednosti baznih funkcija duž granice tj.  $f_l^*(x)$  dobijamo sistem:

$$\sum_{m=1}^M B_m (f_m(x), f_l^*(x)) = (g(x), f_l^*(x)) \quad \dots (4.18)$$

$l=1, 2, \dots, M$

gdje je sa  $(f_m, f_l^*)$  označen skalarni proizvod funkcija  $f_l^*$  i  $f_m$  u intervalu  $(0, a)$ . Sistem (4.18) je ekvivalentan zahtjevu da je srednja kvadratna greška minimalna. Uvodeći Fourierove transformacije baznih funkcija i graničnog uslova u (4.18) uz ortogonalnost harmonika u integracionom intervalu dobijamo sistem (4.16).

Tako smo došli do zaključka da je sistem (4.16) opštiji pošto uzima u obzir kompletne FT baznih funkcija kao težinske funkcije, a sistem (4.10) je specijalan slučaj koji uzima samo jedan harmonik bazne funkcije kao težinsku

funkciju. Uzimajući isti red sistem (4.16) će dati bolju tačnost nego sistem (4.10), ali uz znatno više vremena pri računanju. U cilju postizanja tačnijih rezultata interval integracije treba podijeliti na veliki broj podseka, tj. treba uzeti veliki broj odbiraka pri računanju Fourierove transformacije. Međutim, u sumi (4.16) moguće je uzeti samo  $N_1$  članova koji najviše doprinose njenoj vrijednosti. U smislu predhodne diskusije to znači uzeti  $N_1$  harmonik bazne funkcije kao težinsku funkciju. U tom slučaju  $N_1$  članova sume (4.15) je grupisano oko frekvencije za koju proizvod  $F_m(\nu) \times F_l^*(\nu)$  ima maksimalnu vrijednost. Određivanje ovih frekvencija u slučaju baznih funkcija izloženih u predhodnoj glavi je jednostavno. Ako uzmemo  $N_1=0$  onda dobijamo varijantu (4.10). Konvergencija rezultata u odnosu na  $N_1$  je veoma brza, tako da uzimajući samo nekoliko najbližih harmonika, dobijamo rezultate gotovo identične rezultatima kada uzimamo svih  $N$  računatih harmonika.

Ako uzmemo da je  $N$  broj odbiraka baznih funkcija (podeoka pri računanju integrala u standardnom metodu najmanjih kvadrata) onda pri korišćenju standardnog metoda najmanjih kvadrata za  $M$  članova reda (tj.  $M$  koeficijenata razvoja) treba izvršiti ukupno  $M \times M \times N$  množenja i sabiranja. U našoj modifikaciji sa  $N$  odbiraka i  $M$  koeficijenata razvoja broj računskih operacija za dobijanje Fourierovih koeficijenata je  $M \times N \times \log_2 N$ . A zatim, uzimajući  $N_1$  kao broj članova koji najviše doprinose sumama (4.15) treba izvršiti još dodatnih  $M \times M \times N_1$  operacija. Sve zajedno, odnos broja računskih operacija u modifikovanom metodu i standardnom metodu je:

$$R_t = \frac{N_1}{N} + \frac{\log_2 N}{M} \quad \dots (4.19)$$

Ako uzmemo samo jedan harmonik kao težinsku funkciju, tj. sistem (4.10) onda je odnos:

$$R_{to} = \frac{\log_2 N}{M} \quad \dots (4.20)$$

Predhodni odnosi dati izrazima (4.19) i (4.20) ne uzimaju u obzir broj računskih operacija potrebnih za rješavanje sistema linearnih jednačina (4.16). Pošto je ovaj broj reda  $M^3/3$  to se za ukupni odnos broja računskih operacija dobija:

$$R_t = \frac{\frac{M}{3N} + \frac{N_1}{N} + \frac{\log_2 N}{M}}{\frac{M}{3N} + 1} \quad \dots (4.20a)$$

Treba primijetiti da je za realne probleme broj članova reda  $M$  znatno manji od broja odbiraka  $N$  (integracionih podseka u originalnom metodu najmanjih kvadrata). Čak i ako je  $M=N$  i  $M$  veliki broj pokazuje se da je ušteda u računanju znatna.

U slučaju da su dati dvostruki granični uslovi ili pak jedan granični uslov duž dvije granične linije  $l_1(x)$  i  $l_2(x)$  onda se predhodni metod može koristiti uz određene modifikacije. U tom slučaju se formira ekvivalentni skup od dva skupa baznih funkcija:

$$\varphi_m(x,y) = \begin{cases} \varphi_{1m}(x,y) & 1 \leq m \leq M \\ \varphi_{2m-M}(x,y) & M+1 \leq m \leq 2M \end{cases} \quad \dots (4.21)$$

a rješenje se traži u obliku:

$$u_{2M}(x,y) = \sum_{m=1}^{2M} B_m \varphi_m(x,y) \quad \dots (4.22)$$

Neka je dat dvostruki granični uslov na granici opisanoj sa

$l_g(x)$ . Greška se sastoji iz dvije komponente:

$$e_1(x) = \sum_{m=1}^{2M} B_{m1} [\varphi_m(x, l_g(x))] - g_1(x) \quad \dots (4.23)$$

$$e_2(x) = \sum_{m=1}^{2M} B_{m2} [\varphi_m(x, l_g(x))] - g_2(x)$$

ili u obliku Fourierovog reda:

$$e_i(x) = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( \sum_{m=1}^{2M} B_{im} F_{im}(\nu) - F_{ig}(\nu) \right) e^{j \frac{2\pi}{a} \nu x} \quad \dots (4.24)$$

gdje su  $l_1$  i  $l_2$  operatori graničnog uslova duž linije  $l_g(x)$ . Nepoznate koeficijente  $B_m$  ( $m=1, 2, \dots, 2M$ ) možemo dobiti izjednačavajući prvih  $M$  harmonika greške  $e_1(x)$  i prvih  $M$  harmonika greške  $e_2(x)$  sa nulom.

$$\begin{bmatrix} F_{11}(-M/2) & F_{12}(-M/2) & \dots & F_{1M}(-M/2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{11}(M/2-1) & F_{12}(M/2-1) & \dots & F_{1M}(M/2-1) \\ F_{21}(-M/2) & F_{22}(-M/2) & \dots & F_{2M}(-M/2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{21}(M/2-1) & F_{22}(M/2-1) & \dots & F_{2M}(M/2-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \\ B_{M+1} \\ \vdots \\ B_{2M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1g}(-M/2) \\ \vdots \\ F_{1g}(M/2-1) \\ F_{2g}(-M/2) \\ \vdots \\ F_{2g}(M/2-1) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Ako se koristi minimiziranje srednje kvadratne greške duž granice onda se minimiziranjem izraza:

$$|\bar{e}(x)|^2 = |\bar{e}_1(x)|^2 + k_N |\bar{e}_2(x)|^2 \quad \dots (4.26)$$

dobija sistem analogan sistemu (4.16) kod koga su koeficijenti:

$$A_{m1} = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_{11}(\nu) \tilde{F}_{1m}^*(\nu) + k_N \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_{21}(\nu) \tilde{F}_{2m}^*(\nu)$$

$$B_m = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_{1g}(\nu) \tilde{F}_{1m}^*(\nu) + k_N \sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}_{2g}(\nu) \tilde{F}_{2m}^*(\nu) \quad \dots (4.27)$$

gdje je  $k_N$  težinski koeficijentat drugog u odnosu na prvi

granični uslov i ako drugačije nije naznačeno uzeto je da ima vrijednost jednaku jedinici.

#### 4.2. PRIMJENA MODIFIKOVANOG METODA

U ovom poglavlju će biti izložena primjena modifikovanog metoda najmanjih kvadrata pri analizi problema difrakcije elektromagnetnih talasa sa periodičnih struktura, kao i talasovoda složenog poprečnog presjeka.

##### 4.2.1 DIFRAKCIJA ELEKTROMAGNETNIH TALASA SA PERIODIČNIH PLOŠTINA

Difrakcija talasa sa periodičnih struktura je veoma interesantna za proučavanje zbog široke klase problema u kojima je neophodno analizirati ovu pojavu. U tu klasu spadaju: difrakcione rešetke koje se koriste u spektroskopiji /48/, difrakcija sa atoma u kristalnoj strukturi /49/ i difrakcija talasa sa nepravilnih površina (metalnih, vodenih /50/ ili drugih površina). Teorijsko proučavanje ovih problema počinje od Lorda Rayleigha koji je pretpostavio da se ukupno polje može predstaviti sumom diskretnih komponenti reflektovanog i transmitovanog talasa. Način korišćenja ovih komponenti od postavljanja pretpostavke do danas je veoma česta tema mnogih radova, jer se u slučaju rešetke na sl.4.1., striktno govoreći, može tvrditi da samo reflektovane komponente postoje u prostoru iznad najviše tačke, odnosno transmitovane komponente u prostoru ispod najniže tačke periodične strukture.

U mnogim radovima je pokazano da se predstavljanje talasa sumom diskretnih komponenti održivo jedino za prostor iznad najviše, odnosno ispod najniže tačke, a da takvo predstavljanje između ove dvije tačke važi jedino za male odnose visine i periode rešetke tj za  $2\pi h/d < 0.448$  lit./51/ i /52/. U nizu radova problemi rešetke su zbog toga rješavani koristeći razne varijante razvoja funkcije talasa u oblasti između najviše i najniže tačke s jedne strane i ostalog prostora sa druge strane, a zatim su raznim metodama izjednačavanjem graničnih uslova dobijena rješenja /53/, ili se polje dobija odradđivanjem gustine struje na površini lit./54/-/55/. U radu /25/ je pokazano da se poboljšanim kolokacionim metodom može dobiti zadovoljavajuće rješenje koristeći diskretne harmonike u čitavom prostoru i za slučajeve kada je  $2\pi h/d > 0.448$ .

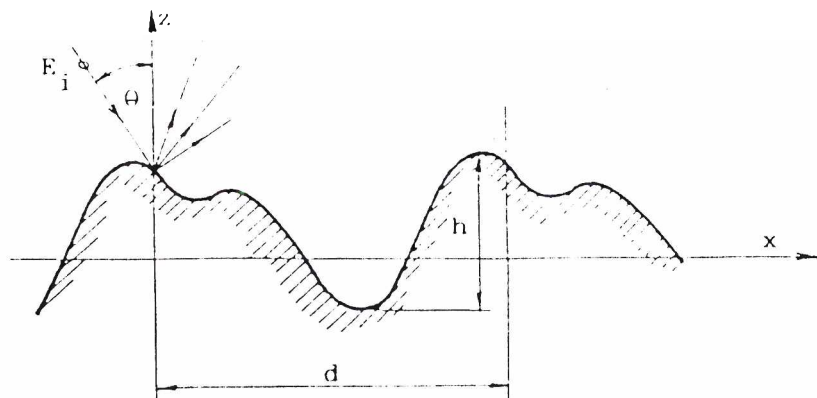
Biće pokazano da se korišćenjem modifikovanog metoda najmanjih kvadrata, koja je predložena u prethodnom poglavlju ovog rada, dobija veoma precizno rešenje za visine rešetke koje su znatno veće od  $h = 0.448d/(2\pi)$ , tj. od visine  $h$  za koju se do sada pretpostavljalo da predstavljanje polja Rayleighovim diskretnim sistemom komponenti ostaje u važnosti.

#### 4.2.1.1 TEORIJSKI OSVRT NA DIFRAKCIJU SA PERIODIČNIH STRUKTURA

Prostiranje elektromagnetnih talasa, kao što je pokazano u prethodnoj glavi može se opisati jednačinom:

$$\dots (4.28)$$

gdje je  $U$  nepoznata funkcija koja može predstavljati bilo električno, bilo magnetno polje u zavisnosti od tipa polarizacije talasa. Funkcija  $U$  se može odrediti imajući u vidu dobro poznate granične uslove na provodnoj površini, odnosno razdvajnoj površini između dvije sredine.



Sl.4.1. Poprečni presjek refleksione površine

Na talas koji ima komponentu prostiranja u pravcu  $x$  ose sa konstantom  $k_x = k \sin \theta$ , utiče periodična struktura rešetke. Rješenje prema Rayleighovoj aproksimaciji tražimo u obliku:

$$u = e^{-jk \sin \theta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z) e^{-j \frac{2\pi}{d} n x} \quad \dots (4.29)$$

sa  $d$  je označena perioda rešetke, a sa  $a_n(z)$  koeficijenti koji definišu uticaj periodične strukture na talas duž  $x$  ose.

Zamjenjujući izraz  $U$  u jednačini (4.28) dobija se jednačina:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 a_n(z)}{\partial z^2} + (k^2 - (k \sin \theta + \frac{2\pi}{d} n)^2) a_n(z) \right) e^{-j(k \sin \theta + \frac{2\pi}{d} n)x} = 0 \quad \dots (4.30)$$

izjednačavajući svaki član sa nulom dobija se:

$$\frac{\partial^2 a_n(z)}{\partial z^2} + k^2 \cos^2 \theta_n a_n(z) = 0 \quad \dots (4.31)$$

gdje je:

$$\cos^2 \theta_n = \sqrt{1 - (\sin \theta + \frac{n\lambda}{d})^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_n} \quad \dots (4.32)$$

pa imamo:

$$a_n(z) = u_n e^{-jk \cos \theta_n z} \quad \dots (4.33)$$

odnosno zamjenjujući ovu vrijednost u izraz za  $u$  dobija se:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{-jk(\sin \theta_n x + \cos \theta_n z)} \quad \dots (4.34)$$

gdje se znak "+" uzima za komponente reflektovanog talasa, a "-" za komponente transmitovanog talasa.

Treba napomenuti da prethodni izraz predstavlja polje iznad najviše, odnosno ispod najniže tačke na rešetki, a da pitanje njegove konvergencije unutar ovih granica zavisi od primijenjenog metoda. U sledećim paragrafima će biti pokazano da predstavljajući talas izrazom (4.34) dobijamo veoma dobre rezultate usvajajući da je polje istog oblika i u unutrašnjosti rešetke. Ovo pruža veliku pogodnost pri rješavanju problema ovim metodom.

#### 4.2.1.2. MODIFIKOVANI METOD U PROBLEMIMA DIFRAKCIJE

Rješavanje problema difrakcije se, uz usvajanje Rayleighove aproksimacije u čitavom prostoru, svodi na određivanje koeficijenata  $U_n$  u jednačini (4.34). Prepostavićemo da je incidentalni elektromagnetni talas normalno polarizovan imajući u vidu da je analiza paralelno polarizovanih talasa potpuno analogni. U slučaju normalne polarizacije rješenje za reflektovani talas tražimo u obliku sume komponenti:

$$E_r = \sum_{m=-M}^M E_{rm} e^{-jk(\sin \theta_m x + \cos \theta_m z)} \quad \dots (4.35)$$



U skladu sa teorijskim izlascima u poglavlju 4.1 bazne funkcije u ovom slučaju imaju oblik:

$$f_m(x,y) = e^{-jk(\sin\theta_m x + \cos\theta_m z)} \quad \dots (4.36)$$

a funkcija graničnog uslova se dobija iz uslova da je tangencijalna komponenta električnog polja na granici jednaka nuli, tj:

$$E_i + E_r = 0 \quad \text{na granici } lg(x) \quad \dots (4.37)$$

pa se dobija da je:

$$g(x) = -E_i = -e^{-jk(\sin\theta x + \cos\theta z)} \quad \dots (4.38)$$

Koeficijente  $E_m$  prema naprijed opisanom metodu možemo dobiti iz uslova da prvih  $2M+1$  harmonika greške bude jednako nuli, što daje sistem (4.10), odnosno iz uslova da srednja kvadratna greška bude minimalna, pri čemu se dobija sistem (4.16). Svi koeficijenti u pomenutim sistemima  $\tilde{F}_m(y)$ ,  $A_m$ ,  $B_m$  mogu se odrediti na osnovu funkcija  $f_m(x, lg(x))$  i  $g(x)$  na već opisani način.

Tačnost dobijenih rezultata se može provjeriti izračunavanjem greške na graničnoj površini ili što se znatno češće čini, provjerom energetske bilansa, tj. provjerom uslova da energija incidentalnog talasa bude jednaka sumi energija reflektovanih komponenti koje se prostiru (kod kojih je  $|\sin\theta_m| < 1$ ). Uzimajući da je amplituda incidentalnog talasa jednaka jedinici onda i energija reflektovanih komponenti treba da bude jednaka jedinici, tj. da je:

$$\sum_m |E_m|^2 \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} = 1 \quad \dots (4.39)$$

gdje se sumiranje vrši po koeficijentima  $m$  za koje je  $|\sin\theta| < 1$ . Koeficijenti refleksije su dati izrazom:

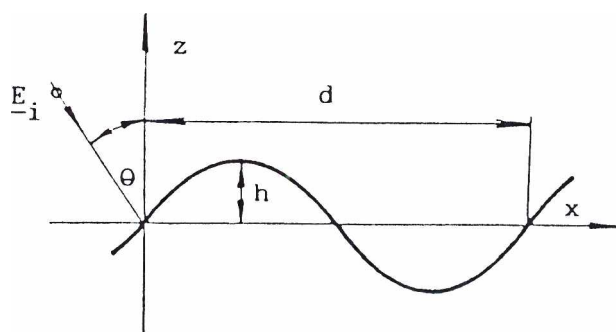
$$R_m = |E_m|^2 \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} \quad \dots (4.40)$$

#### 4.2.1.3. NUMERIČKI REZULTATI

a) Kao referentni oblik za poredjenje metoda najčešće se koristi sinusna površina lit./50/-/55/ čiji je oblik definisan sa:

$$z = h \sin \frac{2\pi}{d} x \quad \dots (4.41)$$

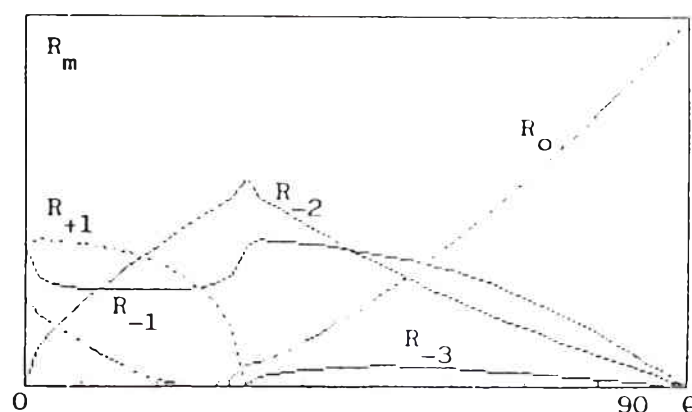
i dat na slici 4.2.



Sl.4.2 Sinusna rešetka

U tom slučaju primjenom prethodno opisanog metoda izračunali smo koeficijente refleksije i provjerili energetske bilans.

