UNIVERZITET CRNE GORE

Mašinski fakultet

Magnetohidrodinamika
532.526 13724

# NESTACIONARNI LAMINARNI GRANIČNI SLOJ NESTIŠLJIVOG FLUIDA

**- doktorska disertacija -**

Mr. DEČAN IVANOVIĆ

Podgorica 1992.

Naučni rukovodioci disertacije:

DR SALJNIKOV VIKTOR, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu,

DR BORIČIĆ ZORAN, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu

Odbranjen!

# Z A H V A L N O S T

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim:

*Dr VIKTORU SALJNIKOVU, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Beogradu, mentoru ovog rada, za pomoć u izboru teme ovog rada i za angažovanje, primjedbe, pravovremene sugestije i usmjeravanje u radu što je doprinijelo kvalitetu i uspješnom završetku ovog rada,*

*Dr ZORANU BORIČIĆU, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu, za pomoć u izboru teme ovog rada,*

*Dr DRAGIŠI NIKODIJEVIĆU, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu, i*

*Dr PETRU VUKOSLAVČEVIĆU, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta u Podgorici, na korisnim sugestijama za vrijeme realizacije rada.*

# S A D R Ž A J

# U V O D

Granični sloj u mehanici fluida podrazumijeva tanak sloj fluida, koji opstrujava spoljašnju površinu tijela. Od toga da li je strujni tok laminaran ili turbulentan, zavisi intenzitet otpora i prenošenje toplote na opstrujavano tijelo. Naime, kod laminarnog graničnog sloja sa sredjenom slojevitom strukturom otpori na tijelu su znatno manji, dok kod turbulentnog graničnog sloja jako izražena vrtložnost prouzrokuje znatno veće otpore. Zato je i cilj svih istraživanja u teoriji graničnog sloja, da položaj tačke odvajanja sloja od opstrujavane površine, bude nizvodno pomjeren što je moguće više. Pošto je teorija graničnog sloja zasnovana na uproščenim jednačinama količine kretanja i energije, smatralo se do skoro da ona može dati samo približne rezultate u poredjenju sa numeričkim rešenjima potpunih NAVIÉ-STOKES-ovih jednačina koje su danas rešive zahvaljujući moćnim elektronskim računskim mašinama. Medjutim, svestranija analiza teorije graničnog sloja i njena praktična primjena pokazali su, da je ovo tvrdjenje neopravdano i da teoriju graničnog sloja treba razmatrati i kao korektnu asimptotsku teoriju s obzirom na Re-broj. Tako se rezultati dobijeni posredstvom teorije graničnog sloja, poklapaju sa egzaktnim rešenjima utoliko bolje ukoliko je Re-broj veći, a to znači da ti rezultati u poredjenju sa numeričkim rešenjima potpunih NAVIÉ-STOKES-ovih jednačina, raspolažu značajnim preimućstvom, jer odgovaraju tačno strukturi rešenja za velike Re-brojeve, tj. predstavljaju rešenje koje posjeduje karakter graničnog sloja. Zato je numerička metoda za rešavanje NAVIÉ-STOKES-ovih jednačina, pri visokim Re-brojevima, samo onda svrsishodna, ako je kod nje uzeta u obzir asimptotska struktura rešenja. To znači, da je neophodno, da se kod numeričke integracije izvrši provjera, da li je algoritam sačinjen za rešavanje potpunih NAVIÉ-STOKES-ovih jednačina, što se tiče asimptotskih ponašanja, korektan, tj. da li on daje rezultate, koji se poklapaju sa rešenjima jednačina graničnog sloja. Prema tome, na osnovu najnovijih saznanja dolazi se do zaključka [1], mada to na prvi pogled izgleda paradoksalno, da rešenja graničnog sloja ne treba provjeravati posredstvom numeričkih rešenja NAVIÉ-STOKES-ovih jednačina, već da obrnuto za testiranje tačnosti NAVIÉ-STOKES-jednačina treba koristiti rešenja jednačina graničnog sloja.

U teoriji graničnog sloja, stacionarne pojave su, zbog svoje jednostavnije prirode, više istraživane, tako da teorija nestacionarnih problema, u izvesnom smislu kasni. Ali kako je prisustvo nestacionarnih problema u praksi veoma značajno, to se nameće potreba njihovog daljeg i podrobnijeg istraživanja.

Zbog toga se u cilju obogaćenja teorije nestacionarnog graničnog sloja, u ovom radu proučava nestacionarni laminarni granični sloj nestišljivog fluida dovodjenjem njegovih osnovnih diferencijalnih jednačina na univerzalni oblik, njihovo rešavanje i primjena takvih univerzalnih rešenja na konkretne slučajeve strujanja. Zato je neophodno da se u samom uvodu prikaže kratak osvrt na razvitak teorije graničnog sloja od samog njenog početka, tj. od 1904. godine, kada je PRANDTL [2] svojim jednačinama udario temelj ovoj teoriji i time dao novi smisao i sadržaj mehanici fluida. Počev od tada, pa do danas, istraživanja su se kretala u smjeru traženja matematičkih metoda za rešavanje jednačina definisanog problema graničnog sloja i u smjeru matematičkog modeliranja sve složenijih problema graničnih slojeva kao i stvaranju metoda za njihovo rešavanje. Tako je do danas objavljeno mnogo radova, knjiga i studija posvećenih ovim problemima, što čini obimnu teoriju graničnog sloja koja predstavlja značajni dio mehanike fluida i fizike uopšte.

Kako nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine višega reda sa složenim početnim i graničnim uslovima matematički opisuju ove probleme, to se pri njihovom rešavanju nailazilo, i prije i danas, na značajne matematičke teškoće. Ove teškoće su uočljivije kod nestacionarnih problema, nego što su kod odgovarajućih stacionarnih problema graničnih slojeva. Razlozi za to su, što u jednačinama nestacionarnog problema uporedo sa članovima koji izražavaju konvektivno ubrzanje, postoji dopunski član koji izražava lokalno ubrzanje, i postojanje uporedo sa graničnim još i početnih uslova. Zbog toga teorija nestacionarnog graničnog sloja u izvesnom smislu kasni u svojem razvoju u odnosu na teoriju stacionarnog graničnog sloja, tako da je i broj radova iz ove oblasti znatno manji.

Za rešavanje diferencijalnih jednačina stacionarnog graničnog sloja u prvo vrijeme su korišćene tzv. egzaktne metode, koje su imale za cilj odredjivanje "tačnih" rešenja. U ovu grupu spadaju: BLASIUS-ovo [3] rešenje problema ravne ploče, FALKNER-SKAN-ova [4] "slična" rešenja na klinastim profilima, redovi BLASIUS-ovog tipa za zaobljene profile, redovi HOWARTH-ovog [5] tipa za slučaj linearne raspodjele spoljašnje brzine i TANI-jevi [6] redovi, kao uopštenje HOWARTH-ovih redova, kao i svi ostali postupci, koji se svode na predstavljanje rešenja u obliku stepenog reda razvijenog po podužnoj koordinati sa tabelarno sredjenim koeficijentima - funkcijama poprečne promenljive. Sve ove rezultate objedinio je, uopštio i metodološki usavršio 1957.godine H. GÖRTLER [7], sa čime su bili krunisani napori mnogih autora, koji su zastupali mišljenje da je takav način rešavanja jedino tačan i ispravan.

Medjutim, neekonomičnosti egzaktnih metoda, koje su, za proračun graničnog sloja, zahtijevale odredjivanje i tabelarno sredjivanje sve većeg broja univerzalnih funkcija, razvijala se, sa druge strane, grupa metoda za približan proračun graničnog sloja. Sve su zasnovane na rešavanju impulsne jednačine, dobijene osrednjavanjem po presjeku polaznih jednačina graničnog sloja od strane KARMAN-a [8] 1921 godine, umjesto samih diferencijalnih jednačina razmatranog problema. Usled nedostatka savremenih elektronskih računskih mašina, korišćene su, od 1921 do 1960 godine, za rešavanje impulsne jednačine, jednoparametarske metode POHLHAUSEN-ovog tipa [9], koje su dogradjivane od strane niza istraživača, kao što su HARTREE [10], HOWARTH [11], HOLSTEIN i BOHLEN [12], TANI [13] i drugi. Uporedo sa razvojem savremenih računskih mašina, oko 1960 godine, počinje se sa intenzivnijim korišćenjem višeparametarskih metoda, pri čemu se postepeno prelazi na razmatranje neosrednjenog sistema diferencijalnih jednačina graničnog sloja [14],[15],[16],[17],[18]. LOJ CJANSKI [19] je 1965 godine uspio, uvodeći nove bezdimenzijske promenljive, a zatim i svrsishodan skup parametara, da načini univerzalnim jednačine graničnog sloja, tj. da iz njih eliminiše raspodjele veličina, koje karakterišu pojedine konkretne slučajeve strujanja. Dobijeno rešenje se, prema tome, može jednom za svagda, tabelarno srediti i koristiti pri proračunu graničnog sloja za ma koji partikularni problem. Koristeći osnovne ideje LOJCJANSKOG, SALJNIKOV i OKA [20] su 1969 godine, uspjeli da na sličan način načine sistem polaznih jednačina univerzalnim. U tom cilju su najprije korišćene GÖRTLER-ove promenljive [7], a zatim skup parametara, čiji prvi član predstavlja tzv. GÖRTLER-ovu "glavnu" funkciju. S obzirom, da GÖRTLER-ove promenljive predstavljaju uopštene koordinate "sličnih" rešenja, univerzalna jednačina se u jednoparametarskom približenju svodi na FALKNER-SKAN-ovu jednačinu. Medjutim, kasnije se pokazalo da uvodjenje GÖRTLER-ovih promenljivih prouzrokuje, da usvojeni skup parametara ne obezbjedjuje očekivanu konvergenciju tačnom rešenju. Zato su preduzeta dalja istraživanja, u rezultatu kojih je 1972. godine objavljen rad [21], a zatim 1978 rad [22]. U radu [21] pokazuje se, da je za obezbjedjenje veoma povoljne konvergencije tačnom rešenju potrebno koristiti skup parametara tipa LOJCJANSKOG [19] a s druge strane, da bi se omogućilo njegovo uvodjenje, takodje je pokazano da je potrebno da se kao podužna promenljiva koristi netransformisana fizička koordinata x pored poprečne GÖRTLER-ove promenljive uopštene sličnosti [7]. U poslednjoj fazi istraživanja koje je pokazano u radu [22] posebna pažnja je bila posvećena poboljšanju efikasnosti prvog parametra, tako da je dobijena metoda sa dvjema značajnim osobinama: 1. da je već prvi parametar tako "efikasan" da rešenje univerzalne jednačine u jednoparametarskom približenju postaje veoma blisko tačnom rešenju i 2. da sledeći parametri obezbjedjuju rešenju veoma povoljnu brzinu konvergencije. Na taj način je uklonjen i jedan bitan nedostatak, koji je otežavao praktični proračun i povećavao utrošak vremena. Naime, za odredjivanje karakterističnih veličina graničnog sloja bilo je potrebno da se kod svakog konkretnog slučaja strujanja, posebno izvrši dopunska integracija odgovarajuće impulsne jednačine. Medjutim, kako parametar $f_1$ u radu [22] već očigledno predstavlja rešenje impulsne jednačine, kod predloženog postupka to više nije potrebno, tako da je ovom metodom omogućeno brzo i dovoljno tačno sračunavanje graničnog sloja, koristeći pri tome isključivo tablice univerzalnih rešenja i odgovarajuće gotove formule.

Prva istraživanja u oblasti teorije nestacionarnog graničnog sloja izvršio je BLASIUS [3] neposredno poslije pojave

PRANDTL-ove teorije, proučavajući problem dovodjenja nepokretnog cilindričnog tijela u jednoliko kretanje i u jednako ubrzano kretanje BLASIUS-ova rešenja, kasnije su dopunili GOLDSTEIN i ROSENHEAD [23] proračunom sledećeg približenja. Ovu BLASIUS-ovu metodu je RAŠKOVIĆ [24],[25],[26],[27],[28] primijenio na različite ravanske probleme graničnog sloja i na probleme graničnog sloja na obrtnim tijelima. GÖRTLER [29] proučava granični sloj na cilindričnom tijelu sa stepenim zakonom porasta brzine kretanja sa vremenom, a WATSON [30] rešava problem stepenog i eksponencijalnog zakona porasta brzine sa vremenom, dok je veoma složen problem dovodjenja u kretanje ploče u svojoj ravni razmatrao ROZIN [31]. Prvu opštu metodu za rešavanje nestacionarnih graničnih slojeva, sličnu metodi GORTLER-a [7] za stacionarne granične slojeve, dao je HASSAN [32] kod koje je sračunavanje univerzalnih funkcija dosta komplikovano a pretpostavljeni oblik brzine spoljašnjeg strujanja rijetko se sreće u praksi. DJURIĆ je, uočavajući ispoljene slabosti ove metode, poslije niza svojih radova [33],[34],[35],[36] na problemima nestacionarnih graničnih slojeva uspio da izvrši proširenje GÖRTLER-ove [7] metode na nestacionarne granične slojeve [37] pri čemu je brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja odabrao tako da razdvaja promenljive. Medjutim, ova DJURIĆ-eva metoda zadržala je sve slabosti GÖRTLER-ove [7] metode u teoriji stacionarnog graničnog sloja.

Prvo proširenje metode LOJCJANSKOG [19] kao jedne opštije i brzo konvergentne metode u teoriji stacionarnog graničnog sloja, na nestacionarne probleme izvršio je DJURIĆ [38] [39] i to za slojeve kada brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja razdvaja promenljive. Ovo proširenje uspio je da realizuje sa tri skupa parametara, a rešenje dobijene jednačine odredio je razvijanjem istog u red.

Dalja istraživanja bila su usmjerena ka traženju pogodnijeg oblika parametara i smanjenju broja skupova parametara neophodnih za dobijanje univerzalne jednačine. Tako je formirano više novih višeparametarskih metoda od strane SALJNIKOV-a [40] DJUKIĆ-a [41], [42], SALJNIKOV-a i DJUKIĆ-a [43], BUŠMARIN-a i BASIN-a [44], BUŠMARIN-a i SARAJEV-a [45], BUŠMARIN-a i STOLETOV-a [46] i drugih. DJUKIĆ je u svojem radu [42] za brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja koristio proizvoljnu diferencijabilnu funkciju a univerzalizacija je postignuta sa dva skupa parametara , dok je rešenje u odredjenom približenju dobijeno razvijanjem istog u red. U istraživanju nestacionarnog graničnog sloja najdalje je otišao BUŠMARIN sa svojim saradnicima. Tako se u radu [44] univerzalizacija postiže sa jednim skupom parametara i sa spoljašnjom brzinom u obliku proizvoljne diferencijabilne funkcije, ali sa jednom malom nedoslednošću u izboru razmjere poprečne koordinate. Ova nedoslednost se u radu [45] otklanja, ali se sužava klasa funkcija spoljašnje brzine za koju je dobijena univerzalna jednačina tačna. Na kraju u radu [46] uspijeva se, da se pomenuta nedoslednost u izboru razmjere poprečne koordinate otkloni, a da se klasa funkcija brzine na granici graničnog sloja ne sužava.

Pošto odvajanje graničnog sloja sa konture prate nepoželjni efekti [47], niz istraživača pokušava da utiče na ovu pojavu u smislu njenog odlaganja. Tako dolazi do pojave različitih teorijskih i eksperimentalnih načina "upravljanja - graničnim slojem" [47]. U vezi sa tim zapažena su istraživanja MHD nestacionarnog graničnog sloja u radovima NIKODIJEVIĆ-a [48] i SALJNIKOV-a, BORIČIĆ-a i NIKODIJEVIĆ-a [49], kao i u radovima niza drugih autora [50],[51],[52],[53],[54],[55],[56],[57],[58],[59],[60],[61],[62].

Prisustvo nestacionarnih problema graničnog sloja u praksi i njihova nedovoljna izučenost ukazuje na neophodnost njihovog daljeg izučavanja. Zbog toga se u ovom radu istražuje nestacionarni laminarni granični sloj nestišljivog fluida, a za izučavanje ovog problema primenjuju se višeparametarske metode LOJCJANSKOG [19] i SALJNIKOV-a [22] koje daju mogućnost praćenja opštih karakteristika razvoja graničnog sloja, kao i mogućnost dobijanja rešenja konkretnih problema relativno visoke tačnosti.

# I - GLAVA

## MATEMATIČKO MODELIRANJE RAZMATRANOG PROBLEMA

### 1. SISTEM JEDNAČINA NESTACIONARNOG LAMINARNOG RAVANSKOG GRANIČNOG SLOJA NESTIŠLJIVOG FLUIDA

Kako je već rečeno, u ovom radu se proučava nestacionarno laminarno ravansko strujanje nestišljivog fluida u okolini tijela. Za teorijsko razmatranje ovog problema, potrebno je imati odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina koji matematički opisuje posmatrano strujanje. Radi kompletnosti rada, ovdje se taj sistem jednačina izvodi, i pored toga što je on prisutan u literaturi [47], [63].

Da bi se došlo do sistema jednačina uočenog problema polazi se od NAVIÉ-STOKES-ove jednačine za nestišljive fluide [64] i jednačine kontinuiteta

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{w} \; ; \qquad \nabla \vec{w} = 0 \, , \tag{1.1.1}$$

gdje je $\vec{W}$ vektor brzine kretanja fluida. Pisanjem u razvijenom obliku izraza za totalni izvod

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\nabla)\vec{w} \, , \tag{1.1.2}$$

i njegovom zamjenom u jednačinu kretanja (1.1.1), dolazi se do sistema jednačina

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \rho (\vec{w}\nabla)\vec{w} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{w} \, , \quad \nabla \vec{w} = 0 \, , \tag{1.1.3}$$

koji matematički opisuje nestacionarno kretanje nestišljivog fluida.

Za dalju analizu pogodnije je sistem jednačina (1.1.3) napisati u skalarnom obliku u projekcijama na odgovarajuće ose DESCARTES-ovog pravouglog koordinatnog sistema, tako da za ravanski problem koji se u radu proučava, vektor brzine kretanja fluida $\vec{W}$ ima oblik

$$\vec{w} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad , \tag{1.1.4}$$

gdje su: u,v - projekcije vektora brzine kretanja fluida na ose x i y koordinatnog sistema, a $\vec{i}$ i $\vec{j}$-ortovi koordinatnih osa x i y. Zamjenom izraza (1.1.4) u sistem jednačina (1.1.3) i sprovodjenjem naznačenih operacija isti se transformiše na sledeći skalarni sistem jednačina

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

u kome je $\nu$ - koeficijent kinematske viskoznosti fluida.

Da bi se došlo do jednačina koje opisuju nestacionarno strujanje nestišljivog fluida u okolini tijela, tj. u graničnom sloju, polazi se od sistema jednačina (1.1.5) i vrši procjena njegovih članova. U tom cilju, kao što je to radjeno u teoriji stacionarnog ravanskog graničnog sloja [63] uvode se bezdimenzijske veličine (označene sa "*") posredstvom izraza:

$$u = U_o\overset{*}{u}\ ,\ v = \frac{U_o}{\sqrt{R_e}}\overset{*}{v}\ ,\ p = \rho U_o^2\overset{*}{p}\ ,\ t = \frac{L}{U_o}\overset{*}{t}\ ,\ x = L\overset{*}{x}\ ,\ y = \frac{L}{\sqrt{R_e}}\overset{*}{y} \tag{1.1.6}$$

u kojima su: $U_o$ - razmjera podužne komponente brzine, L-razmjera podužne koordinate, a $R_e$-REYNOLDS-ov broj definisan izrazom:

$$R_e = \frac{LU_o}{\nu} . \tag{1.1.7}$$

Veličine (1.1.6) unose se u sistem jednačina (1.1.5) i poslije jednostavnih transformacija isti se svodi na oblik

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{t}} + \overset{*}{u}\frac{\partial\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{x}} + \overset{*}{v}\frac{\partial\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{y}} = -\frac{\partial\overset{*}{p}}{\partial\overset{*}{x}} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{x}^2} + \frac{\partial^2\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{y}^2} ,\\
&\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{t}} + \overset{*}{u}\frac{\partial\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{x}} + \overset{*}{v}\frac{\partial\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{y}}\right) = -\frac{\partial\overset{*}{p}}{\partial\overset{*}{y}} + \frac{1}{R_e^2}\frac{\partial^2\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{x}^2} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{y}^2} ,\\
&\frac{\partial\overset{*}{u}}{\partial\overset{*}{x}} + \frac{\partial\overset{*}{v}}{\partial\overset{*}{y}} = 0 .
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Dalje se prelaskom na granični proces, Re→∞, u sistemu jednačina (1.1.8), isti svodi na

$$\frac{\partial \overset{*}{u}}{\partial \overset{*}{t}}+\overset{*}{u}\frac{\partial \overset{*}{u}}{\partial \overset{*}{x}}+\overset{*}{v}\frac{\partial \overset{*}{u}}{\partial \overset{*}{y}}=-\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{x}}+\frac{\partial^2 \overset{*}{u}}{\partial \overset{*}{y}^2}, \quad \frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{y}}=0, \quad \frac{\partial \overset{*}{u}}{\partial \overset{*}{x}}+\frac{\partial \overset{*}{v}}{\partial \overset{*}{y}}=0. \quad (1.1.9)$$

Druga jednačina sistema (1.1.9) pokazuje da pritisak p ne zavisi od poprečne koordinate, tako da se može uvesti uobičajena predpostavka, da je p=p(x,t), iako se promjena pritiska upravno na granični sloj odredjuje redom veličine debljine graničnog sloja $\delta$ [65]. Vraćanjem u sistemu (1.1.9) na dimenzione veličine on se svodi na konačni oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \quad (1.1.10)$$

Za potpuno matematičko definisanje problema neophodno je propisati i odgovarajuće početne i granične uslove koje tražene veličine moraju zadovoljiti, i to:

$$\begin{aligned} &u=0,\ v=0 \quad \text{za } y=0;\ u\to U(x,t) \text{ za } y\to\infty;\\ &u=u_1(x,y) \text{ za } t=t_0;\ u=u_0(t,y) \text{ za } x=x_0. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Ovim graničnim i početnim uslovima (1.1.11), propisuje se da, pri strujanju fluida, podužna i poprečna komponenta brzine na površinu tijela koje se opstrujava dobijaju vrijednosti odgovarajućih komponenata brzine tijela. Zatim, da na spoljašnjoj granici graničnog sloja vrijednost podužne komponente brzine teži vrijednosti brzine u spoljašnjoj struji. I takodje, da su poznati profili podužne komponente brzine strujanja fluida u nekom trenutku vremena u cijelom graničnom sloju a u nekom poprečnom presjeku u svakom trenutku vremena. Prije nego što se predje na rešavanje sistema jednačina (1.1.10) sa graničnim i početnim uslovima (1.1.11) trebalo bi dokazati teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti njegovog rešenja. Medjutim, mora se konstatovati da u ovom trenutku takva teorema ne postoji i da se, još uvijek, sa sadašnjim znanjima matematike ne može dokazati.

BERNOULLI-jeva jednačina primijenjena na fluid u spoljašnjoj struji omogućava da se gradijent pritiska izrazi relacijom

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.1.12)$$

Zamjenom gradijenta pritiska u sistemu jednačina (1.1.10) relacijom (1.1.12) isti se svodi na oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad (1.1.13)$$

Prema tome, za izučavanje posmatranog problema neophodno je riješiti sistem jednačina (1.1.13) sa graničnim i početnim uslovima (1.1.11). Formiranje metode za njegovo rešavanje izvršiće se poslije analize metoda teorije ravanskog graničnog sloja. Kako su za korišćenje tih metoda neophodni odredjeni integralni odnosi, u nastavku će se izvesti jednačina impulsa i jednačina energije.

## 2. JEDNAČINA IMPULSA

Slijedeći dobro poznatu KARMAN-ovu [8] ideju kod izvodjenja jednačine impulsa stacionarnog ravanskog graničnog sloja, i za ovaj uočeni problem se polazi od prve jednačine sistema (1.1.13) napisane u obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.2.1)$$

i druge jednačine istog sistema pomnožene sa U(x,t) i napisane u obliku:

$$\frac{\partial (Uu)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(Uv)=u\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (1.2.2)$$

Oduzimanjem jednačine (1.2.2) od (1.2.1), dobija se jednačina

$$\frac{\partial}{\partial t}(U-u)+\frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[v(U-u)\right]=-(U-u)\frac{\partial U}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (1.2.3)$$

čijom se formalnom integracijom po promenljivoj y od 0 do $\infty$ dobija

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(U-u)dy+\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right]dy+\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\infty (U-u)dy=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (1.2.4)$$

Pri tome je izraz $\left[v(U-u)\right]_{y=0}$ izjednačen sa nulom što proizilazi iz graničnih uslova (1.1.11). Istovremeno je uzeta u obzir i činjenica da za y→ izvod podužne brzine u po poprečnoj koordinati y teži nuli tj. ( $\frac{\partial u}{\partial y})_{y\to\infty} \to 0$, koja predstavlja zahtjev da brzina graničnog sloja neprekidno, bez skokova, prelazi u brzinu spoljašnjeg strujanja. Ako se pretpostavi egzistencija integrala

$$\int_0^\infty u(U-u)dy = U^2\delta^{**} \; ; \; \int_0^\infty (U-u)dy = U\delta^* , \qquad (1.2.5)$$

i dopusti mogućnost zamjene reda integracije i diferenciranja u njima, jednačina (1.2.4) svodi se na jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\delta^*) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2\delta^{**}) + U\delta^*\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\tau_w}{\rho} = 0 , \qquad (1.2.6)$$

u kojoj su:

$$\delta^*(x,t) = \int_0^\infty (1-\frac{u}{U})\, dy \qquad (1.2.7)$$

debljina istiskivanja,

$$\delta^{**}(x,t) = \int_0^\infty \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U})dy \qquad (1.2.8)$$

debljina gubitaka impulsa,

$$\tau_w(x,t) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad (1.2.9)$$

i

napon trenja na tijelu.

Izvedena jednačina (1.2.6) predstavlja jednačinu impulsa uočenog problema koji se u ovom radu proučava. Zavisno od potrebe, ona se može napisati i u drugačijim oblicima. Izostavljanjem prvog člana, parcijalnog izvoda po vremenu, jednačina (1.2.6) prelazi u jednačinu impulsa za odgovarajući stacionarni problem.

### 3. JEDNAČINA ENERGIJE

Prije izvodjenja jednačine energije slijedi se poznata WIEGHARDT-ova ideja [66] kod izvodjenja jednačine energije stacionarnog ravanskog graničnog sloja. U tom cilju polazi se od prve jednačine sistema (1.1.13) prethodno pomnožene podužnom komponentom brzine i napisane u obliku:

$$u\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial U}{\partial t}+uU\frac{\partial U}{\partial x}+\nu u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,. \qquad (1.3.1)$$

Zatim se iz druge jednačine istog sistema odredjuje poprečna komponenta brzine u obliku

$$v=-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,, \qquad (1.3.2)$$

i ista zamjenjuje u jednačinu (1.3.1), tako da se ona svodi na jednačinu

$$u\frac{\partial}{\partial t}(u-U)+u^2\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}\,dy-uU\frac{\partial U}{\partial x}=\nu u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,. \qquad (1.3.3)$$

Formalnom integracijom jednačine (1.3.3) po promenljivoj y od 0 do $\infty$, ona se dalje svodi na

$$\int_0^\infty u\frac{\partial}{\partial t}(u-U)\,dy+\int_0^\infty\Big(u^2\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}\,dy-uU\frac{\partial U}{\partial x}\Big)dy=\nu\int_0^\infty u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\,. \qquad (1.3.4)$$

Na kraju, uvodjenjem predpostavke o egzistenciji integrala (1.2.5) i integrala

$$\int_0^\infty u(U^2-u^2)\,dy=U^3\delta_1^{**}\,,\quad \int_0^\infty\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2dy=U^2e\,, \qquad (1.3.5)$$

i dopuštanjem zamjena reda integracije i diferenciranja u njima, uz korišćenje graničnih uslova (1.1.11), jednačina (1.3.4) svodi se na jednačinu

$$U^2\frac{\partial\delta^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(U^2\delta^{**})+U^3\frac{\partial\delta_1^{**}}{\partial x}+3U^2\delta_1^{**}\frac{\partial U}{\partial x}-2\nu U^2e=0\,, \qquad (1.3.6)$$

u kojoj je:

$$\delta_1^{**}(x,t)=\int_0^\infty\frac{u}{U}\Big(1-\frac{u^2}{U^2}\Big)dy \qquad (1.3.7)$$

debljina gubitaka energije, a

$$e(x,t)=\int_0^\infty\Big[\frac{\partial(u/U)}{\partial y}\Big]^2dy\,. \qquad (1.3.8)$$

Opštost ove jednačine energije za nestacionarni granični sloj (1.3.6) ogleda se u tome, što zanemarivanjem parcijalnih izvoda po vremenu, ona prelazi u jednačinu energije za odgovarajući stacionarni problem.

# II - GLAVA

## IZBOR SAVREMENE METODE UOPŠTENE SLIČNOSTI ZA RAZMATRANJE NESTACIONARNOG PROBLEMA

Kao što je u uvodu i rečeno, istovremeno sa razvojem teorije graničnog sloja i metoda za njegovo rešavanje razvija se i višeparametarska metoda, koja dobija puni razvoj pojavljivanjem rada LOJCJANSKOG [19] podstičući mnoge druge istraživače da se pozabave njenim razvijanjem [20], [21], [22], [67], [68], [69], [70].

Kod metode LOJCJANSKOG [19], osnovne jednačine graničnog sloja, uvodjenjem novih promenljivih, se transformišu na oblik koji u sebi i graničnim uslovima ne sadrži, eksplicitno, karakteristike svakog partikularnog zadatka, tako da se dobijeni oblik takve jednačine naziva univerzalnim. Univerzalni oblik višeparametarske metode može biti integralno-diferencijalni ili samo diferencijalni, zavisno od toga da li se u univerzalnoj jednačini javljaju integralno-diferencijalni funkcionali ili samo diferencijalni funkcionali taženog rešenja. Kako je univerzalna jednačina sa graničnim uslovima nezavisna od karakteristika partikularnog problema (spoljašnjeg strujanja), to se ona u nekom približenju može jednom za uvijek riješiti. Tako dobijena univerzalna rešenja se na pogodan način sačuvaju i koriste za proračun konkretnih zadataka. Pri korišćenju oblika LOJCJANSKOG [19] mora se za svaki konkretan slučaj izvršiti i integracija jednačine impulsa, dok pri korišćenju oblika SALJNIKOV-a [22] i PAPKOV-a [68] ova integracija otpada.

