

UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

Esad Tombarević

ANALIZA NESTACIONARNOG PRENOSA
TOPLOTE U GEOTERMALNIM
RAZMJENJIVAČIMA SA U-CIJEVIMA
DOKTORSKA DISERTACIJA

Podgorica, 2016

UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

Esad Tombarević

ANALIZA NESTACIONARNOG PRENOSA
TOPLOTE U GEOTERMALNIM
RAZMJENJIVAČIMA SA U-CIJEVIMA
DOKTORSKA DISERTACIJA

Podgorica, 2016

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Esad Tombarević

ANALYSIS OF UNSTEADY HEAT
TRANSFER IN THE GEOTHERMAL
U-TUBE BOREHOLE
HEAT EXCHANGERS
Ph.D. THESIS

Podgorica, 2016

PODACI O DOKTORANDU, MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE

DOKTORAND

Ime i prezime: Esad Tombarević

Datum i mjesto rođenja: 28.09.1983., Bar, Crna Gora

Naziv završenog studijskog programa i godina završetka: Univerzitet Crne Gore, postdiplomske magistarske studije, studijski program mašinstvo, smjer energetika, 2009

MENTOR

Prof. dr Igor Vušanović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Mašinski fakultet

ČLANOVI KOMISIJE

Prof. dr Petar Vukoslavčević, redovni profesor u penziji, Univerzitet Crne Gore, Mašinski fakultet

Prof. dr Igor Vušanović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Mašinski fakultet

Prof. dr Vaughan R. Voller, redovni profesor, University of Minnesota, Department of Civil, Environmental and Geo- Engineering

Prof. dr Mirko Komatina, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Datum odbrane: 28.06.2016.

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: Univerzitet Crne Gore, Mašinski fakultet, doktorske studije, smjer energetika

Naslov doktorske disertacije: Analiza nestacionarnog prenosa toplote u geotermalnim razmjenjivačima sa U–cijevima

Rezime: U tezi je izložen numerički model nestacionarnog, trodimenzionalnog prenosa toplote kod geotermalnog razmjenjivača izvedenog u obliku bušotine sa U–cijevi. Verifikacija i validacija je urađena poređenjem rezultata numeričkih simulacija sa odgovarajućim analitičkim rješenjima kao i sa rezultatima mjerenja na eksperimentalnim instalacijama. Pomoću razvijenog numeričkog modela izvršena je analiza nestacionarnog prenosa toplote kod geotermalnog razmjenjivača. Takođe, urađena je i analiza uticaja pojedinih parametara na prenos toplote. U prilogu teze je dat detaljni CVFEM algoritam za trodimenzionalne probleme advekcije-difuzije, na mrežama sa tetraedarskim elementima.

Ključne riječi: geotermalni razmjenjivač toplote, U–cijev, bušotina, CVFEM

Naučna oblast: prenos toplote i mase, numerička dinamika fluida

Uža naučna oblast:

UDK broj:

DATA RELATED TO THE Ph.D. THESIS

Title of Ph.D. studies: University of Montenegro, Faculty of Mechanical Engineering,
Ph.D. studies, Department of energy

Title of the Ph.D. thesis: Analysis of unsteady heat transfer in the geothermal U-tube
borehole heat exchanger

Summary: This Ph.D. thesis presents a numerical model of unsteady, three-dimensional heat transfer in the geothermal U-tube borehole heat exchanger. Verification and validation is performed by comparing the results of numerical simulations with appropriate analytical solutions as well as with the results of measurements on the experimental installations. The developed numerical model is used for the analysis of unsteady heat transfer in the geothermal heat exchanger. The influence of various parameters on the heat transfer process is investigated. A detailed CVFEM algorithm for three dimensional advection-diffusion problems with tetrahedral mesh elements is given as an appendix of this thesis.

Keywords: geothermal heat exchanger, U-pipe, borehole, CVFEM

Scientific field: heat and mass transfer, computational fluid dynamics

Specific scientific field:

UDC number:

Apstrakt

Geotermalni razmjenjivači toplote u obliku bušotine sa U–cijevima se često koriste za sprežanje toplotne pumpe i tla kao izvora, odnosno ponora toplote. Ovakvo tehničko rješenje omogućava efikasniji rad toplotne pumpe jer je temperatura tla zimi veća, a ljeti manja od temperature vazduha.

U ovoj disertaciji je prikazan trodimenzionalni CVFEM model nestacionarnog prenosa toplote oko geotermalnog razmjenjivača u obliku bušotine sa jednom U–cijevi. U ovom modelu se prostiranje toplote kroz fluid koji cirkuliše u U–cijevi posmatra kao jednodimenzionalno, dok se prostiranje toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo posmatra kao trodimenzionalno. Jednačine matematičkog modela se simultano rješavaju. Verifikacija numeričkog rješenja je urađena poređenjem sa analitičkim rješenjima, dok je validacija modela urađena poređenjem sa rezultatima mjerenja na eksperimentalnim instalacijama. Razvijeni model je korišćen za simulaciju nestacionarnog prenosa toplote pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu. Analiziran je uticaj različitih parametara na razmjenu toplote (brzina strujanja i temperatura fluida na ulazu, toplotne karakteristike cijevi, ispune bušotine i tla, rastojanje između dva kraka U–cijevi i brzina strujanja podzemne vode).

U radu je takođe detaljno izveden CVFEM postupak diskretizacije za trodimenzionalne probleme advekcije–difuzije za mreže sa tetraedarskim elementima. Predloženi algoritam je testiran na nizu primjera za koje su na raspolaganju odgovarajuća analitička rješenja.

Abstract

Borehole heat exchangers are often used to couple the heat pump with the ground to use it as a heat source or sink. This technical solution allows more efficient operation of the heat pump since the soil usually has more favourable temperatures than air to be used as a heat source in winter, or as a heat sink in summer.

This thesis presents a three-dimensional CVFEM model for unsteady heat flow around single U-tube borehole heat exchanger. The heat transfer model of the fluid circulating in the U-tube is considered as one-dimensional, while heat transfer through the pipe's wall, grout and soil is considered as three-dimensional. The equations of the mathematical model are simultaneously solved to arrive at the final solution. The numerical solution is verified through comparison with available analytical solutions, while the numerical model is validated through comparison with experimental results. The proposed model is used for the analysis of unsteady heat transfer following the step change of inlet fluid temperature. The influence of various parameters (such as fluid velocity and temperature at the inlet, thermal properties of pipe, grout and soil, shank spacing and groundwater flow) are analysed.

The thesis also presents a detailed CVFEM algorithm for three dimensional advection-diffusion problems with domains meshed by tetrahedral elements. The proposed algorithm has been tested on a series of examples for which there are available appropriate analytical solutions.

Sadržaj

Apstrakt	i
Abstract	ii
1. Uvod	1
1. 1. Istorijski razvoj sistema sa geotermalnim toplotnim pumpama	6
1. 2. Podjela sistema sa geotermalnim toplotnim pumpama	8
1. 2. 1. Sistemi koji koriste podzemne vode kao izvor/ponor toplote	8
1. 2. 2. Sistemi koji koriste površinske vode kao izvor/ponor toplote	9
1. 2. 3. Sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote	10
1. 2. 3. 1. Horizontalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote	11
1. 2. 3. 2. Vertikalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote	12
1. 3. Fenomen prenosa toplote kod vertikalnih geotermalnih razmjenjivača toplote sa U–cijevima	13
2. Pregled stanja u oblasti istraživanja	17
2. 1. Analitički modeli za prenos toplote oko bušotine	18
2. 1. 1. Modeli zasnovani na Kelvinovom analitičkom rješenju za linijski izvor toplote	18
2. 1. 1. 1. Ingersollov model	18
2. 1. 1. 2. Hartov i Couvillionov model	20
2. 1. 1. 3. Rješenje za linijski izvor konačne dužine	21
2. 1. 1. 4. Rješenja za pokretni linijski izvor beskonačne i konačne dužine	22
2. 1. 2. Modeli zasnovani na analitičkom rješenju Carslaw i Jaegera za cilindrični izvor toplote	23
2. 1. 2. 1. Kavanaughov model	23

2. 2. Modeli za stacionaran prenos toplote unutar bušotine	25
2. 2. 1. Model ekvivalentnog prečnika	26
2. 2. 2. Model Paula	27
2. 2. 3. Višepolni model	28
2. 3. Modeli koji koriste faktore odziva	28
2. 3. 1. Modeli funkcija odziva za duge vremenske korake	28
2. 3. 2. Modeli funkcija odziva za kratke vremenske korake	31
2. 3. 3. DST model	33
2. 4. Diskretizovani numerički modeli	34
2. 4. 1. Konačne razlike	34
2. 4. 2. Konačni elementi	36
2. 4. 3. Kontrolisane zapremine	43
3. Cilj rada	46
4. Matematički model i numeričko rješenje	48
4. 1. Jednačine matematičkog modela	48
4. 1. 1. Jednačina prenosa toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi	48
4. 1. 2. Jednačina prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo	48
4. 2. Diskretizacija jednačina matematičkog modela	49
4. 2. 1. Diskretizacija jednačine prenosa toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi	49
4. 2. 2. Diskretizacija jednačine prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo	55
4. 3. Koeficijent prelaza toplote	68
4. 4. Strujanje podzemne vode	70
5. Verifikacija i validacija	72
5. 1. Prostiranje toplote u fluidu koji cirkuliše u U–cijevi	73
5. 1. 1. Stacionarno prostiranje toplote	73
5.1.1.1. Konstantan toplotni fluks na zidu cijevi	74
5. 1. 1. 2. Konstantna temperatura zida cijevi	75

5. 1. 2. Nestacionarno prostiranje toplote	76
5. 2. Nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine	78
5. 2. 1. Poređenje sa analitičkim rješenjem za cilindrični izvor toplote beskonačne dužine	78
5. 2. 2. Poređenje sa analitičkim rješenjem za pokretni linijski izvor toplote beskonačne dužine	80
5. 3. Stacionarno prostiranje toplote u bušotini – toplotni otpor bušotine	82
5. 4. Stacionarni prenos toplote u spregnutom sistemu U–cijevi i ispune bušotine	84
5. 5. Poređenje sa eksperimentalnim razultatima – OSU sandbox experiment	87
5. 5. 1. Eksperiment bez prekida rada električnog grijača i cirkulacione pumpe	89
5. 5. 2. Eksperiment sa prekidom rada električnog grijača i cirkulacione pumpe	92
5. 6. Poređenje sa eksperimentalnim razultatima – OSU test facility	97
5. 6. 1. Validacija modela za slučaj kratkog vremenskog koraka	98
5. 6. 2. Validacija modela za slučaj dugog vremenskog koraka	100
6. Rezultati numeričkih simulacija	101
6. 1. Odziv pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu	101
6. 1. 1. Analiza rezultata u kratkom vremenskom intervalu sa samog početka simulacije	103
6. 1. 2. Analiza rezultata na kraju perioda od 48 sati	111
6. 2. Analiza uticaja raznih parametara na razmjenu toplote	116
6. 2. 1. Analiza uticaja brzine strujanja fluida za razmjenu toplote	117
6. 2. 2. Analiza uticaja temperature vode na ulazu	120
6. 2. 3. Analiza uticaja toplotnih karakteristika cijevi	122
6. 2. 4. Analiza uticaja toplotnih karakteristika ispune bušotine	125
6. 2. 5. Analiza uticaja toplotnih karakteristika tla	127
6. 2. 6. Analiza uticaja rastojanja između dva kraka U–cijevi	129
6. 2. 7. Analiza uticaja strujanja podzemne vode	131

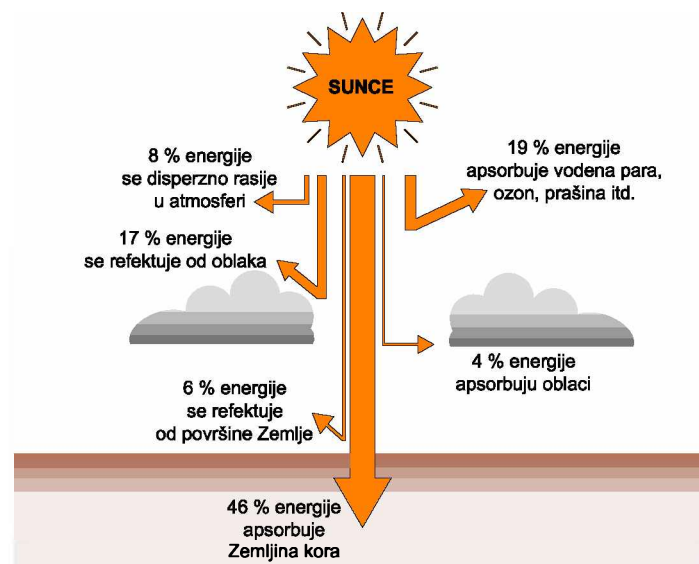
7. Zaključak i predlozi za dalja istraživanja	135
7. 1. Zaključci i naučni doprinos	135
7. 2. Ograničenja i predlog za dalja israživanja	138
 A. Detaljni CVFEM algoritam za 3D probleme advekcije – difuzije	 139
A.1. Diferencijalne jednačine održanja	140
A.2. Diskretizacija domena i struktura podataka	140
A.3. Interpolaciona funkcija oblika	142
A.4. Konstrukcija kontrolisanih zapremina	144
A.5. Pomoćna struktura podataka	146
A.6. Diskretizovana jednačina	148
A.6. 1. Korak 1: Aproksimacija flukseva	149
A.6. 1. 1. Difuzioni fluks	149
A.6. 1. 2. Advektivni fluks	150
A.6. 2. Korak 2: Sastavljanje diskretizovane jednačine	151
A.6. 3. Implementacija graničnih uslova	152
A.6. 4. Implementacija izvornih članova	153
A.6. 5. Rješenje	154
A.7. Nestacionarna advekcija-difuzija	154
A.8. Primjeri	155
A.8. 1. Stacionarna difuzija u anulusu	156
A.8. 2. Stacionarna advekcija–difuzija u anulusu	158
A.8. 3. Stacionarna difuzija u sfernoj ljusci	160
A.8. 4. Nestacionarna difuzija sa faznim prelazom	162
 Literatura	 166

1. Uvod

Smanjenje siromaštva i porast broja stanovnika je proces koji istovremeno prati povećana potrošnja energije. Međunarodna agencija za energiju (IEA, 2010) predviđa povećanje potrošnje energije za 36 % u periodu od 2008. do 2035. godine. Energija se i dalje najvećim dijelom dobija iz fosilnih goriva čiji izvori nisu neiscrpni. Dakle, povećanje potrošnje energije prati i povećanje emisije zagađujućih gasova i gasova koji imaju efekat staklene bašte, što za posljedicu ima, između ostalog, pojavu kisjelih kiša i globalno zagrijavanje. Evropska unija je u decembru 2008. godine usvojila plan za borbu protiv klimatskih promjena. Ovaj plan predstavlja niz obavezujućih propisa koji imaju za cilj da obezbjede da Evropska unija ispuni ambiciozne klimatske i energetske ciljeve do 2020. godine. Ovi ciljevi su poznatiji kao 20-20-20 i obuhvataju:

- smanjenje emisije gasova sa efektom staklene bašte za 20 % u odnosu na nivo iz 1990. godine;
- povećanje udjela energije iz obnovljivih izvora u ukupnoj potrošnji na 20 %;
- poboljšanje energetske efikasnosti za 20 %.

Značajni udio u ukupnoj potrošnji energije čini energija potrebna za grijanje i hlađenje prostora u kome ljudi borave. Razvoj efikasnih sistema za grijanje i hlađenje prostora je postao izazov podstaknut sve strožijim propisima u ovoj oblasti. Pod geotermalnom energijom se podrazumijeva toplota koja se nalazi u Zemljinoj kori, a koja uglavnom nastaje raspadom radioaktivnih elemenata. Proračuni su pokazali da bi se Zemlja (pretpostavka je da je u početku bila rastopljena masa) već prije mnogo hiljada godina ohladila i potpuno očvrsnula kada osim Sunca ne bi bilo još nekog izvora energije. S obzirom na ovu i činjenicu da 46 % sunčeve energije apsorbuje Zemljina kora (slika 1.1), geotermalna energija se nameće kao jedna od alternativa za grijanje i hlađenje prostora.



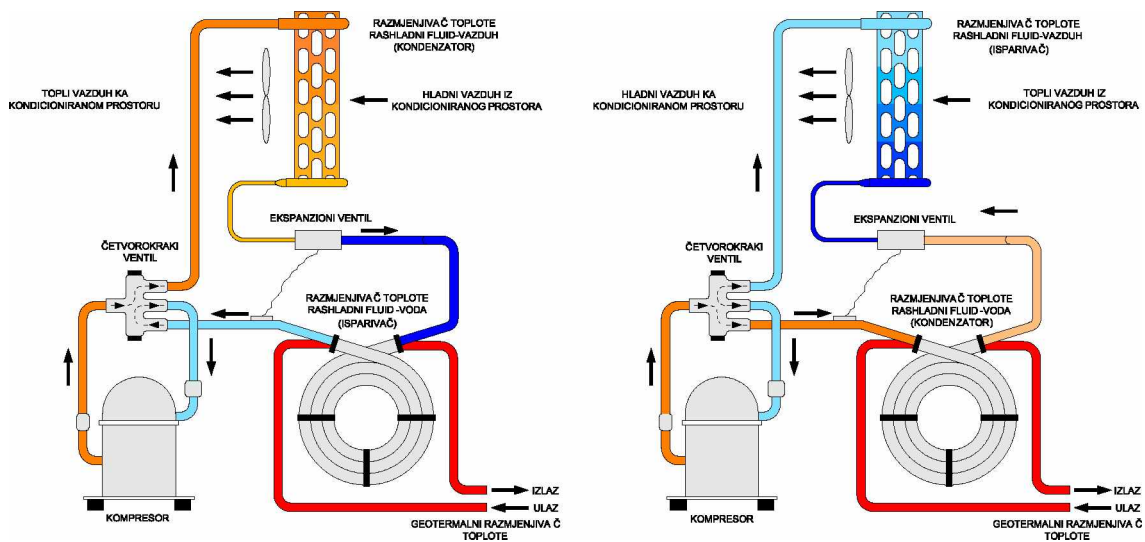
SLIKA 1.1 Distribucija sunčevog zračenja (NRCan, 2002)

Geotermalne toplotne pumpe (engl. ground-source heat pump, GSHP) su efikasni uređaji koji koriste toplotu tla, kao obnovljivog izvora energije, za grijanje i hlađenje prostora. Ova tehnologija se zasniva na činjenici da tlo na većim dubinama ima relativno konstantnu temperaturu. Zimi je temperatura tla veća od temperature vazduha, dok je ljeti obrnuto, temperatura tla je niža od temperature okolnog vazduha. Za uspješan rad geotermalnih toplotnih pumpi nisu potrebni posebni geološki uslovi kao npr. vreli izvori. Prema ASHRAE (ASHRAE, 2007) primjena geotermalnih toplotnih pumpi je jedan od tri načina korišćenja geotermalne energije:

- proizvodnja električne energije – visoke temperature, iznad 150°C;
- direktno korišćenje – srednje i niske temperature, od 90 do 150°C;
- geotermalne toplotne pumpe, temperature najčešće ispod 90°C.

Izraz geotermalna toplotna pumpa se koristi da opiše sistem sa toplotnom pumpom koja koristi tlo, podzemne ili površinske vode kao izvor, odnosno ponor toplote. Geotermalne toplotne pumpe imaju tri kruga (slika 1.2). Prvi krug je krug toplotnog opterećenja i unutar toplotne pumpe sadrži razmjenjivač toplote rashladni fluid – vazduh ili rashladni fluid – voda, zavisno od sistema grijanja, odnosno hlađenja. Drugi krug je krug rashladnog fluida unutar same toplotne pumpe. U ovom krugu se apsorbuje toplota na niskoj temperaturi i odbacuje na visokoj temperaturi. U režimu grijanja rashladni fluid na relativno višoj temperaturi predaje toplotu vodi ili vazduhu u

kondenzatoru koji se nalazi u krugu toplotnog opterećenja. U režimu hlađenja rashladni fluid na niskim temperaturama apsorbira toplotu od vode ili od vazduha u isparivaču koji se nalazi u krugu toplotnog opterećenja. Za prebacivanje toplotne pumpe iz režima grijanja u režim hlađenja dovoljno je promijeniti smjer strujanja rashladnog fluida i u tu svrhu se koristi četvorokraki ventil. Treći krug je krug vode ili rastvora vode i antifrizna koji unutar toplotne pumpe sadrži razmjenjivač toplote između vode (ili rastvora vode i antifrizna) i rashladnog fluida. Ovaj razmjenjivač toplote u režimu grijanja ima ulogu isparivača, a u režimu hlađenja ulogu kondenzatora toplotne pumpe.



SLIKA 1.2 Geotermalna toplotna pumpa u režimu grijanja i u režimu hlađenja (OSU, 1988b)

Efikasnost geotermalnih toplotnih pumpi je, zahvaljujući relativno konstantnoj temperaturi tla, veća od efikasnosti konvencionalnih toplotnih pumpi koje koriste vazduh kao izvor/ponor toplote. Temperatura tla je približno konstantna na dubinama većim od 5 do 20 m, zavisno od toplotnih karakteristika tla.

Kusuda i Achenbach (1965) su dali sledeći izraz koji opisuje temperaturu tla kao funkciju od dubine z (m) i od dana u godini t ($t = 1$ za 1. januar, $t = 2$ za 2. januar itd.):

$$T(z, t) = T_{s,mean} - A_0 \cdot \exp \left[-z \left(\frac{\pi}{365 \alpha_s} \right)^{0,5} \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{365} (t - t_{shift}) - z \left(\frac{\pi}{365 \alpha_s} \right)^{0,5} \right] \quad (1.1)$$

gdje je $T_{s,mean}$ srednja temperatura površine tla, A_0 godišnja amplituda oscilacije temperature površine tla, α_s (m^2/dan) koeficijent toplotne difuzije tla i t_{shift} je vrijeme u

danima, od početka godine (1. januar) do dana kada se javlja minimalna temperatura površine tla. Izraz (1.1) je dobijen rješavanjem diferencijalne jednačine nestacionarne 1D difuzije toplote. Usvojena je pretpostavka da se temperatura tla ne mijenja na dovoljno velikoj dubini, a da je na površini ($z = 0$) sinusna funkcija vremena:

$$T_s = T(z = 0, t) = T_{s,mean} + A_0 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - t_{shift})\right] \quad (1.2)$$

$T_{s,mean}$ i A_0 karakterišu promjenu temperature površine tla u toku godine i mogu se dobiti na osnovu dnevnih promjena temperature površine tla osrednjenih za duži niz godina. U slučaju nedostatka ovih podataka, srednja temperatura površine tla $T_{s,mean}$ kao i amplituda oscilacije temperature površine tla A_0 mogu da se procjene na osnovu temperature vazduha s tim što je potrebno izvršiti korekciju koja bi uzela u obzir karakteristike površine tla (sniježni i vegetacijski pokrivač) i vremenskih uslova, prije svega sunčevo zračenje.

Često se definiše dubina prigušenja oscilacija temperature tla koja opisuje promjenu amplitude oscilacija temperature tla sa dubinom. Dubina prigušenja oscilacija temperature tla je dubina na kojoj je oscilacija temperature tla:

$$A(d_d) = A_0 \exp\left[-d_d \left(\frac{\pi}{365\alpha_s}\right)^{0.5}\right] = \frac{1}{e} A_0 \quad (1.3)$$

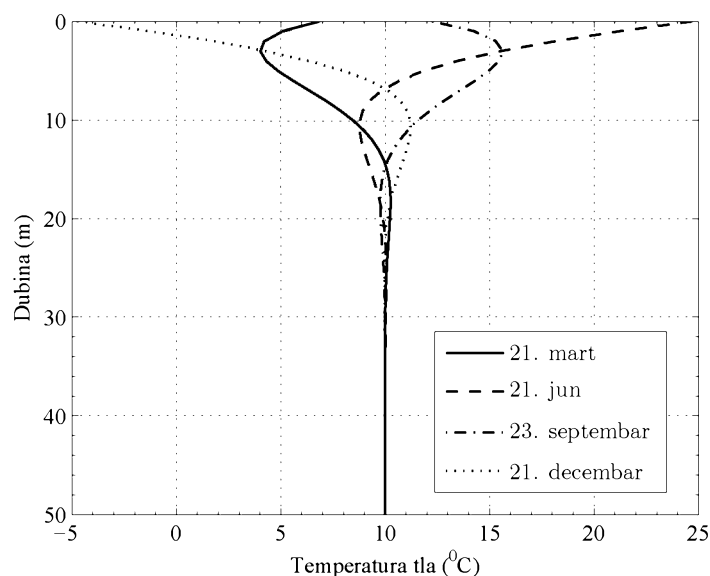
Iz gornjeg izraza slijedi dubina prigušenja oscilacija temperature tla:

$$d_d = \sqrt{\frac{2\alpha_s}{\omega}} \quad (1.4)$$

gdje je ω frekvencija oscilacija temperature tla:

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \quad (1.5)$$

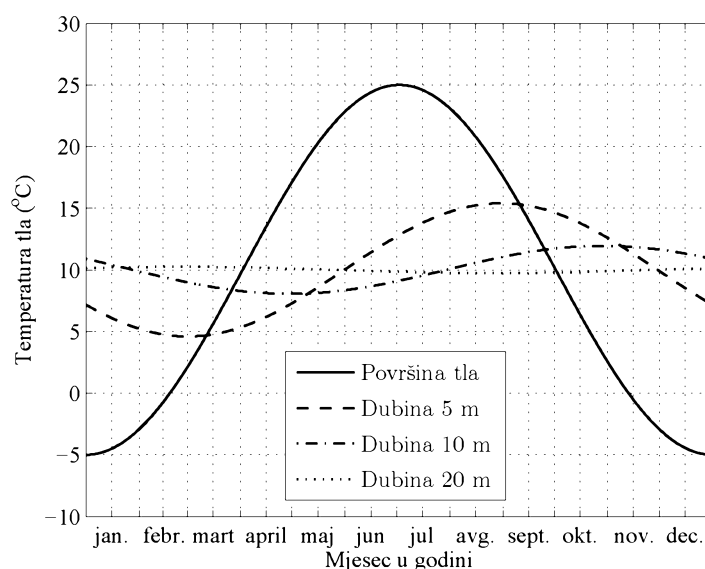
Prema jednačini (1.3) temperatura tla opada eksponencijalno sa dubinom (slika 1.3). Na dubinama do 5-20 m zavisno od koeficijenta toplotne difuzije tla, temperatura tla je prigušena verzija temperature vazduha (slika 1.4).



SLIKA 1.3 Profil temperature tla do 50 m dubine za različite datume

$$(T_{s,mean} = 10^{\circ}\text{C} , A_0 = 15^{\circ}\text{C} , \alpha_s = 0,2065 \text{ m}^2/\text{dan})$$

Promjena temperature površine tla je u fazi sa promjenom temperature vazduha. Kašnjenje oscilacija temperature tla na nekoj dubini u odnosu na oscilacije temperature površine tla se povećava linearno sa povećanjem dubine. Već na dubini od 5 m, zavisno od koeficijenta toplotne difuzije tla, maksimalna temperatura tla se javlja nekoliko mjeseci nakon srednje maksimalne temperature površine tla. Na dubinama od 5 – 20 do 100 m, zavisno od koeficijenta toplotne difuzije tla, temperatura tla je praktično konstantna (slika 1.4). Na još većim dubinama temperatura tla počinje da raste u skladu sa prirodnim geotermalnim gradijentom (približno $30^{\circ}\text{C}/\text{km}$).



SLIKA 1.4 Promjena temperature tla na različitim dubinama u toku godine

$$(T_{s,mean} = 10^{\circ} \text{C} , A_0 = 15^{\circ} \text{C} , \alpha_s = 0,2065 \text{ m}^2/\text{dan})$$

Brojni su literaturni izvori u kojima je dat detaljan pregled različitih geotermalnih sistema, njihovih prednosti i nedostatka, istorijskog razvoja, trenutne primjene u svijetu kao i perspektiva daljeg razvoja: Svec (1987), Rawlings i Sykulski (1999), Spitler (2005), Florides i Kalogirou (2007), Omer (2008), Self et al. (2013), Sarbu i Sebarchievici (2014). Preporuke za projektovanje i izvođenje instalacija mogu se naći u: OSU (1988a, 1988b), Kavanaugh (1991), Caneta Research (1995) i Kavanaugh i Rafferty (1997).

1.1. Istorijski razvoj sistema sa geotermalnim toplotnim pumpama

Prvi zapis o korišćenju tla kao izvora toplote za toplotnu pumpu je patent švajcarskog inženjera Heinricha Zoellya objavljen 1912. godine (Ball et al., 1983). Dakle, istraživanja u oblasti geotermalnih razmjenjivača toplote su počela prije više od jednog vijeka. Ipak, ideja nije zaživjela jer je tada cijena energije bila niska, a efikasnost toplotnih pumpi mala.

Istraživanja u ovoj oblasti su obnovljena četrdesetih godina prošlog vijeka u Velikoj Britaniji i u SAD. Sumner je u Velikoj Britaniji sredinom četrdesetih godina prošlog vijeka izveo prvu instalaciju koja koristi tlo kao izvor toplote za grijanje jednospratne

kuće (Sumner, 1976). 1948. godine je izveo 12 instalacija sa toplotnim pumpama koje kao izvor toplote koriste kolektor postavljen u tlu. Kapacitet grijanja ovih instalacija je bio oko 9 kW, a srednji COP oko 3. Ipak ova istraživanja su bila kratkog daha i nakon dvije godine su prekinuta.

U SAD je pred sam početak Drugog svjetskog rata instalirano nekoliko geotermalnih toplotnih pumpi. Kompanije za proizvodnju električne energije su u poslijeratnom periodu, do kraja pedesetih godina prošlog vijeka, finansirale desetine istraživačkih projekata, laboratorijskih i terenskih ispitivanja. Otprilike u isto vrijeme su Ingersoll i Plass (1948) dali prvo analitičko rješenje za prostiranje toplote u tlu oko geotermalnog razmjenjivača koje je kasnije korišćeno u programima za projektovanje. Od kraja pedesetih interes za dalja istraživanja opada, dijelom zbog sve veće upotrebe nafte i gasa za grijanje, a dijelom zbog nekih tehničkih problema kao što su isušivanje oko geotermalnih razmjenjivača, curenje fluida za razmjenu toplote, problemi sa dimenzionisanjem itd.

Naftna kriza početkom sedamdesetih je ponovo skrenula pažnju na geotermalne sisteme. Komercijalno korišćenje tla kao izvora/ponora toplote je počelo tek poslije 1973. godine i do kraja sedamdesetih godina je samo u Švedskoj instalirano više od 1000 geotermalnih toplotnih pumpi. Tada su, uglavnom u Švedskoj, Njemačkoj, Švajcarskoj i Austriji počele da se izvide instalacije sa vertikalnim geotermalnim razmjenjivačima toplote. Veći naglasak je stavljen na eksperimentalna istraživanja. Vremenom se došlo do rješenja problema koje su imale prvobitne instalacije. Problem isušivanja oko horizontalnog razmjenjivača toplote je riješen boljim tehnikama zatrpavanja, problem curenja je riješen korišćenjem boljih tehnika spajanja i korišćenjem cijevi od polibutilena i polietilena visoke gustine. Problemi dimenzionisanja su donekle riješeni korišćenjem novih algoritama proračuna i programa koji mogu da se koriste na personalnim računarima. Predmet istraživanja su uglavnom bili vertikalni sistemi zbog njihove prednosti što zauzimaju manju površinu. U sledeće dvije decenije uloženi su značajni napor da se ustanove standardi za izvođenje instalacija kao i da se razviju pogodni metodi projektovanja.

1.2. Podjela sistema sa geotermalnim toplotnim pumpama

Prema ASHRAE (ASHRAE, 2007), sistemi sa geotermalnim toplotnim pumpama se dijele u tri kategorije, zavisno od izvora/ponora toplote koji mogu da budu:

- podzemne vode;
- površinske vode;
- tlo.

U nastavku su ukratko opisani navedeni sistemi sa geotermalnim toplotnim pumpama, kako bi se ukazalo na njihove prednosti i nedostatke.

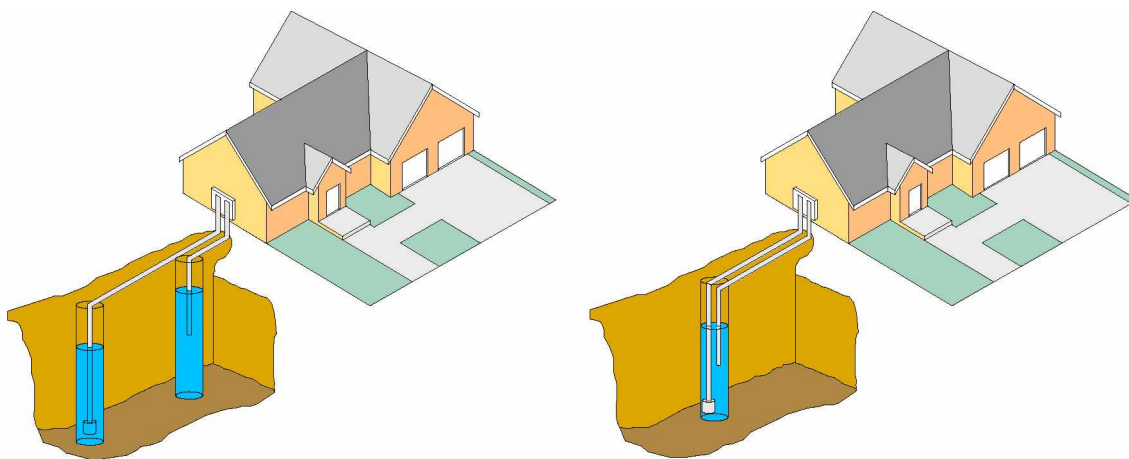
1.2.1. Sistemi koji koriste podzemne vode kao izvor/ponor toplote

Sistemi koji koriste podzemne vode (engl. ground-water heat pump systems, GWHP) se često zovu i otvoreni sistemi. Prvi sistem ove vrste je napravljen 1940. godine. Shema sistema sa podzemnom vodom data je na slici 1.5a. Voda se pomoću pumpe crpi iz bunara i dovodi do razmjenjivača toplote u toplotnoj pumpi. Često je neophodna koroziona zaštita ukoliko je podzemna voda slabog hemijskog kvaliteta. Iskorišćena voda se ispušta u upojni bunar, površinske vode ili kanalizaciju. Prilikom projektovanja treba voditi računa o raspoloživosti podzemnih voda, njihovom hemijskom kvalitetu i načinu ispuštanja.

Osnovne prednosti otvorenih sistema su: niska cijena, jednostavnost i mala potrebna površina zemljišta u odnosu na ostale geotermalne i konvencionalne sisteme. Nedostatak je što u nekim oblastima podzemne vode nisu na raspolaganju u dovoljnoj količini ili ih uopšte nema, a takođe problem može da bude i njihov slab hemijski kvalitet. Zbog sve veće brige za zaštitu životne sredine u poslednjih nekoliko decenija, donešeni su propisi koji definišu pod kojim uslovima se podzemne vode mogu koristiti u ove svrhe.

Ovoj kategoriji pripada i sistem kod kojeg jedan isti bunar ima ulogu i napojnog i upojnog bunara (engl. standing column well). Kod ovog sistema (slika 1.5b) voda se pomoću napojne cijevi uzima sa veće dubine i nakon prolaska kroz razmjenjivač toplote geotermalne toplotne pumpe se vraća povratnom cijevi na manju dubinu.

Ovakvi sistemi se izvode uglavnom u oblastima kod kojih u geološkom sastavu tla dominiraju čvrste stijene, tako da je nepotrebno presvlačenje zidova bunara betonom. Ovo omogućava direktan kontakt vode sa tlom i prodor podzemnih voda cijelom dužinom bušotine. Bunarska bušotina je obično prečnika do 15 cm i dubine do 500 m.



a) sistem sa dva bunara

b) sistem sa jednim bunarom

SLIKA 1.5 Sistemi koji koriste podzemne vode kao izvor/ponor toplote

1.2.2. Sistemi koji koriste površinske vode kao izvor/ponor toplote

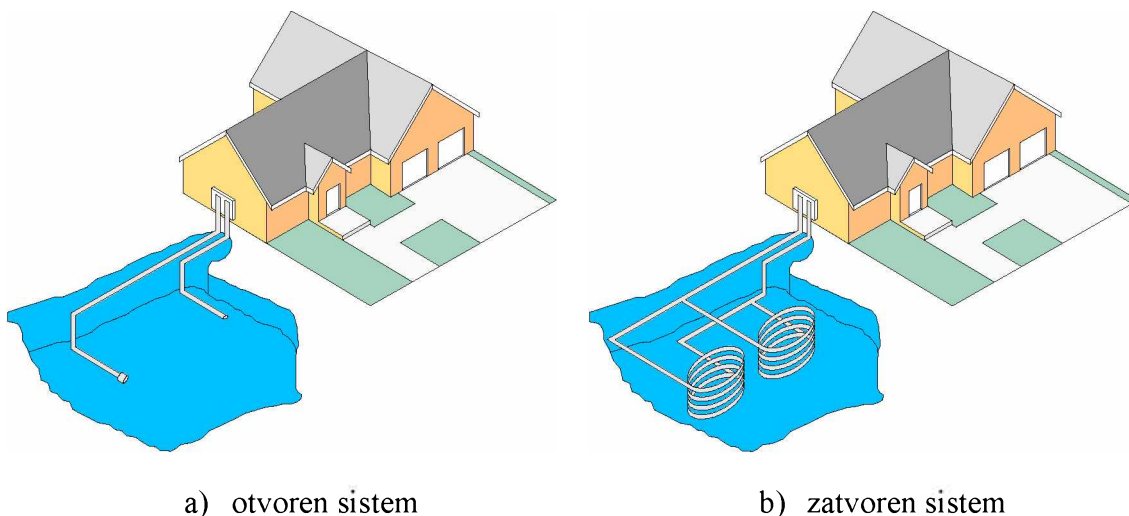
Druga kategorija geotermalnih toplotnih pumpi prema ASHRAE su toplotne pumpe koje koriste površinske vode kao izvor/ponor toplote (engl. surface-water heat pump systems, SWHP). Sistemi sa površinskim vodama mogu da budu otvorenog (slika 1.6a) i zatvorenog tipa (slika 1.6b).

Kod otvorenih sistema, voda se uzima iz površinskih voda, propušta kroz razmjenjivač toplote i ispušta u odgovarajući prijemnik.

Kod zatvorenih sistema, apsorpcija i odbacivanje toplote vrši se strujanjem fluida za razmjenu toplote kroz cijevi od polietilena visoke gustine koje su postavljene na odgovarajućoj dubini u jezeru, rezervoaru ili otvorenom kanalu. Cijevi su obično prečnika DN20 do DN40 i dužine oko 10 do 30 m po jednom kilovatu, zavisno od klimatskih uslova.

Prednosti sistema koji koriste površinske vode kao izvor/ponor toplote su niska investicija i mogućnost direktnog hlađenja. Neki od nedostataka su: fluktuacija

temperature površinskih voda u širokom intervalu utiče na efikasnost; primjena kod velikih instalacija zahtijeva veće vodene mase; cijevi postavljene u vodi mogu da predstavljaju problem, npr. za ribolov.



SLIKA 1.6 Sistemi koji koriste površinske vode kao izvor/ponor toplote

1.2.3. Sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote

Sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote (engl. ground-coupled heat pump systems, GCHP) su zatvorenog tipa i počeli su da se koriste sedamdesetih godina prošlog vijeka. Osnovna prednost u odnosu na bunarske otvorene sisteme je što su na ovaj način eliminisani problemi vezani za slab hemijski kvalitet i mali protok podzemnih voda. Osim toga, kako voda struji u zatvorenom krugu, potrebna je mnogo manja energija za rad cirkulacione pumpe. Sistemi ovog tipa mogu da se izvode na svim lokacijama gdje je bušenje i prekopavanje zemlje tehnički izvodljivo.

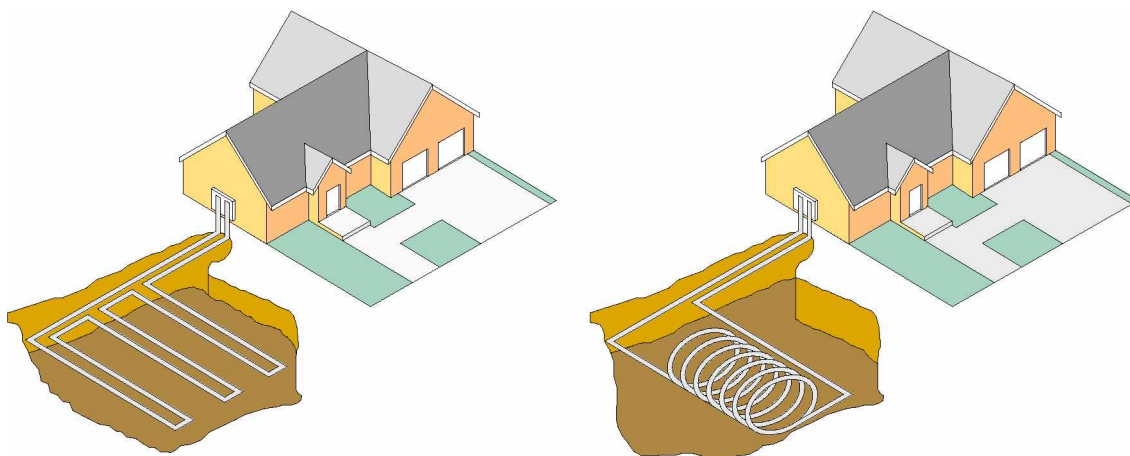
Kod ovih sistema, apsorpcija i odbacivanje toplote se vrši cirkulacijom fluida za razmjenu toplote kroz cijevi koje su ukopane u tlo. Fluid za razmjenu toplote je najčešće čista voda ili rastvor antifrizna. Obično se koriste cijevi od polietilena visoke gustine (high density polyethylene – HDPE). Cijevi se obično postavljaju u horizontalnim kanalima i u vertikalnim bušotinama pa zavisno od toga zatvoreni sistemi mogu da budu horizontalni i vertikalni.

1.2.3.1. Horizontalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote

Kod horizontalnih sistema, razmjenjivač toplote se obično sastoji od niza paralelno ili redno povezanih cijevi, prečnika od DN20 do DN40, položenih na dubini od 1 do 2 m. Mogući su različiti načini postavljanja cijevi, a neki od njih su prikazani na slici 1.7.

Iako je instalacija horizontalnih sistema jednostavna i relativno jeftina, oni imaju i svoje nedostatke. Prije svega potrebna je relativno veća površina tla, koja nije uvijek na raspolaganju. Kako su horizontalni razmjenjivači toplote postavljeni blizu same površine tla, njihov rad je više pod uticajem vremenskih prilika i fluktuacija spoljašnje temperature vazduha. Posljedica ovoga su veće fluktuacije temperature fluida za razmjenu toplote i manja efikasnost toplotne pumpe. Konačno, zbog veće dužine cijevi u odnosu na vertikalne sisteme, veća je potrošnja energije cirkulacionih pumpi.

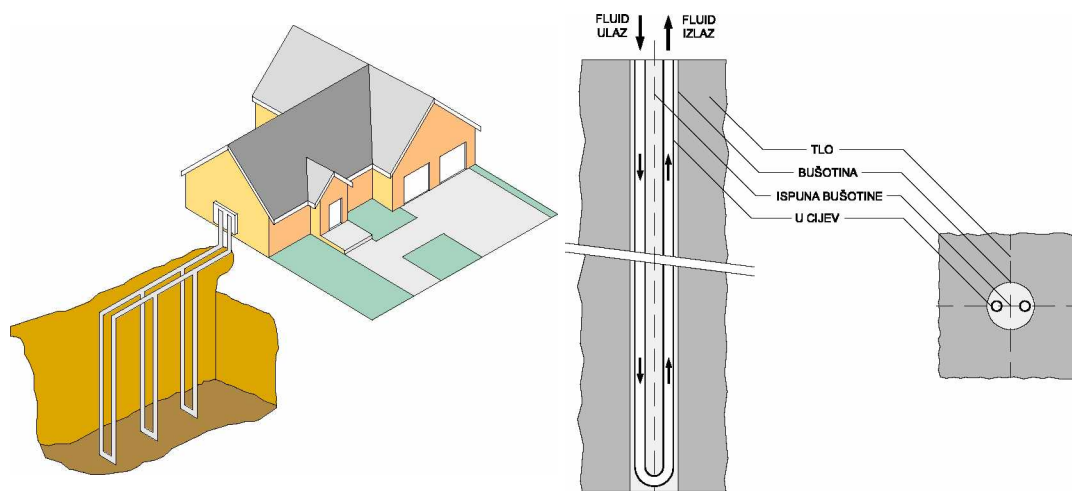
Horizontalnim sistemima je posvećena mnogo manja istraživačka pažnja u odnosu na vertikalne. Jedan od razloga je što su vertikalni sistemi prikladni za velike instalacije jer je potrebna mnogo manja površina za njihovo postavljanje. Takođe, razlog je i to što se horizontalni sistemi postavljaju na manjim dubinama i kod njih se toplotne karakteristike tla mogu lakše odrediti. Konačno, zbog relativno niske cijene izvođenja horizontalnih sistema, čak i kada bi se projektom značajno predimensionisao razmjenjivač toplote, to neće bitno uticati na početnu investiciju od koje zavisi isplativost projekta.



SLIKA 1.7 Horizontalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote

1.2.3.2. Vertikalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote

Kod vertikalnih sistema razmjenjivač toplote u tlu čini samo jedna ili čak nekoliko desetina vertikalnih bušotina u kojima su postavljene jedna ili dvije cijevi savijene u obliku slova U (engl. U-tube ili U-pipe), kroz koje struji fluid za razmjenu toplote (slika 1.8). Međusobno povezivanje bušotina može da se izvede na različite načine (paralelno, redno ili kombinovano).



SLIKA 1.8 Vertikalni sistemi koji koriste tlo kao izvor/ponor toplote

Najčešće se koriste cijevi prečnika od DN20 do DN40. Bušotine su obično prečnika od 80 do 125 mm i dubine 100 m. Bušotina se nakon postavljanja U-cijevi popunjava materijalom koji sprječava kontaminaciju podzemnih voda. Da bi međusobni uticaj bušotina bio što manji, preporučuje se da rastojanje između bušotina bude 4 do 8 m.

Prednost vertikalnih sistema sa bušotinama u odnosu na horizontalne su: potrebna je manja površina tla; temperatura tla kao izvora/ponora toplote je približno konstantna; potrebna je manja dužina cijevi i manja je potrošnja energije cirkulacionih pumpi. Najveći nedostatak vertikalnih sistema sa bušotinama u odnosu na horizontalne je visoka cijena instalacije zbog skupe opreme koja je potrebna za bušenje tla.

1.3. Fenomen prenosa toplote kod vertikalnih geotermalnih razmjenjivača toplote sa U–cijevima

Za projektovanje efikasnog geotermalnog razmjenjivača toplote od ključnog značaja je dobro poznavanje uticaja različitih parametara na mehanizam prenosa toplote između fluida za razmjenu toplote koji cirkuliše u U–cijevi i tla.

Prilikom projektovanja ovih sistema najvažnije je, naročito za velike instalacije, da se pravilno odredi dubina bušotine. S jedne strane, nepravilno dimenzionisanje može da ima za posljedicu da su razmjenjivači toplote predimenzionisani i da zbog toga investicioni troškovi budu visoki, zbog kojih bi cijeli projekat mogao biti ekonomski neisplativ. S druge strane, može se desiti da se razmjenjivač toplote poddimenzioniše i da zbog toga ne može da zadovolji zahtjeve objekta za grijanjem i hlađenjem.

Dimenzionisanje razmjenjivača toplote otežava nepoznavanje geološkog sastava i toplotnih karakteristika tla, a odgovarajuća geološka ispitivanja nisu ekonomski isplativa za svaki projekat. Na samom početku primjene geotermanih sistema sa vertikalnim bušotinama prilikom dimenzionisanja se računalo da je potrebno oko 20 m dubine bušotine po jednom kilovatu. Kasnije se ovo pravilo donekle izmijenilo, koristeći procjene za koeficijent provođenja toplote geoloških formacija na datom mjestu ili iskustva iz sličnih projekata. I dalje se smatralo da bi dodatni troškovi detaljnih proračuna, ispitivanja terena i testiranja instalacija bili mnogo veći od troškova tradicionalnog projektovanja. Ovaj relativno jednostavan pristup projektovanju pokazao se uglavnom kao uspješan kod manjih instalacija. Kod većih instalacija dešavalo se da kapacitet razmjenjivača toplote već poslije nekoliko godina ne može da zadovolji potrebe objekta za grijanjem ili hlađenjem. S druge strane, u pojedinim slučajevima zbog visokih početnih investicionih troškova neopravdano predimenzionisane instalacije, prednost je data konvencionalnim sistemima. Sve ovo je imalo za posljedicu početak intenzivnih istraživanja u cilju pronalaženja optimalnog dizajna geotermalnih razmjenjivača toplote.

Jednostavan pristup dimenzionisanju geotermalnih razmjenjivača toplote kod sistema veće instalisane snage se pokazao kao neodgovarajući, posebno u slučaju kada je značajna razlika između grejnog i rashladnog opterećenja. Naime, veoma rijetko se dešava da su klimatski uslovi i sam objekat takvi da geotermalni razmjenjivač na nivou

godine apsorbuje i odbacuje u tlo jednake količine toplote. Zavisno od klimatskih uslova, količina toplote koja se u zimskom periodu (sezona grijanja) apsorbuje iz zemlje obično nije jednaka količini toplote koja se u ljetnjem periodu (sezona hlađenja) odbaci u zemlju što ima za posljedicu da temperatura zemlje raste ili opada tokom dužeg niza godina. U hladnim klimatskim područjima, preko geotermalnog razmjenjivača će se u sezoni grijanja iz tla izvlačiti veća količina toplote nego što se u njega odbacuje u toku sezone hlađenja. Uslijed toga vremenom dolazi do smanjenja temperature tla oko bušotine, što dalje ima za posljedicu smanjenje efikasnosti toplotne pumpe u režimu grijanja. Slično, u toplim klimatskim područjima, preko geotermalnog razmjenjivača će se u sezoni hlađenja u tlo odbacivati veća količina toplote nego što se iz njega izvlači u toku sezone grijanja. Uslijed toga vremenom dolazi do povećanja temperature tla oko bušotine, što dalje ima za posljedicu smanjenje efikasnosti toplotne pumpe u režimu hlađenja. Razlika u toplotnom opterećenju zima–ljetno ne zavisi samo od klimatskih uslova već i od građevinsko–arhitektonske izvedbe objekta, kao i od unutrašnjih toplotnih dobitaka. Ovaj debalans ima za posljedicu da su dimenzije razmjenjivača toplote mnogo veće nego u slučaju kada su godišnja toplotna opterećenja izbalansirana. Visoka početna ulaganja u ovakve instalacije mogu da učine projekat ekonomski neisplativim. Jedan od načina rješavanja ovog problema je korišćenje tzv. hibridnog sistema kod kojeg se koristi dodatni razmjenjivač toplote čiji je cilj da se izbalansiraju količine toplote koje se u toku godine uzimaju i vraćaju u zemlju i na taj način smanji nepotrebna dužina geotermalnog razmjenjivača. Višak toplote koji bi se inače odbacivao u zemlju može npr. da se koristi za grijanje sanitarne vode. U slučaju kad višak toplote ne može da se iskoristi, odbacuje se u okolinu pomoću npr. rashladne kule.

Drugi problem o kojem treba voditi računa prilikom projektovanja je rastojanje između bušotina. Ako se bušotine izvedu na malom rastojanju jedna od druge, već nakon nekoliko godina može da dođe do njihove međusobne interakcije i do smanjenja efikasnosti toplotne pumpe.

Prilikom analize razmjene toplote kod geotermalnog razmjenjivača sa U–cijevi, posebno treba obratiti pažnju na pojavu tzv. kratke veze u prenosu toplote između dva kraka U–cijevi. Pri relativno velikim protocima fluida za razmjenu toplote, promjena temperature duž cijevi je gotovo linearna. Sa smanjenjem protoka, nelinearnost profila

temperature duž cijevi sve više dolazi do izražaja i istovremeno se pod svim istim ostalim uslovima, povećava razlika temperature fluida na ulazu i izlazu cijevi. Fluks kratke veze je proporcionalan razlici temperatura fluida koji struji u silaznoj i uzlaznoj grani U–cijevi na određenoj dubini pa zbog toga ima najveću vrijednost na vrhu bušotine gdje je ova temperaturska razlika najveća, a najmanju na dnu bušotine gdje je temperaturska razlika najmanja. S povećanjem fluksa kratke veze, smanjuje se fluks toplote koji se razmjeni preko zida bušotine (smanjuje se srednja temperatura fluida u dva kraka U–cijevi na određenoj dubini) i samim tim i efikasnost razmjenjivača toplote. Ovo pod određenim uslovima može da ima za posljedicu da u režimu grijanja (toplota se apsorbira iz tla) temperatura fluida za razmjenu toplote u uzlaznoj grani U–cijevi raste od dna bušotine, a onda od neke dubine počne da opada do izlaza iz U–cijevi. Slično, u režimu hlađenja (toplota se odbacuje u tlo), temperatura fluida za razmjenu toplote u uzlaznoj grani U–cijevi opada od dna bušotine, a onda od neke dubine počne da raste do izlaza iz U–cijevi. Ova pojava posebno dolazi do izražaja pri relativno malim protocima fluida za razmjenu toplote ili kada dubina bušotine prelazi 200 m.

Kad nema strujanja podzemnih voda, prenos toplote oko bušotine je dominantno u radialnom pravcu, dok se prenos toplote u vertikalnom pravcu (uticaj graničnih uslova na površini tla) najčešće mogu zanemariti u prvih 10 godina rada sistema (zavisno od dubine bušotine). Strujanje podzemne vode sa pravilnim rasporedom bušotina obično povećava efikasnost geotermalne toplotne pumpe.

Na efikasnost geotermalnog razmjenjivača toplote, samim tim i cijelog sistema, značajno utiče toplotni otpor bušotine, koji treba da je što manji. Toplotni otpor bušotine zavisi prije svega od geometrijskih parametara: broja cijevi, prečnika cijevi, rastojanja između cijevi i prečnika bušotine. Takođe toplotni otpor bušotine zavisi od toplotnih karakteristika (toplotni kapacitet i koeficijent provođenja toplote) materijala U–cijevi i ispunu bušotine. Uobičajeni materijali za ispunu bušotine najčešće imaju manju toplotnu provodljivost od samog tla. Zbog toga se u skorije vrijeme koriste materijali za ispunu bušotine koji imaju veću toplotnu provodljivost i doprinose manjem toplotnom otporu bušotine.

Zbog svega navedenog, ukazuje se potreba za simulacijama razmjene toplote kod geotermalnih razmjenjivača. Kao rezultat dosadašnjih istraživanja došlo se do

analitičkih i numeričkih metoda za analizu prenosa toplote kod geotermalnih razmjenjivača i na osnovu ovih metoda je razvijeno nekoliko komercijalnih kompjuterskih programa. O ovome je više rečeno u poglavlju Pregled stanja u oblasti istraživanja.

2. Pregled stanja u oblasti istraživanja

U ovom poglavlju je dat literaturni pregled razvoja modela geotermalnih razmjenjivača toplote. Detaljni pregled dosadašnjih istraživanja u oblasti modeliranja geotermalnih razmjenjivača toplote dali su Yavuzturk (1999), Xu (2007), Yang et al. (2010) i He (2012).

Najraniji modeli su razvijeni sa svrhom analize toplotne provodljivosti tla na osnovu rezultata mjerenja dobijenih u tzv. testu toplotnog odziva. Kasnije su se modeli počeli koristiti prilikom projektovanja, za određivanje potrebne dubine i broja bušotina. Konačni cilj je da se model geotermalnog razmjenjivača toplote integriše zajedno sa modelom toplotnog opterećenja i modelom sistema za klimatizaciju u sveobuhvatni sistem za simulaciju objekta. Teorijske osnove za analitičke modele su postavljene u periodu od 1940. do 1960. godine. Analitički modeli su bili u centru pažnje sedamdesetih i osamdesetih godina prošlog vijeka. Numerička rješenja sve više dobijaju na značaju sa brzim razvojem računara od kraja osamdesetih godina. Danas u praksi postoji veći broj konceptualnih prilaza modeliranju geotermalnih razmjenjivača toplote, tako da se modeli razlikuju kako po dimenzionalnosti (1D, 2D, kvazi 3D, 3D) tako i po složenosti.

Modeli geotermalnih razmjenjivača toplote se zavisno od pristupa koji se koristi mogu podijeliti na:

- analitičke modele;
- modele za stacionaran prenos toplote u bušotini;
- modele koji koriste faktore odziva;
- diskretizovane numeričke modele.

U ovom poglavlju je napravljen pregled modela u skladu sa gore navedenom kategorizacijom. Svaki model je ukratko opisan pri čemu je posebno ukazano na pretpostavke na kojima se model zasniva. Takođe, za svaki model pojedinačno su naglašene prednosti kao i ograničenja u primjeni kako bi se ukazalo na dalje smjernice u razvoju modela.

2.1. Analitički modeli za prenos toplote oko bušotine

Ne postoji analitičko rješenje kojim bi se mogao u potpunosti analizirati problem prenosa toplote sa složenom geometrijom, materijalima različitih toplotnih karakteristika i sa graničnim uslovima kakvi se javljaju kod geotermalnog razmjenjivača toplote sa U-cijevi. Za dobijanje analitičkih rješenja primjenom pojednostavljenih analitičkih modela, potrebno je usvojiti niz pretpostavki kojima se omogućava integracija nekog specijalnog oblika polaznih parcijalnih diferencijalnih jednačina za problem koji je predmet analize. Najjednostavniji analitički model je zasnovan na Kelvinovom analitičkom rješenju za linijski izvor toplote (Kelvin, 1882) kod kojeg se bušotina razmatra kao beskonačno dug linijski izvor i zanemaruju se toplotne karakteristike same bušotine. Nešto složeniji modeli su zasnovani na analitičkom rješenju Carslawa i Jaegera za cilindrični izvor toplote (Carslaw i Jaeger, 1947), kod kojeg se dva kraka U-cijevi razmatraju kao jedna cijev koaksijalna sa bušotinom i kod kojeg se takođe zanemaruju toplotne karakteristike bušotine. Analitička rješenja nisu zahtijevna što se tiče kompjuterskih resursa i koriste se za projektovanje i za analizu podataka dobijenih u testu toplotnog odziva.