Za slučaj  $d/\lambda=2$  i  $h/\lambda=0.5$  koeficijenti refleksije su prikazani na sl.4.3, a vrijednosti energetskog bilansa za razne vrijednosti broja susjednih harmonika  $N_1$  je data u Tabeli 4.1.



Sl.4.3 Koefficientsi refleksije

Greška je manja od 0.5% za  $N_1=0$  i  $N=64$  tj. u slučaju kada se koristi sistem (4.10). Za  $N_1=31$  greška je manja od 0.002%. U

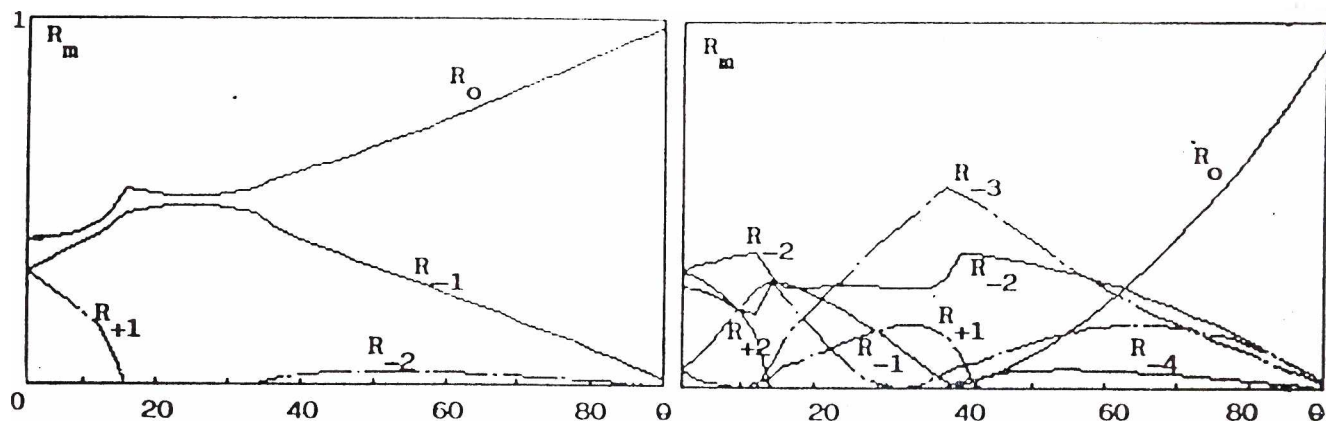
difrakcija sa sinusoidalne rešetke					
$d/\lambda=2, \quad h/\lambda=0.5 \quad M=15$					
$N_1=31$		$N_1=3$		$N_1=0$	
usao	energ. bil.	usao	energ. bil.	usao	energ. bil.
0	0.9999929	0	1.000010	0	0.9981373
10	0.9999952	10	1.000241	10	1.0007950
20	0.9999846	20	1.000772	20	0.9956011
30	0.9999901	30	1.000671	30	1.0000000
40	0.9999971	40	1.000107	40	1.0003840
50	0.9999933	50	1.000088	50	1.0018050
60	0.9999891	60	1.000021	60	1.0022290
70	0.9999902	70	1.000407	70	1.0003760
80	0.9999973	80	1.000104	80	0.9978624
89	0.9999979	89	1.000029	89	1.0005470

Tabela 4.1 Energetski bilans kod sinusoidalne rešetke

prvom slučaju kada je  $N_1=0$  koefficientsi sistema se dobijaju 5.18 puta brže nego koristeći originalni metod najmanjih kvadrata. Iz Tabele 4.1 vidimo da uzimajući  $N_1=3$  greška je veoma bliska vrijednosti pri  $N_1=31$ . U slučaju kada je  $N_1=3$  računanje je 4 puta brže nego koristeći originalni metod.

Koefficientsi refleksije za slučajeve  $d/\lambda=1.33$  i  $h/\lambda=0.135$  i  $d/\lambda=2.5$  i  $h/\lambda=0.375$  su prikazani na sl.4.4, a vrijednost

energetskog bilansa je data u tabeli 4.2.



#### Sl.4.4 Koefficienti refleksije

a)  $h/\lambda=0.1333$   $d/\lambda=1.3$       b)  $h/\lambda=0.375$   $d/\lambda=2.5$

!difrakcija sa sinusne rešetke!	
! $d/\lambda=2.5$ $h/\lambda=0.375$ $M=15$ !	
! ugao	! energ. bil.
! 0	! 0.9995761
! 10	! 0.9994044
! 20	! 0.9997635
! 30	! 0.9993797
! 40	! 0.9998330
! 50	! 0.9996443
! 60	! 0.9995366
! 70	! 0.9993890
! 80	! 0.9999954
! 89	! 0.9999812

Tabela 4.2 Energetski bilans

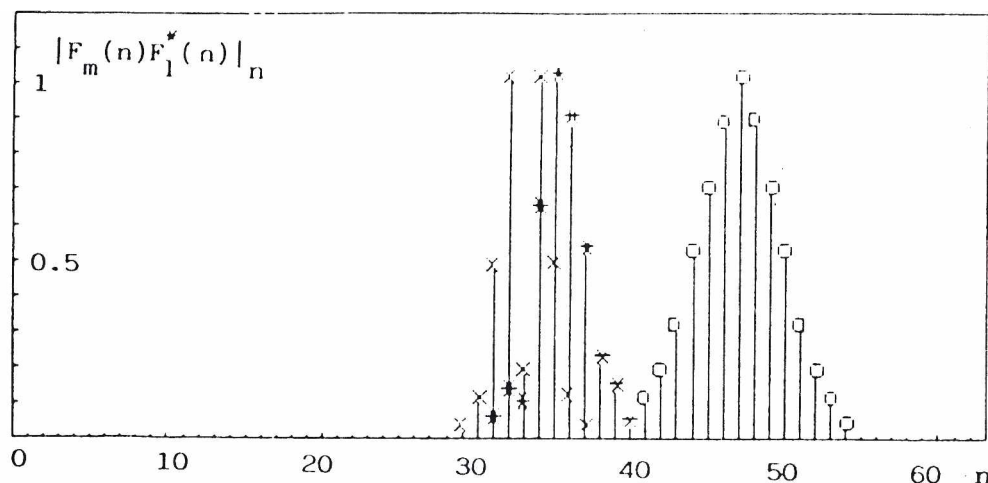
Greška je manja od 0.06% za sinusoidalni profil sa  $h/\lambda=2.5$ .

Ova tačnost je postignuta za  $M=15$  i  $N=64$  odbirka.

Normalizovana vrijednost članova u sumi koja definiše koeficijente  $A_{ml}$  je prikazana na sl.4.5.

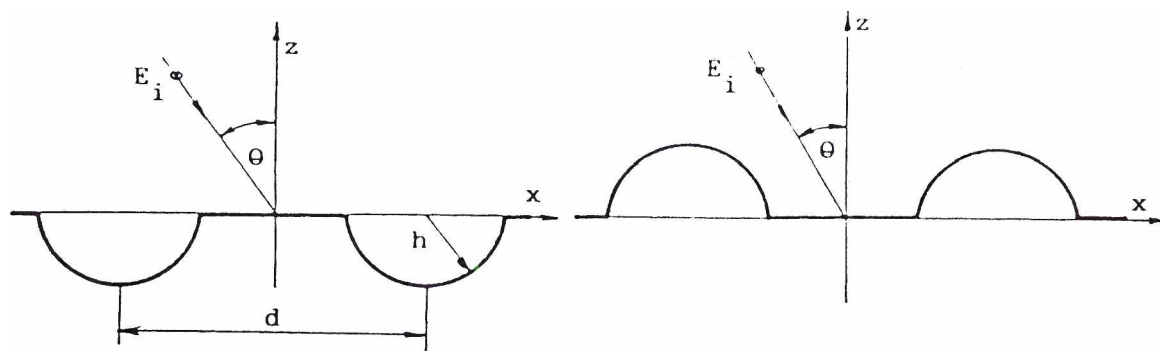
Vidi se da je u sumi dovoljno uzeti svega nekoliko harmonika oko centralnih vrijednosti koje su funkcije reda harmonika i ugla  $\theta$ . Na primjer za  $\theta=0$   $A_{ml}$  član ima maksimalnu vrijednost oko  $(m+1)=109$  harmonika. Uzimajući 13 okolnih članova, tj.

$N_1=13$ , vremenski koeficijent je  $R_t=0.4$  što znači da je ušteda u vremenu 2.5 puta, a rezultati su gotovo isti.



Sl.4.5 Normalizovana vrijednost koeficijenata  $|F_m(\gamma)F_l^*(\gamma)|$

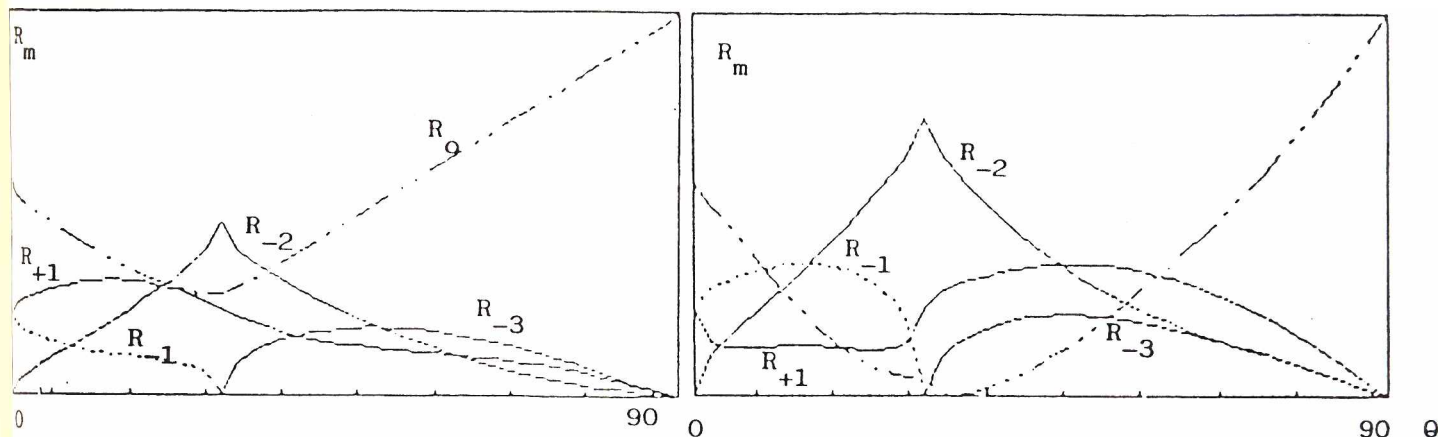
b) Efikasnost metoda je provjerena i na znatno složenijim problemima polukružnog oblika rešetke kao i oblika inverznog ovog oblika koji je prikazan na sl.4.6, a analiziran je u [50].



Sl.4.6 Polukružna rešetka

Koeficijenti refleksije su dati na sl.4.7, a provjera energetskog bilansa u Tabeli 4.3.

Greška je manja od 2% za polukružnu rešetku pri  $N_1=5$ , a čak manja od 0.3% za  $N_1=31$ . Ovo je postignuto sa  $M=15$  i  $N=256$  odbiraka duž zida tj. u intervalu  $(0, d)$ . Uzimajući  $N_1=0$



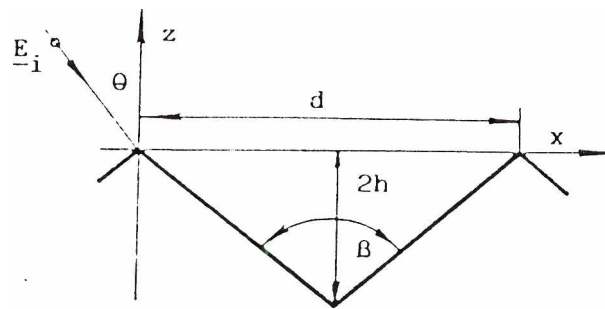
Sl.4.7 Koefficientsi refleksije  
a) inverzna rešetka      b) polukružna rešetka

nijesu se mogli dobiti zadovoljavajući rezultati za sve uslove incidencije pa nijesu ni dati. Za  $N=256$ ,  $M=15$  i  $N_1=31$  odnos potrebnih računskih operacija je 0.5 što znači da je modifikovana varijanta 2 puta brža od originalnog metoda, a za  $N_1=5$  čak 3.5 puta brža.

difrakcija sa polukružne rešetke				
$d/\lambda=2$ $h/\lambda=0.5$ $M=15$				
$N_1=5$		$N_1=31$		
ugao	energ. bil.	ugao	energ. bil.	
0	1.0047280	0	1.0021250	
10	0.9908099	10	1.0006920	
20	0.9837392	20	0.9970310	
30	1.0181570	30	0.9975786	
40	0.9955971	40	1.0004160	
50	0.9827893	50	1.0007570	
60	0.9863375	60	1.0020270	
70	1.0016860	70	1.0028000	
80	0.9929035	80	1.0022110	
89	1.0012530	89	1.0005470	

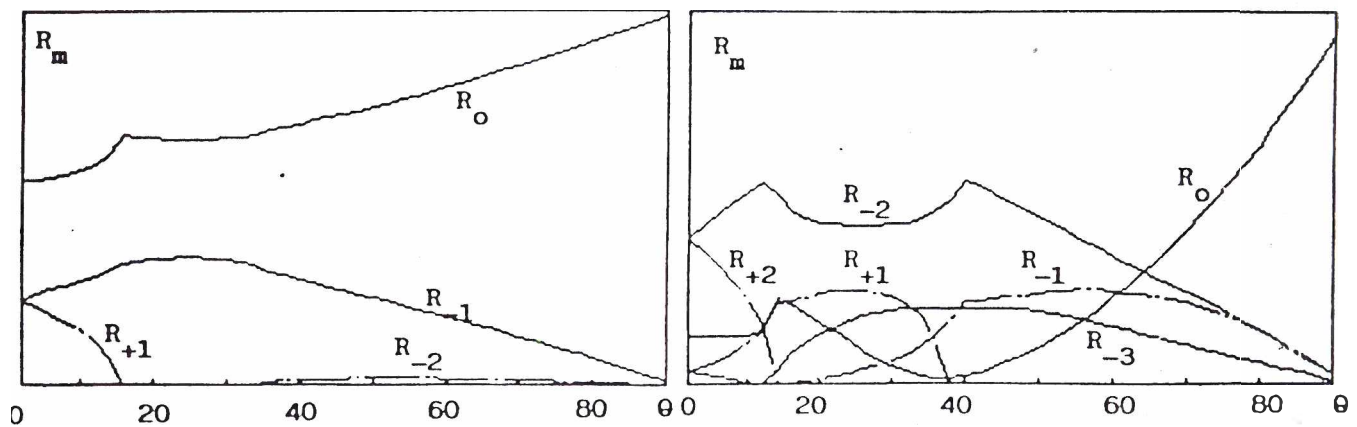
Tabela 4.3 Energetski bilans

c) Kao treći primjer razmatrana je trougaona rešetka prikazana na sl.4.8 koja se praktično najčešće koristi.



Sl.4.8 Trougaona rešetka

Koeficijenti refleksije i energetske bilans su dati na sl.4.9 i u Tabeli 4.4.



Sl.4.9 Koeficijenti refleksije

a)  $h/\lambda=0.1333$   $d/\lambda=1.3$  b)  $h/\lambda=0.375$   $d/\lambda=2.5$

difrakcija sa trougaone rešetke!	
$d/\lambda=2.5$ $h/\lambda=0.375$ $M=15$	
ugao	energ. bil.
0	0.9907514
10	0.9923179
20	0.9910881
30	0.9908311
40	0.9969598
50	0.9950774
60	0.9950853
70	0.9988467
80	0.9991010
89	1.000253

Tabela 4.4 Energetski bilans

Greška je manja od 1% koristeći  $M=15$  i  $N=64$  odbirka duž zida za slučaj  $d/\lambda=2.5$  i  $h/\lambda=0.375$ , a za  $d/\lambda=1.3$  i  $h/\lambda=0.133$  čak i znatno manja uzimajući  $M=10$ .

Vidi se da u svim prethodnim slučajevima uprkos relativno velikoj dubini, dobijeni su veoma dobri rezultati koji se u potpunosti slažu sa poznatim rezultatima navedenim u literaturi. Ušteda u vremenu u odnosu na standardni metod najmanjih kvadrata je veoma značajna.

#### 4.2.1.4 PROBLEMI DIFRAKCIJE SA OTVORENIM PERIODIČNIM STRUKTURAMA

U ovom paragrafu će biti razmatran problem difrakcije kada osim reflektovanog talasa imamo i transmitovani talas. Problem je u tom slučaju znatno složeniji i razmatran je uz određena ograničenja, npr. u lit. /57/ samo za normalno nailazeći talas na trakastu strukturu.

Primjena modifikovanog metoda će biti prikazana na rešavanju ovih problema i to u veoma složenim slučajevima, kako za trakaste rešetke pri svim uslovima incidencije, tako i struktura sa cilindričnim provodnicima čije su dimenzije istog reda veličine sa rastojanjem među njima.