### 1. INTEGRALNO-DIFERENCIJALNI OBLICI VIŠEPARAMETARSKE METODE

Kroz analizu osnovnih radova, iznosi se razvoj integralno-diferencijalnog oblika višeparametarske metode, koji počinje sa pokušajem da se strujna funkcija $\psi(x,y)$, tj. rešenje transformisane jednačine graničnog sloja

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{2.1.1}$$

sa graničnim uslovima

$$\psi=0\ ,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ za } y=0\ ;\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\to U(x) \text{ za } y\to\infty\ ;\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=u_o(y) \text{ za } x=x_o, \qquad (2.1.2)$$

pretpostavi u nekom novom svrsishodnom obliku. Prve pokušaje u tom smislu čini FALKNER [4] , a na svrsishodniji način, kasnije, to čini ŠKADOV u radovima [14], [15] i [16] . Na današnjem stupnju razvoja višeparametarske metode, pomenuti radovi imaju čisto istorijski karakter, ali se ipak mora konstatovati da u njima ima interesantnih ideja koje su, i pored toga što nijesu dovedene do kraja, uticale na dalji razvoj ove metode.

LOJCJANSKI 1965 godine publikuje fundamentalni rad [19], koji je do danas veoma aktuelan. U radu se uvode nove promenljive u obliku:

$$x=x\ ,\ y=\frac{\delta^{**}}{D_o}\eta\quad ,\ \psi=\frac{U\delta^{**}}{D_o}\phi(x,\eta) \qquad (2.1.3)$$

u kome je $D_o$ normirajuća konstanta. Posredstvom novih promenljivih (2.1.3) jednačina (2.1.1) transformiše se na jednačinu

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial\eta^3}+\frac{(F+2f)}{2D_o^2}\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{f}{D_o^2}\left[1-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2\right]=\frac{Uf}{D_o^2U'}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right], \qquad (2.1.4)$$

gdje je:

$$F=Uz^{**}\ ,\ f=U'z^{**}\ ,\ z^{**}=\frac{\delta^{**2}}{\nu}, \qquad (2.1.5)$$

a granični uslovi (2.1.1) nakon ove transformacije postaju:

$$\phi=0,\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0 \text{ za } \eta=0\ ;\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\to 1 \text{ za } \eta\to\infty\ ;\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{\partial\phi_o}{\partial\eta} \text{ za } x=x_o\ . \qquad (2.1.6)$$

Korišćenjem uslova da se za slučaj U=const, tj. f=0 jednačina (2.1.4) svodi na BLASIUS-ovu jednačinu problema ravne ploče [3] i korišćenjem BLASIUS-ovih rezultata, dobija se za normirajuću konstantu $D_o$=0.470. Dalje se u svojstvu nezavisno promenljivih uvodi beskonačni skup parametara

$$f_k=U^{k-1}\frac{d^kU}{dx^k}z^{**k} \qquad (k=1,2,\dots) \qquad (2.1.7)$$

čiji se prvi element $f_1$ poklapa sa parametrom oblika jednoparametarskih metoda [12] , tako da se jednačina (2.1.4) transformiše na jednačinu

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial\eta^3}+\frac{(F+2f_1)}{2D_o}\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{f_1}{D_o^2}\left[1-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2\right]=\frac{1}{D_o^2}\sum_{K=1}^{\infty}\theta_K\left[\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial f_K}-\frac{\partial\phi}{\partial f_K}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right] \tag{2.1.8}$$

u kojoj je

$$\theta_K=\left[(K-1)f_1+KF\right]f_K+f_{K+1}\ , \tag{2.1.9}$$

a granični uslovi (2.1.6) postaju

$$\phi=0,\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0\ \text{za}\ \eta=0;\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\to 1\ \text{za}\ \eta\to\infty;\ \phi=\phi_o(\eta)\ \text{za}\ f_K=0\ (K=1,2,\ldots). \tag{2.1.10}$$

Da bi jednačina (2.1.8) bila nezavisna od karakteristika partikularnog strujanjaneophodno je veličinu F izraziti kao funkciju parametara $f_K$, čime i veličina $\theta_K$ postaje funkcija istog skupa parametara. U pomenutom radu se ona odredjuje korišćenjem jednačine impulsa posmatranog problema tako da se dobija da je

$$F=2\left[\zeta-(2+H)f_1\right] \tag{2.1.11}$$

gdje je

$$\zeta=\left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0}=\zeta[(f_K)]\ ,\quad H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}}=H[(f_K)]\ . \tag{2.1.12}$$

Sa funkcijom F odredjenom u obliku (2.1.11) jednačina (2.1.8) je univerzalna, i ima integralno-diferencijalni oblik. Medjutim, tek poslije integracije same jednačine (2.1.8), moguće je odrediti funkciju F (2.1.11). Poslije rešavanja jednačine (2.1.8) u nekom približenju, potrebno je integraliti običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$\frac{dz^{**}}{dx}=\frac{F(U'z^{**},UU''z^{**2},\ldots)}{U(x)}\ , \tag{2.1.13}$$

što ustvari predstavlja jednačinu impulsa posmatranog problema. Na taj način se nalazi raspodjela $\delta^{**}(x)$ i $z^{**}(x)$ što predstavlja rešenje partikularnog zadatka. Rešavanje jednačine (2.1.8) vršeno je u jednoparametarskom, dvoparametarskom-lokalizovanom i dvoparametarskom-punom približenju, i tako dobijeni univerzalni rezultati korišćeni su za proračun graničnog sloja na kružnom cilindru. Uporedjivanjem sa tačnim rezultatima TERILL-a [72] zapaža se da su odstupanja vrlo mala. Podstaknuti veoma dobrim rezultatima koje daje metoda LOJCJANSKOG, mnogi istraživači je primenjuju i proširuju na različitim problemima graničnog sloja. Izmedju ostalih, BORIČIĆ [65] vrši proširenje na problem stacionarnog MHD graničnog sloja nestišljivog fluida, ŠIŠKINA [73] na problem graničnog sloja na poroznim površinama, KAPUSTIANSKI [74] na problem temperaturskog graničnog sloja, KARJAKIN [75] na problem strujanja provodnog fluida u prostornom laminarnom graničnom sloju pod uticajem poprečnog magnetnog polja, ZOLOTOV [76], [77] na problem temperaturskog graničnog sloja pri prirodnom konvektivnom strujanju oko vertikalne zagrijane ploče.

I pored dobrih rezultata u teoriji nestacionarnog graničnog sloja koje je DJURIĆ prikazao u svojim ranijim radovima [33], [34], [35], [36], [37], za dalje istraživanje [38] on proširuje metodu LOJCJANSKOG na nestacionarni sloj tako što uzima da brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja razdvaja promenljive, tj. ima oblik

$$U(x,t)=V(x)\Omega(t) \tag{2.1.14}$$

u kome su $V(x)$ i $\Omega(t)$ diferencijabilne funkcije. Ovdje se univerzalna jednačina dobija uvodjenjem tri beskonačna skupa parametara u svojstvu nezavisnih promenljivih, a rešava se tako što se rešenje razvija u red. Ovaj oblik višeparametarske metode, kasnije proširuju, na različite nestacionarne temperaturske granične slojeve DJURIĆ [39], CIJAN [78], [79] i SALJNIKOV, CIJAN, DJUKIĆ [80], a T.AŠKOVIĆ [81], [82] na nestacionarni MHD temperaturski granični sloj. U svim navedenim radovima brzina je oblika (2.1.14), a rešenje univerzalne jednačine odredjuje se razvijanjem istog u red.

Metodu LOJCJANSKOG, BUŠMARIN I BASIN 1972 godine u radu [44], proširuju na nestacionarni ravanski laminarni granični sloj nestišljivog fluida tako što za brzinu $U(x,t)$ u spoljašnjoj brzini uzimaju proizvoljnu diferencijabilnu funkciju podužne koordinate $x$ i vremena $t$. Univerzalna jednačina dobija se korišćenjem jednog beskonačnog skupa parametara u svojstvu nezavisno promenljivih uz istovremeno korišćenje jednačine impulsa i jednačine energije posmatranog problema. Ovako dobijena univerzalna jednačina rešava se metodom "progonke" u lokalno dvoparametarskom približenju. Pored jednog beskonačnog skupa parametara korišćenog u izvodjenju univerzalne jednačine nestacionarnog sloja, BUŠMARIN i SARAJEV, u svojem nešto kasnijem radu [45] uvode, uz korišćenje impulsne jednačine, i jedan konstantni parametar, koji nažalost sužava klasu funkcija spoljašnje brzine za koju je dobijena univerzalna jednačina tačna. Ovaj oblik višeparametarske metode proširuje se na problem nestacionarnog laminarnog temperaturskog graničnog sloja [83] i na periodični granični sloj sa velikim Struhalovim brojevima [84].

Druga grupa istraživača [20], [21], [22], [67], [68], uočavajući nesporni kvalitet ovoga oblika višeparametarske metode, želi da ga uprosti u dijelu proračuna konkretnih primjera. Prvi u tome uspijevaju SALJNIKOV i OKA u svojem radu [20], u kojem uočavaju da je od bitnog uticaja na konvergenciju rešenja upravo izbor skupa parametara. Zato SALJNIKOV sa svojim saradnicima nastavlja sa istraživanjima sa ciljem da koristi iskustvo o efikasnoj praktičnoj primjeni univerzalnog rešenja, stečenog u radu [20], i da zadrži skup parametara LOJCJANSKOG, koji obezbjedjuje metodi dobru brzinu konvergencije. Put ka ovom cilju trasira se u radu [21] u kome se dobijena univerzalna jednačina, za konstantnu vrijednost uvedenog parametra B, svodi na jednačinu LOJCJANSKOG (2.1.4) [19], što dovodi do zaključka da je dobijeni oblik višeparametarske metode uopštenje metode LOJCJANSKOG. Medjutim u pomenutom radu [21] ostaje otvoreno pitanje jedne funkcije i jedne konstante od kojih značajno zavisi tačnost rešenja partikularnih primjera. U cilju otklanjanja uočenog nedostatka SALJNIKOV 1978 godine, publikuje rad [22] u kome u jednom zaokruženom obliku iznosi rezultate tih istraživanja. U radu se najprije uvode transformacije

$$x = x;\ \eta = U^{b_0/2}\, y \left(a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1}\, dx\right)^{-\frac{1}{2}},\ \Phi(x,\eta) = U^{\frac{b_0}{2}-1}\, \Psi(x,y) \left(a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1}\, dx\right)^{-1/2}, \quad (2.1.15)$$

u kojima su $a_0$ i $b_0$ proizvoljne konstante, tako da se jednačina graničnog sloja (2.1.1) svodi na novi oblik koji se uvodjenjem parametara LOJCJANSKOG (2.1.7), u svojstvu novih nezavisno promenljivih, konačno transformiše na jednačinu

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3}+\frac{1}{2B^2}\left[a_0 B^2+f_1(2-b_0)\right]\Phi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}+\frac{f_1}{B^2}\left[1-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2\right]=\frac{1}{B^2}\sum_{K=1}^{\infty}\theta_K\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_K}-\frac{\partial \Phi}{\partial f_K}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right) \qquad (2.1.16)$$

u kojoj je

$$B=\int_0^{\infty}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\left(1-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)d\eta \quad . \qquad (2.1.17)$$

Granični uslovi (2.1.2) se, poslije sprovedenih transformacija, poklapaju sa graničnim uslovima (2.1.10). Autor u pomenutom radu odredjuje proizvoljnim konstantama $a_0$ i $b_0$ konkretne brojne vrijednosti u iznosu

$$a_0 = 0.4408 \quad i \quad b_0 = 5.714 \quad . \qquad (2.1.18)$$

Poslije integracije univerzalne jednačine (2.1.16), u odredjenom približenju, proračun konkretnih primjera svodi se na korišćenju formula

$$\delta^{*}=\left(U^{-b_0}a_0\nu\int_0^x U^{b_0-1}dx\right)A\ ,\quad \delta^{**}=\left(U^{-b_0}a_0\nu\int_0^x U^{b_0-1}dx\right)B\ ,\quad \tau_w=\mu U\left(U^{-b_0}a_0\nu\int_0^x U^{b_0-1}dx\right)^{-1/2}\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \eta^2} \qquad (2.1.19)$$

gdje je

$$A=\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)d\eta\ , \qquad (2.1.20)$$

i gdje su veličine A, B i $\Phi''(o)$ sračunate već u procesu integracije univerzalne jednačine (2.1.16). Rezultati dobijeni rešavanjem univerzalne jednačine (2.1.16) u jednoparametarskom i jednoparametarskom-lokalizovanom približenju, koriste se za proračun opstrujavanja kružnog cilindra i tako dobijeni rezultati se porede sa tačnim TERILL-ovim [72] rezultatima. Zapaža se da su rezultati, sračunati korišćenjem ove metode SALJNIKOV-a, vrlo blizu tačnih rezultata koje je TERILL dobio vršeći, metodom konačnih razlika, direktnu numeričku integraciju odgovarajućih jednačina graničnog sloja. Ova metoda se proširuje i na druge složenije modele stacionarnog graničnog sloja, tako što SALJNIKOV i BORIČIĆ u radu [85] proučavaju strujanje stišljivog fluida, a u radu [86] magnetohidrodinamička strujanja, SALJNIKOV i DJUKIĆ [87] strujanja "nenjutnovskih stepenih" tečnosti, KUKIĆ [88] strujanja u osnosimetričnom graničnom sloju na obrtnim tijelima, TUPURKOVSKA

[89] strujanja u ravanskom graničnom sloju na tijelima sa poroznim konturama, NIKODIJEVIĆ u radu [90] vrši proširenje na osnosimetrični MHD granični sloj na obrtnim tijelima, OBROVIĆ, SALJNIKOV i BORIČIĆ [91] proučavaju zamrznuto strujanje idealno disociranog gasa, a SALJNIKOV i IVANOVIĆ [92], [93] strujanje u MHD graničnom sloju na poroznim zidovima sa usisavanjem ili izduvavanjem. Medjutim, zapaža se da, do danas, proširenje ove metode nije izvršeno na nestacionarne probleme.

Potrebno je ovdje spomenuti i rad PAPKOV-a [68] u kome on čini pokušaj da odredi vezu izmedju različitih oblika višeparametarske metode u teoriji graničnog sloja. Uporedjujući koeficijent trenja sračunat ovom metodom za primjer kružnog cilindra sa rezultatima dobijenim metodom LOJCJANSKOG [19], zapaža se da u odnosu na tačna TERILL-ova rešenja, ovaj oblik višeparametarske metode daje tačniju vrijednost tačke odvajanja graničnog sloja. Pored toga što je potrebno izvršiti analizu parametara PAPKOV-a od značaja bi, takodje, bilo uporedjivanje rezultata SALJNIKOV-a [22] sa ovim rezultatima, ali kako sva ova pitanja traže i vrijeme i prostor, njima se ovdje ne posvećuje pažnja, jer bi trebalo da budu predmet istraživanja jednog posebnog rada, tim prije što ova metoda nije proširena na nestacionarne probleme graničnog sloja.

## 2. DIFERENCIJALNI OBLICI VIŠEPARAMETARSKE METODE

Na osnovu literature, može se zaključiti da su diferencijalni pristup u istraživanju višeparametarske metode u teoriji graničnog sloja, medju prvima koristili SALJNIKOV i OKA u svom radu [20]. U radu se koriste GÖRTLER-ove promenljive [7], tako da se jednačina graničnog sloja (2.1.1) transformiše na novi oblik u kome su karakteristike spoljašnjeg strujanja zastupljene posredstvom GÖRTLER-ove "glavne funkcije". Dalje se, u svojstvu nezavisnih promenljivih, uvodi beskonačni skup parametara čiji je prvi član GÖRTLER-ova "glavna funkcija" i tako se dobijena jednačina transformiše na univerzalni oblik koji ne sadrži ni jedan faktor koji bi trabalo sračunati tek poslije rešavanja same jednačine, što smanjuje vrijeme rada elektronskog računara. Poslije rešavanja dobijene univerzalne jednačine u nekom približenju , proračun partikularnih primjera svodi se na direktno korišćenje formula koje se u radu daju. Uporedjivanjem rezultata uočava se da oni više odstupaju od tačnog TERILL-ovog [72] rešenja nego što je to slučaj sa rezultatima LOJCJANSKOG [19]. Uzrok ovog odstupanja je nepovoljan izbor beskonačnog skupa parametara.

Koristeći ovaj oblik višeparametarske metode, SALJNIKOV i DJORDJEVIĆ u radu [94] rešavaju problem ravanskog temperaturskog graničnog sloja, a u [95] temperaturski granični sloj sa TANI-jevim raspodjelama spoljašnje brzine. DJUKIĆ u radu [41] uspijeva da ovaj oblik proširi na nestacionarne probleme graničnog sloja sa rasporedom brzine na spoljašnjoj granici koji razdvaja promenljive, dok se univerzalna jednačina, dobijena uvodjenjem dva beskonačna skupa parametara, rešava razvijanjem rešenja u red. SALJNIKOV [40] i SALJNIKOV i DJUKIĆ [43] dodatno uopštavaju ovaj oblik, i ako raspored brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja U(x,t) zadržavaju istim. U radu [42] DJUKIĆ-u uspijeva da sa brzinom U(x,t) u obliku proizvoljne diferencijabilne funkcije proširi ovaj oblik višeparametarske metode na problem nestacionarnog graničnog sloja.

Imajući u vidu da je veličinu F kod oblika LOJCJANSKOG [19] moguće odrediti tek poslije rešavanja same jednačine, kao i to da je za rešavanje partikularnih zadataka neophodna integracija impulsne jednačine, javio se razlog kod mnogih istraživača, pa i kod LOJCJANSKOG da se ovi problemi prevazidju, a naročito poslije publikovanja radova HISLAVSKE [69] i BUŠMARIN-a [96]. Tako LOJCJANSKI u [71] prevazilazi problem odredjivanja veličine F tako što se pored skupa parametara (2.1.7) uvodi i novi skup parametara

$$f_k = U^k z^{**^{k-1}} \frac{d^k z^{**}}{dx^k} \quad ; \quad (k = 1, 2, \dots) \qquad (2.2.1)$$

čiji je prvi element veličina F. Tako dobijena univerzalna jednačina je čisto diferencijalnog karaktera jer u sebi ne sadrži integralne funkcionale traženog rešenja, kao što je to bio slučaj kod "stare" metode LOJCJANSKOG [19]. Zaključuje se, na osnovu poredjenja rezultata univerzalnih funkcija sračunatih u odgovarajućim približenjima korišćenjem jednog i drugog oblika, da je ova "nova" metoda opštijeg karaktera. LOJCJANSKI ovaj diferencijalni oblik višeparametarske metode preporučuje za složenije fizičke modele, što BUŠMARIN i STOLETOV čine u radu [46] rešavajući problem nestacionarnog graničnog sloja.

Kako zbog opštosti koju pruža metoda SALJNIKOV-a [22] i tačnosti koju je kod stacionarnih problema pokazala, što se vidi na osnovu učinjene analize, a imajući u vidu da na nestacionarne probleme nije primenjivana, to je i razlog da se ona odabere kao osnova za formiranje metode za rešavanje problema koji se u ovom radu razmatra.

# III - GLAVA

## PRIMJENA USVOJENE METODE NA REŠAVANJE NESTACIONARNOG GRANIČNOG SLOJA NESTIŠLJIVOG FLUIDA

### 1. UNIVERZALNA JEDNAČINA RAZMATRANOG PROBLEMA

Proširenje višeparametarske metode SALJNIKOV-a [22] na nestacionarni granični sloj, realizuje se tako što se prvo uvodjenjem strujne funkcije $\psi(x,y,t)$ relacijama

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \; , \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3.1.1}$$

sistem jednačina (1.1.13) transformiše na jednačinu

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \dot{U} + UU' + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \; , \tag{3.1.2}$$

u kojoj je sa "," označen izvod po x a sa "." izvod po vremenu t. Granični i početni uslovi (1.1.11) svode se sada na uslove

$$\begin{gathered} \psi = 0 \; ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ za } y = 0 \; ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} \to U(x,t) \text{ za } y \to \infty \; ; \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_0(t,y) \text{ za } x = x_0 \; ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_1(x,t) \text{ za } t = t_0 \; . \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Poslednji red graničnih uslova (3.1.3) označava da je, za rešavanje jednačine (3.1.2) za $t>t_0$ i $x>x_0$, neophodno poznavanje strujne funkcije $\psi$ u cijelom graničnom sloju u momentu $t=t_0$ i u nekom poprečnom presjeku $x=x_0$ za sve vrijednosti t.

Zatim se uvode nove promenljive u obliku

$$\begin{gathered} x = x \; ; \; t = t \; ; \; \eta = U^{b_0/2}\, y \left(a_0\nu\int_0^x U^{b_0-1}\,dx\right)^{-1/2} \; ; \\ \phi(x,\eta,t) = U^{\frac{b_0}{2}-1}\,\psi(x,\eta,t)\left(a_0\nu\int_0^x U^{b_0-1}\,dx\right)^{-1/2} \; , \end{gathered} \tag{3.1.4}$$

koji ustvari predstavlja proširenje oblika (2.1.5) iz rada SALJNIKOV-a [22] na nestacionarne probleme. Sa ovako uvedenim novim promenljivim (3.1.4) jednačina (3.1.2) se, poslije veoma opširnog matematičkog proračuna, transformiše na jednačinu

$$B^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3}+U'z^{**}\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right]+\frac{\dot U}{U}z^{**}\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{2}\left(Uz^{**\prime}-\frac{2UB'}{B}z^{**}\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\dot z^{**}-\frac{2\dot B}{B}z^{**}\right)\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=z^{**}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial\eta}+Uz^{**}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\,\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right]\qquad(4.1.5)$$

u kojoj je $B$ dato sa (2.1.17), dok je veličina $z^{**}$ sa (2.1.19) povezana izrazom

$$z^{**}=\frac{\delta^{**2}}{\nu}\;.\qquad(3.1.6)$$

Odgovarajući granični uslovi za jednačinu (3.1.5) poklapaju se sa graničnim uslovima (2.1.6).

Pretpostavljajući dalje da je funkcija $U(x,t)$ diferencijabilna uvodi se u razmatranje jedan beskonačni skup parametara

$$f_{k,n}=U^{k-1}\frac{\partial^{k+n}U}{\partial x^k\,\partial t^n}z^{**\,k+n},\;(k=0,1,2,\ldots;\,n=0,1,2,\ldots)\qquad(3.1.7)$$

iz kojih se zapaža da je

$$f_{1,0}=U'z^{**}\;;\quad f_{0,1}=\frac{\dot U}{U}z^{**}\;.\qquad(3.1.8)$$

Uvedeni skup parametara (3.1.7), koristeći ideju uvodjenja takvih skupova u radovima BUŠMARINA i BASINA [44] i NIKODIJEVIĆA [48], predstavlja proširenje skupa parametara LOJCJANSKOG [19] i SALJNIKOV-a [22] na nestacionarne probleme. Primjećuje se da se za n=o, skup parametara (3.1.7) svodi na skup parametara LOJCJANSKOG (2.1.7) za stacionarne probleme. Sada se skup parametara (3.1.7) koristi kao nove nezavisne promenljive umjesto x i t, pri čemu u pomenutom skupu nijesu istovremeno k i n jednaki nuli. Ovim suženjem iz razmatranja je eliminisan parametar $f_{o,o}$ jer je konstantan. Ovako formulisan skup parametara (3.1.7) izražava uticaj promjene po vremenu i po podužnoj koordinati brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja, tj. uticaj dinamičkih sila sa jedne i predistorije strujanja u graničnom sloju sa druge strane na karakteristike graničnog sloja.

Za transformaciju jednačine (3.1.5) na novi oblik, sa nezavisno promenljivim datim skupom parametara (3.1.7) odredjuju se prethodno izvodi koji u njoj figurišu, posredstvom izraza

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial f_{k,n}}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\eta}=\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial f_{k,n}}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial\eta}=\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial f_{k,n}}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial t}\,. \tag{3.1.8}$$

Izvodi parametara $f_{k,n}$ po x i t, koji se javljaju u (3.1.8) odredjuju se neposrednim diferenciranjem skupa parametara (3.1.7) i dati su relacijama:

$$U z^{**}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial x}=P_{k,n}(f_{k,n})+F^*(k+n)f_{k,n}\equiv D_{k,n}(f_{k,n};F^*), \tag{3.1.9}$$

$$z^{**}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial t}=Q_{k,n}(f_{k,n})+T^*(k+n)f_{k,n}\equiv E_{k,n}(f_{k,n};T^*), \tag{3.1.10}$$

u kojima su

$$P_{k,n}(f_{k,n})=(k-1)f_{1,0}f_{k,n}+f_{k+1,n}\,, \tag{3.1.11}$$

$$Q_{k,n}(f_{k,n})=(k-1)f_{0,1}f_{k,n}+f_{k,n+1}\,, \tag{3.1.12}$$

$$F^*=Uz^{**\prime}\,,\qquad T^*=\dot{z}^{**}\,. \tag{3.1.13}$$

Stavljajući da je

$$\begin{aligned} F^{**}&=Uz^{**\prime}-\frac{2UB'}{B}z^{**}\,,\\ T^{**}&=\dot{z}^{**}-\frac{2\dot{B}}{B}z^{**}\,, \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

i korišćenjem izraza (3.1.8) do (3.1.13), jednačina (3.1.15) se transformiše na jednačinu

$$B^2\frac{\partial^3\phi}{\partial\eta^3}+f_{1,0}\left[1-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2+\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right]+f_{0,1}\left(1-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)+\frac{F^{**}}{2}\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{T^{**}}{2}\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=$$

$$=\sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{E_{k,n}(f_{k,n};T^*)\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial f_{k,n}}+D_{k,n}(f_{k,n};F^*)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial f_{k,n}}-\frac{\partial\phi}{\partial f_{k,n}}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)\right\} \tag{3.1.15}$$

u kojoj su jedino $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ eksplicitne funkcije nezavisno promenljivih x i t, izmedju kojih na osnovu (3.1.13) i (3.1.14) postoji veza

$$F^{**} = F^* - \frac{2UB'}{B} z^{**} \; ; \; T^{**} = T^* - \frac{2\dot{B}}{B} z^{**} . \qquad (3.1.16)$$

Da bi jednačina (3.1.15) postala eksplicitno nezavisna od karakteristika spoljašnjeg strujanja odnosno postala univerzalna, neophodno je da se funkcije $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ izraze preko veličina koje eksplicitno zavise samo od parametara $f_{k,n}$, a to znači da je neophodna egzistancija jednakosti

$$F^* = F^*(f_{k,n}) \, , \, F^{**} = F^{**}(f_{k,n}) \, , T^* = T^*(f_{k,n}) \, , T^{**} = T^{**}(f_{k,n}) . \qquad (3.1.17)$$

Za pokazivanje egzistencije jednakosti (3.1.17) i odredjivanje njihovog eksplicitnog oblika koriste se jednačina impulsa (1.2.6) i jednačina energije (1.3.6) posmatranog problema nestacionarnog graničnog sloja.

Medjutim, prije nego što se predje na pokazivanje egzistencije (3.1.17), važno je napomenuti da linearna razmjera poprečne koordinate (3.1.4) u graničnom sloju nije funkcija koja se u istom obliku pojavljuje u skupu parametara (3.1.7) već je sa njom povezana izrazom (2.1.19) i (3.1.6), dok je kod BOGDANOVE [97], BUŠMARINA i BASINA [44] i NIKODIJEVIĆA [48] to bio slučaj. Zato se, koristeći ideje u navedenim radovima [97], [44] i [48], uzima da debljina gubitka impulsa $\delta^{**}$ zadovoljava relacije

$$\frac{\partial}{\partial x}(U^2 \delta^{**}) = \frac{\partial}{\partial x}(U^2 \delta^{**}) + \frac{\partial}{\partial t}(U \delta^*) \qquad (3.1.18)$$

i

$$\frac{\partial}{\partial t}(U^2 \delta^{**}) = \frac{\partial}{\partial t}(U^2 \delta^{**}) + U^3 \frac{\partial \delta_1^*}{\partial x} + 3U^2 \delta_1^{**} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\nu U^2 e . \qquad (3.1.19)$$

Ovakav način prilaženja rešavanju problema, na osnovu relacije (3.1.18) ograničava istraživanja nestacionarnih graničnih slojeva na onu klasu strujanja kod kojih je tokom vremena zanemarljiva promjena veličine $U\delta^*$, što će se na konkretnim primjerima pokazati.

Uvodjenjem relacija (3.1.18) i (3.1.19) u jednačinu impulsa (1.2.6) i jednačinu energije, one se svode, respektivno, na

$$\frac{\partial}{\partial x}(U^2\delta^{**}) + UU'\delta^* - \frac{\tau_w}{\rho} = 0 \qquad (3.1.20)$$

i

$$U^2\dot{\delta}^* + \frac{\partial}{\partial t}(U^2\delta^{**}) = 0 \qquad (3.1.21)$$

Dalje se, u cilju odredjivanja funkcija $F^*$ i $F^{**}$ piše u razvijenom obliku izvod po x na lijevoj strani jednačine (3.1.20) i istovremeno zamjenjuje tangencijalni napon na tijelu $\tau_w$ izrazom (1.2.9) čime se jednačina (3.1.20) transformiše na jednačinu

$$2UU'\delta^{**} + U^2\delta^{**'} + UU'\delta^* - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad . \qquad (3.1.22)$$

Množeći ovu jednačinu sa $\delta^{**}/(\nu U)$ ona se transformiše na oblik

$$(2+H^{**})U'z^{**} + \frac{Uz^{**'}}{2} - \zeta = 0 \,, \qquad (3.1.23)$$

u kome su:

$$H^{**} = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{\int_0^\infty \left(1-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)d\eta}{\int_0^\infty \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\left(1-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)d\eta} \,, \qquad (3.1.24)$$

i

$$\zeta = B\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0} \quad . \qquad (3.1.25)$$

Iz izraza (3.1.24) i (3.1.25) očigledno je da su veličine $H^{**}$ i $\zeta$ funkcije samo uvedenog skupa parametara (3.1.7), tj. $H^{**}=H^{**}(f_{k,n})$ i $\zeta=\zeta(f_{k,n})$. Tako se iz jednačine (3.1.23), korišćenjem prvih parametara (3.1.8) i izraza (3.1.13) i (3.1.14) dobija da su:

$$F^* = 2[\,\zeta - (2+H^{**})f_{1,0}] \qquad (3.1.26)$$

i

$$F^{**} = \frac{2[\zeta-(2+H^{**})f_{0,1}]\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\sum_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\frac{\partial B}{\partial f_{k,n}}\right]-\frac{1}{B}\sum_{k,n=0}^{\infty}P_{k,n}(f_{k,n})\frac{\partial B}{\partial f_{k,n}}}{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\sum_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\frac{\partial B}{\partial f_{k,n}}\right]+\frac{1}{B}\sum_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\frac{\partial B}{\partial f_{k,n}}} \,, \qquad (3.1.27)$$

što pokazuje, takodje, da su funkcije samo uvedenog skupa parametara (3.1.7). Na ovaj način je pokazana egzistencija prvih jednakosti (3.1.17) i odredjen njihov eksplicitni oblik.