2.1.1. Modeli zasnovani na Kelvinovom analitičkom rješenju za linijski izvor toplote

2.1.1.1. *Ingersollov model*

Ingersollov (Ingersoll et al., 1954) model se zasniva na Kelvinovom rješenju za linijski izvor toplote. Kod ovog rješenja, tlo se posmatra kao beskonačna sredina, dok se bušotina posmatra kao beskonačni linijski izvor toplote. Zanemaruje se prenos toplote u pravcu ose bušotine, tako da se analizirani problem svodi na jednodimenzionu kondukciju toplote kroz tlo u radijalnom pravcu. Pretpostavljajući da je početna temperatura tla uniformna i da je toplotni fluks po metru dubine bušotine konstantan na radijusu $r=0$, Ingersoll je izveo izraz za temperaturu tla T u proizvoljnom trenutku vremena t i na radijusu r od ose bušotine:

$$T(r,t)-T_0 = \frac{Q^l}{2\pi k_s} \int_X^\infty \frac{e^{-\beta^2}}{\beta} d\beta = \frac{Q^l}{2\pi k_s} I(X)$$

$$\beta = \frac{r}{2\sqrt{\alpha_s(t-t')}} \quad (2.1)$$

$$X = \frac{r}{2\sqrt{\alpha_s t}}$$

gdje je T_0 je početna uniformna temperatura tla, Q^l fluks toplote po jedinici dubine bušotine, k_s koeficijent toplotne provodljivosti tla i α_s je koeficijent toplotne difuzije tla.

Za $X \leq 0,2$ Ingersol daje sledeću aproksimaciju integrala $I(X)$ u izrazu (2.1):

$$I(X) = 2,303 \log_{10} \frac{1}{X} + \frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{8} - 0,2886 \quad (2.2)$$

Za $X > 0,2$ Ingersoll daje vrijednosti integrala $I(X)$ u odgovarajućim tabelama. Carslaw i Jaeger (1947) su koristeći eksponencijalni integral izveli jednačinu koja se najčešće koristi za procjenu toplotne provodljivosti tla na osnovu vrijednosti temperatura fluida izmjerenih u testu toplotnog odziva:

$$T(r,t)-T_0 = \frac{Q^l}{4\pi k_s} \int_{\frac{r^2}{4\alpha_s t}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{Q^l}{4\pi k_s} E_1\left(\frac{r^2}{4\alpha_s t}\right) \cong \frac{Q^l}{4\pi k_s} \left[\ln\left(\frac{4\alpha_s t}{r^2}\right) - \gamma \right] \quad (2.3)$$

gdje je γ Eulerova konstanta ($\gamma = 0,5772\dots$). Ovakva aproksimacija daje grešku manju od 10% za vrijeme $t \geq \frac{5r^2}{\alpha_s}$.

Temperatura na zidu bušotine ($r = r_b$) u trenutku vremena t može da se izračuna kao:

$$T_b(t) = \frac{Q^l}{4\pi k_s} \left[\ln\left(\frac{4\alpha_s t}{r_b^2}\right) - \gamma \right] + T_0 \quad (2.4)$$

sa vremenom $t \geq \frac{5r^2}{\alpha_s}$, koje u praksi najčešće iznosi 3 do 10 sati.

Pretpostavljajući da je prenos toplote u bušotini stacionaran, koristeći toplotni otpor bušotine R_b , može da se definiše veza između srednje temperature fluida koji cirkuliše u U–cijevi T_f i temperature zida bušotine:

$$T_f(t) = T_b(t) + Q^l \cdot R_b = \frac{Q^l}{4\pi k_s} \ln(t) + Q^l \left\{ R_b + \frac{1}{4\pi k_s} \left[\ln \left(\frac{4\alpha_s}{r_b^2} \right) - \gamma \right] \right\} + T_0 \quad (2.5)$$

Pri konstantnom toplotnom fluksu, poslednja dva člana u jednačini (2.5) su konstantni, tako da je srednja temperatura fluida linearna funkcija prirodnog logaritma vremena, sa koeficijentom proporcionalnosti jednakim $\frac{Q^l}{4\pi k_s}$. U toku testa toplotnog odziva, toplotni fluks Q^l koji se odbacuje u zemlju je konstantan i za očekivati je da je izmjerena temperatura fluida koji cirkuliše u U–cijevi linearna funkcija prirodnog logaritma vremena. Na osnovu nagiba ove linije $\frac{Q^l}{4\pi k_s}$ koji može da se odredi sa grafika $T_f - \ln(t)$ izračunava se koeficijent toplotne provodljivosti tla k_s .

Iako ga karakterišu jednostavnost i brz proračun, Ingersollov prilaz daje samo grubu aproksimaciju analiziranog problema i njegova primjenljivost za modeliranje stvarnih geotermalnih razmjenjivača toplote je ograničena bez uvođenja dodatnih pretpostavki i modifikacija.

2.1.1.2. Hartov i Couvillionov model

Hartov i Couvillionov model (1986) takođe koristi Kelvinovo analitičko rješenje za linijski izvor toplote pri čemu se definiše tzv. *far-field* radijus i usvaja pretpostavka da je temperatura na rastojanju od bušotine većem od *far-field* radijusa konstantna i jednaka neporemećenoj temperaturi tla. Vrijednost *far-field* radijusa zavisi od vremena rada linijskog izvora toplote i od toplotne difuzije tla. Hart i Couvillion daju sledeću aproksimaciju:

$$r_\infty = 4\sqrt{\alpha_s t} \quad (2.6)$$

Hart i Couvillion daju izraz sličan Ingersollovom za temperaturu tla u proizvoljnom trenutku vremena t i na radijusu r od ose bušotine:

$$T(r,t)-T_0 = \frac{Q^l}{4\pi k_s} \int_y^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} d\lambda \quad (2.7)$$

$$y = \frac{r^2}{4\alpha_s t}$$

Hart i Couvillion su dali rješenje jednačine (2.7) u obliku:

$$T(r,t)-T_0 = \frac{Q^l}{2\pi k_s} \left[\ln \frac{r_\infty}{r} - 0,9818 + \frac{4r^2}{2r_\infty^2} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \left(\frac{4r^2}{r_\infty^2} \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{2N \cdot N!} \left(\frac{4r^2}{r_\infty^2} \right)^N \right] \quad (2.8)$$

U slučaju više bušotina pretpostavlja se da nema njihovog međusobnog uticaja kada je rastojanje između pojedinih bušotina veće od *far-field* radijusa. U slučaju da je rastojanje među bušotinama manje od *far-field* radijusa, doći će do njihove termičke interakcije koja može da se procjeni korišćenjem superpozicije. Jednačina (2.8) sadrži stepeni red on N članova i u slučaju kada je $r_\infty \geq 3r_b$ (r_b je prečnik bušotine), dovoljno je uzeti samo prva dva člana, dok je u slučaju kada je $r_\infty < 3r_b$ potrebno je uključiti veći broj članova reda.

2.1.1.3. Rješenje za linijski izvor konačne dužine

Diao et al. (2004) su razvili analitičko rješenje za linijski izvor koje uzima u obzir uticaj konačne dužine bušotine i temperaturu površine tla kao graničnog uslova. Kod ovog analitičkog modela tlo se posmatra kao homogena polubeskonačna sredina sa konstantnim toplotnim karakteristikama i sa uniformnom početnom temperaturom T_0 . Površina tla ima konstantnu temperaturu u toku perioda vremena koji se posmatra i ona je jednaka početnoj temperaturi T_0 . Dimenzija bušotine u radijalnom pravcu se zanemaruje, tako da se bušotina aproksimira kao linijski izvor koji se proteže od površine tla do dubine H . Generisana, odnosno apsorbirana toplota Q^l po dužini bušotine je konstantna od početnog vremenskog trenutka $t=0$. Za ovako usvojene pretpostavke, Diao et al. su dali sledeće analitičko rješenje za nestacionarno temperatursko polje u radijalno–aksijalnim koordinatama:

$$T(x, y, z, t) - T_0 = \frac{Q^l}{4\pi k_s} \left[\int_0^H \frac{1}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha_s t}} \right) dz' - \int_{-H}^0 \frac{1}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha_s t}} \right) dz' \right] \quad (2.9)$$

gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$ rastojanje posmatrane tačke od izvora koji se nalazi u $(0, 0, z')$.

Diao et al. su takođe razvili dvodimenzionalni i kvazi-trodimenzionalni model za prenos toplote unutar bušotine. Kod dvodimenzionalnog modela je zanemarena kondukcija toplote u aksijalnom pravcu, a promjena temperature u bušotini data je kao superpozicija dva posebna temperaturska poremećaja prouzrokovana toplotnim fluksevima od dva kraka U–cijevi. Pomoću ovakvog dvodimenzionalnog modela moguće je izračunati temperaturu fluida na ulazu i izlazu iz geotermalnog razmjenjivača toplote kao i analizirati uticaj položaja U–cijevi na efikasnost geotermalnog razmjenjivača toplote. Ipak, zbog pretpostavki koje su usvojene u modelu, nije moguća analiza uticaja kratke veze u prostiranju toplote između dva kraka U–cijevi, koja ima za posljedicu smanjenje efikasnosti razmjenjivača.

U cilju omogućavanja ovakve analize Diao et al. su na osnovu prethodno opisanog dvodimenzionalnog modela razvili kvazi trodimenzionalni model koji uzima u obzir promjenu temperature fluida sa dubinom bušotine. I kod ovog modela je zanemarena kondukcija toplote u aksijalnom pravcu, a jednačine održanja energije za dva kraka U–cijevi su riješene primjenom Laplaceovih transformacija.

2.1.1.4. Rješenja za pokretni linijski izvor beskonačne i konačne dužine

Jednačina difuzije toplote oko linijskog izvora koji se translatorno kreće u određenom pravcu je u matematičkoj formulaciji ista kao i jednačina advekcije–difuzije toplote oko nepomičnog izvora kojeg opstrujava uniformna struja fluida. Koristeći ovu činjenicu Diao et al. (2004) su izveli analitičko rješenje za pokretni linijski izvor toplote beskonačne dužine koje može da se koristi za računanje promjene temperature tla oko bušotine kada je prisutno strujanje podzemne vode:

$$T(x, y, t) - T_0 = \frac{Q^l}{4\pi k_s} e^{\frac{Ux}{2\alpha_s}} \int_0^{\frac{4\alpha_s t}{r^2}} \frac{1}{\eta} e^{\left(-\frac{1}{\eta} - \frac{U^2 r^2 \eta}{16\alpha_s^2}\right)} d\eta \quad (2.10)$$

gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $U = u_0 \frac{(\rho c)_w}{(\rho c)_s}$, u_0 je brzina strujanja podzemne vode, $(\rho c)_w$ i $(\rho c)_s$ su toplotni kapaciteti podzemne vode i tla.

Kasnije su Molina–Giraldo et al. (2011) izveli odgovarajuće analitičko rješenje za pokretni izvor konačne dužine:

$$T(x, y, z, t) - T_0 = \frac{Q^l}{2\pi k_s} e^{\frac{Ux}{2\alpha_s}} \left[\int_0^H f(x, y, z, t) dz' - \int_{-H}^0 f(x, y, z, t) dz' \right] \quad (2.11)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4r} \left[e^{-\frac{Ux}{2\alpha_s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r - Ut}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right) + e^{\frac{Ux}{2\alpha_s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r + Ut}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right) \right]$$

gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$ rastojanje posmatrane tačke od izvora koji se nalazi u $(0, 0, z')$.

2.1.2. Modeli zasnovani na analitičkom rješenju Carslaw i Jaegera za cilindrični izvor toplote

2.1.2.1. Kavanaughov model

Kavanaughov (1985) model se zasniva na analitičkom rješenju Carslaw i Jaegera (1947) za cilindrični izvor toplote. Kod ovog rješenja, tlo se posmatra kao beskonačna sredina, dok se bušotina posmatra kao beskonačni cilindrični izvor toplote. Zanemaruje se prenos toplote u pravcu ose bušotine, tako da se analizirani problem svodi na jednodimenzionu kondukciju toplote kroz tlo u radijalnom pravcu. Kavanaugh je koristeći Laplaceovu transformaciju i inverznu Laplaceovu transformaciju izveo izraz za temperaturu tla T u proizvoljnom trenutku vremena t i na radijusu r od ose bušotine:

$$T(r, t) - T_0 = \frac{Q^l}{k_s} G(z, p) \quad (2.12)$$

gdje je $z = \frac{\alpha_s t}{r_b^2}$, $p = \frac{r}{r_b}$ i r_b prečnik bušotine, a $G(z, p)$ je funkcija od vremena i rastojanja od centra bušotine. Funkcija $G(z, p)$ je relativno složena i uključuje integraciju od nula do beskonačno Besselevih funkcija:

$$G(z, p) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta^2 z} - 1}{J_1^2(\beta) + Y_1^2(\beta)} [J_0(p\beta)Y_1(\beta) - J_1(\beta)Y_0(p\beta)] \frac{1}{\beta^2} d\beta \quad (2.13)$$

Kavanaugh je dao grafičke rezultate za funkciju $G(z, p)$ za $p = 1$, tj. za $r = r_b$ jer je temperatura zida bušotine od interesa kao reprezentativna temperatura kod projektovanja geotermalnih razmjenjivača toplote.

Kako konfiguracija U-cijevi značajno odstupa od teorije o linijskom izvoru toplote, Bose (1984) modifikuje izvorno rješenje uvođenjem ekvivalentnog prečnika:

$$d_{eq} = \sqrt{n} d_{p,o} \quad (2.14)$$

gdje je n broj kraka U-cijevi u bušotini i $d_{p,o}$ spoljašnji prečnik U-cijevi. Korišćenje ekvivalentnog prečnika omogućava da se geometrija U-cijevi sa dva kraka tretira kao jedna cijev i da se za nju koristi rješenje za linijski izvor toplote.

Kavanaugh je dao izraz za računanje temperature fluida u U-cijevi koristeći (2.13) i korekciju zbog neuniformnog fluksa po površini blisko postavljenih krakova U-cijevi. Temperatura vode na izlazu iz U-cijevi se određuje na osnovu bilansa energije za cijeli sistem. Kavanaugh je takođe dao izraz za korekciju srednje temperature fluida u U-cijevi uslijed postojanja kratke veze u prenosu toplote između dva kraka. U ovom izrazu figuriše fluks kratke veze koji se računa na osnovu temperature fluida na ulazu i izlazu iz U-cijevi i na osnovu toplotnog otpora kratke veze.

Zajedničko za sve navedene modele za prenos toplote oko bušotine, koji se oslanjaju na analitička rješenja za linijski i za cilindrični izvor toplote, je da geometrijski detalji razmjenjivača toplote nisu uzeti u obzir, kao ni toplotni kapacitet fluida, cijevi i materijala ispune bušotine. Ovo za posljedicu ima da modeli nisu pogodni za simulacije sa kratkim vremenskim korakom gdje je značajna dinamika prenosa toplote u samoj

bušotini. Takođe, u skoro svim ovim modelima bušotina se razmatra kao beskonačno dug linijski ili cilindrični izvor toplote, a tlo kao homogena sredina po cijeloj njenoj dubini, kroz koje se toplota prostire samo u radijalnom pravcu od ose bušotine. Ovo za posljedicu ima da modeli ne uzimaju u obzir prenos toplote ispod bušotine i da zbog toga nisu pogodni za simulaciju tokom dužeg niza godina, npr. preko 20 godina, kada ovaj efekat mora da se uzme u obzir.

Uprkos svim ovim ograničenjima, modeli koji se oslanjaju na analitičko rješenje za linijski izvor toplote nalazili su svoju primjenu naročito pri analizi rezultata mjerenja u testu toplotnog odziva.

2.2. Modeli za stacionaran prenos toplote unutar bušotine

Modeli za stacionaran prenos toplote unutar bušotine su uglavnom razvijeni za proračun toplotnog otpora bušotine. Pod toplotnim otporom bušotine podrazumijeva se otpor prostiranju toplote između fluida u cijevi i zida bušotine. Tačna procjena toplotnog otpora bušotine je od velikog značaja za projektovanje. Polazna pretpostavka kod ovih modela je da se toplota unutar bušotine prenosi stacionarno. Toplotni otpor bušotine R_b može da se definiše kao odnos razlike srednje temperature fluida T_f i temperature zida bušotine T_b i toplotnog fluksa Q^l :

$$R_b = \frac{T_f - T_b}{Q^l} \quad (2.15)$$

Toplotni otpor bušotine R_b uključuje otpor prenosu toplote konvekcijom sa fluida na cijev R_f , otpor prenosu toplote kondukcijom kroz samu cijev R_p kao i toplotni otpor ispune bušotine R_g :

$$R_b = \frac{R_f + R_p}{2} + R_g \quad (2.16)$$

Najveći doprinos ukupnom toplotnom otporu bušotine imaju otpor prenosu toplote kondukcijom kroz samu cijev kao i toplotni otpor ispune bušotine. Otpor prenosu toplote konvekcijom sa fluida na cijev u slučaju turbulentnog strujanja doprinosi ukupnom otporu sa manje od 1 %, dok u slučaju laminarnog strujanja ovaj doprinos može da bude i preko 20 %.

Toplotni otpor prelazu toplote sa fluida na cijev R_f može da se računa prema:

$$R_f = \frac{1}{d_{p,i} \pi h} \quad (2.17)$$

gdje je $d_{p,i}$ unutrašnji prečnik cijevi i h koeficijent prelaza toplote.

Toplotni otpor provođenju toplote kroz zid cijevi računa se prema:

$$R_p = \frac{\ln\left(\frac{d_{p,o}}{d_{p,i}}\right)}{2\pi k_p} \quad (2.18)$$

gdje je $d_{p,o}$ spoljašnji prečnik cijevi i k_p koeficijent toplotne provodljivosti cijevi.

Toplotni otpor provođenju toplote kroz ispunu bušotine se zbog složenije geometrije ne može izračunati jednostavno kao toplotni otpor prelazu toplote sa fluida na cijev i toplotni otpor provođenju toplote kroz zid cijevi. U principu, kod stacionarnog prostiranja toplote, toplotni otpor bušotine može da se sračuna na osnovu poznate srednje temperature zida bušotine T_b i površine U–cijevi T_p :

$$R_g = \frac{T_b - T_p}{Q^I} \quad (2.19)$$

Za računanje toplotnog otpora ispune bušotine razvijeno je nekoliko modela koji polaze od pretpostavke da je prenos toplote u bušotini stacionaran.

2.2.1. Model ekvivalentnog prečnika

Model ekvivalentnog prečnika koji su razvili Gu i O'Neal (1998) je najjednostavniji način proračuna toplotnog otpora ispune bušotine. Pretpostavljajući da se toplotni uticaj dva kraka U–cijevi može predstaviti toplotnim uticajem samo jedne cijevi koja je koncentrična sa bušotinom, Gu i O'Neal su dali izraz za ekvivalentni prečnik koncentrične cijevi:

$$d_{eq} = \sqrt{2d_{p,o} \cdot L_s} \quad (2.20)$$

gdje je d_{eq} ekvivalentni prečnik cijevi, $d_{p,o}$ je prečnik cijevi i L_s rastojanje između osa dva kraka U–cijevi.

Sa ekvivalentnim prečnikom cijevi, toplotni otpor ispune bušotine može da se izračuna koristeći poznati izraz za kondukciju toplote u radijalnom pravcu:

$$R_g = \frac{\ln\left(\frac{d_b}{d_{eq}}\right)}{2\pi k_g} \quad (2.21)$$

gdje je d_b prečnik bušotine i k_g koeficijent toplotne provodljivosti materijala ispune.

2.2.2. Model Paula

Paul (1996) je razvio model za proračun toplotnog otpora ispune bušotine koji koristi tzv. korelacije za faktore oblika do kojih se dolazi koristeći rezultate eksperimenta ili numeričkih simulacija (2D konačni elementi). Koristeći faktor oblika, toplotni otpor ispune bušotine se računa prema:

$$R_g = \frac{1}{k_g \cdot S} \quad (2.22)$$




Faktor oblika S se računa prema:

$$S = \beta_0 \cdot \left(\frac{d_b}{d_{p,o}}\right)^{\beta_1} \quad (2.23)$$

gdje su β_0 i β_1 bezdimenzioni korelacioni koeficijenti i $d_{p,o}$ spoljašnji prečnik cijevi.

Paul je razmatrao tri konfiguracije bušotine, zavisno od rastojanja između dva kraka U-cijevi i koristeći eksperimentalne rezultate izračunao koeficijente korelacije koji su dati u tabeli 2.1.

TABELA 2.1 Korelacioni koeficijenti za faktore oblika prema modelu Paula (1996)

Konfiguracija bušotine	β_0	β_1
	14,450872	-0,8176
	17,44268	-0,605154
	20,100377	-0,94467

2.2.3. Višepolni model

Bennet et al. (1987) su razvili tzv. višepolni model za proračun toplotnog otpora bušotine, kod kojeg su cijevi u bušotini predstavljene linijskim izvorima ili ponorima toplote. Koristeći višepolni model, moguća je analiza bušotina sa više U–cijevi, kao i slučaja kada cijevi nisu simetrično postavljene unutar bušotine. Kod ovog modela, svaki krak U–cijevi se posmatra kao izvor, odnosno ponor toplote. Za svaki izvor, odnosno ponor toplote postoji odgovarajući ponor, odnosno izvor toplote u tzv. tački u ogledalu. Korišćenjem većeg broja linijskih izvora i ponora toplote, uzima se u obzir nepravilna geometrija. Zadajući temperature svake od n cijevi, ovim modelom može da se sračuna toplotni fluks Q_i' od svake cijevi i srednja temperatura zida bušotine. Na osnovu ovih vrijednosti, toplotni otpor bušotine može da se izračuna kao:

$$R_b = \frac{T_f - T_b}{\sum_i^n Q_i'} \quad (2.24)$$

2.3. Modeli koji koriste faktore odziva

Analitički modeli nisu zahtjevni po pitanju računarskih resursa. Posebno su pogodni za analizu podataka dobijenih mjerenjem prilikom izvođenja testa toplotnog odziva. Ipak, analitički modeli nisu pogodni za projektovanje i simulaciju kada je potrebno da se uzme u obzir promjenljivost toplotnog opterećenja i uticaj susjednih bušotina u toku dužeg perioda simulacije. U cilju vršenja ovakvih simulacija razvijeni su modeli koji koriste faktore odziva ili g -funkcije, da bi opisali vezu između promjene temperature i toplotnog fluksa za jednu ili cijelo polje bušotina. Za proračun faktora odziva obično se koriste hibridni prilazi koji kombinuju analitičke i numeričke modele.

2.3.1. Modeli funkcija odziva za duge vremenske korake

Model g -funkcija za duge vremenske korake je razvio Eskilson (1987). Veza između temperature zida bušotine T_b , neporemećene temperature tla T_s i toplotnog fluksa može da se predstavi na sledeći način:

$$Q^l = \frac{T_b(t) - T_s}{R_q} \quad (2.25)$$

gdje R_q može da se posmatra kao vremenski zavistan toplotni otpor. R_q može da se zapiše u sledećem obliku:

$$R_q = \frac{1}{2\pi k_s} g\left(\frac{t}{t_s}, \frac{r_b}{H}\right) \quad (2.26)$$

gdje $g\left(\frac{t}{t_s}, \frac{r_b}{H}\right)$ predstavlja bezdimenzionu funkciju odziva, koju Eskilson naziva

g -funkcija, t je vrijeme, t_s je vrijeme koje je potrebno za postizanje stacionarnog stanja,

$t_s = \frac{H^2}{9\alpha_s}$, r_b je poluprečnik bušotine, H je dubina bušotine i α_s je koeficijent toplotne

difuzije tla.

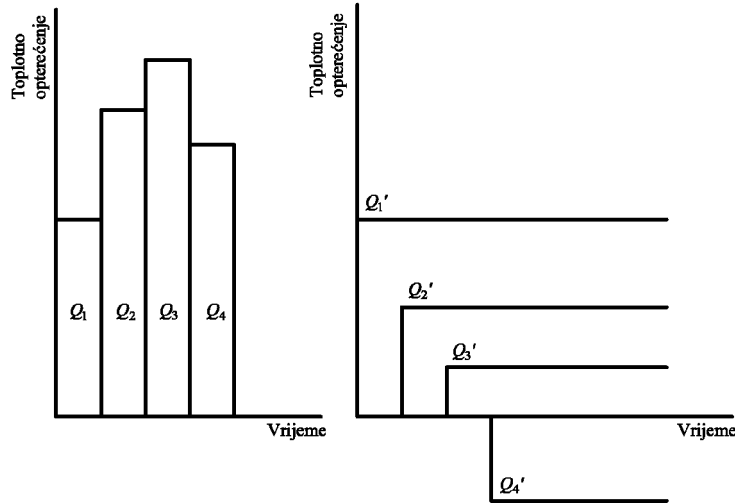
Kombinacijom (2.25) i (2.26) dobija se izraz za funkciju odziva g :

$$g\left(\frac{t}{t_s}, \frac{r_b}{H}\right) = \frac{2\pi k_s (T_b(t) - T_s)}{Q^l} \quad (2.27)$$

Eskilson je funkcije odziva računao u dva koraka, kombinovanjem numeričkog i analitičkog prilaza. Odziv temperature na toplotni fluks oblika jedinične odskočne funkcije za jednu bušotinu je računat numeričkim rješavanjem jednačine difuzije toplote u radijalno-aksijalnim koordinatama korišćenjem metode konačnih razlika. Bušotina ima konačnu dužinu i prečnik, dok su toplotni otpor i toplotni kapacitet bušotine zanemareni. Na osnovu ovako dobijene distribucije temperatura za jednu bušotinu, metodom superpozicije se dobija odziv temperatura za unaprijed definisanu konfiguraciju polja bušotina. Eskilson je sračunao preko 200 g -funkcija za različite konfiguracije polja bušotina, poređanih po liniji, u obliku kvadrata ili kruga, sa različitim međusobnim rastojanjem bušotina. Za svaku od ovih konfiguracija, rezultati proračuna zavise i od odnosa rastojanja između bušotina i dubine bušotina.

Kada se jednom izračunju g -funkcije kao odzivi temperature bušotine za toplotni fluks oblika jedinične odskočne funkcije, moguće je sračunati odziv temperature za proizvoljno toplotno opterećenje. Prvo je potrebno izvršiti dekompoziciju proizvoljnog toplotnog fluksa u niz jediničnih odskočnih funkcija, a potom uraditi superpoziciju

odziva temperatura za svaku od ovih jediničnih odskočnih funkcija. Ovaj postupak je ilustrovan za period od četiri mjeseca na slici 2.1.



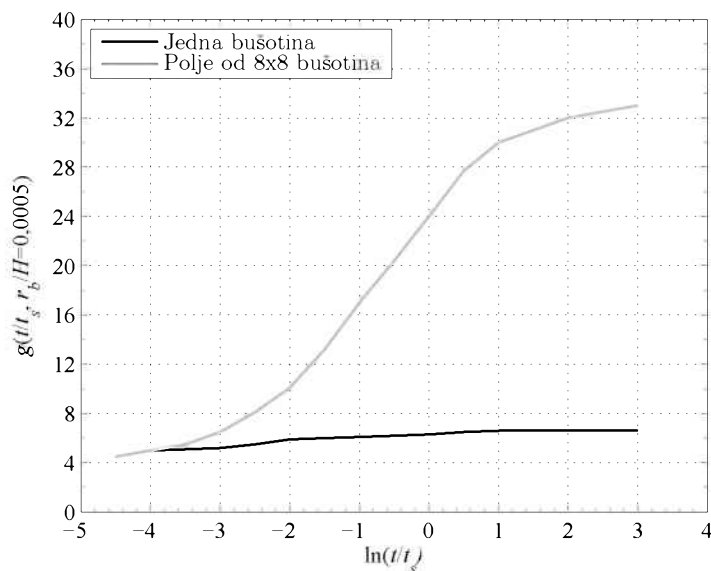
SLIKA 2.1 Dekompozicija proizvoljnog toplotnog fluksa u niz jediničnih odskočnih funkcija

Osnovni toplotni puls Q_1^l uzima se da traje tokom svih četiri mjeseca, pa je $Q_1^{l'} = Q_1^l$. Sledeći puls Q_2^l koji je aktivan u sledeća 3 mjeseca može da se prikaže nadogradnom $Q_2^{l'} = Q_2^l - Q_1^l$ na prethodni puls Q_1^l . Slično, puls Q_3^l koji je aktivan u sledeća dva mjeseca može da se prikaže nadogradnjom $Q_3^{l'} = Q_3^l - Q_2^l$ na puls Q_2^l itd. Superpozicijom se dobija temperatura zida bušotine na kraju n -tog intervala kao:

$$T_b = T_s + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^l - Q_{i-1}^l}{2\pi k_s} g\left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t_s}, \frac{r_b}{H}\right) \quad (2.28)$$

Kod izvornog Eskilsonovog modela, složena geometrija bušotine je aproksimirana kao cilindar konačne dužine i prečnika a samo jedna vrijednost temperature se koristi da bi se prikazala temperatura zida bušotine. Zbog zanemarivanja toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta samog fluida koji cirkuliše u U-cijevi, cijevi i ispune bušotine, rezultati koji se dobijaju ovim modelom su zadovoljavajući, tek poslije isteka određenog vremenskog perioda od početka rada, prema procjeni Eskilsona nakon $5r_b^2 / \alpha_s$, što za tipičnu bušotinu, zavisno od toplotnih karakteristika tla, tj. od koeficijenta toplotne difuzije α_s , može da bude od 2 do 6 h. g -funkcije za duge vremenske korake za jednu

bušotinu i za polje od 8 x 8 bušotina su prikazane na slici 2.2. g -funkcije su date kao funkcije prirodnog logaritma bezdimenzionog vremena t/t_s , za fiksiranu vrijednost odnosa $r_b/H=0,0005$ i za odnos rastojanja između bušotina i dubine bušotine jednak 0,01.



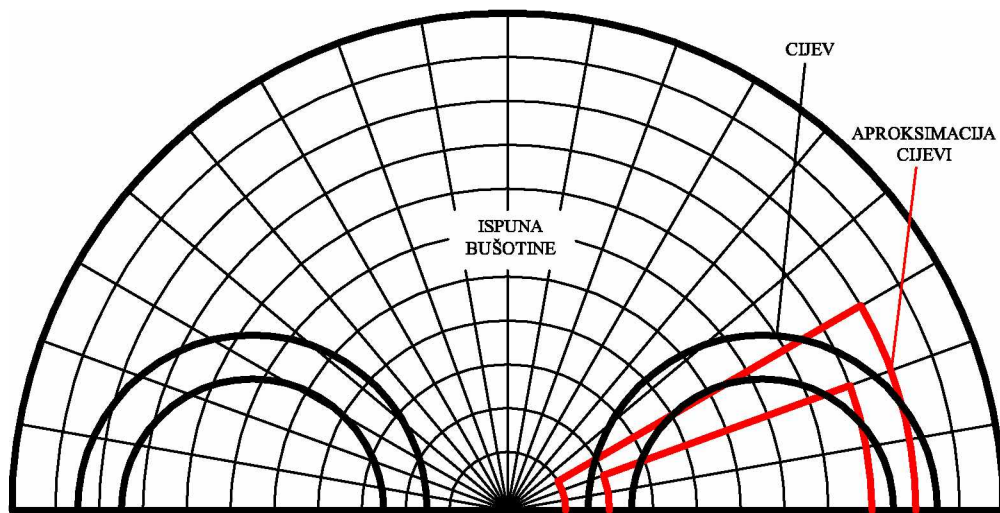
SLIKA 2.2 Eskilsonove g -funkcije za jednu bušotinu i za polje od 8x8 bušotina

2.3.2. Modeli funkcija odziva za kratke vremenske korake

Yavuzturk (1999) je predstavio model sa kratkim vremenskim korakom za simulaciju nestacionarnog prenosa toplote kod vertikalnih geothermalnih razmjenjivača toplote sa U–cijevima koji daje zadovoljavajuću tačnost i za vrijeme kraće od jednog sata od početka rada.

Ovaj model sa kratkim vremenskim korakom je zasnovan na numeričkom rješavanju jednačine difuzije toplote u bušotini u polarnim koordinatama, metodom kontrolisanih zapremina sa implicitnom integracijom u vremenu.

U modelu se koristi algoritam za generaciju mreže u polarnim koordinatama, za različite dimenzije cijevi, rastojanja između kraka U–cijevi i geometrije bušotine. Zbog simetrije se razmatra samo polovina bušotine. Diskretizacija domena je ilustrovana na slici 2.3. Cijev je predstavljena poljem od nekoliko ćelija u polarnoj mreži (određeno iz uslova jednakosti obima cijevi i ovog polja).



SLIKA 2.3 Diskretizacija domena u modelu Yavuzturka

Model uključuje otpor prostiranju toplote konvekcijom sa fluida za prenos toplote na zid cijevi, kao i otpor prostiranju toplote kondukcijom kroz zid cijevi i kroz ispunu bušotine. Sam fluid koji struji u U–cijevi nije eksplicitno modeliran već se prenos toplote sa fluida na zid cijevi tretira kao zadat toplotni fluks po jediničnoj dubini bušotine, konstantan u datom vremenskom koraku, koji sada može da se zapiše kao:

$$Q^l = \frac{T_f(t) - T_b(t)}{R_b} \quad (2.29)$$

Kombinovanjem (2.29) i (2.27) dobija se g -funkcija za kratak vremenski korak:

$$g\left(\frac{t_i}{t_s}, \frac{r_b}{H}\right) = \frac{2\pi k_s [T_f(t) - R_b Q^l - T_s]}{Q^l} \quad (2.30)$$

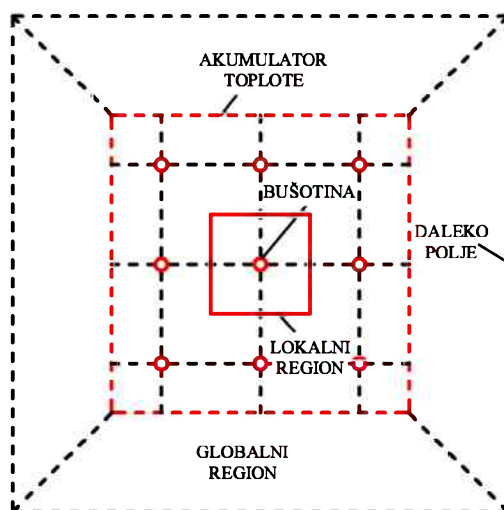
Ovako dobijene g -funkcije mogu da se koriste za vremenske korake od 2½ minuta do 200 sati. Yavuzturk je numeričke rezultate predstavio u obliku faktora odziva sa malim vremenskim korakom (tj. u obliku g -funkcija), što predstavlja koristan nastavak na faktore odziva sa dugim vremenskim korakom koje je dao Esklison. Yavuzturkov model se koristi u softverima TRNSYS (Klein et al., 2010), GLHEPro (Spitler, 2000) i EnergyPlus (Crawley et al., 2001) koji se koriste za energetska simulaciju zgrada.

Kod analitičkih modela i modela koji koriste faktore odziva, temperatura zida bušotine se sračunava superpozicijom odziva na niz toplotnih flukseva različitog trajanja, kao što je ilustrovano na slici 2.1. Za dugoročne simulacije kompjutersko vrijeme za ovakvu

superpoziciju bi bilo predugo. U cilju smanjenja vremena proračuna, Deerman i Kavanaugh (1991), Yavuzturk (1999), Bernier (2001) i Bernier et al. (2004) su razvili različite algoritme za agregaciju toplotnog opterećenja.

2.3.3. DST model

Hellstrom (1989, 1991) je razvio tzv. DST (duct storage) model za simulaciju vertikalnih geotermalnih akumulatora toplote, koji predstavljaju gusto pakovane geotermalne razmjenjivače namjenjene za sezonsku akumulaciju toplote. Ovakva vrsta sistema može da se koristi za direktno grijanje zgrada, sa ili bez toplotnih pumpi. Prema Hellstromovom modelu, ukupna zapremina tla sa više bušotina u kojoj se akumulira toplota je podjeljena na dva regiona: jedan je zapremina koja okružuje pojedinačne bušotine i koji je nazvan „lokalni“ region, a drugi je tzv. „globalni“ region koji predstavlja zapreminu tla između samog akumulatora i tzv. dalekog polja (far field) u kojem nema promjene temperature (slika 2.4).



SLIKA 2.4 Podjela domena u DST modelu na „lokalni“ i „globalni region“

Prenos toplote u lokalnom regionu se razmatra kao jednodimenzioni problem. U slučaju nestacionarnog prenosa toplote sa kraćim vremenskim korakom, temperatursko polje oko lokalnog regiona (bušotine) računa se koristeći metodu konačnih razlika na radijalnoj mreži. Kada prenos toplote u lokalnom regionu dostigne stacionarno stanje, moguće je koristiti analitičko rješenje. Dvodimenziono temperatursko polje u

„globalnom“ regionu dobija se numeričkim putem, koristeći metodu konačnih razlika na radijalno-aksijalnoj mreži.

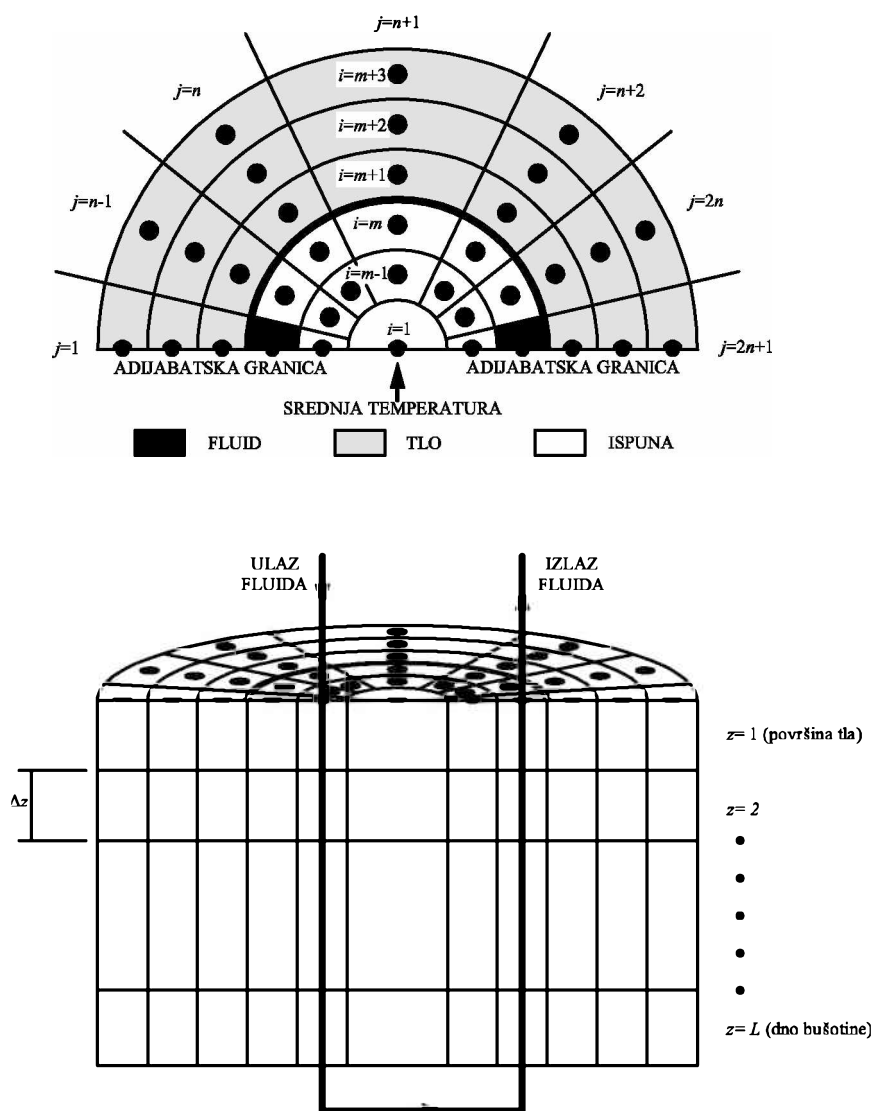
Kako se akumulacija toplote u tlu najčešće koristi da obezbijedi funkciju grijanja, bušotine se uglavnom raspoređuju u prilično gustom polju, što nije pogodno za zgrade koje imaju značajne potrebe za hlađenjem. U Sjevernoj Americi se geotermalni razmjenjivači toplote obično projektuju za disipaciju toplote i u ovom slučaju se postavljaju na što je većem mogućem rastojanju. DST model je kasnije implementiran kao jedna komponenta softvera TRNSYS (Klein et al., 2010).

2.4. Diskretizovani numerički modeli

Prednost do sada navedenih modela je brzo vrijeme proračuna i mogućnost njihove implementacije u komercijalne softvere za projektovanje i simulaciju rada geotermalnih razmjenjivača toplote. Međutim, u ovim modelima je radi pojednostavljenja usvojen niz aproksimacija. Potpun opis geometrije sa svim različitim materijalima koji se javljaju kod geotermalnog razmjenjivača toplote i vjerodostojnu simulaciju složenog, nestacionarnog, trodimenzionalnog prenosa toplote pružaju 3D numerički modeli. Razvijeni 3D numerički modeli koriste različite algoritme za diskretizaciju: metod konačnih razlika, metod konačnih elemenata, kao i metod kontrolisanih zapremina.

2.4.1. Konačne razlike

Rottmayer et al. (1997) su razvili kvazi trodimenzionalni numerički model razmjenjivača toplote u obliku U-cijevi u kojem su koristili metodu konačnih razlika i eksplicitnu vremensku shemu za nestacionarni član u energijskoj jednačini. Cijeli razmjenjivač toplote je izdjeljen po dubini na sekcije od po 3 m i temperatursko polje u pojedinim sekcijama je riješeno kao dvodimenzionalni problem (u polarnim koordinatama), zanemarujući kondukciju u vertikalnom pravcu (slika 2.5).



SLIKA 2.5 Diskretizacija domena u modelu Rottmayer et al.

U ovom modelu je zanemaren toplotni kapacitet cijevi i ispune bušotine. Rješenje temperaturskog polja po pojedinim sekcijama se koristi kao granični uslov kod modeliranja prenosa toplote duž U–cijevi. Na ovaj način dobijen je kvazi trodimenzioni model koji uzima u obzir promjenu temperature fluida sa dubinom. Primjenom ovog modela dobija se za oko 5 % manja razmjena toplote u odnosu na rezultate dobijene analitičkim modelom. Kao uzrok ove razlike autori navode pojednostavljenu geometriju korišćenu u modelu, gdje je cijev kružnog oblika aproksimirana kao ćelija polarne mreže istog obima. Korišćenjem tzv. geometrijskog faktora reda veličine od 0,3 do 0,5 modifikuju se toplotni otpori tla i materijala ispune bušotine u diskretizovanim

jednačinama. Vrijednost geometrijskog faktora je određena tako da u stacionarnim uslovima numerički model daje isto rješenje za prenos toplote kao i analitički.

Shonder i Beck (1999) su razvili jednodimenzionalni model u radijalnim koordinatama u kojem je U–cijev predstavljena kao jedna cijev ekvivalentnog prečnika. U modelu je toplotni kapacitet cijevi i fluida za prenos toplote uzet u obzir preko tankog sloja (filma) konačne debljine oko cijevi ekvivalentnog prečnika. Dakle ovaj model bušotine pretpostavlja nestacionarnu jednodimenzionu kondukciju toplote kroz film, materijal ispune (između spoljašnje površine filma i zida bušotine) i okolnog tla. Promjenljivi toplotni fluks je uzet kao granični uslov na unutrašnjoj površini filma, dok je kao granični uslov na radijusu dovoljno daleko od razmjenjivača toplote uzeta neporemećena temperatura tla. Početna temperatura je jednaka neporemećenoj temperaturi tla. Problem je riješen metodom konačnih razlika i primjenom Crank-Nicolsonove sheme pri integraciji nestacionarnog člana.

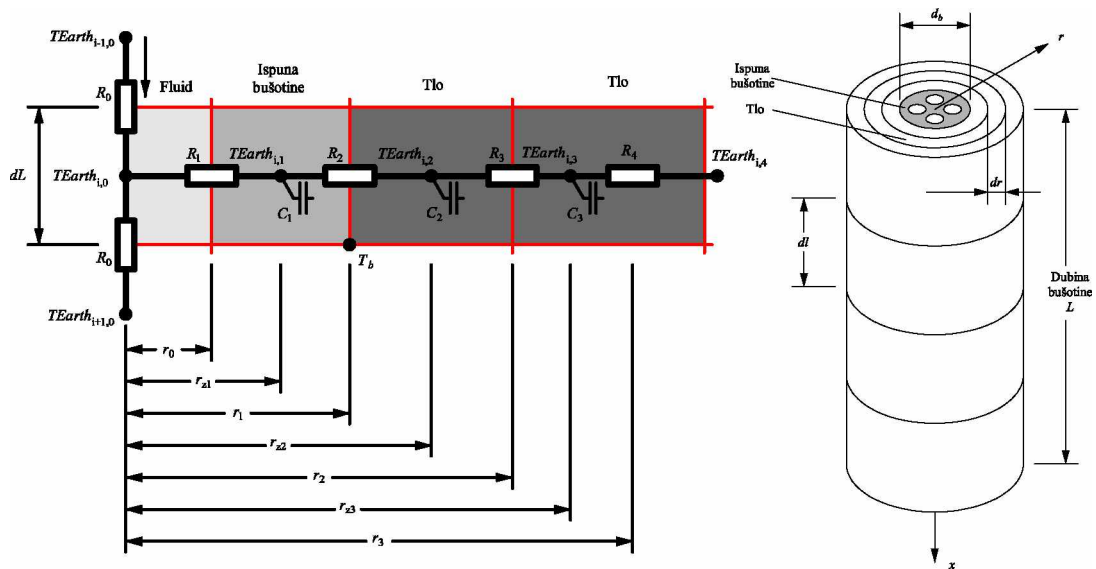
Lee i Lam (2008) su razvili trodimenzionalni model zasnovan na konačnim razlikama. Kod njihovog modela se prenos toplote u tlu oko bušotine rješava na strukturisanoj pravougaonoj mreži, koristeći implicitnu integraciju u vremenu. Bušotina je predstavljena kao stub sa poprečnim presjekom oblika kvadrata oko kojeg je opisan krug čiji je prečnik jednak prečniku bušotine. Rješavajući jednačinu bilansa toplote za fluid koji struji u U–cijevi dobija se profil temperature duž cijevi i na osnovu njega toplotni fluks od bušotine prema tlu. Ovako izračunati fluks se koristi kao granični uslov u diskretizovanoj jednačini prenosa toplote u tlu oko bušotine iz koje se dobija polje temperatura u tlu, kao i temperatura zida bušotine. Numeričkim simulacijama su pokazali da pri konstantnom toplotnom opterećenju, profil temperature i profil toplotnog fluksa nisu konstantni duž ose bušotine.

2.4.2. Konačni elementi

Muraya (1995) i Muraya et al. (1996) su razvili dvodimenzioni nestacionarni model, i koristeći metod konačnih elemenata simulirali prenos toplote oko geotermalnog razmjenjivača sa vertikalnom U–cijevi. Cilj razvoja modela je parametarska analiza vertikalnog geotermalnog razmjenjivača toplote sa U–cijevi, prije svega analiza uticaja

kratke veze u prenosu toplote između dva kraka U–cijevi. Ovaj uticaj je kvantifikovan definisanjem efikasnosti razmjenjivača toplote. Analiziran je uticaj rastojanja između kraka U–cijevi, temperature tla i materijala ispune bušotine.

Wetter i Huber (1997) su razvili tzv. EWS model vertikalnog geotermalnog razmjenjivača toplote sa dvije U–cijevi u cilju nestacionarne simulacije sa malim vremenskim korakom. Model je implementiran kao jedna komponenta softvera TRNSYS i pomoću njega je moguća simulacija rada samo jedne bušotine. Ispuna bušotine i tlo su po dubini podjeljeni u više slojeva debljine dl , ali se pri tome zanemaruje kondukcija toplote u aksijalnom pravcu. Ispuna bušotine je u svakom sloju predstavljena jednim elementom, a u cilju rješavanja 1D difuzije toplote u radijalnom pravcu, tlo oko bušotine je diskretizovano kao što je prikazano na slici 2.6.



SLIKA 2.6 Diskretizacija u radijalnom pravcu

Koristeći Crank-Nicolsonovu shemu za diskretizaciju u vremenu, nestacionarna jednačina difuzije toplote u radijalnom pravcu se svodi na sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 T_{k+1,j} - \frac{dt}{2} \frac{L_j}{C_j} (T_{k+1,j-1} - T_{k+1,j}) - \frac{dt}{2} \frac{L_{j+1}}{C_j} (T_{k+1,j+1} - T_{k+1,j}) = \\
 = T_{k,j} + \frac{dt}{2} \frac{L_j}{C_j} (T_{k,j-1} - T_{k,j}) + \frac{dt}{2} \frac{L_{j+1}}{C_j} (T_{k,j+1} - T_{k,j})
 \end{aligned}
 \quad (2.31)$$

gdje se indeks k odnosi na vremenski korak, a indeks j odnosi na radijalnu koordinatu (slika 2.6). Wetter i Huber su dali i odgovarajuće izraze za izračunavanje toplotnih

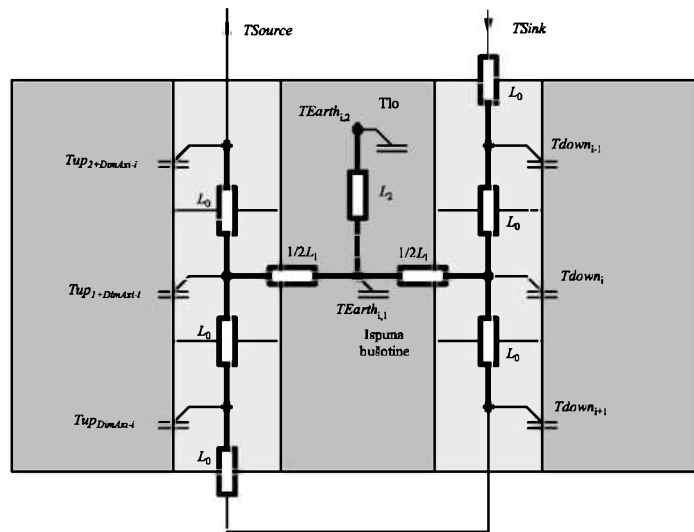
provodljivosti L i toplotne kapaciteta C u izrazu (2.31).

Profil temperature po dubini na spoljašnjoj granici domena (na radijusu od oko 2 m od centra bušotine), se računa koristeći rješenje za linijski izvor toplote, superpozicijom konstantnih toplotnih flukseva koji počinju u različitim vremenskim koracima. Ova temperatura se izračunava jednom sedmično i onda se drži konstantnom kao granični uslov u toku cijele sedmice.

Temperatura fluida se računa na osnovu bilansa toplote za fluid koji struji kroz silaznu i uzlaznu granu U–cijevi (slika 2.7):

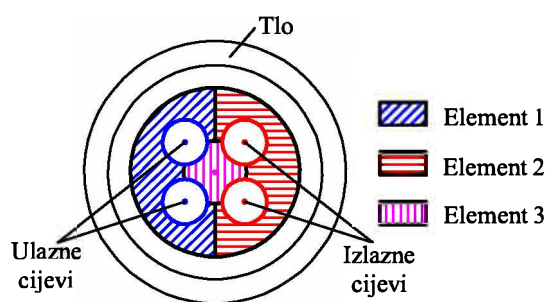
$$\begin{aligned}
 T_{down_{k+1,i}} &= T_{down_{k,i}} + \left(T_{down_{k+1,i-1}} - T_{down_{k,i}} \right) \frac{L_0 dt_2}{mc_p} + \\
 &\quad + \left(T_{Earth_{k,i,1}} - T_{down_{k,i}} \right) \frac{L_1 dt_2}{2mc_p} \\
 T_{up_{k+1,i}} &= T_{up_{k,i}} + \left(T_{up_{k+1,i-1}} - T_{up_{k,i}} \right) \frac{L_0 dt_2}{mc_p} + \\
 &\quad + \left(T_{Earth_{k,1+DimAzi-i,1}} - T_{up_{k,i}} \right) \frac{L_1 dt_2}{2mc_p}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

gdje se indeks k odnosi na vremenski korak, a indeks i odnosi na aksijalnu koordinatu L_0 u izrazu (2.32) predstavlja toplotnu provodljivost aksijalnom pravcu.



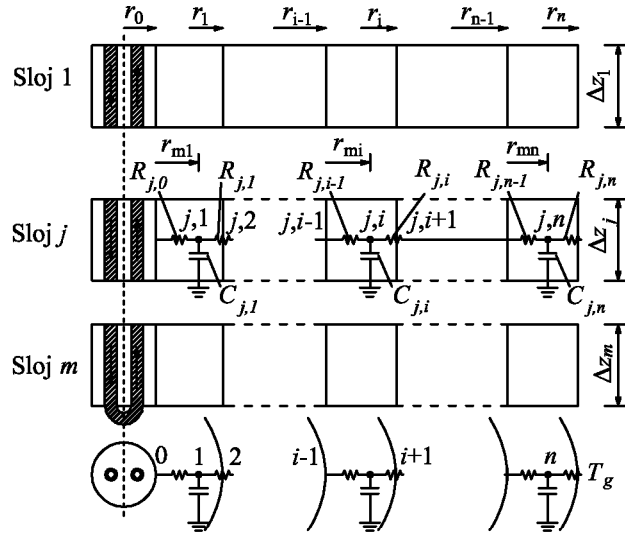
SLIKA 2.7 Shema bilansa energije za fluid za razmjenu toplote

Oppelt et al. (2010) su razvili tzv. MISOS model koji predstavlja unaprijeđenje EWS modela u smislu tačnosti geometrijskog opisa geotermalnog razmjenjivača toplote sa dvije U-cijevi. Za razliku od EWS modela kod kojeg je cijela bušotina predstavljena jednim elementom, kod MISOS modela ispunjena bušotina je podijeljena na tri elementa: element 1 koji obuhvata polovinu anulusa sa silaznim cijevima, element 2 koji obuhvata polovinu anulusa sa izlaznim cijevima i element 3 koji predstavlja jezgro bušotine (slika 2.8). Temperatura svakog elementa se računa na osnovu bilansa energije, dok se za proračun raspodjele temperature fluida u cijevi kao i u tlu koje okružuje bušotinu MISOS model kombinuje sa EWS modelom.



SLIKA 2.8 Skica podjele ispunjene bušotine u modelu MISOS

De Carli et al. (2010) su razvili tzv. CaRM model (CAapacity Resistance Model) u kojem su koristili električnu analogiju sa toplotnim kapacitetima i toplotnim otporima u cilju simulacije rada geotermalnog razmjenjivača. Kod ovog modela, tlo oko bušotine je podjeljeno u veći broj regiona oblika anulusa u radijalnom pravcu, kao i u veći broj slojeva u vertikalnom pravcu (slika 2.9). U ovom modelu je usvojena pretpostavka da se toplota ne prenosi između slojeva u vertikalnom pravcu, već samo u radijalnom, tj. da se prenos toplote u svakom sloju može razmatrati kao 1D kondukcija. Granični uslov za poslednji region oblika anulusa je neporemećena temperatura tla.



SLIKA 2.9 Shema prenosa toplote u tlu prema modelu CaRM

Prema slici 2.9, može da se napiše sledeća jednačina za prenos toplote u j -tom sloju zemlje i u i -tom regionu oblika anulusa u trenutku vremena t :

$$\frac{T_{j,i-1} - T_{j,i}}{R_{j,i-1}} + \frac{T_{j,i+1} - T_{j,i}}{R_{j,i}} = C_{j,i} \cdot \frac{T_{j,i} - T_{j,i}^0}{\Delta t} \quad (2.33)$$

gdje je R toplotni otpor između dva susjedna regiona oblika anulusa, C toplotni kapacitet, T temperatura u tekućem i T^0 temperatura u prethodnom vremenskom koraku, Δt vremenski korak.

Toplotni otpor između sva susjedna regiona oblika anulusa se računa prema:

$$R_{j,i} = \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{r_{mi}}{r_{mi-1}} = \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{\sqrt{[r_i^2 + r_{i-1}^2] / 2}}{\sqrt{[r_{i-1}^2 + r_{i-2}^2] / 2}} \quad (2.34)$$

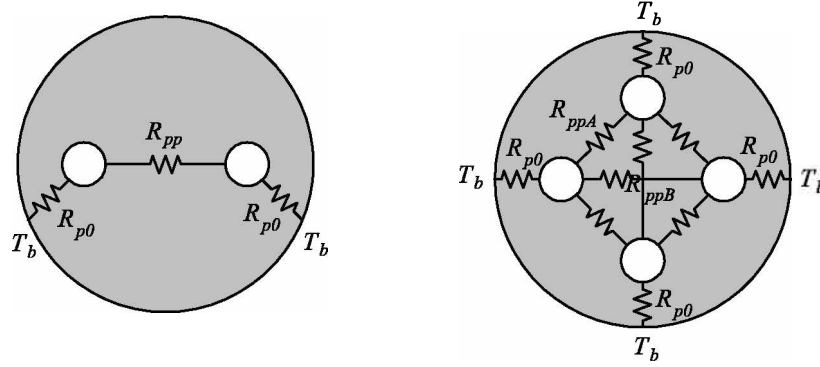
Toplotni kapacitet se računa prema:

$$C_{j,i} = \rho c_p \cdot \pi [r_i^2 - r_{i-1}^2] \cdot \Delta z_j \quad (2.35)$$

gdje su r_i i r_{i-1} odgovarajući poluprečnici, Δz_j debljina sloja, ρ je gustina i c_p specifična toplota tla.