U ovom slučaju imamo i reflektovani i transmitovani talas koje možemo napisati u obliku:

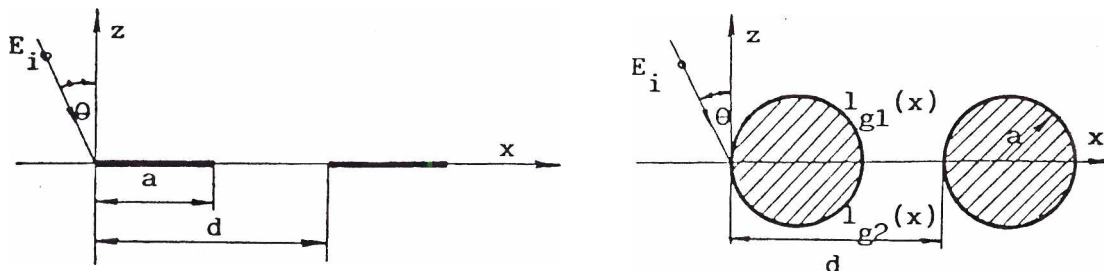
$$E_r(x,y) = \sum_{m=-N}^N E_{rm} e^{jk(\sin\theta_m x + \cos\theta_m z)}$$

$$E_t(x,y) = \sum_{m=-N}^N E_{tm} e^{jk(\sin\theta_m x + \cos\theta_m z)} \quad \dots (4.42)$$



odje su:

$$\sin\theta_m = \sin\theta - m\lambda/d \quad \cos\theta_m = \sqrt{1 - \sin^2\theta_m} \quad \dots (4.43)$$



Sl.4.10 Cilindrična i trakasta struktura rešetke

Iz Maxwellove jednačine neposredno se mogu odrediti tangencijalne komponente magnetnog polja:

$$H_{rt} \sim \frac{\partial E_r}{\partial z} = \sum_{m=-M}^M -\cos\theta_m E_{rm} e^{-jk(\sin\theta_m x + \cos\theta_m z)}$$

$$H_{tt} \sim \frac{\partial E_t}{\partial z} = \sum_{m=-M}^M \cos\theta_m E_{tm} e^{-jk(\sin\theta_m x - \cos\theta_m z)} \quad \dots (4.44)$$

Granični uslov za električno polje na trakama zahtijeva da je:

$$E_i + E_r = 0 \quad \text{i} \quad E_t = 0 \quad \text{za } 0 < x < a \quad \dots (4.45)$$

što daje

$$\sum_{m=-M}^M E_{rm} e^{-jk(\sin\theta_m x + \cos\theta_m l_{g1}(x))} = -e^{-jk(\sin\theta x - \cos\theta l_{g1}(x))}$$

$$\sum_{m=-M}^M E_{tm} e^{-jk(\sin\theta_m x - \cos\theta_m l_{g1}(x))} = 0 \quad \dots (4.46)$$

S druge strane kontinualnost elektromagnetnog polja duž otvora rešetke zahtijeva:

$$E_i + E_r = E_t \quad \text{i} \quad H_{it} + H_{rt} = H_{tt} \quad a < x < d \quad \dots (4.47)$$

odnosno:

$$\sum_{m=-M}^M E_{rm} e^{-jk \sin \theta_m x} - \sum_{m=-M}^M E_{tm} e^{-jk \sin \theta_m x} = -e^{-jk \sin \theta x} \quad \dots (4.48)$$

$$\sum_{m=-M}^M \cos \theta_m E_{rm} e^{-jk \sin \theta_m x} + \sum_{m=-M}^M \cos \theta_m E_{tm} e^{-jk \sin \theta_m x} = \cos \theta e^{-jk \sin \theta x}$$

Rešavanje problema svodi se tako na nalaženje  $2M+1=M_1$  nepoznatih koeficijenata reflektovanog polja  $E_{rm}$  i isto toliko koeficijenata  $E_{tm}$ , tako da za njihovo nalaženje moramo imati sistem od  $2M_1$  jednačina. Posmatrajući posebno granične uslove možemo zaključiti da oni mogu biti opisani sa dva sistema funkcija:

$$f_{1n}(x) = \begin{cases} e^{-jk(\sin \theta_m x + \cos \theta_m l g_1(x))} & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad e^{-jk \sin \theta_m x} & a \leq x < d \quad n=1, \dots, M_1 \\ 0 & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad -e^{-jk \sin \theta_m x} & a \leq x < d \quad n=M_1+1, \dots, 2M_1 \\ & m=-M, \dots, M \end{cases} \quad \dots (4.49)$$

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad \cos \theta_m e^{-jk \sin \theta_m x} & a \leq x < d \\ e^{-jk(\sin \theta_m x + \cos \theta_m l g_2(x))} & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad e^{-jk \sin \theta_m x} & a \leq x < d \end{cases}$$

odnosno funkcijama graničnih uslova:

$$g_1(x) = \begin{cases} -jk(\sin \theta x + \cos \theta l g_1(x)) & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad -e^{-jk \sin \theta x} & a \leq x < d \end{cases} \quad \dots (4.50)$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \quad \text{ i } \quad \cos \theta e^{-jk \cos \theta x} & a \leq x < d \end{cases}$$

uz sistem nepoznatih koeficijenata polja:

$$\beta_n = \begin{cases} E_{rm} & n=1, \dots, M_1 \\ E_{tm} & n=M_1+1, \dots, 2M_1 \end{cases} \quad \dots (4.51)$$

ovako definisane funkcije omogućavaju relativno lako i brzo nalaženje njihovih FFT i direktnu primjenu sistema (4.16) uz koeficijente  $A_m$  i  $B_m$  određene izrazima (4.27).

Ovisni postupak primjenjivan je za trakastu rešetku sa tri različita odnosa:  $a/d=0.25$ ,  $0.5$  i  $0.75$ , pri čemu je u sva tri slučaja bio odnos konstante rešetke i talasne dužine  $d/\lambda=2$ . Kao rezultat računa posmatrani su koeficijenti refleksije i transmisije:

$$R_m = |E_{rm}|^2 \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} ; \quad T_m = |E_{tm}|^2 \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} \quad \dots(4.52)$$

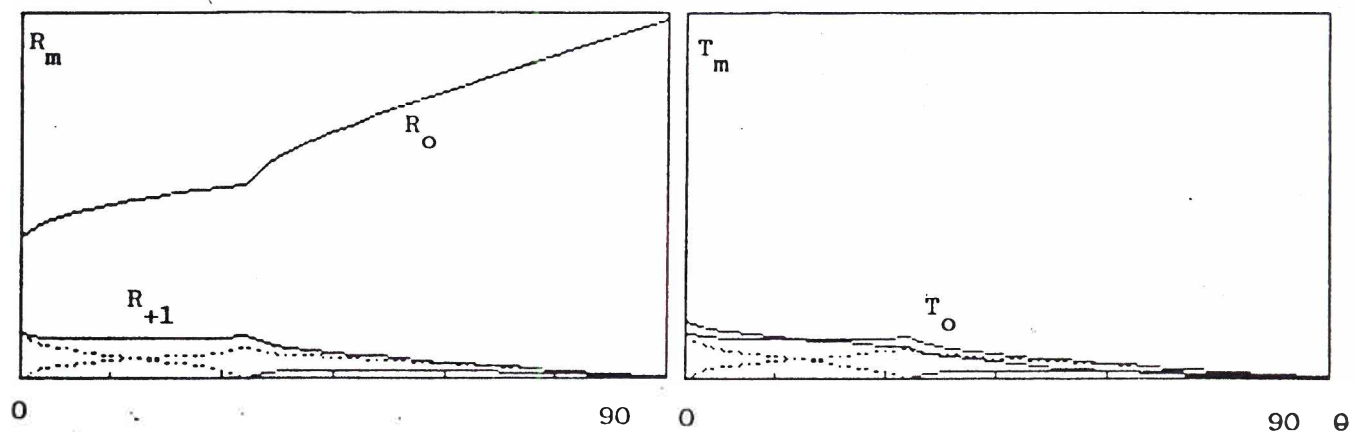
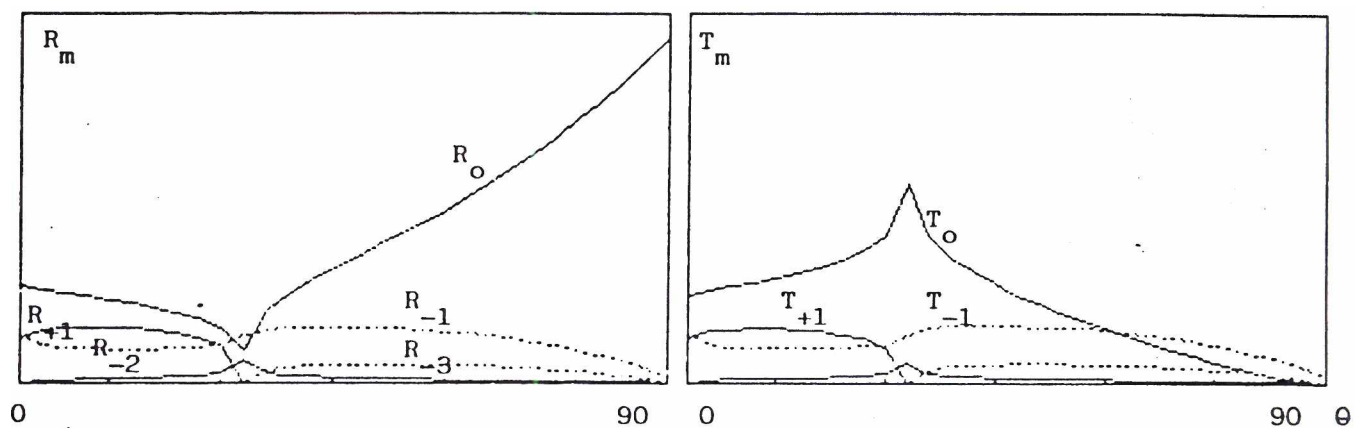
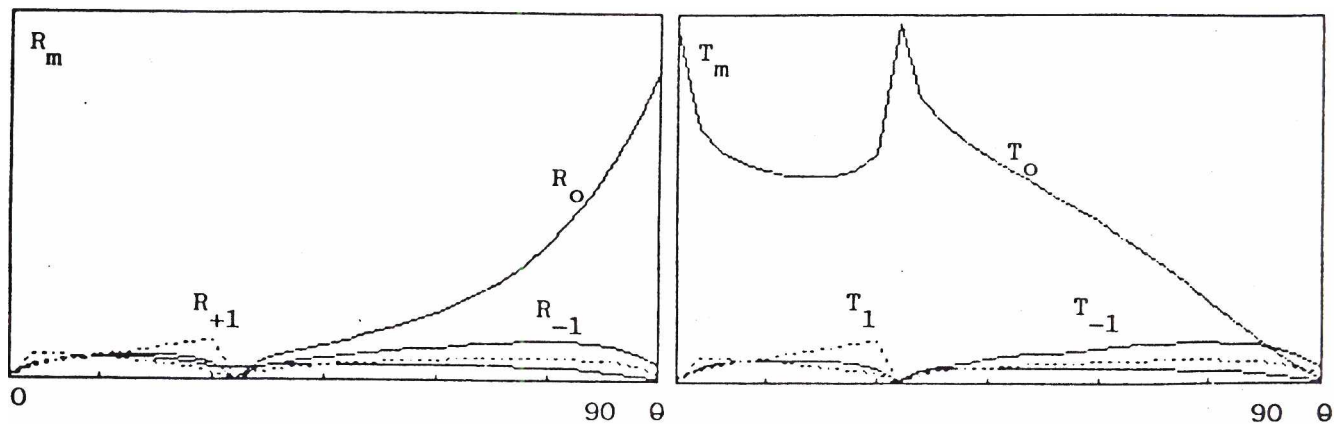
Prikazani za sva tri slučaja na slikama 4.11a, 4.11b i 4.11c i 4.12a, 4.12b i 4.12c.

Stepen tačnosti dobijenih rezultata provjeravan je na osnovu energetske bilansa:

$$\sum_m (|E_{rm}|^2 + |E_{tm}|^2) \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} = 1 \quad \dots(4.53)$$

gdje se sumiranje vrši za one koeficijente  $m$  za koje je  $|\sin\theta_m| < 1$ . Kao što se iz Tabele 4.5 vidi zadovoljenje uslova (4.53) ostvareno je u vrlo visokom stepenu. Greška ne prelazi 0.7%, a za većinu uslova incidencije je znatno ispod te vrijednosti, što je znatno veća tačnost nego u ma kojem postupku kojim je tretiran ovaj problem.

Ovi rezultati su postignuti sa  $M=31$  koeficijenata refleksije i transmisije. Pri tome je uzeto 64 odbirka baznih funkcija i 11 članova sume. Proračun je vršen i sa samo jednim članom sume (4.15), ali dobijeni rezultati, iako za neke incidentalne uslove sasvim prihvatljivi, za određene uslove za koje su jako izražene difrakcione anomalije, ne mogu se smatrati zadovoljavajućim.



Sl.4.11 Koeficijenti  
refleksije

a)  $a/d=0.25$  b)  $a/d=0.5$  c)  $a/d=0.75$

Sl.4.12 Koeficijenti  
transmisije

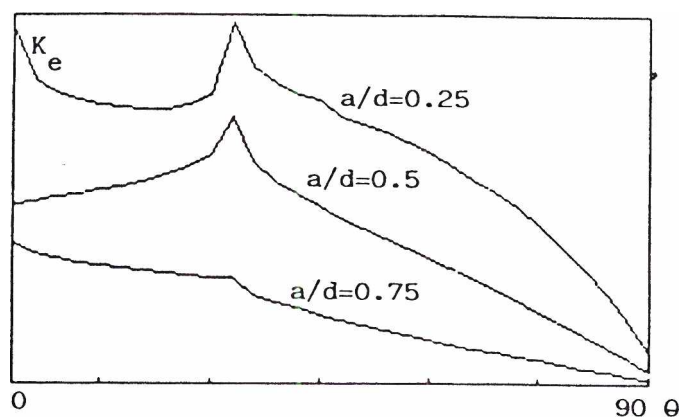
Pogledajmo takođe i koeficijent ekranizacije koji ćemo definisati kao odnos transmitovane energije prema energiji incidentalnog talasa:

$$K_e = \sum_m |E_{tm}|^2 \frac{\cos\theta_m}{\cos\theta} \quad \dots (4.54)$$

koji je prikazan na sl.4.13.

Difrakcija sa trakaste rešetke					
d/λ=2, M=31					
a/d=0.25			a/d=0.5		
ugao	energ.	suma	ugao	energ.	suma
0	0.998196		0	1.003118	
6	1.003589		6	0.999379	
12	1.003528		12	0.999009	
18	1.002636		18	0.999379	
24	1.001790		24	0.999986	
30	0.990328		30	0.999101	
36	0.995495		36	1.002320	
42	0.996021		42	1.001594	
48	0.995930		48	1.000904	
54	0.995753		54	1.000507	
60	0.995726		60	1.000443	
66	0.996019		66	1.001213	
72	0.996781		72	1.001037	
78	0.998050		78	1.001329	
84	0.999472		84	1.001167	

Tabela 4.5 Energetski bilans kod trakaste rešetke



Sl.4.13. Koeficijenti ekranizacije

U slučaju cilindričnih provodnika lit./58/ koeficijenti refleksije i transmisije (za slučaj normalne incidencije) za razne vrijednosti odnosa poluprečnika i periode rešetke su dati u Tabeli 4.6.

a/d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
R-1	0.0002	0.0055	0.0631	0.1157	0.1188	0.1212
R 0	0.0003	0.0070	0.0866	0.1841	0.1926	0.2355
R+1	0.0002	0.0055	0.0588	0.1177	0.1121	0.1017
T-1	0.0003	0.0054	0.0503	0.1170	0.1195	0.1096
T 0	0.9983	0.9691	0.8534	0.3225	0.2752	0.2387
T+1	0.0003	0.0055	0.0565	0.1194	0.1390	0.1161

Tabela 4.6 Koeficijenti refleksije i transmisije  
za cilindričnu strukturu

#### 4.2.2. ANALIZA TALASOVODA SLOŽENOG POPREČNOG PRESJEKA PRIMJENOM MODIFIKOVANOG METODA

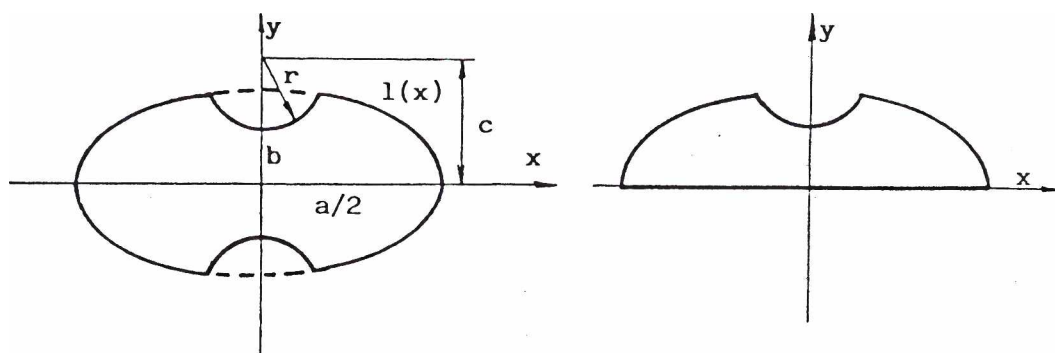
Osnovna teorija neophodna za analizu talasovoda izložena je u predhodnoj glavi, u poglavlju koje tretira talasovode složenog poprečnog presjeka. Kao ilustracija primjene modifikovanog metoda biće analizirani: eliptični talasovodi sa urezom i n-to ugao ni talasovodi, a biće ukazano i na mogućnost primjene ovog metoda na analizu talasovoda kada je neophodno uzeti dvostruki granični uslov. U okviru zadnje grupe posmatrani su  $\Pi$  talasovodi sa uskim urezom i T talasovodi.

##### 4.2.2.1 ELIPTIČNI TALASOVODI SA UREZOM

Razlog razmatranja eliptičnih talasovoda je u tome što su ovi talasovodi veoma interesantni za praktičnu primjenu, budući da, za razliku od kružnih talasovoda, imaju stabilnu prostornu polarizaciju duž pravca prostiranja. Osim toga pokazuje se lit./2/ da ovakav oblik poprečnog presjeka talasovoda, pri istom obimu, ima manju vrijednost koeficijenta slabljenja i od kružnog i od pravougaonog. Uz sve ove praktične prednosti eliptični talasovod je i teorijski interesantan zbog svog nepravilnog oblika, ali oblika koji omogućava dobijanje analitičkog rješenja. Iz tog razloga se često koristi kao referentni pri provjeri efikasnosti i tačnosti pojedinih numeričkih metoda.

Propusni opses eliptičnih talasovoda, analogni kao i

pravougaonih, se može povećati koristeći ureze. U tom cilju je u ovom poslaavlju pored analize eliptičnog talasovoda radi provjere efikasnosti metoda, analiziran i eliptični talasovod sa urezom sl.4.14 (lit./60/).



Sl.4.14 Poprečni presjek eliptičnog talasovoda sa urezom

Diferencijalna jednačina koja opisuje longitudinalnu komponentu magnetskog polja u slučaju H tipa talasa je data sa (3.61) uz granični uslov dat sa (3.62). I ovdje će biti analiziran samo H tip talasa pošto je H<sub>11</sub> mod dominantan. Analiza E tipa talasa je potpuno analognu, uz znatno pojednostavljenje zbog toga što granični uslov nije zadat u obliku izvoda tražene funkcije već same funkcije.

Dominantni mod talasa označen sa H<sub>11</sub><sup>c</sup> ćemo tražiti u obliku:

$$H_{z11}^c = \sum_{m=1}^M \beta_m \varphi_m(x, y) = \sum_{m=1}^M \beta_m \sin \frac{(2m-1)\pi}{a} x \cos k_y y \quad \dots (4.55)$$

$$k_y^2 + \left( \frac{(2m-1)\pi}{a} \right)^2 = k^2$$

Funkcije  $f_m(x)$  čije Fourierove transformacije određujemo imaju oblik:

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial n} \Big|_{y=l(x)} = \\ &= \left( - \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=l(x)} l'(x) + \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=l(x)} \sqrt{1 + l'^2(x)} \right) \quad \dots (4.56) \end{aligned}$$



Sistem za određivanje nepoznatih koeficijenata razvoja  $B_m$  u ovom slučaju ima oblik:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & \dots & A_{MM} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (4.57)$$

gdje se koeficijenti  $A_{mn}$  mogu računati koristeći proceduru opisanu bilo sa (4.10) bilo sa (4.16).