Za pokazivanje egzistencije drugih jednakosti (3.1.17), tj. $T^*$ i $T^{**}$ i odredjivanje njihovih eksplicitnih oblika piše se, u razvijenom obliku, izvod po vremenu t, na lijevoj strani jednačine (3.1.21), koja se zatim, korišćenjem izraza (3.1.24), (3.1.8) i (3.1.9) svodi na jednačinu

$$\frac{1}{2}\dot{z}^{**}(H^{**}+1)+2f_{0,1}+\sum_{k,n=0}^{\infty} z^{**}\frac{\partial f_{k,n}}{\partial t}\frac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}} = 0 \quad . \tag{3.1.28}$$

Zatim se, korišćenjem izraza (3.1.10), prethodna jednačina transformiše na novi oblik iz koga se posredstvom (3.1.13) i (3.1.14) dobijaju

$$T^* = -2\,\frac{2f_{0,1}+\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} Q_{k,n}(f_{k,n})\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}}}{H^{**}+1+2\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}}} \tag{3.1.29}$$

i

$$T^{**} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} Q_{k,n}(f_{k,n})\dfrac{\partial B}{\partial f_{k,n}}}{\dfrac{B}{2}-\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\dfrac{\partial B}{\partial f_{k,n}}}\left[\frac{1}{2}(H^{**}+1)-\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\frac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}}\right]-\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}Q_{k,n}(f_{k,n})\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}}-2f_{0,1}}{1+\dfrac{\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\dfrac{\partial B}{\partial f_{k,n}}}{\dfrac{B}{2}-\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\dfrac{\partial B}{\partial f_{k,n}}}\left[\frac{1}{2}(H^{**}+1)+\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}(k+n)f_{k,n}\frac{\partial H^{**}}{\partial f_{k,n}}\right]}, \tag{3.1.30}$$

tj. funkcije samo uvedenog skupa parametara (3.1.7). Na ovaj način su pokazane egzistencije jednakosti $T^*$ i $T^{**}$, i odredjeni njihovi eksplicitni oblici.

Sa funkcijama $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ u oblicima (3.1.26), (3.1.27), (3.1.29) i (3.1.30), respektivno, jednačina (3.1.15) je postala nezavisna od karaktera spoljašnjeg strujanja i može se smatrati univerzalnom jednačinom posmatranog problema nestacionarnog ravanskog graničnog sloja nestišljivog fluida. Granični uslovi, takodje univerzalni, imaju oblik

$$\Phi = 0\,;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 0 \text{ za } \eta = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \to 1 \text{ za } \eta \to \infty,\ \Phi = \Phi_0(\eta) \text{ za } f_{k,n} = 0, \quad (k=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots) \qquad (3.1.31)$$

u kome je $\Phi_0(\eta)$ BLASIUS-ovo rešenje problema stacionarnog graničnog sloja na ploči.

Za slučaj da je funkcija $B(f_{k,n})$ konstantna i da iznosi $D_0$, jednačina (3.1.15) se svodi na univerzalnu jednačinu koju je NIKODIJEVIĆ u radu [48] dobio za magnetni parametar $g_{k,n}=0$, a funkcije $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ koje su, respektivno, date izrazima (3.1.26), (3.1.27), (3.1.29) i (3.1.30), se poklapaju sa funkcijama $F^*$ i $T^*$ u pomenutom radu.

Univerzalnu jednačinu posmatranog problema (3.1.15) sa funkcijama $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ u oblicima (3.1.26), (3.1.27), (3.1.29) i (3.1.30) i graničnim uslovima (3.1.31) treba, u odredjenom parametarskom približenju, jednom za uvijek riješiti. U procesu rešavanja jednačine treba sračunati odgovarajuće univerzalne funkcije, neophodne za proračune konkretnih primjera sa zadatim funkcijama.

## 2. PARAMETARSKA PRIBLIŽENJA UNIVERZALNE JEDNAČINE (3.1.15)

Dobijena univerzalna jednačina (3.1.15) sadrži, na desnoj strani, beskonačnu sumu članova sastavljenih od svih izvoda po parametrima $f_{k,n}$. Zato rešavanje ovakve potpune jednačine nije moguće, pa se zato za konkretno rešavanje zadatka koriste odredjena parametarska, puna ili lokalna, približenja.

Kako se i pri sračunavanju odredjenih parametarskih približenja na elektronskim računarima pojavljuju veliki problemi računske prirode i da oni, sa povećanjem broja parametara naglo rastu, značajno je stoga riješiti zadatak sa što manje parametara a pri tome zadržati minimum različitih uticaja spoljašnjeg strujanja. Broj parametara mora biti takav da dobijena univerzalna rešenja budu, u pogledu tačnosti, upotrebljiva za praktičnu upotrebu.

Uočava se da se u univerzalnoj jednačini (3.1.15) pojavljuju dvije vrste nezavisnih uticaja spoljašnjeg strujanja na razvoj graničnog sloja. Svaki od ovih uticaja mora biti izražen bar sa jednim parametrom, tako da bi prvu, sa fizičke strane opravdanu aproksimaciju, predstavljala dvoparametarska jednačina sa parametrima $f_{1,0}$ i $f_{0,1}$ koja se dobija iz jednačine (3.1.15) zanemarivanjem svih ostalih parametara izuzev pobrojanih. Ako se zadrže izvodi po pobrojanim parametrima dobija se puna dvoparametarska jednačina, a ako se zanemare izvodi po pojedinim od njih dobijaju se jednačine u odgovarajućoj dvoparametarskoj lokalizovanoj aprokcimaciji. Tako se, za posmatrani problem, puna dvoparametarska jednačina svodi na jednačinu

$$B^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3}+f_{0,1}\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right]+f_{0,1}\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+\frac{F^{**}}{2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\frac{T_2^{**}}{2}\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=\left(T_2^*-f_{0,1}\right)f_{0,1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial f_{0,1}}+$$

$$+T_2^*f_{1,0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial f_{1,0}}+\left(F_2^*-f_{1,0}\right)f_{0,1}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial f_{0,1}}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_{0,1}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right]+F_2^*f_{1,0}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial f_{1,0}}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_{1,0}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right], \tag{3.2.1}$$

u kojoj su sa $F^*_2$, $F^{**}_2$, $T^{**}_2$ i $T^{**}_2$ označene veličine $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ u dvoparametarskom približenju. Veličina $F^*_2$ dobija se iz izraza (3.1.26) i njen oblik se ne razlikuje od oblika (3.1.26), a veličina $F^{**}_2$ se dobija iz izraza (3.1.27) i ima oblik

$$F_2^{**}=\frac{2}{B}\left\{2\left[\zeta-(2+H^{**})f_{1,0}\right]\left[\frac{B}{2}-\left(f_{0,1}\frac{\partial B}{\partial f_{0,1}}+f_{1,0}\frac{\partial B}{\partial f_{1,0}}\right)\right]+f_{1,0}f_{0,1}\frac{\partial B}{\partial f_{0,1}}\right\}. \tag{3.2.2}$$

Iz izraza (3.1.29) se dobija veličina $T^*_2$ u sledećem obliku

$$T_2^*=-2\,\frac{2f_{0,1}-f_{0,1}^2\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}}{H^{**}+1+2\left(f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}+f_{1,0}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{1,0}}\right)}, \tag{3.2.3}$$

dok se veličina $T^{**}_2$ dobija iz (3.1.30) i glasi

$$T_2^{**}=\frac{2}{B}\,\frac{f_{0,1}^2\dfrac{\partial B}{\partial f_{0,1}}\left[\dfrac{1}{2}(H^{**}+1)+f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}+f_{1,0}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{1,0}}\right]+\left(f_{0,1}^2\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}-2f_{0,1}\right)\left[\dfrac{B}{2}-\left(f_{0,1}\dfrac{\partial B}{\partial f_{0,1}}+f_{1,0}\dfrac{\partial B}{\partial f_{1,0}}\right)\right]}{\dfrac{1}{2}(H^{**}+1)+f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}+f_{1,0}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{1,0}}}. \tag{3.2.4}$$

Veličine $\zeta$ i $H^{**}$ koje figurišu u izrazima za $F^*_2$, $F^{**}_2$, $T^*_2$ i $T^{**}_2$ su isto tako u dvoparametarskom približenju. Granični uslovi za jednačinu (3.2.1) dobijaju se iz graničnih uslova (3.1.31) i imaju oblik

$$\Phi=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0 \text{ za } \eta=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\to 1 \text{ za } \eta\to\infty;\ \Phi=\Phi_0(\eta) \text{ za } f_{1,0}=0,\ f_{0,1}=0. \quad (3.2.5)$$

Da bi se umanjile teškoće matematičke prirode prilikom rešavanja univerzalne jednačine (3.2.1) korišćenjem elektronskih računara, ona se dodatno može uprostiti tako što se lokalizuje po pojedinim parametrima. Tako, ako se izvrši lokalizacija po parametru $f_{1,0}$, koja podrazumijeva zanemarivanje izvoda svih veličina po parametru $f_{1,0}$ a zadržavanje samog parametra u ulozi običnog parametra $f_{1,0}$, iz jednačine (3.2.1) dobija se jednačina u dvoparametarskom približenju lokalizovanom po $f_{1,0}$. Na isti način, ako se izvrši lokalizacija po parametru $f_{0,1}$, iz jednačine (3.2.1) se dobija jednačina u dvoparametarskom približenju lokalizovanom po $f_{0,1}$. Moguće je izvršiti lokalizaciju po dva parametra istovremeno i tako dobiti dvoparametarsku jednačinu lokalizovanu po dva parametra. U ovom radu se jednačine lokalizovane po jednom odnosno dva parametra ne pišu, jer je jednačina (3.2.1) opštija od njih, a moguće ju je, uz odredjene teškoće matematičke prirode, riješiti.

Za slučaj da je $f_{0,1}=0$, a to znači da i izvodi svih veličina po $f_{0,1}$ takodje jednaki nuli, iz (3.2.3) i (3.2.4) slijedi da su $T^*$ i $T^{**}$ jednaki nuli. Veličina $F^*$ i sada zadržava istu vrijednost (3.1.26), a $F^{**}$ na osnovu (3.2.2) glasi

$$F^{**}=F^*\left(1-\frac{2}{B}f_{1,0}\frac{\partial B}{\partial f_{1,0}}\right). \quad (3.2.6)$$

Uz sve navedeno, kao i korišćenjem poznatog izraza za $F^*$ iz [22] koji glasi

$$F^*=\frac{a_0B^2-b_0f_{1,0}}{1-\frac{2}{B}f_{1,0}\frac{\partial B}{\partial f_{1,0}}}, \quad (3.2.7)$$

jednačina (3.2.1) prelazi u dobro poznatu punu jednoparametarsku univerzalnu jednačinu stacionarnog graničnog sloja

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3}+\frac{a_0B^2+(2-b_0)f_{1,0}}{2B^2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\frac{f_{1,0}}{B^2}\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2\right]=\frac{F^*f_{1,0}}{B^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial f_{1,0}}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_{1,0}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right), \quad (3.2.8)$$

koju je SALJNIKOV dobio u radu [22].

Dobijeno približenje (3.2.1) predstavlja tzv. "odsječak" univerzalne jednačine (3.1.15), što znači da je jednačina (3.2.1) sadržana u jednačini (3.1.15). Ta činjenica navodi na zaključak da će i rešenje ove jednačine biti "odsječak" rešenja univerzalne jednačine (3.1.15). Zato način formiranja ovakvih aproksimativnih matematikih modela ima jednu važnu karakteristiku, koja i daje osnovni kvalitet uvedenoj višeparametarskoj metodi. Naime, formiranje posmatranih približenja, od automodelnih ka jedno i višeparametarskim punim ili lokalizovanim, moguće je vršiti u odredjenom redu, koji u sebi sadrži preslikavanje formiranja različitih modela strujanja u graničnom sloju, od prostijih ka sve složenijim . To znači da se rešenje svakog "višeg" parametarskog približenja direktno oslanja na rešenje prethodnog, fizički prostijeg slučaja. Tako koordinatni početak ($f_{1,0}=0$; $f_{0,1}=0$) ravni promenljivih ($f_{1,0}$ ; $f_{0,1}$) koja ima tačno odredjenu fizičku interpretaciju, predstavlja BLASIUS-ov problem graničnog sloja na ravnoj ploči [3] . Koordinatna osa $f_{1,0}$ predstavlja stacionarni granični sloj na tijelu proizvoljnog oblika, koordinatna osa $f_{0,1}$ nestacionarni granični sloj na ravnoj ploči, a koordinatna ravan ($f_{1,0}$ ; $f_{0,1}$) predstavlja nestacionarni granični sloj na tijelu proizvoljnog oblika.

U ovom radu, se dalje, numerički rešava jednačina (3.2.1) sa graničnim uslovima (3.2.5).

## IV - GLAVA

## NUMERIČKO REŠAVANJE UNIVERZALNE JEDNAČINE I ANALIZA REZULTATA

### 1. PRIMJENA METODE KONAČNIH RAZLIKA NA JEDNAČINU (3.2.1)

U ovom radu, za rešavanje jednačine (3.2.1) koristi se metoda konačnih razlika, koja je dala zadovoljavajuće -rezultate kod niza autora proučavajući različite modele graničnog sloja [19], [22], [48],.... U tom cilju se prethodno postavljaju granični uslovi u obliku

$$\Phi=0\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0\ \text{za}\ \eta=0\ ;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\to 1\ \text{za}\ \eta\to\infty$$

$$\Phi=\Phi_0(\eta,f_{0,1})\ \text{za}\ f_{1,0}=0\ \ \text{ili}\ \ \Phi=\Phi_1(\eta,f_{1,0})\ \text{za}\ f_{0,1}=0\,. \tag{4.1.1}$$

Poslednja dva granična uslova (4.1.1), koji imaju ulogu početnih uslova, pokazuju da se sa integracijom (3.2.1) može poći, ili od ordinatne ose - $f_{0,1}$, nestacionarno opticanje ravne ploče nestišljivim fluidom

$$B^2\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\eta^3}+f_{0,1}\left(1-\frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}\right)+\frac{F_0^{**}}{2}\Phi_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta^2}+\frac{T_0^{**}}{2}\eta\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta^2}=(T_0^{*}-f_{0,1})\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta\,\partial f_{0,1}}+F_0^{*}f_{0,1}\left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta\,\partial f_{0,1}}-\frac{\partial\Phi_0}{\partial f_{0,1}}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\eta^2}\right];$$

$$F_0^{*}=2\zeta\,,\quad F_0^{**}=\frac{2}{B}\left[2\zeta\left(\frac{B}{2}-f_{0,1}\frac{\partial B}{\partial f_{0,1}}\right)\right]\,,\quad T_0^{*}=-2\,\frac{2f_{0,1}-f_{0,1}^2\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}}{H^{**}+1+2f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}}\,,$$

$$T_0^{**}=\frac{2}{B}\,\frac{f_{0,1}^2\dfrac{\partial B}{\partial f_{0,1}}\left[\frac{1}{2}(H^{**}+1)+f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}\right]+\left(f_{0,1}^2\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}-2f_{0,1}\right)\left[\dfrac{B}{2}-f_{0,1}\dfrac{\partial B}{\partial f_{0,1}}\right]}{\frac{1}{2}(H^{**}+1)+f_{0,1}\dfrac{\partial H^{**}}{\partial f_{0,1}}}\,;$$

$$\Phi_0=0,\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}=0\ \text{za}\ \eta=0\,;\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta}\to 1\ \text{za}\ \eta\to\infty\,;\ \Phi_0=\Phi_{00}(\eta)\ \text{za}\ f_{0,1}=0\,, \tag{4.1.2}$$

ili od apcisne ose-$f_{1,0}$, opticanje tijela proizvoljnog oblika nestišljivog fluida

$$B^2\frac{\partial^3\phi_1}{\partial\eta^3}+f_{1,0}[1-(\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta})^2+\phi_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\eta^2}]+\frac{F_1^{**}}{2}\phi_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\eta^2}=F_1^* f_{1,0}[\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\eta\partial f_{1,0}}-\frac{\partial\phi_1}{\partial f_{1,0}}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\eta^2}],$$

$$F_1^*=2[\zeta-(2+H^{**})f_{1,0}],\ F_1^{**}=\frac{2}{B}\left\{2[\zeta-(2+H^{**})f_{1,0}][\frac{B}{2}-f_{1,0}\frac{\partial B}{\partial f_{1,0}}]\right\},T_1^*=0,\ T_1^{**}=0;$$

$$\phi_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}=0 \text{ za } \eta=0;\ \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\to 1 \text{ za } \eta\to\infty;\ \phi_1=\phi_{00}(\eta) \text{ za } f_{1,0}=0. \qquad (4.1.3)$$

Tokom integracije koriste se oba početna granična uslova, i to za pozitivne vrijednosti parametra $f_{1,0}$ (konfuzorna oblast) koristi se funkcija $\Phi_1$ ($\eta$; $f_{1,0}$), a za negativne vrijednosti $f_{1,0}$ (difuzorna oblast) funkcija $\Phi_0(\eta;\ f_{0,1})$. Pri odredjivanju funkcija $\Phi_0(\eta;\ f_{0,1})$ i $\Phi_1(\eta;\ f_{1,0})$ tj. pri rešavanju jednačina (4.1.2) i (4.1.3) polazi se od BLASIUS-ovog rešenja $\Phi_{00}(\eta)$ opticanja ravne ploče.

Kao prvi korak u pripremi modela za numeričku integraciju je sužavanje reda jednačine (3.2.1) uvodjenjem smjene

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \qquad (4.1.4)$$

čime se ona svodi na sistem od dvije jednačine nižeg reda

$$B^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+[(\frac{F^{**}}{2}+f_{1,0})\phi+\frac{T^{**}}{2}\eta]\frac{\partial u}{\partial\eta}+f_{1,0}(1-u^2)+f_{0,1}(1-u)=F^* f_{1,0}(u\frac{\partial u}{\partial f_{1,0}}-$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial f_{1,0}}\frac{\partial u}{\partial\eta})+(F^*-f_{1,0})f_{0,1}(u\frac{\partial u}{\partial f_{0,1}}-\frac{\partial\phi}{\partial f_{0,1}}\frac{\partial u}{\partial\eta})+T^* f_{1,0}\frac{\partial u}{\partial f_{1,0}}+(T^*-f_{0,1})f_{0,1}\frac{\partial u}{\partial f_{0,1}};$$

$$\phi=0,\ u=0 \text{ za } \eta=0;\ u\to 1 \text{ za } \eta\to\infty;\ u=u_0(\eta;f_{1,0}) \text{ za } f_{0,1}=0, \qquad (4.1.5)$$

gdje su funkcije $F^*$, $F^{**}$, $T^*$ i $T^{**}$ date, respektivno, izrazima (3.1.27), (3.2.2), (3.2.3) i (3.2.4).

Aproksimacija nelinearnih diferencijalnih jednačina (4.1.4) i (4.1.5) vrši se sistemom diferencnih jednačina, definisanih na diskretnom skupu tačaka integracione mreže u prvom oktantu prostora ($f_{1,0}$; $f_{0,1}$; $\eta$), i to tako da se izvodi zamjenjuju odnosima konačnih razlika. Integraciona mreža postavlja se na tri skupa ravni paralelnih odgovarajućim koordinatnim ravnima, na medjusobnom rastojanju $\Delta f_{1,0}$, $\Delta f_{0,1}$ i $\Delta\eta$. Zatim se na usvojenu integracionu mrežu postavlja integraciona shema od pet tačaka (sl. 1) uz pretpostavku da postoje odnosi

$$\Delta f_{1,0} = r_1 (\Delta\eta)^2 \; , \quad \Delta f_{0,1} = r_2 (\Delta\eta)^2 \; , \qquad (4.1.6)$$

u kojima su $r_1$ i $r_2$, u odredjenoj mjeri, proizvoljne konstante. Označavajući diskretne veličine u čvorovima, definisane integracione mreže, sa tri indeksa

$$\begin{aligned} &u(\eta_m; f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = u_{m,n}^K \; , \quad \Phi(\eta_m; f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = \Phi_{m,n}^K \\ &F^*(f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = F_n^{*K} \; , \quad F^{**}(f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = F_n^{**K} \\ &T^*(f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = T_n^{*K} \; , \quad T^{**}(f_{1,0}^K; f_{0,1;n}) = T_n^{**K} \end{aligned} \qquad (4.1.7)$$

i aproksimirajući izvode odnosima razlika

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{2\Delta\eta} \; , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - 2u_{m,n+1}^{K+1,i} + u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{(\Delta\eta)^2} \; ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial f_{1,0}} = \frac{u_{m,n+1}^{K+1,i} - u_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} \; , \quad \frac{\partial u}{\partial f_{0,1}} = \frac{u_{m,n+1}^{K+1,i} - u_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}} \; ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_{1,0}} = \frac{\Phi_{m,n+1}^{K+1,i-1} - \Phi_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} \; , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial f_{0,1}} = \frac{\Phi_{m,n+1}^{K+1,i-1} - \Phi_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}} \; , \qquad (4.1.8)$$

dobija se sistem linearnih diferencnih jednačina

$$\begin{aligned} &\frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - 2u_{m,n+1}^{K+1,i} + u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{(\Delta\eta)^2} + \left[\frac{(F_{n+1}^{**K+1,i-1} + 2f_{1,0}^{K+1})\Phi_{m,n+1}^{K+1,i-1}}{2(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2} + \frac{(m-1)\Delta\eta\, T_{n+1}^{**K+1,i-1}}{2(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\right] \cdot \\ &\cdot \frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{2\Delta\eta} + \frac{f_{1,0}^{K+1}}{(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\left(1 - u_{m,n+1}^{K+1,i-1} \cdot u_{m,n+1}^{K+1,i}\right) + \frac{f_{0,1;n+1}}{(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\left(1 - u_{m,n+1}^{K+1,i}\right) = \\ &= \frac{F_{n+1}^{*K+1,i-1} f_{1,0}^{K+1}}{(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\left(u_{m,n+1}^{K+1,i-1} \frac{u_{m,n+1}^{K+1,i} - u_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} - \frac{\Phi_{m,n+1}^{K+1,i-1} - \Phi_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} \frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{2\Delta\eta}\right) + \\ &+ \frac{(F_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{1,0}^{K+1})}{(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2} f_{0,1;n+1} \left(u_{m,n+1}^{K+1,i-1} \frac{u_{m,n+1}^{K+1,i} - u_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}} - \frac{\Phi_{m,n+1}^{K+1,i-1} - \Phi_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}} \frac{u_{m+1,n+1}^{K+1,i} - u_{m-1,n+1}^{K+1,i}}{2\Delta\eta}\right) + \end{aligned}$$

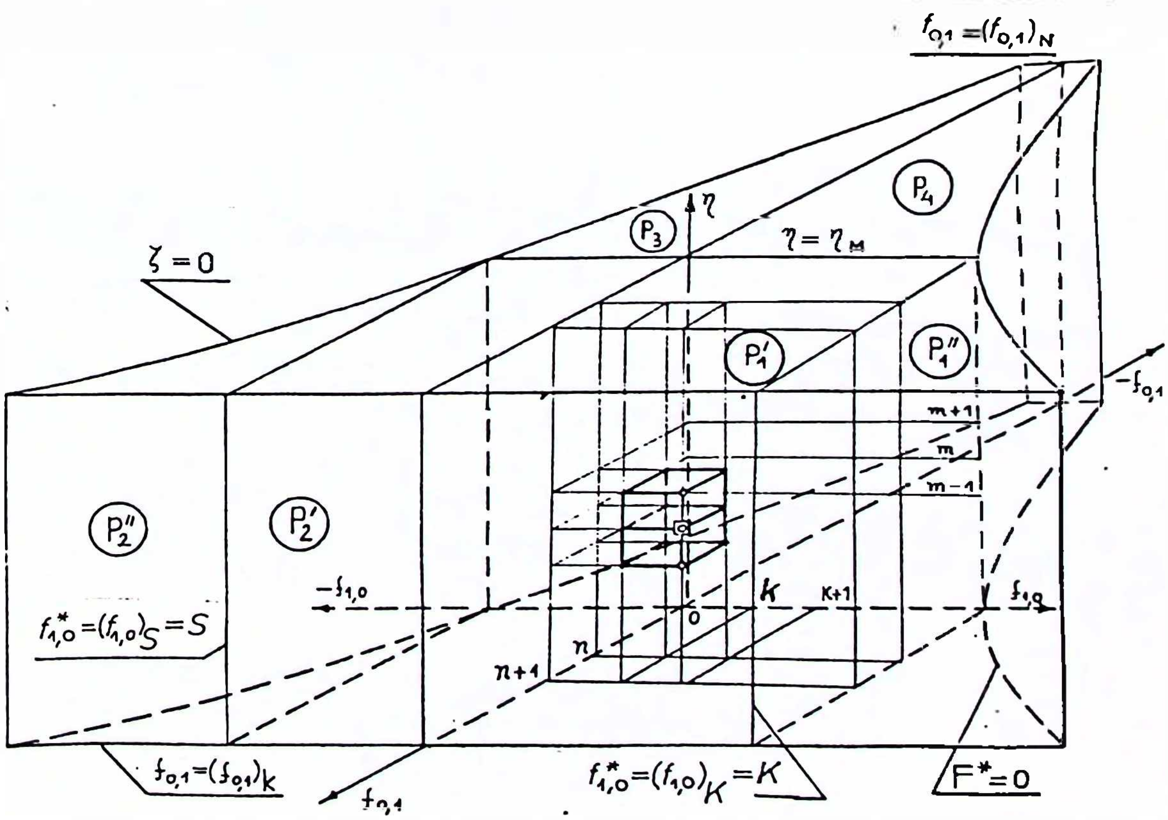
$$+\frac{T^{*\,k+1,i-1}_{n+1}\,f^{k+1}_{1,0}}{(B^{k+1,i-1}_{n+1})^2}\,\frac{u^{k+1,i}_{m,n+1}-u^{k}_{m,n+1}}{\Delta f_{1,0}}+\frac{(T^{*\,k+1,i-1}_{n+1}-f_{0,1;n+1})}{(B^{k+1,i-1}_{n+1})^2}\,f_{0,1;n+1}\,\frac{u^{k+1,i}_{m,n+1}-u^{k}_{m,n}}{\Delta f_{0,1}}, \qquad (4.1.9)$$

sa graničnim uslovima

$$\phi^{k+1,i}_{0,n+1}=0\,,\quad u^{k+1,i}_{0,n+1}=0 \quad \text{za}\ \eta_0=0 \qquad (4.1.10)$$

$$u^{k+1,i}_{M,n+1}=1 \quad \text{za}\ \eta_M=M\,,$$

$$(m=1,2,\dots,M-2,M-1\,;\ k=0,\mp1,\mp2,\dots;\ n=0,\mp1,\mp2,\dots;\ i=1,2,\dots)\,.$$




sl. 1

Funkcije $F^{*K+1,i}_{n+1}$, $F^{**K+1,i}_{n+1}$, $T^{*K+1,i}_{n+1}$ i $T^{**K+1,i}_{n+1}$, koje figurišu u sistemu (4.1.9), odredjuju se posredstvom izraza

$$F^{*K+1,i}_{n+1} = 2\left[\zeta^{K+1,i}_{n+1} - \left(2 + H^{**K+1,i}_{n+1}\right) f^{K+1}_{1,0}\right], \qquad (4.1.11)$$

$$F^{**K+1,i}_{n+1} = \frac{2}{B^{K+1,i}_{n+1}} \Bigg\{ 2\left[\zeta^{K+1,i}_{n+1} - \left(2 + H^{**K+1,i}_{n+1}\right) f^{K+1}_{1,0}\right]\left[\frac{B^{K+1,i}_{n+1}}{2} - \left(f_{0,1;n+1}\frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} + f^{K+1}_{1,0}\frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K}_{n+1}}{\Delta f_{1,0}}\right)\right] + f^{K+1}_{1,0} \cdot f_{0,1;n+1}\frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} \Bigg\}, \qquad (4.1.12)$$

$$T^{*K+1,i}_{n+1} = -2\left[2 f_{0,1;n+1} - \left(f_{0,1;n+1}\right)^2 \frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K+1}_{n+1}}{\Delta f_{0,1}}\right]\left[H^{**K+1,i}_{n+1} + 1 + 2 f^{K+1}_{1,0}\frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K}_{n+1}}{\Delta f_{1,0}} + 2 f_{0,1;n+1}\frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}}\right]^{-1}, \qquad (4.1.13)$$

i

$$T^{**K+1,i}_{n+1} = \frac{2}{B^{K+1,i}_{n+1}} \Bigg\{ \left(f_{0,1;n+1}\right)^2 \frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}}\left[\frac{1}{2}\left(H^{**K+1,i}_{n+1} + 1\right) + f_{0,1;n+1} \cdot \frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} + f^{K+1}_{1,0}\frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K}_{n+1}}{\Delta f_{1,0}}\right] + \left[\left(f_{0,1;n+1}\right)^2 \frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} - 2 f_{0,1;n+1}\right]\left[\frac{B^{K+1,i}_{n+1}}{2} - \left(f_{0,1;n+1}\frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} + f^{K+1}_{1,0}\frac{B^{K+1,i}_{n+1} - B^{K}_{n+1}}{\Delta f_{1,0}}\right)\right]\Bigg\} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(H^{**K+1,i}_{n+1} + 1\right) + f_{0,1;n+1}\frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K+1}_{n}}{\Delta f_{0,1}} + f^{K+1}_{1,0}\frac{H^{**K+1,i}_{n+1} - H^{**K}_{n+1}}{\Delta f_{1,0}}\right]^{-1}, \qquad (4.1.14)$$

u kojima se funkcije $B^{K+1,i}_{n+1}$, $H^{**K+1,i}_{n+1}$ i $\zeta^{K+1,i}_{n+1}$ aproksimiraju izrazima

$$B^{K+1,i}_{n+1} = \frac{\Delta\eta}{2}\left[u^{K+1,i}_{m,n+1}\left(1 - u^{K+1,i}_{m,n+1}\right) + u^{K+1,i}_{m+1,n+1}\left(1 - u^{K+1,i}_{m+1,n+1}\right)\right], \qquad (4.1.15)$$

$$H^{**\,K+1,i}_{n+1} = \frac{\Delta\eta}{2B^{K+1,i}_{n+1}}\left(2 - u^{K+1,i}_{m,n+1} - u^{K+1,i}_{m+1,n+1}\right),\tag{4.1.16}$$

i

$$\zeta^{K+1,i}_{n+1} = B^{K+1,i}_{n+1}\,\frac{-3u^{K+1,i}_{0,n+1} + 4u^{K+1,i}_{1,n+1} - u^{K+1,i}_{2,n+1}}{2\Delta\eta}.\tag{4.1.17}$$