Pomoću ovog modela mogu da se vrše simulacije za različite geometrije (jedna U–cijev, dvije U–cijevi, koaksijalne cijevi). Takođe ovim modelom je moguće uzeti u obzir promjenu sastava i neporemećene temperature tla po dubini.

De Carli et al. su dali jednačine bilansa toplote između fluida i zida bušotine pomoću toplotnih otpora između kraka U–cijevi (R_{pp} , R_{ppA} , R_{ppB}) i između kraka U–cijevi i zida bušotine (R_{p0}). Shema toplotnih otpora za slučaj bušotine sa jednom i sa dvije U–cijevi je prikazana na slici 2.10. Toplotni otpori koji se koriste kod ove metode prethodno trebaju da se izračunaju npr. koristeći neki model sa konačnim elementima.



SLIKA 2.10 Shema toplotnih otpora u bušotini prema modelu CaRM

De Carli et al. su u svom radu dali jednačine bilansa za svaku cijev i za zid bušotine, za tri konfiguracije bušotine: jedna U–cijev, dvije U–cijevi i koaksijalna cijev. Zanemarujući toplotni kapacitet fluida koji cirkuliše u U–cijevi, bilans toplote za svaku sekciju cijevi u j -tom sloju može da se zapiše u obliku:

$$\dot{m}_w c_{pw} \cdot [T_j^{w,in} - T_j^{w,out}] = 2\pi r_i \cdot h \cdot \Delta z_j \cdot [T_j^w - T_j^p] \quad (2.36)$$

gdje je \dot{m}_w protok fluida, c_{pw} specifična toplota fluida, h koeficijent prelaza toplote sa fluida na unutrašnji zid cijevi, $T_j^{w,in}$ i $T_j^{w,out}$ su temperature fluida na ulazu i izlazu, T_j^w je srednja temperatura fluida u cijevi, T_j^p je srednja temperatura unutrašnje površine zida cijevi i r_i je unutrašnji poluprečnik cijevi.

Ako je broj slojeva po dubini m , i broj regiona oblika anulusa n , na ovaj način se dobija sistem algebarskih jednačina koji u slučaju bušotine sa jednom U–cijevi i u slučaju bušotine sa koaksijalnim cijevima ima $m \times (n + 3 + 2)$ jednačina, odnosno $m \times (n + 3 + 4)$ jednačina u slučaju bušotine sa dvije U–cijevi.

Zarrela et al. (2011) su unaprijedili prethodni model za bušotinu sa dvije U–cijevi tako što su uzeli u obzir toplotni kapacitet bušotine (fluida i materijala ispune). Ispuna bušotine je podijeljena na dvije zone: jezgro koje obuhvata prostor između cijevi i omotač koji obuhvata prostor između cijevi i zida bušotine. Saglasno ovoj izmjeni model uključuje jednačinu bilansa toplote za jezgro i pri tome se uzima u obzir i toplotni kapacitet ispune bušotine (toplotni kapacitet cijevi je zanemaren). Zarrella takođe modifikuje i jednačinu bilansa toplote za fluid u U–cijevi (2.36). Upoređivanjem rezultata osnovnog i unaprijeđenog CaRM modela sa rezultatima mjerenja (test toplotnog odziva), pokazalo se da unaprijeđeni CaRM može realnije da predvidi odziv temperature fluida u simulacijama sa malim vremenskim korakom.

Al-Khoury et al. (2005) i Al-Khoury i Bonnier (2006) su razvili 3D model zasnovan na konačnim elementima za analizu stacionarnog i nestacionarnog prostiranja toplote kod geotermalnih razmjenjivača toplote sa bušotinama sa jednom ili dvije U–cijevi. U ovom modelu se prenos toplote u vertikalnom pravcu unutar same bušotine razmatra kao jednodimenzionalan. Za bušotinu sa jednom U–cijevi, uzimaju se tri komponente unutar same bušotine: dva kraka U–cijevi i ispunjena bušotina. Za svaku od ove tri komponente se formuliše bilans energije, tako da se dobija sistem jednačina koji opisuje prenos toplote unutar same bušotine. Prenos toplote u tlu koje okružuje bušotinu se razmatra kao trodimenzionalan i metod konačnih elemenata se koristi za diskretizaciju diferencijalne jednačine advekcije-difuzije toplote u tlu. Proces prenosa toplote u tlu je spregnut sa procesom prenosa toplote u bušotini preko toplotnog fluksa na zidu bušotine. Jednodimenzionalna analiza prenosa toplote unutar bušotine podrazumijeva uniformno polje temperatura u materijalu ispune bušotine a rješenja koja se dobijaju ovim modelom su nedovoljno tačna u slučaju izrazito nestacionarnog rada geotermalnog razmjenjivača.

Diersch et al. (2011) su proširili prethodni model koristeći više tačaka u materijalu ispune bušotine, za slučaj bušotine sa jednom i sa dvije U–cijevi i slučaj bušotine sa koncentričnim cijevima. Primjera radi, u slučaju bušotine sa jednom U–cijevi, materijal ispune je podijeljen na dvije zone, dok je u slučaju bušotine sa dvije U–cijevi, materijal ispune podijeljen na četiri zone. Prenos toplote unutar bušotine je simuliran unaprijeđenim modelom toplotnih otpora i kapacitivnosti. Dierch et al. su ovo rješenje i

analitičko rješenje za linijski izvor toplote iskoristili u komercijalnom softveru FEFLOW (DHI-WASY, 2010).

2.4.3. Kontrolisane zapremine

Li i Zheng (2009) su razvili trodimenzionalni model koji koristi metod kontrolisanih zapremina za simulaciju rada vertikalnih geotermalnih razmjenjivača toplote sa U-cijevima. Model koristi Delaunay triangularizaciju za generisanje nestrukturisane mreže u horizontalnom poprečnom presjeku polja bušotina. Tlo je izdjeljeno u vertikalnom pravcu u veliki broj slojeva kako bi se uzela u obzir promjena temperature fluida sa dubinom. Proces prenosa toplote u samoj bušotini i oko nje se posmatra kao nestacionarna, trodimenzionalna kondukcija. Cijeli domen je podijeljen u tri poddomena: fluid u U-cijevi, zid cijevi i bušotina sa okolnim tlom. Temperaturska polja u svakom od ovih poddomena su dobijena rješavanjem odgovarajućih energijskih jednačina, pri čemu je vođeno računa da je uslov kontinualnosti temperaturskog polja i toplotnog fluksa zadovoljen na zajedničkim granicama poddomena. Rezultati dobijeni numeričkom simulacijom su pokazali dobro slaganje sa vrijednostima izmjerenim na izvedenoj instalaciji.

Nabi i Al-Khoury (2012) su razvili trodimenzionalni model sa konačnim zapreminama za simulaciju prenosa toplote i strujanja fluida u geotermalnom razmjenjivaču toplote sa U-cijevi. Domen je diskretizovan strukturisanom mrežom koja je usitnjena u dijelu domena gdje se očekuju veći gradijenti temperatura, dok je za diskretizaciju u vremenu korišćen tzv. teta metod. Domen je podijeljen na dva poddomena, jedan predstavlja masu tla, dok drugi predstavlja jednu ili više bušotina. U ovom modelu se masa tla simulira kao potpuno zasićena porozna sredina sa strujanjem podzemne vode, dok je bušotina simulirana kao pseudo trodimenzionalni linijski element. Diskretizacija jednačina modela za tlo i za bušotinu sa zadatim početnim i graničnim uslovima daje dva spregnuta sistema algebarskih jednačina. Sistem jednačina za tlo je riješen iterativno koristeći tzv. multigrid shemu, dok je sistem jednačina za bušotinu riješen koristeći direktan Thomasov algoritam.

Rees i He (2013) su razvili dinamički model geotermalnog razmjenjivača toplote sa U–cijevi koristeći programe GEMS2D i GEMS3D (General Elliptic Multi-block Solver) koji su zasnovani na metodi kontrolisanih zapremina. Njihov model koristi tzv. multi blok mrežu u cilju geometrijski korektne reprezentacije domena. Ovaj model zajedno sa ostalim komponentama geotermalnog razmjenjivača eksplicitno uključuje i fluid za prenos toplote koji cirkuliše u U–cijevi, tako da su moguće dinamičke simulacije i sa kratkim i sa dugim vremenskim korakom.

U ovom poglavlju je dat pregled literature u oblasti modeliranja geotermalnih razmjenjivača toplote u obliku bušotine sa U–cijevi. Pregled postojećih modela je organizovan u četiri cjeline: 1) analitički modeli, 2) modeli za stacionaran prenos toplote u bušotini, 3) modeli koji koriste faktore odziva i 4) diskretizovani numerički modeli.

Na jednoj strani su analitički modeli koji su razvijeni uz usvajanje brojnih pretpostavki kojima se pojednostavljuje posmatrani problem. Ovi modeli se koriste za projektovanje, kao i za analizu rezultata mjerenja u testu toplotnog odziva. Zbog zanemarivanja složenosti geometrije bušotine i njenog toplotnog kapaciteta ovi modeli nisu pogodni za simulacije sa kratkim vremenskim korakom, gdje nestacionarnost prenosa toplote dolazi do izražaja. Takođe, modeli kod kojih se bušotina aproksimira kao izvor toplote beskonačne dužine, ne mogu da uzmu u obzir prenos toplote ispod bušotine, koji dolazi do izražaja nakon 5-10 godina rada kod velikih polja bušotina.

Analitički modeli imaju prednost što ih karakteriše kratko vrijeme proračuna, ali ipak nisu pogodni za simulacije u kojima treba uzeti u obzir promjenljivost toplotnog opterećenja. Za ovakve analize su razvijeni modeli koji koriste faktore odziva ili tzv. *g*-funkcije. Eskilson je koristeći analitički i numerički prilaz razvio model sa *g*-funkcijama za duge vremenske korake. U Eskilsonovom modelu se koristi toplotni otpor bušotine da bi se uspostavila veza između toplotnog opterećenja i temperatura zida bušotine i fluida. Yavuzturk je proširio Eskilsonov model, tako što je uzeo u obzir toplotni kapacitet ispune bušotine i U–cijevi, analizirajući prenos toplote u bušotini metodom konačnih zapremina. Ovaj model je u literaturi poznat kao model *g*-funkcija

sa kratkim vremenskim korakom. Ipak, Yavuztukov model ne uzima u obzir promjenu temperature fluida sa dubinom.

Na drugoj strani su diskretizovani trodimenzionalni numerički modeli, kod kojih je manji broj usvojenih pretpostavki u cilju pojednostavljivanja problema. Neki od ovih modela se zasnivaju na posebnom rješavanju problema prostiranja toplote u tlu koje okružuje bušotinu i problema prostiranja toplote u samoj bušotini. Tako se npr. prenos toplote u tlu koje okružuje bušotinu u modelima rješava 3D diskretizacijom, dok se za prenos toplote unutar same bušotine usvajaju neke dodatne pretpostavke, kako bi se mogao koristiti neki 1D model. Ova dva modela se simultano rješavaju i međusobno su spregnuta preko temperature zida bušotine koja se dobija rješavanjem problema prenosa toplote u samoj bušotini i koja se kasnije koristi kao granični uslov za prenos toplote u tlu koje okružuje bušotinu. Neki od ovih modela su EWS model koji su razvili Wetter i Huber, a kasnije u svom modelu MISOS unaprijedili Oppelt et al., zatim CaRM model koji su razvili De Carli et al. a kasnije unaprijedili Zarela et al., i na kraju model zasnovan na konačnim elementima koji su razvili Al-Khoury i Bonnier, a kasnije unaprijedili Diersch et al. Takođe, razvijeni su i modeli kod kojih nestrukturisana numerička mreža pokriva komplikovanu geometriju bušotinu kao i tlo oko bušotine. Među ovim modelima ističu se dva modela zasnovana na kontrolisanim zapreminama, koje su razvili Rees i He, kao i Li i Zheng.

3D numerički modeli su za razliku od analitičkih veoma zahtijevni u pogledu vremena potrebnog za proračun. Ipak, neke od očiglednih prednosti 3D modela su: vjerodostojno predstavljanje bušotine (uzima se u obzir geometrija, kao i različite toplotne karakteristike materijala); moguća je simulacija promjene temperature fluida, bušotine i tla oko bušotine sa dubinom; moguće je analizirati uticaj strujanja podzemne vode; moguće je definisati kao početne i granične uslove temperaturu površine tla i tla po dubini dovoljno daleko od bušotine (promjena u toku godine, gradijent temperature tla po dubini itd.); moguće je definisati različite toplotne karakteristike tla po dubini, u slojevima i sl.

3. Cilj rada

Pregled stanja u oblasti istraživanja ukazuje na to da većina modela zbog pretpostavki usvojenih u cilju pojednostavljenja ima ograničene mogućnosti simulacija, naročito u slučaju izrazito nestacionarnog prenosa toplote sa kratkim vremenskim korakom. Ovakvi uslovi rada se javljaju u praksi, kada toplotna pumpa radi u on-off režimu i kada su periodi uključenosti toplotne pumpe često kraći od jednog sata. Adekvatan odziv temperature fluida i tla na promjenu toplotnog opterećenja pružaju jedino diskretizovani 3D numerički modeli.

Glavni cilj ovog rada je formulacija matematičkog modela za nestacionarni prenos toplote kod geotermalnog razmijenjivača. Prenos toplote kroz fluid koji cirkuliše kroz cijev će se posmatrati kao 1D problem, dok će se prenos toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo posmatrati kao 3D problem. Jednačina prostiranja toplote za fluid u cijevi biće diskretizovana metodom kontrolisanih zapremina. Jednačina prostiranja toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo biće diskretizovana CVFEM metodom (Control Volume Finite Element Method). Numeričkim rješavanjem jednačina matematičkog modela analiziraće se razni aspekti nestacionarnog prostiranja toplote kod geotermalnih razmijenjivača.

Na osnovu prethodno izloženog mogu da se sumiraju sledeći ciljevi rada:

1. Razvoj trodimenzionalnog modela za simulaciju nestacionarnog prenosa toplote kod geotermalnog razmijenjivača u obliku bušotine sa U–cijevi;
2. Verifikacija numeričkog rješenja poređenjem sa dostupnim analitičkim rješenjima;
3. Validacija numeričkog modela poređenjem rezultata sa mjerenjima na eksperimentalnim instalacijama;
4. Analiza rada geotermalnog razmijenjivača toplote u izrazito nestacionarnim uslovima, neposredno nakon promjene temperature fluida na ulazu i nakon 48 h rada, kada temperature u domenu teže stacionarnim vrijednostima (uticaj brzine strujanja fluida na profil temperature fluida duž cijevi, profil fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze po dubini bušotine);

5. Analiza uticaja raznih parametara na razmjenu toplote:

- Brzina strujanja fluida za razmjenu toplote;
- Temperatura fluida za razmjenu toplote na ulazu u U–cijev;
- Toplotne karakteristike materijala U–cijevi;
- Toplotne karakteristike ispune bušotine;
- Toplotne karakteristike tla;
- Rastojanje između dva kraka U–cijevi;
- Strujanje podzemne vode.

4. Matematički model i numeričko rješenje

4.1. Jednačine matematičkog modela

Matematički model prostiranja toplote kod geotermalnog razmijenjivača toplote sa U–cijevi čine dvije diferencijalne jednačine koje treba simultano rješavati. Prva jednačina je diferencijalna jednačina prenosa toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi. Druga jednačina je diferencijalna jednačina prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i porozno tlo.

4.1.1. Jednačina prenosa toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi

Jednačina održanja energije za fluid koji cirkuliše u U–cijevi je:

$$\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f c_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) \quad (4.1)$$

gdje je $d_{p,i}$ unutrašnji prečnik U–cijevi, ρ_f , c_f , k_f , \mathbf{v}_f i T_f su redom gustina, specifična toplota, koeficijent toplotne provodljivosti, brzina strujanja i temperatura fluida, T_{wall} je temperatura unutrašnje površine cijevi i h je koeficijent prelaza toplote.

4.1.2. Jednačina prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo

Jednačina održanja energije za zid cijevi, ispunu bušotine i tlo je:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w c_w \mathbf{v} T) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4.2)$$

gdje su ρ , c , k i T redom gustina, specifična toplota, koeficijent toplotne provodljivosti i temperatura cijevi, ispunu bušotine ili tla, dok su ρ_w , c_w i \mathbf{v} redom gustina, specifična toplota i brzina strujanja podzemne vode.

Za porozno tlo zasićeno podzemnom vodom, koje u stvari predstavlja mješavinu čvrste faze (*solid*) i tečne faze (*liquid*), toplotni kapacitet i koeficijent toplotne provodljivosti se u prvoj aproksimaciji mogu izračunati koristeći poroznost ε :

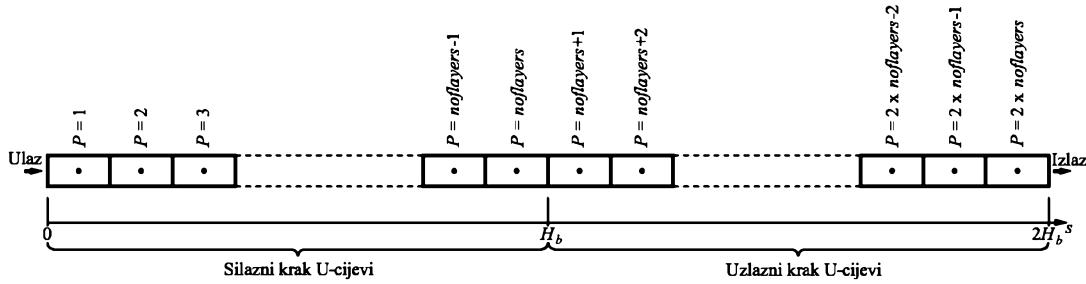
$$\rho c = \varepsilon (\rho c)_{liquid} + (1 - \varepsilon) (\rho c)_{solid} \quad (4.3)$$

$$k = \varepsilon k_{liquid} + (1 - \varepsilon) k_{solid} \quad (4.4)$$

4.2. Diskretizacija jednačina matematičkog modela

4.2.1. Diskretizacija jednačine prenosa toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi

Jednačina održanja energije za fluid koji cirkuliše u U–cijevi je diskretizovana metodom kontrolisanih zapremina. Prenos toplote kroz fluid se posmatra kao jednodimenzionalan. Cijev je po dužini podijeljena na kontrolisane zapremine oblika cilindra, prečnika $d_{p,i}$ i visine Δs , gdje je Δs prostorni korak integracije po dubini geotermalnog razmijenjiča toplote, koji je podijeljen na *noflayers* broj slojeva (slika 4.1). Kako U–cijev ima dva kraka, ukupan broj kontrolisanih zapremina je $2 \times \text{noflayers}$. s je koordinata u pravcu osa cijevi, usmjerena nizvodno.



SLIKA 4.1 Diskretizacija domena za fluid u U–cijevi

Diskretizovana jednačina dobija se integracijom po vremenu i po zapremini posmatrane kontrolisane zapremine:

$$\begin{aligned} \rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta V} \frac{\partial T_f}{\partial t} dV dt + \rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) dV dt = \\ = \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) dV dt + \iint_{\Delta t \Delta V} \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) dV dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nestacionarni član se diskretizuje kao:

$$\rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta V} \frac{\partial T_f}{\partial t} dV dt = \rho_f c_f (T_{fp} - T_{fp}^0) \Delta V \quad (4.6)$$

gdje je T_{fp} temperatura fluida u posmatranom trenutku vremena $t + \Delta t$, T_{fp}^0 temperatura fluida u prethodnom trenutku vremena t , Δt je vremenski korak integracije

i ΔV zapremina posmatrane kontrolisane zapremine, $\Delta V = \frac{d_{p,i}^2 \pi}{4} \Delta s$.

Konvektivni član se diskretizuje kao:

$$\begin{aligned} \rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) dV dt &= \rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta A} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) T_f dA dt = \\ &= \rho_f c_f \int_{\Delta t} \left[(v_f A_p T_f)_e - (v_f A_p T_f)_w \right] dt = \\ &= \dot{m}_f c_f \left(\int_{\Delta t} T_{fe} dt - \int_{\Delta t} T_{fw} dt \right) \Delta t = \\ &= \dot{m}_f c_f \left[f T_{fe} + (1-f) T_{fe}^0 - f T_{fw} - (1-f) T_{fw}^0 \right] \Delta t \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdje su v_f i \dot{m}_f brzina strujanja i maseni protok fluida, A_p je površina poprečnog presjeka cijevi, indeksi w i e označavaju vrijednosti na zapadnoj (uzvodnoj) i istočnoj (nizvodnoj) stranici kontrolisane zapremine i indeks 0 označava vrijednost iz prethodnog vremenskog koraka.

Faktor f uzima u obzir shemu integracije po vremenu. Za $f = 1$ dobija se implicitna shema kod koje se diskretizovani konvektivni član svodi na:

$$\rho_f c_f \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) dV dt = \dot{m}_f c_f [T_{fe} - T_{fw}] \Delta t \quad (4.8)$$

U izrazu (4.8) figurišu temperature fluida na ulaznoj i izlaznoj granici posmatrane kontrolisane zapremine. Potrebno je vrijednosti ovih temperatura, T_{fw} i T_{fe} , izraziti preko vrijednosti temperatura fluida u posmatranoj kontrolisanoj zapremini i u susjednim kontrolisanim zapreminama. U ovom radu je korišćena tzv. QUICK shema (Quadratic Upwind Differencing Scheme) (Leonard, 1979), kod koje se vrijednost temperature na posmatranoj granici kontrolisane zapremine dobija kvadratnom interpolacijom kroz dva čvora (centra CV) sa obje strane posmatrane granice i kroz još jedan čvor uzvodno. U ovom 1D problemu, fluid za prenos toplote struji kroz cijev

uvijek u istom smjeru, pa se vrijednost T_{fw} dobija interpolacijom kroz WW , W i P , a vrijednost T_{fe} interpolacijom kroz W , P i E . Može da se pokaže da je rezultat kvadratne interpolacije na uniformnoj mreži:

$$T_{fw} = \frac{6}{8}T_{fW} + \frac{3}{8}T_{fP} - \frac{1}{8}T_{fWW} \quad (4.9)$$

$$T_{fe} = \frac{6}{8}T_{fP} + \frac{3}{8}T_{fE} - \frac{1}{8}T_{fW} \quad (4.10)$$

Sa ovakvim izrazima za T_{fw} i T_{fe} dobili bi se u konačnoj diskretizovanoj jednačini negativni koeficijenti a_{WW} i a_E što bi predstavljalo problem kod stabilnosti numeričkog rješavanja. U cilju prevazilaženja ovog problema Hayase et al. (1992) su predložili modifikovanu QUICK shemu prema kojoj se temperature fluida na zapadnoj i istočnoj granici posmatrane kontrolisane zapremine mogu zapisati kao:

$$T_{fw} = T_{fW} + \frac{1}{8}(3T_{fP} - 2T_{fW} - T_{fWW}) \quad (4.11)$$

$$T_{fe} = T_{fP} + \frac{1}{8}(3T_{fE} - 2T_{fP} - T_{fW}) \quad (4.12)$$

Za prvu, drugu i poslednju kontrolisanu zapreminu, zbog blizine granice, koeficijenti se donekle razlikuju od koeficijenata za ostale kontrolisane zapremine. Za prvu kontrolisanu zapreminu ($P = 1$), temperatura na zapadnoj granici je ujedno i granični uslov – temperatura fluida na ulazu u cijev:

$$T_{fw} = T_{fin} \quad (4.13)$$

Da bi se prema (4.12) izračunala vrijednost temperature T_{fe} na istočnoj granici prve kontrolisane zapremine, zbog blizine granice domena nedostaje čvor W . Da bi se prevazišao ovaj problem, Leonard (1979) je predložio linearnu ekstrapolaciju za računanje temperature u fiktivnom čvoru na rastojanju $\Delta s / 2$ sa zapadne (uzvodne) strane granice domena. Lako se pokazuje da se kao rezultat linearne ekstrapolacije dobija sledeći izraz za temperaturu u fiktivnom čvoru, koja ujedno predstavlja vrijednost T_{fW} u izrazu (4.11):

$$T_{f0} = 2T_{fin} - T_{fP} \quad (4.14)$$

Na sličan način se linearnom interpolacijom dobija vrijednost T_{fWW} u izrazu (4.11) za drugu kontrolisanu zapreminu:

$$T_{f0} = 2T_{fin} - T_{fW} \quad (4.15)$$

Za poslednju kontrolisanu zapreminu, možemo da uzmemo da je vrijednost temperature na istočnoj granici T_{fe} (izlaz iz U-cijevi) jednaka vrijednosti temperature fluida u centru kontrolisane zapremine T_{fP} :

$$T_{fe} = T_{fout} = T_{fP} \quad (4.16)$$

Difuzioni član se diskretizuje kao:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) dV dt &= \iint_{\Delta t \Delta A} k_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n} dA dt = \\ &= \int_{\Delta t} \left[\left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_e - \left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_w \right] dt = \\ &= \left\{ f \left[\left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_e - \left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_w \right] + (1-f) \left[\left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_e - \left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_w \right]^0 \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (4.17)$$

Kod implicitne sheme, za $f = 1$, diskretizovani difuzioni član se član se svodi na:

$$\iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) dV dt = \left[\left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_e - \left(k_f A_p \frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_w \right] \Delta t \quad (4.18)$$

gdje se gradijenti temperature fluida na zapadnoj i istočnoj granici posmatrane kontrolisane zapremine računaju prema:

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_w = \frac{T_{fP} - T_{fW}}{(\Delta s)_w} \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial s} \right)_e = \frac{T_{fE} - T_{fP}}{(\Delta s)_e} \quad (4.20)$$

Gradijent na zapadnoj granici prve kontrolisane zapremine (ulaz u cijev) i na istočnoj granici poslednje kontrolisane zapremine (izlaz iz cijevi) mogu da se izračunaju koristeći kvadratnu interpolaciju. Za prvu kontrolisanu zapreminu, rezultat interpolacije kroz zapadnu granicu, čvor P i susjedni čvor E je:

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial s}\right)_w = \frac{1}{3\Delta s}(9T_P - 8T_{fin} - T_E) \quad (4.21)$$

Za poslednju kontrolisanu zapreminu, rezultat interpolacije kroz istočnu granicu, čvor P i susjedni čvor W je:

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial s}\right)_e = \frac{1}{3\Delta s}(8T_{fout} - 9T_P + T_W) \quad (4.22)$$

Izvorni član se diskretizuje kao:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta t \Delta V} \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) dV dt &= \int_{\Delta t} \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) \Delta V dt = \\ &= \frac{4h}{d_{p,i}} \left[f(T_{wall} - T_f) + (1-f)(T_{wall} - T_f)^0 \right] \Delta V \Delta t \end{aligned} \quad (4.23)$$

Kod implicitne sheme, za $f = 1$, diskretizovani izvorni član se svodi na:

$$\iint_{\Delta t \Delta V} \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) dV dt = \frac{4h}{d_{p,i}} (T_{wall} - T_f) \Delta V \Delta t \quad (4.24)$$

Nakon uvrštavanja izraza (4.6), (4.8), (4.18) i (4.24) u jednačinu (4.5) dobija se konačna diskretizovana energijska jednačina za fluid u U-cijevi:

$$\begin{aligned} a_P T_{fP} &= a_W T_{fW} + a_E T_{fE} + a_P^0 T_{fP}^0 + b \\ \text{za } P &= 1 \\ a_W &= 0 \\ a_E &= \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e + \frac{1}{3} \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w \\ a_P^0 &= \frac{\rho_f c_f \Delta V}{\Delta t} \\ b &= -\dot{m}_f c_f \left[\frac{1}{8} (3T_{fE} - T_{fP} - 2T_{fin}) - T_{fin} \right] + \frac{8}{3} \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w T_{fin} + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V T_{wall} \\ a_P &= \dot{m}_f c_f + a_P^0 + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e + 3 \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V \end{aligned} \quad (4.25)$$

za $P = 2$

$$\begin{aligned}
a_w &= m_f c_f + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w \\
a_E &= \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e \\
a_p^0 &= \frac{\rho_f c_f \Delta V}{\Delta t} \\
b &= -\dot{m}_f c_f \left[\frac{1}{8} (3T_{fE} - 2T_{fP} - T_{fW}) - \frac{1}{8} (3T_{fP} - T_{fW} - 2T_{fin}) \right] + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V T_{wall} \\
a_p &= \dot{m}_f c_f + a_p^0 + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V
\end{aligned}$$

za $P = 3, \dots, 2 \times \text{noflayers} - 1$

$$\begin{aligned}
a_w &= m_f c_f + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w \\
a_E &= \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e \\
a_p^0 &= \frac{\rho_f c_f \Delta V}{\Delta t} \\
b &= -\dot{m}_f c_f \left[\frac{1}{8} (3T_{fE} - 2T_{fP} - T_{fW}) - \frac{1}{8} (3T_{fP} - 2T_{fW} - T_{fWW}) \right] + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V T_{wall} \\
a_p &= \dot{m}_f c_f + a_p^0 + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_e + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V
\end{aligned} \tag{4.25}$$

za $P = 2 \times \text{noflayers}$

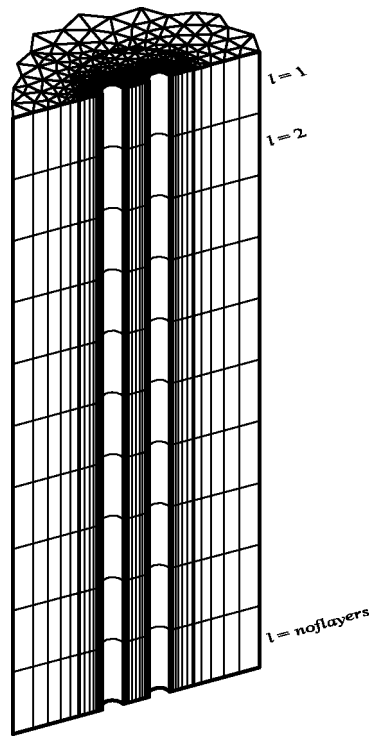
$$\begin{aligned}
a_w &= m_f c_f + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w \\
a_E &= 0 \\
a_p^0 &= \frac{\rho_f c_f \Delta V}{\Delta t} \\
b &= -\dot{m}_f c_f \left[-\frac{1}{8} (3T_{fP} - 2T_{fW} - T_{fWW}) - T_{fWW} \right] + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V T_{wall} \\
a_p &= \dot{m}_f c_f + a_p^0 + \left(\frac{k_f A_p}{\Delta s} \right)_w + \frac{4h}{d_{p,i}} \Delta V
\end{aligned}$$

4.2.2. Diskretizacija jednačine prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo

Jednačina održanja energije za zid cijevi, ispunu bušotine i tlo je diskretizovana CVFEM metodom (Control Volume Finite Element Method). Slično kao kod metode kontrolisanih zapremina, diskretne algebarske jednačine se dobijaju na osnovu bilansa flukseva za kontrolisane zapremine. Pri tome se fluksevi kroz stranice kontrolisanih zapremina aproksimiraju interpolacijama koje su svojstvene za metod konačnih elemenata. Na ovaj način CVFEM metod može da se posmatra kao hibridni metod koji ima poželjne karakteristike i metode kontrolisanih zapremina i metode konačnih elemenata: jednostavna fizička interpretacija procedure diskretizacije, rješenje koje je konzervativno čak i na grubim mrežama i fleksibilnost za analizu problema sa složenim geometrijama. Voller (2009) je dao detaljan opis postupka diskretizacije za slučaj dvodimenzionalnih problema advekcije-difuzije kod kojih se koriste mreže sa trougaonim elementima.

Da bi se proces numeričkog rješavanja nekog problema automatizovao kroz korišćenje kompjuterskog programa, neophodno je da se napravi odgovarajuća struktura podataka koja može da identifikuje komponente mreže i da ih poveže sa posmatranim čvorom kontrolisane zapremine.

Polazna tačka za formiranje jedne ovakve strukture podataka je da se domen koji se posmatra pokrije mrežom. Poprečni presjek geotermalnog razmijenjivača toplote (xy ravan) je prekriven mrežom trougaonih elemenata koja je generisana koristeći MATLAB rutinu za Delaunay triangularizaciju. Čvorovi ove osnovne mreže su označeni rednim brojevima, $i = 1, 2, \dots, n$, gdje je n broj čvorova. Zatim je na osnovu ovakve mreže, jednostavno generisana mreža sa elementima oblika trostrane prizme, koja prekriva cijelu zapreminu domena. Slojevi ove mreže su po dubini (z pravac) označeni rednim brojevima $l = 1, 2, \dots, n_{layers}$. (slika 4.2)

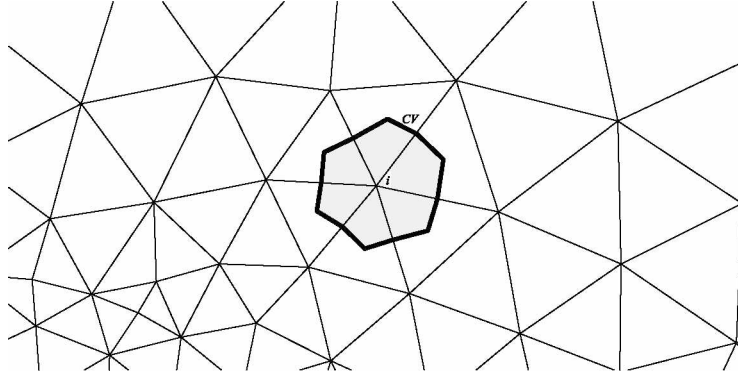


SLIKA 4.2 Diskretizacija domena za zid cijevi, ispunu bušotine i tlo

Osnovna komponenta strukture podataka je tzv. region podrške posmatranog čvora mreže i . Za svaki čvor i u posmatranom sloju mreže, region podrške je identifikovan pobrojavanjem svih susjednih čvorova koji dijele zajedničku stranicu elementa sa čvorom i , i to krećući se u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Broj susjednih čvorova oko posmatranog čvora i se čuva u jednodimenzionalnom nizu n_i^s , gdje je $i = 1, 2, \dots, n$. Redni brojevi susjednih čvorova oko posmatranog čvora i se čuvaju u dvodimenzionalnom nizu $S_{i,j}$, gdje je $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n_i^s + 1$. Dodatni član S_{i,n_i^s+1} se koristi da bi se napravila razlika između čvorova u unutrašnjosti i čvorova na granici domena. Za čvorove iz unutrašnjosti domena je $S_{i,n_i^s+1} = S_{i,1}$, dok je za čvorove na granici domena $S_{i,n_i^s+1} = 0$.

Kontrolisana zapremina oko čvora i se kreira na osnovnoj mreži trougaonih elemenata spajanjem težišta svakog elementa oko posmatranog čvora sa srediinama odgovarajućih stranica koje prolaze kroz čvor i . Na ovaj način se dobijaju mnogouglovi čiji je broj stranica dva puta veći od broja trougaonih elemenata oko posmatranog čvora i (slika 4.3). Konačna kontrolisana zapremina ima oblik prave prizme čija je osnova

ovakav mnogougao, a visina Δz . Kontrolisana zapremina uključuje po jednu trećinu zapremine svakog elementa oblika trostrane prizme oko čvora i . Ovako konstruisane kontrolisane zapremine pokrivaju cijeli domen bez preklapanja.



SLIKA 4.3 Konstrukcija kontrolisane zapremine na osnovnoj trougaonoj mreži

Dakle, osnova za diskretizaciju domena je element oblika trostrane prizme. Čvorovi numeričke mreže se nalaze po sredini bočnih ivica prizmi i u njima se računaju i čuvaju vrijednosti zavisno promjenljive veličine, npr. temperature. Kada se numerička mreža presječe horizontalnom ravni po sredini visine prizmatičnih elemenata, dobija se trougaona mreža kao sa slike 4.3. Vrijednost temperature u tački sa koordinatama (x, y) unutar trougaonog elementa sa slike 4.4 čija su tjemena označena sa 1, 2 i 3, može da se izračuna linearnom interpolacijom:

$$T \approx ax + by + c \quad (4.26)$$

gdje konstantni koeficijenti a , b i c zadovoljavaju jednačine čvora:

$$T_i = ax_i + by_i + c \quad (4.27)$$

Jednačina (4.26) se uobičajeno zapisuje preko funkcija oblika N_1 , N_2 i N_3 koje se definišu na sledeći način:

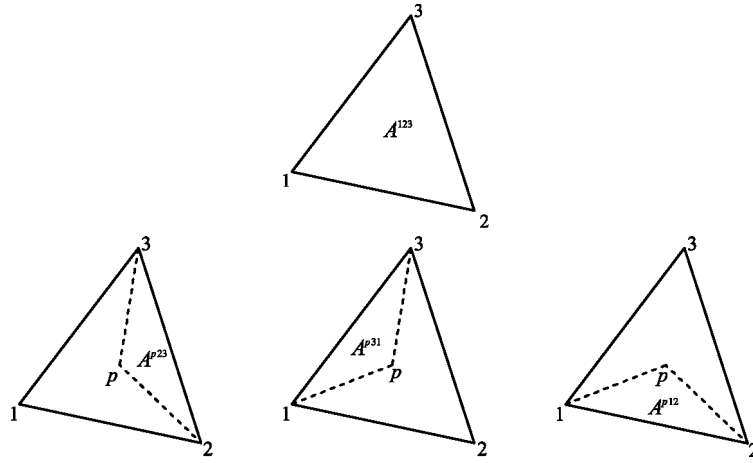
$$N_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{u čvoru } i \\ 0, & \text{u svim tačkama na stranici naspram čvora } i \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1$$

Sa ovako definisanim funkcijama oblika, kontinualno polje nepoznate veličine se unutar datog trougaonog elementa može predstaviti kao linearna kombinacija vrijednosti u čvorovima $i = 1, 2, 3$:

$$T(x, y) \approx \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) T_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.29)$$

Jednostavna geometrijska interpretacija funkcija oblika je data na slici 4.4.



SLIKA 4.4 Geometrijska interpretacija funkcija oblika

Prema slici 4.4 površina trougaonog elementa je:

$$A^{123} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 (y_3 - y_2) + y_1 (x_3 - x_2)] \quad (4.30)$$

a površine podelemenata sa tjemenu u tačkama $(p, 2, 3)$, $(p, 3, 1)$ i $(p, 1, 2)$ su:

$$\begin{aligned} A^{p23} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_p (y_3 - y_2) + y_p (x_3 - x_2)] \\ A^{p31} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_p (y_1 - y_3) + y_p (x_1 - x_3)] \\ A^{p12} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_p (y_2 - y_1) + y_p (x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sada se funkcije oblika mogu definisati kao:

$$N_1 = \frac{A^{p23}}{A^{123}}, N_2 = \frac{A^{p31}}{A^{123}}, N_3 = \frac{A^{p12}}{A^{123}} \quad (4.32)$$

Kada se tačka p poklapa sa čvorom i ($i = 1, 2, 3$) tada je $N_i = 1$, a kada se tačka p nalazi na stranici trougla naspram čvora i tada je površina odgovarajućeg podelementa jednaka nuli pa je zbog toga i $N_i = 0$. Takođe, za bilo koju tačku p unutar trougla važi:

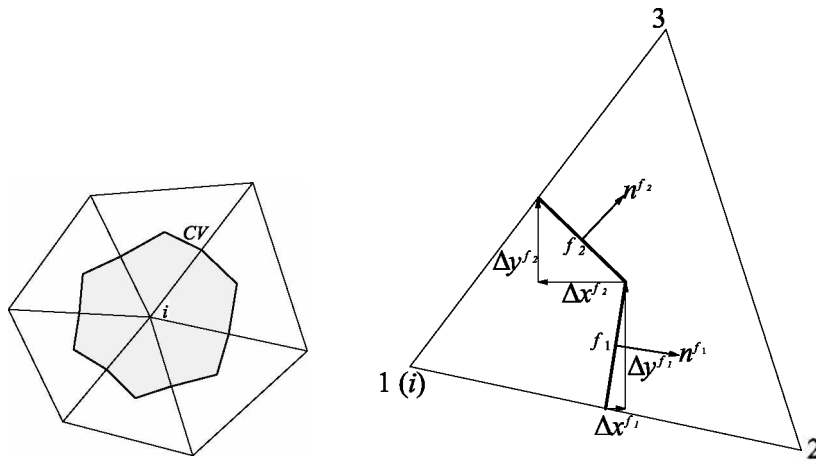
$$A^{p23} + A^{p31} + A^{p12} = A^{123} \quad (4.33)$$

tako da je zbir funkcija oblika N_1 , N_2 i N_3 za svaki element u bilo kojoj tački (x_p, y_p) jednak jedinici. Dakle, na ovaj način definisane funkcije oblika zadovoljavaju uslove date sa (4.28).

Za diskretizaciju difuzionog člana u diferencijalnoj jednačini (4.2) neophodni su izvodi funkcija oblika, koji su unutar datog trougaonog elementa konstantni:

$$\begin{aligned} N_{1x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2A^{123}}, N_{1y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A^{123}} \\ N_{2x} &= \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2A^{123}}, N_{2y} = \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A^{123}} \\ N_{3x} &= \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2A^{123}}, N_{3y} = \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A^{123}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Takođe, prilikom diskretizacije difuzionog i konvektivnog člana, neophodni su vektori normale na stranice kontrolisane zapremine (slika 4.5).



SLIKA 4.5 Kontrolisana zapremina – integracija difuzionih i konvektivnih flukseva

Prema slici 4.5 vektori normala na površine f_1 i f_2 su:

$$\begin{aligned} n^{f_1} &= (n_x^{f_1}, n_y^{f_1}) = \left(\frac{\Delta y_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}}, -\frac{\Delta x_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}} \right) \\ n^{f_2} &= (n_x^{f_2}, n_y^{f_2}) = \left(\frac{\Delta y_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}}, -\frac{\Delta x_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \Delta x_{f_1} &= \frac{x_3}{3} - \frac{x_2}{6} - \frac{x_1}{6}, \quad \Delta y_{f_1} = \frac{y_3}{3} - \frac{y_2}{6} - \frac{y_1}{6}, \quad A_{f_1} = \sqrt{\Delta x_{f_1}^2 + \Delta y_{f_1}^2} \Delta z \\ \Delta x_{f_2} &= -\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} + \frac{x_1}{6}, \quad \Delta y_{f_2} = -\frac{y_2}{3} + \frac{y_3}{6} + \frac{y_1}{6}, \quad A_{f_2} = \sqrt{\Delta x_{f_2}^2 + \Delta y_{f_2}^2} \Delta z \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sa usvojenom strukturom podataka, procedura diskretizacije jednačine (4.2) može izvesti za svaki čvor numeričke mreže pojedinačno, u petlji $j = 1, \dots, n_i^{tri}$ po trougaonim elementima oko posmatranog čvora. Broj trougaonih elemenata n_i^{tri} je u slučaju čvora iz unutrašnjosti domena jednak broju susjednih čvorova, tj. $n_i^{tri} = n_i^s$. Za slučaj čvora na granici domena, broj trougaonih elemenata n_i^{tri} je za jedan manji od broja susjednih čvorova, tj. $n_i^{tri} = n_i^s - 1$. Krajnji cilj CVFEM diskretizacije je da se diferencijalna jednačina (4.2) transformiše u sistem algebarskih jednačina oblika:

$$a_{l,i} T_{l,i} = \sum_{j=1}^{n_i} a_{l,i,j} T_{l,S_{i,j}} + a_{l-1,i}^k T_{l-1,i} + a_{l+1,i}^k T_{l+1,i} + a_{l,i}^0 T_{l,i}^0 + b_{l,i} \quad (4.37)$$

gdje je n_i broj susjednih čvorova čvora i u istom sloju l , $a_{l,i}$ su centralni koeficijenti, $a_{l,i}^0$ su koeficijenti nestacionarnih članova, $a_{l,i,j}$ su koeficijenti j -tog susjeda čvora i , koeficijenti $a_{l-1,i}$ i $a_{l+1,i}$ su koeficijenti susjednih čvorova u slojevima iznad i ispod sloja u kojem se nalazi posmatrani čvor i $b_{l,i}$ uzimaju u obzir uticaj izvora i graničnih uslova. Da bi se proces diskretizacije automatizovao, tjemena j -tog trougaonog elementa oko čvora i se označavaju brojevima 1, 2 i 3, pri čemu se sa 1 označava posmatrani čvor i , sa 2 čvor $S_{i,j}$ i sa 3 čvor $S_{i,j+1}$. Koordinate čvorova 1, 2 i 3 su:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i, \quad x_2 = x_{S_{i,j}}, \quad x_3 = x_{S_{i,j+1}} \\ y_1 &= y_i, \quad y_2 = y_{S_{i,j}}, \quad y_3 = y_{S_{i,j+1}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nakon prebacivanja konvektivnog člana sa lijeve na desnu stranu, diferencijalna

jednačina za prenos toplote kroz cijev, ispunu bušotine i tlo, dobija oblik:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) \quad (4.39)$$

Da bi se izvršila diskretizacija diferencijalne jednačine (4.39) potrebno je izvršiti njenu integraciju po vremenu i po zapremini kontrolisane zapremine oko posmatranog proizvoljnog čvora (l, i):

$$\iint_{\Delta t \Delta V} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV dt \quad (4.40)$$

Nestacionarni član se diskretizuje kao:

$$\iint_{\Delta t \Delta V} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_{\Delta V} \rho c \frac{T_{l,i} - T_{l,i}^0}{\Delta t} dV \Delta t \approx \sum_{j=1}^{n_i^{tri}} \rho c (T_{l,i} - T_{l,i}^0) \Delta V_{i,j} \quad (4.41)$$

gdje je Δt vremenski korak integracije, $T_{l,i}$ temperatura u posmatranom trenutku vremena $t + \Delta t$, dok je $T_{l,i}^0$ temperatura u prethodnom trenutku vremena t . $\Delta V_{i,j}$ je jedan od n_i^{tri} dijelova posmatrane kontrolisane zapremine. $\Delta V_{i,j}$ može da se izračuna kao zapremina prizme sa osnovom površine $A_{i,j}$ i visinom koja je jednaka koraku numeričke mreže Δz po dubini geotermalnog razmijenjivača. Površina $A_{i,j}$ jednaka je trećini površine trougaonog elementa.

Difuzioni i konvektivni član se diskretizuju kao:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV dt = \\ = \left\{ f \left[\int_{\Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV \right] + (1-f) \left[\int_{\Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV \right]^0 \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (4.42)$$

gdje se pomoću težinskog faktora f , $0 \leq f \leq 1$, aproksimira neto fluks kroz granice kontrolisane zapremine u intervalu $(t, t + \Delta t)$ preko vrijednosti flukseva na početku i na kraju vremenskog koraka. Za $f = 1$ se dobija implicitna shema koja je bezuslovno stabilna, ali koja zahtijeva rješavanje sistema algebarskih jednačina:

$$\iint_{\Delta t \Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV dt = \int_{\Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV \Delta t \quad (4.43)$$

Korišćenjem Gaussove teoreme, integral od divergencije po zapremini kontrolisane zapremine se prevodi u integral po njenoj površini:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) dV \Delta t &= \int_A (k \nabla T - \rho_w c_w \mathbf{v} T) \cdot \mathbf{n} dA \Delta t = \\ &= \left[\int_A k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA - \int_A \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA \right] \Delta t = \\ &= \sum_{j=1}^{n_i^{pri}} \left[\int_{A^j} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA - \int_{A^j} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA \right] \Delta t \end{aligned} \quad (4.44)$$

gdje je A^j površina omotača dijela kontrolisane zapremine koja se nalazi u j -tom elementu oko posmatranog čvora.

Difuzioni fluks (prvi član u zagradi izraza (4.44)) može dalje da se računa kao:

$$\begin{aligned} \int_{A^j} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA &= \int_{f_1} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \int_{f_2} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \int_{f_3} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \int_{f_4} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA \approx \\ &\approx k \nabla T \cdot \mathbf{n} A|_{f_1} + k \nabla T \cdot \mathbf{n} A|_{f_2} + k \nabla T \cdot \mathbf{n} A|_{f_3} + k \nabla T \cdot \mathbf{n} A|_{f_4} \end{aligned} \quad (4.45)$$

gdje f_1, f_2, f_3 i f_4 predstavljaju pojedine dijelove površine A^j .

Gradijent temperaturskog polja u xy ravni može da se izrazi preko izvoda funkcije oblika i vrijednosti temperatura u čvorovima mreže:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) = (N_{1x} T_1 + N_{2x} T_2 + N_{3x} T_3, N_{1y} T_1 + N_{2y} T_2 + N_{3y} T_3) \quad (4.46)$$

Sada se dobijaju fluksevi kroz pojedine površine f_1, f_2, f_3 i f_4 :

$$\begin{aligned} k \nabla T \cdot \mathbf{n} A|_{f_1} &= k_{f_1} \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\Delta y_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}}, -\frac{\Delta x_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}} \right) A_{f_1} \\ &= k_{f_1} \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y_{f_1} \Delta z - k_{f_1} \frac{\partial T}{\partial y} \Delta x_{f_1} \Delta z \\ &= k_{f_1} (N_{1x} T_1 + N_{2x} T_2 + N_{3x} T_3) \Delta y_{f_1} \Delta z - k_{f_1} (N_{1y} T_1 + N_{2y} T_2 + N_{3y} T_3) \Delta x_{f_1} \Delta z \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
k \nabla T \cdot \mathbf{n} A \Big|_{f_2} &= k_{f_2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\Delta y_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}}, -\frac{\Delta x_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}} \right) A_{f_2} \\
&= k_{f_2} \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y_{f_2} \Delta z - k_{f_2} \frac{\partial T}{\partial y} \Delta x_{f_2} \Delta z =
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
&= k_{f_2} (N_{1x} T_1 + N_{2x} T_2 + N_{3x} T_3) \Delta y_{f_2} \Delta z - k_{f_2} (N_{1y} T_1 + N_{2y} T_2 + N_{3y} T_3) \Delta x_{f_2} \Delta z \\
k \nabla T \cdot \mathbf{n} A \Big|_{f_3} &= k_{f_3} \frac{\partial T}{\partial z} A_{f_3} = -k_t \frac{T_{l,i} - T_{l-1,i}}{(\delta z)_t} A_{i,j}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} A \Big|_{f_4} = k_{f_4} \frac{\partial T}{\partial z} A_{f_4} = k_b \frac{T_{l+1,i} - T_{l,i}}{(\delta z)_b} A_{i,j} \tag{4.50}$$

$(\delta z)_t$ i $(\delta z)_b$ u izrazima (4.49) i (4.50) predstavljaju rastojanja od centra posmatrane kontrolisane zapremine do centara susjednih u sloju iznad i ispod, odnosno do granice domena u slučaju da se radi o prvom sloju (površina tla), odnosno poslednjem (dno bušotine).

Uvrštavanjem izraza (4.47) – (4.50) u izraz (4.45), grupisanjem članova uz T_1 , T_2 i T_3 i zamjenom lokalnih indeksa 1, 2 i 3 rednim brojevima čvorova numeričke mreže dobija se:

$$\int_{A^j} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA = -a_{l,1}^k T_{l,i} + a_{l,2}^k T_{l,S_{i,j}} + a_{l,3}^k T_{l,S_{i,j+1}} + a_{l-1,i}^k T_{l-1,i} + a_{l+1,i}^k T_{l+1,i} \tag{4.51}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
a_{l,1}^k &= -k_{f_1} N_{1x} \Delta y_{f_1} \Delta z + k_{f_1} N_{1y} \Delta x_{f_1} \Delta z - k_{f_2} N_{1x} \Delta y_{f_2} \Delta z + k_{f_2} N_{1y} \Delta x_{f_2} \Delta z + a_{l-1,i}^k + a_{l+1,i}^k \\
a_{l,2}^k &= k_{f_1} N_{2x} \Delta y_{f_1} \Delta z - k_{f_1} N_{2y} \Delta x_{f_1} \Delta z + k_{f_2} N_{2x} \Delta y_{f_2} \Delta z - k_{f_2} N_{2y} \Delta x_{f_2} \Delta z \\
a_{l,3}^k &= k_{f_1} N_{3x} \Delta y_{f_1} \Delta z - k_{f_1} N_{3y} \Delta x_{f_1} \Delta z + k_{f_2} N_{3x} \Delta y_{f_2} \Delta z - k_{f_2} N_{3y} \Delta x_{f_2} \Delta z \\
a_{l-1,i,j}^k &= \frac{k_t A_{i,j}}{(\delta z)_t} \\
a_{l+1,i,j}^k &= \frac{k_b A_{i,j}}{(\delta z)_b}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Konvektivni fluks (drugi član u zagradi izraza (4.44)) se diskretizuje kao:

$$\begin{aligned}
\int_{A^j} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA &= \int_{f_1} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA + \int_{f_2} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA \approx \\
&\approx \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T A \Big|_{f_1} + \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T A \Big|_{f_2} = \\
&= \rho_w c_w q_{f_1} T_{f_1} + \rho_w c_w q_{f_2} T_{f_2}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

gdje su q_{f_1} i q_{f_2} zapreminski protoci kroz površine f_1 i f_2 kontrolisane zapremine:

$$\begin{aligned}
q_{f_1} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A \Big|_{f_1} = (u^{f_1}, v^{f_1}) \cdot (n_x^{f_1}, n_y^{f_1}) A_{f_1} = \\
&= (u^{f_1}, v^{f_1}) \cdot \left(\frac{\Delta y_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}}, -\frac{\Delta x_{f_1} \Delta z}{A_{f_1}} \right) A_{f_1} = u^{f_1} \Delta y_{f_1} \Delta z - v^{f_1} \Delta x_{f_1} \Delta z
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
q_{f_2} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A \Big|_{f_2} = (u^{f_2}, v^{f_2}) \cdot (n_x^{f_2}, n_y^{f_2}) A_{f_2} = \\
&= (u^{f_2}, v^{f_2}) \cdot \left(\frac{\Delta y_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}}, -\frac{\Delta x_{f_2} \Delta z}{A_{f_2}} \right) A_{f_2} = u^{f_2} \Delta y_{f_2} \Delta z - v^{f_2} \Delta x_{f_2} \Delta z
\end{aligned} \tag{4.55}$$

U izrazu (4.53) je potrebno usvojiti neku interpolacionu shemu za temperature na granicama f_1 i f_2 . Npr, prema upwind shemi je:

$$T_{f_1} = \begin{cases} T_1, & \text{ako je } q_{f_1} > 0 \\ T_2, & \text{ako je } q_{f_1} < 0 \end{cases} \tag{4.56}$$

$$T_{f_2} = \begin{cases} T_1, & \text{ako je } q_{f_2} > 0 \\ T_3, & \text{ako je } q_{f_2} < 0 \end{cases} \tag{4.57}$$

Sada zapreminski protoci q_{f_1} i q_{f_2} mogu skraćeno da se zapišu kao:

$$q_{f_1} T_{f_1} = \max[q_{f_1}, 0] T_1 - \max[-q_{f_1}, 0] T_2 \tag{4.58}$$

$$q_{f_2} T_{f_2} = \max[q_{f_2}, 0] T_1 - \max[-q_{f_2}, 0] T_3 \tag{4.59}$$

Uvrštavanjem izraza (4.58) i (4.56) u izraz (4.53), grupisanjem članova uz T_1 , T_2 i T_3 i zamjenom lokalnih indeksa 1, 2 i 3 rednim brojevima čvorova numeričke mreže dobija se:

$$\int_{A^j} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA = a_{l,1}^u T_i - a_{l,2}^u T_{S_{i,j}} - a_{l,3}^u T_{S_{i,j+1}} \tag{4.60}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
a_{l,1}^u &= \rho_w c_w \max[q_{f_1}, 0] + \rho_w c_w \max[q_{f_2}, 0] \\
a_{l,2}^u &= \rho_w c_w \max[-q_{f_1}, 0] \\
a_{l,3}^u &= \rho_w c_w \max[-q_{f_2}, 0]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Uzimajući u obzir i difuzioni (4.51) i advektivni fluks (4.60) kroz stranice kontrolisane zapremine unutar j -tog elementa oko čvora i dobija se:

$$\int_{A^j} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA - \int_{A^j} \rho_w c_w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T dA =$$

$$= -a_{l,1} T_{l,i} + a_{l,2} T_{l,S_{l,j}} + a_{l,3} T_{l,S_{l,j+1}} + a_{l-1,i,j}^k T_{l-1,i} + a_{l+1,i,j}^k T_{l+1,i}$$
(4.62)

gdje su:

$$a_{l,1} = a_{l,1}^k + a_{l,1}^u$$

$$a_{l,2} = a_{l,2}^k + a_{l,2}^u$$

$$a_{l,3} = a_{l,3}^k + a_{l,3}^u$$

$$a_{l-1,i,j}^k = \frac{k_t A_{i,j}}{(\delta z)_t}$$

$$a_{l+1,i,j}^k = \frac{k_b A_{i,j}}{(\delta z)_b}$$
(4.63)

Konačna diskretizovana jednačina se dobija uvrštavanjem (4.62) prvo u (4.44), a onda sa (4.41) u (4.40). Koeficijenti se ažuriraju u petlji $j=1, \dots, n_i^{tri}$ po svim trougaonim elementima oko čvora i tako da se uzima u obzir uticaj svih susjednih čvorova:

$$a_{l,i} T_{l,i} = \sum_{j=1}^{n_i} a_{l,i,j} T_{l,S_{l,j}} + a_{l-1,i}^k T_{l-1,i} + a_{l+1,i}^k T_{l+1,i} + a_{l,i}^0 T_{l,i}^0$$

$$a_{l,i} = a_{l,i} + a_{l,1}^k + a_{l,1}^u + a_{l,i}^0$$

$$a_{l,i,j} = a_{l,i,j} + a_{l,2}^k + a_{l,2}^u$$

$$\begin{cases} a_{l,i,j+1} = a_{l,i,j} + a_{l,3}^k + a_{l,3}^u & \text{ako je } j \neq n_i \\ a_{l,i,1} = a_{l,i,j} + a_{l,3}^k + a_{l,3}^u & \text{ako je } j = n_i \end{cases}$$
(4.64)

$$a_{l-1,i}^k = a_{l-1,i}^k + a_{l-1,i,j}^k, \quad \frac{k_t A_{i,j}}{(\delta z)_t}$$

$$a_{l+1,i}^k = a_{l+1,i}^k + a_{l+1,i,j}^k, \quad a_{l+1,i,j}^k = \frac{k_b A_{i,j}}{(\delta z)_b}$$

$$a_{l,i}^0 = a_{l,i}^0 + a_{l,i,j}^0, \quad a_{l,i,j}^0 = \frac{\rho c \Delta V_{i,j}}{\Delta t}$$

Druga važna komponenta strukture podataka koja do sada nije razmatrana je informacija o granicama domena. Granica domena je podijeljena na n^{seg} segmenata na kojima vladaju različiti granični uslovi. Broj čvorova po graničnom segmentu k domena se čuva u jednodimenzionalnom nizu n_k^b . Redni brojevi čvorova duž svakog segmenta granice domena se čuvaju u dvodimenzionalnom nizu $B_{k,j}$, gdje indeks $k = 1, 2, \dots, n^{seg}$ označava segment, a indeks $j = 1, 2, \dots, n_k^b$ označava čvorove na granici duž tog

segmenta. I u ovom slučaju se redni brojevi čvorova na granicama pobrojavaju krećući se u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

Za definisanje nekih graničnih uslova, neophodno je za svaki čvor na granici domena izračunati pripadajuću površinu:

$$A_{k,j} = \begin{cases} j=1 \\ \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_{k,j}} - x_{B_{k,j+1}})^2 + (y_{B_{k,j}} - y_{B_{k,j+1}})^2} \Delta z \\ 1 < j < n_k^b \\ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x_{B_{k,j}} - x_{B_{k,j+1}})^2 + (y_{B_{k,j}} - y_{B_{k,j+1}})^2} + \sqrt{(x_{B_{k,j}} - x_{B_{k,j-1}})^2 + (y_{B_{k,j}} - y_{B_{k,j-1}})^2} \right] \Delta z \\ j = n_k^b \\ \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_{k,j}} - x_{B_{k,j-1}})^2 + (y_{B_{k,j}} - y_{B_{k,j-1}})^2} \Delta z \end{cases} \quad (4.65)$$

Fluks koji ulazi kroz granicu domena može da se definiše preko koeficijenta prelaza toplote h i temperature okoline T_{amb} :

$$\int_A h (T_{amb} - T) dA \approx -B_{C_{l,i}} T_{l,i} + B_{B_{l,i}} \quad (4.66)$$

gdje su:

$$B_{C_{l,i}} = h A_{k,j} > 0, \quad B_{B_{l,i}} = h T_{amb} A_{k,j}, \quad i = B_{k,j} \quad (4.67)$$

Član $B_{C_{l,i}}$ se dodaje na koeficijent $a_{l,i}$ dok se član $B_{B_{l,i}}$ dodaje na desnu stranu diskretizovane jednačine (4.64).