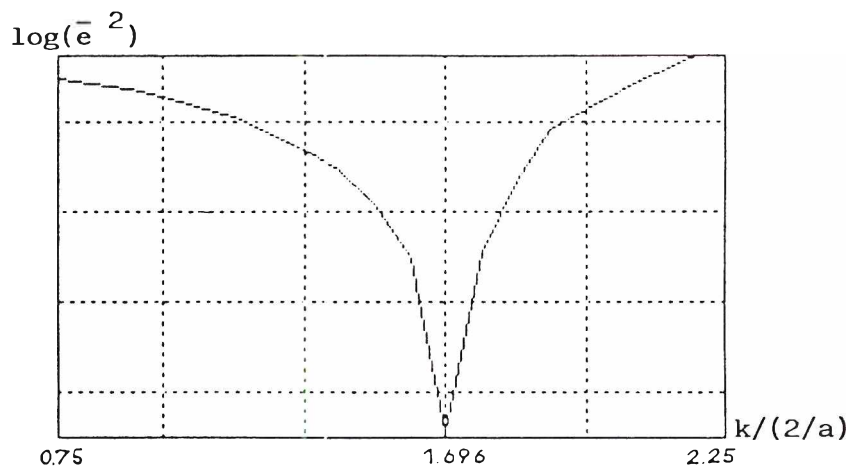
Uslov da homogeni sistem (4.57) ima netrivialno rješenje je:

$$\det ||A_{mn}|| = 0 \quad \dots (4.58)$$

Pošto su svi koeficijenti  $A_{mn}$  funkcije sopstvenog broja  $k$  jednačine (3.61) to se sopstveni brojevi mogu dobiti kao rješenja jednačine (4.58). Imajući u vidu nenegativnost determinante u jednačini (4.58) i numerička odstupanja pri računanju koeficijenata  $A_{mn}$  to je ipak opravdanije govoriti o minimumima determinante nego o nulama.

Nalaženje sopstvenih vrijednosti može biti ostvareno i na sledeći način. Da bi izbjegli trivialno rješenje sistema (4.57) uzmimo da je prvi koeficijent razvoja  $B_1 = 1$  i za određeno  $k$ , nađemo iz (8) ostale koeficijente  $B_m$  ( $m=2, \dots, M$ ). Zatim, izračunajmo devijaciju graničnog uslova  $e(x)$  u tačkama  $x_i = a_i/N$  unutar intervala  $(0, a)$ , u kojima su računate vrijednosti funkcija  $f_m(x)$  radi određivanja Furijeove transformacije. Tražena sopstvena vrijednost je ona vrijednost  $k$  za koju najveća vrijednost  $e(x)$  dostiže minimum ili ona vrijednost za koju integral kvadratne greške dostiže minimum. Takva procedura korišćena je u ovom poglavlju.

Vrijednost integrala kvadratne greške duž granice u funkciji sopstvenos broja je data na sl.4.15.



Sl.4.15 Vrijednost integrala kvadratne greške u funkciji sopstvene vrijednosti  $a=2$   $b=0.6$   $r=0.3$   $c=0.7$

Prvi naredni mod označen sa  $H_{11}^S$  tražen je u obliku:

$$H_{z11}^S = \sum_{m=1}^M B_m \cos \frac{2(m-1)\pi}{a} x \sin k_y y \quad \dots (4.59)$$

Nalazeći najprije FFT koeficijente funkcije  $f_m(x)$  na intervalu  $(0,a)$  koristeći  $N$  odbiraka i slijedeći već opisanu proceduru određen je sopstveni broj najprije za  $H_{z11}^c$ , a zatim za  $H_{z11}^S$  tip talasa. Račun je sproveden za dva skupa parametara ureza, a za eliptični profil bez ureza rezultati su poređeni sa analitičkim. Sopstveni brojevi i širina propusnog opsega za sva tri slučaja dati su u Tabeli 4.5.

ELIPTIČNI				ELIPTIČNI SA UREZOM			
				$r=0.3 \quad c=0.7$			
				$r=0.3 \quad c=0.6$			
analit.							
*				*			
**				**			
$H_{11}^c$	1.868	1.868	1.868	1.696	1.696	1.560	1.587
$H_{11}^S$	2.985	2.978		3.204		3.314	

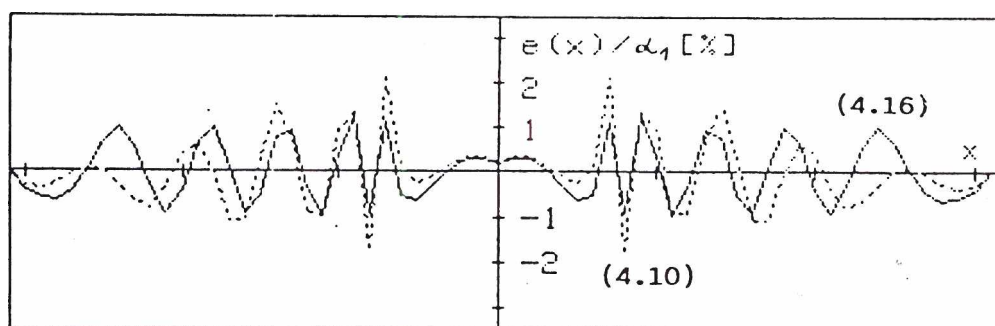
rezultati dobijeni: \* - sistemom (10) \*\* - sistemom (9)

TABELA 4.5 Normalizovana vrijednost kritičnog broja  $k/(2/a)$   $H_{11}^c$  moda i  $H_{11}^S$  moda kod eliptičnog talasovoda sa urezom i bez ureza  $a=2$   $b=0.6$   $M=11$   $N=64$

Posmatrani urezi prouzrokuju proširenje propusnog opsega od 35%, odnosno od 57%. Uz ostale prednosti koje posjeduje eliptični presjek, ovako značajno povećanje propusnog opsega preporučuje ovaj profil za praktičnu primjenu.

Vrijednosti sopstvenih brojeva polueliptičnih strukture su razumljive se iste kao i kod punih struktura jer je granični uslov duž linije  $y=0$  isti za obje strukture.

Tačnost dobijenih rezultata može se ocijeniti prema vrijednosti greške  $e(x)$  koja je prikazana na sl.4.16. Pri tome su primjenjivani oba prikazana postupka tj., dva različita sistema koeficijenata  $A_{nl}$  data sa (4.10) i (4.16). Korišćeno je  $N=64$  odbiraka i  $M=11$  koeficijenata razvoja  $m$ . Kao što se vidi sa sl.4.16. greška dobijena iz sistema (4.10) ima veću amplitudu i veća je na dobrom dijelu intervala  $(0,a)$ , od greške dobijene potpunim sistemom koeficijenata (4.16), ali ni ona ne prelazi vrijednost 0.02.



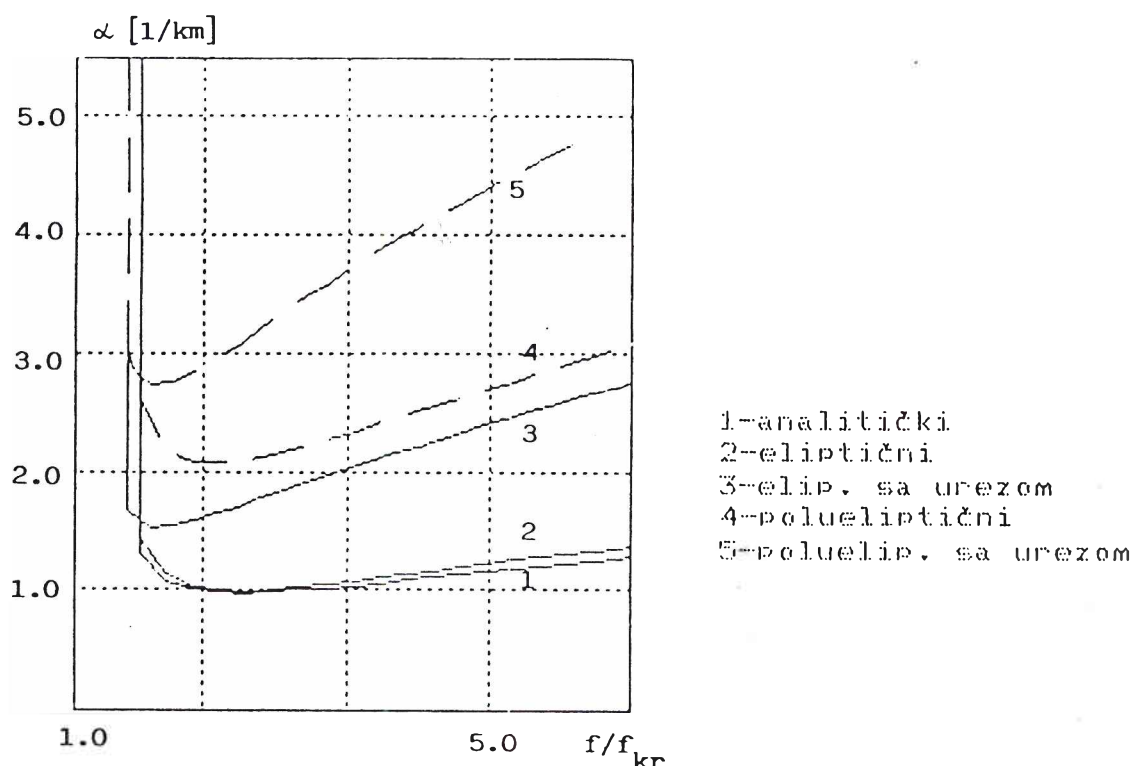
Sl.4.16. Greška duž granične linije  $a=2, b=0.6, r=0.3, c=0.7$

Razumljivo se, uvođenje ureza dovodi do povećanog slabljenja.

Koeficijent slabljenja slijedi iz izraza:

$$\alpha = R_s \frac{L \int |H_t|^2 dl}{2 \int_S |H_T|^2 dS} \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{6}} \quad \dots (4.60)$$

gdje sve ostale komponente polja slijede iz Hz na uobičajeni način. Slabljenje je računato za dominantni mod i to kako za talasovod sa urezom tako i za puni eliptični profil, za koji je, poredenja radi, korišćena i analitička vrijednost koeficijenata slabljenja (sl.4.17.).



Sl.4.17. Koeficijenti slabljenja za eliptični talasovod i talasovod sa urezom  $a=2, b=0.6, c=0.6, r=0.3$  za H<sub>11</sub> mod

Analitički i numerički rezultati za slabljenje su veoma bliski. Minimalno slabljenje pri posmatranim parametrima ureza povećano je u odnosu na puni eliptični profil za 52%. Kao što se moglo zaključiti i za kružni urez u pravougaonom profilu lit./35/, i ovdje je procentualno povećanje propusnog opsega praćeno približno isto tolikim procentualnim povećanjem slabljenja.

Koeficijent slabljenja polueliptičnih talasovoda je, kao što se moglo i očekivati, znatno viši što se vidi sa sl.4.16.

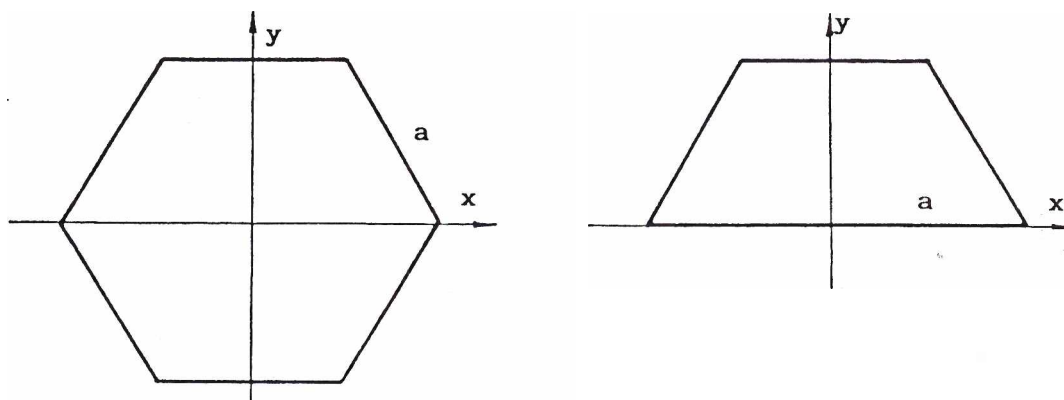
#### 4.2.2.2 N-TO UGANI TALASOVODI

U cilju stabilizacije prostorne polarizacije razmatrani su razni oblici talasovoda za koje bi se uopšteno govoreći moglo reći da su dobijeni deformacijom kružnih. U radu /61/ je analiziran uticaj segmentnog ureza u kružnom talasovodu, a u /62/ razni oblici dobijeni konformnim preslikavanjem. U ovom dijelu će biti razmatrani pravilni n-to ugaoni talasovodi čije su karakteristike povećanjem broja strana sve bliže karakteristikama kružnih talasovoda.

Koristeći predhodno opisanu proceduru i uzimajući:

$$\begin{aligned} H_{10} \quad H_{z10} &= \sum_{m=1}^M B_m \sin \frac{(2m-1)\pi}{a} x \cos k_y y \\ H_{01} \quad H_{z01} &= \sum_{m=1}^M B_m \cos \frac{2(m-1)\pi}{a} x \sin k_y y \end{aligned} \quad \dots (4.61)$$

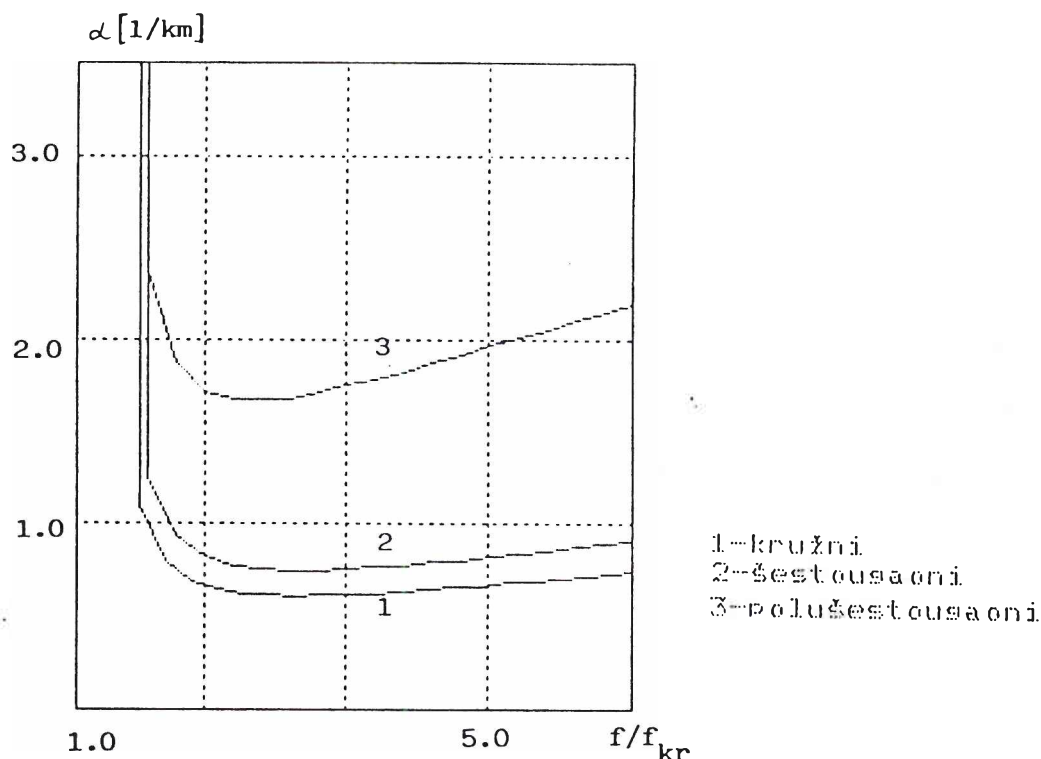
dobijeni su karakteristični brojevi šestougaoznog i polušetougaoznog talasovoda prikazane na sl.4.18.



Sl.4.18. Poprečni presjek šestougaoznog talasovoda

Karakteristični broj za H<sub>10</sub> mod je  $2.007\pi a/2$ , a za H<sub>01</sub> mod  $2.010\pi a/2$ . Koeficijent slabljenja se računa po formuli (4.60) i dat je na sl.4.19. Na istoj slici je dat

koeficijent slabljenja kružnog talasovoda kao i polušešestougaonos. Sa slike se vidi da šešestougaoni talasovod ima nešto veće subitke i kritičnu učestanost od kružnog, ali ovaj oblik za razliku od kružnog ima stabilnu polarizaciju.



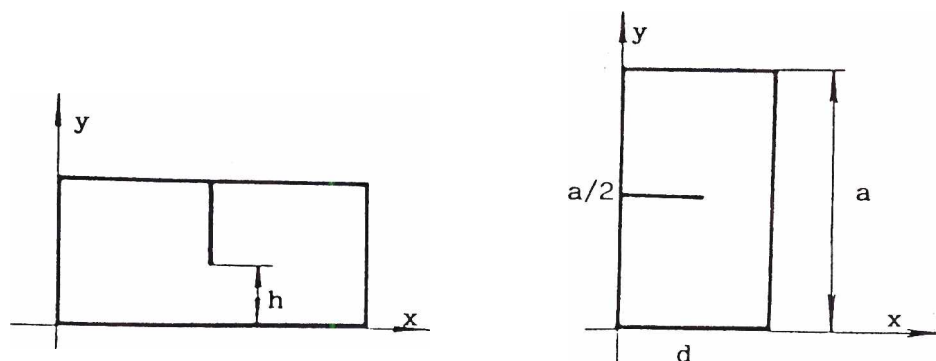
Sl.4.19 Koeficijent slabljenja šešestougaonos, polušešestougaonos i kružnog talasovoda

Za osmougaoni oblik talasovoda karakteristični brojevi su računati koristeći iste funkcije kao i za šešestougaoni. Za H10 mod je dobijena vrijednost  $1.938 \times 2/a$ , a za H01  $1.943 \times 2/a$ .

#### 4.2.2.3 PRAVOUGAONI TALASOVOD SA UREZOM

O pravougaonim talasovodima sa urezom je bilo riječi u predhodnoj glavi. Ovdje će biti razmatrana još dva oblika sa tankim urezima koji omogućavaju uštedu materijala. Kao prvi primjer posmatrajmo  $\Pi$  talasovod sa veoma uskim urezom sl.4.20. Ukoliko bi i u ovom slučaju uzeli bazne funkcije kao u ranijim primjerima onda zbog oštarih ivica dobijena

tačnost ne bi bila zadovoljavajuća.