Sastavljanje tablica za strujnu funkciju $\Phi^{K+1,i}_{m+1,n+1}$, kao i sračunavanje njene vrijednosti na cijelom intervalu integracije po zadatoj tablici podintegralne funkcije $u^{K+1,i}_{m+1,n+1}$ vrši se tako što se za prve čvorove do tijela (m=1), zbog velike vrijednosti gradijenta u pravcu integracije, koristi formula povećane tačnosti

$$\Phi^{K+1,i}_{1,n+1} = \frac{3}{8}\Delta\eta\left(u^{K+1,i}_{0,n+1} + 3u^{K+1,i}_{1,n+1} + 3u^{K+1,i}_{2,n+1} + u^{K+1,i}_{3,n+1}\right) - \frac{\Delta\eta}{3}\left(u^{K+1,i}_{1,n+1} - 4u^{K+1,i}_{2,n+1} + u^{K+1,i}_{3,n+1}\right) + \Phi^{K+1,i}_{0,n+1},\tag{4.1.18}$$

a za ostale tačke (m) integracione mreže, na svakom sloju (n+1), SIMPSON-ova formula

$$\Phi^{K+1,i}_{m+2,n+1} = \frac{\Delta\eta}{3}\left(u^{K+1,i}_{m,n+1} + 4u^{K+1,i}_{m+1,n+1} + u^{K+1,i}_{m+2,n+1}\right) + \Phi^{K+1,i}_{m,n+1}.\tag{4.1.19}$$

Za rešavanje sistema jednačina (4.1.9) sa graničnim uslovima (4.1.10) koristi se metoda koja se u Ruskoj literaturi naziva "progonka", a u zapadnoj "Tridiagonal-Algorithm" ili skraćeno "TDA" istraživana od strane KELLER-CEBECI-ja (1971 godine), BLOTTNER-a (1975. god.) i CRANK-NICOLSON-a (1980 god.) [98]. Kako ova metoda ustvari predstavlja CROUT-ovu metodu za trodijagonalne sisteme, naš prikladan termin za nju bi bio metoda premoštavanja [99], pošto konačnim brojem elemenata treba povezati date granične uslove na početku i kraju segmenta. Zato se pomenuti sistem (4.1.9) najprije dovodi na oblik

$$P^i_m u^{K+1,i}_{m-1,n+1} - 2R^i_m u^{K+1,i}_{m,n+1} + C^i_m u^{K+1,i}_{m+1,n+1} = G^i_m,\tag{4.1.20}$$

u kome su koeficijenti $P^i_m$, $R^i_m$, $C^i_m$ i slobodni članovi $G^i_m$ dati izrazima

$$P^i_m = 1 - D^i_m, \quad C^i_m = 1 + D^i_m,$$

$$D_m^i = \frac{\Delta\eta}{2(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{2}F_{n+1}^{**K+1,i-1} + f_{1,0}^{K+1}\Big)\phi_{m,n+1}^{K+1,i-1} + \frac{(m-1)\Delta\eta}{2}T_{n+1}^{**K+1,i-1} +$$

$$+ F_{n+1}^{*K+1,i-1} f_{1,0}^{K+1}\frac{\phi_{m,n+1}^{K+1,i-1}-\phi_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} + f_{0,1;n+1}\big(F_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{1,0}^{K+1}\big)\frac{\phi_{m,n+1}^{K+1}-\phi_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}}\Big],$$

$$R_m^i = 1 + \frac{(\Delta\eta)^2}{2(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\Big[f_{1,0}^{K+1}u_{m,n+1}^{K+1,i-1} + f_{0,1;n+1} + \frac{f_{1,0}^{K+1}}{\Delta f_{1,0}}\big(F_{n+1}^{*K+1,i-1}u_{m,n+1}^{K+1,i-1} + T_{n+1}^{*K+1,i-1}\big) +$$

$$+ \frac{f_{0,1;n+1}}{\Delta f_{0,1}}\Big(u_{m,n+1}^{K+1,i-1}\big(F_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{1,0}^{K+1}\big) + T_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{0,1;n+1}\Big)\Big],$$

$$G_m^i = -\frac{(\Delta\eta)^2}{(B_{n+1}^{K+1,i-1})^2}\Big\{f_{1,0}^{K+1} + f_{0,1;n+1} + u_{m,n+1}^{K+1,i-1}\Big[F_{n+1}^{*K+1,i-1}\frac{f_{1,0}^{K+1}u_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} + \big(F_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{1,0}^{K+1}\big)$$

$$\frac{f_{0,1;n+1}u_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}}\Big] + T_{n+1}^{*K+1,i-1}\frac{f_{1,0}^{K+1}u_{m,n+1}^{K}}{\Delta f_{1,0}} + \big(T_{n+1}^{*K+1,i-1} - f_{0,1;n+1}\big)\frac{f_{0,1;n+1}u_{m,n}^{K+1}}{\Delta f_{0,1}}\Big\}. \quad (4.1.21)$$

Za m=1 sistem (4.1.20) prelazi u jednačinu

$$P_1^i u_{0,n+1}^i - 2R_1^i u_{1,n+1}^i + C_1^i u_{2,n+1}^i = G_1^i\,, \quad (4.1.22)$$

koja se transformiše na oblik

$$u_{1,n+1}^i = K_1^i + L_1^i u_{2,n+1}^i\,, \quad (4.1.23)$$

u kojem su

$$L_1^i = \frac{C_1^i}{2R_1^i}\,, \quad K_1^i = \frac{P_1^i u_{0,n+1}^i - G_1^i}{2R_1^i}\,. \quad (4.1.24)$$

Kada se u jednačinu

$$P_2^i u_{1,n+1}^i - 2R_2^i u_{2,n+1}^i + C_2^i u_{3,n+1}^i = G_2^i\,, \quad (4.1.25)$$

koja je iz sistema (4.1.20) dobijena za m=2, stavi umjesto $u_{1,n+1}^i$ njegova vrijednost prikazana izrazom (4.1.23), dobija se za $u_{2,n+1}^i$ izraz

$$u_{2,n+1}^i = K_2^i + L_2^i u_{3,n+1}^i\,, \quad (4.1.26)$$

u kojemu su

$$L_2^i = \frac{C_2^i}{2R_2^i - P_2^i L_1^i} \ , \quad K_2^i = \frac{P_2^i K_1^i - G_2^i}{2R_2^i - P_2^i L_1^i} \ . \qquad (4.1.27)$$

Nastavljajući dalje ovaj postupak, rešenje sistema (4.1.20) se korišćenjem metode "progonke" pretpostavlja dakle u obliku

$$u_{M,n+1}^i = 1 \ , \quad u_{m,n+1}^i = K_m^i + L_m^i u_{m+1,n+1}^i$$
$$(m = M-1, M-2, \dots, 3, 2, 1) \ , \qquad (4.1.28)$$

u kojemu su koeficijenti "progonke" za konstantan korak $\Delta\eta$, dati sledećim rekurentnim izrazima

$$L_0^i = 0 \ , \quad L_m^i = \frac{C_m^i}{2R_m^i - P_m^i L_{m-1}^i} \ ,$$
$$K_0^i = 0 \ , \quad K_m^i = \frac{P_m^i K_{m-1}^i - G_m^i}{2R_m^i - P_m^i L_{m-1}^i} \qquad (4.1.29)$$
$$(m = 1, 2, 3, \dots, M-2, M-1) \ .$$

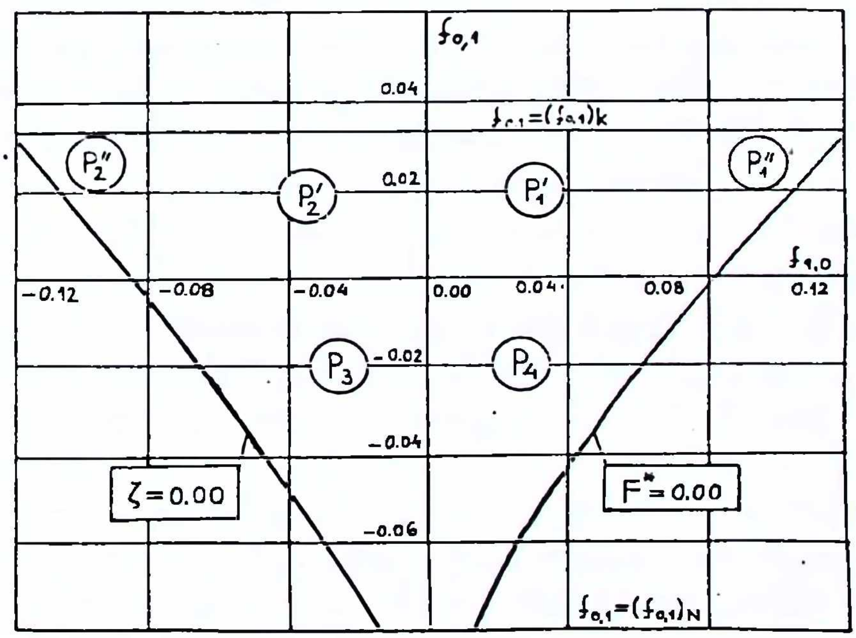
Na osnovu formiranog numeričkog algoritma pišu se programi na FORTRAN IV jeziku i koriste za rešavanje jednačine (3.2.1) primjenom računara DELTA 4850/160 (VAX/VMS).

## 2. REZULTATI REŠENJA JEDNAČINE (3.2.1) I NJIHOVA ANALIZA

Prije nego što se predje na neposrednu analizu rezultata integracije univerzalne jednačine (3.2.1) potrebno je nešto reći o oblasti integracije, vodjenju procesa sračunavanja kao i o karakterističnim pojavama vezanim kako za program, tako i za samo sračunavanje.

Integracija jednačine (3.2.1) vrši se u prostoru (sl. 2) promenljivih $f_{1,0}$; $f_{0,1}$ i $\eta$ ograničenom ravnima $\eta=0$, $\eta=\eta_M=9{,}6$, $f_{0,1}=(f_{0,1})_k$, $f_{0,1}=(f_{0,1})_N$ i površima $F^*=0$ i $\zeta=0$. Pošto se integracija ove jednačine u uočenom prostoru ne može sprovesti korišćenjem jednog numeričkog algoritma, on se zato dijeli na četiri podprostora i to: podprostor $P_1(f_{1,0}=0$; $f_{0,1}=0$; $f_{0,1}=(f_{0,1})_k$; $F^*=0$; $\eta=0$; $\eta=\eta_M)$, podprostor $P_2(f_{1,0}=0$; $f_{0,1}=0$; $f_{0,1}=(f_{0,1})_k$; $\zeta=0$; $\eta=0$; $\eta=\eta_M)$, podprostor $P_3(f_{1,0}=0$; $f_{0,1}=0$; $f_{0,1}=(f_{0,1})_N$; $\zeta=0$; $\eta=0$; $\eta=\eta_M)$ i podprostor $P_4(f_{1,0}=0$; $f_{0,1}=0$;

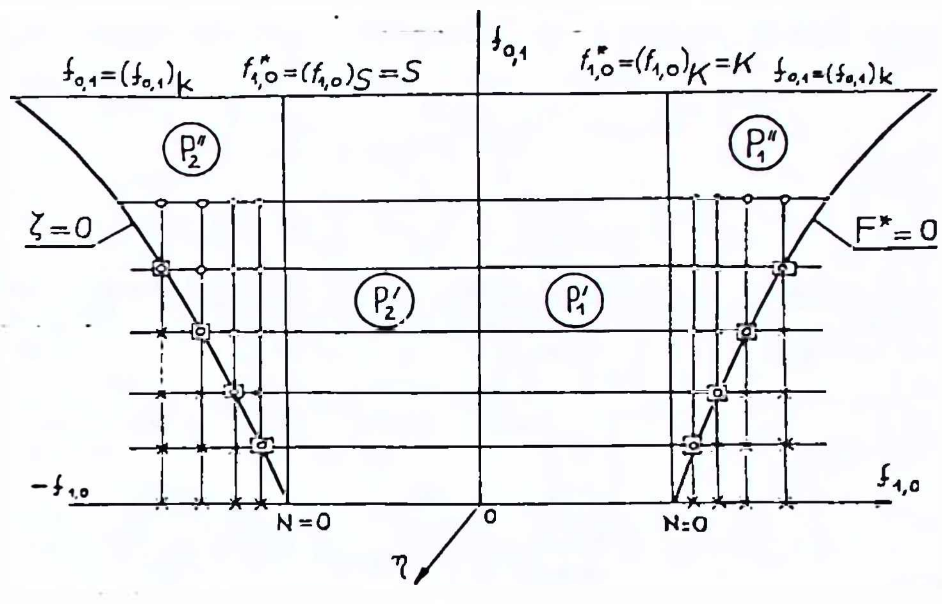
$f_{o,1}=(f_{o,1})_N$; $F^*=0$; $\eta=0$; $\eta=\eta_M$) gdje su u zagradama date jednačine graničnih površi odgovarajućih podprostora. U podprostorima $P_3$ i $P_4$ integracija jednačine (3.2.1) može se vršiti korišćenjem po jednog numeričkog algoritma, dok u podprostorima $P_1$ i $P_2$ to nije moguće jer. za tačke koje se nalaze desno od prave ($f_{o,1}=0$; $F^*=0$) odnosno lijevo od prave ($f_{o,1}=0$; $\zeta=0$) nedostaju vrijednosti odgovarajućih veličina u prethodnom sloju. Za podprostore $P_3$ i $P_4$, kao početni uslov za integraciju jednačine (3.2.1), koristi se rešenje $\Phi_1(\eta;\ f_{1,o})$ jednačine stacionarnog graničnog sloja na tijelu proizvoljnog oblika, tj. polazi se od jednačine (4.1.3). Sračunavaju se tražene veličine prvo u tačkama koordinatne ravni ($\eta$; $f_{1,o}$) i to polazeći od nultog sloja $f_{1,o}=0$, BLASIUS-ov zadatak, pa do prednje zaustavne tačke za prostor $P_4$ sa korakom $\Delta f_{1,o}>o$, odnosno do tačke odvajanja graničnog sloja za prostor $P_3$ uz korak $\Delta f_{1,o}<o$. Zatim se prelazi na narednu ravan koja je paralelna prethodnoj na rastojanju $\Delta f_{o,1}$ od nje i u kojoj se sračunavanja izvode na isti prethodno rečeni način. Navedeni postupak se dakle prenosi sa ravni na sledeću paralelnu ravan, i tako redom do presjeka ravni $(f_{o,1})_N$ i površi $F^*=0$ za prostor $P_4$, odnosno do presjeka ravni $(f_{o,1})_N$ i površi $\zeta=0$ za prostor $P_3$.




sl. 2

Proračun se odvija tako što se prvo, posredstvom izraza (4.1.29), odredjuju koeficijenti "progonke" i to počev od m=1 pa do m=M-2. Zatim se korišćenjem izraza (4.1.28) odredjuju odnosi brzina u indirektnoj "progonki", tj. počev od m=M-1 pa do m=1. Koarak $\Delta\eta$ iznosi 0.06, dok se za korake $\Delta f_{1,0}$ i $\Delta f_{0,1}$ uzimaju takve vrijednosti koje omogućavaju što kvalitetnije prilaženje površima $F^*=0$ i $\zeta=0$, imajući u vidu činjenicu da nekvalitetan izbor ovih koraka dovodi do izlaska iz prostora integracije $P_3$ i $P_4$ i do prinudnog prekida sračunavanja. Za sračunavanje u podprostoru $P_3$ koristi se PROGRAM III, dok se sračunavanje u podprostoru $P_4$ realizuje korišćenjem PROGRAMA IV.

Da bi se došlo do rešenja u podprostorima $P_1$ i $P_2$, za koje nije moguće u cjelosti koristiti formirani algoritam pa ni programe I i II, isti se dijele na po dvije oblasti (sl. 3). Naime, podprostor $P_1$, sa pozitivnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$ (konfuzorna oblast) i parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, dijeli se na oblast $P'_1$ $[f_{1,0}=0;\ f_{1,0}=(f_{1,0})_K=K;\ f_{0,1}=0;\ f_{0,1}=(f_{0,1})_k;\ \eta=0;\ \eta=\eta_M]$ i oblast $P_1''$ $[f_{1,0}=(f_{1,0})_K;\ f_{0,1}=(f_{0,1})_K;\ F^*=0;\ \eta=0;\ \eta=\eta_M]$ gdje je $(f_{1,0})_K=K=f^*_{1,0}$ vrijednost dinamičkog parametra koja odgovara presjeku ravni $f_{0,1}=0$ i površi $F^*=0$. Isto tako podprostor $P_2$, sa negativnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$ (difuzorna oblast) i pozitivnim parametrima nestacionarnosti $f_{0,1}$, se dijeli na oblast $P_2'$ $[f_{1,0}=0;\ f_{1,0}=(f_{1,0})_S=S;\ f_{0,1}=0;\ f_{0,1}=(f_{0,1})_K;\ \eta=0;\ \eta=\eta_M]$ i oblast $P_2''$ $[f_{1,0}=(f_{1,0})_S;\ f_{0,1}=0;\ f_{0,1}=(f_{0,1})_K;\ \zeta=0;\ \eta=0;\ \eta=\eta_M]$, gdje je $(f_{1,0})_S=S=f^*_{1,0}$ vrijednost dinamičkog parametra koja odgovara presjeku ravni $f_{0,1}=0$ i površi $\zeta=0$. Sračunavanje u oblastima $P_1'$ i $P_2'$ nije teško realizovati polazeći od početnog graničnog uslova $\Phi_0(\eta;\ f_{0,1})$, tj. polazi se od jednačine (4.1.2), i vršeći sračunavanja po ravnima paralelnih koordinatnoj ravni $(\eta;\ f_{0,1})$ a u smjeru porasta parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ pri koraku $\Delta f_{1,0}>0$ za oblast $P_1'$ i koraku $\Delta f_{1,0}<0$ za oblast $P_2'$. Za tekuću iteraciju, sloj i ravan poznati su podaci prethodne iteracije, sloja i ravni. Koraci $\Delta\eta$ i $\Delta f_{0,1}$ zadržavaju se konstantnim, dok se korak $\Delta f_{1,0}$ smanjuje sa približavanjem prednjoj zaustavnoj tački i tački odvajanja graničnog sloja zbog što boljeg približavanja tim tačkama. Sračunavanja u oblastima $P_1'$ i $P_2'$ realizuju se korišćenjem programa I i II.




sl.3

Dio oblasti $P_1''$, u blizini površine nultih vrijednosti funkcije $F^*$, kao i dio oblasti $P_2''$ u blizini površine nultih vrijednosti bezdimenzionog koeficijenta $\zeta$, pokazuju se kao vrlo neprijatni za numeričku integraciju. Ovakav problem, koji se javlja kod stacionarnih [65] i kod nestacionarnih problema [48], sastoji se u tome što za definisanje izvoda po promenljivoj $f_{1,0}$ u ravnima $f_{1,0;N}=f^*_{1,0}+N\Delta f_{1,0}$ $(N=1,2,\dots)$ u sloju $N\Delta f_{0,1}$, ne postoje rešenja prethodnog sloja (sl. 3) jer se te tačke nalaze izvan oblasti u kojoj su PRANDTL-ove jednačine korektne. Veličina $f^*_{1,0}$ je apcisa presječne prave koordinatne ravni $f_{0,1}=0$ i površi $F^*=0$ za oblast $P_1''$, odnosno apcisa presječne prave koordinatne ravni $f_{0,1}=0$ i površi $\zeta=0$ za oblast $P_2''$. U radu se ovaj problem prevazilazi tako što se za svaki početni sloj nove ravni, poslije $f_{1,0}=f^*_{1,0}=(f_{1,0})_K=K$ za oblast $P_1''$ i $f_{1,0}=f^*_{1,0}=(f_{1,0})_S=S$ za oblast $P_2''$, primenjuje nova iteraciona shema (sl. 4) na osnovu koje se vrše sledeće aproksimacije izvoda odnosima konačnih razlika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-2u^{N+S,i}_{m,n}+u^{N+S,i}_{m-1,N}}{(\Delta\eta)^2}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-u^{N+S,i}_{m-1,N}}{2\,\Delta\eta}\,,$$

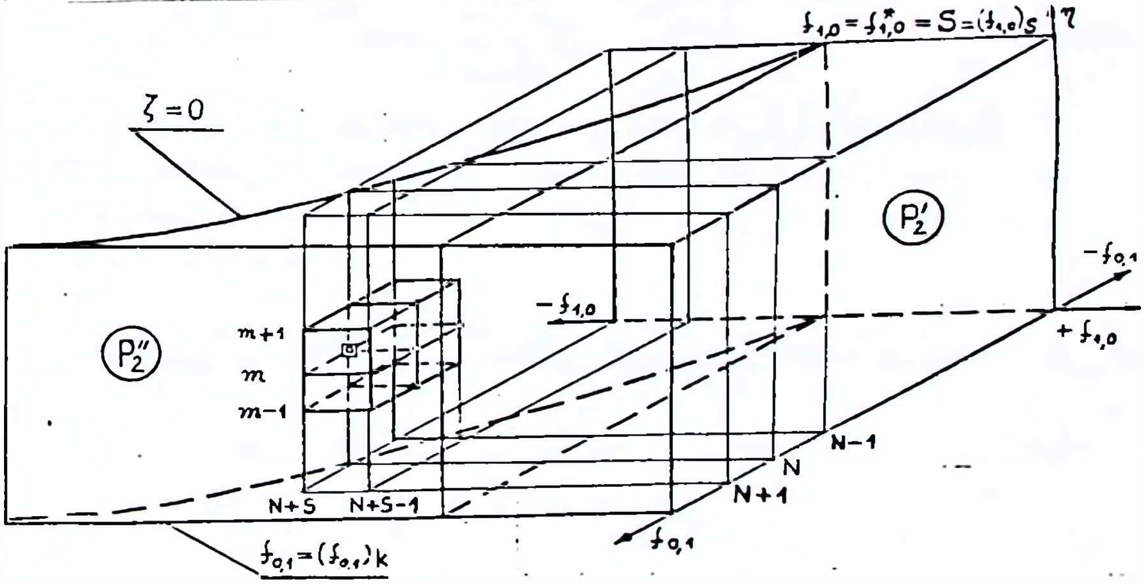
$$\frac{\partial u}{\partial f_{1,0}}=\frac{u^{N+S,i}_{m,N}-u^{N+S-1}_{m,N}}{\Delta f_{1,0}}\,,\quad \frac{\partial \phi}{\partial f_{1,0}}=\frac{\phi^{N+S,i-1}_{m,N}-\phi^{N+S-1}_{m,N}}{\Delta f_{1,0}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial f_{0,1}}=\frac{u^{N+S-1}_{m,N+1}-u^{N+S-1}_{m,N-1}}{2\,\Delta f_{0,1}}\,,\quad \frac{\partial \phi}{\partial f_{0,1}}=\frac{\phi^{N+S-1}_{m,N+1}-\phi^{N+S-1}_{m,N-1}}{2\,\Delta f_{0,1}}\,,\qquad (4.2.1)$$

tako da se jednačina (4.1.5) svodi na sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-2u^{N+S,i}_{m,N}+u^{N+S,i}_{m-1,N}}{(\Delta\eta)^2}+\left[\frac{(F^{**N+S,i-1}_{N}+2f^{N+S}_{1,0})\Phi^{N+S,i-1}_{m,N}}{2(B^{N+S,i-1}_{N})^2}+\frac{(m-1)\Delta\eta\, T^{**N+S,i-1}_{N}}{2(B^{N+S,i-1}_{N})^2}\right]\\
&\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-u^{N+S,i}_{m-1,N}}{2\Delta\eta}+\frac{f^{N+S}_{1,0}}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}\left(1-u^{N+S,i-1}_{m,N}u^{N+S,i}_{m,N}\right)+\frac{f_{0,1;N}}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}\left(1-u^{N+S,i}_{m,N}\right)=\frac{F^{*N+S,i-1}_{N}f^{N+S}_{1,0}}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}\cdot\\
&\left(u^{N+S,i-1}_{m,N}\frac{u^{N+S,i}_{m,N}-u^{N+S-1}_{m,N}}{\Delta f_{1,0}}-\frac{\Phi^{N+S,i-1}_{m,N}-\Phi^{N+S-1}_{m,N}}{\Delta f_{1,0}}\,\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-u^{N+S,i}_{m-1,N}}{2\Delta\eta}\right)+\frac{(F^{*N+S,i-1}_{N}-f^{N+S}_{1,0})}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}f_{0,1;N}\\
&\left(u^{N+S,i}_{m,N}\frac{u^{N+S-1}_{m,N+1}-u^{N+S-1}_{m,N-1}}{2\Delta f_{0,1}}-\frac{\Phi^{N+S-1}_{m,N+1}-\Phi^{N+S-1}_{m,N-1}}{2\Delta f_{0,1}}\,\frac{u^{N+S,i}_{m+1,N}-u^{N+S,i}_{m-1,N}}{2\Delta\eta}\right)+\frac{T^{*N+S,i-1}_{N}f^{N+S}_{1,0}}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}\cdot\\
&\frac{u^{N+S,i}_{m,N}-u^{N+S-1}_{m,N}}{\Delta f_{1,0}}+\frac{(T^{*N+S,i-1}_{N}-f_{0,1;N})}{(B^{N+S,i-1}_{N})^2}f_{0,1;N}\,\frac{u^{N+S-1}_{m,N+1}-u^{N+S-1}_{m,N-1}}{2\Delta f_{0,1}},
\end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

$$(m=1,2,\dots;\ N=1,2,\dots),$$




sl. 4

gdje su $F^{*N+S,i}_{N}=2\left[\zeta^{N+S,i}_{N}-(2+H^{**N+S,i}_{N})f^{N+S}_{1,0}\right]$,

$$F^{**N+S,i}_{N}=\frac{2}{B^{N+S,i}_{N}}\left\{2\left[\zeta^{N+S,i}_{N}-(2+H^{**N+S,i}_{N})f^{N+S}_{1,0}\right]\left[\frac{B^{N+S,i}_{N}}{2}-\left(f_{0,1;N}\frac{B^{N+S-1}_{N+1}-B^{N+S-1}_{N-1}}{2\Delta f_{0,1}}+f^{N+S}_{1,0}\frac{B^{N+S,i}_{N}-B^{N+S-1}_{N}}{\Delta f_{1,0}}\right)\right]+f^{N+S}_{1,0}f_{0,1;N}\frac{B^{N+S-1}_{N+1}-B^{N+S-1}_{N-1}}{2\Delta f_{0,1}}\right\},$$

$$T^{*N+S,i}_{N}=-2\,\frac{\left[2f_{0,1;N}-(f_{0,1;N})^2\dfrac{H^{**N+S-1}_{N+1}-H^{**N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}}\right]}{\left[H^{**N+S,i}_{N}+1+2\left(f^{N+S}_{1,0}\dfrac{H^{**N+S,i}_{N}-H^{**N+S-1}_{N}}{\Delta f_{1,0}}+f_{0,1;N}\dfrac{H^{**N+S-1}_{N+1}-H^{**N+S-1}_{N-1}}{2\Delta f_{0,1}}\right)\right]},$$

$$\overset{**}{T}{}_N^{N+S,i} = \frac{2}{B_N^{N+S,i}}\Big\{(f_{0,1;N})^2 \frac{B_{N+1}^{N+S-1} - B_{N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}}\Big[\frac{1}{2}(\overset{**}{H}{}_N^{N+S,i} + 1) + f_{0,1;N}\frac{\overset{**}{H}{}_{N+1}^{N+S-1} - \overset{**}{H}{}_{N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}} +$$

$$+ f_{1,0}^{N+S}\frac{\overset{**}{H}{}_N^{N+S,i} - \overset{**}{H}{}_N^{N+S-1}}{\Delta f_{1,0}}\Big] + \Big[(f_{0,1;N})^2\frac{\overset{**}{H}{}_{N+1}^{N+S-1} - \overset{**}{H}{}_{N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}} - 2f_{0,1;N}\Big]\Big[\frac{B_N^{N+S,i}}{2} - \Big(f_{0,1;N}\cdot$$

$$\cdot\frac{B_{N+1}^{N+S-1} - B_{N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}} + f_{1,0}^{N+S}\frac{B_N^{N+S,i} - B_N^{N+S-1}}{\Delta f_{1,0}}\Big)\Big]\Big\}\Big/\Big[\frac{1}{2}(\overset{**}{H}{}_N^{N+S,i} + 1) + f_{1,0}^{N+S}\frac{\overset{**}{H}{}_N^{N+S,i} - \overset{**}{H}{}_N^{N+S-1}}{\Delta f_{1,0}}$$

$$+ f_{0,1;N}\frac{\overset{**}{H}{}_{N+1}^{N+S-1} - \overset{**}{H}{}_{N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}}\Big],$$

$$B_N^{N+S,i} = \frac{\Delta\eta}{2}\Big[u_{m,N}^{N+S,i}(1 - u_{m,N}^{N+S,i}) + u_{m+1,N}^{N+S,i}(1 - u_{m+1,N}^{N+S,i})\Big],$$

$$\overset{**}{H}{}_N^{N+S,i} = \frac{\Delta\eta}{2B_N^{N+S,i}}\Big(2 - u_{m,N}^{N+S,i} - u_{m+1,N}^{N+S,i}\Big),$$

$$\zeta_N^{N+S,i} = B_N^{N+S,i}\,\frac{-3u_{0,N}^{N+S,i} + 4u_{1,N}^{N+S,i} - u_{2,N}^{N+S,i}}{2\Delta\eta}. \qquad (4.2.3)$$

Za svaki početni sloj nove ravni neophodno je dakle, riješiti sistem diferencnih jednačina (4.2.2). Zbog toga se on, kao i za podprostore $P_3$ i $P_4$, svodi na raniji oblik (4.1.20) koji za ovaj slučaj glasi

$$P_m^i u_{m-1,N}^{N+S,i} - 2R_m^i u_{m,N}^{N+S,i} + C_m^i u_{m+1,N}^{N+S,i} = G_m^i, \qquad (4.2.4)$$

u kojemu su koeficijenti i slobodni članovi dati izrazima

$$P_m^i = 1 - D_m^i, \quad C_m^i = 1 + D_m^i,$$

$$D_m^i = \frac{\Delta\eta}{2(B_N^{N+S,i-1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{2}\overset{**}{F}{}_N^{N+S,i-1} + f_{1,0}^{N+S}\Big)\phi_{m,N}^{N+S,i-1} + \frac{(m-1)\Delta\eta}{2}\overset{**}{T}{}_N^{N+S,i-1} + \overset{*}{F}{}_N^{N+S,i-1} f_{1,0}^{N+S}\cdot$$

$$\cdot\frac{\phi_{m,N}^{N+S,i-1} - \phi_{m,N}^{N+S-1}}{\Delta f_{1,0}} + f_{0,1;N}(\overset{*}{F}{}_N^{N+S,i-1} - f_{1,0}^{N+S})\frac{\phi_{m,N+1}^{N+S-1} - \phi_{m,N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}},$$

$$R_m^i = 1 + \frac{(\Delta\eta)^2}{2(B_N^{N+S,i-1})^2}\Big[f_{1,0}^{N+S} u_{m,N}^{N+S,i-1} + f_{0,1;N} + \frac{f_{1,0}^{N+S}}{\Delta f_{1,0}}(\overset{*}{F}{}_N^{N+S,i-1} u_{m,N}^{N+S,i-1} + \overset{*}{T}{}_N^{N+S,i-1}) +$$

$$+ (\overset{*}{F}{}_N^{N+S,i-1} - f_{1,0}^{N+S}) f_{0,1;N}\frac{u_{m,N+1}^{N+S-1} - u_{m,N-1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}},$$

$$G_{m}^{i} = -\frac{(\Delta\eta)^2}{(B_N^{N+S,i-1})^2}\Big[f_{1,0}^{N+S} + \dot{f}_{0,1;N} + U_{m,N}^{N+S,i-1}\, \overset{*}{F}{}_N^{N+S,i-1} f_{1,0}^{N+S} \frac{U_{m,N}^{N+S-1}}{\Delta f_{1,0}} +$$

$$+ U_{m,N}^{N+S-1}\, \overset{*}{T}{}_N^{N+S,i-1} \frac{f_{1,0}^{N+S}}{\Delta f_{1,0}} + (\overset{*}{T}{}_N^{N+S,i-1} - f_{0,1;N}) f_{0,1;N} \frac{U_{m,N-1}^{N+S-1} - U_{m,N+1}^{N+S-1}}{2\Delta f_{0,1}}\Big].$$

(4.2.5)

Ostali slojevi iste ravni obuhvaćeni sa $n=N+1$, kako za $\Delta f_{1,0}>0$ tako i za $\Delta f_{1,0}<0$, sračunavaju se primjenom već definisanih izraza i shema. Na ovaj način se čini pokušaj što boljeg približavanja prednjim zaustavnim tačkama ($\Delta f_{1,0}>0$) i tačkama odvajanja graničnog sloja ($\Delta f_{1,0}<0$).