Konvektivni granični uslov se postiže zadavanjem konačnih vrijednosti koeficijenta prelaza toplote h i temperature okoline T_{amb} .

Izolovana granica se postiže sa $h = 0$ i sa konačnom vrijednosti T_{amb} , tj. sa $B_{C_{l,i}} = 0$ i $B_{B_{l,i}} = 0$.

Fiksirana temperatura na granici domena se postiže sa velikom vrijednosti h (npr. $h = 10^{16}$) i konačnom vrijednosti T_{amb} , tj. sa $B_{C_{l,i}} = 10^{16}$ i $B_{B_{l,i}} = T_{amb} \cdot 10^{16}$.

Fiksirana vrijednost fluksa q_{fix} na granici domena se postiže sa malom vrijednosti h (npr. $h = 10^{-16}$) i sa $T_{amb} = q_{fix} / h$, tj. sa $B_{C_{i,i}} = 0$ i $B_{B_{l,i}} = A_{k,j} q_{fix}$.

Jednačine matematičkog modela (4.1) i (4.2) se rješavaju simultano. Rješavanjem jednačine prenosa toplote za fluid dobijaju se temperature fluida duž U-cijevi. Ove vrijednosti temperatura se koriste kao T_{amb} u konvektivnom graničnom uslovu za unutrašnje površine cijevi kod jednačine prenosa toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i tlo. Na osnovu opisanog numeričkog rješenja napravljen je program u Fortranu pomoću kojeg je moguća simulacija nestacionarnog prenosa toplote kod geotermalnog razmijenjivača.

Takođe je izvedena i detaljna procedura CVFEM diskretizacije jednačine advekcije–difuzije, za slučaj mreže sa tetraedarskim elementima. Ovakva mreža pruža još veću fleksibilnost za analizu prenosa toplote u domenima složenih geometrija. Ipak, geometrija geotermalnog razmijenjivača toplote ne zahtijeva ovakvu mrežu i njeno korišćenje bi bespotrebno povećalo vrijeme proračuna. Procedura diskretizacije sa nekoliko ilustrativnih primjera proračuna je data kao prilog doktorske disertacije.

4.3. Koeficijent prelaza toplote

Koeficijent prelaza toplote sa fluida na unutrašnju površinu cijevi se računa na osnovu Nusseltovog broja:

$$Nu = \frac{hd_{p,i}}{k_f} \quad (4.68)$$

Gnielinski (1995) je dao izraz za računanje Nusseltovog broja za termički i hidrodinamički potpuno razvijeno strujanje u pravim kružnim cijevima:

$$Nu = \begin{cases} Re < 2300 \text{ (laminarno strujanje)} \\ 4,364 \\ 2300 \leq Re < 10^4 \text{ (prelazna oblast)} \\ (1 - \gamma)4,364 + \gamma \frac{(0,0308/8)10^4 Pr}{1 + 12,7\sqrt{0,0308/8}(Pr^{2/3} - 1)} \left[1 + \left(\frac{d_{p,i}}{L_p} \right)^{2/3} \right] \\ Re \geq 10^4 \text{ (turbulentno strujanje)} \\ \frac{(\xi/8)RePr}{1 + 12,7\sqrt{\xi/8}(Pr^{2/3} - 1)} \left[1 + \left(\frac{d_{p,i}}{L_p} \right)^{2/3} \right] \end{cases} \quad (4.69)$$

gdje je L_p dužina cijevi.

Za laminarno strujanje ($Re < 2300$) faktor γ ima vrijednost $\gamma = 0$, za turbulentno strujanje sa $Re \geq 10^4$ $\gamma = 1$, dok je u prelaznoj oblasti ($2320 \leq Re < 10^4$) γ definisan izrazom:

$$\gamma = \frac{Re - 2300}{10^4 - 2300} \quad (4.70)$$

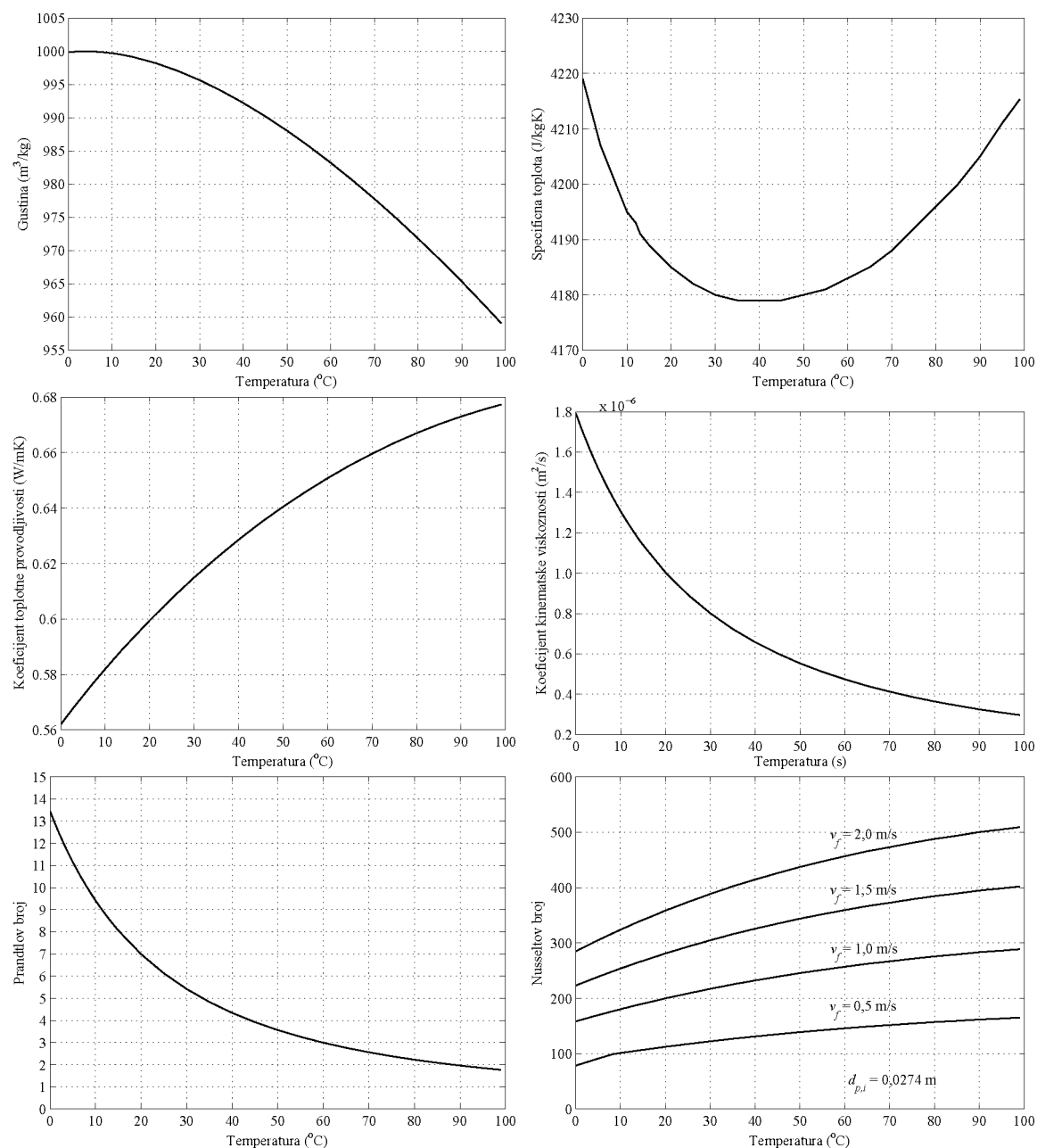
Koeficijent trenja ξ se za turbulentno strujanje u glatkim cijevima može računati prema izrazu Konakova (vidi VDI, 2010):

$$\xi = (1,8 \log_{10} Re - 1,5)^{-2} \quad (4.71)$$

Korelacija (4.69) važi i za slučaj konstantnog toplotnog fluksa i za slučaj konstantne temperature površine cijevi, za $Re \leq 10^6$ i $0,1 \leq Pr \leq 1000$. Reynoldsov i Prandtllov broj

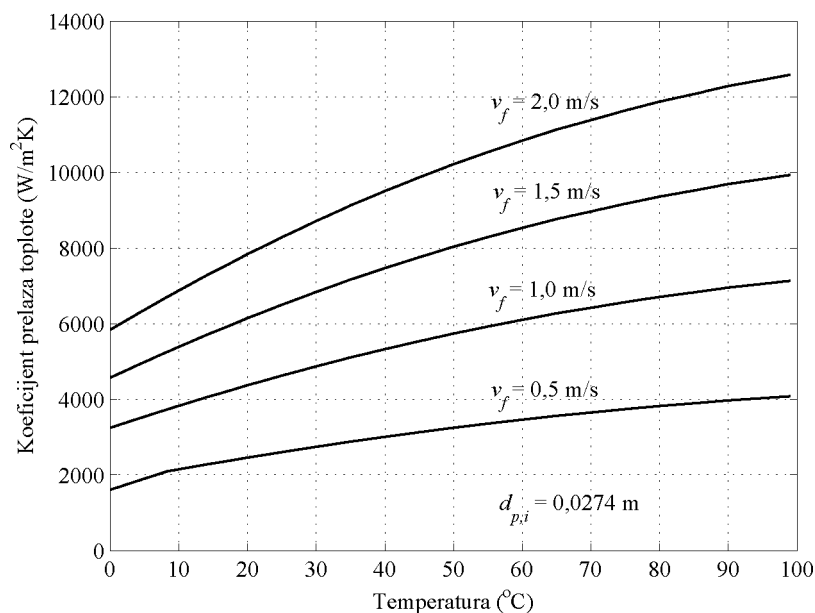
se računaju sa fizičkim karakteristikama fluida za srednju vrijednost temperatura fluida na ulazu i izlazu iz cijevi, tj. za $T_m = (T_{in} + T_{out}) / 2$.

Radi ilustracije, na slici 4.6 su date toplotne karakteristike vode, Prandtlov i Nusseltov za nekoliko različitih brzina strujanja u funkciji od temperature. Unutrašnji prečnik cijevi je 0,0274 m.



SLIKA 4.6 Toplotne karakteristike, Prandtlov i Nusseltov broj u funkciji temperature (voda, $d_{p,i} = 0,0274 \text{ m}$)

Na slici 4.7 je dat koeficijent prelaza toplote za slučaj strujanja vode različitim brzinama u cijevi unutrašnjeg prečnika 0,0274 m, za opseg temperatura od 0 do 100 °C.



SLIKA 4.7 Koeficijent prelaza toplote u funkciji temperature (voda, $d_{p,i} = 0,0274$ m)

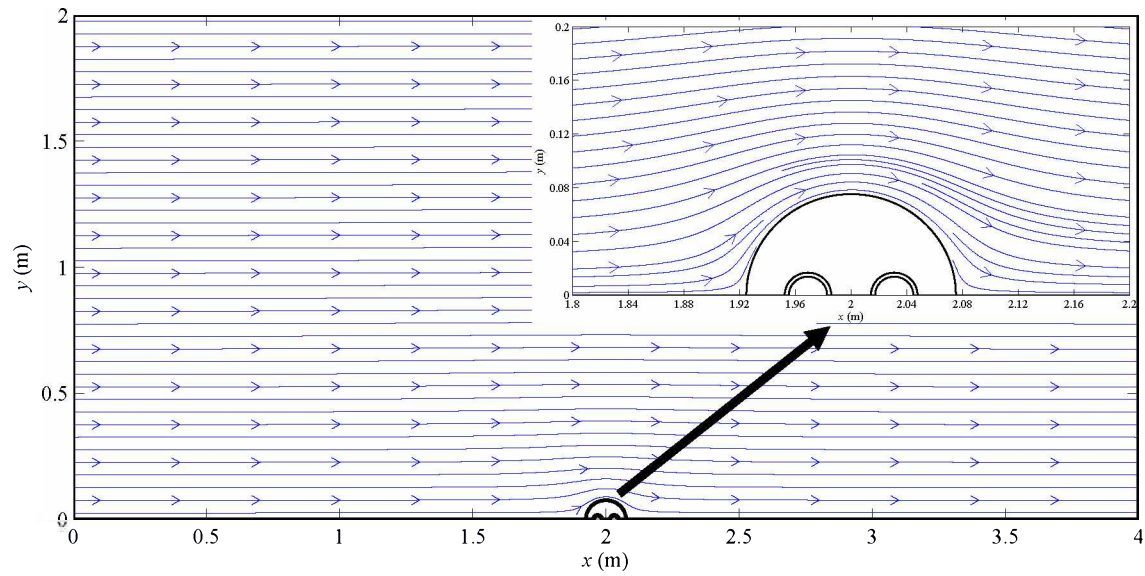
4.4. Strujanje podzemne vode

Strujanje podzemne vode može značajno da utiče na prenos toplote oko bušotine. Teorija strujanja podzemnih voda je zasnovana na Darcyevom zakonu o strujanju kroz poroznu sredinu (1856). Da bi se riješila jednačina (4.2), neophodno je poznavati u i v komponente strujnog polja. Relativno jednostavan metod rješavanja raznih problema strujanja podzemnih voda se zasniva na principu superpozicije rješenja za uniformnu struju, napojni i upojni bunar, dublet, dipol i sl. Dublet čine napojni i upojni bunar postavljeni na određenom rastojanju. Kada ovo rastojanje teži nuli dobija se dipol.

Slučaj kada podzemna voda opstrujava bušotinu koja u stvari predstavlja nepropustan cilindar može da se riješi kao superpozicija rješenja za uniformnu struju i za dipol kod kojeg se upojni bunar nalazi uzvodno, a napojni nizvodno. Kao rezultat ovakve superpozicije za slučaj bušotine prečnika d_b , pozicionirane u tački sa koordinatama (x_0, y_0) u uniformnoj struji u_0 , dobijaju se sledeći izrazi za komponente u i v strujnog polja:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 \left\{ 1 - \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{4 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2} d_b^2 \right\} \\
 v &= -\frac{1}{2} u_0 \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2} d_b^2
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

Strujno polje dobijeno na ovaj način je ilustrovano na slici 4.8.



SLIKA 4.8 Strujno polje oko bušotine

5. Verifikacija i validacija

Verifikacija i validacija predloženog matematičkog modela i numeričkog rješenja urađena je poređenjem sa dostupnim analitičkim rješenjima, kao i sa mjerenjima na eksperimentalnim instalacijama.

Najprije je urađena verifikacija numeričkog rješenja za stacionarno prostiranje toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi, poređenjem sa poznatim analitičkim rješenjima za slučaj konstantne temperature i konstantnog fluksa na zidu cijevi (Incropera, 2006). Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote za fluid je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su dali van Genuchten i Alves (1982).

Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem Carslaw i Jaegera (1947) za cilindrični izvor beskonačne dužine. Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu, u prisustvu strujanja podzemne vode je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su razvili Diao et al. (2004) za pokretni linijski izvor beskonačne dužine.

Rješenje za stacionarno prostiranje toplote unutar bušotine je verifikovano na posredan način, poređenjem numerički izračunatog toplotnog otpora bušotine sa vrijednostima koje se dobijaju korišćenjem modela Paula, Gu i O’Neala, rješenja za cilindrični izvor toplote kao i višepolnog modela.

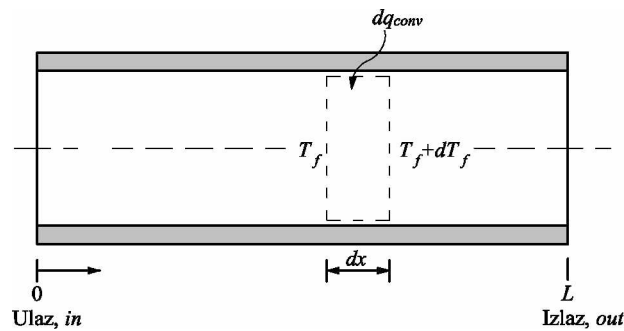
Rješenje za stacionarno prostiranje toplote u spregnutom sistemu koji čine fluid, U–cijev i ispuna bušotine je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su dali Eskilson i Claesson (1988).

Na kraju, validacija modela je urađena poređenjem sa rezultatima mjerenja na instalacijama koje su razvijene na Oklahoma State University. Jedna instalacija je laboratorijskih razmjera, izvedena u obliku velike, horizontalno položene kutije sa pijeskom u kojoj je postavljena U–cijev. Druga instalacija je sa tri bušotine, dubine od oko 75 m.

5.1. Prostiranje toplote u fluidu koji cirkuliše u U–cijevi

5.1.1. Stacionarno prostiranje toplote

Numeričko rješenje za stacionarno prostiranje toplote u fluidu koji cirkuliše u U–cijevi je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjima koja se dobijaju na osnovu bilansa energije koji je skiciran na slici 5.1. Na osnovu ovakvog bilansa energije moguće je odrediti promjenu srednje temperature fluida T_f duž cijevi.



SLIKA 5.1 Stacionarni bilans toplote za cijev konačne dužine

Fluid struji konstantnim masenim protokom \dot{m}_f , a toplota se prenosi konvekcijom sa površine cijevi na fluid. Bilans energije za infinitezimalnu kontrolisanu zapreminu označenu na slici 5.1 može da se napiše u obliku:

$$dq_{conv} = \dot{m}_f c_f [(T_f + dT_f) - T_f] = \dot{m}_f c_f dT_f \quad (5.1)$$

gdje je c_f specifična toplota fluida.

Sa druge strane, toplotni fluks koji se razmjenjuje između površine cijevi i fluida, za navedenu kontrolisanu zapreminu je:

$$dq_{conv} = q_{wall} dA_{wall} = q_{wall} P dx \quad (5.2)$$

gdje je q_{wall} specifični toplotni fluks, a dA_{wall} površina zida cijevi posmatrane kontrolisane zapremine ($dA_{wall} = P dx$, gdje je P obim cijevi).

Specifični toplotni fluks q_{wall} može da se zapiše koristeći Newtonov zakon hlađenja kao:

$$q_{wall} = h(T_{wall} - T_f) \quad (5.3)$$

gdje je h lokalni koeficijent prelaza toplote i T_{wall} temperatura zida cijevi.

Izjednačavajući desne strane izraza (5.1) i (5.2) dobija se:

$$q_{wall} dA_{wall} = \dot{m}_f c_f dT_f \quad (5.4)$$

odnosno koristeći (5.3):

$$\frac{dT_f}{dx} = \frac{q_{wall} P}{\dot{m}_f c_f} = \frac{P}{\dot{m}_f c_f} h(T_{wall} - T_f) \quad (5.5)$$

Integracijom izraza (5.5) dobijaju se izrazi za promjenu temperature fluida duž cijevi.

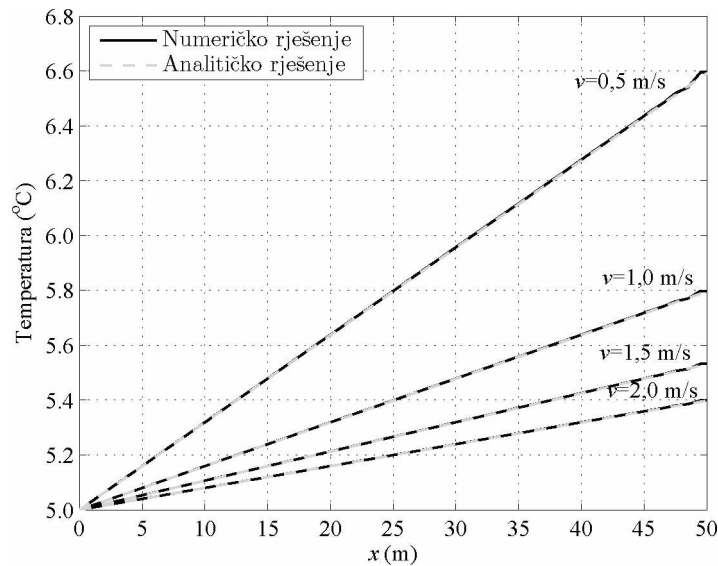
Dva karakteristična slučaja su kada je konstantan toplotni fluks ($q_{wall} = const$) i kada je konstantna temperatura zida cijevi ($T_{wall} = const$).

5.1.1.1. Konstantan toplotni fluks na zidu cijevi

U slučaju konstantnog toplotnog fluksa, integracijom izraza (5.5) od $x = 0$ do proizvoljnog x koristeći granični uslov $T_f(x=0) = T_{f,in}$, dobija se:

$$T_f(x) = \frac{q_{wall} P}{\dot{m}_f c_f} x + T_{f,in} \quad (5.6)$$

Dakle, u slučaju konstantnog toplotnog fluksa, srednja temperatura fluida se linearno mijenja duž cijevi. Na slici 5.2 je prikazano poređenje analitičkog i numeričkog rješenja, za slučaj strujanja vode u cijevi unutrašnjeg prečnika $d_{p,i} = 0,02182$ m i dužine $L_p = 50$ m, kada je srednja temperatura na ulazu u cijev $T_{f,in} = 5^\circ\text{C}$, fluks na zidu cijevi $q_{wall} = 365 \text{ W/m}^2$, a brzina strujanja $v_f = 0,5 \text{ m/s}$, $v_f = 1,0 \text{ m/s}$, $v_f = 1,5 \text{ m/s}$ i $v_f = 2,0 \text{ m/s}$.



SLIKA 5.2 Promjena temperature fluida duž cijevi za slučaj konstantnog toplotnog fluksa na zidu cijevi

5.1.1.2. Konstantna temperatura zida cijevi

Ako se definiše temperaturska razlika ΔT kao $T_{wall} - T_f$, jednačina (5.5) može da se zapiše u obliku:

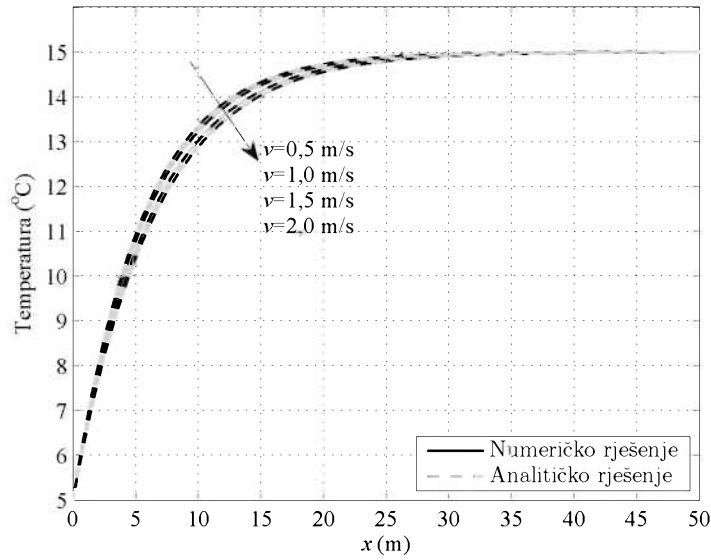
$$\frac{dT_f}{dx} = -\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{P}{\dot{m}_f c_f} h \Delta T \quad (5.7)$$

Razdvajanjem promjenljivih i integracijom od ulaza u cijev ($x = 0$) do proizvoljnog poprečnog presjeka x dobija se:

$$T_f(x) = T_{wall} - (T_{wall} - T_{f,in}) e^{-\frac{Px}{\dot{m}_f c_f} \bar{h}} \quad (5.8)$$

gdje je \bar{h} srednja vrijednost koeficijenta prelaza toplote od ulaza u cijev do x .

Na slici 5.3 je prikazano poređenje analitičkog i numeričkog rješenja, za slučaj strujanja vode u cijevi unutrašnjeg prečnika $d_{p,i} = 0,02182$ m i dužine $L_p = 50$ m, kada je temperatura na ulazu u cijev $T_{f,in} = 5^\circ\text{C}$, temperatura zida cijevi $T_{wall} = 15^\circ\text{C}$, a brzina strujanja $v_f = 0,5$ m/s, $v_f = 1,0$ m/s, $v_f = 1,5$ m/s i $v_f = 2,0$ m/s.



SLIKA 5.3 Promjena temperature fluida duž cijevi za slučaj konstantne temperature zida cijevi

5.1.2. Nestacionarno prostiranje toplote

Za slučaj nestacionarnog prostiranja toplote advekcijom–difuzijom u fluidu koji struji kroz cijev i koji razmjenjuje toplotu preko zida cijevi konstantne temperature, van Genuchten i Alves (1982) su dali sledeće analitičko rješenje:

$$T_f(x, t) = T_{wall} - \frac{T_{wall} - T_{f,in}}{2} \left[e^{\frac{(v_f - u)x}{2\alpha_f}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - ut}{2\sqrt{\alpha_f t}} \right) + e^{\frac{(v_f + u)x}{2\alpha_f}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + ut}{2\sqrt{\alpha_f t}} \right) \right] \quad (5.9)$$

gdje je erfc komplementarna funkcija greške, α_f je koeficijent toplotne difuzije fluida, v_f je brzina fluida, T_{wall} je temperatura zida cijevi, $T_{f,in}$ je temperatura fluida na ulazu. u se definiše kao:

$$u = v_f \sqrt{1 + \frac{4\eta\alpha_f}{v_f^2}}, \quad \eta = \frac{4h}{d_{p,i}\rho_f c_f} \quad (5.10)$$

gdje je h koeficijent prelaza toplote sa fluida na zid cijevi, $d_{p,i}$ unutrašnji prečnik cijevi, ρ_f gustina i c_f specifična toplota fluida. Promjena temperature fluida duž cijevi data jednačinom (5.9) je dobijena za sledeće granične i početne uslove:

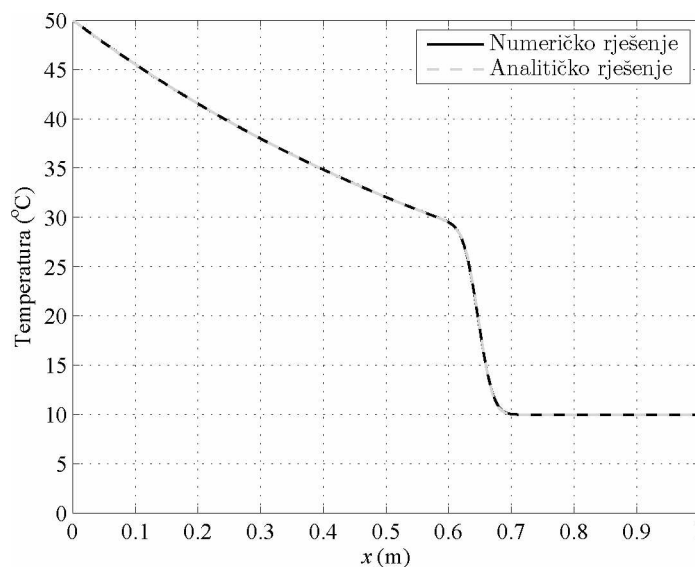
$$\begin{aligned}
T_f(x, 0) &= T_{wall} \\
T_f(0, t) &= T_{f,in} \\
\frac{\partial T_f}{\partial x}(\infty, t) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

Poređenje numeričkog i analitičkog rješenja je urađeno za podatke koji su dati u tabeli 5.1. Ove vrijednosti su uzete iz primjera koji je dat u Diersch et al. (2011).

TABELA 5.1 Ulazni podaci za poređenje numeričkog i analitičkog rješenja

Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Dužina cijevi	L_p	1,0	m
Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	0,026	m
Toplotni kapacitet fluida	$(\rho c)_f$	4129,8	kJ/m ³ K
Koeficijent toplotne provodljivosti fluida	k_f	0,38	W/mK
Brzina fluida	v_f	0,000375	m/s
Koeficijent prelaza toplote	h	12	W/m ² K
Temperatura zida cijevi i početna temperatura fluida	T_{wall}	10	°C
Temperatura fluida na ulazu	$T_{f,in}$	50	°C

Poređenje dato na slici 5.4 za $t = 1728$ s ukazuje na veoma dobro slaganje analitičkog i numeričkog rješenja.

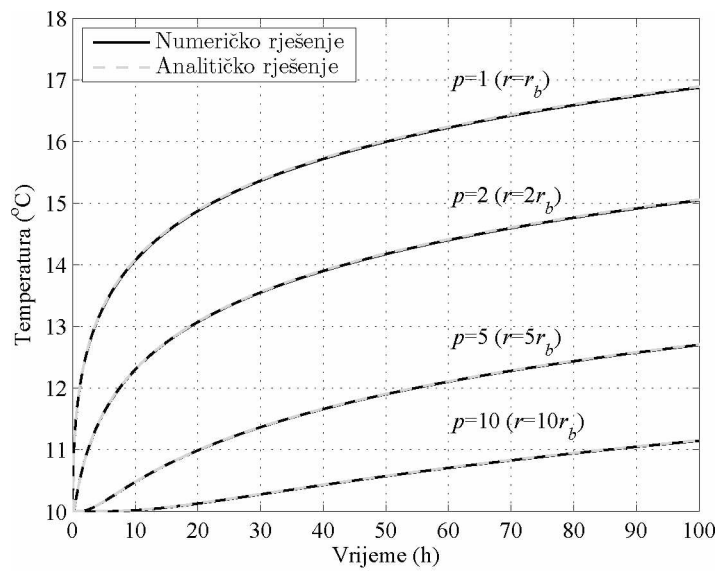


SLIKA 5.4 Promjena temperature fluida duž cijevi za slučaj nestacionarnog prostiranja toplote sa konstantnom temperaturom zida cijevi ($t = 1728$ s)

5.2. Nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine

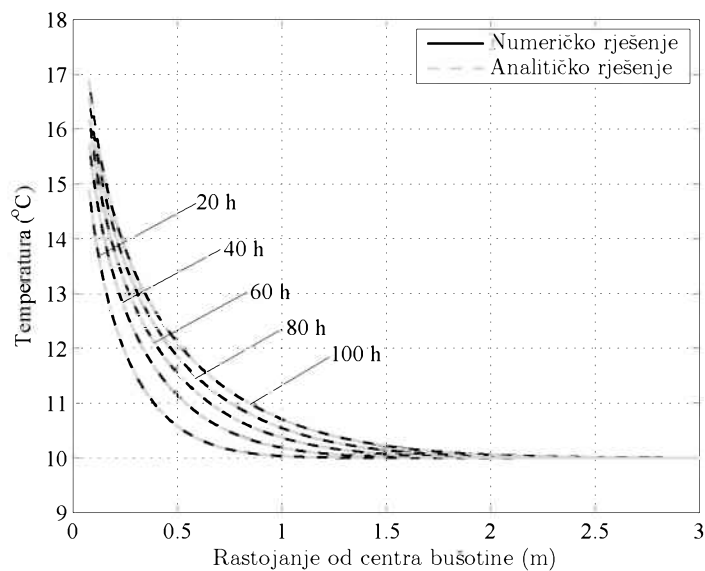
5.2.1. Poređenje sa analitičkim rješenjem za cilindrični izvor toplote beskonačne dužine

Numeričko rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem Carslaw i Jaegera (1947) za prostiranje toplote oko cilindričnog izvora. Ovo rješenje podrazumjeva da cilindar beskonačne dužine i poluprečnika r_b u trenutku $t = 0$ počinje da oslobađa u beskonačnu sredinu koja ga okružuje toplotni flux Q' po jedinici svoje dužine. Carslaw i Jaeger su koristeći Laplaceovu i inverznu Laplaceovu transformaciju došli do izraza za temperaturu tla T u proizvoljnom trenutku vremena t i na radijusu r od ose cilindra. Ovo rješenje je dato izrazima (2.12) i (2.13) u poglavlju Pregled stanja u oblasti istraživanja. U cilju verifikacije numeričkog rješenja, analiziran je slučaj 2D prostiranja toplote oko bušotine prečnika $d_b = 0,156$ m. Domen ima oblik anulusa, ali je zbog simetrije problema dovoljno analizirati npr. samo jednu njegovu polovinu. Spoljašnja granica domena se nalazi na $r = 5$ m od centra bušotine, što je dovoljno velika vrijednost s obzirom da u analiziranom vremenskom intervalu od 100 h praktično nema promjene temperature tla na rastojanju većem od 2 m od centra bušotine. Toplotna provodljivost tla je $k_s = 3,0$ W/mK, dok je zapreminski toplotni kapacitet $(\rho c)_s = 2300$ kJ/m³K. Toplotni fluks po metru dužnom bušotine je $Q' = 50$ W/m, što je tipična vrijednost za geotermalne razmjenjivače toplote u obliku bušotine sa U-cijevi. S obzirom na prečnik cilindra, odgovarajuća vrijednost specifičnog fluksa je $q = 102,02$ W/m² i ova vrijednost je korišćena kao granični uslov na poluprečniku $r = r_b$. Početna temperatura u domenu $T_0 = 10^\circ\text{C}$, a ista vrijednost je korišćena i kao granični uslov na spoljašnjoj granici domena. Poređenje numeričkog i analitičkog rješenja je prikazano na slici 5.5 i slici 5.6. Na slici 5.5 je prikazana promjena temperature tla u vremenu i to na nekoliko pozicija: na zidu bušotine ($r = r_b$) i na rastojanjima $r = 2r_b$, $r = 5r_b$ i $r = 10r_b$ od ose bušotine.



SLIKA 5.5 Promjena temperature tla vremenu

Na slici 5.6 je prikazan profil temperature tla u radijalnom pravcu u nekoliko trenutaka vremena.



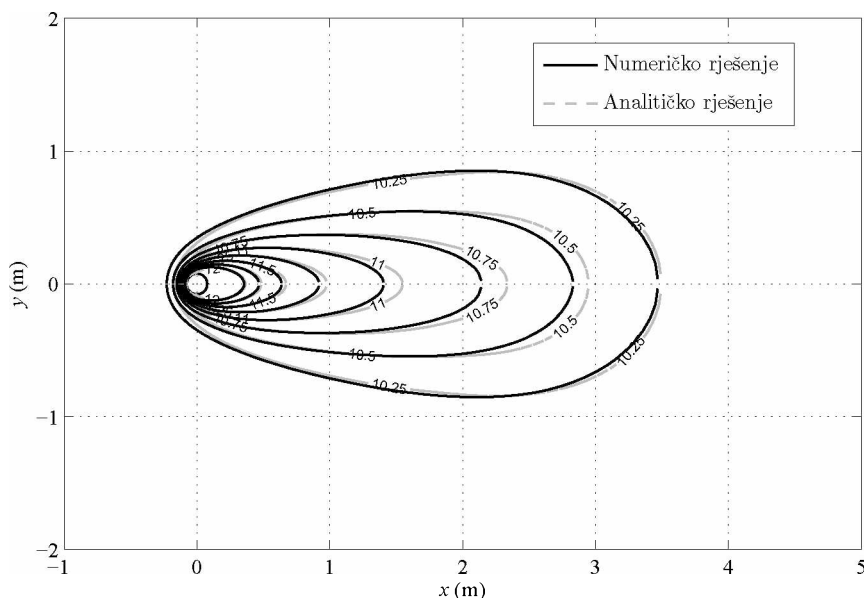
SLIKA 5.6 Profil temperature tla u radijalnom pravcu u nekoliko trenutaka vremena

Poređenja prikazana na slici 5.5 i slici 5.6 pokazuju odlično slaganje numeričkih rezultata sa analitičkim rješenjem.

5.2.2. Poređenje sa analitičkim rješenjem za pokretni linijski izvor toplote beskonačne dužine

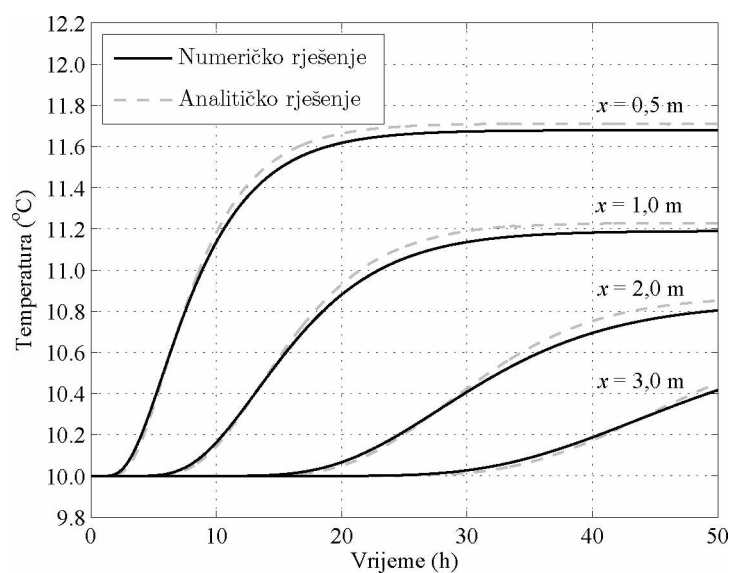
Numeričko rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine kada je prisutno strujanje podzemne vode je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su dali Diao et al. (2004) za pokretni linijski izvor beskonačne dužine (jednačina 2.10). Analizira se isti slučaj kao i kod poređenja sa analitičkim rješenjem za cilindrični izvor toplote beskonačne dužine ($d_b = 0,156 \text{ m}$, $k_s = 3,0 \text{ W/mK}$, $(\rho c)_s = 2300 \text{ kJ/m}^3\text{K}$, $T_0 = 10^\circ\text{C}$, $Q' = 50 \text{ W/m}$), s tim što je sada uključena i podzemna voda koja struji brzinom $0,00001 \text{ m/s}$ u pravcu ose x . Bušotina je pozicionirana u koordinatnom početku.

Na slici 5.7 je prikazano temperaturno polje oko bušotine dobijeno analitičkim i numeričkim putem.



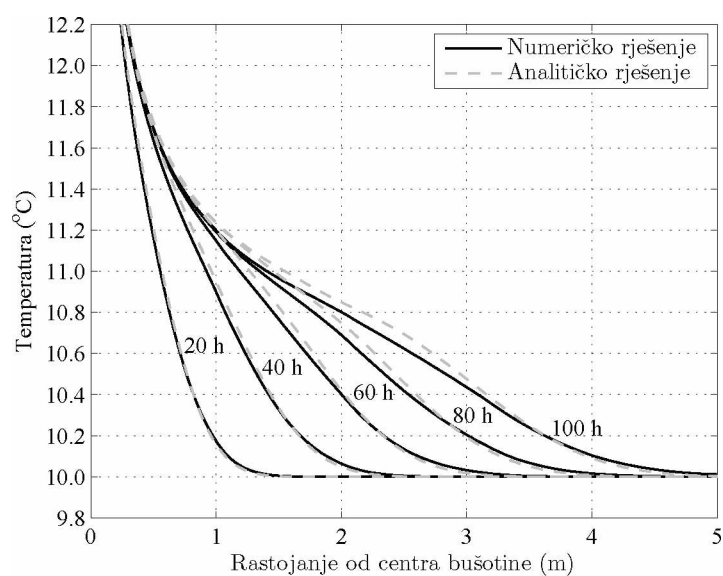
SLIKA 5.7 Temperaturno polje oko bušotine

Na slici 5.8 je prikazana promjena temperature tla u vremenu i to na nekoliko pozicija, odnosno rastojanja nizvodno od centra bušotine: $x = 0,5 \text{ m}$, $x = 1 \text{ m}$, $x = 2 \text{ m}$ i $x = 3 \text{ m}$. Uočava se da je zbog strujanja podzemne vode porast temperature u neposrednoj blizini bušotine manji nego u slučaju kada se toplota prostire samo difuzijom.



SLIKA 5.8 Promjena temperature tla vremenu

Na slici 5.9 je prikazana promjena temperature tla duž x ose, nizvodno od bušotine, u nekoliko trenutaka vremena.



SLIKA 5.9 Profil temperature tla u pravcu ose x

Odstupanja između analitičkog i numeričkog rješenja koje je uočljivo na slici 5.7, slici 5.8 i slici 5.9 može da se pripiše aproksimaciji bušotine linijskim izvorom u analitičkom rješenju kao i pojavi lažne difuzije kod numeričkog rješenja.

5.3. Stacionarno prostiranje toplote u bušotini – toplotni otpor bušotine

Toplotni otpor kod stacionarnog prostiranja toplote kroz ispunu bušotine može da se koristi kao parametar za verifikaciju numeričkog rješenja. Young (2004) je u svom radu izvršio poređenje vrijednosti toplotnih otpora bušotine, dobijenih korišćenjem različitih modela. Toplotni otpor bušotine se dobija sabiranjem tri toplotna otpora (fluid, cijev i ispunu bušotine), kao što je objašnjeno u poglavlju Pregled stanja u oblasti istraživanja. Toplotni otpor ispune bušotine prema modelima koje su razvili Gu i O’Neal (1998) i Paul (1996) se jednostavno računa koristeći izraze (2.21) i (2.22). Da bi se toplotni otpor ispune bušotine izračunao prema modelu cilindričnog izvora toplote (Ingersol, 1948) i prema višepolnom modelu (Bennet et al., 1987), potrebno je koristiti izraz (2.19). Kod modela koji koristi rješenje za cilindrični izvor toplote temperature zida bušotine i površine cijevi se dobijaju koristeći izraz (2.12) i princip superpozicije.

Za potrebe verifikacije analizirane su dvije bušotine, prečnika 114,3 mm i 152,4 mm. Kao ispunu bušotine se u jednom slučaju razmatra standardni bentonit, a u drugom bentonit sa aditivima koji ima veću toplotnu provodljivost. U svim proračunima se koristi U–cijev istog prečnika ali različitog rastojanja između dva kraka. Koeficijent prelaza toplote sa fluida na cijev je isti u svim analiziranim slučajevima. Geometrije analiziranih bušotina i fizičke karakteristike materijala su date u tabeli 5.2.

TABELA 5.2 Geometrija bušotina i toplotne karakteristike materijala

	Veličina	Oznaka	Bušotina 1	Bušotina 2	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	114,3	152,4	mm
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	27,4		mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	33,4		mm
	Rastojanje između cijevi	s	15,8333	28,5333	mm
Cijev	Toplotna provodljivost	k_p	0,39		W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1770		kJ/m ³ K
Ispuna bušotine	Toplotna provodljivost	k_g	0,75 / 1,5	0,75 / 1,5	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_g$	3900		kJ/m ³ K
Fluid	Koeficijent prelaza toplote	h	1690		W/m ² K

U nestacionarnom numeričkom proračunu toplotnog otpora bušotine, kao granični uslov na spoljašnjoj površini dva kraka U–cijevi je zadata konstantna temperatura, jednaka početnoj temperaturi u domenu. Na spoljašnjoj granici domena, tj. na zidu bušotine kao granični uslov je zadat konstantan toplotni fluks. Vrijednost početne temperature i fluksa se mogu proizvoljno uzeti. U ovim proračunima je početna temperatura 10°C , a fluks je $139,24 \text{ W/m}^2$ u slučaju bušotine prečnika 114,3 mm i $104,43 \text{ W/m}^2\text{K}$ u slučaju bušotine prečnika 152,4 mm. Ove vrijednosti specifičnog fluksa odgovaraju fluksu od 50 W po metru dubine bušotine. Sa ovakvim graničnim uslovima se nakon izvjesnog vremena postiže stacionarno stanje. Na osnovu osrednjenih temperatura po obodu spoljašnje površine cijevi i na zidu bušotine, kao i na osnovu zadatog fluksa po metru dubine bušotine, koristeći izraz (2.19) moguće je izračunati toplotni otpor ispune bušotine.

Za bušotine navedenih karakteristika su u tabeli 5.3 date vrijednosti toplotnih otpora izračunatih pomoću modela ekvivalentnog prečnika, modela koji koristi korelacije za faktore oblika, modela cilindričnog izvora toplote i višepolnog modela (podaci preuzeti iz Young (2004)), kao i pomoću CVFEM numeričkog modela. U tabeli su zajedno sa vrijednostima toplotnih otpora, u zagradama date i odgovarajuće relativne greške u odnosu na rezultat koji daje višepolni model.

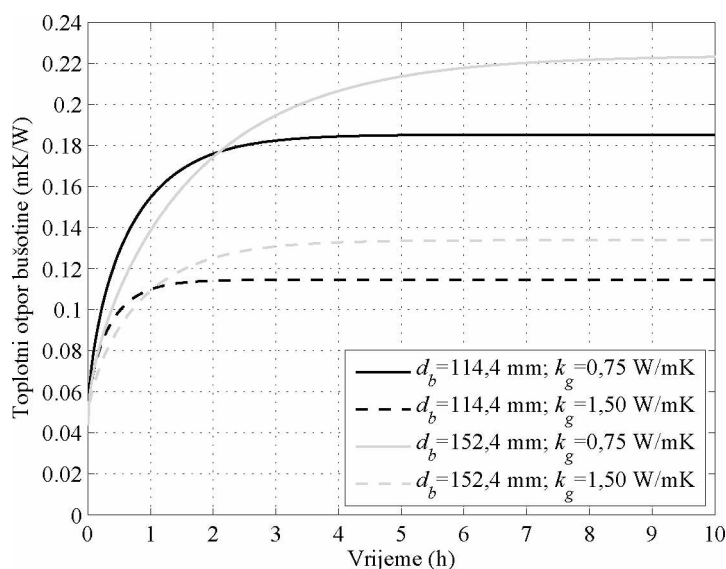
TABELA 5.3 Poređenje toplotnih otpora bušotine dobijenih različitim modelima

Prečnik bušotine d_b (mm)	Toplotna provodljivost ispune bušotine k_g (W/mK)	Toplotni otpor bušotine R_b (mK/W)				
		Paul	Gu i O’Neal	Cilindrični izvor	Višepolni model	CVFEM
114,3	0,75	0,2050 (+12,45 %)	0,1900 (+4,22 %)	0,1882 (+3,24 %)	0,1823	0,1853 (+1,65 %)
	1,5	0,1240 (+7,08 %)	0,1170 (+1,04 %)	0,1151 (-0,60 %)	0,1158	0,1146 (-1,04 %)
152,4	0,75	0,2350 (+6,05 %)	0,2270 (+2,44 %)	0,2248 (+1,44 %)	0,2216	0,2240 (+1,08 %)
	1,5	0,1390 (+3,35 %)	0,1350 (+0,37 %)	0,1334 (-0,82 %)	0,1345	0,1339 (-0,45 %)

Rezultati sistematizovani u tabeli 5.3 pokazuju da je veoma dobro slaganje vrijednosti toplotnog otpora bušotine izračunate CVFEM modelom i višepolnim modelom, sa

maksimalnom relativnom greškom od 1,65 %. Poređenja radi, ostali modeli za proračun toplotnog otpora bušotine daju značajno veće greške.

U prvih nekoliko sati rada geotermalnog razmjenjivača, pri konstantnom dovođenju ili odvođenju toplote preko zida bušotine, toplotni otpor bušotine računat prema (2.16)–(2.19) je nestacionaran. Na slici 5.10 je prikazana promjena toplotnog otpora bušotine u prvih 10 časova rada za slučajeve koji su analizirani u tabeli 5.3.



SLIKA 5.10 Promjena toplotnog otpora bušotine u vremenu

Vrijeme nakon kojeg toplotni otpor dostiže stacionarnu vrijednost zavisi od geometrije i toplotne provodljivosti ispune bušotine. U slučaju bušotine sa ispunom veće toplotne provodljivosti, stacionarna vrijednost toplotnog otpora se postiže za kraće vrijeme.

5.4. Stacionarni prenos toplote u spregnutom sistemu U–cijevi i ispune bušotine

Eskilson i Claesson (1988) su izveli analitičko rješenje za stacionarno prostiranje toplote u bušotini, kada je data temperatura zida bušotine T_b kao granični uslov. Ovo rješenje su detaljno opisali u svom radu Diersch et al. (2011). Za slučaj simetrično postavljene cijevi u bušotini, dobijeno je sledeće rješenje za promjenu temperature fluida u dva kraka U–cijevi:

$$\begin{aligned}
T_{f,out}(t) &= T_{f,in}(t) \frac{f_1(H) + f_2(H)}{f_2(H) - f_2(H)} + \int_0^H \frac{T_b(\zeta, t) [f_4(H - \zeta) + f_5(H - \zeta)]}{f_3(H) - f_2(H)} d\zeta \\
T_{f1}(z, t) &= T_{f,in}(t) f_1(z) + T_{f,out}(t) f_2(z) + \int_0^z T_b(\zeta, t) f_4(z - \zeta) d\zeta \\
T_{f2}(z, t) &= -T_{f,in}(t) f_2(z) + T_{f,out}(t) f_3(z) - \int_0^z T_b(\zeta, t) f_5(z - \zeta) d\zeta
\end{aligned} \tag{5.12}$$

gdje su $T_{f,in}$ i $T_{f,out}$ temperature fluida na ulazu i izlazu iz cijevi, a T_{f1} i T_{f2} temperature fluida duž silaznog i uzlaznog kraka U–cijevi. Funkcije f_1 , f_2 , f_3 , f_4 i f_5 su date izrazima:

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \cosh(\gamma z) - \delta \sinh(\gamma z) \\
f_2(z) &= \frac{\beta_{12}}{\gamma} \sinh(\gamma z) \\
f_3(z) &= \cosh(\gamma z) + \delta \sinh(\gamma z) \\
f_4(z) &= \beta_1 \cosh(\gamma z) - \left(\delta \beta_1 + \frac{\beta_2 \beta_{12}}{\gamma} \right) \sinh(\gamma z) \\
f_5(z) &= \beta_2 \cosh(\gamma z) + \left(\delta \beta_2 + \frac{\beta_1 \beta_{12}}{\gamma} \right) \sinh(\gamma z)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_2 = \frac{1}{R_1^\Delta \rho_f c_f \dot{V}_f} \quad \beta_{12} = \frac{1}{R_{12}^\Delta \rho_f c_f \dot{V}_f} \\
\beta &= 0 \quad \gamma = \sqrt{\beta_1^2 + 2\beta_{12}\beta_1} \\
\delta &= \frac{1}{\gamma} (\beta_{12} + \beta_1)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

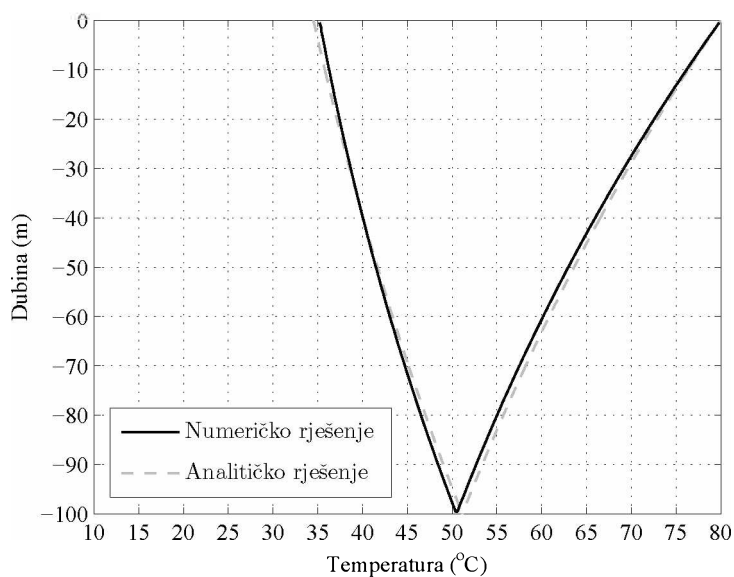
U izrazima (5.14) ρ_f , c_f i \dot{V}_f su gustina, specifična toplota i zapreminski protok fluida. Izrazi za izračunavanje toplotnih otpora R_1^Δ i R_{12}^Δ se mogu naći u Diersch et al. (2011).

Radi poređenja sa analitičkim rješenjem, analizira se bušotina za koju su geometrijski podaci i toplotne karakteristike fluida, cijevi i ispune dati u tabeli 5.4 (preuzeto iz Diersch et al. (2011)). Fluid za prenos toplote je voda, koja ima protok 0,253 l/s i na ulazu u U–cijev konstantnu temperaturu 80°C. Temperatura zida bušotine je konstantna i iznosi 10°C.

TABELA 5.4 Geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala

	Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	130	mm
	Dužina bušotine	L_b	100	m
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	26,2	mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	32	mm
	Rastojanje između cijevi	s	28	mm
Cijev (HDPE)	Toplotna provodljivost	k_p	0,38	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1770	kJ/m ³ K
Ispuna bušotine	Toplotna provodljivost	k_g	2,3	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_g$	2190	kJ/m ³ K

Sa ovako definisanim graničnim uslovima, razmatrani problem ima stacionarno rješenje. Poređenje numeričkog i analitičkog rješenja prikazano na slici 5.11 ide u prilog verifikaciji razvijenog numeričkog modela.



SLIKA 5.11 Promjena temperature fluida duž cijevi

5.5. Poređenje sa eksperimentalnim rezultatima – OSU sandbox experiment

Grupa istraživača sa Oklahoma State University (Beier et al., 2011) je razvila laboratorijsku instalaciju geotermalnog razmjenjivača toplote sa U–cijevi. Svrha ove instalacije je da se mjerenjem na njoj dobiju rezultati koji bi mogli da se koriste za validaciju različitih modela za ovakvu vrstu geotermalnih razmjenjivača toplote. Instalacija je izvedena u obliku drvene kutije sa pijeskom, dužine 18,32 m, širine 1,83 m i visine 1,83 m. Aluminijska cijev, unutrašnjeg prečnika 12,6 cm je položena po sredini kutije i služi kao zid bušotine. Unutar ove aluminijske cijevi je pomoću distancera postavljena U–cijev od polietilena visoke gustine (HDPE), tako da se oba kraka cijevi nalaze u horizontalnoj ravni. Spoljašnji prečnik cijevi je 33,4 mm, a unutrašnji 27,33 mm. Distanceri obezbjeđuju da je po cijeloj dužini jednako rastojanje, kako između dva kraka cijevi, tako i između cijevi i zida bušotine. Kutija je ispunjena pijeskom koji je zasićen vodom. Prostor između U–cijevi i zida bušotine je ispunjen bentonitom. Oko cijele kutije sa pijeskom je na određenom rastojanju postavljena drvena oplata, a kroz međuprostor cirkuliše vazduh čija se temperatura održava konstantnom pomoću tri toplotne pumpe. Vazduh struji niz jednu stranicu kutije, zatim ispod dna kutije, uz drugu stranicu, preko vrha kutije i ispušta se u samu prostoriju. Na ovaj način se održava konstantna temperatura od 22°C kao granični uslov. Krajevi kutije oblika kvadrata su izolovani. Nezavisnim mjerenjima su utvrđene toplotne provodljivosti ispune bušotine i vlažnog pijeska, sa procijenjenom nesigurnošću mjerenja od $\pm 0,5$ % u oba slučaja. Geometrija eksperimentalne instalacije i toplotne karakteristike materijala za validaciju numeričkog rješenja date su u tabeli 5.5.

TABELA 5.5 Geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala za validaciju numeričkog modela

	Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	126	mm
	Dužina bušotine	L_b	18,3	m
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	27,33	mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	33,40	mm
	Rastojanje između cijevi	s	5,3	mm
Cijev (HDPE)	Toplotna provodljivost	k_p	0,39	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1770	kJ/m ³ K
Ispuna bušotine (bentonit)	Toplotna provodljivost	k_g	0,73	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_g$	3800	kJ/m ³ K
Tlo (Vlažni pijesak)	Toplotna provodljivost	k_s	2,82	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_s$	2000	kJ/m ³ K

Voda koja struji u U–cijevi se zagrijava pomoću dva električna grijača, a u toku eksperimenta se mjere napon i jačina struje, tako da se snaga grijača određuje sa sa neodređenošću od ± 1 %. Strujanje vode kroz U–cijev se ostvaruje pomoću cirkulacione pumpe. Protok vode se mjeri pomoću protokomjera čija je neodređenost mjerenja ± 5 %. Temperatura vode na ulazu i na izlazu iz U–cijevi, kao i u pijesku se mjeri pomoću termistora koji su povezani na akviziciju podataka koja snima izmjerene vrijednosti svakog minuta. Ukupno 20 termistora mjeri temperaturu pijeska na različitim pozicijama u horizontalnoj ravni u kojoj je postavljena U–cijev i to sa strane ulaznog kraka cijevi. Neodređenost mjerenja temperature pomoću termistora je $\pm 0,03$ %.