Sl.4.20. Poprečni presjek  $\Pi$  talasovoda sa uskim urezom

Zbog toga bazne funkcije u ovom slučaju uzimamo u obliku:

$$H_z = \sum_{m=1}^M B_m \cos \frac{(m-1)\pi x}{a} \cos k_y y = \sum_{m=1}^M B_m \psi_m(x, y) \quad \dots (4.62)$$

Granični uslovi su u potpunosti zadovoljeni na linijama:  $x=0$ ,  $x=d$  i  $y=0$ . Granični uslov treba približno zadovoljiti duž ureza, dok uslovi neprekidnosti treba da budu zadovoljeni duž preostalog dijela linije  $y=a/2$ . To znači treba da je  $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$  za  $x=a/2$  i  $h < y < d$  i da je  $H_z = 0$  i  $E_x = 0$  za  $x=a/2$  i  $0 < y < d$ . Formirajući dva skupa baznih funkcija:

$$f_{1m}(y) = \begin{cases} \frac{\partial \psi_m(x, y)}{\partial y} / x = \frac{a}{2} & 0 \leq y < d-h \\ \frac{\partial \psi_m(x, y)}{\partial x} / x = \frac{a}{2} & d-h \leq y < d \end{cases} \quad f_m(y) = \begin{cases} \psi_m(x, y) / x = a/2 & 0 \leq y < d-h \\ 0 & d-h \leq y < d \end{cases} \quad \dots (4.63)$$

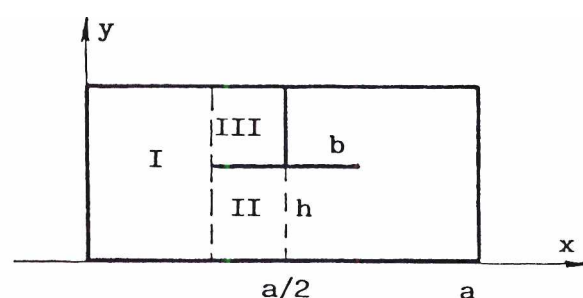
i primjenjujući opisani postupak za ovaj oblik funkcija  $f_m$  dobijamo homogeni sistem jednačina kod koga su koeficijenti  $A_{nm}$  funkcije sopstvenog broja. Nepoznata vrijednost sopstvenog broja je određena prema predhodno opisanoj proceduri i data u tabeli 4.6, gdje su radi poredjenja date vrijednosti dobijene na osnovu izraza (3.87) uzimajući  $b=0$ . Pri računanju korišćeno je  $N=64$  odbirka i  $M=11$  baznih funkcija. Slaganje sa rezultatima iz lit./2/ je veoma dobro

za sve praktično interesantne dubine ureza.

$h/d$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$k/(\pi/a)$	0.45	0.58	0.62	0.71	0.79	0.85	0.91	0.94	0.99
$lit./2/$	0.49	0.58	0.64	0.71	0.79	0.84	0.90	0.94	0.99

Tabela 4.6 Normalizovana vrijednost sopstvenog broja  $k/(\pi/a)$  kod talasovoda sa uskim urezom u funkciji dubine ureza

Kao veoma interesantno rješenje talasovoda sa urezom kao što je pokazano u lit./1/-/7/ je T tip talasovoda (sl.4.21.) koji je u oba rada analiziran primjenom Ritz-Galjerkinovog metoda. Pokazano je, što će i ovdje biti potvrđeno, da ovi talasovodi imaju nižu kritičnu učestanost od standardnih talasovoda. Na primjeru T talasovoda će biti pokazano kako se metod najmanjih kvadrata može primijeniti i u slučaju tri skupa baznih funkcija.



Sl.4.21 Poprečni presjek T talasovoda

U cilju efikasnijeg rješavanja problema podijelimo poprečni presjek na tri oblasti. U prvoj ćemo rješenje tražiti u obliku:

$$H_z^I = \sum_{m=0}^{M_1-1} B_m^I \cos \frac{m\pi}{d} y \cos k_x x = \sum_{m=0}^{M_1-1} B_m^I \varphi_m^I(x, y) \quad \dots (4.64)$$

koji zadovoljava granične uslove na zidovima  $x=0$ ,  $y=0$  i  $y=d$ .

Rješenje u drugoj oblasti napišimo u obliku:

$$H_z^{II} = \sum_{m=0}^{M_2-1} B_m^{II} \cos \frac{m\pi}{n} y \sin k_x (a/2-x) = \sum_{m=0}^{M_2-1} B_m^{II} \varphi_m^{II}(x, y) \quad \dots (4.65)$$



koji zadovoljava granične uslove na zidovima  $x=a/2$ ,  $y=h$  i  $y=0$ .

U trećoj oblasti:

$$H_z^{III} = \sum_{m=0}^{M_3-1} \beta_m^{III} \cos \frac{m\pi}{d-h} (y-h) \cos k_x (a/2-x) = \sum_{m=0}^{M_3-1} \beta_m^{III} \varphi_m^{III} (x,y) \dots (4.66)$$

izraz zadovoljava granične uslove na  $x=a/2$ ,  $y=d$  i  $y=h$ .  
 Nepoznate koeficijente  $\beta_m^I$ ,  $\beta_m^{II}$  i  $\beta_m^{III}$  ćemo odrediti iz uslova da na granicama podoblasti budu zadovoljeni uslovi neprekidnosti:

$$\begin{aligned} H_z^{I/II} /_{x=a/2-b-0} &= H_z^{I/II} /_{x=a/2-b+0} \\ \frac{\partial H_z^{I/II}}{\partial x} /_{x=a/2-b-0} &= \frac{\partial H_z^{I/II}}{\partial x} /_{x=a/2-b+0} \end{aligned} \dots (4.67)$$

Greška u zadovoljenju uslova (4.67a) duž zajedničke linije oblasti je:

$$e_1(y) = \sum_{m=0}^M \beta_m \varphi_m(x,y) /_{x=a/2-b} = \sum_{m=0}^M \beta_m f_{1m}(y) \dots (4.68)$$

gdje je:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 - 1$$

$$f_m(y) = \begin{cases} \varphi_m^I(x,y) /_{x=a/2-b} & \text{za } 0 < y < h \quad 0 \leq m \leq M_1 - 1 \\ -\varphi_{m-M_1}^{II}(x,y) /_{x=a/2-b} & \text{za } 0 < y < h \\ 0 & \text{za } h < y < d \quad M_1 \leq m \leq M_1 + M_2 - 1 \\ 0 & \text{za } 0 < y < h \\ -\varphi_{m-M_1-M_2}^{III}(x,y) /_{x=a/2-b} & \text{za } 0 < y < d \quad M_1 + M_2 \leq m \leq M_1 + M_2 + M_3 - 1 \end{cases} \dots (4.69)$$

$$B_m = \begin{cases} B_m^I & 0 \leq m \leq M_1 \\ B_{m-M_1}^{II} & M_1 \leq m \leq M_1 + M_2 - 1 \\ B_{m-M_1-M_2}^{III} & M_1 + M_2 \leq m \leq M_1 + M_2 + M_3 - 1 \end{cases} \quad \dots (4.70)$$

Greška graničnog uslova (4.66b) je data sa:

$$e_2(y) = \sum_{m=0}^M B_m \frac{\partial \varphi_m(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=a/2-b} = \sum_{m=0}^M B_m f_{2m}(y) \quad \dots (4.71)$$

gdje je  $f_{2m}(y)$  definisana analogno kao  $f_{1m}(y)$ .

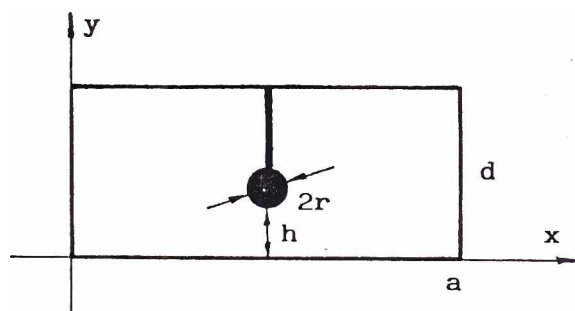
Primjenom opisanog metoda za dva granična uslova dobijamo kritične vrijednosti date u tabeli 4.7.

b/a	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
k/( $\pi/a$ )	0.72	0.67	0.63	0.60	0.56

Tabela 4.7 Karakteristični brojevi kod T talasovoda  
a=2 d=1 h=0.5

Kao što se vidi širenjem T ureza i kritična učestanost se smanjuje što je i ranije konstatovano.

Proširenje ureza se može ostvariti i zaobljavanjem pri dnu, kao što je prikazano na sl.4.22. Analiza ovog oblika može biti izvršena potpuno analogno kao i oblika sa sl.4.20 koristeći isti skup baznih funkcija i iste granične uslove. Karakteristični broj za poluprečnik zaobljenja  $r=0.1$  je dat u tabeli 4.8.



Sl.4.22. Poprečni presjek talasovoda sa kružnim završetkom ureza

h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k/(\pi/a)$	0.36	0.47	0.56	0.64	0.71	0.79	0.87	0.94	0.98	1.0

Tabela 4.8 Kritični broj talasovoda sa kružnim završetkom ureza  $a=2$ ,  $d=1$ ,  $r=0.1$

Vidi se na osnovu tabele 4.8 da ovakav oblik ureza znatno smanjuje kritičnu učestanost u odnosu na urez bez zaobljenja, a osim toga i oblik mu je posodniji, s obzirom na povoljniju koncentraciju polja nego kod T ureza, a naročito uskos  $\Pi$  ureza.

#### 4.3 ZAKLJUČAK

U ovoj glavi je izvedena modifikacija metoda najmanjih kvadrata koristeći algoritme brze Fourierove transformacije. Pokazano je da se primjenom ove modifikacije može ostvariti značajna ušteda u vremenu računanja. Efikasnost modifikovanog metoda je provjerena na problemima difrakcije elektromagnetnih talasa sa zatvorenih i otvorenih nepravilnih struktura. Primjena metoda je demonstrirana i na problemima talasovoda složenog poprečnog presjeka. Pored standardnih nepravilnih oblika, u cilju poboljšanja pojedinih karakteristika, analizirani su i novi oblici talasovoda.

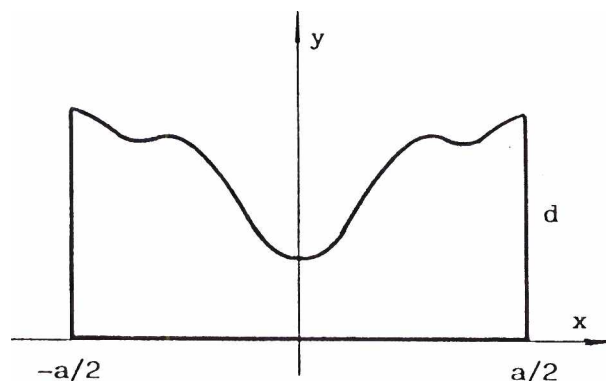
## 5. O SINTEZI TALASOVODA SLOŽENOG POPREČNOG PRESJEKA

Problem sinteze talasovoda, uz zadate određene parametre, minimiziranjem drugih parametara je veoma složen. Do sada na tom polju nije radjeno gotovo ništa. Zbog toga će cilj ovog kratkog osvrta na sintezu biti prije svega ukazivanje na neke od mogućih puteva sinteze, bez pretenzija da se da jedna cjelovita teorija. Naravno, neki jednostavniji algoritmi će biti izvedeni u potpunosti. Biće pokazano kako se može dobiti oblik talasovoda kod koga su zadate spoljašnje dimenzije i kritična učestanost. Osim toga biće izvršeno poredjenje koeficijenata slabljenja tako dobijenih oblika.

### 5.1 TEORIJSKA OSNOVA SINTEZE

Posmatrajmo deformisani pravougaoni talasovod koji ima tri pravilne ivice, a četvrta može imati proizvoljan oblik sl.5.1. Ovakav oblik iako naizgled specijalan, pored toga što je praktično interesantan, omogućava lako proširenje teorije i na opštije slučajeve birajući opštije bazne funkcije izložene u glavi 3.

Zadatak koji smo postavili u ovom slučaju je: uz zadatu visinu i širinu talasovoda odrediti oblik gornje ivice tako



Sl.5.1. Poprečni presjek talasovoda sa jednom ivicom proizvoljnog oblika

da talasovod ima zadatu vrijednost sopstvenog broja  $k_z$ . Pošto zadavanjem ovih parametara oblik nije jednoznačno određen to treba ispitati uticaj promjene slobodnih parametara na karakteristike dobijenog talasovoda.

Bazne funkcije, kao i do sada, ćemo uzeti u obliku:

$$f_m(x, y) = \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \sqrt{k_z^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{a}\right)^2} y \quad \dots (5.1)$$

gdje je  $k_z$  zadata vrijednost sopstvenog broja.

Skup mogućih rješenja talasne diferencijalne jednačine se može uzeti u obliku:

$$H_z = \sum_{m=1}^M \beta_m f_m(x, y) \quad \dots (5.2)$$

Zid talasovoda  $y=1(x)$  se može odrediti iz uslova da izvod po normali funkcije  $H_z(x, y)$  bude jednak nuli duž granične površine, tj. iz uslova:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} y' + \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) / \sqrt{1+y'^2} = 0 \quad \dots (5.3)$$

Tako dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$y' = \frac{\frac{\partial H_z}{\partial y}}{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \quad \dots (5.4)$$

Da bi rješenje jednačine (5.4) moglo opisivati zid talasovoda neophodno je da je za  $y=d$  i  $x=\frac{a}{2}$  prvi izvod funkcije zida konačan. Potreban uslov je da je  $\frac{\partial H_z}{\partial y}=0$  u toj tački pošto je  $\frac{\partial H_z}{\partial x}=0$ . Osim toga i fizički smisao ovog uslova je u tome da je normalna komponenta električnog polja u tački  $(\frac{a}{2}, d)$  jednaka nuli, tj.:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) / \sqrt{1+y^2} = 0 \quad \dots(5.5)$$

Pošto je  $\frac{\partial H_z}{\partial x}=0$  slijedi da je gornja jednakost ispunjena ako je  $\frac{\partial H_z}{\partial y}=0$ .

Odredjivanje koeficijenata  $B_m$  iz uslova:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{x=a/2} = 0 \quad \dots(5.6)$$

daje jednačinu:

$$\sum_{m=1}^M B_m \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} \cdot \sqrt{kz^2 - \left(\frac{(2m-1)}{a}\right)^2} \sin \sqrt{kz^2 - \left(\frac{(2m-1)}{a}\right)^2} d = 0 \quad \dots(5.7)$$

Uzimajući proizvoljno  $M-1$  koeficijenata  $B_m$  i računajući jedan tako da bude zadovoljen uslov (5.7) dobijena su veoma nestabilna rješenja. Uzrok toga se može fizički protumačiti na osnovu činjenice da beskonačno mnogo zidova može biti dobijeno uzimajući jedan skup parametara  $B_m$ , pošto za jedan dati zid talasovoda i svaka linija magnetnog polja ispod tog zida takodje zadovoljava uslove da bi bila zid talasovoda, pošto je na svakoj od njih  $\frac{\partial H_z}{\partial n}=0$ .

Na osnovu predhodnog slijedi da se kao najčešćiji zid za dat red  $M$  može uzeti maksimalno ravan zid. Svi ostali zidovi ispod su samo djelovi ovog talasovoda, a linije koje bi išle naviše ne zadovoljavaju pretpostavku datih spoljašnjih

dimenzija. Matematički to znači da je  $u'=1'(x)$  jednako nuli u nekoj oblasti  $-a/2 < x < -a/2+r$  i  $a/2-r < x < a/2$ . Određujući koeficijente  $B_m$  iz uslova da je  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$  u  $M$  tačaka u ovoj oblasti dobija se sistem:

$$\begin{vmatrix} A_{j+1,1} & \dots & A_{M,1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j+1,M-j} & \dots & A_{M,M-j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{j+1} \\ \vdots \\ B_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{M-j} \end{vmatrix} \quad \dots (5.8)$$

gdje su:

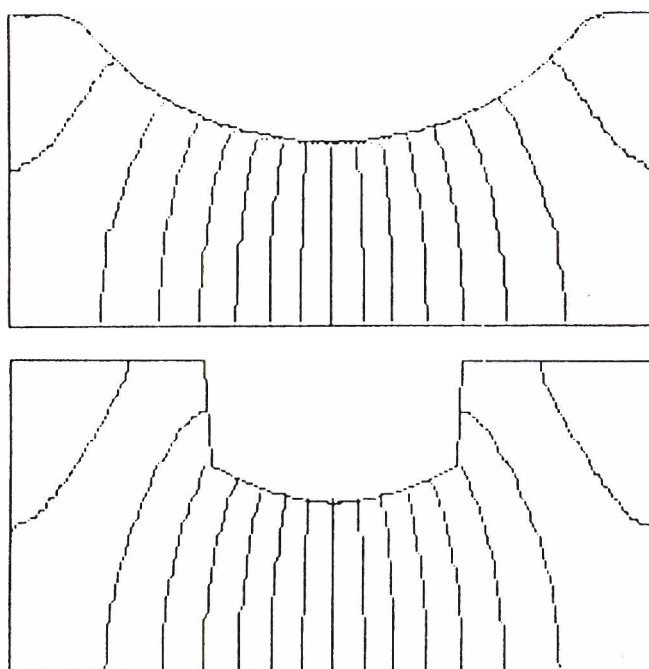
$$A_{mn} = \frac{\partial r_m(x,y)}{\partial y} \bigg|_{\substack{x=a-(n-1)r/j \\ y=d}} \quad B_n = -\sum_{l=1}^j B_l A_{ln} \quad \dots (5.9)$$

Uzimajući da je  $B_1=1$  i  $M=M-1$  mogu se odrediti ostali koeficijenti  $B_m$ . Osim toga moguće je zadovoljiti uslov  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$  u  $M-j$  tačaka i uzeti proizvoljno  $j$  koeficijenata razvoja  $B_k$ .

Kao što se vidi možemo mijenjati širinu ravnog dijela  $r$  i neki od slobodnih parametara u cilju optimizacije oblika talasovoda u posledu koeficijenta slabljenja.