Numerička integracija vrši se, na računaru DELTA 4850/160 (VAX/VMS), po programu I za oblast $P_1''$ i po programu II za oblast $P_2''$, napisanim na FORTRAN IV jeziku i na osnovu iznijetog algoritma. I u ovim oblastima korak $\Delta\eta$ je konstantan i iznosi 0,06. I ovdje, kao i u podprostorima $P_3$ i $P_4$, neadekvatan izbor koraka dovodi do izlaska iz oblasti integracije, tj. do prinudnog prekida sračunavanja, pa se zato optimalan izbor koraka vrši na osnovu pomoćnih proračuna čiji se rezultati prate na terminalu.

U podprostoru $P_1$ ($\Delta f_{1,0}>0$; $\Delta f_{0,1}>0$) koji praktično odgovara konfuzornoj oblasti graničnog sloja pri ubrzanom kretanju spoljašnje struje, za rešavanje jednačine (3.2.1) koristi se početna vrijednost koraka $\Delta f_{1,0}=0,005$ koja se približavanjem prednjoj zaustavnoj tački smanjuje na četvrtinu početne vrijednosti, dok je korak $\Delta f_{0,1}$ konstantan i iznosi 0.005. I u podprostoru $P_2$ ($\Delta f_{1,0}<0$; $\Delta f_{0,1}>0$), koji odgovara difuzornoj oblasti graničnog sloja pri ubrzanom kretanju spoljašnje struje, korak $\Delta f_{0,1}$ je konstantan i iznosi 0.005, dok se početna vrijednost koraka $\Delta f_{1,0}=0.005$ sa približavanjem tački odvajanja graničnog sloja smanjuje na polovinu pa na četvrtinu početne vrijednosti. Vrijednost parametra nestacionarnosti $(f_{0,1})_K$ do koje se išlo sa integracijom jednačine (3.2.1) u podprostoru $P_1$ iznosi 0.035, dok se u podprostoru $P_2$ moglo ići i sa većim vrijednostima za $(f_{0,1})_K$. U oba ova podprostora, kao što je već rečeno, rešenje jednačine nestacionarnog graničnog sloja na ravnoj ploči koristi se kao početni uslov za integraciju jednačine

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B,C,D,E,F,H)
      DIMENSION ARRI(161),ARPI(161),APSK(161,30),APSN(161,30),BRRI(161),
     6BRPI(161),BPSK(161,30),BPSN(161,30)
      DIMENSION FPSN(30),FPSK(30),FVSN(30),FVSK(30),TPSN(30),TPSK(30),
     1TVSN(30),TVSK(30)
      DIMENSION HRSN(30),HRSK(30),HVSN(30),HVSK(30)
1016  FORMAT(1H1)
1000  FORMAT(19X,'RESENJE JEDNACINA GRANICNOG SLOJA'//)
999   FORMAT(5X,61('*')/5X,'* REDNI *',25X,'*',25X,'*'/5X,'*',7X,
     1'*        POMOCNA   FUNKCIJA     *     STRUJNA  FINKCIJA   *'/5X,
     2'*   BROJ   *',25X,'*',25X,'*'/5X,61('*'))
1001  FORMAT(5X,'BRZ.PARAMETAR=',F6.4,'  K=',I3,'  BR.ITER=',I3)
1002  FORMAT(5X,'KORAK=',E11.4,'  PROM.G1=',E11.4,' H=',F8.5/)
1003  FORMAT(5X,'F=',F8.5,' FP=',F8.5,'KOF.TRENJA=',F8.5,' FUN.H=',F8.5,
     1'  T=',F8.5,'TR=',F8.5//)
1004  FORMAT(5X,'* ',I4,'  *',4X,F15.9,6X,'*'4X,F15.9,6X,'*')
1005  FORMAT(5X,61('*'))
      N1=161
      J=1
      J2=0
      N2=N1-1
      N3=N1-2
      L=1
      PRINT *,' UNESI DELFS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1013)DELFS
1013  FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI DELGS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1015)DELGS
1015  FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI C1 U FORMATU F6.3'
      READ(5,1017)C1
1017  FORMAT(F6.3)
      PRINT *,' UNESI C2 U FORMATU F7.4'
      READ(5,1019)C2
1019  FORMAT(F7.4)
      DELKS=0.05
      PRINT *,'UNESI GKR U FORMATU F6.3'
      READ(5,1021)GKR
1021  FORMAT(F6.3)
      PRINT *,'UNESI EPS U FORMATU F9.6'
      READ(5,1023)EPS
1023  FORMAT(F9.6)
      TRSPI=0.
      TVSPI=0.
      KPR=1
      DELK3=DELKS/5.
      N=0
      F1R=0.
      DELFR=DELFS
      DELGR=DELGS
      DO 2 M=1,N1
      ARPI(M)=0
      BRPI(M)=0
      CONTINUE
      ARRI(N1)=1.
      ARPI(N1)=1.
      BRRI(1)=0.
      ARRI(1)=0.
      BPSN(1,L)=0.
      APSN(1,L)=0.
      FRSPI=0.4408
```

```
      FVSPI=0.4408
      HVSPI=1.0
      HRSK(1)=2.5919
      HVSK(1)=1.0
      K1=1
 10   DELGR=DELGS
      L=1
      G1R=0.
      K3=1
      K=2
      IF(N)201,201,202
202   K=1
1     CONTINUE
      IF(N)6,6,4
4     IF(K3-KPR)5,5,6
5     DO 3 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
3     BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
6     CONTINUE
201   CONTINUE
13    ITER=0
11    A=DELKS/(2.*HVSPI**2)
      A1=A*DELKS
      A2=-2.*A1
      DO 20 M=2,N2
      DPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1))/DELGR+TVSPI*(M-1)*
     2DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSPI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/DELGR
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/DELGR)-G1R*
     2G1R/DELGR)
      CKJIM=1.+DPVIM
      AKJIM=1.-DPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSN(M,L)+B2*APSK(M,L1)+TRSPI*(F1R*
     1APSN(M,L)
     2/DELFR+G1R*APSK(M,L1)/DELGR)-G1R*G1R*APSK(M,L1)/DELGR)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
20    CONTINUE
      J1=0
131   M=N2
30    ARRI(M)=BRRI(M)+ARRI(M)*ARRI(M+1)
      M=M-1
      IF(M-2)31,30,30
31    DELAM=0
      O 45 M=2,N2
      ELA=ABS(ARRI(M)-ARPI(M))
      IF(DELAM-DELA)44,45,45
44    DELAM=DELA
45    CONTINUE
      BRRI(2)=3.*DELKS/8.*(ARRI(1)+3.*ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      BRRI(2)=BRRI(2)-DELKS/3.*(ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
```

```
      DO 50 M=1,N3
      BRRI(M+2)=DELK3*(ARRI(M)+4.*ARRI(M+1)+ARRI(M+2))+BRRI(M)
50    CONTINUE
      HRSRI=0.
      HVS=0.
      DO 55 M=1,N2
      HVS=HVS+(DELKS/2.)*((1.-ARRI(M))*ARRI(M)+(1.-ARRI(M+1))
     1*ARRI(M+1))
55    HRSRI=HRSRI+(DELKS/2.)*(2.-ARRI(M)-ARRI(M+1))
      HRSRI=HRSRI/HVS
      CETRI=HVS*(4.*ARRI(2)-3.*ARRI(1)-ARRI(3))/(2.*DELKS)
      FRSRI=2.*(CETRI-2.*F1R-HRSRI*F1R)
      IF(J1)122,122,123
122   FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSK(L1))/DELGR+F1R*(HVS-HVSN(L))/DELFR))+F1R*G1R*(
     2HVS-HVSK(L1))/DELGR)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)/(HRSPI+1.+
     12.*F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR+
     22.*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSK(L1))/DELGR)*((HRSTI+1.)/2.
     1+G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR+F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR)+(G1R*
     2G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R*(HVS-HVSK(
     3L1))/DELGR+F1R*(HVS-HVSN(L))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(
     4HRSRI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)
      GO TO 124
123   FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HVS-HVSN(
     2L))/DELR))+F1R*G1R*(HVS-HVSN(L1))/(FELGR*DELGR+DELFR*DELFR)
     3**0.5)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSN(L1))/(DELG*DELGR+DELFR*
     1DELFR)**0.5)/(HRSRI+1.+2.*F1R*(HRSPI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(
     2HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*
     1DELFR)**0.5)*((HRSRI+1.)/2.+G1R*(HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR
     2+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR)+(G1R*G1R*(HRSRI-
     3HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R
     4*(HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HVS-HVSN(L
     5))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(
     6HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
124   CONTINUE
      DELF=ABS(FRSRI-FRSPI)
70    DO 75 M=2,N1
      ARPI(M)=ARRI(M)
75    BRPI(M)=BRRI(M)
      FRSPI=FRSRI
      FVSPI=FVSRI
      TRSPI=TRSRI
      TVSPI=TVSRI
      HVSPI=HVS
      ITER=ITER+1
      IF(J1)82,82,83
82    IF(DELAM-EPS)72,72,11
72    IF(DELF-EPS)66,66,11
83    IF(DELAM-EPS)92,92,111
92    IF(DELF-EPS)66,66,111
66    DO 61 M=2,N1
      IF(K3-KPR)62,62,60
```

```
60      ARPI(M)=ARRI(M)+ARRI(M)-APSK(M,L1)
        BRPI(M)=BRRI(M)+BRRI(M)-BPSK(M,L1)
62      APSN(M,L)=ARRI(M)
        BPSN(M,L)=BRRI(M)
        APSK(M,L)=ARRI(M)
61      BPSK(M,L)=BRRI(M)
        IF(K3-KPR)63,63,64
64      FRSPI=FRSRI+FRSRI-FPSK(L1)
        FVSPI=FVSRI+FVSRI-FVSK(L1)
        TRSPI=TRSRI+TRSRI-TPSK(L1)
        TVSPI=TVSRI+TVSRI-TVSK(L1)
        HVSPI=HVS+HVS-HVSK(L1)
63      FPSN(L)=FRSRI
        FPSK(L)=FRSRI
        FVSN(L)=FVSRI
        FVSK(L)=FVSRI
        HRSN(L)=HRSRI
        HRSK(L)=HRSRI
        TPSN(L)=TRSRI
        TPSK(L)=TRSRI
        TVSN(L)=TVSRI
        TVSK(L)=TVSRI
        HVSN(L)=HVS
        HVSK(L)=HVS
        L=L+1
        L1=L-1
101     WRITE(6,1013)
        WRITE(14,1018)
        WRITE(6,1000)
        WRITE(14,1000)
        WRITE(6,1001)F1R,K,ITER
        WRITE(14,1001)F1R,K,ITER
        WRITE(6,1002)DELFR,G1R,HVS
        WRITE(14,1002)DELFR,G1R,HVS
        WRITE(6,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSPI
        WRITE(14,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
        WRITE(6,999)
        WRITE(14,999)
        WRITE(6,1004)(M,ARPI(M),BRRI(M),M=1,N1,16)
        WRITE(14,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,16)
        WRITE(6,1005)
        WRITE(14,1005)
        K1=K1+2
102     CONTINUE
        GO TO 3100
3000    IF(C2-F1R) 101,1101,164
1101    DELFR=DELFS/4.
3100    IF(FRSRI-C1)163,163,164
163     J2=1
164     IF(J2)86,86,87
86      IF(GKR-G1R)120,120,121
87      IF(GKR-G1R)141,141,121
121     G1R=G1R+DELGR
        GO TO 1
120     F1R=F1R+DELFR
        N=N+1
        GO TO 10
141     G1R=J*DELGR
        IF(GKR-G1R)2000,2000,1999
```

```
      L=J+1
      L1=J
      DO 108 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
108   BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
      K3=J+1
      KPR=K3
      J=J+1
      J1=1
      J2=1
      N=N+1
111   DO 220 M=2,N2
      BPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1))/(DELGR*DELGR+
     2DELFR*DELFR)**0.5+TVSPI*(M-1)*DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSPI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/(DELGR*DELGR
     1+DELFR*DELFR)**0.5)-G1R*G1R/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      CKJIM=1.+BPVIM
      AKJIM=1.-BPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSN(M,L)+B2*APSK(M,L1)+TRSPI*(F1R*APSN
     1(M,L)/DELFR+G1R*APSK(M,L1)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)-
     2G1R*G1R*APSK(M,L1)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
220   CONTINUE
      GO TO 151
2000  CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B,C,D,E,F,H)
      DIMENSION ARRI(161),ARPI(161),APSK(161,30),APSN(161,30),BRPI(161),
     &BRPI(161),BPSK(161,30),BPSN(161,30)
      DIMENSION FPSN(30),FPSK(30),FVSN(30),FVSK(30),TPSN(30),TPSK(30),
     1TVSN(30),TVSK(30)
      DIMENSION HRSN(30),HRSK(30),HVSN(30),HVSK(30)
1018  FORMAT(1H1)
1000  FORMAT(19X,'RESENJE JEDNACINA GRANICNOG SLOJA'//)
999   FORMAT(5X,61('*')/5X,'* REDNI *',25X,'*',25X,'*'/5X,'*',7X,
     1'*        POMOCNA   FUNKCIJA     *     STRUJNA   FINKCIJA   *'/5X,
     2'*  BROJ   *',25X,'*',25X,'*'/5X,61('*'))
1001  FORMAT(5X,'SRZ.PARAMETAR=',F8.4,'  K=',I3,'   BR.ITER=',I3)
1002  FORMAT(5X,'KORAK=',E11.4,'   PROM.G1=',E11.4,' H=',F8.5/)
1003  FORMAT(5X,'F=',F8.5,' FR=',F8.5,'KOF.TRENJA=',F8.5,' FUN.H=',F8.5,JN.H=
     1'  T=',F8.5,'TR=',F8.5//)
1004  FORMAT(5X,'* ',I4,'  *',4X,F15.9,6X,'*'4X,F15.9,6X,'*')
1005  FORMAT(5X,61('*'))
      N1=161
      J=1
      J2=0
      N2=N1-1
      N3=N1-2
      L=1
      PRINT *,' UNESI DELFS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1013)DELFS
013   FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI DELGS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1015)DELGS
015   FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI C1 U FORMATU F6.3'
      READ(5,1017)C1
017   FORMAT(F6.3)
      PRINT *,' UNESI C2 U FORMATU F7.4'
      READ(5,1019)C2
019   FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI C3 U FORMATU F6.3'
      READ(5,1020)C3
020   FORMAT(F6.3)
      DELKS=0.05
      PRINT *,'UNESI GKR U FORMATU F6.3'
      READ(5,1021)GKR
021   FORMAT(F6.3)
      PRINT *,'UNESI EPS U FORMATU F9.6'
      READ(5,1023)EPS
023   FORMAT(F9.6)
      TRSPI=0.
      TVSPI=0.
      KPR=1
      DELK3=DELKS/3.
      N=0
      F1R=0.
      DELFR=-DELFS
      DELGR=DELGS
      DO 2 M=1,N1
      ARPI(M)=0
      BRPI(M)=0
      CONTINUE
      ARRI(N1)=1.
      ARPI(N1)=1.
      BRRI(1)=0.
      ARRI(1)=0.
```

```
      BPSN(1,L)=0.
      APSN(1,L)=0.
      FRSPI=0.4408
      FVSPI=0.4408
      HVSPI=1.0
      HRSK(1)=2.5919
      HVSK(1)=1.0
      K1=1
 10   DELGR=DELGS
      L=1
      G1R=0.
      K3=1
      K=2
      IF(N)201,201,202
202   K=1
1     CONTINUE
      IF(N)6,6,4
4     IF(K3-KPR)5,5,6
5     DO 8 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
8     BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
6     CONTINUE
201   CONTINUE
13    ITER=0
11    A=DELKS/(2.*HVSPI**2)
      A1=A*DELKS
      A2=-2.*A1
      DO 20 M=2,N2
      BPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1))/DELGR+TVSPI*(M-1)*
     2DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSPI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/DELGR
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/DELGR)-G1R*
     2G1R/DELGR)
      CKJIM=1.+BPVIM
      AKJIM=1.-BPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSN(M,L)+B2*APSK(M,L1)+TRSPI*(F1R*
     1APSN(M,L)
     2/DELFR+G1R*APSK(M,L1)/DELGR)-G1R*G1R*APSK(M,L1)/DELGR)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
20    CONTINUE
      J1=0
131   M=N2
30    ARRI(M)=BRRI(M)+ARRI(M)*ARRI(M+1)
      M=M-1
      IF(M-2)31,30,30
31    DELAM=0
      DO 45 M=2,N2
      DELA=ABS(ARRI(M)-ARPI(M))
      IF(DELAM-DELA)44,45,45
44    DELAM=DELA
45    CONTINUE
```

```
      BRRI(2)=3.*DELKS/8.*(ARRI(1)+3.*ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      BRRI(2)=BRRI(2)-DELKS/3.*(ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      DO 50 M=1,N3
      BRRI(M+2)=DELK3*(ARRI(M)+4.*ARRI(M+1)+ARRI(M+2))+BRRI(M)
 0    CONTINUE
      HRSRI=0.
      HVS=0.
      DO 55 M=1,N2
      HVS=HVS+(DELKS/2.)*((1.-ARRI(M))*ARRI(M)+(1.-ARRI(M+1))
     1*ARRI(M+1))
 5    HRSRI=HRSRI+(DELKS/2.)*(2.-ARRI(M)-ARRI(M+1))
      HRSRI=HRSRI/HVS
      CETRI=HVS*(4.*ARRI(2)-3.*ARRI(1)-ARRI(3))/(2.*DELKS)
      FRSRI=2.*(CETRI-2.*F1R-HRSRI*F1R)
      IF(J1)122,122,123
 122  FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSK(L1))/DELGR+F1R*(HVS-HVSN(L))/DELFR))+F1R*G1R*(
     2HVS-HVSK(L1))/DELGR)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)/(HRSRI+1.+
     12.*F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR+
     22.*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSK(L1))/DELGR)*((HRSTI+1.)/2.
     1+G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR+F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR)+(G1R*
     2G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R*(HVS-HVSK(
     3L1))/DELGR+F1R*(HVS-HVSN(L))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(
     4HRSRI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELGR)
      GO TO 124
 23   FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HVS-HVSN(
     2L))/DELR))+F1R*G1R*(HVS-HVSN(L1))/(FELGR*DELGR+DELFR*DELFR)
     3**0.5)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSN(L1))/(DELG*DELGR+DELFR*
     1DELFR)**0.5)/(HRSRI+1.+2.*F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(
     2HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*
     1DELFR)**0.5)*((HRSRI+1.)/2.+G1R*(HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR
     2+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR)+(G1R*G1R*(HRSRI-
     3HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R
     4*(HVS-HVSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5+F1R*(HVS-HVSN(L
     5))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELFR+2.*G1R*(
     6HRSRI-HRSN(L1))/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
 24   CONTINUE
      DELF=ABS(FRSRI-FRSPI)
 0    DO 75 M=2,N1
      ARPI(M)=ARRI(M)
 5    BRPI(M)=BRRI(M)
      FRSPI=FRSRI
      FVSPI=FVSRI
      TRSPI=TRSRI
      TVSPI=TVSRI
      HVSPI=HVS
      ITER=ITER+1
      IF(J1)82,82,83
 2    IF(DELAM-EPS)72,72,11
 2    IF(DELF-EPS)66,66,11
 3    IF(DELAM-EPS)92,92,111
 2    IF(DELF-EPS)66,66,111
 6    DO 61 M=2,N1
      IF(K3-KPR)62,62,60
 0    ARPI(M)=ARRI(M)+ARRI(M)-APSK(M,L1)
      BRPI(M)=BRRI(M)+BRRI(M)-BPSK(M,L1)
```

```
62      APSN(M,L)=ARRI(M)
        BPSN(M,L)=BRRI(M)
        APSK(M,L)=ARRI(M)
61      BPSK(M,L)=BRRI(M)
        IF(K3-KPR)63,63,64
64      FRSPI=FRSRI+FRSRI-FPSK(L1)
        FVSPI=FVSRI+FVSRI-FVSK(L1)
        TRSPI=TRSRI+TRSRI-TPSK(L1)
        TVSPI=TVSRI+TVSRI-TVSK(L1)
        HVSPI=HVS+HVS-HVSK(L1)
63      FPSN(L)=FRSRI
        FPSK(L)=FRSRI
        FVSN(L)=FVSRI
        FVSK(L)=FVSRI
        HRSN(L)=HRSRI
        HRSK(L)=HRSRI
        TPSN(L)=TRSRI
        TPSK(L)=TRSRI
        TVSN(L)=TVSRI
        TVSK(L)=TVSRI
        HVSN(L)=HVS
        HVSK(L)=HVS
        L=L+1
        L1=L-1
101     WRITE(6,1018)
        WRITE(14,1018)
        WRITE(6,1000)
        WRITE(14,1000)
        WRITE(6,1001)F1R,K,ITER
        WRITE(14,1001)F1R,K,ITER
        WRITE(6,1002)DELFR,G1R,HVS
        WRITE(14,1002)DELFR,G1R,HVS
        WRITE(6,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
        WRITE(14,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
        WRITE(6,999)
        WRITE(14,999)
        WRITE(6,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,15)
        WRITE(14,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,15)
        WRITE(6,1005)
        WRITE(14,1005)
        K1=K1+2
102     CONTINUE
        IF(CETRI-C3)162,162,161
162     DELFR=-DELFS/2.
161     IF(CETRI-C2)172,172,200
172     DELFR=-DELFS/4.
200     IF(CETRI-C1)163,163,164
163     J2=1
164     IF(J2)86,86,87
86      IF(G1R-GKR)120,120,121
87      IF(G1R-GKR)141,141,121
121     G1R=G1R+DELGR
        GO TO 1
120     F1R=F1R+DELFR
        N=N+1
        GO TO 10
141     G1R=J*DELGR
        IF(GKR-G1R)2000,2000,1999
1999    F1R=F1R-DELFS
        DELFR=-DELFS
```

```
      L=J+1
      L1=J
      DO 108 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
108   BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
      K3=J+1
      KPR=K3
      J=J+1
      J1=1
      J2=1
      N=N+1
111   DO 220 M=2,N2
      BPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1))/(DELGR*DELGR+
     2DELFR*DELFR)**0.5+TVSPI*(M-1)*DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSPI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/(DELGR*DELGR
     1+DELFR*DELFR)**0.5)-G1R*G1R/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      CKJIM=1.+BPVIM
      AKJIM=1.-BPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSN(M,L)+B2*APSK(M,L1)+TRSPI*(F1R*APSN
     1(M,L)/DELFR+G1R*APSK(M,L1)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)-
     2G1R*G1R*APSK(M,L1)/(DELGR*DELGR+DELFR*DELFR)**0.5)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
220   CONTINUE
      GO TO 131
2000  CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAM III

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B,C,D,E,F,H)
      DIMENSION ARRI(161),ARPI(161),APSK(161,30),APSN(161,30),BRRI(161),
     $BRPI(161),BPSK(161,30),BPSN(161,30)
      DIMENSION FPSN(30),FPSK(30),FVSN(30),FVSK(30),TPSN(30),TPSK(30),
     1TVSN(30),TVSK(30)
      DIMENSION HRSN(30),HRSK(30),HVSN(30),HVSK(30)
1018  FORMAT(1H1)
1000  FORMAT(19X,'RESENJE JEDNACINA GRANICNOG SLOJA'//)
999   FORMAT(5X,61('*')/5X,'* REDNI *',25X,'*',25X,'*'/5X,'*',7X,
     1'*        POMOCNA   FUNKCIJA     *     STRUJNA   FINKCIJA   *'/5X,
     2'*  BROJ   *',25X,'*',25X,'*'/5X,61('*'))
1001  FORMAT(5X,'BRZ.PARAMETAR=',F8.4,'   K=',I3,'   BR.ITER=',I3)
1002  FORMAT(5X,'KORAK=',E11.4,'   PROM.G1=',E11.4,' H=',F8.5/)
1003  FORMAT(5X,'F=',F8.5,'FR=',F8.5,' KOF.TRENJA=',F8.5,' FUN.H=',F8.5,
     1'  T=',F8.5,'TR=',F8.5//)
1004  FORMAT(5X,'* ',I4,'   *',4X,F15.9,6X,'*'4X,F15.9,6X,'*')
1005  FORMAT(5X,61('*'))
      N1=161
      N2=N1-1
      N3=N1-2
      L=1
      PRINT *,' UNESI DELFS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1013)DELFS
1013  FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI DELGS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1015)DELGS
1015  FORMAT(F7.4)
      DELKS=0.06
      PRINT *,'UNESI TKR U FORMATU F6.3'
      READ(5,1021)TKR
1021  FORMAT(F6.3)
      PRINT *,'UNESI EPS U FORMATU F9.6'
      READ(5,1023)EPS
1023  FORMAT(F9.6)
      TRSPI=0.
      TVSPI=0.
      KPR=1
      DELK3=DELKS/3.
      N=0
      G1R=0.
7     DELGR=DELGS
3     DO 2 M=1,N1
      ARPI(M)=0
      BRPI(M)=0
2     CONTINUE
      ARRI(N1)=1.
      ARPI(N1)=1.
      BRRI(1)=0.
      BPSN(1,L)=0.
      APSN(1,L)=0.
      FRSPI=0.4408
      FVSPI=0.4408
      HVSPI=1.0
      HRSK(1)=2.5919
      HVSK(1)=1.0
      K1=1
10    DELFR=DELFS
      L=1
```

```
      F1R=0.
      K3=1
      K=2
      IF(N)201,201,202
202   K=1
1     CONTINUE
      IF(N)6,6,4
4     IF(K3-KPR)5,5,6
5     DO 8 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
8     BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
6     CONTINUE
201   CONTINUE
13    ITER=0
11    A=DELKS/(2.*HVSPI**2)
      A1=A*DELKS
      A2=-2.*A1
      DO 20 M=2,N2
      BPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1)
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))/DELGR+TVSPI*(M-1)*
     2DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSPI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/DELGR
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/DELGR)-G1R*
     2G1R/DELGR)
      CKJIM=1.+BPVIM
      AKJIM=1.-BPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSK(M,L1)+B2*APSN(M,L)+TRSPI*(F1R*
     1APSK(M,L1)
     2/DELFR+G1R*APSN(M,L)/DELGR)-G1R*G1R*APSN(M,L)/DELGR)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
20    CONTINUE
      M=N2
30    ARRI(M)=BRRI(M)+ARRI(M)*ARRI(M+1)
      M=M-1
      IF(M-2)31,30,30
31    DELAM=0
      DO 45 M=2,N2
      DELA=ABS(ARRI(M)-ARPI(M))
      IF(DELAM-DELA)44,45,45
44    DELAM=DELA
45    CONTINUE
      BRRI(2)=3.*DELKS/8.*(ARRI(1)+3.*ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      BRRI(2)=BRRI(2)-DELKS/3.*(ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      DO 50 M=1,N3
      BRRI(M+2)=DELKS*(ARRI(M)+4.*ARRI(M+1)+ARRI(M+2))+BRRI(M)
50    CONTINUE
      HRSRI=0.
      HVS=0.
      DO 55 M=1,N2
      HVS=HVS+(DELKS/2.)*((1.-ARRI(M))*ARRI(M)+(1.-ARRI(M+1))
     1*ARRI(M+1))
55    HRSRI=HRSRI+(DELKS/2.)*(2.-ARRI(M)-ARRI(M+1))
      HRSRI=HRSRI/HVS
```

```
      CETRI=0.
      CETRI=HVS*(4.*ARRI(2)-3.*ARRI(1)-ARRI(3))/(2.*DELKS)
      FRSRI=0.
      FRSRI=2.*(CETRI-2.*F1R-HRSRI*F1R)
 122  FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSN(L))/DELGR+F1R*(HVS-HVSK(L1))/DELFR))+F1R*G1R*(
     2HVS-HVSN(L))/DELGR)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)/(HRSRI+1.+
     12.*F1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELFR+
     22.*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSN(L))/DELGR)*((HRSRI+1.)/2.+
     1G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR+F1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELFR)+(G1R*
     2G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R*(HVS-HVSN(
     3L))/DELGR+F1R*(HVS-HVSK(L1))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(
     4HRSRI-HRSK(L1))/DELFR+2.*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)
      DELF=ABS(FRSRI-FRSPI)
 70   DO 75 M=2,N1
      ARPI(M)=ARRI(M)
 75   BRPI(M)=BRRI(M)
      FRSPI=FRSRI
      FVSPI=FVSRI
      TRSPI=TRSRI
      TVSPI=TVSRI
      HVSPI=HVS
      ITER=ITER+1
      IF(DELAM-EPS)72,72,11
 72   IF(DELF-EPS)66,66,11
 66   DO 61 M=2,N1
      IF(K3-KPR)62,62,60
 60   ARPI(M)=ARRI(M)+ARPI(M)-APSK(M,L1)
      BRPI(M)=BRRI(M)+BRRI(M)-BPSK(M,L1)
 62   APSN(M,L)=ARRI(M)
      BPSN(M,L)=BRRI(M)
      APSK(M,L)=ARRI(M)
 61   BPSK(M,L)=BRRI(M)
      IF(K3-KPR)63,63,64
 64   FRSPI=FRSRI+FRSRI-FPSK(L1)
      FVSPI=FVSRI+FVSRI-FVSK(L1)
      TRSPI=TRSRI+TRSRI-TPSK(L1)
      TVSPI=TVSRI+TVSRI-TVSK(L1)
      HVSPI=HVS+HVS-HVSK(L1)
 63   FPSN(L)=FRSRI
      FPSK(L)=FRSRI
      FVSN(L)=FVSRI
      FVSK(L)=FVSRI
      HRSN(L)=HRSRI
      HRSK(L)=HRSRI
      TPSN(L)=TRSRI
      TPSK(L)=TRSRI
      TVSN(L)=TVSRI
      TVSK(L)=TVSRI
      HVSN(L)=HVS
      HVSK(L)=HVS
      L=L+1
      L1=L-1
 101  WRITE(6,1018)
      WRITE(14,1018)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(14,1000)
      WRITE(6,1001)F1R,K,ITER
      WRITE(14,1001)F1R,K,ITER
```