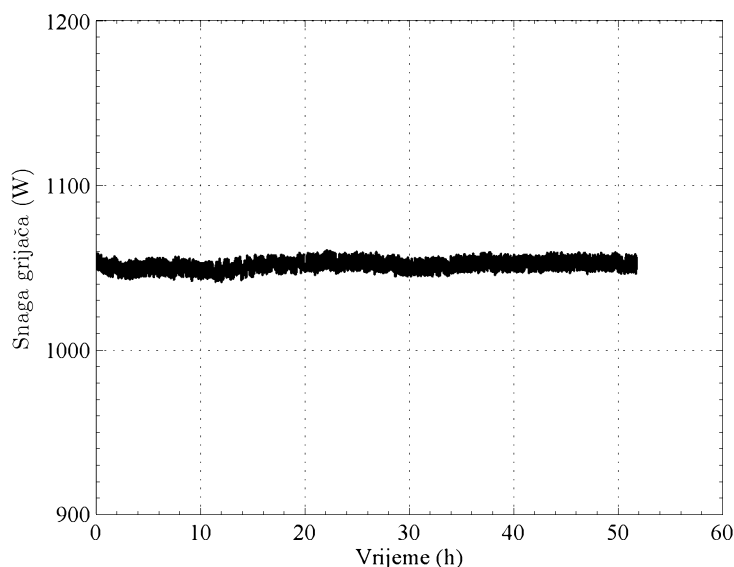
Beier et al. (2011) su objavili rezultate mjerenja sprovedenih na ovakvoj eksperimentalnoj instalaciji kako bi se oni koristili za validaciju numeričkih modela vertikalnih geotermalnih razmjenjivača toplote. Prednost ovakvih mjerenja u odnosu na mjerenja na pravim instalacijama je što su rezultati dobijeni u uslovima koje je moguće bolje kontrolisati. Kod mjerenja na terenu, najčešće se ne izvode nezavisna mjerenja toplotne provodljivosti tla, a osim toga teško je kontrolisati položaj U–cijevi u bušotini.

Na instalaciji su izvedena dva eksperimenta. U prvom eksperimentu su električni grijač i cirkulaciona pumpa neprekidno uključeni, dok su u drugom eksperimentu grijač i cirkulaciona pumpa isključeni u periodu od dva sata. Ova dva eksperimenta su

simulirana pomoću razvijenog CVFEM numeričkog modela. Zbog simetričnosti geometrije i graničnih uslova, dovoljno je koristiti numeričku mrežu koja pokriva samo polovinu stvarnog domena. Temperatura vode na ulazu u U–cijev, kao i protok vode koji se mjere u toku trajanja eksperimenta se koriste kao ulazni podaci u simulacijama.

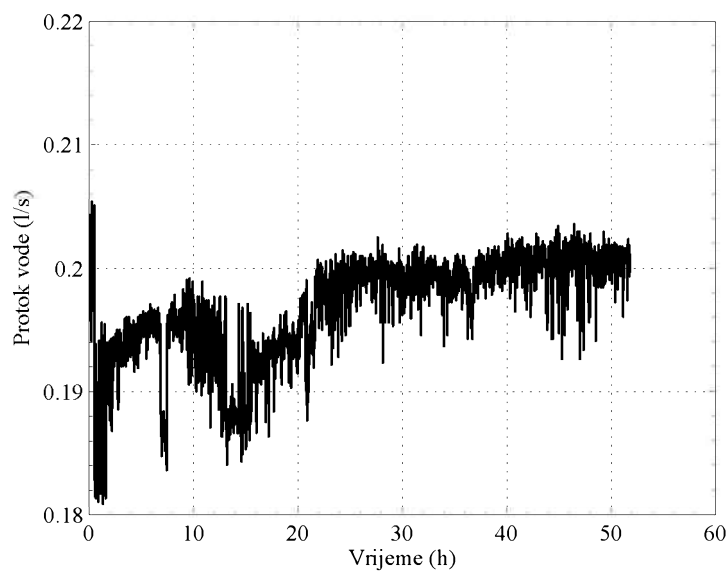
5.5.1. Eksperiment bez prekida rada električnog grijača i cirkulacione pumpe

Eksperiment bez prekida rada električnog grijača i cirkulacione pumpe traje 51 h i 56 min. Promjena snage električnog grijača na osnovu izmjerenog napona i jačine struje je prikazana na slici 5.12. Kao što se vidi, snaga grijača je održavana približno konstantnom, tako da je srednja snaga u toku trajanja eksperimenta 1052 W.



SLIKA 5.12 Promjena snage električnog grijača u toku trajanja eksperimenta bez prekida rada električnog grijača

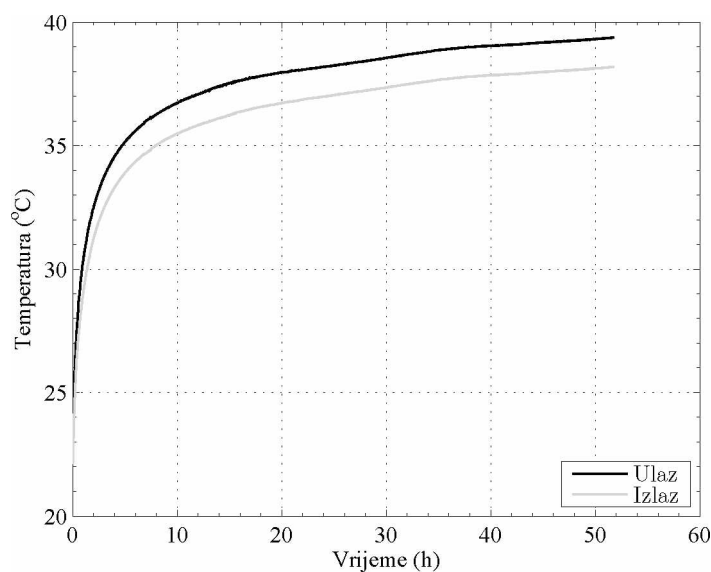
Promjena protoka vode koja struji kroz U–cijev je prikazana na slici 5.13. Srednja vrijednost protoka vode u toku trajanja eksperimenta je 0,197 l/s.



SLIKA 5.13 Promjena protoka vode kroz U–cijev u toku trajanja eksperimenta bez prekida rada električnog grijača

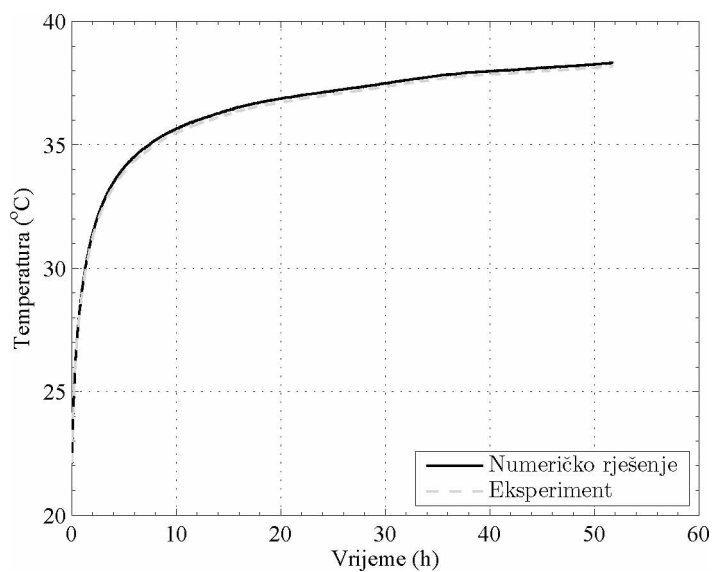
Validacija numeričkog modela se vrši poređenjem izmjerenih i izračunatih temperatura vode na izlazu iz cijevi, kao i temperatura pijeska na različitim radijalnim pozicijama u odnosu na osu bušotine.

Promjene temperature vode na ulazu i izlazu iz U–cijevi, izmjerene u toku trajanja eksperimenta su prikazane na slici 5.14. Srednja razlika temperatura vode na ulazu i izlazu iz U–cijevi u toku trajanja eksperimenta je samo 1,22 °C.



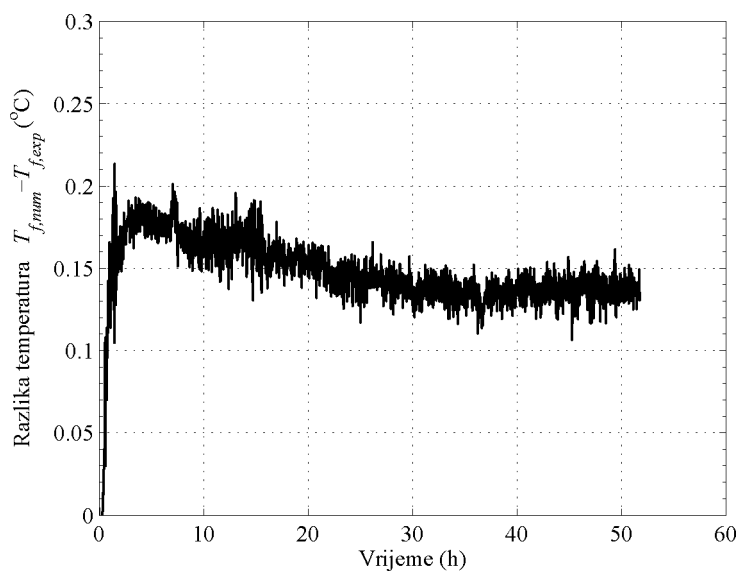
SLIKA 5.14 Promjene temperature vode na ulazu i izlazu iz cijevi (eksperiment)

Poređenje izmjerene i numerički izračunate temperature vode na izlazu iz cijevi je prikazano na slici 5.15.



SLIKA 5.15 Promjena temperature vode na izlazu iz U–cijevi (poređenje mjerenja i numeričkog rješenja)

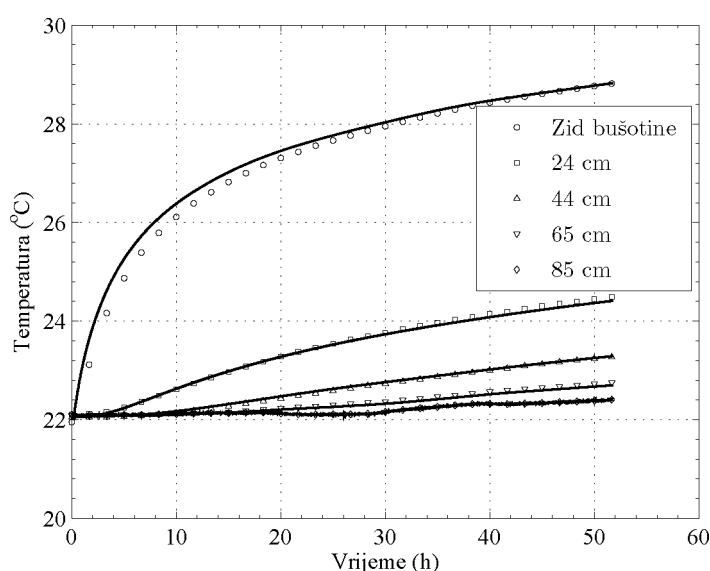
Odstupanja eksperimentalnih i numeričkih vrijednosti su mala, da ih je teško uočiti na datom dijagramu. Odstupanje je posebno prikazano na dijagramu na slici 5.16.



SLIKA 5.16 Razlika numerički izračunate i izmjerene temperature vode na izlazu iz U–cijevi

Dakle, u slučaju neprekidnog rada električnog grijača i cirkulacione pumpe, numerički izračunate temperature vode na izlazu su veće od eksperimentalno izmjerenih. Srednje kvadratno odstupanje je $0,1488^{\circ}\text{C}$.

U eksperimentalnoj instalaciji je dvadeset termistora postavljeno u pet redova (po četiri termistora u redu, na različitim lokacijama po dužini kutije sa pijeskom) i to: na zidu bušotine, na rastojanjima 24 cm, 44 cm, 65 cm od zida bušotine i na drvenoj oplati. Poređenje izmjerene i numerički izračunatih temperatura pijeska na različitim pozicijama je prikazano na slici 5.17.



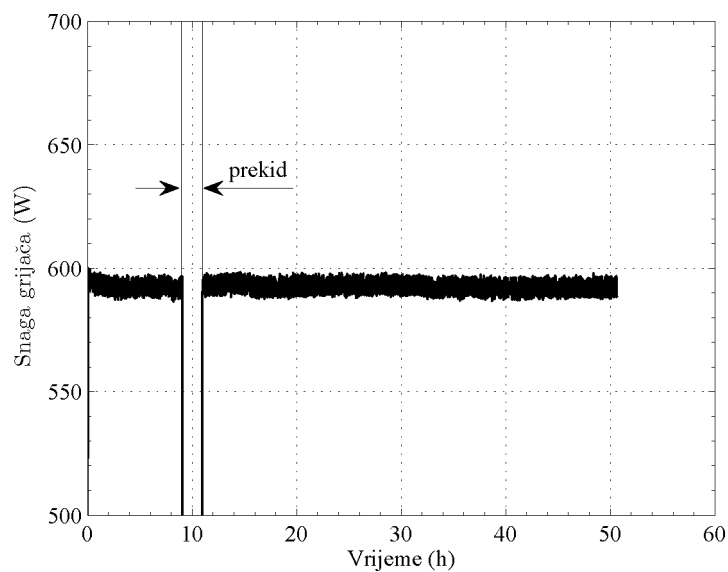
SLIKA 5.17 Promjena temperature pijeska na različitim pozicijama (poređenje mjerenja i numeričkog rješenja)

Uočava se odlično slaganje izmjerenih i numerički izračunatih temperatura. Srednje kvadratno odstupanje temperature zida bušotine je $0,1994^{\circ}\text{C}$.

5.5.2. Eksperiment sa prekidom rada električnog grijača i cirkulacione pumpe

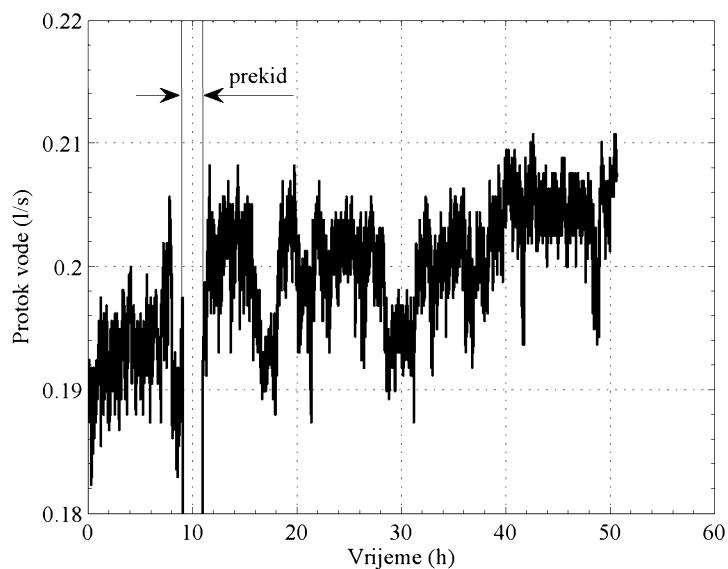
Eksperiment sa prekidom rada električnog grijača i cirkulacione pumpe traje 50 h i 38 min. Električni grijač i cirkulaciona pumpa su isključeni dva sata, u toku desetog i jedanaestog sata od početka eksperimenta. Promjena snage električnog grijača na osnovu izmjerenog napona i jačine struje je prikazana na slici 5.18. Kao što se vidi,

snaga grijača je u periodu dok je uključen održavana približno konstantnom, tako da je srednja snaga 592 W (uključen je samo jedan od dva grijača).



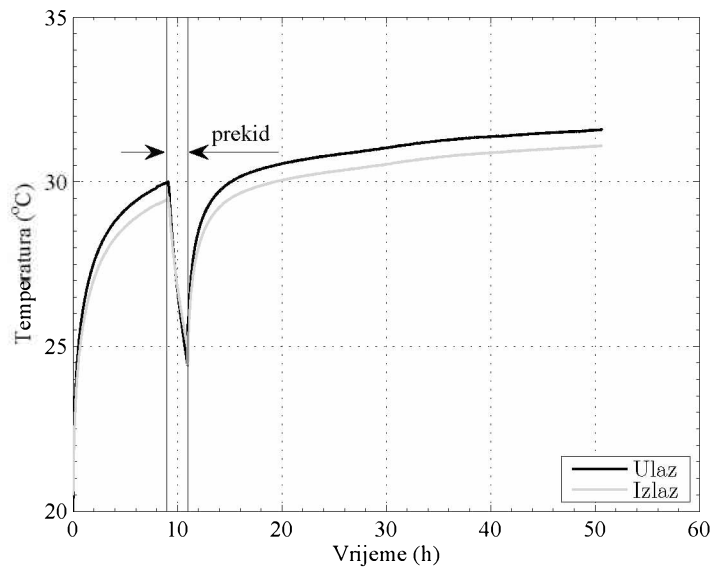
SLIKA 5.18 Promjena snage električnog grijača u toku trajanja eksperimenta sa prekidom rada električnog grijača

Promjena protoka vode koja struji kroz U–cijev je prikazana na slici 5.19. Srednja vrijednost protoka vode u periodu u kojem je cirkulaciona pumpa uključena je 0,197 l/s.



SLIKA 5.19 Promjena protoka vode kroz U–cijev u toku trajanja eksperimenta sa prekidom rada električnog grijača

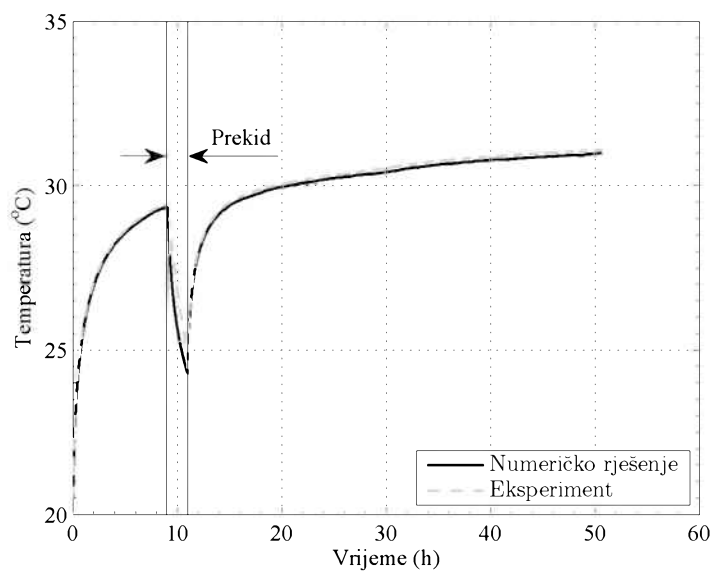
Promjene temperatura vode na ulazu i izlazu iz U-cijevi, izmjerene u toku trajanja eksperimenta su prikazane na slici 5.20. Srednja razlika temperatura vode na ulazu i izlazu iz U-cijevi u toku trajanja eksperimenta je samo $0,50^{\circ}\text{C}$.



SLIKA 5.20 Promjene temperatura vode na ulazu i izlazu iz cijevi (eksperiment)

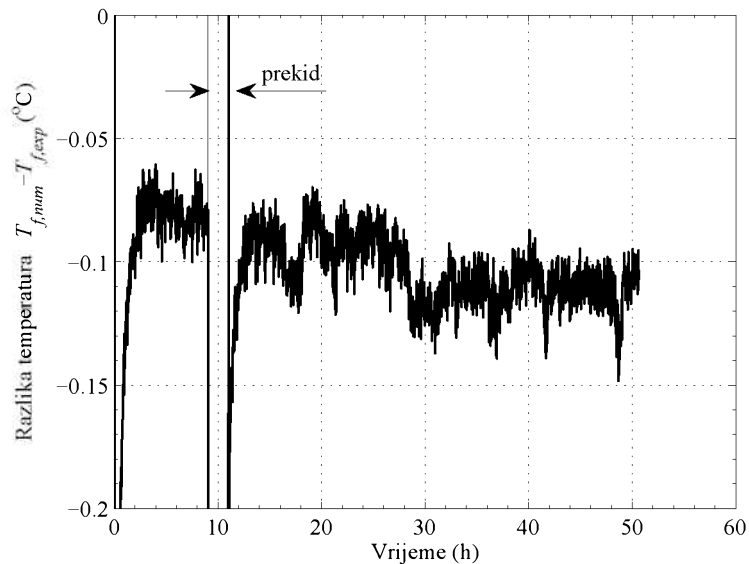
Ideja autora (Beier et al., 2011) je da ovakav eksperiment posluži za testiranje mogućnosti numeričkog modela da simulira i prekid u radu geotermalnog razmjenjivača toplote, tj. prekid rada električnog grijača i cirkulacione pumpe. Prilikom izvođenja testa toplotnog odziva, može da dođe do prekida testa uslijed npr. nestanka struje, a da se jos nijesu stekli uslovi da se pouzdano na osnovu izmjerenih podataka odredi toplotna provodljivost tla. Većina jednostavnih modela podrazumjeva uniformnu temperaturu tla na početku testa, a taj uslov nije zadovoljen neposredno nakon prekida.

Poređenje izmjerene i numerički izračunate temperature vode na izlazu iz cijevi je prikazano na slici 5.21.



SLIKA 5.21 Promjena temperature vode na izlazu iz U–cijevi
(poređenje mjerenja i numeričkog rješenja)

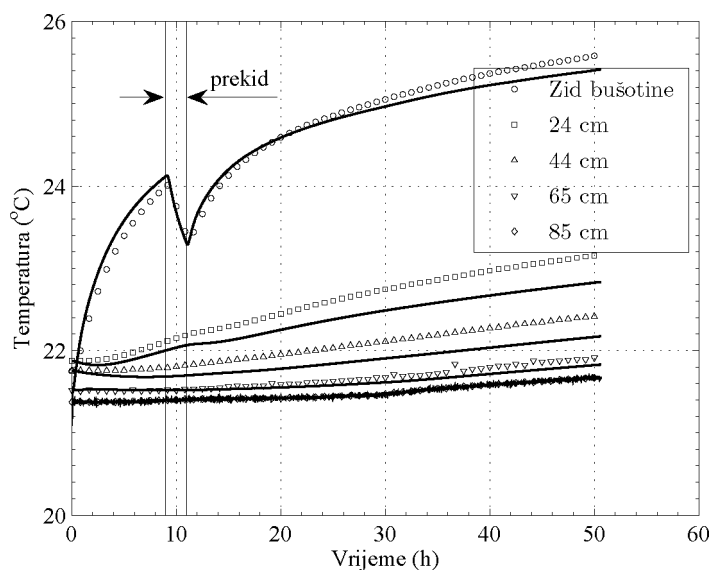
Odstupanja eksperimentalnih i numeričkih vrijednosti su mala, da ih je teško uočiti na datim dijagramima. Odstupanje je posebno prikazano na dijagramu na slici 5.22.



SLIKA 5.22 Razlika numerički izračunate i izmjerene temperature vode
na izlazu iz U– cijevi

Dakle, u slučaju prekida rada električnog grijača i cirkulacione pumpe, numerički izračunate temperature vode na izlazu su manje od eksperimentalno izmjerenih. Srednje kvadratno odstupanje je $0,2230^{\circ}\text{C}$.

Poređenje izmjerene i numerički izračunatih temperatura pijeska na različitim pozicijama je prikazano na slici 5.23.



SLIKA 5.23 Promjena temperature pijeska na različitim pozicijama (poređenje mjerenja i numeričkog rješenja)

Srednje kvadratno odstupanje temperature zida bušotine je $0,1256^{\circ}\text{C}$. Očigledna su odstupanja izmjerenih i numerički izračunatih temperatura naročito na rastojanjima od 24 cm i 44 cm od zida bušotine. Ovo odstupanje može da bude posljedica neodređenosti mjerenja temperature. Dva od četiri termistora na rastojanju od 85 cm od zida bušotine kao i jedan od četiri termistora na rastojanju od 65 cm od zida bušotine nisu bila u funkciji. Takođe, mogući uzrok neslaganja rezultata je i neodređenost mjerenja toplotnih karakteristika ispune bušotine i vlažnog pijeska. Osim toga, toplotni kapacitet vlažnog pijeska nije mjereno, već samo procijenjen. Autor (Beier) u privatnoj komunikaciji predlaže vrijednost od $2000 \text{ kJ/m}^3\text{K}$, dok u drugom svom radu (Beier, 2014) koristi vrijednost od $3200 \text{ kJ/m}^3\text{K}$. Poređenjem slike 5.17 i slike 5.23, uočava se da termistori na samom početku eksperimenta bez prekida rada pumpe i grijača pokazuju praktično uniformnu temperaturu pijeska od oko 22°C , dok su u slučaju eksperimenta sa prekidom temperature koje pokazuju termistori idu u opsegu od $21,07^{\circ}\text{C}$ do $22,74^{\circ}\text{C}$. Slična slaganja numeričkih rezultata sa mjerenjima u ovom eksperimentu u smislu međusobnog odstupanja dobili su i Gallero et al. (2015).

5.6. Poređenje sa eksperimentalnim rezultatima – OSU test facility

Za validaciju numeričkog modela mogu da se iskoriste i rezultati mjerenja sa eksperimentalne instalacije koja je izvedena na Oklahoma State University. Ova instalacija je razvijena za analizu hibridnih sistema sa geotermalnom toplotnom pumpom (Hern, 2004). Geotermalni razmjenjivač toplote čine tri bušotine dubine 75 m i prečnika 114 mm, postavljene u redu, na međusobnom rastojanju od 6,1 m. U svakoj bušotini je postavljena po jedna U-cijev od polietilena visoke gustine, nazivnog prečnika DN20. Ukupan protok vode koja se koristi kao fluid za razmjenu toplote je 0,631 l/s, a može da se pretpostavi da su protoci jednaki za sve tri bušotine. Izmjerena neporemećena temperatura tla je 17,3°C.

Temperature vode na ulazu iz izlazu iz U-cijevi su mjerene svakog minuta u toku 18 mjeseci rada sistema. Bušotine su postavljene na dovoljno velikom rastojanju tako da u toku ovih 18 mjeseci ne dolazi do njihove međusobne termičke interakcije. Zahvaljujući ovoj činjenici, za verifikaciju numeričkog modela pogodno je koristiti samo jednu bušotinu, sa ulaznom i izlaznom temperaturom vode dobijenom osrednjavanjem vrijednosti izmjerenih za sve tri bušotine. Svi neophodni podaci potrebni za validaciju modela dati su u tabeli 5.6.

TABELA 5.6 Geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala za validaciju numeričkog modela

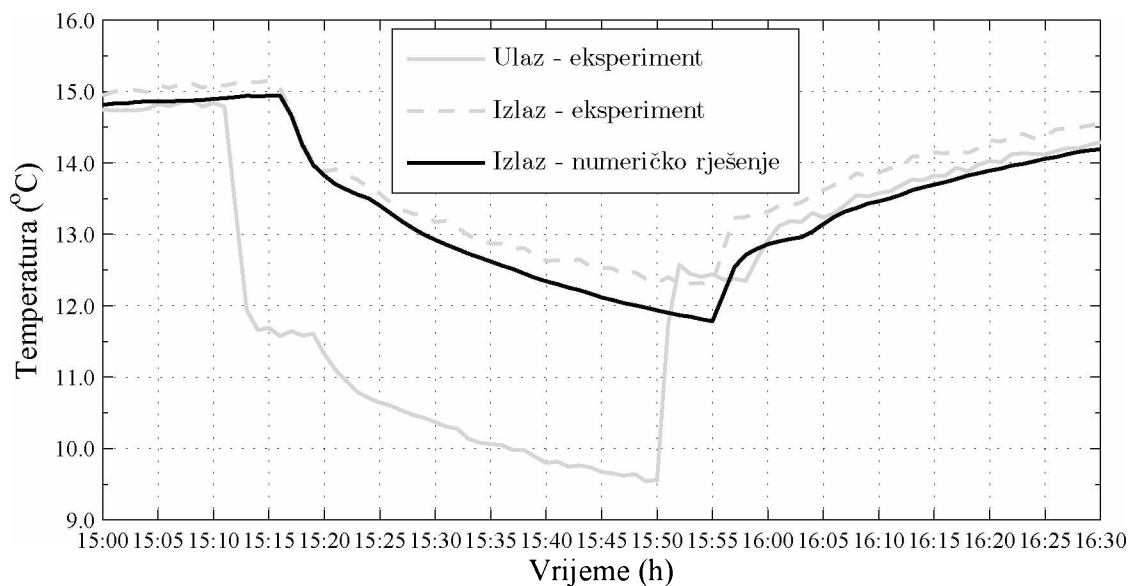
	Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	114,33	mm
	Dužina bušotine	L_b	74,68	m
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	21,82	mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	26,67	mm
	Rastojanje između osa cijevi	s	20,32	mm
Cijev (HDPE)	Toplotna provodljivost	k_p	0,3895	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1770	kJ/m ³ K
Ispuna bušotine (bentonit)	Toplotna provodljivost	k_g	0,744	W/mK
	Toplotni kapacitet *	$(\rho c)_g$	3900	kJ/m ³ K
Tlo	Toplotna provodljivost	k_s	2,55	W/mK
	Toplotni kapacitet *	$(\rho c)_s$	2012	kJ/m ³ K

Kao ulazni podatak u numeričkim simulacijama se koristi srednji protok vode i srednja temperatura vode na ulazu. Numerički izračunata temperatura vode na izlazu se poredi sa srednjom vrijednošću izmjerenih temperatura vode na izlazu.

5.6.1. Validacija modela za slučaj kratkog vremenskog koraka

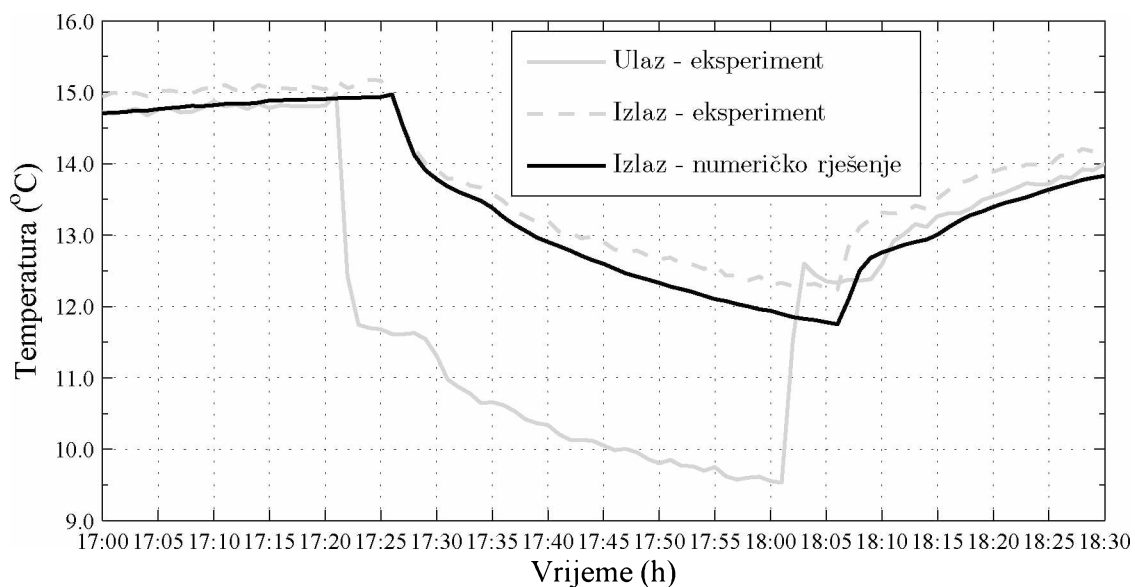
Za validaciju numeričkog modela za slučaj kratkog vremenskog koraka, iskorišćeni su podaci sa mjerenja na eksperimentalnoj instalaciji za period od prvih 15 dana (01.03.2005.-15.03.2005). U ovom periodu je toplotna pumpa radila u on-off režimu, dok je cirkulaciona pumpa radila bez prekida.

Izmjerene i numerički izračunate temperature vode na izlazu iz U-cijevi su upoređene za dva ciklusa rada toplotne pumpe, na dan 15.03.2005. Na slici 5.24 je prikazana promjena temperature vode u periodu od 15:00 do 16:30 (toplotna pumpa uključena od 15:11 do 15:50). Prilikom uključivanja toplotne pumpe u 15:11, temperatura vode na ulazu naglo pada za oko 3°C. Promjena temperature vode na izlazu se registruje tek 4 min 25 s kasnije, što odgovara vremenu potrebnom za izmjenu vode u cijevi, s obzirom da je ukupna dužina U-cijevi približno 150 m, a brzina strujanja vode u njoj oko 0,56 m/s. Kasnije u toku rada toplotne pumpe, temperatura vode na izlazu iz U-cijevi opada na sličan način kao i na ulazu. Toplotna pumpa se isključuje u 15:50 i tada temperature vode na ulazu naglo raste za oko 3°C. Na sličan način kao i prilikom uključivanja toplotne pumpe, porast temperature vode na izlazu se registruje sa kašnjenjem od 4 min 25 s. Sa slike 5.24 se uočava dobro slaganje izmjerenih i numerički izračunatih vrijednosti temperatura vode na izlazu. Prije svega, treba naglasiti da se i kod rezultata numeričke simulacije uočava kašnjenje nagle promjene temperature vode na izlazu iz U-cijevi prilikom uključivanja i isključivanja toplotne pumpe.



SLIKA 5.24 Poređenje eksperimentalnih i numeričkih rezultata za 15. mart od 15:00 do 16:30

Slična razmatranja važe i za promjenu temperature vode u periodu od 17:00 do 18:30 (toplotna pumpa uključena od 17:22 do 18:01) koji je prikazan na slici 5.25.

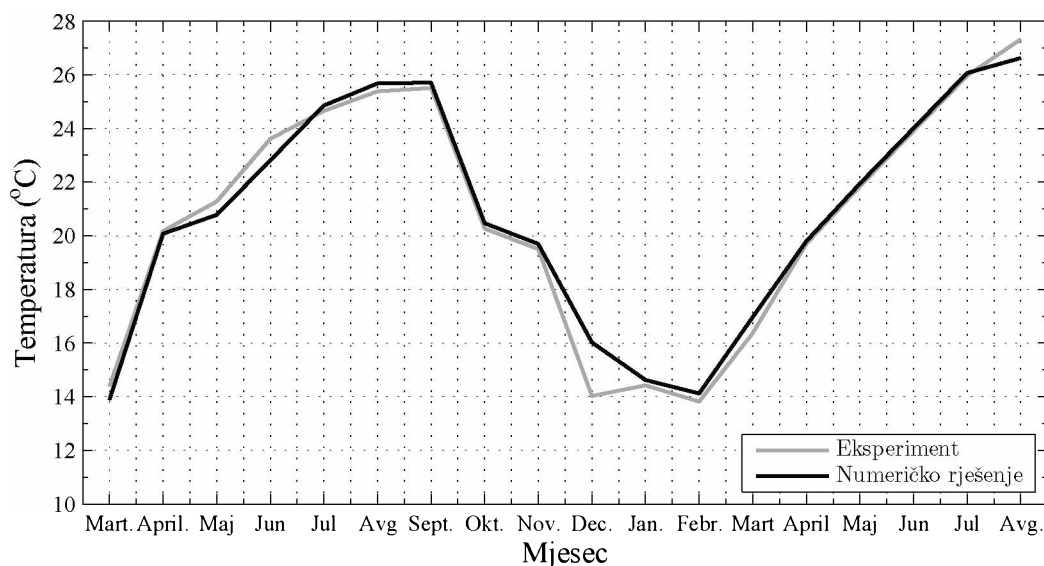


SLIKA 5.25 Poređenje eksperimentalnih i numeričkih rezultata za 15. mart od 17:00 do 18:30

Slična odstupanja 3D numeričkog rješenja sa kontrolisanim zapreminama objavio je Beier (2014).

5.6.2. Validacija modela za slučaj dugog vremenskog koraka

Za validaciju numeričkog modela za slučaj dugog vremenskog koraka, iskorišćeni su podaci sa mjerenja na eksperimentalnoj instalaciji za cijeli period od 18 mjeseci, od 01.03.2005. do 31.08.2006. U ovom slučaju na raspolaganju su srednje časovne vrijednosti izmjenjenog protoka i temperature vode na ulazu u U–cijev. Na slici 5.26 su prikazane izmjerene i numerički izračunate srednje mjesečne vrijednosti temperatura na izlazu iz U–cijevi.



SLIKA 5.26 Poređenje eksperimentalnih i numeričkih rezultata za period od 01.03.2005. do 31.08.2006.

Sa slike 5.26 se uočava relativno dobro slaganje numeričkog rješenja sa rezultatima mjerenja. Jedan od uzroka odstupanja je to što srednje časovne vrijednosti temperatura ne predstavljaju zadovoljavajuću vremensku rezoluciju kada su periodi uključenosti, odnosno isključenosti toplotne pumpe kraći od jednog sata. Ovaj uticaj bi mogao da se analizira kada bi na raspolaganju bile izmjerene temperature vode na ulazu U–cijev, osrednjene za vremenski korak reda veličine 1 min. Osim toga, uzrok odstupanja mogu da budu i pretpostavke koje su usvojene u modelu, a koje ne moraju u potpunosti da odgovaraju stvarnim uslovima (uniformna neporemećena temperatura tla, odsustvo strujanja podzemne vode i sl.).

6. Rezultati numeričkih simulacija

U ovom poglavlju su prikazani rezultati simulacija izvedenih pomoću razvijenog numeričkog modela.

U prvom dijelu poglavlja su dati proračuni za bušotinu sa zadatom geometrijom i toplotnim karakteristikama fluida, cijevi, ispune bušotine i tla. Cilj ovih simulacija je analiza nestacionarnog karaktera prenosa toplote kod geotermalnog razmijenjivača pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu. Takođe, rezultati simulacija pokazuju da se pomoću razvijenog numeričkog modela može reprodukovati odziv temperature fluida i tla kako pri izrazito nestacionarnom prenosu toplote koji se javlja neposredno nakon nagle promjene temperature fluida na ulazu, tako i kasnije u vremenu kada temperature teže stacionarnim vrijednostima. Na sličan način su ove mogućnosti svojih modela testirali Rees i He (2013), Wołoszyn i Gołaś (2013) i Oberdorfer (2014).

U drugom dijelu poglavlja je data analiza uticaja različitih parametara na razmjenu toplote. Prvo je analiziran uticaj brzine i temperature fluida za razmjenu toplote. Zatim je analiziran uticaj toplotnih karakteristika cijevi, ispune bušotin i tla. Od geometrijskih parametara analiziran je uticaj rastojanja između dva kaka U–cijevi. Na kraju je analiziran efekat strujanja podzemne vode na prenos toplote.

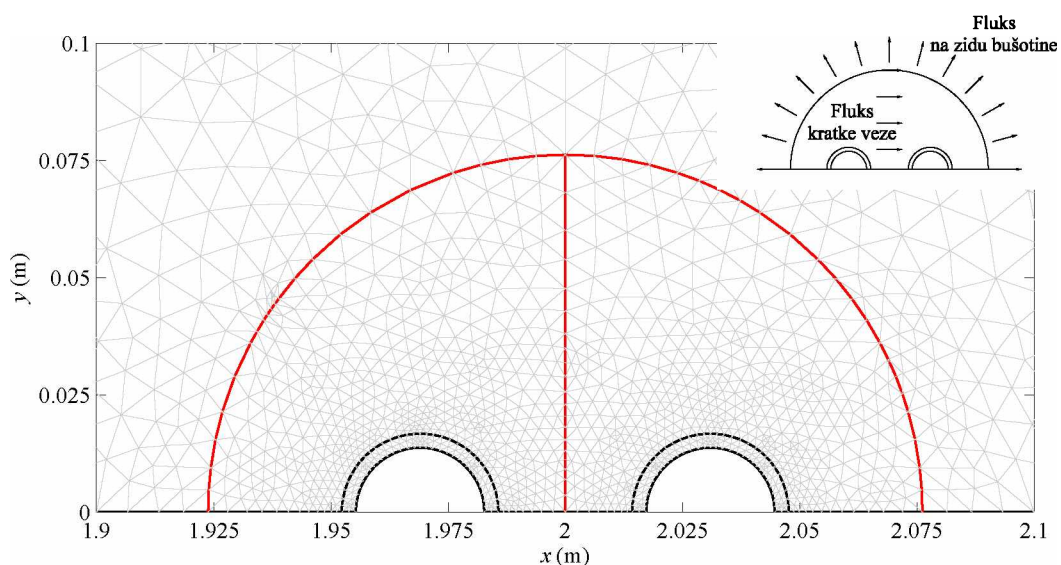
6.1. Odziv pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu

U svim simulacijama u kojima se analizira odziv temperature fluida i tla pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu, koriste se geometrijski podaci i toplotne karakteristike fluida, cijevi, ispune bušotine i tla koji su dati u tabeli 6.1.

TABELA 6.1 Geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala

	Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	150,4	mm
	Dubina bušotine	L_b	100	m
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	27,4	mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	33,4	mm
	Rastojanje između cijevi	s	28,53	mm
Cijev	Toplotna provodljivost	k_p	0,39	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1770	kJ/m ³ K
Ispuna bušotine	Toplotna provodljivost	k_g	0,75	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_g$	3900	kJ/m ³ K
Tlo	Toplotna provodljivost	k_s	2,5	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_s$	2012	kJ/m ³ K

Dakle, analizira se bušotina prečnika 150 mm i dubine 100 m. Početna temperatura u cijelom domenu je 10°C. Granica domena u radialnom pravcu je 2 m, i na njoj je kao granični uslov zadata konstantna temperatura 10°C. Fluid za razmjenu toplote je voda za koju je uzeta u obzir zavisnost toplotnih karakteristika od temperature. Na početku simulacije, temperatura vode na ulazu ima nagli porast sa početnih 10°C na 20°C i kasnije je konstantna. Brzina strujanja vode je u svakom proračunu konstantna, a analizirane su sledeće vrijednosti: 0,2 m/s, 0,4 m/s, 0,6 m/s, 0,8 m/s i 1,0 m/s. Rezultati simulacije interesantni za analizu su: promjena temperature fluida na izlazu iz cijevi u vremenu, profil temperature, fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze po dubini bušotine u pojedinačnim trenucima vremena. Osnovna trougaona mreža za analizirani problem ima 2255 čvorova i 4296 trouglova. Dio mreže oko bušotine je prikazan na slici 6.1. Mreža je generisana na način da se lako mogu izračunati fluks na zidu bušotine i fluks kratke veze.



SLIKA 6.1 Dio osnovne trougaone mreže za analizirani problem, fluks na zidu bušotine i fluks kratke veze

Proces prenosa toplote je izrazito nestacionaran neposredno nakon nagle promjene temperature vode na ulazu. Zbog toga su posebno analizirani dobijeni rezultati u relativno kratkom vremenskom intervalu sa samog početka simulacije i rezultati dobijeni 48 sati od početka simulacije.

6.1.1. Analiza rezultata u kratkom vremenskom intervalu sa samog početka simulacije

Odziv temperature vode, cijevi, ispune bušotine i tla na naglu promjenu temperature vode na ulazu u cijev, na samom početku simulacije je izrazito nestacionaran. Ova nestacionarnost je posljedica početnih temperatura u domenu, kao i toplotne inercije. Rezultati za različite brzine strujanja vode su prikazani u nekoliko vremenskih trenutaka, koji predstavljaju umnožak od tzv. vremena prolaza vode kroz cijev koje se definiše kao:

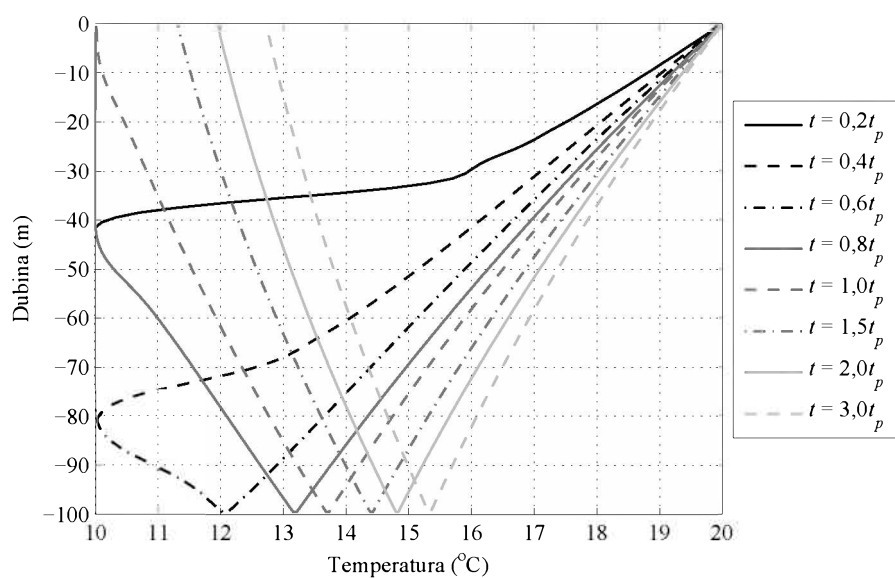
$$t_p = \frac{L_p}{v_f} = \frac{2L_b}{v_f} \quad (6.1)$$

gdje je v_f brzina strujanja vode, L_p ukupna dužina U-cijevi i L_b dubina bušotine.

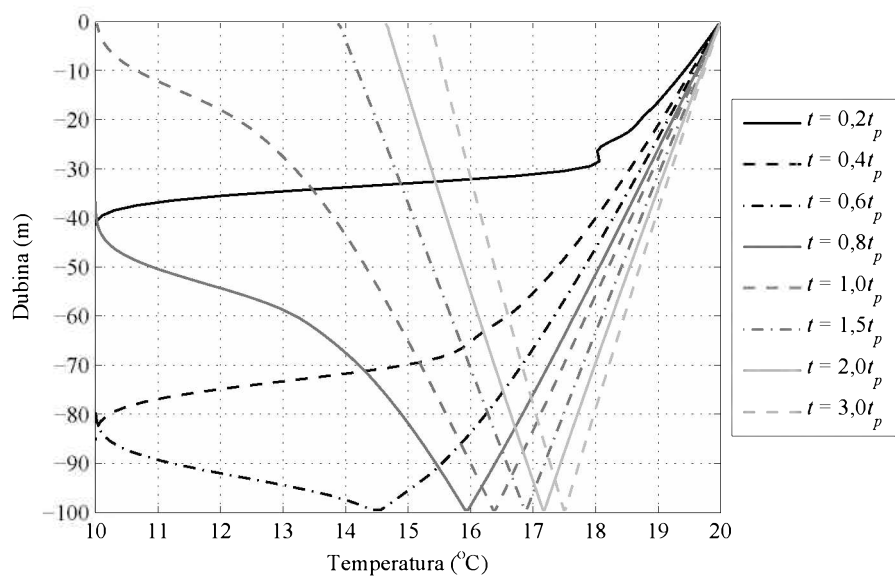
Promjena temperature vode po dubini bušotine za različite brzine strujanja (0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s) je prikazana na slici 6.2, slici 6.3 i slici 6.4. Profili temperature su dati za sledeće trenutke vremena: $0,2t_p$, $0,4t_p$, $0,6t_p$, $0,8t_p$, $1,0t_p$, $1,5t_p$, $2,0t_p$ i $3,0t_p$, gdje je t_p različito za svaku brzinu strujanja. Kako je U-cijev ukupne dužine 200 m, vrijeme prolaza je 1000 s za brzinu od 0,2 m/s, oko 333 s za brzinu od 0,6 m/s i samo 200 s za brzinu od 1 m/s.

Profil temperature je za sve vrijednosti brzina izrazito nelinearan na samom početku simulacije ($t < t_p$), što je prije svega posljedica početnih uslova. Za brzinu strujanja od 0,2 m/s nelinearnost profila temperature je i dalje uočljiva i nakon $t = 3,0t_p$. Za brzine strujanja 0,6 m/s i 1,0 m/s profil temperature je praktično linearan nakon $t = 3,0t_p$. Profil temperature je simetričan, u smislu da je pad temperature jednak i u silaznoj i u uzlaznoj cijevi. Takođe, uočava se da je za npr. $t = 3t_p$ najveća razlika temperature vode na ulazu i izlazu pri najmanjoj brzini strujanja od 0,2 m/s, a najmanja pri najvećoj analiziranoj brzini od 1 m/s.

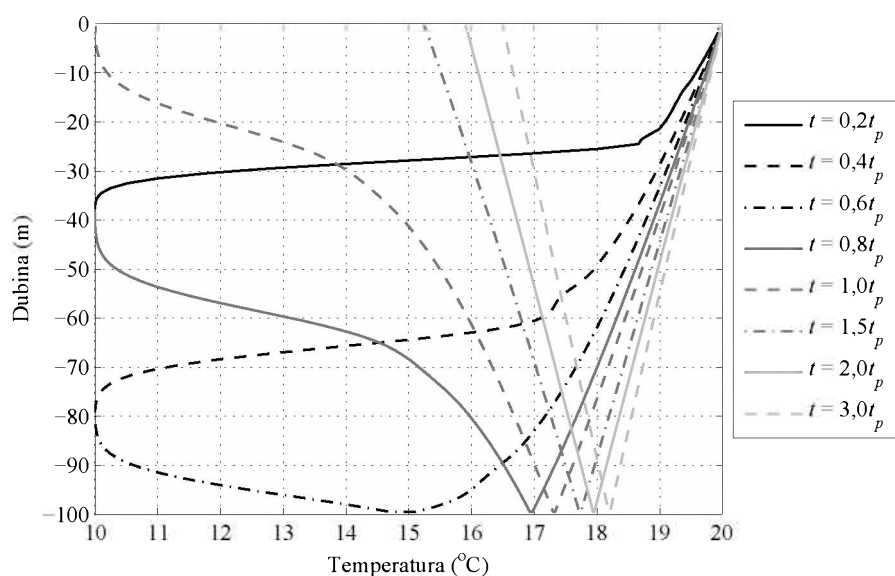
Na samom početku simulacije, razlika temperature fluida i ispune bušotine i tla je najveća, pa je zbog toga relativno veliki toplotni fluks koji se od fluida odvodi preko unutrašnje površine cijevi. Nakon izvjesnog vremena uslijed porasta temperature ispune bušotine i tla, toplotni fluks koji se odvodi od vode se smanjuje, pa se smanjuje i razlika temperature vode na ulazu i izlazu iz cijevi.



SLIKA 6.2 Promjena temperature vode po dubini bušotine za $v_f = 0,2$ m/s

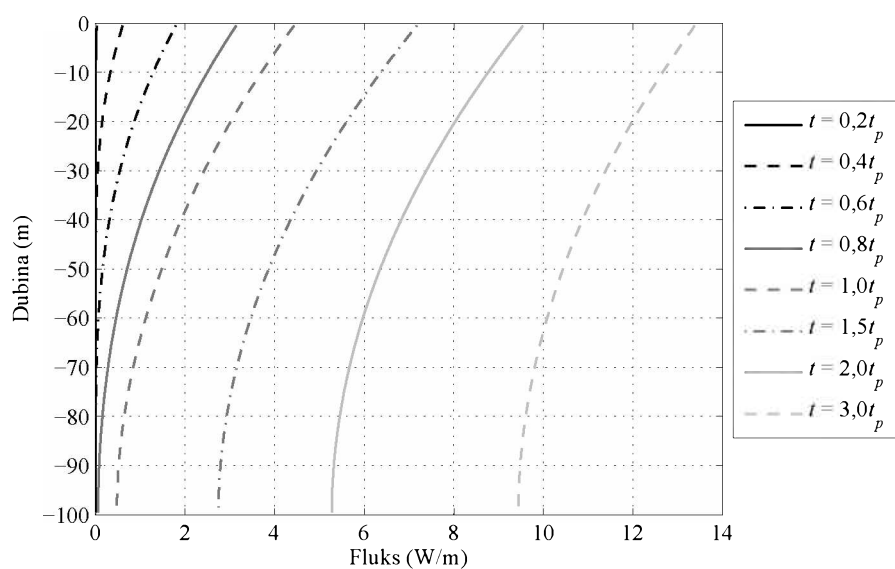


SLIKA 6.3 Promjena temperature vode po dubini bušotine za $v_f = 0,6$ m/s

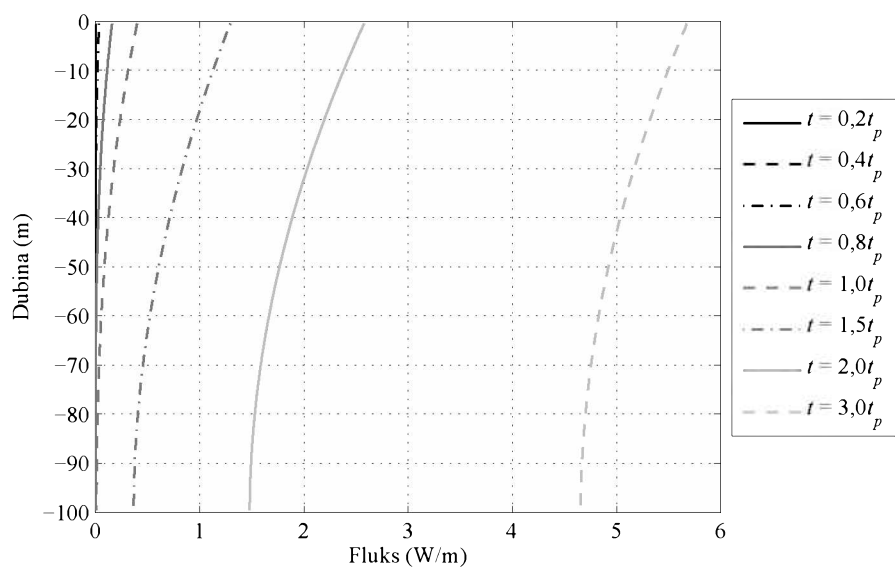


SLIKA 6.4 Promjena temperature vode po dubini bušotine za $v_f = 1,0$ m/s

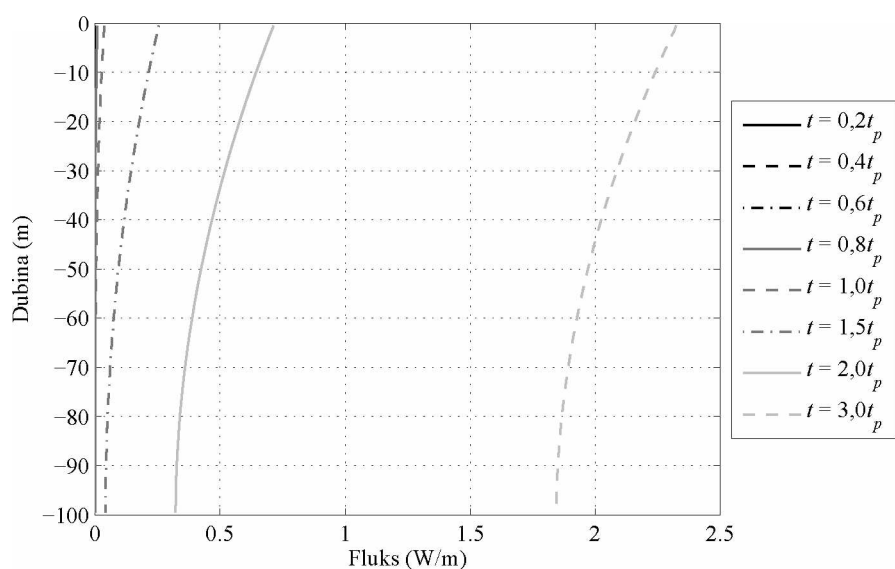
Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini, za različite brzine strujanja (0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s) je prikazana na slici 6.5, slici 6.6 i slici 6.7. Na samom početku simulacije fluks na zidu bušotine jednak je nuli s obzirom na činjenicu da je početna temperatura uniformna u cijelom domenu i da sama bušotina ima određenu toplotnu inerciju. Nakon izvjesnog vremena od početka odbacivanja toplote, poremećaj temperature dolazi do zida bušotine i registruje se fluks na zidu bušotine. Fluks na zidu bušotine raste u toku vremena. U relativno kratkom periodu na početku simulacije koji je prikazan na dijagramima, fluks na zidu bušotine nelinearno opada povećanjem dubine.