## 5.2 NUMERIČKI REZULTATI

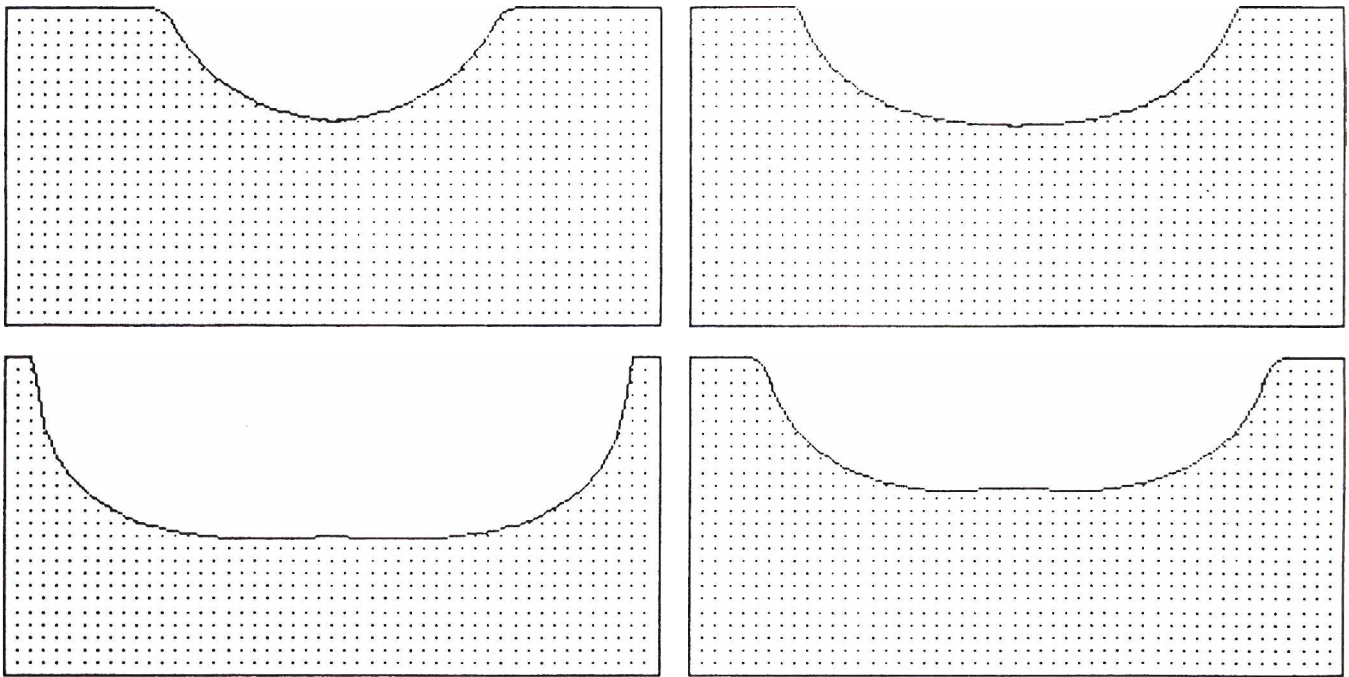
Primjena predhodno opisanog postupka je prikazana na sintezi oblika talasovoda koji će imati  $kz=0.85\pi/a$ ,  $a=2$  i  $d=1$ . Za razne vrijednosti širine ravnog dijela  $r$  uzimajući  $B_1=1$  i određujući ostale koeficijente na osnovu sistema (5.8) dobijeni su oblici talasovoda prikazani na sl.5.2. i sl.5.3a.



Sl.5.2. Oblici talasovoda sa linijama električnog polja za  $kz=0.85\pi/a$   
a)  $r=0.1$   $M=3$  b)  $r=0.6$   $M=15$

Za širinu ravnog dijela  $r=0.3$  i  $M=7$  su također uzimajući  $B_1=1$  određeni ostali koeficijenti i oblik talasovoda dat na sl.5.3a. Za drugi koeficijent  $B_2$  je u ovom slučaju dobijena vrijednost 0.19. Uz predhodne dimenzije i broj članova reda ispitivan je uticaj mijenjanja drugog koeficijenta  $B_2$ . Uzimajući vrijednosti  $B_2=-0.1$ ,  $B_2=0$  i  $B_2=0.1$  određeni su ostali koeficijenti naravno uz  $B_1=1$  i dobijeni oblici nacrtani na sl.5.3b., sl.5.3c. i sl.5.3d.





Sl.5.3. Oblici talasovoda za  $kz=0.85\pi/a$   $r=0.3$   $M=7$   $B_1=1$

a)  $B_1=1$       b)  $B_1=1$   $B_2=0.1$   
 c)  $B_1=1$   $B_2=0.0$       d)  $B_1=1$   $B_2=-0.1$

Koeficijent slabljenja je izračunat za sve predhodne oblike i dat u tabeli 5.1.

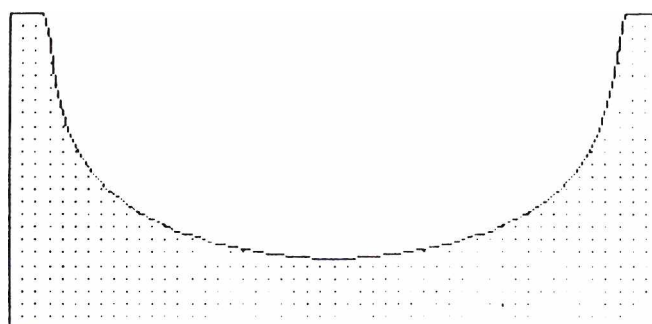
Koeficijent slabljenja $\alpha$ [1/km]						
f [GHz]	I	II	III	IV	V	VI
6.4	163.1	140.0	42.6	221.3	175.7	156.1
8.9	2.017	1.763	1.805	2.657	2.162	1.928
11.5	1.748	1.544	1.679	2.265	1.869	1.671
14.0	1.711	1.520	1.687	2.196	1.827	1.636
16.6	1.739	1.551	1.752	2.218	1.855	1.662
19.1	1.792	1.602	1.989	2.277	1.910	1.713
21.7	1.857	1.662	2.206	2.351	1.977	1.774
24.2	1.926	1.726	2.407	2.434	2.050	1.840
26.8	1.996	1.791	2.594	2.519	2.125	1.907
29.3	2.068	1.856	2.772	2.606	2.201	1.975
31.9	2.139	1.920	2.941	2.693	2.276	2.043
34.4	2.208	1.984	3.102	2.779	2.350	2.110

Tabela 5.1 Koeficijent slabljenja za razne oblike talasovoda sa sopstvenim brojem  $k=0.85\pi/a$  i spoljašnjim dimenzijama  $a=2$  [cm] i  $d=1$  [cm] za posrebreni zid

I -  $r=0.1$  ; jedan slobodni koeficijentat  $B_1=1$   
 II -  $r=0.3$  ; jedan slobodni koeficijentat  $B_1=1$   
 III -  $r=0.6$  ; jedan slobodni koeficijentat  $B_1=1$   
 IV -  $r=0.3$  ; dva slobodna koeficijenta  $B_1=1$  i  $B_2=-0.1$   
 V -  $r=0.3$  ; dva slobodna koeficijenta  $B_1=1$  i  $B_2=0.0$   
 VI -  $r=0.3$  ; dva slobodna koeficijenta  $B_1=1$  i  $B_2=0.1$

Vidi se da je slabljenje najmanje ako uzmemo da je samo jedan koeficijent  $B_1$  uzet proizvoljno, a svi ostali određeni na osnovu sistema (5.8). Osim toga vidi se da je sa stanovišta subitaka najpovoljniji oblik kada je  $r=0.3$ .

Na kraju je na sl.5.4 dat oblik talasovoda uzimajući da je  $kz=0.69\pi/a$ .



Sl.5.4. Oblik talasovoda za  $kz=0.69\pi/a$   $r=0.3$   $M=16$

Treba napomenuti da broj koeficijenata razvoja zavisi od širine ravnog dijela zida. Što je ravni dio zida širi treba uzeti više članova reda. Pri nedovoljnom broju koeficijenata rezultati divergiraju, tj. dobija se oblik zida  $y=l(x)$  koji ima prekid druge vrste. Broj članova reda koje treba uzeti da bi rezultati konvergirali veoma zavisi od zadatog sopstvenog broja  $kz$  i što je taj broj manji broj članova koje treba uzeti je veći.

Naravno problem sinteze zaslužuje znatno više pažnje. Njegovo detaljnije i potpunije analitičko tretiranje, u cilju pronalazjenja optimalnog oblika i izbora koeficijenata  $B_m$ , prelazi okvire trenutnog interesa i moglo bi biti predmet posebnog izučavanja.

## 6. ZAKLJUČAK

Sve šira primjena mikrotalasnih elemenata zahtijeva i njihov složeniji oblik. Samim tim postavlja se problem definisanja preciznih i adekvatnih metoda za njihovu analizu i sintezu. Iako je do sada razvijen veliki broj metoda, čiji je pregled dat u drugoj glavi ovog rada, stalno traganje za novim ostaje veoma važan zadatak.

U ovom radu je izložen razvoj graničnih uslova po baznim funkcijama koristeći metod najmanjih kvadrata. Pokazano je da se ovaj metod može veoma efikasno koristiti i u oblastima elektrotehnike u kojima do sada nije bio korišćen. Riješeni su neki elektrostatički problemi, problemi raspodjele vremenski promjenljivog elektromagnetnog polja, a posebna pažnja je poklonjena primjeni ovog metoda na analizu talasovoda složenog poprečnog presjeka. Razmatrani su oblici koji se razlikuju od dosada korišćenih  $\Pi$  i H oblika. Pokazalo se da neki od ovih oblika imaju povoljnije karakteristike, a osim toga neki, kao npr. talasovodi sa kružnim urezima, pored veoma dobrih karakteristika i praktično se mogu veoma jednostavno realizovati.

U drugom dijelu rada je izvedena modifikacija metoda najmanjih kvadrata koristeći Fourierove transformacije. Date su dvije procedure koje omogućavaju znatnu uštedu u računanju zahvaljujući primjeni FFT algoritama. Primjenom modifikovanog metoda riješavani su problemi difrakcije sa periodičnih zatvorenih i otvorenih struktura. Predstavljajući

polje, prema Rayleighovoj hipotezi, sumom diskretnih komponenti dobijeni su veoma dobri rezultati i za oblike sa velikim deformacijama za koje se pretpostavljalo da ovakav oblik predstavljanja polja ne daje tačne rezultate. Metod je primijenjen i na analizu talasovoda. Analizirani su eliptični talasovodi radi poredjenja rezultata sa analitičkim, a osim toga predloženi su i novi oblici talasovoda: eliptični sa urezom, n-to ugao i pravougaoni sa raznim oblicima ureza, u cilju poboljšanja pojedinih karakteristika u odnosu na oblike koji su u upotrebi.

Na kraju je dat osvrt na sintezu talasovoda. Ukazano je na mogući put dobijanja poprečnog presjeka uz zadatu kritičnu frekvenciju i spoljašnje dimenzije. Izvršeno je poredjenje koeficijenata slabljenja dobijenih oblika. Problem sinteze svakako zaslužuje više pažnje tako da bi jedan od pravaca daljeg rada trebao biti sinteza talasovoda uz potpunije analitičko tretiranje minimiziranja gubitaka, naravno uz zadate predhodne parametre.

Dalja istraživanja je moguće usmjeriti i ka proširenju primjene metoda najmanjih kvadrata, odnosno njesove modifikacije na analizu dielektričnih talasovoda koji su zbog svojih veoma dobrih osobina često korišćeni u mikrotalasnim kolima.

Izloženi metodi omogućavaju veoma efikasnu analizu i rješavanje problema difrakcije sa otvorenih struktura, kao i raspodjele vremenski promjenljivog polja koji su samo djelimično obradjeni u ovom radu, a kojima bi trebalo posvetiti više pažnje.

## 7. L I T E R A T U R A

- /1/ Zargano G. F., Lerer A.M, Ljabin V. P.: "Linii peredači sloznih sečenij" Rostovski Univerzitet 1983.
- /2/ I. E. Efimov, G. A. Sermina: "Volnovodie linii peredači" Moskva Svjaz 1979.
- /3/ S. Hopfer: "The design of ridged waveguides" IRE Trans. on MTT vol-3 Okt. 1955.
- /4/ J. P. Montgomery: "On the complete eigenvalue solution of ridged waveguides" IEEE Trans. on MTT vol-19 June 1971.
- /5/ Y. Utsumi: "Variational analysis of ridged waveguides modes" IEEE Trans. on MTT vol-33 Feb. 1985.
- /6/ D. Dasgupta, P. K. Saha: "Rectangular waveguides with two double ridges" IEEE Trans. on MTT vol-31 Nov. 1983.
- /7/ G. G. Majmudar, P. K. Saha: "A novel rectangular waveguide with double T-septums" IEEE Trans. on MTT vol-33 Nov. 1985.
- /8/ B. M. A. Rahman, J. B. Davis: "Finit element analysis of optical and microwave problems" IEEE Trans. on MTT vol-32 Jan. 1984.
- /9/ P. Daly: "Finite element approach to propagation in elliptical and parabolic waveguides" Int. J. Numerical Meth. in Engin. vol-20 1984.
- /10/ Kretzschmar I. G.: "Propagation in hollow elliptical waveguides" IEEE Trans. on MTT vol-18 Apr. 1970.
- /11/ Lewin L.: "Attenuation in elliptical waveguides" Elec. Letters vol-9 1973.
- /12/ G. D. Smith: "Numerical solution of partial differential equation" London Oxford Math. Handbooks 1969.
- /13/ J. B. Davis: "Review of methods for numerical solution of the hollow waveguide problems" Proc. Inst. Elec. Eng. vol-119 Jan. 1972.
- /14/ F. L. Ho: "Tabulation of methods for numerical solution of hollow waveguide problem" IEEE Trans. on MTT vol-22 Mar. 1974.
- /15/ S. M. Saad: "Review of numerical methods for the analysis of arbitrarily shaped microwave and optical dielectric waveguides" IEEE Trans. on MTT vol-33 Oct. 1985.

- /16/ E. Shaweins, W. R. Bridges: "Computer analysis of dielectric waveguides: finite difference method" IEEE Trans. on MTT vol-22 May 1984.
- /17/ V. P. Iljin: "Čislennie metodi rešenija zadač elektroniki" Moskva Nauka 1985.
- /18/ C. A. Brebbia: "The boundary element method for engineers" London Pentech. Pres 1978.
- /19/ M. Koshiba, K. Hayata, M. Suzuki: "Finite element formulation in term of the electrical-field vector for electromagnetic waveguide problems" IEEE Trans. on MTT vol-33 Okt. 1985.
- /20/ J. B. Davis, F. A. Fernandez: "Finite element analysis of optical and microwave waveguide problems" IEEE Trans. on MTT vol-32 Jan. 1984.
- /21/ B. M. A. Rahman, J. B. Davis: "Penlty function improvement of waveguide solution by finite elements" IEEE Trans. on MTT vol-32 Aug. 1984.
- /22/ M. A. Aleksandze: "Rešenje graničnih zadač metodom razloženia po neortogonalnim funkcijami" Nauka, Moskva 1979.
- /23/ M. N. Ney: "Method of moments as applied to electromagnetic problems" IEEE Trans. on MTT vol-33 Oct. 1985.
- /24/ H. Loriviere, J. B. Davis: "The solution of electromagnetic eigenvalue problems by least-square boundary residuals" IEEE Trans. on MTT vol-25 May 1975.
- /25/ H. Ikuno, K. Yasuura: "Improved point-machning method with application to scattering from periodic surface" IEEE Trans. on Ant. and Propagation vol-21 Sept. 1973.
- /26/ S. Jovičević, LJ. Stanković: "The least-squares boundary residual method in electrostatic and eddy-currents problems" Titograd 1988, rad prijavljen u IEEE Trans. on Magnetics.
- /27/ Cap F. F.: "Boundary values problems of unseparable linear partial differential equation" Z. angew. Math. und Mech. 66, No 6, 1986.
- /28/ L. Lewin: "On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problems" IEEE Trans. on MTT vol- 18 May 1972.
- /29/ R. F. Millar: "On the Rayleigh assumption in scattering by periodic surface" Proc. Cambridge Phil. Soc. vol-69 1971.
- /30/ J. Atechian, H. Baudrand and J. Pahn: "Composite dielectric waveguide" Electron. Lett. vol-20 Feb. 1984.
- /31/ J. B. Davis: "Surface acoustic wave propagation on a piezoelectric substrate with a periodic metal grating" Electron. Lett. vol-20 Aug. 1984.



/32/ S. Jovičević, Lj. Stanković: "Razvoj graničnog uslova po baznim funkcijama - Primjena u elektrostatici" XXX ETAN sveska V Herceg Novi, Jun 1986.

/33/ Lj. Stanković, S. Jovičević: "Odredjivanje raspodjele promjenljiveg elektromagnetnog polja razvojem graničnih uslova po baznim funkcijama" XXX ETAN sveska V Bled, Jun 1987.

/34/ G. Korn, T. Korn: "Sprovočnik po matematike dlja naučnih radotnikov i inženerev", Nauka Moskva 1978 str. 319-329

/35/ Lj. Stanković, S. Jovičević: "A round ridge waveguide" Annales des telecommunications, rad prihvaćen za objavljivanje.

/36/ A. Konrad, M. V. K. Chari, Z. J. Csendes: "New finite element techniques for skin effect problems", IEEE Trans. on Magn. Vol. Mag-18 No.2, March 1982.

/37/ M. H. Lean: "Application of boundary integral equation in electromagnetics", IEEE Trans. on Magn. Vol. Mag-21 No.5, Sept. 1985.

/38/ J. Plotz, E. Kuffel: "Application of boundary element techniques for 2D eddy current problems", IEEE Trans. on Magn. Vol. Mag-21 No.6, Nov. 1985.

/39/ S. Misushina and T. Ohusaka: "The Ridged Waveguide Cavity Oscillator for Wide Band Tuning" IEEE Trans. on MTT vol-24 May 1976.

/40/ S. Misushina, N. Kuwabara and H. Kondoh: "Theoretical Analysis of a Ridged Waveguide Mounting Structure" IEEE Trans. on MTT vol-25 Dec. 1977.

/41/ T. Tanaka: "Ridge-Shaped Narrow Wall Directional Coupler Using TE<sub>10</sub>, TE<sub>20</sub>, TE<sub>30</sub> Modes" IEEE Trans. on MTT vol-28 March 1980.

/42/ Boreneman and Arndt: "Modal-S-Matrix Design of Optimum Steped Ridged and Finned Waveguide Transformers" IEEE Trans. on MTT vol-35 June 1987.

/43/ Konishi and Venakada: "The Design of a Bandpass Filter with Inductive Strip-Planar Circuits Mounted in Waveguide" IEE Trans. on MTT vol-22 Oct. 1974.

/44/ S. Jovičević, Lj. Stanković: "Odredjivanje sopstvenih brojeva talasovoda složenog poprečnog presjeka" XXIX ETAN sveska V Nis 1985.

/45/ H. Baudrand, M. Boussouis, J. L. Amalric: "Analysis of some planar structures by the least-squares boundary residual method" IEEE Trans. on MTT vol-34 no.2, Feb. 1986.

/46/ Lj. Stanković, S. Jovičević: "Modified least squares method with application in diffraction and eigenvalue

problems" IEE Proc. on Ant. Microwave and Prop., rad prihvaćen za objavljivanje.

/47/ LJ. Stanković, S. Jovičević: "Boundary condition expansion on basis functions method implemented by FFT algorithms" rad prijavljen u IEEE Trans. on MTT.