```
      WRITE(6,1002)DELFR,G1R,HVS
      WRITE(14,1002)DELFR,G1R,HVS
      WRITE(6,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
      WRITE(14,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
      WRITE(6,999)
      WRITE(14,999)
      WRITE(6,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,4)
      WRITE(14,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,4)
      WRITE(6,1005)
      WRITE(14,1005)
      K1=K1+2
      IF(F1R+0.02)119,119,121
119   DELFR=DELFS/2.
      IF(F1R+0.04)172,172,121
172   DELFR=DELFS/4.
121   IF(CETRI-0.04)120,120,122
120   IF(TKR-G1R)130,2000,2000
130   G1R=G1R+DELGR
      N=N+1
      GO TO 10
122   F1R=F1R+DELFR
      K3=K3+1
      GO TO 1
2000  CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAM IV

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B,C,D,E,F,H)
      DIMENSION ARRI(161),ARPI(161),APSK(161,30),APSN(161,30),BRRI(16
     &BRPI(161),BPSK(161,30),BPSN(161,30)
      DIMENSION FPSN(30),FPSK(30),FVSN(30),FVSK(30),TPSN(30),TPSK(30),
     1TVSN(30),TVSK(30)
      DIMENSION HRSN(30),HRSK(30),HVSN(30),HVSK(30)
1018  FORMAT(1H1)
1000  FORMAT(19X,'RESENJE JEDNACINA GRANICNOG SLOJA'//)
999   FORMAT(5X,61('*')/5X,'* REDNI *',25X,'*',25X,'*'/5X,'*',7X,
     1'*       POMOCNA  FUNKCIJA     *     STRUJNA   FINKCIJA   *'/5X,
     2'*  BROJ  *',25X,'*',25X,'*'/5X,61('*'))
1001  FORMAT(5X,'URZ.PARAMETAR=',F8.4,'  K=',I3,'  BR.ITER=',I3)
1002  FORMAT(5X,'KORAK=',E11.4,'  PROM.G1=',E11.4,' H=',F8.5/)
1003  FORMAT(5X,'F=',F8.5,'FP=',F8.5,' KOF.TRENJA=',F8.5,' FUN.H=',F9
     1'  T=',F8.5,'TR=',F8.5//)
1004  FORMAT(5X,'* ',I4,'  *',4X,F15.9,6X,'*'4X,F15.9,6X,'*')
1005  FORMAT(5X,61('*'))
      N1=161
      N2=N1-1
      N3=N1-2
      L=1
      PRINT *,' UNESI DELFS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1013)DELFS
1013  FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI DELGS U FORMATU F7.4'
      READ(5,1015)DELGS
1015  FORMAT(F7.4)
      PRINT *,' UNESI C1 U FORMATU F6.3'
      READ(5,1017)C1
1017  FORMAT(F6.3)
      PRINT *,' UNESI C2 U FORMATU F7.4'
      READ(5,1019)C2
1019  FORMAT(F7.4)
      DELKS=0.05
      PRINT *,'UNESI TKR U FORMATU F6.3'
      READ(5,1021)TKR
1021  FORMAT(F6.3)
      PRINT *,'UNESI EPS U FORMATU F9.6'
      READ(5,1023)EPS
1023  FORMAT(F9.6)
      TRSPI=0.
      TVSPI=0.
      KPR=1
      DELK3=DELKS/3.
      N=0
      G1R=0.
7     DELGR=DELGS
3     DO 2 M=1,N1
      ARPI(M)=0
      BRPI(M)=0
2     CONTINUE
      ARRI(N1)=1.
      ARPI(N1)=1.
      BRRI(1)=0.
      BPSN(1,L)=0.
      APSN(1,L)=0.
      FRSPI=0.4408
      FVSPI=0.4408
      HVSPI=1.0
```

```
      HRSK(1)=2.5919
      HVSK(1)=1.0
      K1=1
 10   DELFR=DELFS
      L=1
      F1R=0.
      K3=1
      K=2
      IF(N)201,201,202
 202  K=1
 1    CONTINUE
      IF(N)6,6,4
 4    IF(K3-KPR)5,5,6
 5    DO 8 M=1,N1
      ARPI(M)=APSN(M,L)
 8    BRPI(M)=BPSN(M,L)
      FRSPI=FPSN(L)
      FVSPI=FVSN(L)
      TRSPI=TPSN(L)
      TVSPI=TVSN(L)
      HVSPI=HVSN(L)
 6    CONTINUE
 201  CONTINUE
 15   ITER=0
 11   A=DELKS/(2.*HVSPI**2)
      A1=A*DELKS
      A2=-2.*A1
      DO 20 M=2,N2
      BPVIM=A*((FVSPI/2.+F1R)*BRPI(M)+FRSPI*F1R*(BRPI(M)-BPSK(M,L1))
     1/DELFR+(FRSPI-F1R)*G1R*(BRPI(M)-BPSN(M,L))/DELGR+TVSPI*(M-1)*
     2DELKS/2.)
      BKJIM=F1R*ARPI(M)
      B1=FRSFI*BKJIM/DELFR
      B2=(FRSPI-F1R)*G1R*ARPI(M)/DELGR
      BKJIM=1.+A1*(BKJIM+G1R+B1+B2+TRSPI*(F1R/DELFR+G1R/DELGR)-G1R*
     2G1R/DELGR)
      CKJIM=1.+BPVIM
      AKJIM=1.-BPVIM
      GKJIM=A2*(F1R+G1R+B1*APSK(M,L1)+B2*APSN(M,L)+TRSPI*(F1R*
     1APSK(M,L1)
     2/DELFR+G1R*APSN(M,L)/DELGR)-G1R*G1R*APSN(M,L)/DELGR)
      APVIM=2.*BKJIM-AKJIM*ARRI(M-1)
      BRRI(M)=(AKJIM*BRRI(M-1)-GKJIM)/APVIM
      ARRI(M)=CKJIM/APVIM
 20   CONTINUE
      M=N2
 30   ARRI(M)=BRRI(M)+ARRI(M)*ARRI(M+1)
      M=M-1
      IF(M-2)31,30,30
 31   DELAM=0
      DO 45 M=2,N2
      DELA=ABS(ARRI(M)-ARRI(M))
      IF(DELAM-DELA)44,45,45
 44   DELAM=DELA
 45   CONTINUE
      BRRI(2)=3.*DELKS/3.*(ARRI(1)+3.*ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      BRRI(2)=BRRI(2)-DELKS/3.*(ARRI(2)+3.*ARRI(3)+ARRI(4))
      DO 50 M=1,N3
      BRRI(M+2)=DELK3*(ARRI(M)+4.*ARRI(M+1)+ARRI(M+2))+BRRI(M)
```

```
 53   CONTINUE
      HRSRI=0.
      HVS=0.
      DO 55 M=1,N2
      HVS=HVS+(DELKS/2.)*((1.-ARRI(M))*ARRI(M)+(1.-ARRI(M+1))
     1*ARRI(M+1))
 55   HRSRI=HRSRI+(DELKS/2.)*(2.-ARRI(M)-ARRI(M+1))
      HRSRI=HRSRI/HVS
      CETRI=0.
      CETRI=HVS*(4.*ARRI(2)-3.*ARRI(1)-ARRI(3))/(2.*DELKS)
      FRSRI=0.
      FRSRI=2.*(CETRI-2.*F1R-HRSRI*F1R)
 122  FVSRI=(2./HVS)*(2.*(CETRI-(2.+HRSRI)*F1R)*(HVS/2.-(G1R*(
     1HVS-HVSN(L))/DELGR+F1R*(HVS-HVSK(L1))/DELFR))+F1R*G1R*(
     2HVS-HVSN(L))/DELGR)
      TRSRI=-2*(2.*G1R-G1R*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)/(HRSRI+1.+
     12.*F1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELFR+
     22.*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)
      TVSRI=(4./HVS)*((G1R*G1R*(HVS-HVSN(L))/DELGR)*((HRSRI+1.)/2.+
     1G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR+F1R*(HRSRI-HRSK(L1))/DELFR)+(G1R*
     2G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR-2.*G1R)*(0.5*HVS-(G1R*(HVS-HVSN(
     3L))/DELGR+F1R*(HVS-HVSK(L1))/DELFR)))/(HRSRI+1.+2.*F1R*(
     4HRSRI-HRSK(L1))/DELFR+2.*G1R*(HRSRI-HRSN(L))/DELGR)
      DELF=ABS(FRSRI-FRSPI)
 70   DO 75 M=2,N1
      ARPI(M)=ARRI(M)
 75   BRPI(M)=BRRI(M)
      FRSPI=FRSRI
      FVSPI=FVSRI
      TRSPI=TRSRI
      TVSPI=TVSRI
      HVSPI=HVS
      ITER=ITER+1
      IF(DELAM-EPS)72,72,11
 72   IF(DELF-EPS)66,66,11
 66   DO 61 M=2,N1
      IF(K3-KPR)62,62,60
 60   ARPI(M)=ARRI(M)+ARRI(M)-APSK(M,L1)
      BRPI(M)=BRRI(M)+BRRI(M)-BPSK(M,L1)
 62   APSN(M,L)=ARRI(M)
      BPSN(M,L)=BRRI(M)
      APSK(M,L)=ARRI(M)
 61   BPSK(M,L)=BRRI(M)
      IF(K3-KPR)63,63,64
 64   FRSPI=FRSRI+FRSRI-FPSK(L1)
      FVSPI=FVSPI+FVSRI-FVSK(L1)
      TRSPI=TRSRI+TRSRI-TPSK(L1)
      TVSPI=TVSRI+TVSPI-TVSK(L1)
      HVSPI=HVS+HVS-HVSK(L1)
 63   FPSN(L)=FRSRI
      FPSK(L)=FRSRI
      FVSN(L)=FVSRI
      FVSK(L)=FVSRI
      HRSN(L)=HRSRI
      HRSK(L)=HRSRI
      TPSN(L)=TRSRI
      TPSK(L)=TRSRI
```