SLIKA 6.5 Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini bušotine za $v_f = 0,2 \text{ m/s}$

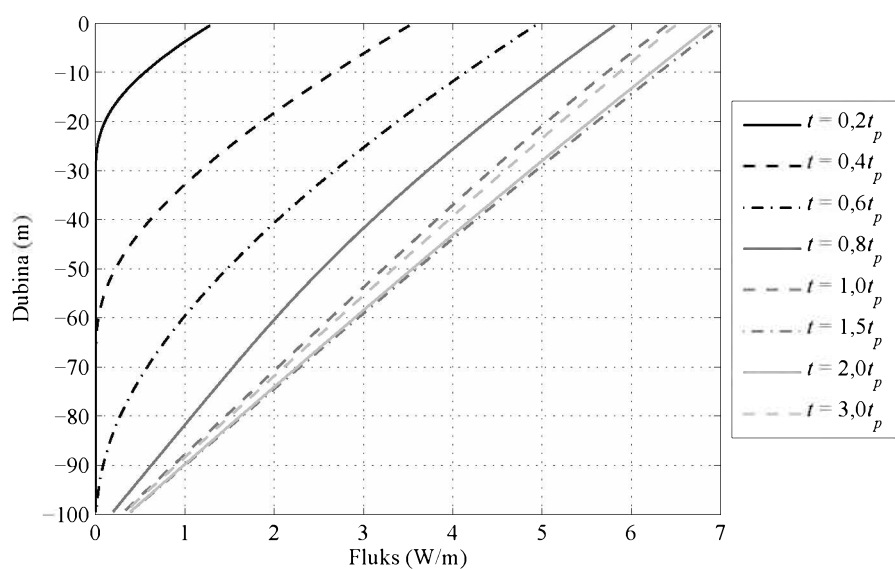


SLIKA 6.6 Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini bušotine za $v_f = 0,6 \text{ m/s}$

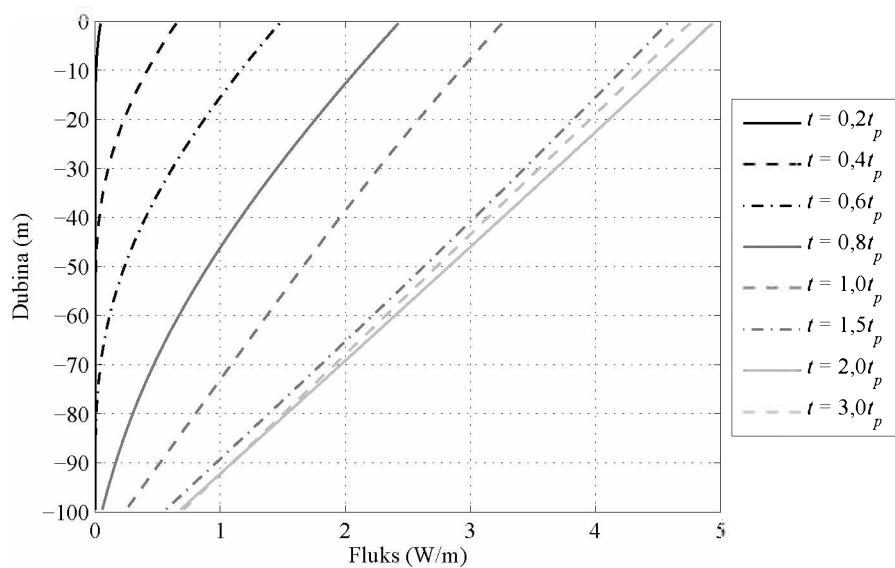


SLIKA 6.7 Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini bušotine za $v_f = 1,0$ m/s

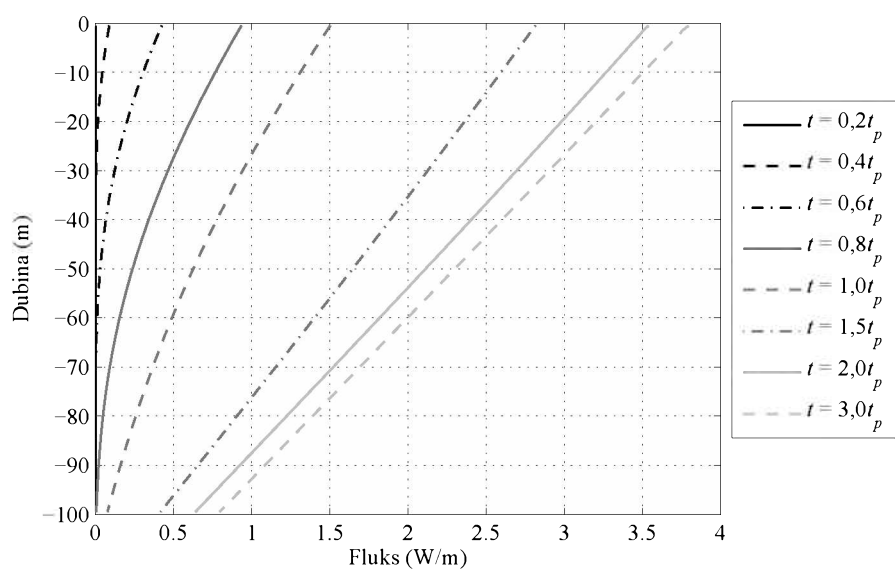
Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine, za različite brzine strujanja (0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s) je prikazana na slici 6.8, slici 6.9 i slici 6.10. Ovaj fluks se javlja uslijed razlike temperature vode u blisko postavljnim granama U–cijevi. Nepoželjan je jer smanjuje efikasnost razmijenjivača uslijed prenošenja toplote sa jednog na drugi krak cijevi umjesto prema zidu bušotine. Najveću vrijednost ima na površini tla gdje je najveća razlika temperature fluida u silaznom i uzlaznom kraku cijevi, a najmanju na dnu bušotine. Pri svim brzinama strujanja profil fluksa kratke veze je na samom početku izrazito nelinearan zbog nelinearnog profila temperature vode. Nakon relativno kratkog vremena promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine postaje linearna.



SLIKA 6.8 Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine za $v_f = 0.2$ m/s

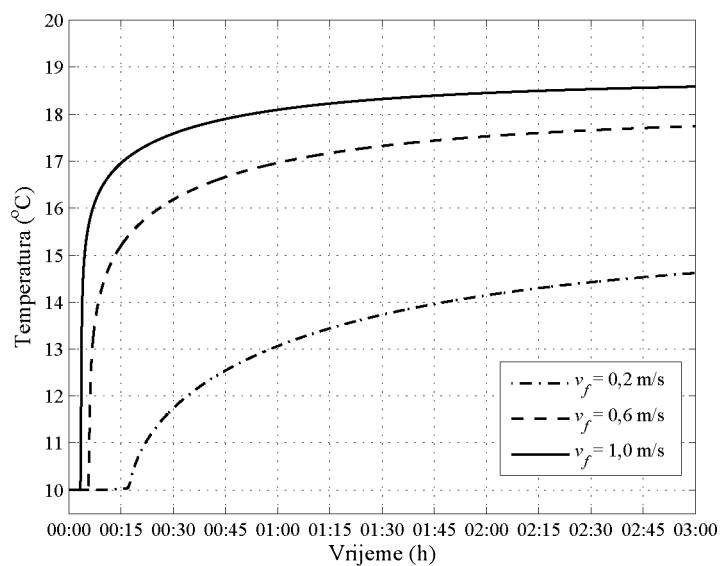


SLIKA 6.9 Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine za $v_f = 0.6$ m/s



SLIKA 6.10 Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine za $v_f = 1,0$ m/s

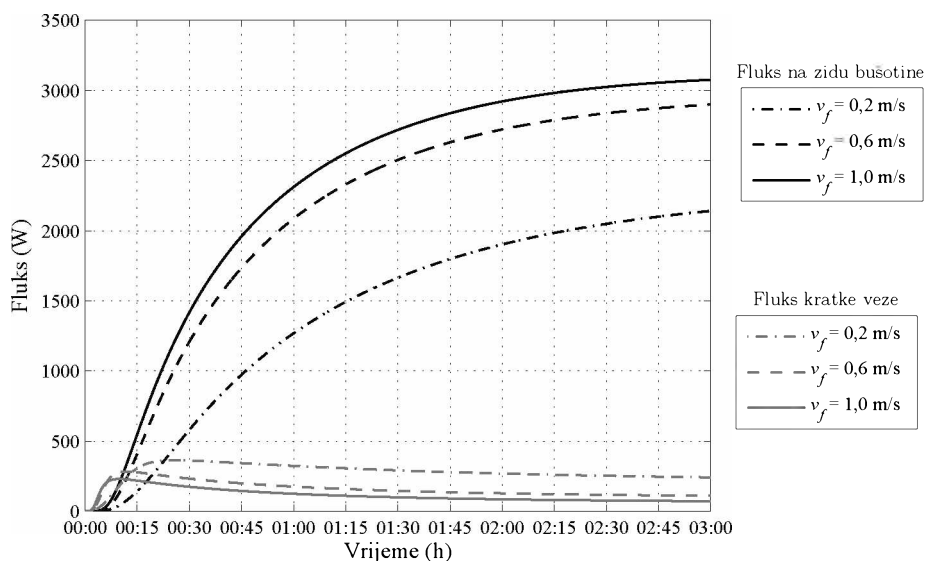
Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu, za brzine strujanja 0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s je prikazana na slici 6.11.



SLIKA 6.11 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Promjena ukupnog fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze u vremenu, za brzine strujanja 0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s je prikazana na slici 6.12. U posmatranom vremenskom intervalu, fluks na zidu bušotine je veći pri većim brzinama strujanja. Sa

druge strane, uočava se da fluks kratke veze prvo raste, dostiže maksimum, a zatim opada u vremenu i ima veće vrijednosti pri manjim brzinama strujanja.

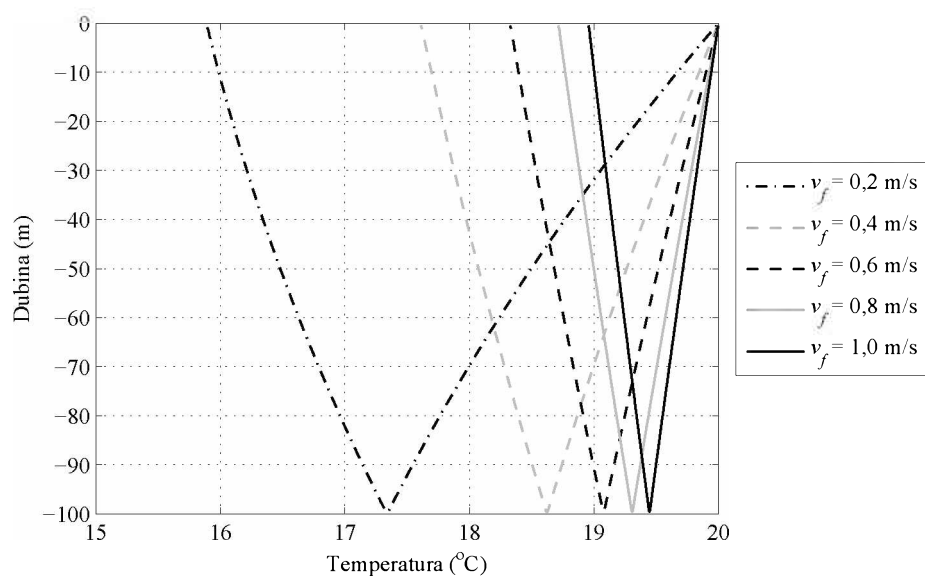


SLIKA 6.12 Promjena fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze u vremenu

6.1.2. Analiza rezultata na kraju perioda od 48 sati

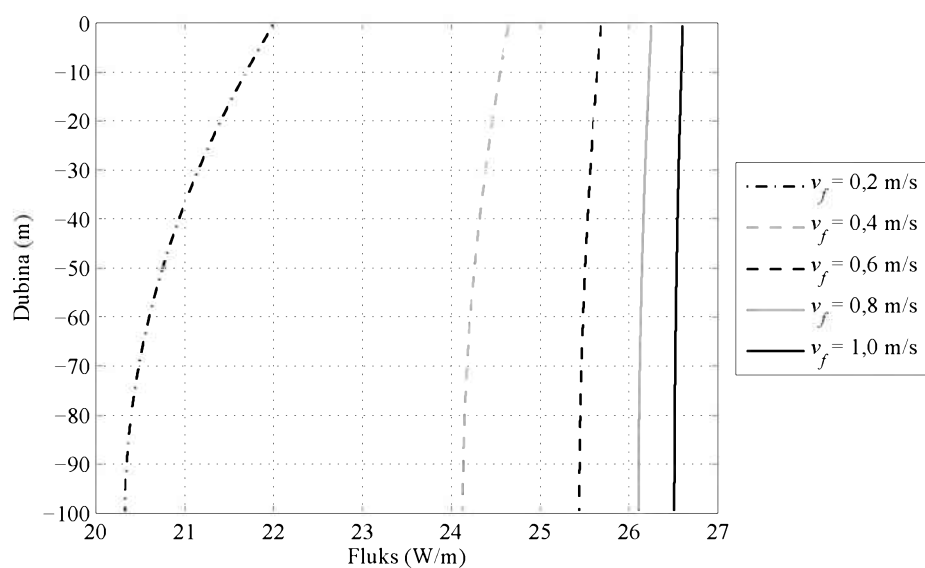
Sa zadatim početnim i graničnim uslovima u analiziranom problemu, poslije dovoljno dugo vremena od početka simulacije postiže se stacionarno stanje. Vrijeme potrebno za postizanje stacionarnog stanja je obrnuto proporcionalno brzini strujanja vode. U svim proračunima je simuliran rad geotermalnog razmijenjivača u periodu od 48 sati od početka rada. Ovo nije dovoljno dug period da bi se postiglo stacionarno stanje, ali je dovoljan da bi mogli da se naprave određeni zaključci. U nastavku su prikazani profili temperature vode, fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze po dubini bušotine, za sve analizirane vrijednosti brzine vode nakon 48 sati od početka simulacije.

Promjene temperatura vode po dubini bušotine za sve analizirane brzine strujanja nakon 48 h su prikazane na slici 6.13. Primjećuje se da pri malim brzinama strujanja promjena temperature vode po dubini bušotine nelinearna i 48 h od početka simulacije, a da je pri većim brzinama strujanja promjena linearna.



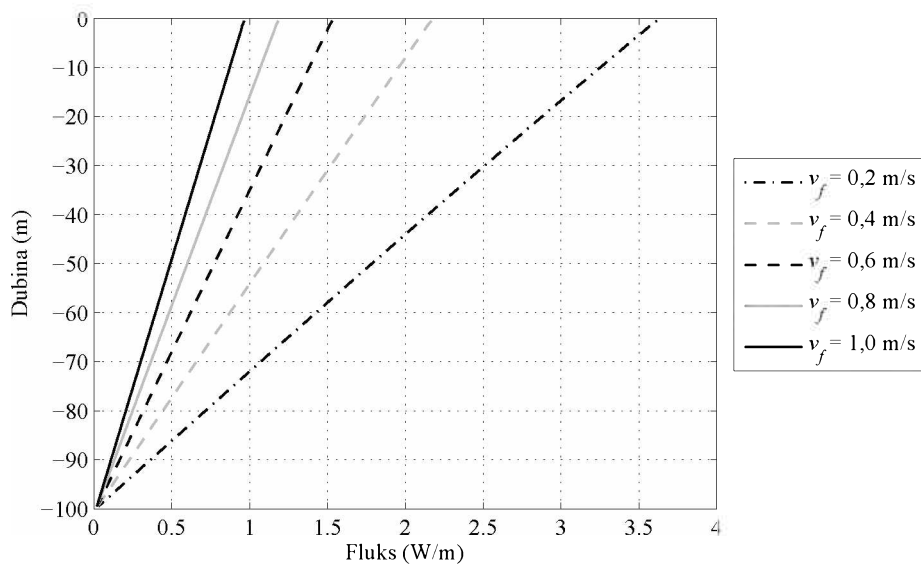
SLIKA 6.13 Promjena temperature vode po dubini bušotine poslije 48 h

Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini, za sve analizirane brzine strujanja nakon 48 h je prikazana na slici 6.14. Uočava se da je fluks na zidu bušotine značajno veći u odnosu na analizirani period sa samog početka simulacije. Takođe, uočava se da se nakon 48 h od početka simulacije nelinearnost promjene fluksa na zidu bušotine sa dubinom značajno smanjila. Za očekivati je da bi se daljim približavanjem stacionarnom stanju, dobio uniforman profil fluksa po dubini.



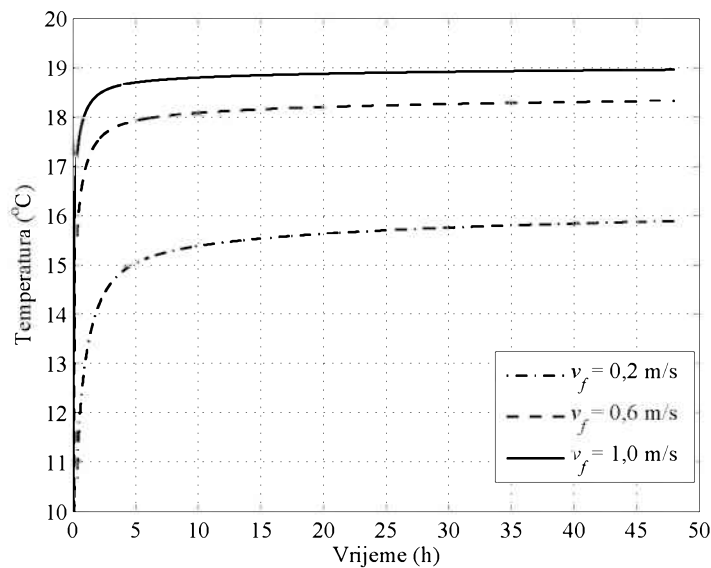
SLIKA 6.14 Promjena fluksa na zidu bušotine po dubini bušotine poslije 48 h

Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine, za sve analizirane brzine strujanja nakon 48 h je prikazana na slici 6.15. Najveća vrijednost fluksa kratke veze je na površini tla gdje je najveća razlika temperature vode u silaznoj i uzlaznoj cijevi. Fluks kratke veze je jednak nuli na dnu bušotine, a promjena po dubini je linearna. Fluks kratke veze je veći za manje brzine strujanja vode. Takođe, uočava se da je fluks kratke veze nakon 48 h značajno manji nego na kraju kratkog analiziranog perioda sa početka simulacije ($t = 3t_p$).



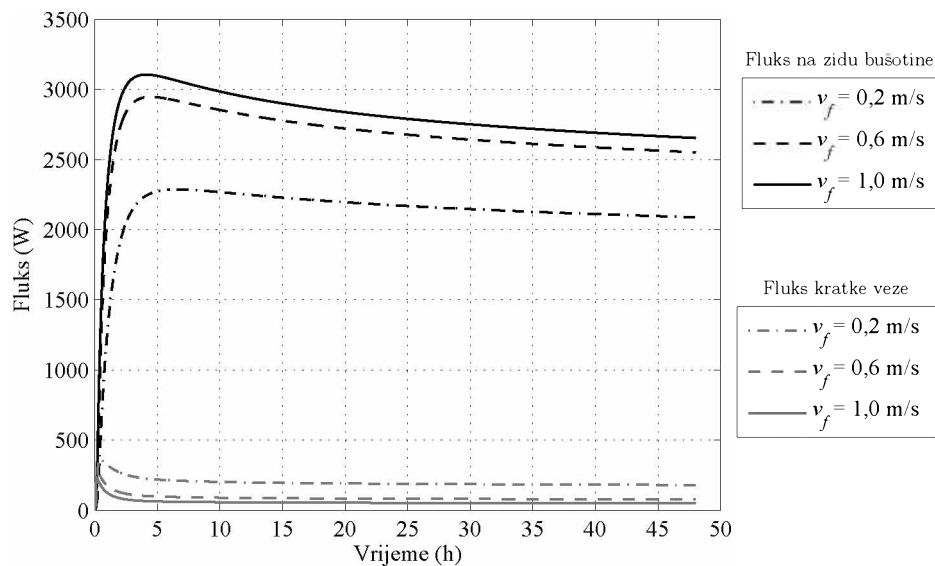
SLIKA 6.15 Promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine poslije 48 h

Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu, za brzine strujanja 0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s je prikazana na slici 6.16.



SLIKA 6.16 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

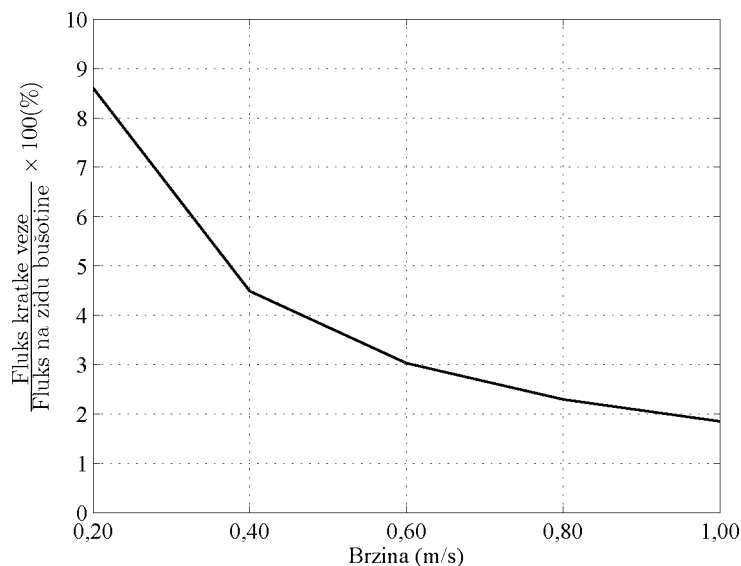
Promjena fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze u vremenu, za brzine strujanja 0,2 m/s, 0,6 m/s i 1,0 m/s je prikazana na slici 6.17. Uočava se da i fluks na zidu bušotine nakon određenog vremena dostiže maksimalnu vrijednost i kasnije opada u vremenu, približavajući se stacionarnom stanju.



SLIKA 6.17 Promjena fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze u vremenu

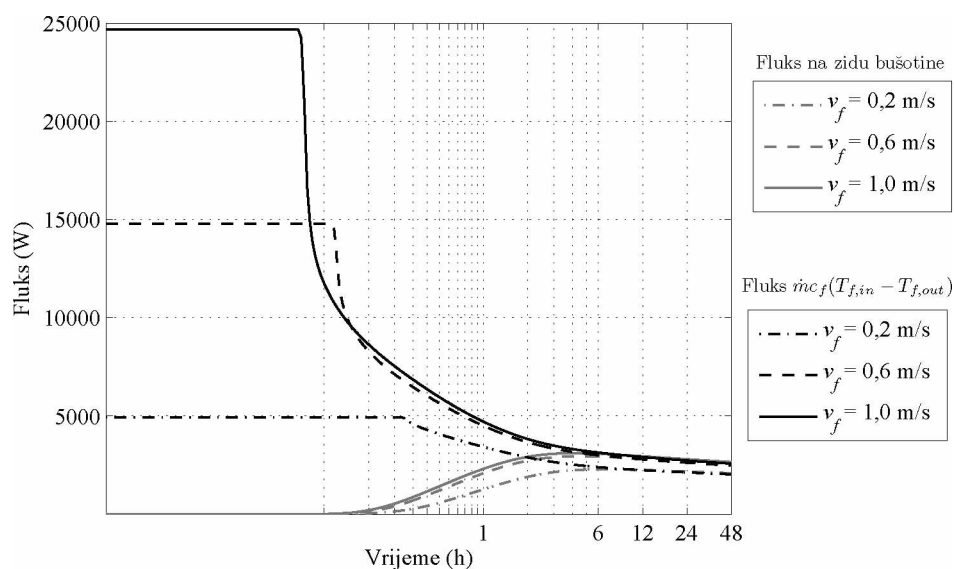
Odnos fluksa kratke veze i fluksa na zidu bušotine u funkciji od brzine strujanja je prikazan na slici 6.18. Ovaj odnos opada nelinearno povećanjem brzine strujanja vode. Pri brzini strujanja od 0,2 m/s odnos je 8,60 %, pri brzini od 0,6 m/s odnos je 3,03 %, pri brzini od 1,0 m/s odnos je 1,00 %.

dok je pri brzini od 1,0 m/s odnos 1,85 %. Ovakva zavisnost je posljedica činjenice da povećanjem brzine strujanja smanjuje razlika temperature vode u silaznom i uzlaznom kraku cijevi, pa time i fluks kratke veze, a istovremeno povećava srednja temperature fluida po dubini bušotine, a zbog toga i fluks na zidu bušotine.



SLIKA 6.18 Odnos fluksa kratke veze i fluksa na zidu bušotine za razne brzine strujanja

Na slici 6.19 je prikazana promjena ukupnog fluksa na zidu bušotine i fluksa izračunatog na osnovu protoka i temperatura vode na ulazu i izlazu iz cijevi. Korišćena je logaritamska skala na x osi, kako bi se na istom dijagramu mogle jasno pratiti promjene i na samom početku simulacije i na kraju perioda od 48 h. Do otprilike $t = t_p$ fluks izračunat na osnovu protoka i temperatura vode na ulazu i izlazu je konstantan, jer se do tog trenutka temperatura vode na izlazu ne mijenja. Nakon toga, fluks računat na ovaj način naglo opada uslijed smanjenja razlike temperatura vode na ulazu i izlazu. Sa druge strane fluks na zidu bušotine postepeno raste, poslije par sati od početka simulacije dostiže maksimalnu vrijednost i onda postepeno opada. Nakon izvjesnog vremena, ova dva fluksa se asimptotski približavaju i nakon 48 h iznose oko 2,06 kW za $v_f = 0,2$ m/s, 2,51 kW za $v_f = 0,6$ m/s i 2,65 kW za $v_f = 1$ m/s.



SLIKA 6.19 Promjena fluksa na zidu bušotine i fluksa izračunatog na osnovu protoka i temperatura vode na ulazu i izlazu iz cijevi

Slični rezultati analize nestacionarnog prenosa toplote dobili bi se i za slučaj absorpcije toplote iz tla. U tom slučaju bi temperatura fluida na ulazu bila niža od temperature tla.

6.2. Analiza uticaja raznih parametara na razmjenu toplote

Pomoću razvijenog numeričkog modela, moguća je analiza uticaja pojedinih parametara na prenos toplote kod geotermalnog razmijenjivača. Geometrija i toplotne karakteristike fluida, cijevi, ispune bušotine i tla za referentni slučaj su dati u tabeli 6.2. U svim proračunima je neporemećena temperatura tla 15°C , a spoljašnja granica domena na radijusu od 2 m od centra bušotine. Parametarska analiza je urađena i za slučaj odbacivanja toplote u tlo (sezona hlađenja). U referentnom slučaju fluid za prenos toplote je voda koja struji brzinom od 0,6 m/s, dok je temperatura na ulazu je 20°C .

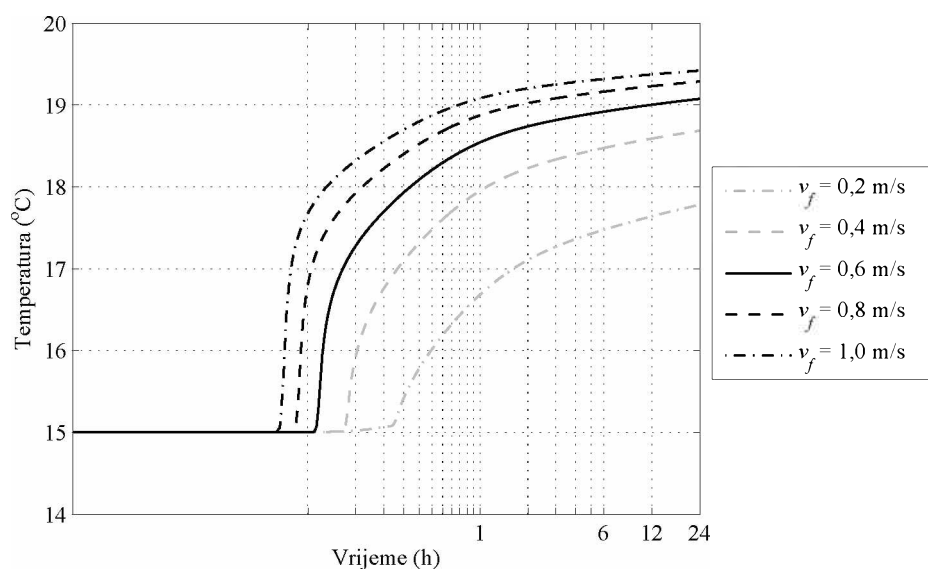
TABELA 6.2 Geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala

	Veličina	Oznaka	Vrijednost	Jedinica
Geometrija bušotine	Prečnik bušotine	d_b	150,4	mm
	Dubina bušotine	L_b	100	m
	Unutrašnji prečnik cijevi	$d_{p,i}$	27,4	mm
	Spoljašnji prečnik cijevi	$d_{p,o}$	33,4	mm
	Rastojanje između cijevi	s	28,53	mm
Cijev	Toplotna provodljivost	k_p	0,41	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_p$	1995	kJ/m ³ K
Ispuna bušotine	Toplotna provodljivost	k_g	1,00	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_g$	2000	kJ/m ³ K
Tlo	Toplotna provodljivost	k_s	2,0	W/mK
	Toplotni kapacitet	$(\rho c)_s$	2000	kJ/m ³ K

U svim numeričkim proračunima simulira se 24 h rada geotermalnog razmijenjivača. Rezultati simulacija koji se porede u parametarskoj analizi su: promjena temperature fluida na izlazu iz cijevi u vremenu, profil temperature fluida po dubini bušotine i promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu.

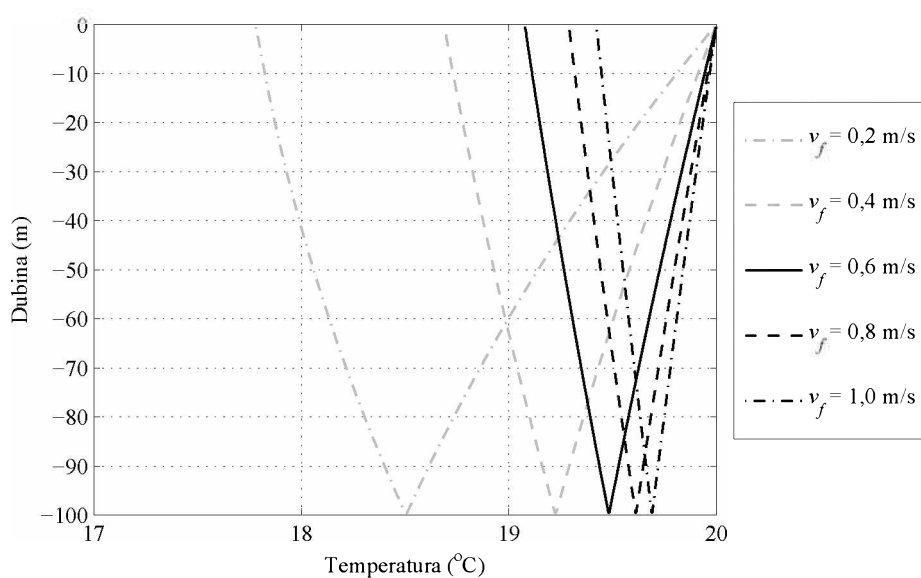
6.2.1. Analiza uticaja brzine strujanja fluida za razmjenu toplote

Analizirane su sledeće vrijednosti brzine strujanja vode: 0,2 m/s, 0,4 m/s, 0,6 m/s, 0,8 m/s i 1,0 m/s. Promjena temperature vode na izlazu je data na slici 6.20. Pri svim brzinama strujanja vode, nakon izvjesnog vremena temperatura na izlazu počinje naglo raste od početne vrijednosti, a zatim postepeno raste kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Očigledno je da se povećanjem brzine strujanja povećava i temperatura vode na izlazu.



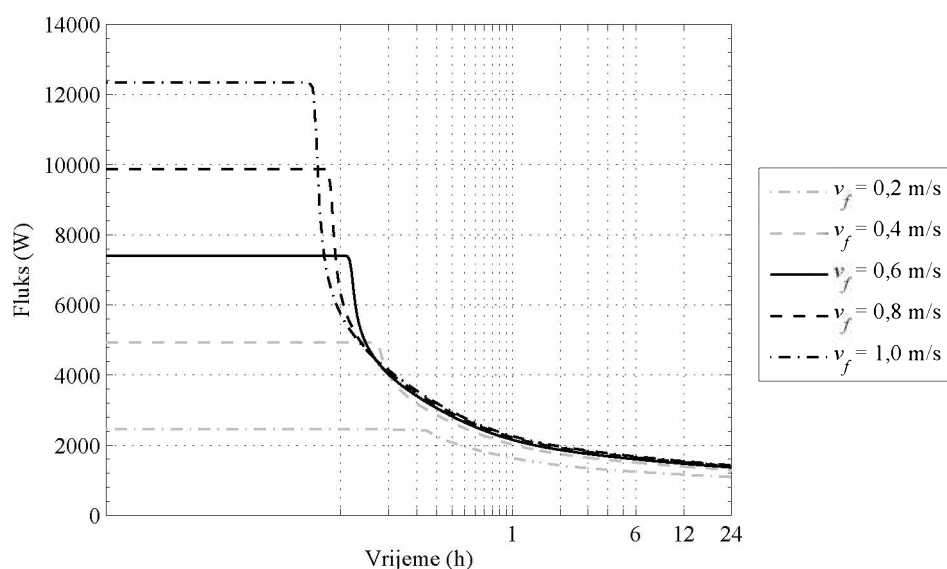
SLIKA 6.20 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Na slici 6.21 je prikazana promjena temperature vode duž cijevi nakon 24 h. Pri svim analiziranim brzinama strujanja temperatura vode monotonno opada od ulaza do izlaza iz cijevi. Uočava se da je promjena temperature vode nelinearna pri manjim brzinama strujanja i da je pad temperature vode veći u silaznoj nego u uzlaznoj grani cijevi. Pri većim brzinama strujanja, temperatura vode opada linearno i temperatura vode na dnu bušotine je približno jednaka srednjoj vrijednosti temperatura na ulazu i izlazu iz U-cijevi.



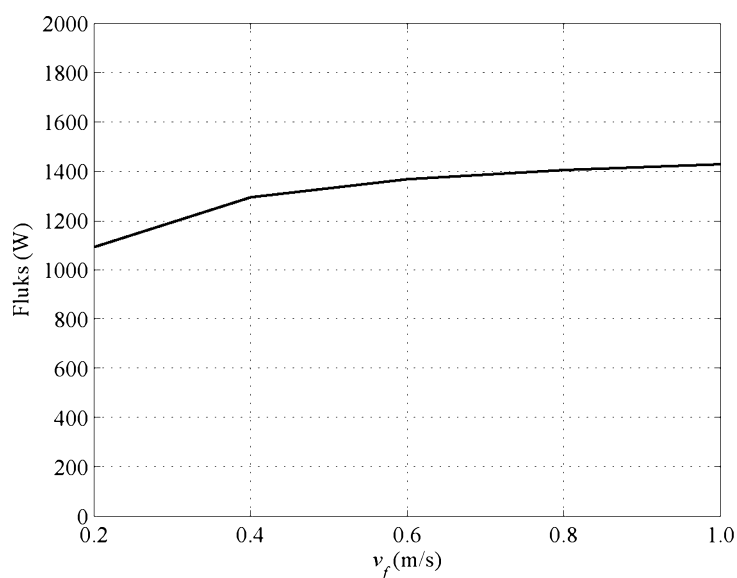
SLIKA 6.21 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.22. Pri svim brzinama strujanja vode, nakon izvjesnog vremena fluks koji se odbacuje u tlo naglo opada sa početnih vrijednosti, a zatim postepeno opada kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Visoke početne vrijednosti toplotnog fluksa su posljedica početnih temperatura u domenu. Uticaj brzine strujanja na fluks koji se razmjenjuje sa tlom je teško uočiti nakon 5 – 10 min od početka rada, osim za slučaj najmanje brzine od 0,2 m/s.



SLIKA 6.22 Promjena fluksa koji se razmjenjuje sa tlom u vremenu

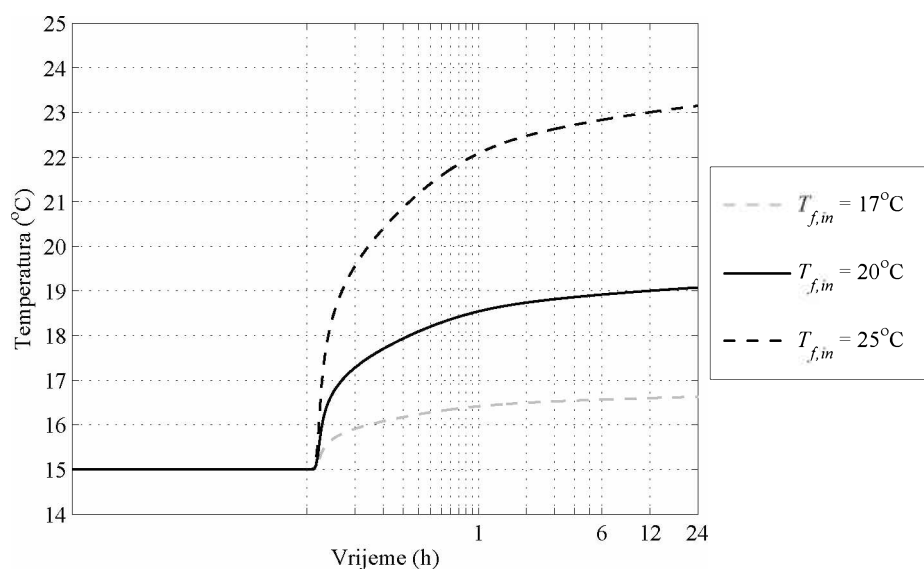
Ipak, detaljnijom analizom rezultata numeričke simulacije se uočava da se povećanjem brzine strujanja povećava i vrijednost toplotnog fluksa koji se razmjenjuje sa tlom. Veza između brzine strujanja fluida i fluksa koji se razmjenjuje sa tlom je data na slici 6.23. Povećanjem brzine strujanja sa 0,6 m/s na 0,8 m/s, fluks se povećava za 2,73 %. Daljim povećanjem brzine sa 0,8 m/s na 1,0 m/s fluks se povećava za dodatnih samo 1,63 %. Ovo ukazuje na činjenicu da nije svrsishodno povećavati protok preko određene vrijednosti u cilju povećanja fluksa.



SLIKA 6.23 Zavisnost fluksa koji se razmjenjuje sa tlom od brzine strujanja fluida nakon 24 h od početka rada

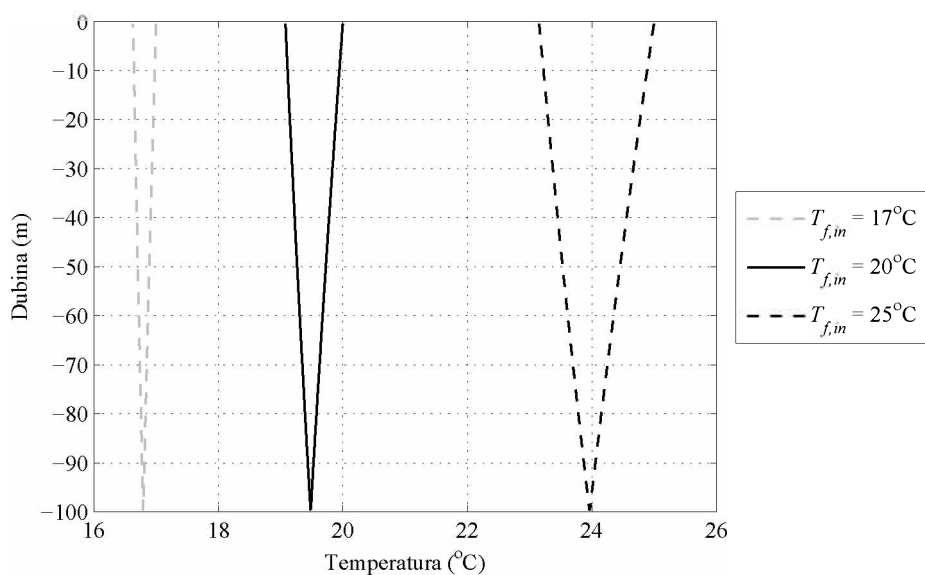
6.2.2. Analiza uticaja temperature vode na ulazu

Analizirane su sledeće vrijednosti temperature vode na ulazu: 17°C , 20°C i 25°C . Na slici 6.24 je data promjena temperature vode na izlazu. Uočava se da se povećanjem temperature vode na ulazu povećava razlika temperatura vode na ulazu i izlazu. Nakon 24 h pri $T_{f,in} = 17^{\circ}\text{C}$ razlika temperatura je samo $0,37^{\circ}\text{C}$, pri $T_{f,in} = 20^{\circ}\text{C}$ razlika je $0,92^{\circ}\text{C}$ i pri $T_{f,in} = 25^{\circ}\text{C}$ razlika je $1,84^{\circ}\text{C}$. Ovo je posljedica toga što se povećanjem temperature fluida na ulazu povećava razlika između temperature fluida i temperature tla.



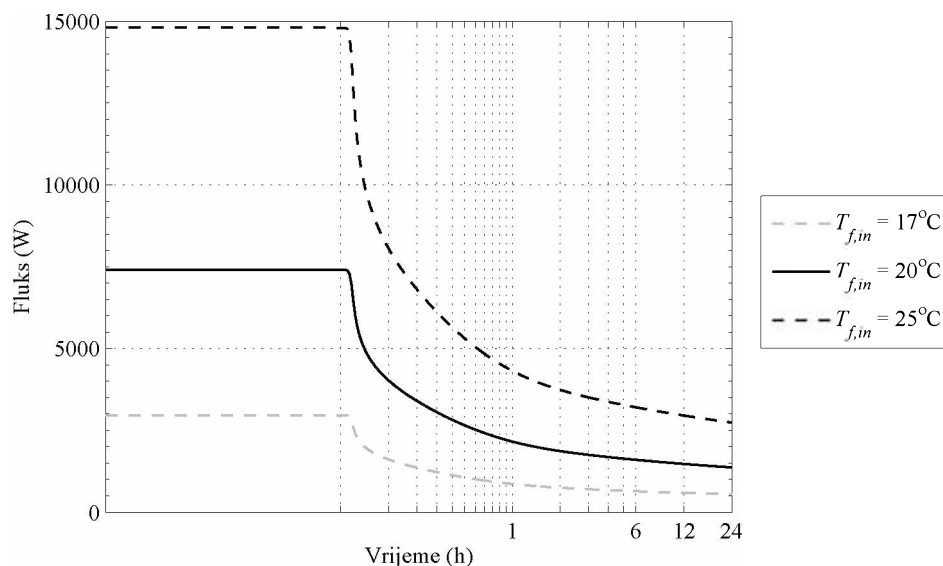
SLIKA 6.24 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Činjenica da se razlika temperatura fluida na ulazu i izlazu iz cijevi povećava povećanjem temperature vode na ulazu je jasno uočljiva i sa slike 6.25 na kojoj je prikazana promjena temperature vode duž U–cijevi nakon 24 h.



SLIKA 6.25 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.26. Pri svim analiziranim temperaturama vode na ulazu, nakon izvjesnog vremena fluks koji se odbacuje u tlo naglo opada sa početnih vrijednosti, a zatim postepeno opada kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Visoke početne vrijednosti toplotnog fluksa su posljedica početnih temperatura u domenu. Fluks koji se razmjenjuje sa tlom raste sa povećanjem temperature vode na ulazu u U–cijev.



SLIKA 6.26 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

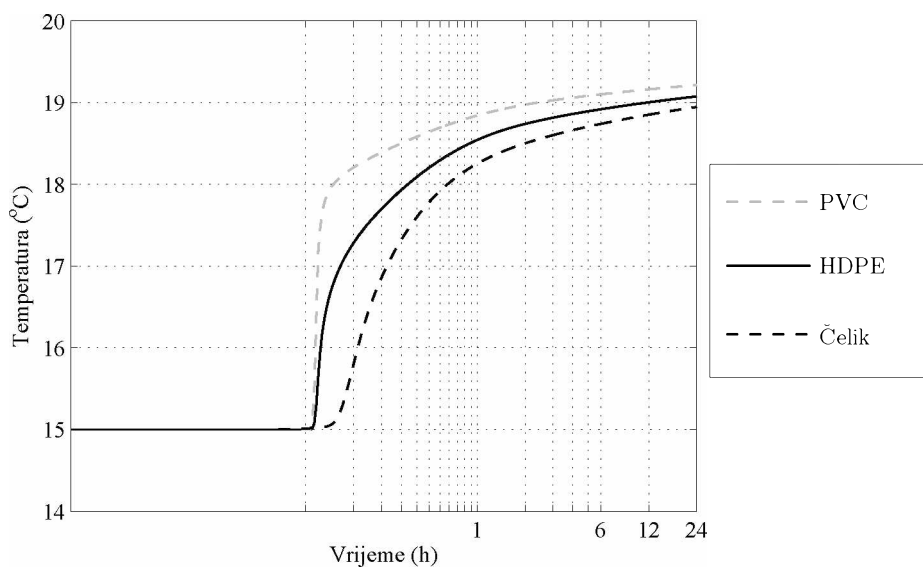
6.2.3. Analiza uticaja toplotnih karakteristika cijevi

Povećanjem toplotne provodljivosti materijala cijevi smanjuje se otpor prostiranju toplote kroz zid cijevi. Da bi se uticaj materijala cijevi na prostiranje toplote kod geotermalnog razmijenjivača kvantifikovao, analizirani su sledeći materijali: HDPE, PVC i čelik. Toplotne karakteristike ovih materijala su date u tabeli 6.3

TABELA 6.3 Toplotne karakteristike analiziranih materijala cijevi

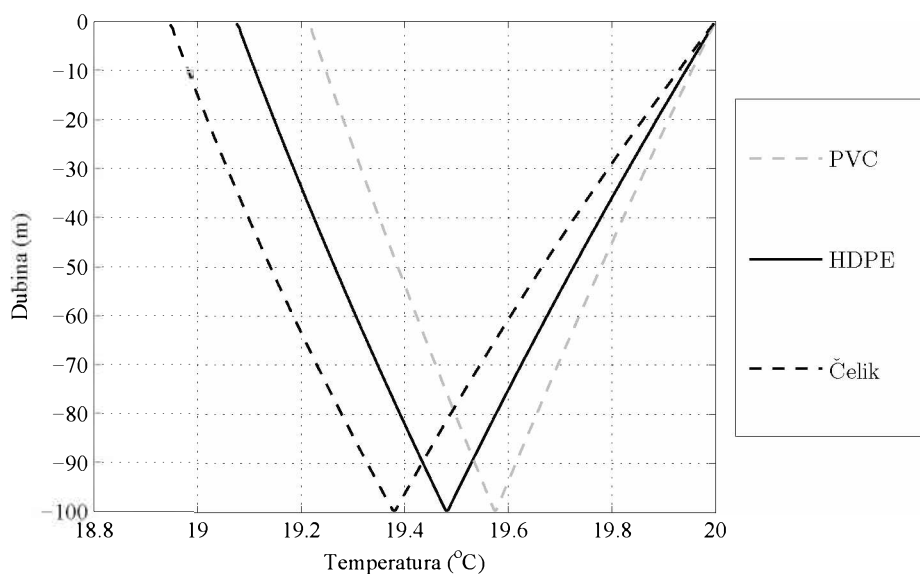
Materijal	Toplotna provodljivost (W/mK)	Gustina (kg/m ³)	Specifična toplota (J/kgK)
HDPE	0,41	950	2100
PVC	0,15	1360	1050
Čelik	27,60	7740	561

Promjena temperature vode na izlazu je data na slici 6.27. Nakon izvjesnog vremena temperatura na izlazu počinje naglo raste od početne vrijednosti, a zatim postepeno raste kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Uočava se da se povećanjem toplotne provodljivosti materijala cijevi (najmanja je za PVC, najveća za čelik), smanjuje temperatura vode na izlazu. U periodu do 1 h od početka simulacije, kada je izražena nestacionarnost prenosa toplote, uočava se i uticaj toplotnog kapaciteta materijala cijevi (najmanji je za PVC, a najveći za čelik).



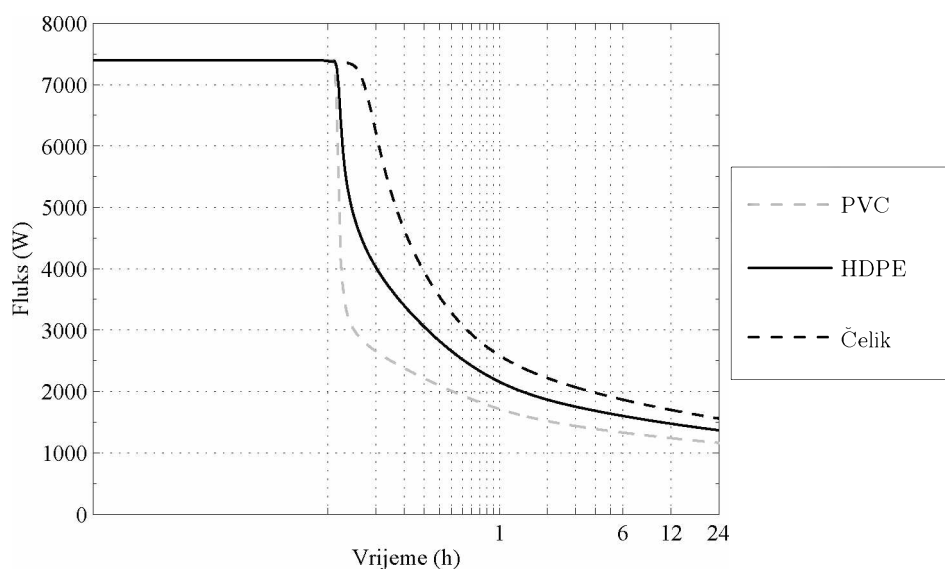
SLIKA 6.27 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Na slici 6.28 je prikazana promjena temperature vode duž U–cijevi nakon 24 h. Jasno se uočava da se u slučaju čelične cijevi postiže najveća razlika temperatura vode između ulaza i izlaza iz U–cijevi.



SLIKA 6.28 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.29. Uočava se da je najveća vrijednost fluksa u slučaju čelične cijevi. Kada se koristi čelična cijev, fluks koji se odacuje u tlo nakon 24 h je za 14,04 % veći nego u slučaju kada bi se koristila HDPE cijev. Ipak, HDPE cijevi su zbog jednostavnosti spajanja, pouzdanosti i cijene danas standard kod izvođenja geotermalnih razmjenjivača toplote. Aktivnosti su usmjerene na povećanje toplotne provodljivosti HDPE cijevi dodavanjem različitih aditiva. Neki proizvođači tvrde da su pomoću aditiva postigli povećanje toplotne provodljivosti i za 75 %, sa 0,40 W/mK koliko ima standardna HDPE cijev, na 0,70 W/mK.

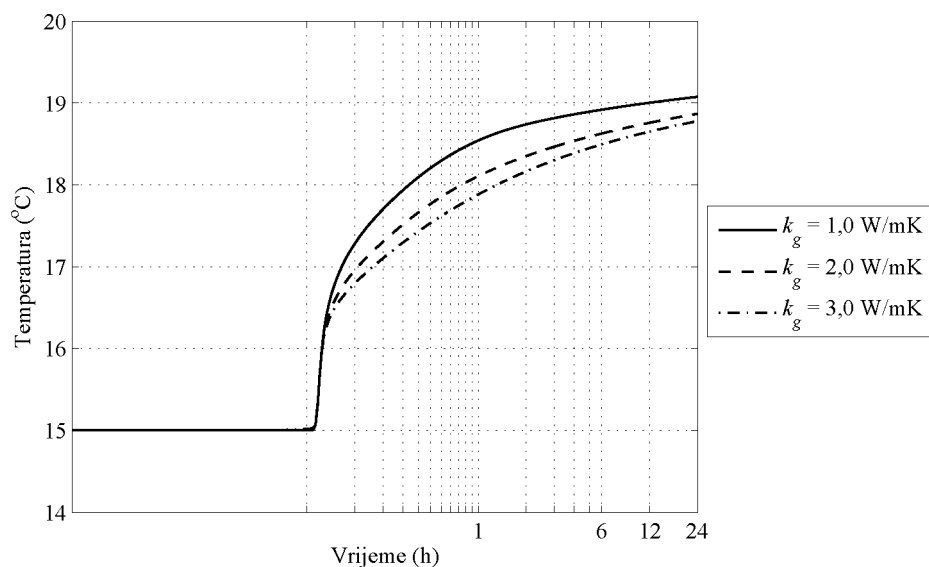


SLIKA 6.29 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

6.2.4. Analiza uticaja toplotnih karakteristika ispune bušotine

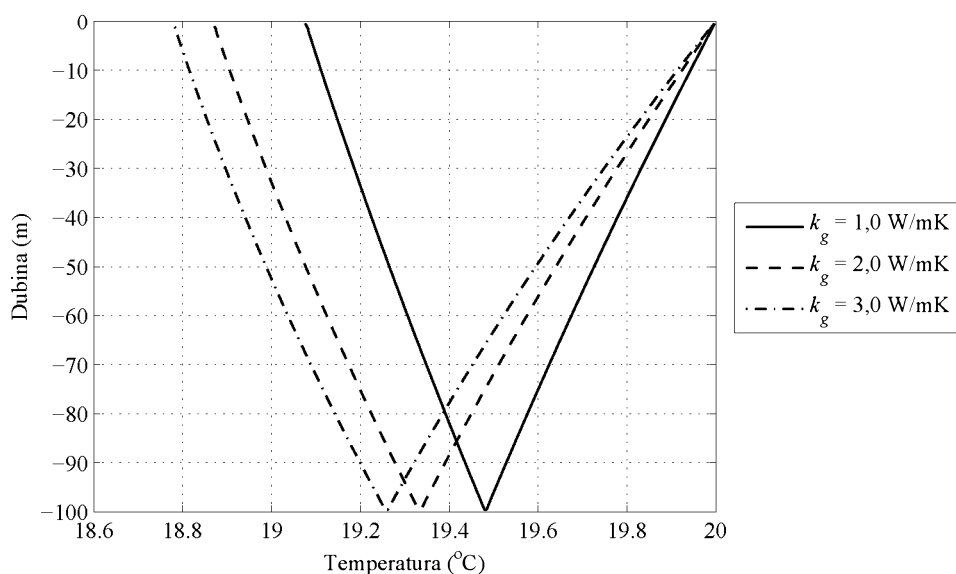
Toplotni otpor bušotine zavisi od toplotne provodljivosti materijala ispune. Toplotna provodljivost ispune bušotine može da se kreće u širokom opsegu. Može da se pospiješi dodavanjem raznih aditiva, pa su u ovoj analizi uzete vrijednosti od 1 do 3 W/mK. Toplotni kapacitet ispune bušotine ne varira u širokim granicama, a ima značaja samo kod izrazito nestacionarnog prostiranja toplote. Kako se približavamo stacionarnom stanju, uticaj toplotnog kapaciteta ispune bušotine se gubi tako da u svim proračunima uzimamo vrijednost od 2000 kJ/m³K.

Promjena temperature vode na izlazu je data na slici 6.30. Nakon izvjesnog vremena temperatura na izlazu počinje naglo raste od početne vrijednosti, a zatim postepeno raste kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Uočava se da se povećanjem toplotne provodljivosti ispune bušotine smanjuje temperatura vode na izlazu.



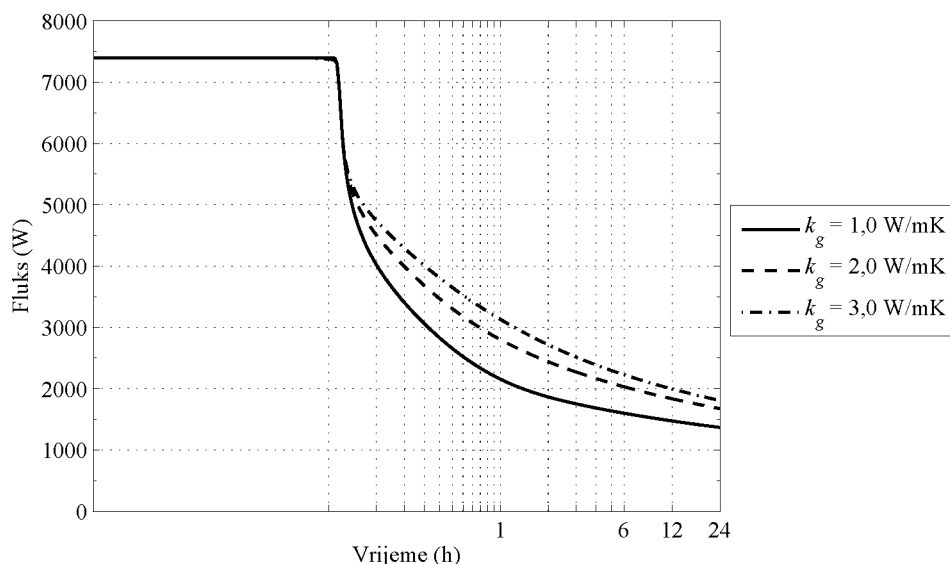
SLIKA 6.30 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Na slici 6.31 je prikazana promjena temperature vode duž U–cijevi nakon 24 h. Jasno se uočava da se povećanjem toplotne provodljivosti ispune bušotine postižu veće razlike temperatura vode između ulaza i izlaza iz U–cijevi.



SLIKA 6.31 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.32. Povećanjem toplotne provodljivosti ispune sa $1,0 \text{ W/mK}$ na $2,0 \text{ W/mK}$ fluks se povećava za 22,49 %, a daljim povećanjem toplotne provodljivosti ispune sa $2,0 \text{ W/mK}$ na $3,0 \text{ W/mK}$ fluks se povećava za dodatnih 7,93 %.