/48/ G. Schmahl, D. Rudolph: "Holographic diffraction gratings" Progress in Optics XIV, E. Wolf, Ed. Amsterdam, The Netherlands: North Holland 1976.

/49/ H. Hoinkes: "The physical interaction potencial of gas atoms with single-crystal surfaces, determined from gas-surface diffraction experiments" Rev. Modern Phys. vol-52 Oct. 1980.

/50/ J. L. Uretsky: "Reflection of a plane sound wave from a sinusoidal surface" J. Acoust. Soc. Amer. vol-35 1963.

/51/ F. M. van der Berg, J. R. Fokkema: "The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating" J. Opt. Soc. Amer., vol-69 Jan. 1979.

/52/ N. R. Hill, V. Ceilli: "Limits of convergence of the Rayleigh method for surface scattering" Phys. Rev. B., vol-17 1978.

/53/ S. Jovičević, S. Sesnić: "Diffraction of a parallel and perpendicular polarized wave from an echelette grating" J. Opt. Soc. Amer., vol-62 July 1972.

/54/ S. Chuang, J. A. Kong: "Scattering of wave from periodic surfaces" Proc of the IEEE vol-69 Sept. 1981.

/55/ G. Withman, F. Scherins: "Scattering by periodic metal surfaces with sinusoidal height profiles-A theoretical approach" IEEE Trans. on Ant. and Prop. vol-25 Nov. 1977.

/56/ A. R. Panacali: "Radiation pattern synthesis techniques as applied to the study of perfectly conducting periodic structures of arbitrary profile: TE-polarization" IEEE Trans. on Ant. and Prop. vol-25 May 1977.

/57/ J. H. Richmond: "On the edge mode in the theory of TM scattering by a strip or strip grating" IEEE Trans. on Ant. and Prop. vol-28 no.6 Nov. 1980.

/58/ S. Jovičević, LJ. Stanković: "Difrakcija talasasa trakaste rešetke" Titograd 1988. rad prihvaćen za XXXII ETAN Sarajevo 1988.

/59/ T. N. Galisnikova, A. S. Iljinskii: "Čislennye metody v zadačah difrakcii" Moskovski univerzitet, Moskva 1987.

/60/ LJ. Stanković, S. Jovičević: "O uticaju kružnog ureza na talasovod eliptičnog presjeka" Titograd 1988. rad prihvaćen za XXXII ETAN Sarajevo 1988.



/61/ F. Jecko, A. Popiernik, N. Penaud: "Amelioration des performances du guide cylindrique circulaire propasant le mode TE<sub>11</sub> par deformation de sa section circulaire" Annales des Telecommunication no.9-10 Sept. 1983.

/62/ F.A.A. Laura, V.H. Cartinez: "Cuttof frequencies of waveguides of arbitrary cross-section: optimization of Kohn-Kato bounds" IEE Proc.-H Microwave, Ant. and Prop. pp. 226 Aug. 1987.

## 8. P R O G R A M I

```

      program wavesguide
!*****
!*  Program za odredjivanje sopstvenog broja
!*  deformisanog pravougaoanog talasovoda sa zadatom
!*  tacnoscu, racunanje vrijednosti greske duz
!*  nepravilne granice, integrala kvadratne greske,
!*  tangencijalne komponente polja na zidu, crtanje
!*  linija polja i odredjivanje subitaka talasovoda sa
!*  zadatim profilom
!*****
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      type*, 'deformisani pravougaoni talasovod'
      ad=2.          ! sirina talasovoda
      h=1.           ! maksimalna visina
      ed=.8          ! ekscentricitet
      d=h            ! duzina bočne prave ivice
      r=1.           ! sirina ureza
      c=0.4          ! dubina ureza
      i=inint(c*10**2/r+2) ! broj članova reda
      ka=32           ! broj podeoka
      aks=.75         ! srednja vrijednost sopstvenog broja
      aks=.125        ! granicne vrijednosti (aks +- 2*aks)
      lsi=4           ! oblik granicnih ivica -1: kruzni urez
                        ! -3: cosinusni urez
                        ! lsi je red polinoma za: polinomijalni
                        ! urez
      ls=1           ! broj granicnih uslova
      msi=1           ! 0 ako ne treba racunati subitke
      mpolj=0         ! 0 ako ne treba crtati linije polja
      mkoef=2         ! 0 - ako su koeficijenti sistema jednaki
                        ! Four. koeficijentima
                        ! 1 - ako se koeficijenti racunaju preko
                        ! sume Fourierovih koeficijenata
                        ! 2 - ako se koristi metoda najmanjih
                        ! kvadrata
      pi=3.1415926535897932
      epk=.001        ! tacnost sa kojom se racuna
                        ! karakteristicni broj
!
      type*, 'sirina zljeba',r,'dubina ',c,'broj cl. reda',i
      call talas(aks,aks,ls,epk)
1111 continue
      end

```

```

      subroutine funsr(x,y,yp)
!*****
!* Potprogram u kome se racuna funkcija zida talasovoda *
!* y i njen izvod yp za zadatu vrijednost x koordinate *
!*****
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkcoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      xx=x-ad/2.
      if(abs(xx).gt.r)go to 1413
      if(lsi.eq.-1)go to 1416
      if(lsi.eq.-3)go to 1417
      y=(d-c)+c*((xx/r))*lsi
      yp=c*lsi/r*(xx/r)*((lsi-1))
      go to 1414
1416  y0=r**2/2./c+(d+d-c)/2.
      r0=y0-(d-c)
      y=y0-sqrt(r0**2-xx**2)
      yp=xx/sqrt(r0**2-xx**2+.00001)
      go to 1414
1417  y=h-c+c/2*(1-cos(pi*xx/r))
      yp=c*pi/2./r*sin(pi*xx/r)
      go to 1414
1413  y=h
      yp=0
1414  return
      end

c
      subroutine bazfun(m,ak,x,y,fb,fbx,fbz)
!*****
!* Potprogram za racunanje baznih funkcija fb i njihovih *
!* izvoda po x koordinati fbx i po y koordinati fbz uz *
!* zadate koordinate tacke (x,y), sopstveni broj ak i *
!* redni broj bazne funkcije m *
!*****
      real*8 aa,akr
      complex*16 akar,akm,fb,fbx,fbz
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkcoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      aa=(2*m-1)*pi/ad
      akr=-aa**2+(ak*pi/ad)**2
      akar=dcmplx(akr,0.d0)
      akm=cdsqrt(akar)
      fb=dcos(aa*x)*cdcos(akm*y)/exp(aa*h)
      fbx=-aa*dsin(aa*x)*cdcos(akm*y)/exp(aa*h)
      fbz=-akm*dcos(aa*x)*cdsin(akm*y)/exp(aa*h)
      return
      end

```

Ostali potprogrami su isti kao kod PROGRAM WAVEG2

```

      program waves2
!*****
!*   Program za sintezu i analizu deformisanog
!*   pravougaonog talasovoda. U programu se na osnovu
!*   zadatih spoljasnjih dimenzija i karakteristicnog
!*   broja odredjuju koeficijenti razvoja a zatim i oblik
!*   talasovoda. Metodom najmanjih kvadrata ili njenom
!*   modifikacijom provjerava se da li dobijeni talasovoda
!*   ima zadati karakteristicni broj, crtaju se linije
!*   polja i odredjuju subici za dobijeni profil.
!*****
      real*8 arg
      complex*16 v(30),a1(30),akk,rv,ansum
      complex*16 a(30,30),b(29),a2(29,29)
      complex*16 a1(29,29),b1(29),x1(29),x2(29),as(30,30)
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      open(1,file='pod.dat',status='old')
      ad=2.    ! sirina talasovoda
      h=1.     ! maksimalna visina
      type*, 'broj proizvoljno uzetih koeficijenata nbrs=**'
      read(1,667)nbrs
      do inh=1,nbrs
      type*,inh,'slobodni koef. al(j)=**.***.***.***.***'
      read(1,661)al(inh)
661      format(2f8.5)
      end do
      ed=.8    !
      d=h      ! duzina bocne prave ivice
      type*, 'sirina ravnog dijela r=**.***'
      read(1,666)r    ! sirina pravog dijela
      c=0.4    ! dubina ureza
      type*, 'broj clanova reda i=**'
      read(1,667)i
667      format(i2)
      ! i - broj clanova reda
      ka=100 ! broj podeoka
      type*, 'zadata vrijednost k/(pi/a)=**.***'
      read(1,666)aks ! srednja vrijednost sopstvenog broja
666      format(f4.2)
      aks=.0000      ! granicne vrijednosti (aks +-2aks)
      lsi=-2          ! oblik granicne ivice
      ls=1            ! broj granicnih uslova
      msi=1           ! 0 ako ne treba racunati subitke
      mpolj=0         ! 0 ako ne treba crtati polje
      mkoef=2         ! 0 - ako su koeficijenti sistema
                        ! jednaki Four. koeficijentima
                        ! 1 - ako se koeficijenti racunaju
                        ! preko sume Four. koeficijenata
                        ! 2 - ako se koristi metoda
                        ! najmanjih kvadrata
      pi=3.1415926535897932
      epk=.01         ! tacnost karakteristicnog broja
!
      zak=aks          ! zadata vrijednost karakt. broja
      type*, 'broj clanova reda',i,'zadato k= ',zak
!
      dx=r/(i-1.)

```

```

!   Racunanje koeficijenata razvoja iz uslova da izvod Hz
!   po y-koordinati bude jednak 0 duz r-dijela zida
      do 11 kk=1,i
      do 11 jj=1,i
!
      re=sin((2*kk-1)*pi/ad*(-ad/2+(jj-1)*dx))
      arg=(-((2,d0*kk-1,)*pi/ad)**2+(zak*pi/ad)**2)
      argum=dcmplx(arg,0,d0)
      akk=cdsqrt(argum)
      re=re*akk*cdsin(akk*d)
      re=re/dexp((2,d0*kk-1)*pi/ad*h)
      a(jj,kk)=re
11    continue

      do 40 m=1,i-nbrs
      b(m)=0.
      do 50 inb=1,nbrs
50     b(m)=b(m)+a(m,inb)*al(inb)
      do 40 n=1,i-nbrs
40     a2(m,n)=a(m,n+nbrs)

      eps=.0000001
      im=3
      n=i-nbrs
      nn=29

      call sisl3(a2,b,n,x2,ind,nn,a1,b1,x1,eps,it,im)
c
      do 8 m=nbrs+1,i
      al(m)=x1(m-nbrs)
8     continue

      do 9 m=1,i
      write(6,7997)m,al(m)
7997  format(1x,'al(',i2,')= ',2f18.14)
9     continue

      if(aks.eq.0.) go to 1213
      call talas(aks,aks,ls,epk)
      go to 1111
1213  call tfin(aks,ws,aks)
1111  continue
      end
c

```

```

      subroutine funsr(x,ys,yp)
!*****
!*   Potprogram u kome se racuna funkcija zida talasovoda *
!*   ys i njen izvod yp za zadatu vrijednost x koordinate *
!*****
      complex*16 al(30)
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      real*8 f1,x,y,ys,fk1,fk2,fk3,fk4,fk,dx,yp,x1,ym
      save
      istamp=istamp+1
      dx=ad/2./ka
      x=x-dx
      if(x.ge.-.985d0)go to 100
      y=1.d0
      yp=0.
      x=x+dx
      go to 5559
100    if(x.gt.-.985d0)go to 101
      f1=0.
      go to 102
101    call izvod(x,y,f1)
102    fk1=dx*f1
      call izvod(x+dx/2.,y+fk1/2.,f1)
      fk2=dx*f1
      call izvod(x+dx/2.,y+fk2/2.,f1)
      fk3=dx*f1
      x1=x+dx
      call izvod(x1,y+fk3,f1)
      fk4=dx*f1
      fk=(fk1+2.*(fk2+fk3)+fk4)/6.
      y=y+fk
      x=x+dx
      call izvod(x,y,yp)
5559   if(istamp.gt.ka)go to 5557
      if(istamp/2-istamp/2..eq.0.)go to 5557
      write(6,8886)x,y,yp
8886   format(1x,3f7.3,<iidint(100.*y)>x,'*')
5557   ys=y
      return
      end

```

```

      subroutine izvod(x,y,f)
      complex*16 al(30)
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      complex*16 fb,fbx,fby
      real*8 x,y,yp,i,ypd,f
      save

      ypi=0.d0
      ypd=0.d0

      do m=1,i

```

```

call bazfun(m,j,zak,x,y,fb,fbx,fbz)
ypi=ypi+dreal(al(m)*fbz)
ypd=ypd+dreal(al(m)*fbx)
end do
f=ypi/ypd
return
end

```

c

```

subroutine bazfun(m,j,ak,x,y,fb,fbx,fbz)
!*****
!*   Potprogram za racunanje baznih funkcija fb i njihevih
!*   izvoda po x koordinati fbx i po y koordinati fbz uz
!*   zadate koordinate tacke (x,y), sopstveni broj ak i
!*   redni broj bazne funkcije m
!*****
complex*16 al(30)
real*8 aa,akr,x,y
complex*16 akar,akm,fb,fbx,fbz
common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkcoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
aa=(2*m-1)*pi/ad
akr=-aa**2+(ak*pi/ad)**2
akar=dcmplx(akr,0.d0)
akm=cdsort(akar)
fb=dsin(aa*x)*cdcos(akm*y)/dexp((2.d0*m-1)*pi/ad*h)
fbx=aa*dcos(aa*x)*cdcos(akm*y)/dexp((2.d0*m-1)*pi/ad*h)
fbz=-akm*dsin(aa*x)*cdsin(akm*y)/dexp((2.d0*m-1)*pi/ad*h)
return
end

```

c

```

subroutine talas(aks,aks,ls,epk)
!*****
!*   Odredjivanje minimuma greske u funkciji sopstvenos
!*   broja ak (aks, aks, ls i epk su objasnjeni u glavnom
!*   programu
!*****
complex*16 al(30)
complex*16 sx(30,200),a(30,30),b(29),a2(29,29),v(30)
real*8 sq(200),eps,aa,ak,x,y,akr
real*8 yg,ymin
complex*16 a1(29,29),b1(29),x1(29),x2(29),as(30,30)
complex*16 f(200),fd(200,200),e,akm,s,akar
common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkcoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
type*, '*****'
yg=10.**(15)
ymin=10.**(15)
brpod=2.
aks=aks*2.*brpod
lm=1
20 aks=aks/brpod
step=aks*2./brpod
90 continue
do 10 ak=aks-lm*aks,aks+lm*aks+0.00001,step
yg=yg
call tfin(ak,yg,aks)
type*,ak,yg
if(yg.gt.ymin)go to 10
ymin=yg
akmin=ak

```

```

10      continue
      if(step.le.epk)go to 30
      lm=2
      aks=akmin
      go to 20
30      if(aks.eq.0.)go to 80
      aks=0.
      aks=akmin
      go to 90
80      continue
      end

      subroutine tfin(ak,gg,aks)
!*****
!*      Racunanje koeficijenata sistema po metodu najmanjih *
!*      kvadrata i njesovoj modifikaciji i racunanje integrala *
!*      kvadratne greske gg
!*****
      complex*16 al(30),a2(29,29),v(30)
      complex*16 sx(30,200),st(30,200),a(30,30),b(29)
      real*8 sq(200),eps,aa,ak,x,y,akr,gg
      real*8 gg,gmin
      complex*16 al(29,29),b1(29),x1(29),x2(29),as(30,30)
      complex*16 f(200),fd(200,200),e,et,akm,s,akar
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
!      Racunanje baznih funkcija u tackama duz zida talasovoda
      do 10 m=1,i
      do 10 j=1,ka
      x=-ad/2.d0+ad/2.d0/ka*(j-1)
      call fungr(x,y,gg)
      call bazfun(m,j,ak,x,y,fb,fbx,fby)
      sx(m,j)=(-yp*fbx+fby)/sqrt(1+yp**2)
      st(m,j)=(fbx+yp*fby)/sqrt(1+yp**2)
      sq(j)=sqrt(1+yp**2)
10      continue

      if(mkoef.eq.2)go to 201
!      Racunanje FT baznih funkcija
      nka=inint(alog(float(ka))/alog(2.))
      do 201 m=1,i
      do 20 j=1,ka
20      f(j)=sx(m,j)
      call fft(f,nka,1)
      do 202 j=1,ka
202      fd(m,j)=f(j)
201      continue
!      Odredjivanje koeficijenata sistema
      do 203 m=1,i
      do 203 n=1,i
      if(mkoef.eq.0)go to 5000
      if(m.st.n)go to 209
      a(m,n)=dcmplx(0.,0.)
      do 203 j=1,ka
      if(mkoef.eq.2)go to 51515
      a(m,n)=a(m,n)+fd(m,j)*dconjg(fd(n,j))
      go to 203
51515      a(m,n)=a(m,n)+sx(m,j)*dconjg(sx(n,j))*ad/2./ka
      go to 203