```
      TVSN(L)=TVSRI
      TVSK(L)=TVSRI
      HVSN(L)=HVS
      HVSK(L)=HVS
      L=L+1
      L1=L-1
101   WRITE(6,1018)
      WRITE(14,1018)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(14,1000)
      WRITE(6,1001)F1R,K,ITER
      WRITE(14,1001)F1R,K,ITER
      WRITE(6,1002)DELFR,G1R,HVS
      WRITE(14,1002)DELFR,G1R,HVS
      WRITE(6,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
      WRITE(14,1003)FRSRI,FVSRI,CETRI,HRSRI,TRSRI,TVSRI
      WRITE(6,999)
      WRITE(14,999)
      WRITE(6,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,4)
      WRITE(14,1004)(M,ARRI(M),BRRI(M),M=1,N1,4)
      WRITE(6,1005)
      WRITE(14,1005)
      K1=K1+2
102   IF(FRSRI-C1)119,119,121
119   IF(F1R-C2)2000,2000,120
120   IF(G1R-TKR)2000,2000,125
125   G1R=G1R+DELGR
      N=N+1
      GO TO 10
121   F1R=F1R+DELFR
      K3=K3+1
      GO TO 1
2000  CONTINUE
      STOP
      END
```

(3.2.1).

U podprostoru $P_3$ ($\Delta f_{1,0}<0$; $\Delta f_{0,1}<0$) koji odgovara difuzornoj oblasti graničnog sloja sa usporenim spoljašnjim strujanjem početna vrijednost koraka $\Delta f_{1,0}$ iznosi 0.005 i smanjuje se na polovinu pa na četvrtinu približavanjem tački odvajanja graničnog sloja, dok u podprostoru $P_4$ ($\Delta f_{1,0}>0$; $\Delta f_{0,1}<0$) koji se odnosi na konfuzornu oblast graničnog sloja sa usporenim spoljašnjim strujanjem, integracija jednačine (3.2.1) se realizuje sa konstantnim koracima $\Delta f_{1,0}=0.0025$. Za oba ova podprostora korak $\Delta f_{0,1}$ ima stalnu vrijednost 0.005. Vrijednost parametra nestacionarnosti $(f_{0,1})_N$ do koje se išlo sa integracijom u podprostorima $P_3$ i $P_4$ iznosi - 0.080, a kao početni uslov za integraciju u ovim podprostorima koristi se, kao što je već rečeno, rešenje jednačine stacionarnog graničnog sloja na tijelu proizvoljnog oblika.

Za vrijeme integracije u podprostorima $P_1$, $P_2$, $P_3$ i $P_4$ sračunavaju se univerzalne veličine graničnog sloja $\zeta$, $\Phi''(o)$, $F^*$, $F^{**}$, $H^{**}$, B, A, $T^*$, $T^{**}$, $f_{1,0}/B^2$, $f_{0,1}/B^2$, u/U, $\Phi$ i iste daju u disertaciji posredstvom odgovarajućih tabela T1 do T26.

Radi lakšeg praćenja promjena univerzalnih veličina graničnog sloja iste se daju posredstvom odgovarajućih grafika. Na slici 5 daje se raspodjela bezdimenzionog koeficijenta $\zeta$ u funkciji dinamičkog parametra $f_{1,0}$ za različite vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$. Za vrijednost parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ jednaku nuli, kriva $\zeta$ odgovara stacionarnom graničnom sloju i ona bi sada mogla da posluži kao reper za položaj tačke odvajanja graničnog sloja pri nestacionarnim kretanjima. Naime, u slučaju ubrzanih kretanja, a to su pozitivne vrijednosti parametara nestacionarnosti $f_{0,1}$ koje u ovom radu imaju vrijednost $f_{0,1}$=0.005, 0.010,...,0.035 , tačka odvajanja graničnog sloja pomjera se prema većim negativnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$, tj. udaljava se od prednje zaustavne tačke, dok se u slučaju usporenih kretanja datih sa negativnim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ koje u radu konkretno iznose $f_{0,1}$=-0.005, -0.010,...,-0.080, tačka odvajanja pomjera prema manjim negativnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$, tj. približava se prednjoj zaustavnoj tački. Prema tome, u poredjenju sa stacionarnim kretanjem, pri ubrzanom kretanju odvajanje se dešava u oblasti veće difuzornosti, tj. oblasti sa

T 1

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $\zeta$ 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.38429 | 0.37431 | 0.36213 | 0.35132 | 0.33642 | 0.32843 | 0.31425 | 0.30294 | 0.28848 |
| 0.030 | 0.38002 | 0.36720 | 0.35422 | 0.34168 | 0.33142 | 0.31423 | 0.29984 | 0.29133 | 0.27670 |
| 0.025 | 0.37511 | 0.36166 | 0.34713 | 0.33476 | 0.31823 | 0.30386 | 0.28735 | 0.27865 | 0.26484 |
| 0.020 | 0.36943 | 0.35714 | 0.34243 | 0.32727 | 0.31191 | 0.29639 | 0.28069 | 0.26484 | 0.25291 |
| 0.015 | 0.36502 | 0.35174 | 0.33651 | 0.32104 | 0.30542 | 0.28973 | 0.27391 | 0.25799 | 0.24183 |
| 0.010 | 0.36098 | 0.34605 | 0.33049 | 0.31747 | 0.29893 | 0.28304 | 0.26697 | 0.25101 | 0.23464 |
| 0.005 | 0.35553 | 0.34026 | 0.32444 | 0.30859 | 0.29268 | 0.27652 | 0.26047 | 0.24404 | 0.22732 |
| 0.000 | 0.35056 | 0.33438 | 0.31871 | 0.30255 | 0.28662 | 0.27026 | 0.25387 | 0.23707 | 0.22001 |
| -0.005 | 0.34452 | 0.32759 | 0.31094 | 0.29460 | 0.27840 | 0.26227 | 0.24621 | 0.23024 | 0.21384 |
| -0.010 | – | 0.32022 | 0.30375 | 0.28722 | 0.27058 | 0.25391 | 0.23717 | 0.22029 | 0.20314 |
| -0.015 | – | 0.31343 | 0.29634 | 0.27971 | 0.26316 | 0.24668 | 0.22995 | 0.21286 | 0.19541 |
| -0.020 | – | 0.30757 | 0.28990 | 0.27265 | 0.25572 | 0.23194 | 0.22255 | 0.20540 | 0.18781 |
| -0.025 | – | – | 0.28297 | 0.26548 | 0.24822 | 0.23140 | 0.21478 | 0.19765 | 0.18002 |
| -0.030 | – | – | 0.27616 | 0.25830 | 0.24074 | 0.22361 | 0.20681 | 0.18964 | 0.17201 |
| -0.035 | – | – | 0.26933 | 0.25113 | 0.23320 | 0.21571 | 0.19863 | 0.18140 | 0.16376 |
| -0.040 | – | – | – | 0.24392 | 0.22557 | 0.20767 | 0.19029 | 0.17304 | 0.15526 |
| -0.045 | – | – | – | 0.23672 | 0.21791 | 0.19951 | 0.18176 | 0.16441 | 0.14652 |
| -0.050 | – | – | – | 0.22842 | 0.21016 | 0.19126 | 0.17305 | 0.15551 | 0.13748 |
| -0.055 | – | – | – | – | 0.20237 | 0.18289 | 0.16417 | 0.14631 | 0.12811 |
| -0.060 | – | – | – | – | 0.19448 | 0.17437 | 0.15507 | 0.13682 | 0.11841 |
| -0.065 | – | – | – | – | 0.18651 | 0.16568 | 0.14659 | 0.12694 | 0.10826 |
| -0.070 | – | – | – | – | – | 0.15687 | 0.13601 | 0.11660 | 0.09757 |
| -0.075 | – | – | – | – | – | – | 0.12600 | 0.10570 | 0.08620 |
| -0.080 | – | – | – | – | – | – | – | 0.09631 | 0.07400 |

T 2

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | ζ: -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.27664 | 0.26344 | 0.24464 | 0.22678 | 0.20764 | 0.18905 | 0.17405 | 0.15405 | 0.15400 |
| 0.030 | 0.26394 | 0.24848 | 0.23109 | 0.21331 | 0.19465 | 0.17565 | 0.16065 | 0.15002 | 0.13945 |
| 0.025 | 0.25094 | 0.23543 | 0.21844 | 0.20079 | 0.18222 | 0.16231 | 0.14749 | 0.13631 | 0.12518 |
| 0.020 | 0.23951 | 0.22362 | 0.20666 | 0.18893 | 0.17015 | 0.15030 | 0.13459 | 0.12283 | 0.11108 |
| 0.015 | 0.22913 | 0.21267 | 0.19547 | 0.17752 | 0.15637 | 0.13795 | 0.12171 | 0.10926 | 0.09678 |
| 0.010 | 0.21958 | 0.20254 | 0.18488 | 0.16548 | 0.14680 | 0.12561 | 0.10863 | 0.09528 | 0.08220 |
| 0.005 | 0.21069 | 0.19304 | 0.17474 | 0.15562 | 0.13512 | 0.11316 | 0.09483 | 0.08023 | 0.06240 |
| 0.000 | 0.20231 | 0.18402 | 0.16504 | 0.14516 | 0.12373 | 0.10056 | 0.07386 | 0.05944 | 0.03835 |
| -0.005 | 0.19732 | 0.17969 | 0.15858 | 0.13880 | 0.11402 | 0.08915 | 0.06764 | 0.04832 | 0.01233 |
| -0.010 | 0.18563 | 0.16744 | 0.14819 | 0.12750 | 0.10479 | 0.07842 | 0.05049 | 0.02971 | - |
| -0.015 | 0.17697 | 0.15790 | 0.13753 | 0.11537 | 0.09032 | 0.06043 | 0.02621 | - | - |
| -0.020 | 0.16912 | 0.14935 | 0.12802 | 0.10445 | 0.07823 | 0.04050 | - | - | - |
| -0.025 | 0.16135 | 0.14096 | 0.11878 | 0.09375 | 0.06341 | 0.01923 | - | - | - |
| -0.030 | 0.15340 | 0.13235 | 0.10925 | 0.08249 | 0.04640 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.14517 | 0.12343 | 0.09923 | 0.07019 | 0.03347 | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.13663 | 0.11405 | 0.08850 | 0.05614 | 0.01632 | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.12776 | 0.10422 | 0.07683 | 0.03895 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.11852 | 0.09375 | 0.06396 | 0.02816 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.10887 | 0.08256 | 0.04899 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.09862 | 0.07030 | 0.02976 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.08766 | 0.05644 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.07583 | 0.03983 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.06264 | 0.01572 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.04724 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 3

| $f_{01}$ \ $f_{10}$ | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\phi''(0)$ | | | | | | | | |
| 0.035 | 0.54786 | 0.52777 | 0.50696 | 0.48908 | 0.46713 | 0.45084 | 0.42893 | 0.41095 | 0.38943 |
| 0.030 | 0.51193 | 0.49400 | 0.47399 | 0.45564 | 0.44107 | 0.41491 | 0.39073 | 0.37813 | 0.35660 |
| 0.025 | 0.48346 | 0.46350 | 0.44035 | 0.42362 | 0.40015 | 0.37974 | 0.35586 | 0.34349 | 0.32645 |
| 0.020 | 0.45985 | 0.44132 | 0.42202 | 0.40061 | 0.37895 | 0.35724 | 0.33656 | 0.31571 | 0.29729 |
| 0.015 | 0.43099 | 0.41015 | 0.39216 | 0.37300 | 0.35165 | 0.33081 | 0.31161 | 0.29076 | 0.27013 |
| 0.010 | 0.41098 | 0.39207 | 0.36811 | 0.35221 | 0.32546 | 0.30608 | 0.28721 | 0.26751 | 0.25113 |
| 0.005 | 0.38570 | 0.36637 | 0.34637 | 0.32734 | 0.30845 | 0.28826 | 0.26927 | 0.25053 | 0.23017 |
| 0.000 | 0.36442 | 0.34640 | 0.32781 | 0.30603 | 0.30200 | 0.27068 | 0.25308 | 0.23298 | 0.21499 |
| -0.005 | 0.34054 | 0.32149 | 0.30212 | 0.28535 | 0.26784 | 0.25035 | 0.23491 | 0.22073 | 0.20659 |
| -0.010 | – | 0.30468 | 0.28689 | 0.26972 | 0.25316 | 0.23689 | 0.22081 | 0.20407 | 0.18971 |
| -0.015 | – | 0.28953 | 0.27264 | 0.25729 | 0.24156 | 0.22487 | 0.20917 | 0.19166 | 0.17613 |
| -0.020 | – | 0.27514 | 0.25965 | 0.24323 | 0.22675 | 0.20559 | 0.19706 | 0.18128 | 0.16531 |
| -0.025 | – | – | 0.24736 | 0.23157 | 0.21608 | 0.20135 | 0.18667 | 0.17161 | 0.15642 |
| -0.030 | – | – | 0.23727 | 0.22159 | 0.20595 | 0.19061 | 0.17610 | 0.16126 | 0.14672 |
| -0.035 | – | – | 0.23019 | 0.21392 | 0.19778 | 0.18218 | 0.16707 | 0.15145 | 0.13735 |
| -0.040 | – | – | – | 0.20324 | 0.18705 | 0.17199 | 0.15750 | 0.14229 | 0.12793 |
| -0.045 | – | – | – | 0.19391 | 0.17448 | 0.16325 | 0.14854 | 0.13451 | 0.12018 |
| -0.050 | – | – | – | 0.18706 | 0.17165 | 0.15557 | 0.14066 | 0.12577 | 0.11211 |
| -0.055 | – | – | – | – | 0.16476 | 0.14865 | 0.13243 | 0.11811 | 0.10349 |
| -0.060 | – | – | – | – | 0.15795 | 0.14092 | 0.12503 | 0.10962 | 0.09504 |
| -0.065 | – | – | – | – | 0.15061 | 0.13369 | 0.11817 | 0.10165 | 0.08668 |
| -0.070 | – | – | – | – | – | 0.12566 | 0.10874 | 0.09302 | 0.07805 |
| -0.075 | – | – | – | – | – | – | 0.10322 | 0.08403 | 0.06820 |
| -0.080 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0.05851 |

T 4

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $\phi''(0)$ -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.37768 | 0.35694 | 0.33091 | 0.30651 | 0.28060 | 0.25530 | 0.23508 | 0.22136 | 0.20758 |
| 0.030 | 0.33839 | 0.31766 | 0.29520 | 0.27175 | 0.24848 | 0.22493 | 0.20594 | 0.19329 | 0.18089 |
| 0.025 | 0.30572 | 0.28731 | 0.26791 | 0.24799 | 0.22692 | 0.20302 | 0.18427 | 0.16667 | 0.15803 |
| 0.020 | 0.28020 | 0.26360 | 0.24620 | 0.22694 | 0.20448 | 0.17192 | 0.16232 | 0.14854 | 0.13467 |
| 0.015 | 0.25691 | 0.23974 | 0.22216 | 0.20368 | 0.18232 | 0.16033 | 0.14156 | 0.12774 | 0.11316 |
| 0.010 | 0.23589 | 0.21818 | 0.20164 | 0.18381 | 0.16478 | 0.14145 | 0.12357 | 0.10870 | 0.09402 |
| 0.005 | 0.21707 | 0.19938 | 0.18080 | 0.16200 | 0.14182 | 0.11979 | 0.10154 | 0.08732 | 0.06930 |
| 0.000 | 0.19853 | 0.18304 | 0.16607 | 0.14733 | 0.12629 | 0.10396 | 0.07729 | 0.06261 | 0.04057 |
| -0.005 | 0.18907 | 0.17129 | 0.15069 | 0.13167 | 0.10731 | 0.08340 | 0.06321 | 0.04507 | 0.01149 |
| -0.010 | 0.17220 | 0.15558 | 0.13741 | 0.11818 | 0.09712 | 0.07267 | 0.04675 | 0.02749 | - |
| -0.015 | 0.16081 | 0.14373 | 0.12536 | 0.10495 | 0.08209 | 0.05467 | 0.02361 | - | - |
| -0.020 | 0.15070 | 0.13353 | 0.11461 | 0.09313 | 0.06956 | 0.03584 | - | - | - |
| -0.025 | 0.14040 | 0.12381 | 0.10491 | 0.08230 | 0.05559 | - | - | - | - |
| -0.030 | 0.13027 | 0.11411 | 0.09586 | 0.07154 | 0.03975 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.12250 | 0.10482 | 0.08397 | 0.05905 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.11383 | 0.09569 | 0.07395 | 0.04672 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.10439 | 0.08544 | 0.06296 | 0.03199 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.09591 | 0.07617 | 0.05207 | 0.02305 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.08774 | 0.06618 | 0.03898 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.07904 | 0.05633 | 0.02363 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.07016 | 0.04519 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.06054 | 0.03188 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.04969 | 0.01249 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.03723 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 5

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\zeta$ | | | | | | | |
| 0.035 | 0.14752 | 0.13092 | 0.11987 | 0.10242 | 0.09043 | 0.07212 | 0.05910 | 0.02812 |
| 0.030 | 0.13141 | 0.11299 | 0.10093 | 0.08763 | 0.07871 | 0.06107 | 0.03751 | - |
| 0.025 | 0.11939 | 0.10103 | 0.08999 | 0.07092 | 0.05919 | 0.03091 | - | - |
| 0.020 | 0.10034 | 0.08149 | 0.07022 | 0.05413 | 0.03013 | - | - | - |
| 0.015 | 0.08141 | 0.06997 | 0.05911 | 0.02996 | - | - | - | - |
| 0.010 | 0.07122 | 0.05103 | 0.02900 | 0.00463 | - | - | - | - |
| 0.005 | 0.05091 | 0.02510 | 0.00240 | - | - | - | - | - |

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\phi''(0)$ | | | | | | | |
| 0.035 | 0.29491 | 0.27784 | 0.25912 | 0.22503 | 0.20089 | 0.16072 | 0.11932 | 0.05894 |
| 0.030 | 0.25113 | 0.22811 | 0.21001 | 0.17168 | 0.15104 | 0.11314 | 0.05966 | - |
| 0.025 | 0.20934 | 0.18421 | 0.16241 | 0.12501 | 0.08080 | 0.03913 | - | - |
| 0.020 | 0.15918 | 0.14001 | 0.11006 | 0.07511 | 0.04021 | - | - | - |
| 0.015 | 0.12817 | 0.10422 | 0.07721 | 0.03490 | - | - | - | - |
| 0.010 | 0.09194 | 0.06148 | 0.03926 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 0.05892 | - | - | - | - | - | - | - |

T 6

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $F^*$ 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.10477 | 0.15832 | 0.20813 | 0.26347 | 0.31712 | 0.37091 | 0.42570 | 0.48171 | 0.53897 |
| 0.030 | 0.09231 | 0.14733 | 0.19643 | 0.25072 | 0.30405 | 0.35763 | 0.41225 | 0.46815 | 0.52540 |
| 0.025 | 0.07813 | 0.13547 | 0.18261 | 0.23616 | 0.29050 | 0.34395 | 0.39862 | 0.45442 | 0.51167 |
| 0.020 | 0.06605 | 0.12184 | 0.17292 | 0.22429 | 0.27661 | 0.33003 | 0.38458 | 0.44042 | 0.49782 |
| 0.015 | 0.05590 | 0.10940 | 0.15944 | 0.21032 | 0.26231 | 0.31565 | 0.37029 | 0.42635 | 0.48367 |
| 0.010 | 0.04674 | 0.09627 | 0.14572 | 0.19619 | 0.24802 | 0.30121 | 0.35564 | 0.41159 | 0.46298 |
| 0.005 | 0.03388 | 0.08287 | 0.13192 | 0.18241 | 0.23425 | 0.28715 | 0.34193 | 0.39764 | 0.45464 |
| 0.000 | 0.02438 | 0.07128 | 0.12889 | 0.17889 | 0.22993 | 0.27965 | 0.33398 | 0.38328 | 0.43992 |
| -0.005 | 0.00769 | 0.05275 | 0.10019 | 0.15005 | 0.20189 | 0.25564 | 0.31133 | 0.36902 | 0.42762 |
| -0.010 | - | 0.03516 | 0.08350 | 0.13326 | 0.18450 | 0.23743 | 0.29211 | 0.34842 | 0.40629 |
| -0.015 | - | 0.01888 | 0.06597 | 0.11590 | 0.16781 | 0.22166 | 0.27679 | 0.33310 | 0.39083 |
| -0.020 | - | 0.00503 | 0.05095 | 0.09965 | 0.15100 | 0.20505 | 0.26098 | 0.3176[illegible] | 0.37561 |
| -0.025 | - | - | 0.03460 | 0.08304 | 0.13400 | 0.18796 | 0.24433 | 0.30160 | 0.36004 |
| -0.030 | - | - | 0.01853 | 0.06642 | 0.11703 | 0.17072 | 0.22720 | 0.2[illegible]499 | 0.34402 |
| -0.035 | - | - | 0.00239 | 0.04979 | 0.09988 | 0.15317 | 0.2[illegible]059 | 0.25736 | 0.3[illegible]751 |
| -0.040 | - | - | - | 0.03302 | 0.08249 | 0.13527 | 0.19157 | 0.25044 | 0.31053 |
| -0.045 | - | - | - | 0.01626 | 0.06496 | 0.11706 | 0.17312 | 0.23246 | 0.29503 |
| -0.050 | - | - | - | 0.00028 | 0.04722 | 0.09861 | 0.15423 | 0.21387 | 0.27496 |
| -0.055 | - | - | - | - | 0.02930 | 0.07983 | 0.13490 | 0.19462 | 0.25622 |
| -0.060 | - | - | - | - | 0.01112 | 0.06064 | 0.11504 | 0.14473 | 0.23681 |
| -0.065 | - | - | - | - | - | 0.04100 | 0.09451 | 0.15397 | 0.21652 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 0.02101 | 0.07323 | 0.13217 | 0.19513 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | 0.00075 | 0.05112 | 0.10914 | 0.17240 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | 0.02941 | 0.08135 | 0.14800 |

T 7

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | F* -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.59653 | 0.65375 | 0.71272 | 0.77563 | 0.82381 | 0.89258 | 0.95462 | 0.98681 | 1.12974 |
| 0.030 | 0.58656 | 0.64187 | 0.69851 | 0.75567 | 0.81287 | 0.88135 | 0.93885 | 0.97802 | 1.01129 |
| 0.025 | 0.57145 | 0.63164 | 0.68502 | 0.74149 | 0.80803 | 0.87026 | 0.92181 | 0.96620 | 1.00387 |
| 0.020 | 0.56040 | 0.62076 | 0.67517 | 0.73557 | 0.79597 | 0.86198 | 0.90754 | 0.95319 | 0.99229 |
| 0.015 | 0.54937 | 0.60951 | 0.66044 | 0.72254 | 0.78558 | 0.85033 | 0.90174 | 0.94366 | 0.98225 |
| 0.010 | 0.53097 | 0.59081 | 0.65185 | 0.71426 | 0.77275 | 0.83587 | 0.89521 | 0.93039 | 0.97077 |
| 0.005 | 0.51383 | 0.57627 | 0.63408 | 0.69042 | 0.76002 | 0.82579 | 0.89053 | 0.92390 | 0.96590 |
| 0.000 | 0.49768 | 0.55665 | 0.61714 | 0.67932 | 0.74290 | 0.81340 | 0.87992 | 0.92370 | 0.96053 |
| -0.005 | 0.48807 | 0.54872 | 0.61123 | 0.67574 | 0.73240 | 0.80156 | 0.86865 | 0.91469 | 0.94720 |
| -0.010 | 0.46566 | 0.52625 | 0.58790 | 0.65079 | 0.71519 | 0.78116 | 0.85855 | 0.90098 | - |
| -0.015 | 0.44898 | 0.50871 | 0.56943 | 0.63132 | 0.69440 | 0.77066 | 0.84320 | - | - |
| -0.020 | 0.43386 | 0.49299 | 0.55295 | 0.61392 | 0.67751 | 0.75477 | 0.83288 | - | - |
| -0.025 | 0.41890 | 0.47759 | 0.53701 | 0.59702 | 0.65775 | 0.73220 | - | - | - |
| -0.030 | 0.40362 | 0.46185 | 0.52071 | 0.57960 | 0.63654 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.38785 | 0.44564 | 0.50376 | 0.56103 | 0.61732 | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.37150 | 0.42868 | 0.48583 | 0.54057 | 0.59813 | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.35456 | 0.41102 | 0.46664 | 0.51689 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.33696 | 0.39233 | 0.44589 | 0.50179 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.31863 | 0.37255 | 0.42240 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.29922 | 0.35110 | 0.40312 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.27856 | 0.32720 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.25635 | 0.30916 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.23175 | 0.29005 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.20327 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 8

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | H** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| 0.035 | 2.17213 | 2.18432 | 2.21779 | 2.22042 | 2.25641 | 2.28236 | 2.31980 | 2.34860 | 2.37902 |
| 0.030 | 2.18130 | 2.20641 | 2.22037 | 2.25433 | 2.27997 | 2.31708 | 2.34575 | 2.37584 | 2.40748 |
| 0.025 | 2.19832 | 2.91937 | 2.24003 | 2.27874 | 2.31466 | 2.34282 | 2.37233 | 2.40371 | 2.44661 |
| 0.020 | 2.20509 | 2.23173 | 2.26620 | 2.30251 | 2.32817 | 2.36923 | 2.41997 | 2.43245 | 2.47634 |
| 0.015 | 2.21340 | 2.24334 | 2.27978 | 2.31753 | 2.35656 | 2.38671 | 2.43839 | 2.46161 | 2.51715 |
| 0.010 | 2.22014 | 2.25595 | 2.29381 | 2.33291 | 2.37305 | 2.41448 | 2.45751 | 2.50172 | 2.54892 |
| 0.005 | 2.23238 | 2.26897 | 2.30793 | 2.34773 | 2.38871 | 2.43142 | 2.47536 | 2.52216 | 2.57173 |
| 0.000 | 2.24217 | 2.28196 | 2.32111 | 2.36309 | 2.40376 | 2.44785 | 2.49380 | 2.54289 | 2.59548 |
| -0.005 | 2.25846 | 2.30304 | 2.34734 | 2.39154 | 2.43625 | 2.48156 | 2.52723 | 2.57284 | 2.62154 |
| -0.010 | - | 2.32335 | 2.36677 | 2.41173 | 2.45828 | 2.50630 | 2.55587 | 2.60754 | 2.66208 |
| -0.015 | - | 2.34275 | 2.38934 | 2.43511 | 2.48134 | 2.52831 | 2.57783 | 2.65071 | 2.68718 |
| -0.020 | - | 2.35791 | 2.40715 | 2.45660 | 2.50564 | 2.55380 | 2.60284 | 2.65615 | 2.71386 |
| -0.025 | - | - | 2.42781 | 2.47914 | 2.53058 | 2.58087 | 2.63067 | 2.68431 | 2.74263 |
| -0.030 | - | - | 2.44821 | 2.50180 | 2.55568 | 2.60854 | 2.66033 | 2.71465 | 2.77556 |
| -0.035 | - | - | 2.46880 | 2.52474 | 2.58151 | 2.63774 | 2.69184 | 2.74725 | 2.80689 |
| -0.040 | - | - | - | 2.54822 | 2.60824 | 2.66770 | 2.72505 | 2.78140 | 2.84253 |
| -0.045 | - | - | - | 2.57194 | 2.63561 | 2.69922 | 2.76012 | 2.81802 | 2.88076 |
| -0.050 | - | - | - | 2.59672 | 2.66385 | 2.73180 | 2.79695 | 2.85739 | 2.92202 |
| -0.055 | - | - | - | - | 2.69291 | 2.76583 | 2.83590 | 2.89989 | 2.96688 |
| -0.060 | - | - | - | - | 2.72307 | 2.80161 | 2.87731 | 2.94552 | 3.01555 |
| -0.065 | - | - | - | - | 2.75435 | 2.83941 | 2.92186 | 2.99556 | 3.06893 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 2.87874 | 2.96969 | 3.05093 | 3.12893 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | 2.91946 | 3.02192 | 3.11278 | 3.19693 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | 3.08083 | 3.17128 | 3.27537 |

T 9

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $\bar{H}^{**}$ -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 2.39224 | 2.44152 | 2.47402 | 2.52576 | 2.58535 | 2.64559 | 2.69939 | 2.72469 | 2.76094 |
| 0.030 | 2.43347 | 2.48272 | 2.52214 | 2.57557 | 2.63567 | 2.70033 | 2.74675 | 2.78658 | 2.82764 |
| 0.025 | 2.47829 | 2.51938 | 2.56901 | 2.62385 | 2.68586 | 2.75534 | 2.80596 | 2.85054 | 2.89693 |
| 0.020 | 2.51865 | 2.56302 | 2.61419 | 2.67131 | 2.73672 | 2.81139 | 2.86679 | 2.91684 | 2.96957 |
| 0.015 | 2.55587 | 2.60445 | 2.65852 | 2.71869 | 2.78843 | 2.86943 | 2.93078 | 2.98760 | 3.04800 |
| 0.010 | 2.59021 | 2.64321 | 2.70144 | 2.76624 | 2.84149 | 2.93041 | 2.99966 | 3.06538 | 3.13359 |
| 0.005 | 2.62219 | 2.67989 | 2.74347 | 2.81460 | 2.89774 | 2.99559 | 3.07755 | 3.15624 | 3.20689 |
| 0.000 | 2.65226 | 2.71192 | 2.78027 | 2.85923 | 2.95449 | 3.06489 | 3.21082 | 3.29881 | 3.44239 |
| -0.005 | 2.67202 | 2.73367 | 2.80118 | 2.87678 | 3.00323 | 3.13218 | 3.27322 | 3.41281 | 3.56238 |
| -0.010 | 2.71997 | 2.78427 | 2.85869 | 2.94739 | 3.05605 | 3.21261 | 3.38547 | 3.54377 | - |
| -0.015 | 2.75182 | 2.82295 | 2.90616 | 3.00725 | 3.13754 | 3.33168 | 3.64321 | - | - |
| -0.020 | 2.78063 | 2.85732 | 2.94863 | 3.06266 | 3.21052 | 3.54807 | - | - | - |
| -0.025 | 2.80989 | 2.89191 | 2.99092 | 3.11916 | 3.30935 | 3.65231 | - | - | - |
| -0.030 | 2.84119 | 2.92903 | 3.03685 | 3.18269 | 3.43734 | - | - | - | - |
| -0.035 | 2.87516 | 2.96953 | 3.08825 | 3.25828 | 3.55121 | - | - | - | - |
| -0.040 | 2.91210 | 3.01444 | 3.14721 | 3.35366 | 3.67283 | - | - | - | - |
| -0.045 | 2.95225 | 3.06432 | 3.21623 | 3.48742 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 2.99617 | 3.12078 | 3.29933 | 3.56847 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 3.04473 | 3.18550 | 3.40684 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 3.09948 | 3.26242 | 3.56731 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 3.16186 | 3.35805 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 3.23470 | 3.48730 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 3.32364 | 3.71532 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 3.43983 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 10

| $H^{**}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{1,0}$ \ $f_{0,1}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
| 0.035 | 2.82013 | 2.86210 | 2.94113 | 3.03421 | 3.16008 | 3.29194 | 3.44028 | 3.62115 |
| 0.030 | 2.89910 | 2.94414 | 3.02171 | 3.13005 | 3.24115 | 3.40411 | 3.60217 | - |
| 0.025 | 2.96712 | 3.21121 | 3.10188 | 3.22125 | 3.38177 | 3.58117 | - | - |
| 0.020 | 3.04017 | 3.10819 | 3.21004 | 3.33887 | 3.50223 | - | - | - |
| 0.015 | 3.12613 | 3.20204 | 3.28991 | 3.48011 | - | - | - | - |
| 0.010 | 3.23811 | 3.30031 | 3.40886 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 3.36016 | - | - | - | - | - | - | - |

| $F^{*}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{1,0}$ \ $f_{0,1}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
| 0.035 | 1.07892 | 1.09848 | 1.14002 | 1.18021 | 1.21043 | 1.24887 | 1.29114 | 1.31244 |
| 0.030 | 1.06242 | 1.08712 | 1.12103 | 1.16722 | 1.19532 | 1.22131 | 1.28131 | - |
| 0.025 | 1.05137 | 1.06613 | 1.10200 | 1.15137 | 1.18241 | 1.20022 | - | - |
| 0.020 | 1.04028 | 1.05522 | 1.08867 | 1.13433 | 1.17382 | - | - | - |
| 0.015 | 1.03011 | 1.03188 | 1.07754 | 1.12003 | - | - | - | - |
| 0.010 | 1.01897 | 1.02107 | 1.06211 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 1.00144 | - | - | - | - | - | - | - |

T 11

| | B | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{0.1}$ \ $f_{1.0}$ | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| 0.035 | 0.70143 | 0.70922 | 0.71431 | 0.71832 | 0.72018 | 0.72848 | 0.73263 | 0.73717 | 0.74459 |
| 0.030 | 0.74233 | 0.74332 | 0.74731 | 0.74988 | 0.75139 | 0.75735 | 0.76738 | 0.77045 | 0.77593 |
| 0.025 | 0.77588 | 0.78028 | 0.78830 | 0.79022 | 0.79527 | 0.80018 | 0.80748 | 0.81122 | 0.81126 |
| 0.020 | 0.80337 | 0.80926 | 0.81141 | 0.81692 | 0.82309 | 0.82966 | 0.83375 | 0.83866 | 0.85071 |
| 0.015 | 0.84693 | 0.85032 | 0.85810 | 0.86069 | 0.86853 | 0.87582 | 0.87902 | 0.88728 | 0.89522 |
| 0.010 | 0.87833 | 0.88263 | 0.89780 | 0.90137 | 0.91848 | 0.92473 | 0.92953 | 0.93831 | 0.93432 |
| 0.005 | 0.92178 | 0.92874 | 0.93868 | 0.94270 | 0.94887 | 0.95928 | 0.96731 | 0.97409 | 0.98763 |
| 0.000 | 0.96196 | 0.96501 | 0.97225 | 0.98862 | 0.94906 | 0.99844 | 1.00310 | 1.01755 | 1.02331 |
| -0.005 | 1.01169 | 1.01897 | 1.02919 | 1.03242 | 1.03942 | 1.04758 | 1.04810 | 1.04306 | 1.03507 |
| -0.010 | - | 1.05098 | 1.05877 | 1.06487 | 1.06881 | 1.07182 | 1.07411 | 1.07947 | 1.07078 |
| -0.015 | - | 1.08254 | 1.08693 | 1.08715 | 1.08942 | 1.09699 | 1.09933 | 1.10943 | 1.10943 |
| -0.020 | - | 1.11787 | 1.11649 | 1.12094 | 1.12773 | 1.12816 | 1.12936 | 1.13302 | 1.13613 |
| -0.025 | - | - | 1.14396 | 1.14642 | 1.14875 | 1.14922 | 1.15057 | 1.15171 | 1.15087 |
| -0.030 | - | - | 1.16390 | 1.16566 | 1.16890 | 1.17311 | 1.17438 | 1.17598 | 1.17240 |
| -0.035 | - | - | 1.17001 | 1.17392 | 1.17905 | 1.18403 | 1.18892 | 1.19774 | 1.19224 |
| -0.040 | - | - | - | 1.20014 | 1.20595 | 1.20747 | 1.20815 | 1.21614 | 1.21360 |
| -0.045 | - | - | - | 1.22074 | 1.22088 | 1.22212 | 1.22363 | 1.22225 | 1.21915 |
| -0.050 | - | - | - | 1.22107 | 1.22433 | 1.22938 | 1.23027 | 1.23645 | 1.22631 |
| -0.055 | - | - | - | - | 1.22828 | 1.23037 | 1.23969 | 1.23873 | 1.23781 |
| -0.060 | - | - | - | - | 1.23125 | 1.23740 | 1.24023 | 1.24808 | 1.24593 |
| -0.065 | - | - | - | - | 1.23833 | 1.23920 | 1.24052 | 1.24875 | 1.24892 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 1.24829 | 1.25074 | 1.25344 | 1.25013 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | - | 1.25597 | 1.25781 | 1.26384 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | - | 1.26468 |

T 12

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | B: -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.73246 | 0.73804 | 0.73928 | 0.73987 | 0.73998 | 0.74050 | 0.74038 | 0.74108 | 0.74189 |
| 0.030 | 0.77999 | 0.78197 | 0.78282 | 0.78496 | 0.78336 | 0.78091 | 0.78003 | 0.77612 | 0.77079 |
| 0.025 | 0.82073 | 0.81942 | 0.81534 | 0.80967 | 0.80301 | 0.80193 | 0.80040 | 0.79857 | 0.79212 |
| 0.020 | 0.85478 | 0.84333 | 0.83939 | 0.83250 | 0.83211 | 0.83911 | 0.82916 | 0.82688 | 0.82479 |
| 0.015 | 0.89186 | 0.88708 | 0.87983 | 0.87154 | 0.86861 | 0.86039 | 0.85977 | 0.85531 | 0.85184 |
| 0.010 | 0.93085 | 0.92829 | 0.91688 | 0.90029 | 0.89086 | 0.88802 | 0.87941 | 0.87653 | 0.87427 |
| 0.005 | 0.97058 | 0.96820 | 0.96648 | 0.96062 | 0.95274 | 0.94460 | 0.93392 | 0.91880 | 0.90036 |
| 0.000 | 1.01902 | 1.00535 | 0.99380 | 0.98525 | 0.97974 | 0.96727 | 0.95564 | 0.94937 | 0.94521 |
| -0.005 | 1.04365 | 1.04901 | 1.05233 | 1.05413 | 1.06247 | 1.06889 | 1.07014 | 1.07217 | 1.07326 |
| -0.010 | 1.07797 | 1.07618 | 1.07846 | 1.07882 | 1.07899 | 1.07904 | 1.08001 | 1.08054 | - |
| -0.015 | 1.10051 | 1.09856 | 1.09706 | 1.09926 | 1.10018 | 1.10535 | 1.11025 | - | - |
| -0.020 | 1.12222 | 1.11842 | 1.11703 | 1.12154 | 1.12466 | 1.13001 | - | - | - |
| -0.025 | 1.14918 | 1.13848 | 1.13214 | 1.13913 | 1.14062 | - | - | - | - |
| -0.030 | 1.17757 | 1.15987 | 1.13945 | 1.15296 | 1.16729 | - | - | - | - |
| -0.035 | 1.18508 | 1.17745 | 1.18177 | 1.18869 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 1.20028 | 1.19187 | 1.19672 | 1.20159 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 1.22379 | 1.21975 | 1.22028 | 1.21755 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 1.23575 | 1.23076 | 1.22842 | 1.22133 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 1.24084 | 1.24740 | 1.25669 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 1.24767 | 1.24808 | 1.25916 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 1.24942 | 1.24891 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 1.25244 | 1.24919 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 1.26042 | 1.58674 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 1.26871 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 13

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | A | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| 0.035 | 1.52359 | 1.54916 | 1.58419 | 1.59497 | 1.62502 | 1.66265 | 1.69955 | 1.73132 | 1.77139 |
| 0.030 | 1.61934 | 1.64007 | 1.65930 | 1.69047 | 1.71314 | 1.75484 | 1.80068 | 1.83046 | 1.86803 |
| 0.025 | 1.70563 | 1.73173 | 1.76581 | 1.80071 | 1.84078 | 1.87467 | 1.91561 | 1.94994 | 1.98484 |
| 0.020 | 1.77150 | 1.80605 | 1.83882 | 1.88096 | 1.91629 | 1.96565 | 2.01765 | 2.04048 | 2.10664 |
| 0.015 | 1.87459 | 1.90755 | 1.95628 | 1.99467 | 2.04674 | 2.09033 | 2.14339 | 2.18414 | 2.25340 |
| 0.010 | 1.95011 | 1.99117 | 2.05938 | 2.10281 | 2.17959 | 2.23274 | 2.28433 | 2.34739 | 2.38151 |