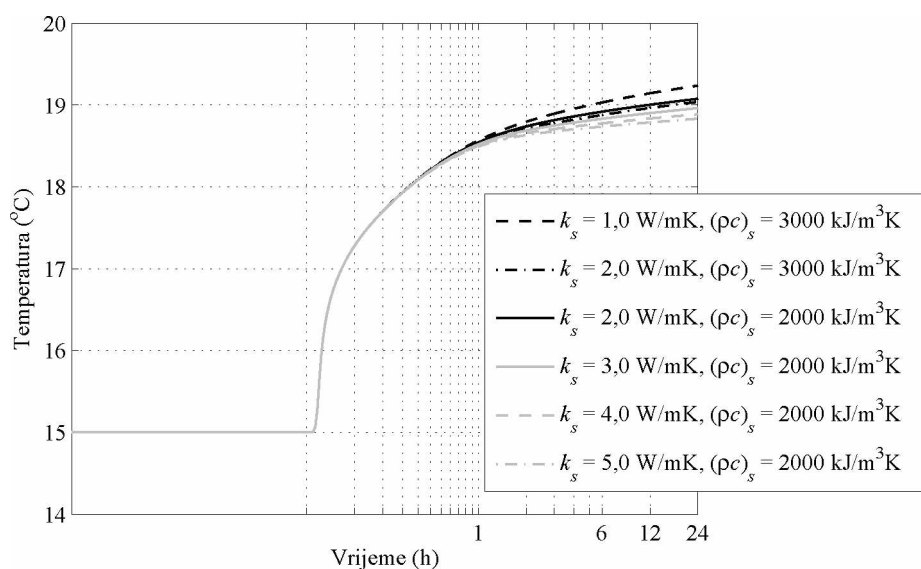


SLIKA 6.32 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

6.2.5. Analiza uticaja toplotnih karakteristika tla

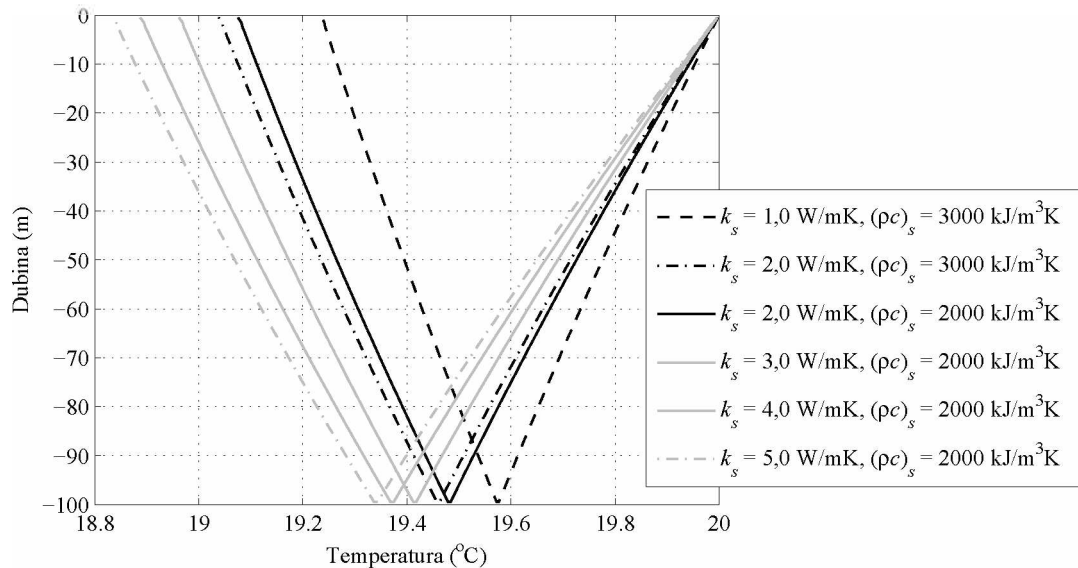
Toplotne karakteristike tla (toplotna provodljivost i toplotni kapacitet) koje se mogu naći u literaturi se kreću u širokim granicama, zavisno od poroznosti, sadržaja vlage i sl. Tla kao što su ilovača i pijesak imaju relativno niže vrijednosti toplotne provodljivosti i relativno veći toplotni kapacitet, dok stijene kao što su granit, krečnjak i mermer imaju veće vrijednosti toplotne provodljivosti i nešto manji toplotni kapacitet. Za očekivati je da povećanjem toplotne provodljivosti tla poremećaj temperature oko bušotine zbog odbacivanja toplote zahvata širi region, a pri tome je porast temperature tla manji.

Promjena temperature vode na izlazu, za razne kombinacije toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta tla je data na slici 6.33. Nakon izvjesnog vremena temperatura na izlazu počinje naglo raste od početne vrijednosti, a zatim postepeno raste kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Prikazani rezultati potvrđuju pretpostavku da se povećanjem toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta tla smanjuje temperatura vode na izlazu.



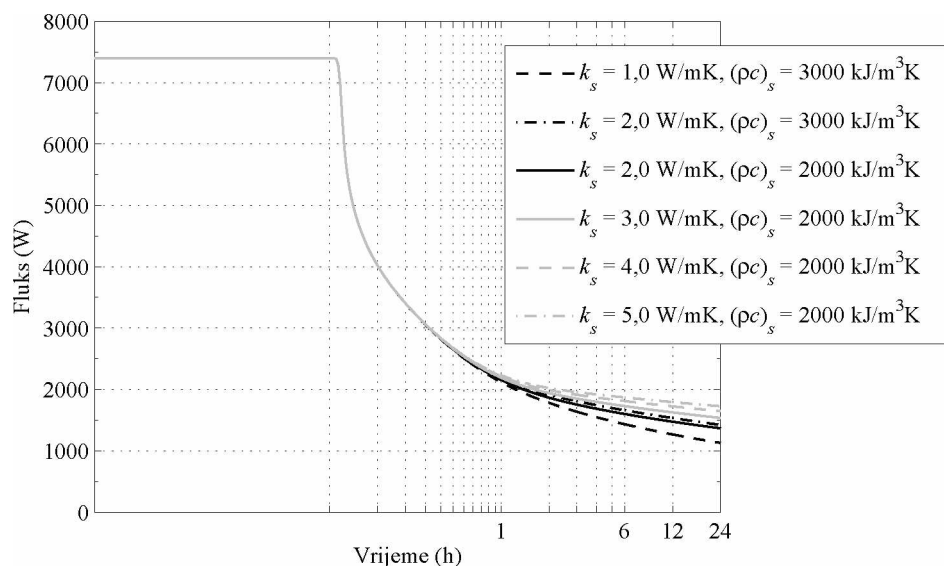
SLIKA 6.33 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Promjena temperature vode duž U–cijevi nakon 24 h je prikazana na slici 6.34. Jasno se uočava da se povećanjem toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta tla povećava razlika temperatura vode između ulaza i izlaza iz U–cijevi.



SLIKA 6.34 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.35. Povećanjem toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta tla povećava se fluks koji se odbacuje u tlo. Za očekivati je da bi uticaj toplotnih karakteristika tla na razmjenu toplote došao više do izražaja u dugoročnim simulacijama rada.

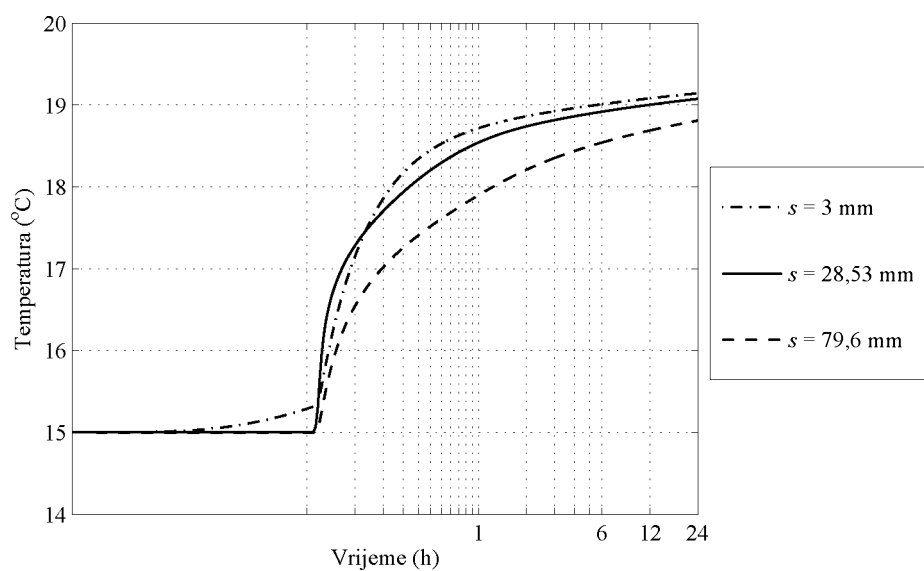


SLIKA 6.35 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

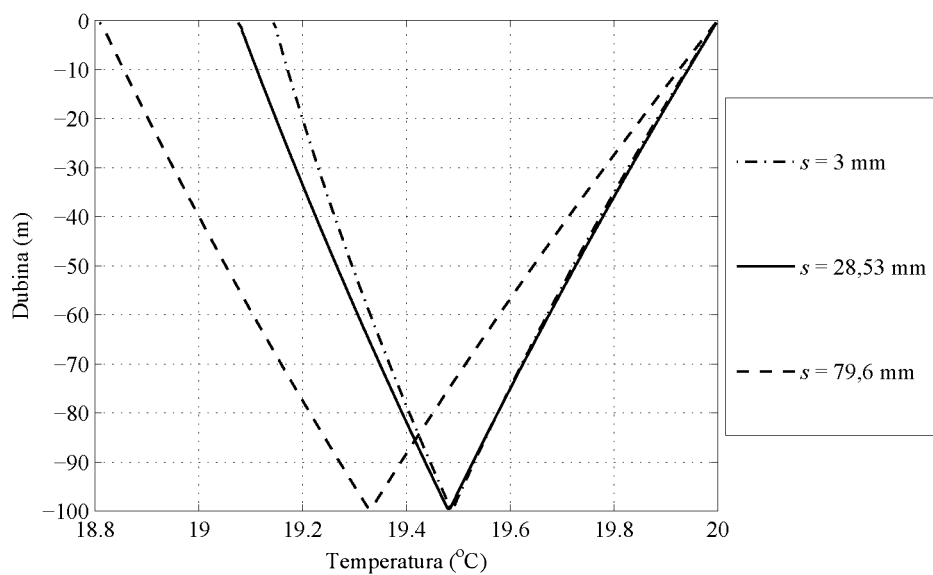
6.2.6. Analiza uticaja rastojanja između dva kraka U–cijevi

S povećanjem rastojanja između dva kraka U–cijevi, smanjuje se toplotni otpor bušotine kao i fluks kratke veze. Analizirana su tri rastojanja između cijevi: 3 mm, 28,53 mm i 79,6 mm. Promjena temperature vode u vremenu, temperature vode duž U–cijevi i toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo u vremenu je prikazana na slikama 6.36, 6.37 i 6.38 redom.

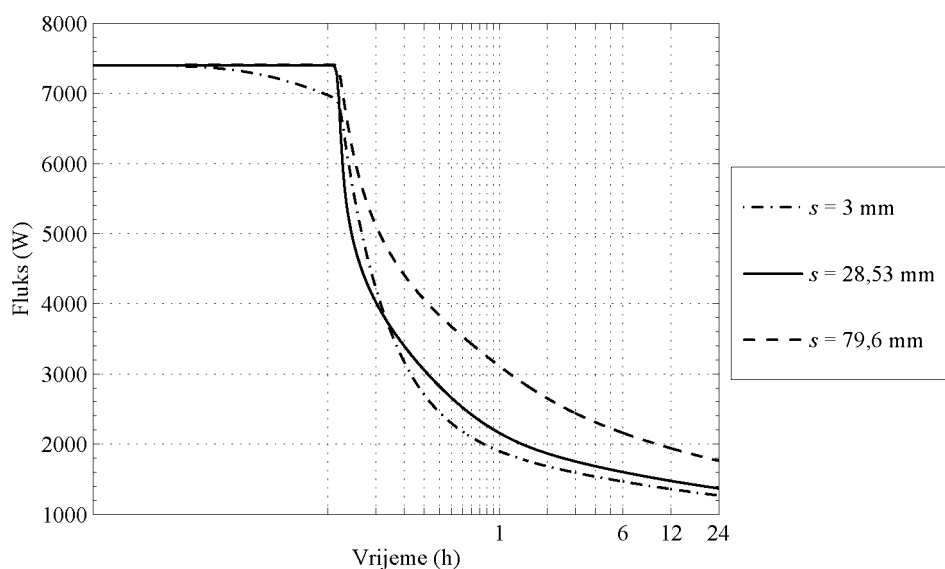
Uočava se da se sa povećanjem rastojanja između dva kraka U–cijevi, uslijed smanjenja toplotnog otpora ispune bušotine, smanjuje temperatura vode na izlazu, odnosno povećava toplotni fluks koji se razmjenjuje sa tlom.



SLIKA 6.36 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu



SLIKA 6.37 Promjena temperature vode po dubini bušotine



SLIKA 6.38 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

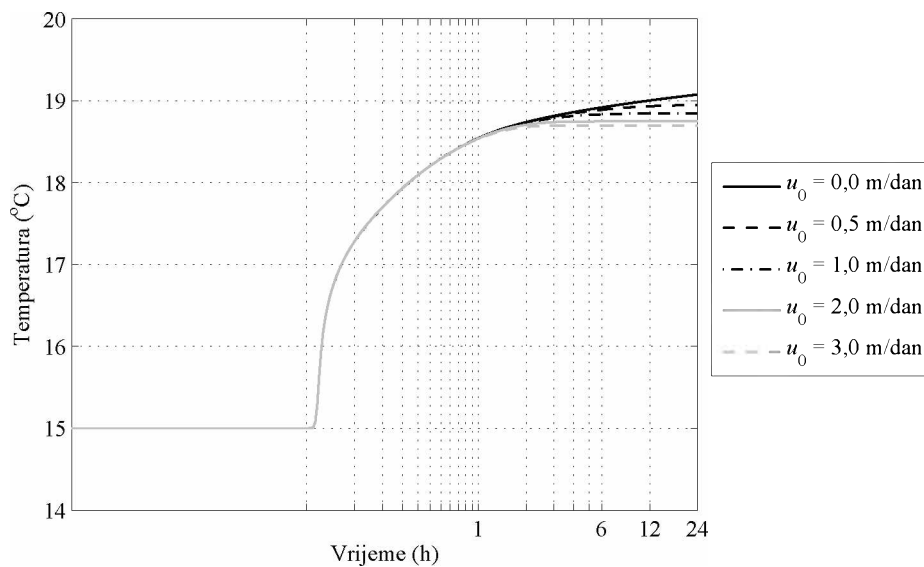
6.2.7. Analiza uticaja strujanja podzemne vode

U svim do sada sprovedenim proračunima toplota se oko bušotine prenosi samo difuzijom. Kada ima podzemne vode, uslijed hidrauličnih gradijenata dolazi do njenog strujanja i tada se toplota osim difuzijom prenosi i advekcijom. Za očekivati je da strujanje podzemne vode ima pozitivan efekat na razmjenu toplote kod geotermalnog razmjenjivača i da će advekcija toplote spriječiti prekomjerno povećanje ili smanjenje temperature oko bušotine.

Specifični proticaj podzemne vode u_0 zavisi od hidrauličnih gradijenata i od hidraulične provodljivosti tla. U cilju procjene uticaja brzine strujanja podzemne vode na prenos toplote oko bušotine, analiziraju se sledeće vrijednosti proticaja: 0 m/dan, 0,5 m/dan, 1 m/dan, 2 m/dan i 3 m/dan.

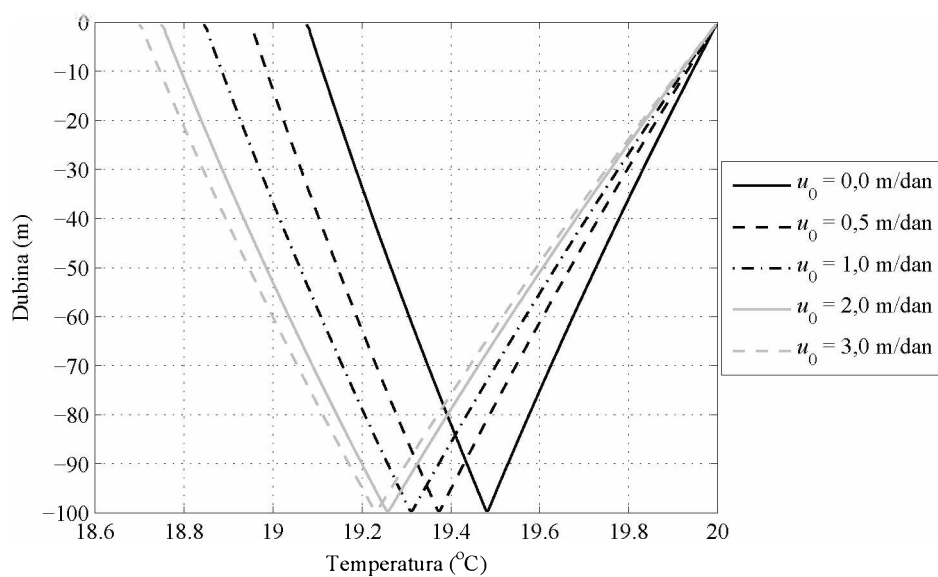
Promjena temperature vode na izlazu je data na slici 6.39. Nakon izvjesnog vremena temperatura na izlazu počinje naglo da raste od početne vrijednosti, a zatim postepeno raste kako se sistem približava stacionarnim uslovima rada. Uočava se da se povećanjem specifičnog proticaja podzemne vode smanjuje temperatura vode na izlazu. Takođe, uočava se da se pri većim vrijednostima proticaja mnogo ranije postiže stacionarna vrijednost temperature vode na izlazu. Tako npr. pri $u_0 = 3$ m/dan

vrijednost temperature vode na izlazu ne mijenja na petoj decimali nakon 6 h od početka simulacije. Odgovarajuće vrijeme za $u_0 = 2$ m/dan je 8 h i za $u_0 = 1$ m/dan je 20 h.



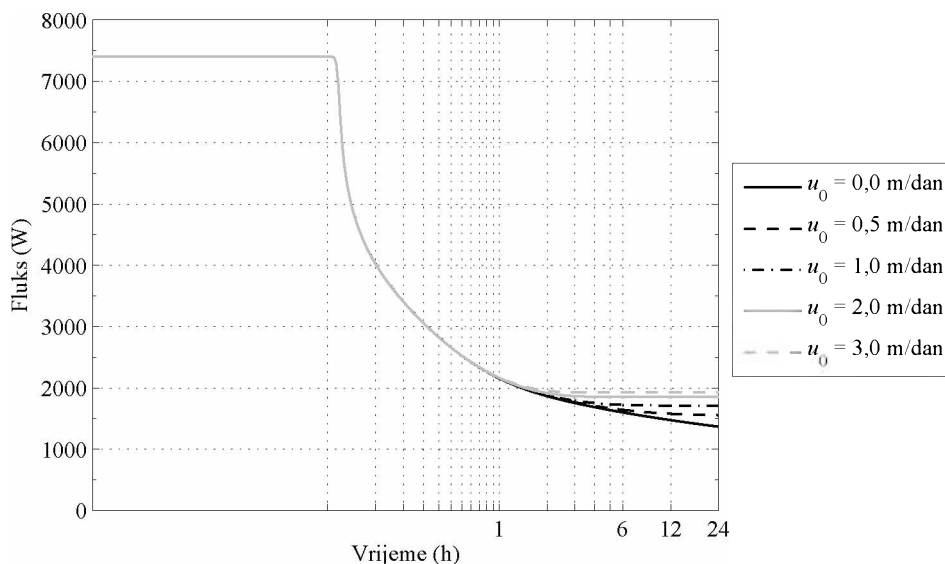
SLIKA 6.39 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

Promjena temperature vode duž U–cijevi nakon 24 h je prikazana na slici 6.40. Jasno se uočava da povećanjem specifičnog proticaja podzemne vode povećava razlika temperatura vode između ulaza i izlaza iz U–cijevi.



SLIKA 6.40 Promjena temperature vode po dubini bušotine

Promjena toplotnog fluksa koji se odbacuje u tlo je prikazana na slici 6.41. Povećanjem specifičnog proticaja podzemne vode povećava se fluks koji se odbacuje u tlo. S obzirom da je u ovim proračunima temperatura voda na ulazu konstantna 20°C, fluks kao i temperatura vode na izlazu pri većim vrijednostima specifičnog proticaja postižu ranije stacionarne vrijednosti. Za očekivati je da bi uticaj strujanja podzemne vode na razmjenu toplote došao više do izražaja u dugoročnim simulacijama rada.

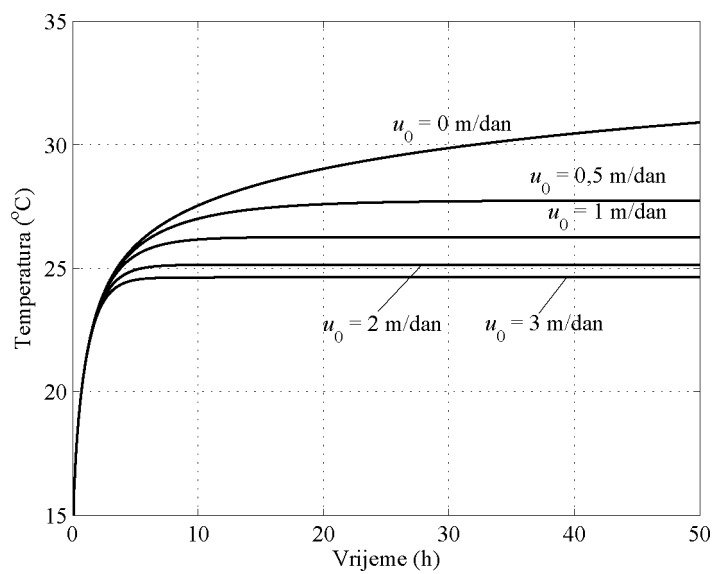


SLIKA 6.41 Promjena fluksa koji se razmijenjuje sa tlom u vremenu

U svim dosadašnjim proračunima je uzeta konstantna temperatura vode na ulazu. U testu toplotnog odziva čiji je cilj određivanje toplotne provodljivosti tla, konstantna je snaga grijača odnosno razlika temperature vode na ulazu i izlazu iz U-cijevi. Analizirana je ista osnovna geometrija bušotine i toplotne karakteristike materijala, sa istim početnim i graničnim uslovima, osim što je umjesto konstantne temperature vode na ulazu sada konstantan fluks od 5000 W koji se dovodi vodi između izlaza i ulaza U-cijevi. Simulira se period od 50 h što odgovara trajanju tipičnog testa toplotnog odziva.

Promjena temperature vode na izlazu je data na slici 6.42. Temperature vode na ulazu se takođe mijenjaju u vremenu. Nisu prikazane na slici s obzirom da je temperaturska razlika konstantna i za zadati fluks i protok vode iznosi 3,39°C. Sa slike 6.40 se vidi da značajno utiče na temperaturu vode koja cirkuliše u U-cijevi. Bitno je uočiti da se povećanjem vrijednosti filtracionog protoka ranije dostižu stacionarne vrijednosti

temperature vode. Takođe, povećanjem vrijednosti filtracionog protoka smanjuju se stacionarne vrijednosti temperature vode.



SLIKA 6.42 Promjena temperature vode na izlazu iz cijevi u vremenu

7. Zaključak i predlozi za dalja istraživanja

U ovom poglavlju je dat pregled postignutih rezultata, sa osvrtom na ciljeve koji su definisani na početku disertacije. Na kraju poglavlja su kratko komentarisana ograničenja razvijenog numeričkog modela i dati su predlozi za dalja istraživanja.

7.1. Zaključci i naučni doprinos

Iscrpan pregled stanja u oblasti istraživanja je pokazao da se samo uz pomoć 3D diskretizovanih numeričkih modela može analizirati nestacionarni prenos toplote kod geotermalnih razmjenjivača sa U–cijevima.

Razvoj i validacija 3D CVFEM modela predstavlja najznačajniji doprinos ove disertacije. Matematički model koji opisuje nestacionarni prenos toplote čine dvije diferencijalne jednačine: jedna za prenos toplote kroz fluid koji cirkuliše u U–cijevi i druga za prenos toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i porozno tlo. Prostiranje toplote kroz fluid je razmatrano kao 1D problem, a odgovarajuća diferencijalna jednačina je diskretizovana koristeći metod kontrolisanih zapremina. Vrijednosti temperatura na granicama kontrolisanih zapremina su interpolirane tzv. QUICK shemom, a za vremensku integraciju je korišćena implicitna shema. Prostiranje toplote kroz zid cijevi, ispunu bušotine i porozno tlo je razmatrano kao 3D problem. Domen je podjeljen po dubini na odgovarajući broj slojeva, a svaki sloj je diskretizovan mrežom pravih trougaonih prizmi. Procedura diskretizacije CVFEM metodom je detaljno izložena: opisana je struktura podataka koja se koristi, konstrukcija kontrolisanih zapremina, postupak diskretizacije nestacionarnog člana, konvektivnog i advektivnog fluksa kroz stranice kontrolisanih zapremina, kao i tretman graničnih uslova. Dobijene diferencijalne jednačine su simultano riješene nekim od iterativnih postupaka. Na osnovu opisanog numeričkog modela je napisan odgovarajući program u Fortranu.

Verifikacija numeričkog rješenja je urađena poređenjem sa dostupnim analitičkim rješenjima. Najprije je urađena verifikacija numeričkog rješenja za stacionarno prostiranje toplote za fluid koji cirkuliše u U–cijevi, poređenjem sa poznatim

analitičkim rješenjima za slučaj konstantne temperature i konstantnog fluksa na zidu cijevi. Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote za fluid je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su dali van Genuchten i Alves. Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu oko bušotine je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem Carslaw i Jaegera za cilindrični izvor beskonačne dužine. Rješenje za nestacionarno prostiranje toplote u tlu, u prisustvu strujanja podzemne vode je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su razvili Diao et al. za pokretni linijski izvor beskonačne dužine. Rješenje za stacionarno prostiranje toplote unutar bušotine je verifikovano na posredan način, poređenjem numerički izračunatog toplotnog otpora bušotine sa vrijednostima koje se dobijaju korišćenjem modela Paula, Gu i O'Neala, rješenja za cilindrični izvor toplote kao i višepolnog modela. Rješenje za stacionarno prostiranje toplote u spregnutom sistemu koji čine fluid, U-cijev i ispuna bušotine je verifikovano poređenjem sa analitičkim rješenjem koje su dali Eskilson i Claesson. Odlično slaganje numeričkih i analitičkih rješenja u svim navedenim slučajevima ide u prilog verifikaciji numeričkog rješenja (rješavanje jednačina na pravi način).

Validacija modela je urađena poređenjem sa rezultatima mjerenja na instalacijama koje su izvedene na Oklahoma State University. Prva instalacija je laboratorijskih razmjera i za nju su izvršena nezavisna mjerenja toplotnih karakteristika ispuhe bušotine i vlažnog pijeska koji okružuje bušotinu. Numerička rješenja za promjenu temperature vode na izlazu iz U-cijevi kao i za temperature pijeska na različitim pozicijama se veoma dobro slažu sa izmjerenim vrijednostima, kako u slučaju neprekidnog rada cirkulacione pumpe i električnog grijača, tako i u slučaju prekida rada u trajanju od dva sata. Drugu instalaciju čine tri bušotine dubine 75 m. I u ovom slučaju numeričko rješenje za promjenu temperature vode na izlazu se dobro slaže sa izmjerenim vrijednostima, kako u kratkom vremenskom intervalu u trajanju od jednog on/off ciklusa toplotne pumpe, tako i za dugoročnu simulaciju u trajanju od 18 mjeseci. Dobro slaganje numeričkih rješenja sa mjerenjima na eksperimentalnim instalacijama ide u prilog validaciji modela (rješavanje pravih jednačina).

Veoma dobra slaganja predloženog numeričkog rješenja sa dostupnim analitičkim rješenjima i mjerenjima na eksperimentalnim instalacijama ukazuju na to da se

predloženi numerički model može uspješno koristiti za analizu prenosa toplote kod geotermalnih razmjenjivača sa U–cijevima.

Pomoću razvijenog numeričkog modela izvršeni su proračuni za bušotinu sa zadatom geometrijom i toplotnim karakteristikama fluida, cijevi, ispune bušotine i tla, čiji je cilj analiza nestacionarnog prenosa toplote pri nagloj promjeni temperature fluida na ulazu.

Analizom rezultata numeričkih simulacija za kratki vremenski interval neposredno nakon nagle promjene temperature fluida na ulazu dobijeni su određeni zaključci o promjeni profila temperature fluida duž cijevi, promjeni fluksa na zidu bušotine i fluksa kratke veze. Profil temperature fluida duž U-cijevi je nelinearan za manje brzine strujanja i praktično linearan pri relativno većim brzinama strujanja. Takođe, razlika temperatura fluida na ulazu i izlazu iz U cijevi se smanjuje sa povećanjem brzine strujanja. U ovom relativno kratkom vremenskom periodu sa početka simulacije, fluks na zidu bušotine se postepeno povećava u toku vremena i pri svim brzinama strujanja fluida nelinearno opada sa dubinom. Fluks kratke veze je pri svim brzinama strujanja na samom početku simulacije nelinearan i raste u toku vremena. U ovom relativno kratkom vremenskom intervalu promjena fluksa kratke veze po dubini bušotine postaje linearna, sa najvećim vrijednostima na površini tla i najmanjim na dnu bušotine.

Analizom rezultata simulacije nakon isteka perioda od 48 h se uočava da se vrijednosti temperatura fluida, fluksa na zidu cijevi i fluksa kratke veze postepeno približavaju stacionarnim vrijednostima. I dalje se održala nelinearnost profila temperature duž U-cijevi pri manjim brzinama strujanja. Uočava se da se fluks na zidu bušotine povećava sa povećanjem brzine strujanja. Pri manjim brzinama strujanja fluks na zidu bušotine nelinearno opada sa povećanjem dubine, dok pri većim brzinama strujanja ima praktično uniforman profil po dubini. Profil fluksa kratke veze je pri svim brzinama strujanja linearan, sa najvećom vrijednošću na površini tla, dok je na dnu bušotine jednak nuli. Fluks kratke veze ima veće vrijednosti pri manjim brzinama strujanja.

Pomoću razvijenog numeričkog modela urađena je analiza uticaja različitih parametara na razmjenu toplote. Prvo je analiziran uticaj brzine i temperature fluida za razmjenu toplote. Dobijeno je da se sa povećanjem brzine strujanja fluida sa 0,2 m/s na 0,6 m/s primjetno povećava fluks koji se razmjenjuje sa tлом. Dalje povećanje brzine strujanja ima neznatan uticaj na povećanje kapaciteta izmjenjivača. Sa povećanjem razlike

temperature fluida na ulazu u U–cijev i neporemećene temperature tla, povećava se toplotni fluks koji se razmjenjuje sa tlom. Zatim je analiziran uticaj toplotnih karakteristika cijevi, ispune bušotin i tla. Uočava se da se sa povećanjem toplotne provodljivosti cijevi, ispune bušotine i tla pospješuje razmjena toplote sa tlom. Od geometrijskih parametara analiziran je uticaj rastojanja između dva kraka U–cijevi. Takođe, sa povećanjem rastojanja između dva kraka U–cijevi, smanjuje se toplotni otpor bušotine i povećava se toplotni fluks koji se razmjenjuje sa tlom. Na kraju je analiziran efekat strujanja podzemne vode na prenos toplote. Pokazalo se da i strujanje podzemne vode ima pozitivan efekat na razmjenu toplote kod geotermalnog razmjenjivača. Pri većim brzinama strujanja podzemne vode, ranije se postižu stacionarne vrijednosti temperature vode na izlazu iz U–cijevi i one su znatno niže (slučaj odbacivanja toplote u tlo) od vrijednosti koje se javljaju kada je difuzija jedini mehanizam prenosa toplote.

Značajan doprinos disertacije je detaljan algoritam za CVFEM diskretizaciju za probleme advekcije-difuzije na mrežama sa tetraedarskim elementima, s obzirom da prema saznanju autora sličnog algoritma nema u do sada objavljenoj literaturi. Uvedene strukture podataka omogućava čitaocu da jednostavno napiše funkcionalni kompjuterski program.

7.2. Ograničenja i predlog za dalja israživanja

Razvijeni 3D numerički model je pogodan za nestacionarnu analizu prenosa toplote kod geotermalnog razmjenjivača toplote. Ipak, njegovo osnovno ograničenje i nedostatak je dugo vrijeme proračuna, naročito ako se radi o razmjenjivaču sa više bušotina i o dugoročnoj simulaciji (više godina). Jedan od predloga za dalje istraživanje je generisanje tzv. *g*-funkcija za različite geometrije i njihova implementacija u softverima kao što su TRNSYS i EnergyPlus. Ovakav način računanja *g*-funkcija ne bi morao da koristi geometrijske aproksimacije kakve su korišćene u modelu Yavuzturka (1999).

Što se tiče same CVFEM diskretizacije, dalja istraživanja bi mogla da idu u pravcu rješavanja strujnog polja, prvo za 2D geometrije sa mrežom trougaonih elemenata, a zatim za 3D geometrije sa mrežom tetraedarskih elemenata.

A. Detaljni CVFEM algoritam za 3D probleme advekcije – difuzije

CVFEM metod može da se posmatra kao hibrid metoda konačnih elemenata i metoda kontrolisanih zapremina. Kod ovog metoda se kontrolisane zapremine oblika poliedara konstruišu postavljanjem strana između susjednih čvorova nestrukturisane mreže konačnih elemenata, a diskretne algebarske jednačine se dobijaju balansiranjem flukseva za kontrolisanu zapreminu. Fluksevi kroz granice kontrolisanih zapremina se računaju koristeći aproksimacije koje su svojstvene za metod konačnih elemenata. Na ovaj način, CVFEM metod objedinjuje poželjne karakteristike i metoda kontrolisanih zapremina i metoda konačnih elemenata – jednostavna fizička interpretacija procedure diskretizacije, rješenje koje je konzervativno čak i na grubim mrežama i geometrijska fleksibilnost koja omogućava rad sa domenima složenih geometrija.

LeDain-Muir i Baliga (1986) i Baliga i Atabaki (2006) za trodimenzione probleme opisali CVFEM metod zasnovan na tetraedarskim elementima.

Kod svake CVFEM sheme mogu se uočiti dva bitna elementa. Prvi je metodologija proračuna flukseva kroz strane kontrolisanih zapremina. Drugi je konstrukcija odgovarajuće diskretizacije i strukture podataka koja omogućava lako sastavljanje diskretizovanih jednačina. U centru pažnje u literaturi su metodologije za proračun flukseva na stranama kontrolisanih zapremina, tj. razvoj odgovarajućih shema advekcije – difuzije. U poređenju sa ovim, relativno malo informacija je na raspolaganju o strukturi podataka i sastavljanju diskretizovane jednačine. U slučaju dvije dimenzije, ovi koraci su relativno jednostavni (Voller, 2009). Ipak, u slučaju tri dimenzije, ovaj zadatak sastavljanja diskretizovane jednačine nije ni približno tako jednostavan.

Cilj ovog poglavlja, u kontekstu problema advekcije – difuzije, je da se uvede jednostavna i robustna trodimenzionalna CVFEM shema podataka koja omogućava jasnu, korak po korak proceduru koja eksplicitno povezuje tretman flukseva na granicama kontrolisanih zapremina sa generisanjem konačne diskretizovane jednačine. Cilj ovakve strukture podataka je da omogući jednostavno pisanje funkcionalnog 3D

CVFEM kompjuterskog koda. Rad kompjuterskog koda dobijenog na ovaj način je ilustrovan na rješavanju nekoliko stacionarnih i nestacionarnih test problema, koji uključuju difuziju, advekciju i fazni prelaz.

A.1. Diferencijalne jednačine održanja

Radi jasnijeg razumijevanja, 3D CVFEM procedura će prvo biti objašnjena u smislu rješavanja jednostavne jednačine stacionarne advekcije – difuzije u obliku:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\phi) - \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.1})$$

gdje je \mathbf{v} brzina strujanja, ϕ je zavisna promjenljiva i κ koeficijent toplotne difuzije. Ova jednačina u integralnom obliku glasi:

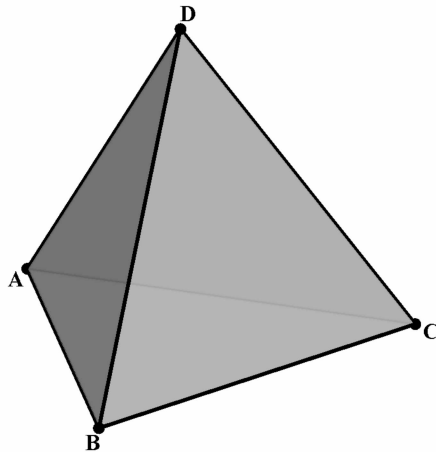
$$\int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \phi d\Gamma - \int_{\Gamma} \kappa \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.2})$$

gdje je Γ površina koja ograničava 3D domen proizvoljnog oblika.

A.2. Diskretizacija domena i struktura podataka

Prvi korak u transformaciji diferencijalne jednačine advekcije – difuzije u sistem algebarskih jednačina je da se postave tačke u domenu koje predstavljaju čvorove numeričke mreže. Pogodan i fleksibilan prilaz je da se domen izdijeli mrežom tetraedarskih elemenata sa čvorovima u tjemenu. Ovakve mreže mogu da se konstruišu koristeći raspoložive besplatne i komercijalne softverske pakete. Primjeri softvera otvorenog koda uključuju *Gmsh* (Geuzaine i Remacle, 2009), generator mreže konačnih elemenata sa CAD okruženjem i postprocesorom i *Distmesh* (Persson i Strang, 2004), skup Matlab funkcija za generaciju i manipulaciju nestrukturisanim 3D mrežama.

Generički tetraedar je prikazan na slici A.1. Njegova geometrija je u potpunosti definisana pozicijom četiri nekoplanarna tjemeni čvora.



SLIKA A.1 Tetraedarski element

3D tetraedarska mreža sadrži $ntet$ elemenata kao i $nnodes$ čvorova. Generator mreže obično ove podatke zapisuje kao dvije matrice. Prva je matrica tačaka \mathbf{p} (dimenzija $nnodes$ -sa-3), u kojoj svaki red sadrži x , y i z koordinate odgovarajuće tačke u mreži. Druga je matrica tetraedara \mathbf{t} (dimenzija $ntet$ -sa-4) u kojoj svaki red sadrži globalni broj čvora (tjemena) tetraedarskog elementa.

Važno je napomenuti, da su prva tri čvora u redu matrice \mathbf{t} poređana u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu kada se posmatraju iz preostalog, četvrtog čvora. Prema tome, za element na slici A.1 mogući ispravni unosi u matrici \mathbf{t} su: $BDCA$, $ACDB$, $ADBC$ i $ABCD$. Ovakva konvencija o notaciji isključuje nedoumice oko znaka skalarnog, vektorskog i mješovitog proizvoda vektora koji se dosta koriste kod CVFEM prilazu. Za buduću analizu ćemo usvojiti $ABCD$ kao unos u redu matrice \mathbf{t} za generički tetraedar sa slike A.1 i da su vektori položaja čvorova (tjemena) u odnosu na fiksirani koordinatni početak označeni sa \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} i \mathbf{d} . Na osnovu ovoga, zapremina tetraedarskog elementa može da se izračuna kao:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}(\mathbf{d} - \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})] \quad (\text{A.3})$$

Osim matrica \mathbf{t} i \mathbf{p} , generator mreže takođe čuva i informacije o granicama domena. Po svojoj prirodi, mreža tetraedarskih elemenata formira granicu domena kao skup pojedinačnih ravnih trouglova. Ove informacije se čuvaju u matrici \mathbf{s} dimenzija ns -sa-4, gdje je ns broj graničnih trouglova. Prva tri unosa u svakom redu matrice \mathbf{s} sadrže čvorove (tjemena) datog graničnog trougla, poređanih u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu posmatrajući iz unutrašnjosti domena. Četvrti unos u redu označava

sekciju granice domena sa određenim graničnim uslovom, npr. zadata granična vrijednost ϕ ili zadat granični fluks $\nabla\phi$. Označavajući tjemena graničnog trougla sa A , B i C , površina graničnog trouga može da se izračuna koristeći vektore položaja \mathbf{a} , \mathbf{b} i \mathbf{c} :

$$\Gamma_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})| \quad (\text{A.4})$$

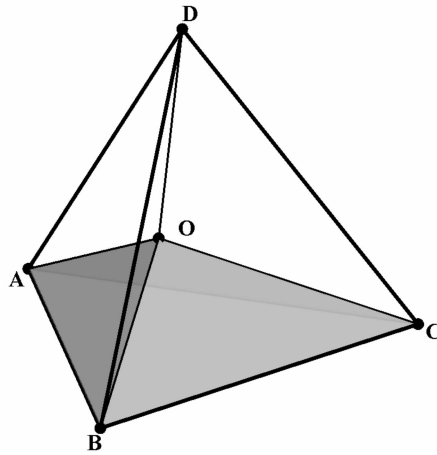
A.3. Interpolaciona funkcija oblika

Vrijednosti zavisne promjenljive ϕ se čuvaju u čvorovima lociranim u tjemenu tetraedarskih elemenata. Vrijednost zavisne promjenljive u proizvoljnoj tački $O(x_O, y_O, z_O)$ unutar elementa može da se izrazi kao linearna kombinacija vrijednosti u čvorovima A, B, C i D :

$$\phi(x_O, y_O, z_O) = N_A \phi_A + N_B \phi_B + N_C \phi_C + N_D \phi_D \quad (\text{A.5})$$

Za tetraedar na slici A.1 može se dati jednostavna geometrijska interpretacija zapreminskih funkcija oblika (N_A, N_B, N_C i N_D u jednačini (A.5)). Postavljanjem ravni kroz proizvoljnu tačku O (vektor položaja \mathbf{o}) i ivice tetraedara, dati tetraedarski element može da se podijeli na četiri podtetraedra (slika A.2). Zapreminske funkcije oblika mogu da se definišu kao:

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{V_{BDCO}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{\vec{BO} \cdot (\vec{BD} \times \vec{BC})}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{o} - \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{d} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})]}{V_{ABCD}} \\ N_B &= \frac{V_{ACDO}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{\vec{AO} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{o} - \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{d} - \mathbf{a})]}{V_{ABCD}} \\ N_C &= \frac{V_{ADBO}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{\vec{AO} \cdot (\vec{AD} \times \vec{AB})}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{o} - \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{d} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})]}{V_{ABCD}} \\ N_D &= \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{o} - \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})]}{V_{ABCD}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$



SLIKA A.2 Geometrijska interpretacija zapreminskih funkcija oblika

Značajno svojstvo funkcija oblika je:

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{u čvoru } i \\ 0, & \text{u svim tačkama na strani naspram čvora } i \end{cases}, \quad i = A, B, C, D \quad (\text{A.7})$$

tj. kada se tačka O podudara sa čvorom $i = A, B, C$ ili D funkcija oblika je $N_i = 1$, a kada je tačka O bilo gdje na strani elementa naspram čvora i , funkcija oblika je $N_i = 0$. Takođe, iz činjenice da je zbir zapremina podtetraedara oko tačke O jednak zapremini tetraedarskog elementa (slika A.2), slijedi da je zbir funkcija oblika jednak jedinici:

$$\sum_{i=A,B,C,D} N_i(x, y, z) = 1 \quad (\text{A.8})$$

Gradijent funkcije oblika koji je nophodan u postupku diskretizacije je konstantan u posmatranom elementu i može se izračunati iz:

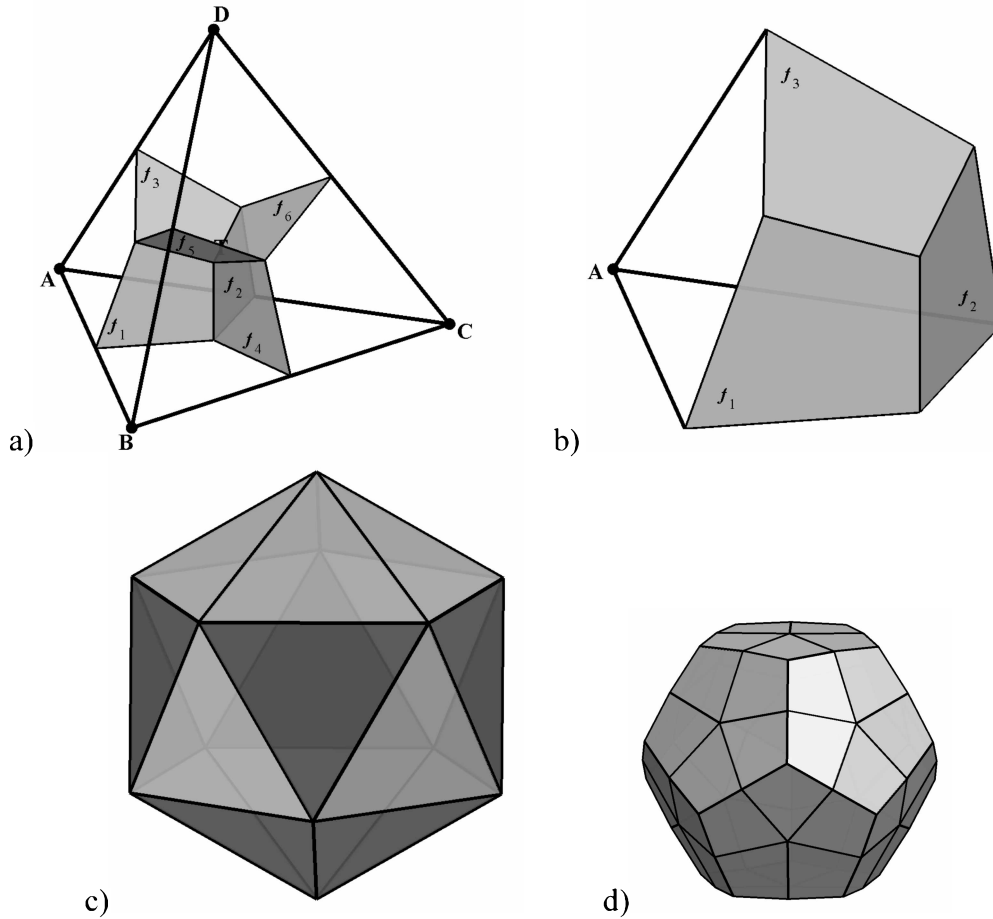
$$\begin{aligned} \nabla N_A &= \frac{1}{6} \frac{\vec{BD} \times \vec{BC}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})}{V_{ABCD}} \\ \nabla N_B &= \frac{1}{6} \frac{\vec{AC} \times \vec{AD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{d} - \mathbf{a})}{V_{ABCD}} \\ \nabla N_C &= \frac{1}{6} \frac{\vec{AD} \times \vec{AB}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{V_{ABCD}} \\ \nabla N_D &= \frac{1}{6} \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})}{V_{ABCD}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Na ovaj način, moguće je pokazati da skalarni proizvod $\nabla \phi$ i vektora \mathbf{n} može da se aproksimira kao:

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} \approx (\nabla N_A \cdot \mathbf{n})\phi_A + (\nabla N_B \cdot \mathbf{n})\phi_B + (\nabla N_C \cdot \mathbf{n})\phi_C + (\nabla N_D \cdot \mathbf{n})\phi_D \quad (\text{A.10})$$

A.4. Konstrukcija kontrolisanih zapremina

Unutar generičkog elementa, strana koja razdvaja čvor A od čvora B može da se definiše kao četvorougao sa tjemenuima u težištu tetraedra $ABCD$, težištima strana ABC , ABD i sredini ivice AB (slika A.3a).



SLIKA A.3 Konstrukcija kontrolisane zapremine

Jedinični vektor normale na ovu stranu, usmjeren od A prema B je:

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f1} = \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \frac{1}{12} \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11a})$$

gdje je Γ_{f1} površina strane. Analogno, možemo konstruisati još pet sličnih strana unutar elementa koje razdvajaju svaki par čvorova (AC , AD , BC , BD i CD). Jedinični vektori normala na ove strane su:

usmjeren od A prema C

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f_2} = -\frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{1}{12} \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11b})$$

usmjeren od A prema D

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f_3} = \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{1}{12} \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11c})$$

usmjeren od B prema C

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f_4} = -\frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{1}{12} \mathbf{a} \times \mathbf{d} - \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \frac{1}{24} \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11d})$$

usmjeren od B prema D

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f_5} = \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \frac{1}{12} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{1}{24} \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11e})$$

usmjeren od C prema D

$$(\Gamma \mathbf{n})_{f_6} = \frac{1}{12} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \frac{1}{24} \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \frac{1}{24} \mathbf{b} \times \mathbf{d} \quad (\text{A.11f})$$

Na ovaj način, tri strane, definisane vektorima normala 11a, 11b 11c u potpunosti razdvajaju čvor A od susjednih čvorova B , C i D u elementu (slika A.3b). Kada se uzmu u obzir svi teraedarski elementi mreže koji imaju kao zajedničko tjeme čvor A , strane koje su povezane sa čvorom (tjemenom) A u potpunosti okružuju taj čvor. Dati čvor A se nalazi u centru zatvorene poliedarske kontrolisane zapremine koja ima tri puta veći broj strana od broja tetraedara koji dijele čvor A kao zajedničko tjeme.

Radi boljeg razumijevanja, od koristi je imati predstavu koliko tetraedarskih elemenata može da dijeli jedan čvor mreže kao zajedničko tjeme. Drugim riječima, koliko tetraedarskih elemenata učestvuje sa jednom četvrtinom svoje zapremine u kontrolisanoj zapremini konstruisanoj oko posmatranog čvora. Tačnost numeričkog rješenja strogo zavisi od kvaliteta mreže. Kod mreže tetraedarskih elemenata, naročito treba izbjegavati oštre uglove u tjemenu tetraedara. Prema ovome, najbolji element bi bio pravilni tetraedar sa prostornim uglom od 0,5519 steradijana u tjemenu. Kako nije moguće napraviti mrežu sa pravilnim tetraedrima bez preklapanja i zazora (Lagarias i Zong, 2012), to kvalitetna mreža treba da ima prostorne uglove u tjemenu elemenata što je moguće bližim vrijednosti od 0,5519 steradijana. Može se pokazati da najviše 20 pravilnih tetraedara mogu da se dodiruju u jednoj tački. Na slici A.3c je prikazan ikosaedar – pravilni poliedar sa 20 identičnih strana oblika jednakostraničnog trougla, sa 30 ivica i 12 tjemena. Kontrolisana zapremina konstruisana oko čvora u centru ovog tijela ima 60 strana, dok sami čvor ima 12 susjednih čvorova (Slika A.3d).

Ovakva kontrolisana zapremina je srž CVFEM prilaza, a bilans flukseva kroz strane kontrolisane zapremine vodi ka odgovarajućoj diskretizovanoj jednačini. Prilikom izvođenja diskretizovane jednačine treba poštovati usvojeni smjer vektora normale. Na primjer, strana f_1 je zajednička strana za kontrolisanu zapreminu oko čvora A i kontrolisanu zapreminu oko čvora B . Vektor normale usmjeren prema spolja na ovu stranu za kontrolisanu zapreminu oko čvora A je $(\Gamma \mathbf{n})_{f_1}$, dok je za kontrolisanu zapreminu oko čvora B $-(\Gamma \mathbf{n})_{f_1}$. Na osnovu samog načina konstrukcije kontrolisane zapremine, lako je pokazati da svi elementi koji imaju čvor A kao zajedničko tjeme, učestvuju sa po $\frac{1}{4}$ svoje zapremine u ukupnoj zapremini kontrolisane zapremine oko čvora A .

A.5. Pomoćna struktura podataka

Kao što je ranije navedeno, čvorovi u domenu su jedinstveno numerisani od 1 do n_{nodes} . Kontrolisana zapremina oko datog čvora i uključuje veći broj tetraedarskih elemenata mreže. Čvorovi ovih elemenata čine skup susjednih čvorova čvora i . Ovi čvorovi su značajni kod CVFEM prilaza, jer se algebarska diskretizovana jednačina za čvor i sadrži vrijednosti nepoznate veličine ϕ u ovim čvorovima. Zbog toga je od koristi da se uvede pomoćna struktura podataka koja olakšava izvođenje CVFEM jednačine za dati čvor. Pomoćna struktura podataka koja se ovdje koristi uključuje dvije dodatne matrice.

Prva matrica u pomoćnoj strukturi podataka je \mathbf{g} (globalna) i ima dimenzije n_{nodes} -sa- $max-nmb$. U matrici \mathbf{g} i -ti red sadrži globalne čvorne brojeve susjednih čvorova čvora i . Svi čvorovi u mreži nemaju isti broj susjeda. Najveći broj susjeda u datoj mreži je označen sa $max-nmb$. Za čvor i za koji je broj susjeda $nmb_i < max-nmb$, odgovarajući red u matrici \mathbf{g} u prvih nmb_i lokacija sadrži redne brojeve susjednih čvorova, dok je ostatak ispunjen nulama. Da bismo ovo ilustrovali, pretpostavimo čisto hipotetičku mrežu sa 50 čvorova ($n_{nodes}=50$) kod koje je maksimalan broj susjednih čvorova $max-nmb=10$. Tada, ako se posmatra čvor $i=15$ i ako ovaj čvor ima $nmb_{15}=8$ susjeda, 15-ti red u matrici \mathbf{g} može da izgleda kao:

$$[16, 17, 11, 4, 25, 37, 18, 9, 0, 0] \quad (A.12)$$

Matrica strukture podataka \mathbf{g} može da se dobije u petlji kroz sve tetraedarske elemente $itet=1, \dots, ntet$, koristeći sledeći algoritam:

$$\begin{aligned}
A &= t_{itet,1}, B = t_{itet,2}, C = t_{itet,3}, D = t_{itet,4} \\
g_{A,counter_A} &= B, g_{A,counter_A+1} = C, g_{A,counter_A+2} = D \\
g_{B,counter_B} &= A, g_{B,counter_B+1} = C, g_{B,counter_B+2} = D \\
g_{C,counter_C} &= A, g_{C,counter_C+1} = B, g_{C,counter_C+2} = D \\
g_{D,counter_D} &= A, g_{D,counter_D+1} = B, g_{D,counter_D+2} = C \\
counter_A &= counter_A + 3 \\
counter_B &= counter_B + 3 \\
counter_C &= counter_C + 3 \\
counter_D &= counter_D + 3
\end{aligned} \tag{A.13}$$

pri čemu je na početku petlje, pomoćni vector *counter* takav da su mu svi elementi jednaki jedinici. Koristeći navedeni algoritam, neki elementi se ponavljaju jednom ili više puta u svakom redu matrice \mathbf{g} . Zbog toga je poželjno dodatno kondenzovati matricu \mathbf{g} kako bi se eliminisali duplirani elementi. Konačna struktura podataka \mathbf{g} sadrži u svakom redu $i=1, \dots, nnodes$ susjedne čvorove čvora i . Broj kolona je jednak broju susjednih čvorova čvora i sa najvećim brojem susjeda u mreži. Većina čvorova u mreži ima manji broj susjeda tako da je ostatak u njihovom pripadajućem redu matrice \mathbf{g} ispunjen nulama. Broj susjednih čvorova oko čvora i jednak je broju nenulih elemenata u redu i matrice \mathbf{g} i on se čuva u vektoru \mathbf{nnb} .

Druga matrica u pomoćnoj strukturi podataka je označena sa \mathbf{I} (lokalna) i ima dimenzije $nnodes$ -sa- $nnodes$. Ako je čvor sa globalnim rednim brojem j susjed čvora i , j -ti unos u i -tom redu matrice \mathbf{I} sadrži jedinstveni broj između 1 i nnb_i . Ako čvor j nije susjed čvora i , tada je unos nula. Tada, na primjeru hipotetičke mreže, koristeći (A.12), nenulti elementi u i -tom redu matrice \mathbf{I} su:

$$I_{15,16} = 1; I_{15,17} = 2; I_{15,11} = 3; I_{15,4} = 4; I_{15,25} = 5; I_{15,37} = 6; I_{15,18} = 7; I_{15,9} = 8 \tag{A.14}$$

Kako je broj susjednih čvorova oko čvora i , nnb_i , mnogo manji od ukupnog broja čvorova u domenu, $nnodes$, za očekivati je da je ovako definisana matrica \mathbf{I} rijetka matrica. Matricu \mathbf{I} lako možemo dobiti na osnovu matrice \mathbf{g} koristeći sledeći algoritam:

$$I_{i,g_{i,j}} = j, \text{ gdje je } i=1, \dots, nnodes, j=1, \dots, nnb_i \tag{A.15}$$

Pregled indeksa i matrica opisane strukture podataka je dat u Tabeli A.1.

TABELA A.1: Elementi strukture podataka

Indeks	Definicija
<i>nnodes</i>	broj čvorova u mreži
<i>ntet</i>	broj tetraedarskih elemenata u mreži
<i>ns</i>	broj graničnih trouglova
<i>max-nmb</i>	broj susjeda čvora sa najvećim brojem susjeda u mreži

Matrica	Dimenzija	Definicija
p	<i>nnodes-by-3</i>	matrica tačkaka: <i>i</i> -ti red sadrži <i>x</i> , <i>y</i> i <i>z</i> coordinate odgovarajućeg čvora
t	<i>ntet-by-4</i>	matrica tetraedara: <i>i</i> -ti red sadrži globalni broj čvora (tjemena) odgovarajućeg tetraedarskog elementa
nnb	<i>nnodes-by-1</i>	vektor broja susjeda: <i>i</i> -ti element je broj susjeda odgovarajućeg čvora
g	<i>nnodes-by-max-nmb</i>	matrica globalne strukture podataka: <i>i</i> -ti red sadrži globalne čvorne brojeve susjednih čvorova odgovarajućeg čvora
l	<i>nnodes-by-nnodes</i>	matrica lokalne strukture podataka: <i>i</i> -ti red sadrži jedinstvene brojeve od 1 do <i>nmb_i</i> za susjede oko odgovarajućeg čvora (rijetka matrica)
s	<i>ns-by-4</i>	matrica granice domena: prva tri unosa u <i>i</i> -tom redu su globalni brojevi čvora (tjemena) odgovarajućeg graničnog trougla; četvrti unos označava sekciju granice domena
ap	<i>nnodes-by-1</i>	vektor koji sadrži koeficijente diskretizovane jednačine direktno povezane sa čvorovima u domenu
anb	<i>nnodes-by-max-nmb</i>	matrica koja sadrži u svakom redu koeficijente diskretizovane jednačine povezane sa susjednim čvorovima odgovarajućeg posmatranog čvora
bp	<i>nnodes-by-1</i>	vektor koji sadrži dodatne članove u diskretizovanoj jednačini koji se javljaju zavisno od tretmana izvornog člana, nestacionarnog člana i graničnih uslova
df	6-by-4	matrica difuzionih flukseva
vol	<i>nnodes-by-1</i>	vektor zapremine kontrolisanih zapremina: <i>i</i> -ti element je zapremina kontrolisane zapremine oko čvora <i>i</i>

A.6. Diskretizovana jednačina

Cilj ovog poglavlja je da se detaljno izvede CVFEM procedura diskretizacije kojom se transformiše diferencijalna jednačina (A.1) u sistem algebarskih jednačina sa

nepoznatim vrijednostima ϕ lociranim u tjemenu tetraedarskih elemenata. Za određeni čvor mreže, opšti oblik odgovarajuće algebarske jednačine je:

$$ap_i \phi_i = \sum_{j=1}^{nmb_i} an_{i,j} b_{i,j} \phi_{g_{i,j}} + bp_i \quad (\text{A.16})$$

gdje je **ap** vektor dimenzija $nnodes$ -sa-1 koji sadrži koeficijente diskretizovane jednačine direktno povezane sa čvorovima u domenu, **anb** je matrica dimenzija $nnodes$ -sa- $max-nmb$ koja u svakom redu sadrži koeficijente diskretizovane jednačine povezane sa susjednim čvorovima čvora i i **bp** je vektor dimenzija $nnodes$ -sa-1 koji sadrži dodatne članove koji se javljaju zavisno od tretmana izvornog člana, nestacionarnog člana i graničnih uslova. Suštinska ideja metoda kontrolisanih zapremina je da se do diskretizovane jednačine (A.16) dođe bilansiranjem flukseva kroz strane kontrolisane zapremine konstruisane oko čvora (vidjeti sliku A.3). Ovaj proces se sastoji iz dva koraka. U prvom koraku se za svaki element mreže računaju fluksevi kroz strane kontrolisanih zapremina definisanih jediničnim vektorima normala (A.11). U drugom koraku se doprinos flukseva kroz svaku od ovih strana kontrolisanih zapremina pridružuje odgovarajućem čvoru, tako da se dobija jednačina (A.16).