```



```

209      a(m,n)=dconjg(a(n,m))
      go to 203
5000      if(n.gt.i/2)go to 5001
      a(n,m)=fd(m,n)
      go to 203
5001      a(n,m)=fd(m,ka-i+n)
203      continue

      do 40 m=1,i-1
      b(m)=a(m,1)
      do 40 n=1,i-1
40      a2(m,n)=a(m,n+1)

      eps=.0000001
      im=3
      n=i-1
      nn=29

      call sis1j(a2,b,n,x2,ind,nn,a1,b1,x1,eps,it,im)
      v(1)=-1.
      do 8 m=2,i
      if(aks.gt.0.)go to 8
      write(6,7997)m,x1(m-1)
7997      format(1x,'v( ',i2,' )=' ,2f18.14)
8      v(m)=x1(m-1)
!      Racunanje greske i integrala kvadratne greske
      yg=cmplx(0.,0.)
      do 50 j=1,ka,ka/20
      e=cmplx(0.,0.)
      et=cmplx(0.,0.)
      do 60 m=1,i
      e=e+v(m)*sx(m,j)
      et=et+v(m)*st(m,j)
60      continue
!
      yg=yg+real(e)**2/20.
      if(aks.gt.0.)go to 50
      type*,dreal(e),dreal(et),j
50      continue
      if (aks.gt.0.)go to 343
      type*, 'gre=',real(yg), 'kn=',ak, 'k=',ak*pi/ad
      if(mpolj.eq.0)go to 51
      call polje(v,ak)
51      if(msi.eq.0)go to 343
      call subici(v,ak,alfa)
!
343      continue
      return
      end
!
!
```

```

subroutine polje(v,ak)
! ****
! * Ortanje vrijednosti Hz(x,y) po poprecnom presjeku *
! * koristeći alfanumericke znake, a time i određivanje *
! * linija polja (sa v(m) su oznaceni koef. razvoja *
! ****
character*1 fi(200,200)
complex*16 al(30)
complex*16 v(30),fb,fbx,fbv
real*8 yy,x,y,yp
complex hh(200,200),hn
common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pj,mg:
hn=0.
do 11=1,i
call bazfun(11,j,ak,-ad/2.,1.,fb,fbx,fbv)
hn=hn+v(11)*fb
end do
do 222 mm=1,ka+1
x=-ad/2.+ad/2./ka*(mm-1.)
call fungr(x,yy,yp)
do 222 nn=1,ka
y=h/ka*(nn-1)
if(y.gt.yy) go to 2223
hh(mm,nn)=cmplx(0.,0.)
do 2224 ii=1,i
call bazfun(ii,j,ak,x,y,fb,fbx,fbv)
hh(mm,nn)=hh(mm,nn)+v(ii)*fb
2224 continue
go to 222
2223 hh(mm,nn)=hn
222 continue
!
do 2226 mm=1,ka+1
do 3222 nn=1,ka
fif=1.-abs(real(hh(mm,nn)/hn))
!
if(fif.lt.1./50.)fi(mm,nn)=' '
if(fif.lt.1./15.and.fif.ge.1./50.)fi(mm,nn)='.'
if(fif.lt.2./15.and.fif.ge.1./15.)fi(mm,nn)='-'
if(fif.lt.3./15.and.fif.ge.2./15.)fi(mm,nn)=':'
if(fif.lt.4./15.and.fif.ge.3./15.)fi(mm,nn)='/'
if(fif.lt.5./15.and.fif.ge.4./15.)fi(mm,nn)='+'
if(fif.lt.6./15.and.fif.ge.5./15.)fi(mm,nn)='x'
if(fif.lt.7./15.and.fif.ge.6./15.)fi(mm,nn)='o'
if(fif.lt.8./15.and.fif.ge.7./15.)fi(mm,nn)='I'
if(fif.lt.9./15.and.fif.ge.8./15.)fi(mm,nn)='x'
if(fif.lt.10./15.and.fif.ge.9./15.)fi(mm,nn)='Z'
if(fif.lt.11./15.and.fif.ge.10./15.)fi(mm,nn)='O'
if(fif.lt.12./15.and.fif.ge.11./15.)fi(mm,nn)='%'
if(fif.lt.13./15.and.fif.ge.12./15.)fi(mm,nn)='0'
if(fif.lt.14./15.and.fif.ge.13./15.)fi(mm,nn)='8'
if(fif.ge.14./15.)fi(mm,nn)='*'
3222 continue
2226 continue
!
write(6,2227)( '...',nn=1,ka)
!
do mm=1,ka+1,2

```

```

write(6,2227)(fi(mm,nn),nn=1,ka)
end do
do mm=1,ka+1,2
write(6,2227)(fi(ka+2-mm,nn),nn=1,ka)
end do

!
2227 write(6,2227)(' ',nn=1,ka)
      format(1x,100a1)
      return
      end

!
!
      subroutine subici(v,ak,alfa)
!*****
!*   Racunanje koeficijenta slabljenja alfa
!*****
      complex*16 al(30)
      complex*16 v(30),ht(100),htt(100)
      real*8 x,y,yp,ys
      common mpolj,zak,al,lsi,ad,h,mkoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi

      ka=25

      cc=3*10**8
      emi=4*pi*.1
      sigm=62.9
      fkr=ak*cc/2/ad

      write(6,120)
120   format(//',10x,'alfa',20x,'alfap',20x,'fr'//)
c
      do 565 j=1,ka/2
      ll=1
      fr=fkr+10*fkr/ka*(j-.9999)
      sama=sqrt((2*pi*fr/cc)**2-(ak*pi/ad)**2)
c
c
      do 1 j=1,ka
      ha=ad/2/ka
      x=-ad/2.d0+ha*(j-1.)
      call fungr(x,y,yp)
      call komp(1,v,ak,x,y,yp,ha,ht,j,sama)
1   continue
      call inte(ht,ha,ka,sint)
      s=sint

      do 5 j=1,ka
      ha=ad/2./ka
      x=-ad/2.d0+ha*(j-1.)
      y=0.d0
      yp=0.d0
      call komp(1,v,ak,x,y,yp,ha,ht,j,sama)
5   continue
      call inte(ht,ha,ka,sint)
      sp=s+sint

      do 55 j=1,ka
      ha=d/ka

```

```

y=ha*j*1.d0
x=-ad/2.d0
yp=0.d0
call komp(1,v,ak,x,y,yp,ha,ht,j,sama)
55 continue
call inte(ht,ha,ka,sint)
sp=sp+sint
s=s+sint

ss=s*.5*.000001*sqrt(emi*2*pi*fr/2/sigm)
sp=sp*.5*.000001*sqrt(emi*2*pi*fr/2/sigm)
do 11 j=1,ka
hx=ad/2./ka
hy=h/ka
x=-ad/2.d0+hx*(j-1.)
call funar(x,ys,yp)
na=int(ys/h*ka)
do 18 jj=1,na
y=hy*jj*1.d0
call komp(0,v,ak,x,y,yp,ha,ht,jj,sama)
18 continue
do 12 jj=na+1,ka
12 ht(jj)=0
call inte(ht,hy,ka,sint)
11 htt(j)=sint
call inte(htt,hx,ka,sint)
s1=sint/sama*2*pi*fr*emi*.000001
alfa=s/s1
alfap=sp/s1
write(6,90)alfa,alfap,fr
90 format(' ',e15.5,10x,e15.5,10x,e15.5)
565 continue
return
end

!
!
      subroutine komp(11,v,ak,x,y,yp,ha,ht,j,sama)
!*****
!*   Racunanje komponenti Hx, Hy, HT i Ht
!*****
      complex*16 al(30)
      complex*16 v(30),ht(100),hx,hy,hz,akar,akm
      real*8 akr,x,y,yp
      common mpol,j,zak,al,lsi,ad,h,mkcoef,ed,d,r,c,i,ka,pi,msi
      hx=0
      hz=0
      hy=0
      do 2 m=1,i
      call bazfun(m,j,ak,x,y,fb,fbx,fbz)
      hz=hz+v(m)*fb
      hy=hy-v(m)*sama/(ak*pi/ad)**2*fbz
2      hx=hx-v(m)*sama/(ak*pi/ad)**2*fbx
      ht(j)=(cdabs(hx)**2+cdabs(hy)**2+11*cdabs(hz)**2)**
&      sqrt(1+11*yp**2)
      return
      end

!
!

```

```

      subroutine inte(f,ha,ka,y)
!*****
!*   Racunanje integrala
!*****
      complex*16 f(100)
      y=0.
      do 30 j=1,ka
      if((j/2.-int(j/2)).eq.0)go to 430
      y=y+ha/3.*4.*f(j)
      go to 30
430  y=y+ha/3.*2.*f(j)
30   continue
      return
      end

```

c

```

      subroutine fft(s,m,idir)
!*****
!*   Racunanje direktne i inverzne FFT niza s koji ima 2**m *
!*   clanova. Potprogram prezet iz "Digital signal
!*   processing" A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer - Prentice
!*   Hall 1975
!*****
      complex*16 s(128),u,w,t
      n=2**m
      nv2=n/2
      nm1=n-1
      j=1
      do 7 i=1,nm1
      if(i.ge.j) go to 5
      t=s(j)
      s(j)=s(i)
      s(i)=t
5     k=nv2
6     if(k.ge.j) go to 7
      j=j-k
      k=k/2
      go to 6
7     j=j+k
      pi=4.*atan(1.)
      do 20 l=1,m
      le=2**l
      le1=le/2
      u=(1.0,0.0)
      w=cmplx(cos(pi/float(le1)),
      *idir*(-1.0)*sin(pi/float(le1)))
      do 20 j=1,le1
      do 10 i=j,n,le
      ip=i+le1
      t=s(ip)*u
      s(ip)=s(i)-t
10    s(i)=s(i)+t
20    u=u*w
      if(idir.eq.1) return
      do 27 k=1,n
      s(k)=s(k)/n
27    continue
      return
      end

```

```

      subroutine sislj(a,b,n,x,ind,nn,a1,b1,x1,eps,it,im)
!*****
!*   Rjesavanje sistema linearnih jednacina Ax=B, gdje je n *
!*   red sistema a eps tacnost. Ostalo su pomocni parametri.*
!*   Potprogram preuzet iz "Numericka analiza" P. Pejovic *
!*   Naučna knjiga Beograd 1983. *
!*****
      complex*16 a(29,29),b(29),x(29),a1(29,29),b1(29),x1(29)
      double precision max,eps
      do 1 i=1,n
      b1(i)=b(i)
      do 1 j=1,n
1      a1(i,j)=a(i,j)

      it=0

      call gaus(a1,b1,n,x,ind,nn)

23      do 23 i=1,n
      x1(i)=x(i)

5      it=it+1

      do 13 i=1,n
      b1(i)=b(i)
      do 13 j=1,n
13      a1(i,j)=a(i,j)
c
      if(it.gt.im)go to 7

      do 2 i=1,n
      do 2 j=1,n
2      b1(i)=b1(i)-a1(i,j)*x1(j)

      call gaus(a1,b1,n,x,ind,nn)

      do 3 i=1,n
3      x1(i)=x1(i)+x(i)

      max=cdabs(x(1))
      do 9 i=1,n
      if(abs(x(i)).lt.max)go to 9
      max=cdabs(x(i))
9      continue

      if(max.gt.eps)go to 5
      go to 8
7      write(6,100)
100      format(1x,' ')
8      return
      end

      subroutine gaus(a,b,n,x,ind,nn)
      complex*16 a(1),b(1),x(1),p
      double precision max

c
      ij(i,j)=i+(j-1)*nn
c

```

```

do 40 k=1,n-1
max=cdabs(a(ij(i,k)))
l=k
do 20 i=k+1,n
if(max.gt.cdabs(a(ij(i,k)))) goto 20
max=cdabs(a(ij(i,k)))
l=i
20 continue
if(max.ne.0) goto 25
ind=1
return
25 if(l.eq.k) goto 35
do 30 j=1,n
p=a(ij(k,j))
a(ij(k,j))=a(ij(l,j))
a(ij(l,j))=p
30 continue
p=b(k)
b(k)=b(l)
b(l)=p
35 do 40 i=k+1,n
do 37 j=k+1,n
a(ij(i,j))=a(ij(i,j))-a(ij(i,k))*a(ij(k,j))
* /a(ij(k,k))
37 continue
b(i)=b(i)-a(ij(i,k))*b(k)/a(ij(k,k))
40 continue
c
c izracunavanje vektora resenja
c
x(n)=b(n)/a(ij(n,n))
do 60 i=n-1,1,-1
x(i)=b(i)
do 50 k=i+1,n
x(i)=x(i)-a(ij(i,k))*x(k)
50 continue
x(i)=x(i)/a(ij(i,i))
60 continue
c
ind=2
return
end

```

```

!*****
!*      Program za rjesavanje problema difrakcije sa
!*      periodичnih savrseno provodnih struktura primjenom
!*      metoda najmanjih kvadrata i modifikovanog metoda
!*****
      complex*16 sx(50,100),a(50,50),b(49),a2(49,49),v(50)
      double precision sq(100),eps
      complex*16 a1(49,49),b1(49),x1(49),x2(49),as(50,50)
      complex*16 f(100),fd(100,100),e,ade,de,ar,cj,ar1
      integer nsu(10)
!      open(unit=1,file='refl.dat',status='new')
!
      nsu(1)=0
      nsu(2)=1
      nsu(3)=3
      nsu(4)=15
!
      do 9009 ijl=3,4
        type*, '*****'
        type*, '*****', 'ns=', nsu(ijl), '*****'
        type*, '*****'
        i=31      ! broj clanova reda
        d=2       ! duzina periode resetke
        h=0.25    ! maksimalna visina resetke
        ka=64     ! broj podeoka
        if(ijl.eq.4) then mb=100
        mb=555    ! mb=0 koeficijenti sistema su jednaki
                   ! Fourierovim koeficijentima
                   ! mb=555 koefic. sistema se dobijaju uzim.
                   ! susjedne harmonike
        ns=nsu(ijl) ! broj susjednih harmonika pri rac.
                   ! koef. sistema
        mus=10    ! broj razlicitih uslova rav. rasporedjenih
                   ! od 0 do 90 stepeni
!
        pi=4.*atan(1.)
        write(6,110)d,h
110      format('// ', 'd= ',f5.3,3x,' h= ',f5.4//)
        type*, 'broj clanova reda n=', i
        type*, 'broj susjednih Four. koefic. ns=', ns
!
        do 53 mth=1,mus
          type*, ' '
          type*, '*****SINUSNA RESETKA*****'
          the=pi/2.*(mth-1.)/(mus-1.)
          type*, ' '
          type*, 'UGAO=', the/pi*180, 'u stepenima'
          type*, ' '
!
          Racunanje funkcija reflektovanog talasa
          do 10 m=1,i
            sa=sin(the)+(m-(i+1)/2.)/d
            ade=dcmplx(1.-sa**2,0.)
            de=cdsqrt(ade)
!
            do 10 j=1,ka
              x=d/ka*j
              call fungr(x,z,h,d)

```



```

      ar=2*pi*(sa*x+de*z)
      cj=dcmplx(0.,-1.)
      ar=ar*cj
      ar1=2*pi*(sa*d+de*h)
      ar1=ar1*cj
      sx(m,j)=cdexp(ar-ar1)
10      continue

!      Racunanje funkcije incidentalnog talasa
      do 101 j=1,ka
        x=d/ka*j
        call fungr(x,z,h,d)
        ar=2*pi*(sin(the)*x-cos(the)*z)
        cj=dcmplx(0.,-1.)
        ar=ar*cj
        sx(i+1,j)=cdexp(ar)
101      continue

!      Odredjivanje FT funkcija
      do 201 m=1,i+1
        do 20 j=1,ka
          f(j)=sx(m,j)
          call fft(f,6,1)
          do 202 j=1,ka
            fd(m,j)=f(j)
202          continue
201      continue

!      Racunanje koeficijenata sistema
      do 203 n=1,i
        do 203 m=1,i+1
          if(mb.eq.0)go to 1514
          if(mb.eq.555)go to 5005

          if(n.gt.m)go to 207
          a(n,m)=dcmplx(0.,0.)
          do 205 j=1,ka
            a(n,m)=a(n,m)+fd(m,j)*dconjg(fd(n,j))
205          go to 203
207          a(n,m)=dconjg(a(m,n))
          go to 203

!
1514          if(n.gt.i/2)go to 5001
          a(n,m)=fd(m,n)
          go to 203
5001          a(n,m)=fd(m,ka-i+n)
          go to 203

!
5005          a(n,m)=dcmplx(0.,0.)
          do 5505 j=n-ns,n+ns
            j1=16-j
            if(j1.gt.0)go to 5505
            j1=ka+j1
5505          a(n,m)=a(n,m)+fd(m,j1)*dconjg(fd(n,j1))
203      continue

      do 40 m=1,i
        b(m)=-a(m,i+1)

```

```

40      do 40 n=1,i
        a2(m,n)=a(m,n)

        eps=.000001
        im=3
        n=i
        nn=49

        call lji(a2,b,n,x2,ind,nn,a1,b1,x1,eps,it,im)
!
!      Racunanje koeficijenata refleksije i provjera
!      energetskeg bilansa i zadovoljenja granicnog uslova
        r0=0.
        do 8 m=1,i
          ga=sin(the)+(m-(i+1)/2.)/d
          if(abs(ga).gt.1.)go to 8
          mj=m-(i+1)/2.
          R=cdabs(x1(m))*2*sqrt(1.-ga**2)/cos(the)
          type*, 'm=',mj, 'R=',R
          r0=r0+R
8        v(m)=x1(m)
          type*, '
          type*, 'suma kvadrata=',r0, '--- ', 'greska=',abs(1.-r0)
          type*, '
          type*, 'zadovoljenje granicnog uslova'
          do 50 j=1,ka,8
            e=sx(i+1,j)
            do 60 m=1,i
160          e=e+v(m)*sx(m,j)
              type*,dreal(e),dimag(e),j
50          continue
53          continue
9009         continue
              stop
            end

            subroutine fungr(x,z,h,d)
!*****
!      funkcija refleksione površine
!*****
            pi=4.*atan(1.)
            z=h*sin(2*pi*x/d)
617          return
            end

```

## PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: *Akademik prof. dr Ljubiša Stanković*

Godina rođenja: *01. 06. 1960. godine*

E-mail: *ljubisa@ucg.ac.me*

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore:

*Elektrotehnički fakultet*

Naslov doktorske disertacije:

*Modifikovani metod najmanjih kvadrata i njegova primjena na probleme difrakcije i talasovoda složenog poprečnog presjeka*

Prevod naslova na engleski jezik:

*Modified least squares residual method (using the FFT algorithms) with applications to the diffraction problems and waveguides of complex cross section*

Datum odbrane: *Titograd, 08. 07. 1988. godine*

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci<sup>1</sup>

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

---

<sup>1</sup> Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

**PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV  
UNIVERZITETA CRNE GORE**

Prevod naslova disertacije na engleski jezik:

*Modified least squares residual method (using the FFT algorithms) with applications to the diffraction problems and waveguides of complex cross section*

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu):

-mentor:

*Prof. dr Svetozar Jovičević (ETF, Titograd)*

-članovi Komisije za ocjenu:

- 1. Akademik prof. dr Jovan Surutka (ETF, Beograd)*
- 2. Prof. dr Aleksandar Marinčić (ETF, Beograd)*
- 3. Prof. dr Svetozar Jovičević (ETF, Titograd)*

-članovi Komisije za odbranu:

- 1. Akademik prof. dr Jovan Surutka (ETF, Beograd),*
- 2. Akademik prof. dr Branko Popović (ETF, Beograd),*
- 3. Prof. dr Aleksandar Marinčić (ETF, Beograd),*
- 4. Prof. dr Dragutin Veličković (Elektronski fakultet, Niš),*
- 5. Prof. dr Svetozar Jovičević (ETF, Titograd),*
- 6. Prof. dr Milojica Jaćimović (Institut za matematiku i fiziku, Titograd)*

Sažetak\*

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

Ključne riječi

Ključne riječi na engleskom jeziku

Naučna oblast/uža naučna oblast

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

Ostali podaci

\* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu.

## IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore unese doktorsku disertaciju pod naslovom

*Modifikovani metod najmanjih kvadrata i njegova primjena na probleme difrakcije i talasovoda složenog poprečnog presjeka*

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la<sup>1</sup>.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

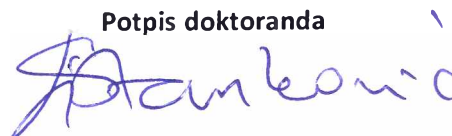
Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

☒ Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda



U Podgorici 16.01.2020.

---

<sup>1</sup> Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)

**Autorstvo**

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

**Autorstvo – bez prerada**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

**Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

**Autorstvo – nekomercijalno**

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada**

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima**

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.