A.6.1. Korak 1: Aproksimacija flukseva

A.6.1.1 Difuzioni fluks

Prepoznajući da gradijent može da se izračuna koristeći funkcije oblika (A.9) i da je vektor normale na strane kontrolisanih zapremina konstantan, difuzioni fluks kroz stranu f_1 koja razdvaja čvor A od čvora B , može da se aproksimira kao:

$$\int_{f_1} \kappa \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \approx \kappa_{f_1} \nabla \phi \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1} \quad (\text{A.17})$$

Koristeći izraze za gradijente funkcije oblika (A.9) član na desnoj strani izraza (A.17) može da se napiše u obliku:

$$\begin{aligned} \kappa_{f_1} \nabla \phi \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1} = & \kappa_{f_1} (\nabla N_A \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1}) \phi_A + \kappa_{f_1} (\nabla N_B \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1}) \phi_B + \\ & \kappa_{f_1} (\nabla N_C \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1}) \phi_C + \kappa_{f_1} (\nabla N_D \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1}) \phi_D \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Slični izrazi za diskretizovane difuzione flukseve mogu da se napišu i za preostalih pet strana unutar tetraedra. U datom elementu, označavajući čvorove sa globalnim

brojevima A, B, C i D brojevima 1, 2, 3 i 4 redom, dobijeni difuzioni fluksevi kroz svih šest strana mogu da se sačuvaju u matrici difuzionih flukseva \mathbf{df} dimenzija 6-sa-4 (6 zbog broja strana i 4 zbog broja čvorova). Primjeri elemenata u matrici \mathbf{df} su:

$$df_{2,4} = \kappa_{f_2} \nabla N_D \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_2}; \quad df_{4,3} = \kappa_{f_4} \nabla N_C \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_4}; \quad df_{5,1} = \kappa_{f_5} \nabla N_A \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_5} \quad (\text{A.19})$$

A.6.1.2 Advektivni fluks

Advektivni fluks kroz stranu može da se aproksimira kao:

$$\int_{\Gamma_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \phi d\Gamma \approx \mathbf{v} \phi \cdot \Gamma \mathbf{n} \Big|_f = q_f \phi_f \quad (\text{A.20})$$

gdje je q_f zapreminski protok kroz stranu, u pravu vektora normale definisanog izrazom (A.11). Primjera radi, za stranu f_1 , pretpostavljajući da je poznato polje brzina u čvorovima mreže, advektivni fluks je:

$$q_{f_1} = \mathbf{v}_{f_1} \cdot (\Gamma \mathbf{n})_{f_1} = (v_x)_{f_1} (\Gamma n_x)_{f_1} + (v_y)_{f_1} (\Gamma n_y)_{f_1} + (v_z)_{f_1} (\Gamma n_z)_{f_1} \quad (\text{A.21})$$

Brzine u težištima strana kontrolisanih zapremina računaju se koristeći vrijednosti brzina u čvorovima mreže:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f_1} &= \frac{13}{36} \mathbf{v}_A + \frac{13}{36} \mathbf{v}_B + \frac{5}{36} \mathbf{v}_C + \frac{5}{36} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_{f_2} &= \frac{13}{36} \mathbf{v}_A + \frac{5}{36} \mathbf{v}_B + \frac{13}{36} \mathbf{v}_C + \frac{5}{36} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_{f_3} &= \frac{13}{36} \mathbf{v}_A + \frac{5}{36} \mathbf{v}_B + \frac{5}{36} \mathbf{v}_C + \frac{13}{36} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_{f_4} &= \frac{5}{36} \mathbf{v}_A + \frac{13}{36} \mathbf{v}_B + \frac{13}{36} \mathbf{v}_C + \frac{5}{36} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_{f_5} &= \frac{5}{36} \mathbf{v}_A + \frac{13}{36} \mathbf{v}_B + \frac{5}{36} \mathbf{v}_C + \frac{13}{36} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_{f_6} &= \frac{5}{36} \mathbf{v}_A + \frac{5}{36} \mathbf{v}_B + \frac{13}{36} \mathbf{v}_C + \frac{13}{36} \mathbf{v}_D \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Vrijednosti nepoznate ϕ na stranama u izrazu (A.20) mogu da se računaju koristeći centralno diferencijalnu ili upwind shemu. Kod centralno diferencijalne sheme, vrijednost ϕ na datoj strani se dobija na osnovu vrijednosti u čvorovima, koristeći iste težinske faktore kao u izrazu (A.22). Kod upwind sheme, vrijednosti nepoznate ϕ se uzimaju zavisno od smjera strujanja u odnosu na spolja usumjeren vektor normale:

$$\begin{aligned}
\phi_{f_1} &= \begin{cases} \phi_A & \text{if } q_{f_1} > 0 \\ \phi_B & \text{if } q_{f_1} < 0 \end{cases} \\
\phi_{f_2} &= \begin{cases} \phi_A & \text{if } q_{f_2} > 0 \\ \phi_C & \text{if } q_{f_2} < 0 \end{cases} \\
\phi_{f_3} &= \begin{cases} \phi_A & \text{if } q_{f_3} > 0 \\ \phi_D & \text{if } q_{f_3} < 0 \end{cases} \\
\phi_{f_4} &= \begin{cases} \phi_B & \text{if } q_{f_4} > 0 \\ \phi_C & \text{if } q_{f_4} < 0 \end{cases} \\
\phi_{f_5} &= \begin{cases} \phi_B & \text{if } q_{f_5} > 0 \\ \phi_D & \text{if } q_{f_5} < 0 \end{cases} \\
\phi_{f_6} &= \begin{cases} \phi_C & \text{if } q_{f_6} > 0 \\ \phi_D & \text{if } q_{f_6} < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Sada se advektivni fluksevi kroz strane u okviru jednog tetraedra mogu napisati kao:

$$\begin{aligned}
q_{f_1} \phi_{f_1} &= \max[q_{f_1}, 0] \phi_A - \max[-q_{f_1}, 0] \phi_B \\
q_{f_2} \phi_{f_2} &= \max[q_{f_2}, 0] \phi_A - \max[-q_{f_2}, 0] \phi_C \\
q_{f_3} \phi_{f_3} &= \max[q_{f_3}, 0] \phi_A - \max[-q_{f_3}, 0] \phi_D \\
q_{f_4} \phi_{f_4} &= \max[q_{f_4}, 0] \phi_B - \max[-q_{f_4}, 0] \phi_C \\
q_{f_5} \phi_{f_5} &= \max[q_{f_5}, 0] \phi_B - \max[-q_{f_5}, 0] \phi_D \\
q_{f_6} \phi_{f_6} &= \max[q_{f_6}, 0] \phi_C - \max[-q_{f_6}, 0] \phi_D
\end{aligned} \tag{A.24}$$

A.6.2 Korak 2: Sastavljanje diskretizovane jednačine

Postupak računanja koeficijenata u jednačini (A.16) počinje zadavanjem nultih vrijednosti za matrice koeficijenata **ap**, **anb** i **bp**. Zatim se u petlji po tetraedarskim elementima mreže za svaku od šest strana unutar elementa računaju i čuvaju difuzioni i advektivni fluksevi, koristeći izraze (A.19) i (A.24). Ove vrijednosti se zatim koriste da se ažuriraju koeficijenti u matricama **ap** i **anb** na sledeći način:

Čvor A :

$$\begin{aligned}
ap_A &= ap_A - df_{1,1} - df_{2,1} - df_{3,1} + \max[q_{f_1}, 0] + \max[q_{f_2}, 0] + \max[q_{f_3}, 0] \\
anb_{A,l_{A,B}} &= anb_{A,l_{A,B}} + df_{1,2} + df_{2,2} + df_{3,2} + \max[-q_{f_1}, 0] \\
anb_{A,l_{A,C}} &= anb_{A,l_{A,C}} + df_{1,3} + df_{2,3} + df_{3,3} + \max[-q_{f_2}, 0] \\
anb_{A,l_{A,D}} &= anb_{A,l_{A,D}} + df_{1,4} + df_{2,4} + df_{3,4} + \max[-q_{f_3}, 0]
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Čvor B :

$$\begin{aligned} ap_B &= ap_B + df_{1,2} - df_{4,2} - df_{5,2} + \max[-q_{f_1}, 0] + \max[q_{f_4}, 0] + \max[q_{f_5}, 0] \\ anb_{B,l_{B,A}} &= anb_{B,l_{B,A}} - df_{1,1} + df_{4,1} + df_{5,1} + \max[q_{f_1}, 0] \\ anb_{B,l_{B,C}} &= anb_{B,l_{B,C}} - df_{1,3} + df_{4,3} + df_{5,3} + \max[-q_{f_4}, 0] \\ anb_{B,l_{B,D}} &= anb_{B,l_{B,D}} - df_{1,4} + df_{4,4} + df_{5,4} + \max[-q_{f_5}, 0] \end{aligned}$$

Čvor C :

$$\begin{aligned} ap_C &= ap_C + df_{2,3} + df_{4,3} - df_{6,3} + \max[-q_{f_2}, 0] + \max[-q_{f_4}, 0] + \max[q_{f_6}, 0] \\ anb_{C,l_{C,A}} &= anb_{C,l_{C,A}} - df_{2,1} - df_{4,1} + df_{6,1} + \max[q_{f_2}, 0] \\ anb_{C,l_{C,B}} &= anb_{C,l_{C,B}} - df_{2,2} - df_{4,2} + df_{6,2} + \max[q_{f_4}, 0] \\ anb_{C,l_{C,D}} &= anb_{C,l_{C,D}} - df_{2,4} - df_{4,4} + df_{6,4} + \max[-q_{f_6}, 0] \end{aligned}$$

Čvor D :

$$\begin{aligned} ap_D &= ap_D + df_{3,4} + df_{5,4} + df_{6,4} + \max[-q_{f_3}, 0] + \max[-q_{f_5}, 0] + \max[-q_{f_6}, 0] \\ anb_{D,l_{D,A}} &= anb_{D,l_{D,A}} - df_{3,1} - df_{5,1} - df_{6,1} + \max[q_{f_3}, 0] \\ anb_{D,l_{D,B}} &= anb_{D,l_{D,B}} - df_{3,2} - df_{5,2} - df_{6,2} + \max[q_{f_5}, 0] \\ anb_{D,l_{D,C}} &= anb_{D,l_{D,C}} - df_{3,3} - df_{5,3} - df_{6,3} + \max[q_{f_6}, 0] \end{aligned}$$

U toku ove procedure, potrebno je izračunati i sačuvati zapremine kontrolisanih zapremina oko svakog čvora. Ove vrijednosti se čuvaju u vektoru **vol** dimenzija $n_{nodes}-1$. Prije početka petlje po elementima, zadaju se nulte vrijednosti, dok se u toku petlje, elementi ovog vektora postupno ažuriraju:

$$\begin{aligned} vol_A &= vol_A + \frac{1}{4}V_{ABCD} \\ vol_B &= vol_B + \frac{1}{4}V_{ABCD} \\ vol_C &= vol_C + \frac{1}{4}V_{ABCD} \\ vol_D &= vol_D + \frac{1}{4}V_{ABCD} \end{aligned} \tag{A.26}$$

gdje se V_{ABCD} računa prema (A.3)

A.6.3 Implementacija graničnih uslova

Gore opisana procedura uzima u obzir samo strane kontrolisanih zapremina unutar domena. Zbog toga je neophodno ažurirati koeficijente kako bi se uzeo u obzir i fluks q_{in} koji prolazi kroz granice domena. Kao što je već rečeno, granica diskretizovanog domena se sastoji od skupa pojedinačnih ravnih trouglova. Za i -ti trougao na granici sa

globalnim čvorovima A , B i C (sačuvani kao prva tri člana u i -tom redu matrice granice domena \mathbf{s}) fluks ima opšti oblik:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ABC}} q_{in} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{ABC}} h(\phi_{amb} - \phi) d\Gamma \approx \\ &\approx \frac{\Gamma_{ABC}}{3} \left[h(\phi_{amb} - \phi_A) + h(\phi_{amb} - \phi_B) + h(\phi_{amb} - \phi_C) \right] \end{aligned} \quad (A.27)$$

gdje se površina trougla računa koristeći izraz (A.4). Kao što je ilustrovano u tabeli A.2, izraz (A.27) omogućava da za određenu sekciju granice domena, zadajući odgovarajuće vrijednosti koeficijenta prelaza toplote h i vrijednosti ϕ za okolinu, ϕ_{amb} , kao granični uslov postavimo fiksnu vrijednost ϕ , da zadamo konvektivni granični uslov ili da definišemo specifičnu vrijednost fluksa. Za i -ti trougao na granici domena, odgovarajući izbor ovih vrijednosti je povezan sa četvrtim članom u i -tom redu matrice \mathbf{s} , koji jasno definiše sekciju granice domena sa određenim graničnim uslovom.

TABELA 4.2: Mogući izbor graničnih uslova

Konvektivni granični uslov	Konačne vrijednosti za h i ϕ_{amb}
Izolovana granica	$h=0$, konačna vrijednost za ϕ_{amb}
Fiksna vrijednost ϕ na granici	$h=10^{16}$, $\phi_{amb}=\phi_{value}$ (ϕ_{value} je propisana vrijednost ϕ)
Fiksna vrijednost fluksa na granici	$h=10^{-16}$, $\phi_{amb}=q_{in}/h$ (q_{in} je propisana vrijednost fluksa)

Na ovaj način, uz pretpostavku da je $h \geq 0$, prethodno izračunati koeficijenti se ažuriraju kroz petlju po ns graničnih trouglova:

$$\begin{aligned} ap_{s_{i,k}} &= ap_{s_{i,k}} + \frac{\Gamma_{ABC}}{3} h_{s_{i,4}}, \quad k = 1, 2, 3 \\ bp_{s_{i,k}} &= bp_{s_{i,k}} + \frac{\Gamma_{ABC}}{3} h_{s_{i,4}} (\phi_{amb})_{s_{i,4}}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (A.28)$$

A.6.4 Implementacija izvornih članova

Ako su izvorni članovi prisutni u problemu koji se razmatra, njih možemo u jednačinu održanja da uključimo kao jedan dodatni član:

$$\int_{vol} Q dV + \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \phi d\Gamma - \int_{\Gamma} \kappa \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.29})$$

Za kontrolisanu zapreminu oko čvora i , ovaj zapreminski izvor (količina/zapremina-vrijeme) može da se aproksimira kao:

$$\int_{vol_i} Q dV \approx Q_i vol_i \quad (\text{A.30})$$

gdje je $Q_i = Q(x_i, y_i)$ vrijednost izvora u čvoru i , a vol_i je zapremina i -te kontrolisane zapremine. Standardni prilaz (Patankar, 1980) je da se izvor predstavlja u linearizovanom obliku:

$$Q_i vol_i = -Q_{C_i} \phi_i + Q_{B_i} \quad (\text{A.31})$$

Koeficijenti diskretizovane jednačine se ažuriraju u petlji po čvorovima:

$$ap_i = ap_i + Q_{C_i}; \quad bp_i = bp_i + Q_{B_i} \quad (\text{A.32})$$

A.6.5 Rješenje

Slijedeći opisanu proceduru dobija se diskretizovana jednačina stacionarne advekcije – difuzije, tj. jednačina (A.16). Rješenje polja nepoznate veličine ϕ može da se dobije, koristeći neku od podesnih iterativnih shema, npr. Jacobi, Gauss – Siedel ili SOR.

A.7. Nestacionarna advekcija-difuzija

Kod stacionarnih problema, neto protok veličine ϕ kroz granicu kontrolisane zapremine oko čvora i je identički jednak nuli:

$$Net_i = -ap_i \phi_i + \sum_{j=1}^{nmb_i} ap_{i,j} \phi_{g_{i,j}} = 0 \quad (\text{A.33})$$

U slučaju nestacionarnih problema, neto protok kroz granicu kontrolisane zapremine nije jednak nuli, što za posljedicu ima akumulaciju veličine ϕ u kontrolisanoj zapremini:

$$vol_i \frac{\phi_i^{new} - \phi_i}{\Delta t} = (1 - \theta) Net_i + \theta Net_i^{new} \quad (A.34)$$

gdje je Δt vremenski korak. Težinski faktor $0 \leq \theta \leq 1$ aproksimira neto protok kroz granicu kontrolisane zapremine i unutar vremenskog intervala $[t, t + \Delta t]$ na osnovu vrijednosti na početku i na kraju vremenskog koraka. Vrijednosti u vremenskom trenutku $t + \Delta t$ su označene gornjim indeksom *new*.

Za $\theta = 0$ shema je eksplicitna:

$$vol_i \phi_i^{new} = vol_i \phi_i + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{mb_i} ap_{i,j} \phi_{g_{i,j}} - ap_i \phi_i \right) \quad (A.35)$$

Eksplicitna shema ne zahtijeva rješavanje sistema jednačina, jer se vrijednosti ϕ u novom vremenskom koraku direktno ažuriraju na osnovu vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka. Ipak, da bi koeficijenti bili pozitivni i da bi rješenje bilo stabilno, neophodno je izabrati vremenski korak tako da je:

$$\Delta t < \min \left(\frac{vol_i}{ap_i} \right), \quad i = 1, \dots, nnodes \quad (A.36)$$

Za $\theta = 1$ shema je implicitna:

$$\left(\frac{vol_i}{\Delta t} + ap_i \right) \phi_i^{new} = \frac{vol_i}{\Delta t} \phi_i + \sum_{j=1}^{mb_i} ap_{i,j} \phi_{g_{i,j}}^{new} \quad (A.37)$$

Implicitna shema je bezuslovno stabilna, ali zahtijeva rješavanje sistema jednačina.

A.8. Primjeri

Kompjuterski kod koji slijedi algoritam diskretizacije opisan u ovom poglavlju je napisan u *Matlabu*. Pouzdanost i tačnost ovog koda je testirana poređenjem rezultata sa poznatim analitičkim rješenjima za osnosimetrične probleme advekcije – difuzije. Ovo može da se smatra kao pravi test predloženog algoritma, budući da nestrukturisana 3D mreža kao ni numeričko rješenje zasnovano na Dekartovim koordinatama, ni na koji način ne mogu da koriste pogodnost osnosimetričnosti datih problema.

A.8.1 Stacionarna difuzija u anulusu

Jednačina stacionarne difuzije u anulusu, sa konstantnim koeficijentom toplotne difuzije i bez izvora, u polarnim koordinatama je:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{A.38})$$

Za granične uslove $\phi(r = r_{in}) = \phi_{in}$ i $\phi(r = r_{out}) = \phi_{out}$, rješenje je:

$$\phi = \phi_{in} + (\phi_{out} - \phi_{in}) \frac{\ln r - \ln r_{in}}{\ln r_{out} - \ln r_{in}} \quad (\text{A.39})$$

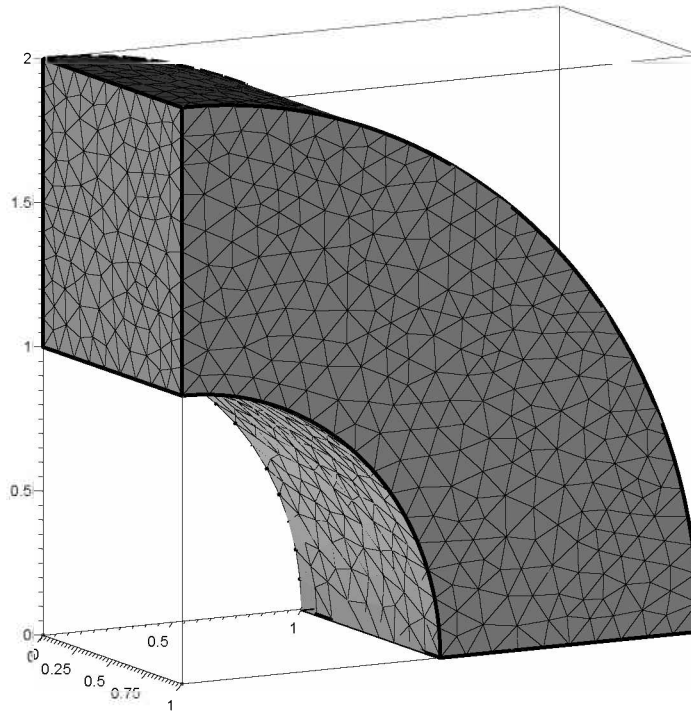
Pogodan domen za rješavanje ovog problema u Dekartovim koordinatama je četvrtina annulusa sa jediničnom debljinom zida. Jednačina (A.38) u Dekartovim koordinatama ima oblik:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.40})$$

sa sledećim graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{in} \text{ na } \sqrt{x^2 + y^2} = r_{in}, \quad \phi = \phi_{out} \text{ na } \sqrt{x^2 + y^2} = r_{out} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \text{ na } y = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ na } x = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \text{ na } z = 0 \text{ i } z = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Mreža tetraedarskih elemenata za četvrtinu anulusa (za $r_{in} = 1$ i $r_{out} = 2$) je data na slici A.4. Ova diskretizacija ima 3431 čvor i 17471 element. Na slici A.5 je prikazano poređenje numeričkog CVEM rješenja na ovoj mreži, sa analitičkim rješenjem, za $\phi_{in} = 1$ i $\phi_{out} = 0$. Treba imati na umu da je dijagram na slici A.5 napravljen slučajnim odabirom 60 tačaka u domenu i crtanjem grafika za tačke (r_i, ϕ_i) , gdje su vrijednosti $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ sortirane od najmanje ka najvećoj vrijednosti. Poređenje ovako odabranih numeričkih vrijednosti sa analitičkim rješenjem strožije ilustruje tačnost CVFEM rješenja za razliku od slučaja kada se numeričke vrijednosti uzmu samo duž određenog radijalnog pravca.



SLIKA A.4 Mreža tetraedarskih elemenata za domen oblika četvrtine anulusa

Za slučaj stacionarne difuzije, kada koeficijent toplotne difuzije i izvorni član zavise od radijusa r :

$$\kappa = \frac{1}{r}, \quad Q = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \text{const} \quad (\text{A.42})$$

jednačina difuzije u polarnim koordinatama ima oblik:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \alpha = 0 \quad (\text{A.43})$$

Za granične uslove $\phi(r = r_{in}) = \phi_{in} = 1$ i $\phi(r = r_{out}) = \phi_{out} = 0$, analitičko rješenje je:

$$\phi = -\frac{\alpha}{2}r^2 - \left(1 - \frac{3}{2}\alpha\right)r + 2 - \alpha \quad (\text{A.44})$$

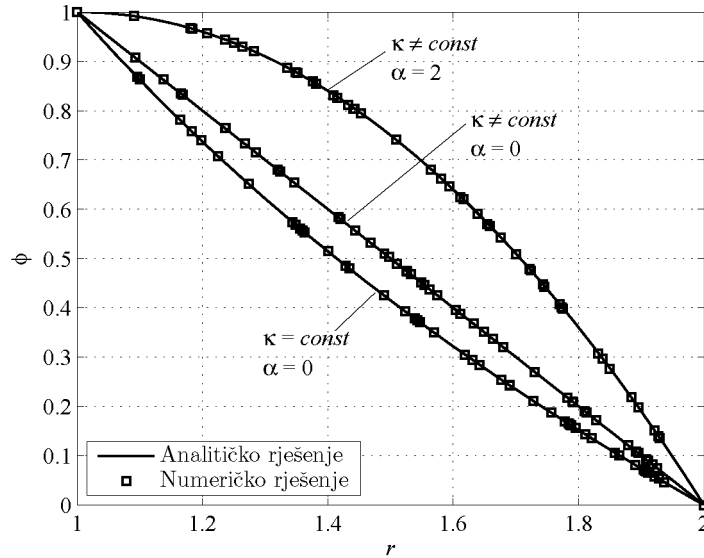
Za slučaj jedne četvrtine anulusa, ova jednačina u Dekartovim koordinatama ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (\text{A.45})$$

gdje su granični uslovi definisani kao u (A.41) a koeficijent toplotne difuzije i izvorni član su definisani sa:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{A.46})$$

Na slici A.5 je prikazano poređenje CVFEM rezultata i analitičkog rješenja, za dvije različite vrijednosti koeficienta α u izvornom članu.



SLIKA A.5 Stacionarna difuzija u anulusu

A.8.2 Stacionarna advekcija-difuzija u anulusu

Jednačina stacionarne advekcije-difuzije u polarnim koordinatama, sa radijalnom brzinom definisanom kao $v_r = \frac{1}{r}$, sa konstantnim koeficijentom toplotne difuzije $\kappa = 1$ i bez izvora, u polarnim koordinatama je:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{A.47})$$

Za granične uslove $\phi(r = r_{in}) = \phi_{in} = 1$ i $\phi(r = r_{out}) = \phi_{out} = 0$ analitičko rješenje je:

$$\phi = 2\phi_{in} - \phi_{out} + (\phi_{out} - \phi_{in})r \quad (\text{A.48})$$

Ista jednačina u Dekartovim koordinatama ima sledeći zapis:

$$\frac{\partial(v_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \phi)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.49})$$

sa graničnim uslovima definisanim kao u (A.41) i:

$$v_x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v_y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{A.50})$$

Na slici A.6 je prikazano poređenje analitičkog rješenja sa numeričkim CVFEM rješenjem.

Kada se radijalna brzina definiše kao $v_r = \frac{1}{r}$, a promjenljivi koeficijent toplotne difuzije definisan izrazom (A.42), jednačina advekcije-difuzije u polarnim koordinatama se svodi na:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (\text{A.51})$$

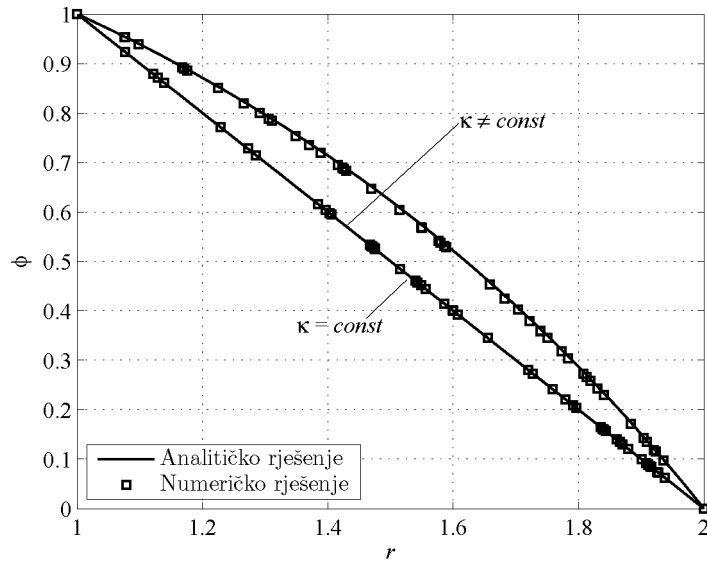
Sa istim graničnim uslovima kao i u prethodnom primjeru, analitičko rješenje je:

$$\phi = \frac{e^r - e^2}{e - e^2} \quad (\text{A.52})$$

Odgovarajuća jednačina za domen na slici A.4 u Dekatrovim koordinatama ima oblik:

$$\frac{\partial(v_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \phi)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.53})$$

gdje je promjenljivi koeficijent toplotne difuzije definisan sa (A.46). Na slici A.6 je dato poređenje analitičkog rješenja sa numeričkim CVFEM rješenjem.



SLIKA A.6 Stacionarna advekcija-difuzija u anulusu

A.8.3 Stacionarna difuzija u sfernoj ljusci

Jednačina stacionarne difuzije u sfernoj ljusci, sa konstantnim koeficijentom toplotne difuzije i bez izvora, u polarnim koordinatama je:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{A.54})$$

Za granične uslove $\phi(r = r_{in}) = \phi_{in}$ i $\phi(r = r_{out}) = \phi_{out}$ analitičko rješenje je:

$$\phi = \phi_{in} - r_{out} \frac{\phi_{in} - \phi_{out}}{r_{out} - r_{in}} \frac{r - r_{in}}{r} \quad (\text{A.55})$$

Pogodan domen za rješavanje ovog problema u Dekartovim koordinatama je osmina sferne ljuske. Jednačina (A.54) u Dekartovim koordinatama ima oblik:

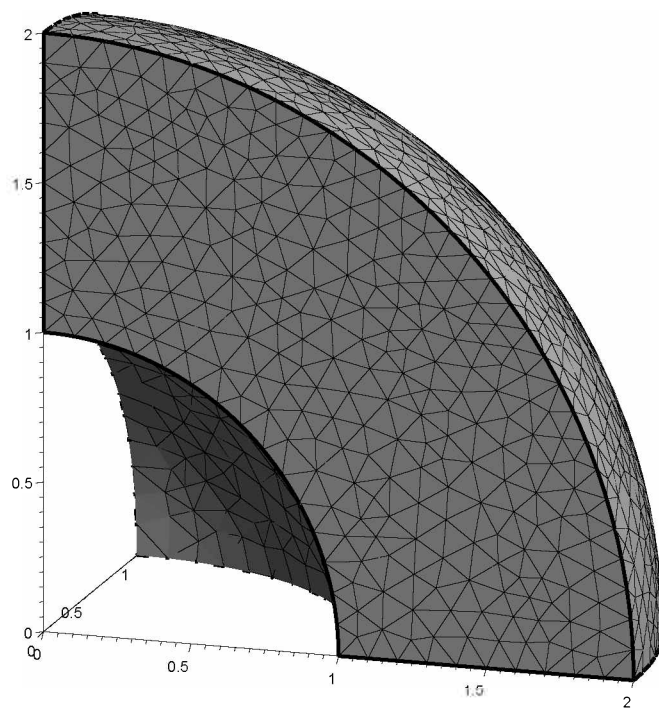
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.56})$$

sa sledećim graničnim uslovima:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_{in} \text{ na } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_{in}, \quad \phi = \phi_{out} \text{ na } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_{out} \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \text{ na } x = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ na } y = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ na } z = 0
\end{aligned}
\tag{A.57}$$

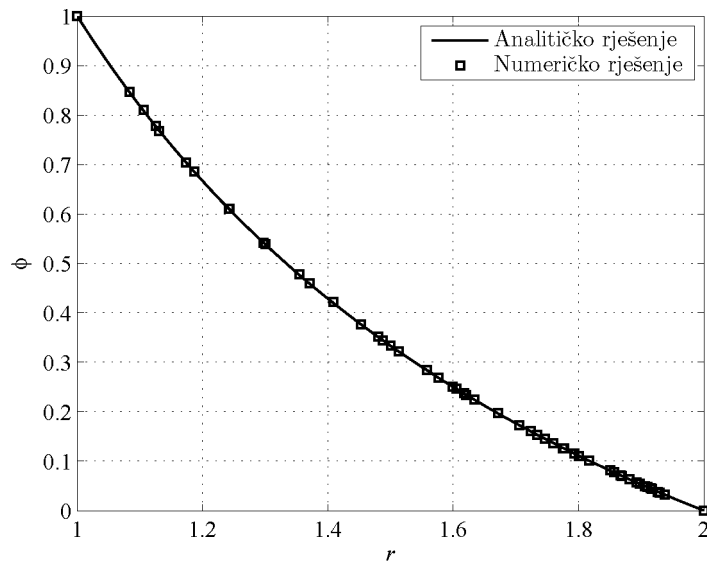
Mreža tetraedarskih elemenata za ovaj domen (za $r_{in} = 1$ i $r_{out} = 2$) je data na slici A.7.

Ova diskretizacija ima 5361 čvor i 28544 element.



SLIKA A.7 Mreža tetraedarskih elemenata za domen oblika osmine sferne ljuske

Na slici A.8 je prikazano poređenje numeričkog CVEM rješenja na ovoj mreži, sa analitičkim rješenjem, za $\phi_{in} = 1$ i $\phi_{out} = 0$.



SLIKA A.8 Stacionarna difuzija u sfernoj ljusci

A.8.4 Nestacionarna difuzija sa faznim prelazom

Mogućnost korišćenja 3D CVFEM sheme za simulaciju nestacionarnih problema je ilustrovana na slučaju otapanja štapa (x -sa- y -sa- z dimenzije su 20-sa-1-sa-1) uslijed provođenja toplote. Početna temperatura štapa jednaka je temperaturi faznog prelaza $T=0$. Usvajajući jedinične vrijednosti gustine, koeficijenta toplotne difuzije, specifične toplote i toplote faznog prelaza, entalpijska jednačina može da se napiše u obliku (Crank, 1984):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{A.58})$$

gdje se entalpija definiše kao zbir osjetne toplote i toplote faznog prelaza:

$$H = T + f \quad (\text{A.59})$$

gdje je f udio tečne faze ($0 \leq f \leq 1$, $f=0$ čvrsta faza, $f=1$ tečna faza). Kod ovakvog sistema, otapanje se inicira tako što se na površini $x=0$ trenutno postavlja vrijednost temperature na $T=1$ i udjela tečne faze na $f=1$. Analitičkim rješavanjem ovog problema (Crank, 1984) dobija se da se pozicija površine između faza (faznog fronta) u pravcu x ose može predstaviti kao funkcija od vremena u sledećem obliku:

$$s(t) = 1.24 \cdot \sqrt{t} \quad (\text{A.60})$$

Ako se isti problem rješava koristeći CVFEM prilaz sa eksplicitnom integracijom u vremenu, dobija se sledeća diskretizovana jednačina kojom se ažurira vrijednost entalpija za čvor i u vremenu:

$$(vol_i + B_{C_i}) H_i^{new} = vol_i H_i + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{mb_i} an b_{i,j} T_{g_{s,i,j}} - ap_i T_i + B_{B_i} \right) \quad (\text{A.61})$$

gdje članovi B_{C_i} i B_{B_i} uzimaju u obzir granične uslove. U ovom slučaju ovi članovi su jednaki nuli za sve čvorove, izuzev za čvorove na granici $x=0$ gdje je $B_{C_i} = 10^{18}$ i $B_{B_i} = 2 \cdot 10^{18}$.

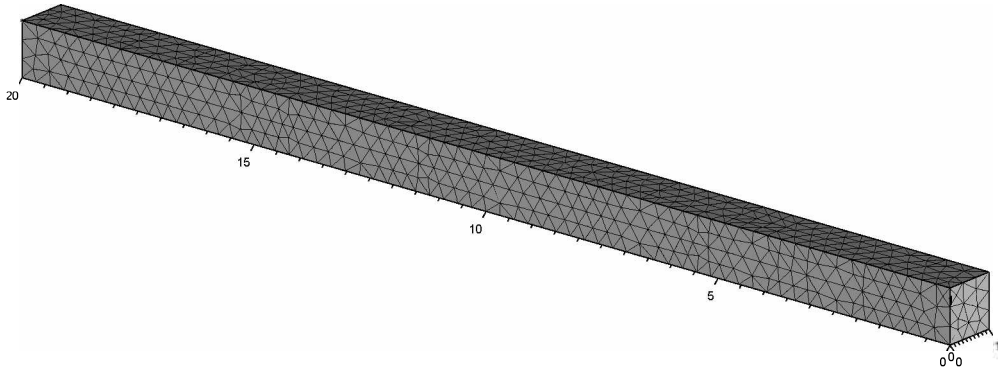
U svakom vremenskom koraku, ažurirane vrijednosti polja entalpija se dobijaju iz (A.61), dok se udio tečne faze računa prema:

$$f_i = \min(H_i^{new}, 1) \quad (\text{A.62})$$

Da bi prešli na sledeći vremenski korak, potrebno je izračunati ažurirano polje temperatura koristeći sledeću jednačinu:

$$T_i = H_i^{new} - f_i \quad (\text{A.63})$$

Ove jednačine su rešene na mreži prikazanoj na slici (A.9) koja ima 1501 čvor i 5718. Kod ove mreže, srednje rastojanje između čvorova u x pravcu je 0,3.

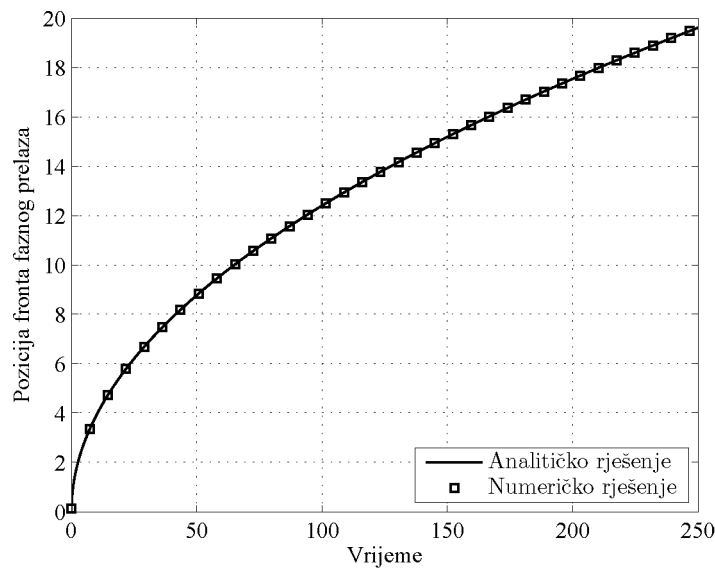


SLIKA A.9 Mreža tetraedarskih elemenata

Kriterijum stabilnosti (A.36) diktira da vremenski korak integracije mora da bude manji od 0,0029, tako da je ovdje usvojen konstantni vremenski korak, jednak polovini ove vrijednosti, tj. $\Delta t = 0,00145$. U svakom vremenskom koraku, pozicija površine između faza tečno-čvrsto (faznog fronta) se računa prema:

$$s(t) = 20 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{nnodes} f_i vol_i}{\sum_{i=1}^{nnodes} vol_i} \quad (\text{A.64})$$

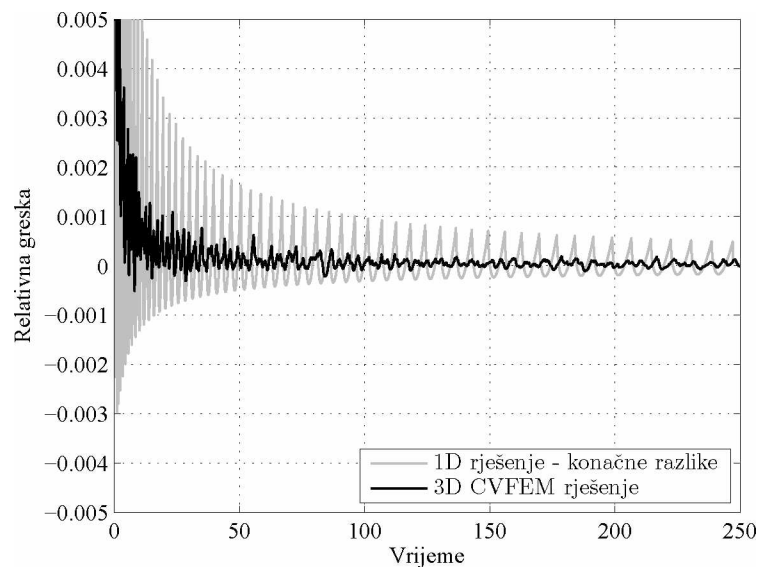
Pozicija fronta faznog prelaza dobijenog na ovaj način je na slici A.10 upoređena sa analitičkim rješenjem (A.60). Vidi se da CVFEM rješenje (simboli na grafiku prikazuju svaki 5000. vremenski korak) daje glatku i blisku aproksimaciju analitičkog rješenja za položaj faznog fronta.



SLIKA A.10 Pozicija fronta faznog prelaza u vremenu

Rezultati na slici A.10 jasno pokazuju sposobnost CVFEM prilaza za simulaciju nestacionarnih problema. Ipak, ovdje može da se napravi još jedno interesantno zapažanje. Poznato je da se koristeći entalpijsku metodu na fiksnoj numeričkoj mreži za simulaciju faznog prelaza kao u prethodnom problemu (fazni front se pomjera u jednom pravcu) mogu javiti značajne stepenaste oscilacije u predviđanju pozicije fronta faznog prelaza (Voller i Cross (1981) i Crank (1984)). Ovo se javlja kao posljedica činjenice da kod entalpijskog prilaza na fiksnoj strukturisanoj mreži, čvorovi koji se nalaze u ravni y - z najbliže frontu faznog prelaza mogu da ostanu fiksirani na temperaturi faznog prelaza u toku prilično značajnog broja vremenskih koraka. Kod problema sa Dirichlet graničnim uslovima, ovo dovodi do periodičnog „zamrzavanja“ temperaturskog polja, zbog pomjeranja fronta faznog prelaza između ravni sa čvorovima u pravu x ose (Bell, 1982). Ipak, izgleda da nestacionarna CVFEM shema sa nekoplanarnim čvorovima

može u značajnoj mjeri da priguši ovo oscilatorno ponašanje. Ovo je ilustrirano na slici A.11, na kojoj su prikazane relativne greške CVFEM prilaza i 1D numeričkog rješenja sa konačnim razlikama na strukturisanoj mreži pri čemu je uzet isti broj čvorova duž x pravca. Relativna greška se definiše kao $(s(t)_{numerical} - s(t)_{analytical}) / s(t)_{analytical}$. Oscilacije se i dalje javljaju kod CVFEM3D rješenja, ali bez precizne periodičnosti i sa značajno smanjenom amplitudom. Ovo nas upućuje na to da entalpijski prilaz na fiksnoj numeričkoj mreži kombinovan sa CVFEM metodom može da bude konkurentan shemama koje koriste sofisticirane algoritme sa deformišućom numeričkom mrežom koja prati pomjeranje faznog fronta (npr. Becket, Mackenzie i Robertson, 2001).



SLIKA A.11 Relativna greška u predviđanju pozicije fronta faznog prelaza

Literatura

Al-Khoury, R., Bonnier, P. G. and Brinkgreve, B. J. (2005). Efficient finite element formulation for geothermal heating systems, Part I: steady state, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, No. 7, pp. 988–1013.

Al-Khoury, R. and Bonnier, P. G. (2006). Efficient finite element formulation for geothermal heating systems, Part II: transient, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 5, pp. 725–745.

ASHRAE (2007). *ASHRAE Handbook: HVAC Applications*, ASHRAE, Atlanta.

Baliga, B. R. and Atabaki, N. (2006). Control-volume-based finite-difference and finite-element methods, in: Minkowycz, W. J., Sparrow, E. M. and Murthu, J.Y. (ed) *Handbook of Numerical Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Hoboken.

Baliga, B. R. and Patankar, S. V. (1980). A new finite element formulation for convection-diffusion problems, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, No. 4, pp. 393–409.

Ball, D. A., Fischer R. D. and Hodgett D. L. (1983). Design methods for ground-source heat pumps, *ASHRAE Transactions*, Vol. 89, No. 2, pp. 416–440.

Beckett, G., Mackenzie, J. A., Robertson M. L. (2001). A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional stefan problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, No. 2, pp. 500–518.

Beier, R. A. (2014). Transient heat transfer in a U-tube borehole heat exchanger, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 62, pp. 256–266.

Beier, R. A., Smith, M. D. and Spitler, J. D. (2011). Reference data sets for vertical borehole ground heat exchanger models and thermal response test analysis, *Geothermics*, Vol. 40, No. 1, pp. 79-85.

Bell, G. E. (1982). On the performance of the enthalpy method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 25, No. 4, pp. 587–589.

- Bennet, J., Claesson, J., Hellstrom, G. (1987). Multiple method to compute the conductive heat flows to and between pipes in a composite cylinder, Notes on heat transfer 3-1987, Department of Building Physics, Lund Institute of Technology, University of Lund, Sweden.
- Bernier, M. A. (2001). Ground-coupled heat pump system simulation, *ASHRAE Transactions*, Vol. 107, No. 1, pp. 605–616.
- Bernier, M. A., Pinel, P., Labib, R. and Paillot, R. (2004). A multiple load aggregation algorithm for annual hourly simulations of GCHP systems, *HVAC&R Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 471–487.
- Bose, J. E. (1984). *Closed-loop ground-coupled heat pump design manual*, Engineering Technology Extension, Oklahoma State University, Stillwater.
- Caneta Research (1995). *Commercial/institutional ground-source heat pump engineering manual*, ASHRAE, Atlanta.
- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1947). *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford.
- Crank, J. (1984). *Free and moving boundary problems*, Clarendon Press, Oxford.
- Crawley, D. B. et al. (2001). EnergyPlus: creating a new-generation building energy simulation program, *Energy and Buildings*, Vol. 33, No. 4, pp. 319–331.
- Darcy, H (1856), *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*, Victor Dalmont, Paris.
- De Carli, M., Tonon, M., Zarrela, A. and Zecchin, R. (2010). A computational capacity resistance model (CaRM) for vertical ground-coupled heat exchangers, *Renewable Energy*, Vol. 35, No. 7, pp. 1537–1550.
- Deerman, J. D. and Kavanaugh, S. P. (1991). Simulation of vertical U-tube ground coupled heat pump systems using the cylindrical heat source solution, *ASHRAE Transactions*, Vol. 97, No. 1, pp. 287–295.
- DHI-WASY (2010). FEFLOW finite element subsurface flow and transport simulation system – User’s manual/reference manual/white papers. *Recent release 6.0*. Berlin: Tech.rep., DHI-WASY GmbH.

- Diao, N. R., Zeng, H. Y. and Fang, Z. H. (2004). Improvement in modeling of heat transfer in vertical ground heat exchangers, *HVAC&R Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 459–470.
- Diao, N., Li, Q. and Fang, Z. (2004). Heat transfer in ground heat exchangers with groundwater advection, *International Journal of Thermal Science*, Vol. 43, No. 12, pp. 1203–1211.
- Diersch, H. -J. G., Bauer, D., Heidemann, W., Rühaak, W. and Schätzl, P. (2011). Finite element modeling of borehole heat exchanger systems, Part 1. Fundamentals, *Computer & Geosciences*, Vol. 37, No. 8, pp. 1122–1135.
- Diersch, H. -J. G., Bauer, D., Heidemann, W., Rühaak, W. and Schätzl, P. (2011) Finite element modeling of borehole heat exchanger systems, Part 2. Numerical simulation, *Computer & Geosciences*, Vol. 37, No. 8, pp. 1136–1147.
- Eskilson, P. (1987). Thermal analysis of heat extraction boreholes, Ph.D. Thesis, University of Lund, Lund.
- Eskilson, P. and Claesson, J. (1988). Simulation model for thermally interacting heat extraction boreholes, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, No. 2, pp. 149–165.
- Florides, G. and Kalogirou, S. (2007). Ground heat exchangers—A review of systems, models and applications, *Renewable Energy*, Vol. 32, No.15, pp. 2461–2478.
- Gallero, F. J. G., Maestre, I. R., Gomez, P. A. and Blasquez, J. L. F. (2015). Numerical and experimental validation of a new hybrid model for vertical ground heat exchangers, *Energy Conversion and Management*, Vol. 103, pp. 511–518.
- Geuzaine, C. and Remacle, J. -F. (2009). Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 79, No. 11, pp. 1309–1331.
- Gnielinski, V. (1995). Ein neues berechnungsverfahren für die wärmeübertragung im übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter rohrströmung, *Forschung im Ingenieurwesen*, Vol. 61, No. 9, pp. 240–248.

- Gu, Y. and O'Neal D. L. (1998). Development of an equivalent diameter expression for vertical U-tubes used in ground-coupled heat pumps, *ASHRAE Transactions*, Vol. 104, No. 2, pp. 347–355.
- Hart, D. P. and Couvillion, R. (1986). *Earth coupled heat transfer*, National Water Well Association, Westerville.
- Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R. (1992). A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures, *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, No. 1, pp. 108–118.
- He, M. (2012). Numerical modelling of geothermal borehole heat exchanger, Ph.D. thesis, De Monfort University, Leicester.
- Hellström, G. (1989). Duct ground heat storage model — Manual for computer code, University of Lund, Lund.
- Hellström, G. (1991). Ground heat storage, Thermal analysis of duct storage systems. Part I: Theory, Ph.D. thesis, University of Lund, Lund.
- Hern, S. A., (2004). Design of an experimental facility for hybrid ground source heat pump systems. M.Sc. thesis. Oklahoma State University, Stillwater.
- IEA (2010). World energy outlook 2010 Executive Summary, International Energy Agency, Paris.
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman T. L. and Lavine A. S. (2007). *Fundamentals of heat and mass transfer*, 6th edition, John Wiley & Sons, Hoboken.
- Ingersoll, L. R. and Plass, H. J. (1948). Theory of ground pipe heat source for the heat pump, *ASHVE Transactions*, Vol. 54, pp. 339–348.
- Ingersoll, L. R., Zobel, O. J. and Ingersoll, A. C. (1954). *Heat conduction with engineering, geological, and other applications*, McGraw-Hill, New York.
- Kavanaugh, S. K. (1991). *Ground and water source heat pumps: A manual for the design and installation of ground-coupled, groundwater and lake water heating and cooling systems in southern climates*, Energy Information Services, Tuscaloosa.
- Kavanaugh, S. P. (1985). Simulation and experimental verification of vertical ground coupled heat pump systems, Ph.D. thesis, Oklahoma State University, Stillwater.

- Kavanaugh, S. P. and Rafferty, K. (1997). *Ground-source heat pumps — design of geothermal systems for commercial and institutional buildings*, ASHRAE, Atlanta.
- Kelvin, S.W.T. (1882). *Mathematical and Physical Papers*, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge.
- Klein, S. A. et al. (2010). TRNSYS 17: A transient system simulation program, Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin, Madison.
- Kusuda, T. and Achenbach, P. R. (1965). Earth temperature and thermal diffusivity at selected stations in the United States, National Bureau of Standards, Washington DC.
- Lagarias, J. C. and Zong, C. (2012). Mysteries in packing regular tetrahedra, *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 59, No. 11, pp. 1540–1549.
- LeDain Muir, B. and Baliga, B. R. (1986). Solution of three-dimensional convection-diffusion problems using tetrahedral elements and flow-oriented upwind interpolation functions, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 143-162.
- Lee, C. K. and Lam, H. N. (2008). Computer simulation of borehole ground heat exchangers for geothermal heat pump systems, *Renewable Energy*, Vol. 33, No. 6, pp. 1286–1296.
- Leonard, B. P. (1979). A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 59–98.
- Li, Z. and Zheng, M. (2009). Development of a numerical model for the simulation of vertical U-tube ground heat exchangers, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 29, No. 5–6, pp. 920–924.
- Muraya, N. K (1995). Numerical modeling of the transient thermal interference of vertical U-tube heat exchangers, Ph.D. thesis, Texas A&M University, College Station.
- Muraya, N.K., O’Neal, D.L. and Heffington, W.M. (1996). Thermal interference of adjacent legs in a vertical U-tube heat exchanger for a ground-coupled heat pump, *ASHRAE Transactions*, Vol. 102, No. 2, pp. 12–21.

- Molina-Giraldo, N., Blum, P., Zhu, K., Bayer, P. and Fang, Z. (2011). A moving finite line source model to simulate borehole heat exchangers with groundwater advection, *International Journal of Thermal Science*, Vol. 50, No. 12, pp. 2506–2513.
- Nabi, M. and Al-Khoury, R. (2012). An efficient finite volume model for shallow geothermal systems. Part I: Model formulation, *Computers & Geosciences*, Vol. 49, pp. 290–296.
- Nabi, M. and Al-Khoury, R. (2012). An efficient finite volume model for shallow geothermal systems. Part II: Verification, validation and grid convergence, *Computers & Geosciences*, Vol. 49, pp. 297–307.
- NRCan (2002). Commercial earth energy systems: A buyer's guide, NRCan, Ottawa.
- Oberdorfer, P. (2014). Heat transport phenomena in shallow geothermal boreholes — Development of a numerical model and novel extension for the thermal response test method by applying oscillating excitations, Ph.D. thesis, University of Göttingen, Göttingen.
- Omer, A. M. (2008). Ground-source heat pumps systems and applications, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 12, No. 2, pp. 344–371.
- Oppelt, T., Riehl, I. and Gross, U. (2010). Modelling of the borehole filling of double U-pipe heat exchangers, *Geothermics*, Vol. 39, No. 3, pp. 270–276.
- OSU (1988a). Closed-loop/ground source heat pump systems installation guide, IGSHPA, Oklahoma State University, Stillwater.
- OSU (1988b). Closed-loop/ground source heat pump systems, Oklahoma State University, Stillwater.
- Patankar, S. V. (1980). Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group, New York.
- Paul, N. D. (1996). The effect of grout thermal conductivity on vertical geothermal heat exchanger design and performance, M.Sc. thesis, Brookings.
- Persson, P. -O. and Strang, G. (2004). A simple mesh generator in MATLAB, *SIAM Review*, Vol. 46, No. 2, pp. 329–345.

Rawlings, R. H. D. and Sykulski, J. R. (1999). Ground source heat pumps: A technology review, *Building Services Engineering Research and Technology*, Vol. 20, No. 3, pp. 119–129.

Rees, S. J., He, M. (2013). A three-dimensional numerical model of borehole heat exchanger heat transfer and fluid flow, *Geothermics*, Vol. 46, pp. 1–13.

Rotta, J.C. (1972) *Turbulente Strömungen*. Verlag Teubner, Stuttgart, Germany.

Rottmayer, S. P., Beckman W. A. and Mitchell, J. W. (1997). Simulation of a single vertical U-tube ground heat exchanger in an infinite medium, *ASHRAE Transactions*, Vol. 103, No. 2, pp. 651–659.

Sarbu, I. and Sebarchievici, C. (2014). General review of ground-source heat pump systems for heating and cooling of buildings, *Energy and Buildings*, Vol. 70, pp. 441–454.

Self, S. J., Reddy, B. V. and Rosen, M. A. (2013). Geothermal heat pump systems: Status review and comparison with other heating options. *Applied Energy*, Vol. 101, pp. 341–348.

Shonder, J. A. and Beck, J. V. (1999). Determining effective soil formation thermal properties from field data using parameter estimation technique, *ASHRAE Transactions*, Vol. 105, No. 1, pp. 458–466.

Spitler, J. D. (2000). GLHEPRO - A design tool for commercial building ground loop heat exchangers, *The Fourth International Heat Pumps in Cold Climates Conference*, Aylmer, Quebec, August 17–18, 2000.

Spitler, J. D. (2005). Ground-source heat pump system research — past, present, and future, *HVAC&Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 165–167.

Sumner, J. A. (1976). *Domestic heat pumps*, Prism Press, Dorchester.

Svec, O. J. (1987). Potential of ground heat source systems, *International Journal of Energy Research*, Vol. 11, pp. 573–581.

van Genuchten, M. Th. and Alves, W. J. (1982). Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation, *Technical Bulletin No. 1661*, United States Department of Agriculture, Washington DC.

- VDI (2010). VDI Heat Atlas, 2nd edition, Springer, Düsseldorf.
- Voller, V. R., (2009). *Basic control volume finite element method for fluids and solids*, World Scientific, Singapore.
- Voller, V. R. and Cross, M. (1981). Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, No. 3, pp. 545–556.
- Wetter, M. and Huber, A. (1997). TRNSYS Type 451: Vertical borehole heat exchanger EWS model, Version 3.1 – Model description and implementing into TRNSYS, Transsolar GmbH, Stuttgart.
- Wołoszyn, J. and Gołaś, A. (2013). Modelling of a borehole heat exchanger using a finite element with multiple degrees of freedom, *Geothermics*, Vol. 47, pp. 13-26.
- Xu, X. (2007). Simulation and optimal control of hybrid ground source heat pump systems, Ph.D. thesis, Oklahoma State University, Stillwater.
- Yang, H., Cui, P. and Fang, Z. (2010). Vertical-borehole ground-coupled heat pumps: A review of models and systems, *Applied Energy*, Vol. 87, pp. 16–27.
- Yavuzturk, C. (1999). Modeling of vertical ground loop heat exchangers for ground source heat pump systems, Ph.D. thesis, Oklahoma State University, Stillwater.
- Young, T. R. (2004). Development, verification, and design analysis of the borehole fluid thermal mass model for approximating short term borehole thermal response, M.Sc. thesis, Oklahoma State University, Stillwater.
- Zarrela, A., Scarpa, M. and De Carli, M. (2011). Short time step analysis of vertical ground-coupled heat exchangers: the approach of CaRM, *Renewable Energy*, Vol. 36, No. 9, pp. 2357–2367.

IZJAVA O AUTORSTVU

Potpisani/a Esad Tombarević

Broj upisa 2/09

IZJAVLJUJEM

da je doktorska disertacija pod naslovom:

Analiza nestacionarnog prenosa toplote u geotermalnim razmjenjivačima sa U-cijevima

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini, ni u djelovima nije bila predložena za sticanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova i
- da nijesam kršio/la autorska prava i koristio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda



u Podgorici

28/06/2016

IZJAVA O ISTOVJETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE

VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora **Esad Tombarević**

Broj upisa **2/09**

Studijski program **Mašinstvo**

Naslov disertacije

Analiza nestacionarnog prenosa toplote u geotermalnim razmjenjivačima sa U-cijevima

Naslov disertacije na engleskom jeziku

Analysis of unsteady heat transfer in the geothermal U-tube borehole heat exchanger

Mentor **Prof. dr Igor Vušanović**

Potpisani/a **Esad Tombarević**

Izjavljujem da je štampana verzija doktorske disertacije istovjetna elektronskoj verziji, koju sam predao/la radi pohranjivanja u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore**.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje ličnih podataka u vezi sa sticanjem akademskog zvanja doktora nauka (ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naslov disertacije i datum odbrane) na mrežnim stranicama i u publikacijama Univerziteta Crne Gore.

^u Podgorici

28/06/2016

Potpis doktoranda



IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Analiza nestacionarnog prenosa toplote u geotermalnim razmjenjivačima sa U-cijevima

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

Autorstvo

Autorstvo - bez prerada

Autorstvo - dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo - nekomercijalno

☒ Autorstvo - nekomercijalno - bez prerada

Autorstvo - nekomercijalno - dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda



u

28/06/2016

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo - bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo - dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo - nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo - nekomercijalno - bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo - nekomercijalno - dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.