| 0.005 | 2.05776 | 2.10728 | 2.16179 | 2.21320 | 2.26657 | 2.33241 | 2.39444 | 2.45681 | 2.53992 |
| 0.000 | 2.15687 | 2.20211 | 2.25670 | 2.33620 | 2.28131 | 2.44403 | 2.50153 | 2.58752 | 2.65598 |
| -0.005 | 2.28486 | 2.30130 | 2.41586 | 2.46907 | 2.53228 | 2.59963 | 2.64879 | 2.68363 | 2.71347 |
| -0.010 | - | 2.44179 | 2.50586 | 2.56818 | 2.62743 | 2.68630 | 2.74528 | 2.81476 | 2.85050 |
| -0.015 | - | 2.53612 | 2.59704 | 2.64733 | 2.70322 | 2.77353 | 2.83388 | 2.91859 | 2.98124 |
| -0.020 | - | 2.63583 | 2.68756 | 2.75370 | 2.82681 | 2.88109 | 2.93954 | 3.00947 | 3.08329 |
| -0.025 | - | - | 2.77732 | 2.84213 | 2.90700 | 2.96599 | 3.02677 | 3.09155 | 3.15541 |
| -0.030 | - | - | 2.84947 | 2.91625 | 2.98733 | 3.06010 | 3.12424 | 3.19237 | 3.25172 |
| -0.035 | - | - | 2.88852 | 2.96384 | 3.21776 | 3.12316 | 3.20038 | 3.29047 | 3.34648 |
| -0.040 | - | - | - | 3.05822 | 3.26143 | 3.22117 | 3.29227 | 3.38257 | 3.44969 |
| -0.045 | - | - | - | 3.13967 | 3.30765 | 3.29877 | 3.37736 | 3.44432 | 3.51208 |
| -0.050 | - | - | - | 3.17077 | 3.35278 | 3.35842 | 3.44100 | 3.53302 | 3.58330 |
| -0.055 | - | - | - | - | 3.41079 | 3.40299 | 3.51563 | 3.59218 | 3.67243 |
| -0.060 | - | - | - | - | - | 3.46671 | 3.56852 | 3.67624 | 3.75691 |
| -0.065 | - | - | - | - | - | 3.51859 | 3.62462 | 3.74070 | 3.83285 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 3.59350 | 3.71456 | 3.82416 | 3.91157 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | - | 3.79544 | 3.91598 | 4.04041 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | - | 4.14229 |

T 14

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | A: -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 1.75222 | 1.80193 | 1.82899 | 1.86873 | 1.91311 | 1.95906 | 1.99857 | 2.01921 | 2.04831 |
| 0.030 | 1.89808 | 1.94141 | 1.97438 | 2.02172 | 2.08469 | 2.10871 | 2.14255 | 2.16272 | 2.17952 |
| 0.025 | 2.03425 | 2.06443 | 2.09461 | 2.12445 | 2.15677 | 2.20959 | 2.24589 | 2.27635 | 2.29472 |
| 0.020 | 2.15289 | 2.17428 | 2.19432 | 2.22386 | 2.27725 | 2.35906 | 2.37703 | 2.41187 | 2.44927 |
| 0.015 | 2.27948 | 2.31035 | 2.33904 | 2.36945 | 2.42206 | 2.46883 | 2.51979 | 2.55532 | 2.59641 |
| 0.010 | 2.41109 | 2.45366 | 2.47689 | 2.49042 | 2.53137 | 2.60226 | 2.63793 | 2.68689 | 2.73960 |
| 0.005 | 2.54504 | 2.59467 | 2.65151 | 2.70376 | 2.76079 | 2.82963 | 2.87418 | 2.89995 | 2.98735 |
| 0.000 | 2.70270 | 2.72643 | 2.76303 | 2.81706 | 2.89463 | 2.96457 | 3.06839 | 3.13179 | 3.25378 |
| -0.005 | 2.78865 | 2.86765 | 2.94766 | 3.03250 | 3.19084 | 3.34795 | 3.50280 | 3.65911 | 3.82336 |
| -0.010 | 2.93205 | 2.99637 | 3.08982 | 3.17970 | 3.29745 | 3.46653 | 3.65634 | 3.82918 | - |
| -0.015 | 3.02840 | 3.10118 | 3.18823 | 3.30575 | 3.45186 | 3.68267 | 4.04487 | - | - |
| -0.020 | 3.12048 | 3.19568 | 3.29371 | 3.43489 | 3.61074 | 4.00935 | - | - | - |
| -0.025 | 3.22906 | 3.29238 | 3.38614 | 3.55313 | 3.77471 | - | - | - | - |
| -0.030 | 3.34570 | 3.39729 | 3.46034 | 3.66951 | 4.01237 | - | - | - | - |
| -0.035 | 3.40729 | 3.49647 | 3.64960 | 3.87308 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 3.49533 | 3.59282 | 3.76633 | 4.02972 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 3.61293 | 3.73770 | 3.92470 | 4.24611 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 3.70252 | 3.84093 | 4.05296 | 4.35828 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 3.77802 | 3.97359 | 4.28134 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 3.86713 | 4.07176 | 4.49181 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 3.95049 | 4.19390 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 4.05127 | 4.35630 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 4.18918 | 4.67636 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 4.36415 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 15

B

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.49830 | 0.47122 | 0.46332 | 0.44444 | 0.45002 | 0.45001 | 0.49818 | 0.47709 |
| 0.030 | 0.52333 | 0.49561 | 0.47619 | 0.49772 | 0.52119 | 0.53915 | 0.62873 | - |
| 0.025 | 0.57416 | 0.54891 | 0.55418 | 0.56801 | 0.74074 | 0.79487 | - | - |
| 0.020 | 0.62893 | 0.60000 | 0.63636 | 0.72067 | 0.74627 | - | - | - |
| 0.015 | 0.63281 | 0.67137 | 0.76623 | 0.85959 | - | - | - | - |
| 0.010 | 0.77174 | 0.83003 | 0.73866 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 0.84745 | - | - | - | - | - | - | - |

A

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 1.40521 | 1.34863 | 1.36210 | 1.34843 | 1.42210 | 1.48051 | 1.71312 | 1.72761 |
| 0.030 | 1.51765 | 1.45924 | 1.43812 | 1.55874 | 1.68804 | 1.83617 | 2.26332 | - |
| 0.025 | 1.70478 | 1.76257 | 1.71802 | 1.82896 | 2.50121 | 2.84612 | - | - |
| 0.020 | 1.90912 | 1.86600 | 2.04156 | 2.40480 | 2.59011 | - | - | - |
| 0.015 | 1.97876 | 2.14972 | 2.52014 | 2.99281 | - | - | - | - |
| 0.010 | 2.49876 | 2.73910 | 2.51658 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 2.84743 | - | - | - | - | - | - | - |

T 16

| $f_{0.1}$ \ $f_{1.0}$ | $F^{**}$ 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.76131 | 0.82221 | 0.89373 | 0.94133 | 0.99156 | 1.04091 | 1.09800 | 1.14326 | 1.21303 |
| 0.030 | 0.67288 | 0.72348 | 0.77271 | 0.82031 | 0.87063 | 0.91647 | 0.95861 | 1.01217 | 1.08279 |
| 0.025 | 0.57002 | 0.61231 | 0.65432 | 0.70882 | 0.74079 | 0.78654 | 0.83271 | 0.88880 | 0.95824 |
| 0.020 | 0.31015 | 0.44092 | 0.50900 | 0.56332 | 0.61412 | 0.66427 | 0.71268 | 0.76521 | 0.84462 |
| 0.015 | 0.23301 | 0.34315 | 0.39802 | 0.44830 | 0.49147 | 0.53973 | 0.59288 | 0.65741 | 0.83271 |
| 0.010 | 0.16825 | 0.24467 | 0.29615 | 0.34078 | 0.38403 | 0.42861 | 0.48230 | 0.55225 | 0.62669 |
| 0.005 | 0.09745 | 0.14827 | 0.20217 | 0.25104 | 0.29853 | 0.35008 | 0.40575 | 0.46323 | 0.52725 |
| 0.000 | 0.03062 | 0.08613 | 0.14045 | 0.19241 | 0.24328 | 0.29296 | 0.34191 | 0.39051 | 0.43992 |
| -0.005 | 0.03532 | 0.10073 | 0.13884 | 0.15948 | 0.16801 | 0.16936 | 0.16681 | 0.19004 | 0.21826 |
| -0.010 | - | 0.05219 | 0.09909 | 0.15735 | 0.22046 | 0.28562 | 0.35122 | 0.41590 | 0.48723 |
| -0.015 | - | 0.03829 | 0.07622 | 0.10550 | 0.13557 | 0.19150 | 0.26204 | 0.34310 | 0.43026 |
| -0.020 | - | 0.01691 | 0.06440 | 0.10396 | 0.12999 | 0.14810 | 0.19010 | 0.24655 | 0.31372 |
| -0.025 | - | - | 0.04794 | 0.08526 | 0.11822 | 0.14651 | 0.17931 | 0.22987 | 0.29261 |
| -0.030 | - | - | 0.03131 | 0.07002 | 0.10566 | 0.13802 | 0.16756 | 0.21651 | 0.27780 |
| -0.035 | - | - | 0.01573 | 0.05488 | 0.09133 | 0.12434 | 0.15452 | 0.20142 | 0.26071 |
| -0.040 | - | - | - | 0.03976 | 0.07698 | 0.11114 | 0.14279 | 0.19027 | 0.25158 |
| -0.045 | - | - | - | 0.02440 | 0.06284 | 0.09843 | 0.13094 | 0.17761 | 0.23782 |
| -0.050 | - | - | - | 0.00989 | 0.04755 | 0.08504 | 0.12214 | 0.16459 | 0.22365 |
| -0.055 | - | - | - | - | 0.03216 | 0.07015 | 0.10790 | 0.15188 | 0.21049 |
| -0.060 | - | - | - | - | 0.01645 | 0.05466 | 0.09396 | 0.14196 | 0.20442 |
| -0.065 | - | - | - | - | 0.00024 | 0.03854 | 0.07874 | 0.12465 | 0.18515 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 0.02165 | 0.06323 | 0.11065 | 0.17157 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | 0.00318 | 0.04586 | 0.09534 | 0.15913 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | 0.07328 | 0.14525 |

T 17

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | F** -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 2.30073 | 2.34490 | 2.09420 | 2.23979 | 2.02013 | 2.43340 | 2.76642 | 2.90192 | 2.99687 |
| 0.030 | 1.81526 | 1.92857 | 1.85687 | 1.92775 | 1.87904 | 2.10882 | 2.48058 | 2.60506 | 2.70169 |
| 0.025 | 1.45552 | 1.59073 | 1.60959 | 1.69077 | 1.71721 | 1.86745 | 2.22325 | 2.35626 | 2.46559 |
| 0.020 | 1.17508 | 1.30669 | 1.38730 | 1.48363 | 1.54819 | 1.68871 | 2.02172 | 2.15941 | 2.28246 |
| 0.015 | 0.94746 | 1.06500 | 1.17398 | 1.29264 | 1.39255 | 1.53468 | 1.85873 | 2.00778 | 2.15023 |
| 0.010 | 0.76276 | 0.86624 | 0.97774 | 1.10284 | 1.23826 | 1.39641 | 1.73140 | 1.90192 | 2.07269 |
| 0.005 | 0.61214 | 0.70084 | 0.80454 | 0.92815 | 1.07548 | 1.26283 | 1.63758 | 1.84257 | 2.16484 |
| 0.000 | 0.49215 | 0.56461 | 0.65933 | 0.78057 | 0.93837 | 1.14511 | 1.44807 | 1.74219 | 2.19467 |
| -0.005 | 0.22821 | 0.18885 | 0.14552 | 0.08512 | 0.02971 | -0.03410 | -0.08761 | -0.03443 | - |
| -0.010 | 0.56165 | 0.69149 | 0.77813 | 0.84599 | 0.97415 | 1.06967 | 1.88067 | -0.19763 | - |
| -0.015 | 0.48838 | 0.58063 | 0.66559 | 0.72446 | 0.82164 | -0.19587 | - | - | - |
| -0.020 | 0.40412 | 0.47766 | 0.55467 | 0.57624 | 0.04334 | 0.74381 | - | - | - |
| -0.025 | 0.36706 | 0.41721 | 0.47896 | 0.49221 | 0.31501 | - | - | - | - |
| -0.030 | 0.33850 | 0.39595 | 0.44559 | 0.45439 | 0.23964 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.31807 | 0.36956 | 0.41913 | 0.43804 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.30600 | 0.36231 | 0.40476 | 0.43561 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.29319 | 0.34129 | 0.40553 | 0.37080 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.28087 | 0.33621 | 0.38232 | 0.12156 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.25977 | 0.31714 | 0.38929 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.25150 | 0.30709 | 0.37698 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.24215 | 0.30207 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.22438 | 0.30748 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.21143 | 0.30848 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.20271 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 18

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | T* | | | | | | | | |
| 0.035 | -0.07028 | -0.06752 | -0.06581 | -0.06312 | -0.06202 | -0.06074 | -0.05741 | -0.05609 | -0.05672 |
| 0.030 | -0.06133 | -0.05742 | -0.05523 | -0.05327 | -0.05216 | -0.05194 | -0.04862 | -0.04742 | -0.04519 |
| 0.025 | -0.04532 | -0.04398 | -0.04328 | -0.04182 | -0.04027 | -0.03915 | -0.03712 | -0.03702 | -0.03590 |
| 0.020 | -0.03502 | -0.03282 | -0.03219 | -0.03037 | -0.02852 | -0.02764 | -0.02773 | -0.02679 | -0.02695 |
| 0.015 | -0.02350 | -0.02315 | -0.02234 | -0.02165 | -0.02094 | -0.01317 | -0.01269 | -0.01227 | -0.01183 |
| 0.010 | -0.01558 | -0.01515 | -0.01465 | -0.01413 | -0.01364 | -0.02026 | -0.01959 | -0.01890 | -0.01824 |
| 0.005 | -0.00765 | -0.00746 | -0.00718 | -0.00692 | -0.00668 | -0.00643 | -0.00621 | -0.00598 | -0.00574 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | 0.00770 | 0.00726 | 0.00688 | 0.00656 | 0.00627 | 0.00600 | 0.00576 | 0.00557 | 0.00537 |
| -0.010 | - | 0.01401 | 0.01350 | 0.01295 | 0.01237 | 0.01179 | 0.01122 | 0.01062 | 0.01004 |
| -0.015 | - | 0.02075 | 0.01948 | 0.01860 | 0.01786 | 0.01725 | 0.01659 | 0.01584 | 0.01505 |
| -0.020 | - | 0.02781 | 0.02610 | 0.02440 | 0.02296 | 0.02192 | 0.02117 | 0.02028 | 0.01928 |
| -0.025 | - | - | 0.03142 | 0.02958 | 0.02776 | 0.02624 | 0.02519 | 0.02415 | 0.02303 |
| -0.030 | - | - | 0.03694 | 0.03457 | 0.03231 | 0.03002 | 0.02878 | 0.02754 | 0.02626 |
| -0.035 | - | - | 0.04210 | 0.03928 | 0.03643 | 0.03387 | 0.03185 | 0.03037 | 0.02894 |
| -0.040 | - | - | - | 0.04362 | 0.04013 | 0.03442 | 0.03224 | 0.03284 | 0.03109 |
| -0.045 | - | - | - | 0.04782 | 0.04361 | 0.03960 | 0.03644 | 0.03455 | 0.03262 |
| -0.050 | - | - | - | 0.05122 | 0.04661 | 0.04193 | 0.03802 | 0.03557 | 0.03344 |
| -0.055 | - | - | - | - | 0.04931 | 0.04368 | 0.03896 | 0.03586 | 0.03345 |
| -0.060 | - | - | - | - | 0.05147 | 0.04481 | 0.03923 | 0.03556 | 0.03287 |
| -0.065 | - | - | - | - | 0.05329 | 0.04532 | 0.03860 | 0.03406 | 0.03102 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 0.04577 | 0.03724 | 0.03149 | 0.02796 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | 0.04604 | 0.03505 | 0.02773 | 0.02357 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | 0.02011 | 0.01757 |

T 19

| | $T^*$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
| 0.035 | -0.05370 | -0.05268 | -0.05151 | -0.05071 | -0.04736 | -0.04632 | -0.04287 | -0.04148 | -0.03831 |
| 0.030 | -0.04403 | -0.04356 | -0.04204 | -0.04013 | -0.03799 | -0.03663 | -0.03359 | -0.03194 | -0.02863 |
| 0.025 | -0.03501 | -0.03415 | -0.03259 | -0.03118 | -0.02968 | -0.02730 | -0.02516 | -0.02376 | -0.02238 |
| 0.020 | -0.02605 | -0.02541 | -0.02442 | -0.02336 | -0.02219 | -0.02104 | -0.01831 | -0.01782 | -0.01540 |
| 0.015 | -0.01836 | -0.01780 | -0.01714 | -0.01642 | -0.01554 | -0.01463 | -0.01264 | -0.01182 | -0.01038 |
| 0.010 | -0.01160 | -0.01118 | -0.01074 | -0.01025 | -0.00967 | -0.00899 | -0.00766 | -0.00739 | -0.00713 |
| 0.005 | -0.00554 | -0.00530 | -0.00505 | -0.00478 | -0.00446 | -0.00411 | -0.00349 | -0.00344 | -0.00316 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | 0.00518 | 0.00493 | 0.00468 | 0.00440 | 0.00411 | 0.00375 | 0.00330 | 0.00323 | - |
| -0.010 | 0.00945 | 0.00895 | 0.00831 | 0.00753 | 0.00658 | 0.00532 | 0.00388 | 0.00221 | - |
| -0.015 | 0.01403 | 0.01302 | 0.01188 | 0.01055 | 0.00888 | 0.00651 | - | - | - |
| -0.020 | 0.01818 | 0.01678 | 0.01514 | 0.01313 | 0.01809 | 0.00439 | - | - | - |
| -0.025 | 0.02183 | 0.02001 | 0.01786 | 0.01504 | 0.01046 | - | - | - | - |
| -0.030 | 0.02489 | 0.02256 | 0.01976 | 0.01589 | 0.00868 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.02735 | 0.02445 | 0.02080 | 0.01542 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.02917 | 0.02552 | 0.02077 | 0.01314 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.03035 | 0.02580 | 0.01948 | 0.00790 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.03077 | 0.02497 | 0.01662 | - | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.03026 | 0.02296 | 0.01110 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.02852 | 0.01222 | -0.00290 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.02555 | 0.00803 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.01342 | 0.00190 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.00812 | -0.01397 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.00122 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 20

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $T^{**}$ 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | -0.63420 | -0.57722 | -0.50211 | -0.44341 | -0.38323 | -0.33338 | -0.28999 | -0.26233 | -0.24891 |
| 0.030 | -0.27337 | -0.22445 | -0.19913 | -0.18878 | -0.17944 | -0.17251 | -0.16610 | -0.15844 | -0.15258 |
| 0.025 | -0.23837 | -0.19418 | -0.16831 | -0.14232 | -0.12981 | -0.11182 | -0.10700 | -0.10370 | -0.09756 |
| 0.020 | -0.22784 | -0.16425 | -0.12638 | -0.10216 | -0.08692 | -0.07553 | -0.06663 | -0.05977 | -0.05626 |
| 0.015 | -0.15439 | -0.10411 | -0.07677 | -0.06180 | -0.05164 | -0.04511 | -0.04051 | -0.03740 | -0.03536 |
| 0.010 | -0.08796 | -0.05429 | -0.03886 | -0.03083 | -0.02524 | -0.02273 | -0.02070 | -0.01990 | -0.01916 |
| 0.005 | -0.03682 | -0.01682 | -0.01289 | -0.01083 | -0.00953 | -0.00873 | -0.00819 | -0.00776 | -0.00746 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | 0.01307 | 0.00890 | 0.00587 | 0.00375 | 0.00221 | 0.00111 | 0.00034 | 0.00029 | 0.00019 |
| -0.010 | - | 0.01252 | 0.01449 | 0.01575 | 0.01618 | 0.01609 | 0.01563 | 0.01470 | 0.01403 |
| -0.015 | - | 0.01919 | 0.01324 | 0.01070 | 0.01031 | 0.01289 | 0.01531 | 0.01704 | 0.01808 |
| -0.020 | - | 0.02848 | 0.02640 | 0.02003 | 0.01410 | 0.00972 | 0.01021 | 0.01152 | 0.01281 |
| -0.025 | - | - | 0.02377 | 0.02102 | 0.01766 | 0.01427 | 0.01227 | 0.01289 | 0.01403 |
| -0.030 | - | - | 0.02801 | 0.02507 | 0.02128 | 0.01754 | 0.01396 | 0.01432 | 0.01543 |
| -0.035 | - | - | 0.03133 | 0.02815 | 0.02342 | 0.01887 | 0.01496 | 0.01491 | 0.01590 |
| -0.040 | - | - | - | 0.03062 | 0.02551 | 0.02042 | 0.01626 | 0.01630 | 0.01759 |
| -0.045 | - | - | - | 0.03401 | 0.02889 | 0.02256 | 0.01746 | 0.01682 | 0.01800 |
| -0.050 | - | - | - | 0.03379 | 0.03027 | 0.02512 | 0.02059 | 0.01716 | 0.01786 |
| -0.055 | - | - | - | - | 0.03257 | 0.02623 | 0.02076 | 0.01738 | 0.01767 |
| -0.060 | - | - | - | - | 0.03366 | 0.02705 | 0.02163 | 0.01931 | 0.02016 |
| -0.065 | - | - | - | - | 0.03528 | 0.02754 | 0.02161 | 0.01731 | 0.01711 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 0.03177 | 0.02281 | 0.01715 | 0.01613 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | 0.03511 | 0.02392 | 0.01736 | 0.01598 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | 0.01683 | 0.01576 |

T 21

| | T** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
| 0.035 | -0.22457 | -0.20092 | -0.15518 | -0.14890 | -0.11936 | -0.13028 | -0.12659 | -0.13183 | -0.13222 |
| 0.030 | -0.14420 | -0.13536 | -0.11454 | -0.10559 | -0.09162 | -0.09240 | -0.09267 | -0.09402 | -0.09542 |
| 0.025 | -0.09284 | -0.08970 | -0.07989 | -0.07432 | -0.06711 | -0.06495 | -0.06508 | -0.06656 | -0.06730 |
| 0.020 | -0.05817 | -0.05697 | -0.05321 | -0.05018 | -0.04625 | -0.04455 | -0.04428 | -0.04509 | -0.04588 |
| 0.015 | -0.03412 | -0.03353 | -0.03214 | -0.03137 | -0.02962 | -0.02855 | -0.02819 | -0.02938 | -0.02932 |
| 0.010 | -0.01772 | -0.01746 | -0.01717 | -0.01692 | -0.01652 | -0.01605 | -0.01584 | -0.01623 | -0.01640 |
| 0.005 | -0.00684 | -0.00673 | -0.00667 | -0.00664 | -0.00659 | -0.00658 | -0.00662 | -0.00704 | -0.00720 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | 0.00175 | 0.00095 | 0.00026 | -0.00044 | -0.00101 | -0.00157 | -0.00209 | -0.00204 | - |
| -0.010 | 0.01202 | 0.01273 | 0.01223 | 0.01124 | 0.01076 | 0.00951 | 0.01181 | 0.00191 | - |
| -0.015 | 0.01564 | 0.01544 | 0.01478 | 0.01332 | 0.01207 | -0.00338 | - | - | - |
| -0.020 | 0.01648 | 0.01591 | 0.01510 | 0.01236 | -0.00261 | 0.00699 | - | - | - |
| -0.025 | 0.01809 | 0.01630 | 0.01478 | 0.01123 | 0.00445 | - | - | - | - |
| -0.030 | 0.01922 | 0.01768 | 0.01508 | 0.01042 | 0.00077 | - | - | - | - |
| -0.035 | 0.02023 | 0.01791 | 0.01471 | 0.00925 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | 0.02146 | 0.01893 | 0.01420 | 0.00733 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | 0.02210 | 0.01806 | 0.01369 | -0.00006 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | 0.02225 | 0.01792 | 0.01009 | -0.00921 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | 0.02033 | 0.01523 | 0.00659 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | 0.01956 | 0.01222 | -0.00290 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | 0.01789 | 0.00803 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | 0.01342 | 0.00190 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | 0.00812 | -0.01397 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | 0.00122 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 22

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $f_{1,0}/B^2$ 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.16260 | 0.13916 | 0.11759 | 0.09690 | 0.07712 | 0.05653 | 0.03726 | 0.01840 | 0.00000 |
| 0.030 | 0.14517 | 0.12669 | 0.10743 | 0.08892 | 0.07085 | 0.05230 | 0.03396 | 0.01685 | 0.00000 |
| 0.025 | 0.13289 | 0.11497 | 0.09655 | 0.08007 | 0.06324 | 0.04685 | 0.03067 | 0.01519 | 0.00000 |
| 0.020 | 0.12395 | 0.10688 | 0.09113 | 0.07492 | 0.05904 | 0.04358 | 0.02877 | 0.01421 | 0.00000 |
| 0.015 | 0.11153 | 0.09681 | 0.09148 | 0.06749 | 0.05302 | 0.03911 | 0.02588 | 0.01270 | 0.00000 |
| 0.010 | 0.10369 | 0.08985 | 0.07444 | 0.06154 | 0.04741 | 0.03508 | 0.02315 | 0.01136 | 0.00000 |
| 0.005 | 0.09415 | 0.08115 | 0.06838 | 0.05626 | 0.04443 | 0.03260 | 0.02137 | 0.01054 | 0.00000 |
| 0.000 | 0.08645 | 0.07517 | 0.06347 | 0.05116 | 0.04441 | 0.03009 | 0.01987 | 0.00966 | 0.00000 |
| -0.005 | 0.07816 | 0.06742 | 0.05664 | 0.04691 | 0.03702 | 0.02734 | 0.01821 | 0.00919 | 0.00000 |
| -0.010 | - | 0.06337 | 0.05352 | 0.04409 | 0.03501 | 0.02611 | 0.01733 | 0.00858 | 0.00000 |
| -0.015 | - | 0.05973 | 0.05078 | 0.04230 | 0.03370 | 0.02493 | 0.01655 | 0.00812 | 0.00000 |
| -0.020 | - | 0.05602 | 0.04813 | 0.03979 | 0.03145 | 0.02357 | 0.01568 | 0.00779 | 0.00000 |
| -0.025 | - | - | 0.04585 | 0.03804 | 0.03031 | 0.02271 | 0.01511 | 0.00754 | 0.00000 |
| -0.030 | - | - | 0.04429 | 0.03679 | 0.02927 | 0.02180 | 0.01451 | 0.00723 | 0.00000 |
| -0.035 | - | - | 0.04383 | 0.03628 | 0.02683 | 0.02140 | 0.01415 | 0.00697 | 0.00000 |
| -0.040 | - | - | - | 0.03471 | 0.02668 | 0.02057 | 0.01370 | 0.00676 | 0.00000 |
| -0.045 | - | - | - | 0.03355 | 0.02651 | 0.02008 | 0.01335 | 0.00669 | 0.00000 |
| -0.050 | - | - | - | 0.03353 | 0.02638 | 0.01985 | 0.01321 | 0.00654 | 0.00000 |
| -0.055 | - | - | - | - | 0.02608 | 0.01982 | 0.01301 | 0.00651 | 0.00000 |
| -0.060 | - | - | - | - | - | 0.01959 | 0.01300 | 0.00642 | 0.00000 |
| -0.065 | - | - | - | - | - | 0.01953 | 0.01299 | 0.00641 | 0.00000 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | 0.01925 | 0.01278 | 0.00636 | 0.00000 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | - | 0.01268 | 0.00632 | 0.00000 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | - | 0.00000 |

T 23

| | $f_{10}/B^2$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{01}$ \ $f_{10}$ | -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
| 0.035 | -0.01864 | -0.03672 | -0.05489 | -0.07307 | -0.09131 | -0.10492 | -0.12270 | -0.13656 | -0.14535 |
| 0.030 | -0.01644 | -0.03271 | -0.04895 | -0.06492 | -0.08148 | -0.09839 | -0.11504 | -0.12451 | -0.13455 |
| 0.025 | -0.01484 | -0.02978 | -0.04513 | -0.06102 | -0.07754 | -0.09330 | -0.10926 | -0.11761 | -0.12750 |
| 0.020 | -0.01368 | -0.02779 | -0.04258 | -0.05771 | -0.07271 | -0.08521 | -0.10182 | -0.10969 | -0.11759 |
| 0.015 | -0.01257 | -0.02541 | -0.03875 | -0.05266 | -0.06627 | -0.08105 | -0.09469 | -0.10252 | -0.11025 |
| 0.010 | -0.01154 | -0.02321 | -0.03568 | -0.04935 | -0.06300 | -0.07608 | -0.09051 | -0.09762 | -0.10466 |
| 0.005 | -0.01061 | -0.02133 | -0.03212 | -0.04335 | -0.05538 | -0.06724 | -0.08025 | -0.08884 | -0.09868 |
| 0.000 | -0.00963 | -0.01978 | -0.03037 | -0.04121 | -0.05208 | -0.06413 | -0.07665 | -0.08321 | -0.08954 |
| -0.005 | -0.00918 | -0.01817 | -0.02709 | -0.03599 | -0.04429 | -0.05251 | -0.06112 | -0.06524 | -0.06945 |
| -0.010 | -0.00860 | -0.01727 | -0.02579 | -0.03437 | -0.04295 | -0.05153 | -0.06001 | -0.06424 | - |
| -0.015 | -0.00825 | -0.01657 | -0.02492 | -0.03310 | -0.04131 | -0.04911 | -0.05679 | - | - |
| -0.020 | -0.00794 | -0.01599 | -0.02404 | -0.03180 | -0.03953 | -0.04699 | - | - | - |
| -0.025 | -0.00757 | -0.01543 | -0.02340 | -0.03082 | -0.03843 | - | - | - | - |
| -0.030 | -0.00721 | -0.01486 | -0.02311 | -0.03009 | -0.03669 | - | - | - | - |
| -0.035 | -0.00712 | -0.01442 | -0.02148 | -0.02831 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | -0.00694 | -0.01408 | -0.02095 | -0.02770 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | -0.00668 | -0.01344 | -0.02015 | -0.02698 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | -0.00655 | -0.01320 | -0.01988 | -0.02691 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | -0.00649 | -0.01285 | -0.01899 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | -0.00642 | -0.01284 | -0.01892 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | -0.00640 | -0.01282 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | -0.00637 | -0.01281 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | -0.00629 | -0.01262 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | -0.00621 | - | - | - | - | - | - | - | - |

T 24

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $f_{01}/B^2$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| 0.035 | 0.07114 | 0.06958 | 0.06859 | 0.06783 | 0.06748 | 0.06521 | 0.06501 | 0.06441 | 0.06313 |
| 0.030 | 0.05444 | 0.05429 | 0.05372 | 0.05335 | 0.05313 | 0.05230 | 0.05094 | 0.05054 | 0.04983 |
| 0.025 | 0.04153 | 0.04106 | 0.04023 | 0.04003 | 0.03953 | 0.03904 | 0.03834 | 0.03799 | 0.03798 |
| 0.020 | 0.03099 | 0.03054 | 0.03038 | 0.02997 | 0.02952 | 0.02905 | 0.02877 | 0.02842 | 0.02763 |
| 0.015 | 0.02091 | 0.02074 | 0.02037 | 0.02035 | 0.01988 | 0.01955 | 0.01941 | 0.01905 | 0.01872 |
| 0.010 | 0.01296 | 0.01284 | 0.01241 | 0.01231 | 0.01185 | 0.01169 | 0.01157 | 0.01136 | 0.01145 |
| 0.005 | 0.00588 | 0.00579 | 0.00569 | 0.00562 | 0.00555 | 0.00543 | 0.00534 | 0.00527 | 0.00513 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | -0.00488 | -0.00481 | -0.00472 | -0.00469 | -0.00463 | -0.00455 | -0.00455 | -0.00459 | -0.00466 |
| -0.010 | - | -0.00905 | -0.00892 | -0.00882 | -0.00875 | -0.00870 | -0.00866 | -0.00858 | -0.00872 |
| -0.015 | - | -0.01280 | -0.01269 | -0.01269 | -0.01264 | -0.01246 | -0.01241 | -0.01218 | -0.01218 |
| -0.020 | - | -0.01600 | -0.01604 | -0.01592 | -0.01573 | -0.01571 | -0.01568 | -0.01558 | -0.01549 |
| -0.025 | - | - | -0.01910 | -0.01902 | -0.01894 | -0.01893 | -0.01888 | -0.01885 | -0.01887 |
| -0.030 | - | - | -0.02214 | -0.02208 | -0.02196 | -0.02180 | -0.02175 | -0.02169 | -0.02182 |
| -0.035 | - | - | -0.02557 | -0.02539 | -0.03019 | -0.02496 | -0.02476 | -0.02439 | -0.02432 |
| -0.040 | - | - | - | -0.02777 | -0.03335 | -0.02743 | -0.02740 | -0.02704 | -0.02716 |
| -0.045 | - | - | - | -0.03019 | -0.03645 | -0.03013 | -0.03005 | -0.03018 | -0.03027 |
| -0.050 | - | - | - | -0.03353 | -0.03958 | -0.03308 | -0.03303 | -0.03270 | -0.03325 |
| -0.055 | - | - | - | - | -0.04238 | -0.03633 | -0.03579 | -0.03584 | -0.03589 |
| -0.060 | - | - | - | - | - | -0.03918 | -0.03901 | -0.03852 | -0.03865 |
| -0.065 | - | - | - | - | - | -0.04233 | -0.04224 | -0.04168 | -0.04167 |
| -0.070 | - | - | - | - | - | -0.04492 | -0.04475 | -0.04455 | -0.04479 |
| -0.075 | - | - | - | - | - | - | -0.04754 | -0.04740 | -0.04695 |
| -0.080 | - | - | - | - | - | - | - | - | -0.05002 |

T 25

| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | $f_{01}/B^2$: -0.01 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.05 | -0.06 | -0.07 | -0.075 | -0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 0.06524 | 0.06425 | 0.06404 | 0.06394 | 0.06383 | 0.06383 | 0.06385 | 0.06373 | 0.06359 |
| 0.030 | 0.04931 | 0.04906 | 0.04895 | 0.04869 | 0.04888 | 0.04919 | 0.04936 | 0.04980 | 0.05049 |
| 0.025 | 0.03710 | 0.03723 | 0.03761 | 0.03813 | 0.03877 | 0.03887 | 0.03902 | 0.03920 | 0.03984 |
| 0.020 | 0.02737 | 0.02779 | 0.02838 | 0.02886 | 0.02888 | 0.02840 | 0.02909 | 0.02925 | 0.02934 |
| 0.015 | 0.01886 | 0.01906 | 0.01938 | 0.01975 | 0.01988 | 0.02026 | 0.02029 | 0.02050 | 0.02067 |
| 0.010 | 0.01154 | 0.01160 | 0.01189 | 0.01234 | 0.01260 | 0.01268 | 0.01263 | 0.01301 | 0.01308 |
| 0.005 | 0.00531 | 0.00533 | 0.00535 | 0.00542 | 0.00550 | 0.00560 | 0.00573 | 0.00592 | 0.00617 |
| 0.000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.005 | -0.00459 | -0.00454 | -0.00451 | -0.00450 | -0.00443 | -0.00437 | -0.00437 | -0.00434 | -0.00434 |
| -0.010 | -0.00860 | -0.00863 | -0.00859 | -0.00859 | -0.00859 | -0.00859 | -0.00857 | -0.00856 | - |
| -0.015 | -0.01238 | -0.01243 | -0.01246 | -0.01241 | -0.01239 | -0.01227 | -0.01217 | - | - |
| -0.020 | -0.01588 | -0.01599 | -0.01603 | -0.01590 | -0.01581 | -0.01566 | - | - | - |
| -0.025 | -0.01893 | -0.01929 | -0.01950 | -0.01927 | -0.01921 | - | - | - | - |
| -0.030 | -0.02163 | -0.02230 | -0.02311 | -0.02257 | -0.02202 | - | - | - | - |
| -0.035 | -0.02492 | -0.02524 | -0.02506 | -0.02477 | - | - | - | - | - |
| -0.040 | -0.02776 | -0.02816 | -0.02793 | -0.02770 | - | - | - | - | - |
| -0.045 | -0.03004 | -0.03025 | -0.03022 | -0.03035 | - | - | - | - | - |
| -0.050 | -0.03274 | -0.03301 | -0.03313 | -0.03352 | - | - | - | - | - |
| -0.055 | -0.03572 | -0.03534 | -0.03483 | - | - | - | - | - | - |
| -0.060 | -0.03854 | -0.03852 | -0.03784 | - | - | - | - | - | - |
| -0.065 | -0.04164 | -0.04167 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.070 | -0.04462 | -0.04486 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.075 | -0.04721 | -0.04734 | - | - | - | - | - | - | - |
| -0.080 | -0.04970 | - | - | - | - | - | - | - | - |

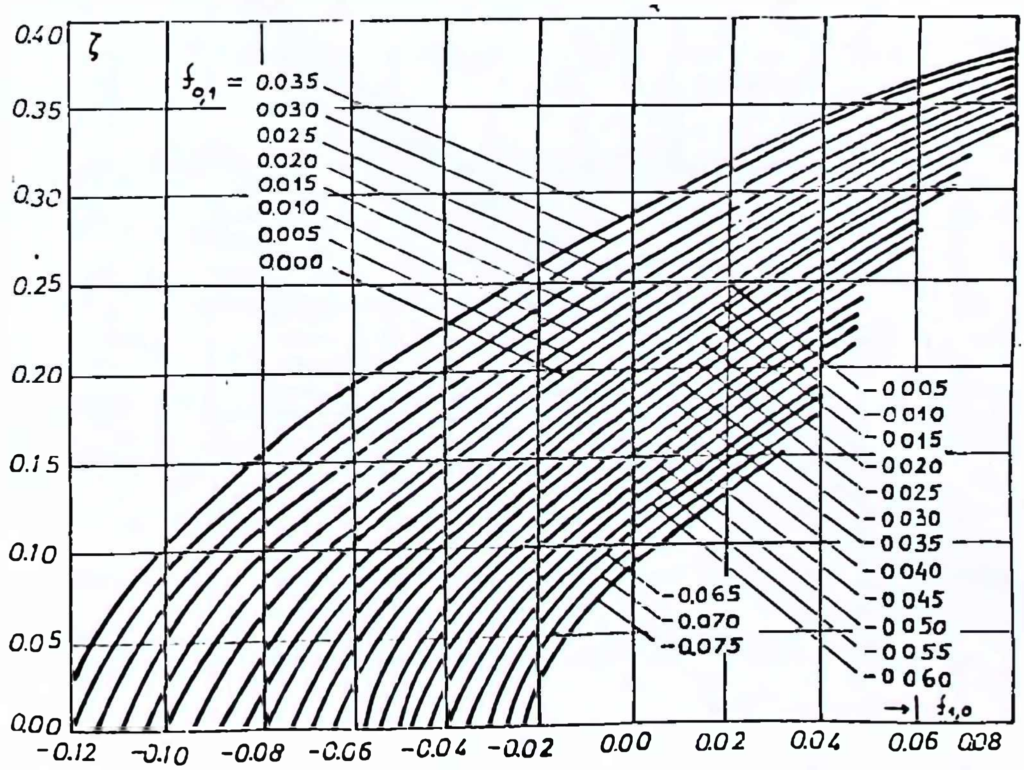
T 26

| $f_{1,0}/B^2$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
| 0.035 | -0.34232 | -0.40531 | -0.44255 | -0.50626 | -0.51852 | -0.54321 | -0.46337 | -0.52721 |
| 0.030 | -0.31036 | -0.36642 | -0.41895 | -0.40367 | -0.38653 | -0.37842 | -0.29092 | - |
| 0.025 | -0.25784 | -0.29870 | -0.30933 | -0.30996 | -0.19136 | -0.17410 | - | - |
| 0.020 | -0.21489 | -0.25000 | -0.23459 | -0.19254 | -0.18854 | - | - | - |
| 0.015 | -0.21226 | -0.19967 | -0.16181 | -0.13534 | - | - | - | - |
| 0.010 | -0.14272 | -0.13064 | -0.17411 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | -0.11835 | - | - | - | - | - | - | - |

| $f_{0,1}/B^2$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{0,1}$ \ $f_{1,0}$ | -0.085 | -0.090 | -0.095 | -0.100 | -0.105 | -0.110 | -0.115 | -0.120 |
| 0.035 | 0.14095 | 0.15762 | 0.16304 | 0.17719 | 0.17284 | 0.17284 | 0.14102 | 0.15377 |
| 0.030 | 0.10954 | 0.12214 | 0.13230 | 0.12110 | 0.11043 | 0.10320 | 0.07589 | - |
| 0.025 | 0.07583 | 0.08297 | 0.08140 | 0.07749 | 0.04556 | 0.03957 | - | - |
| 0.020 | 0.05056 | 0.05555 | 0.04939 | 0.03851 | 0.03591 | - | - | - |
| 0.015 | 0.03745 | 0.03327 | 0.02555 | 0.02030 | - | - | - | - |
| 0.010 | 0.01679 | 0.01451 | 0.01833 | - | - | - | - | - |
| 0.005 | 0.00696 | - | - | - | - | - | - | - |

većim negativnim gradijentom spoljašnje brzine (veće negativne vrijednosti dinamičkog parametra $f_{0,1}$), dok se pri usporenom kretanju odvajanje dešava u oblasti manje difuzornosti u kojoj su manji gradijenti spoljašnje brzine (manje negativne vrijednosti dinamičkog parametra $f_{1,0}$). Na osnovu ovoga može se konstatovati da pri većim usporenjima, prikazanih sa $f_{0,1}<-0.080$, može doći do odvajanja graničnog sloja čak i na ravnoj ploči, što je u saglasnosti sa rezultatima koje je dobio STRUMINSKIJ [100].

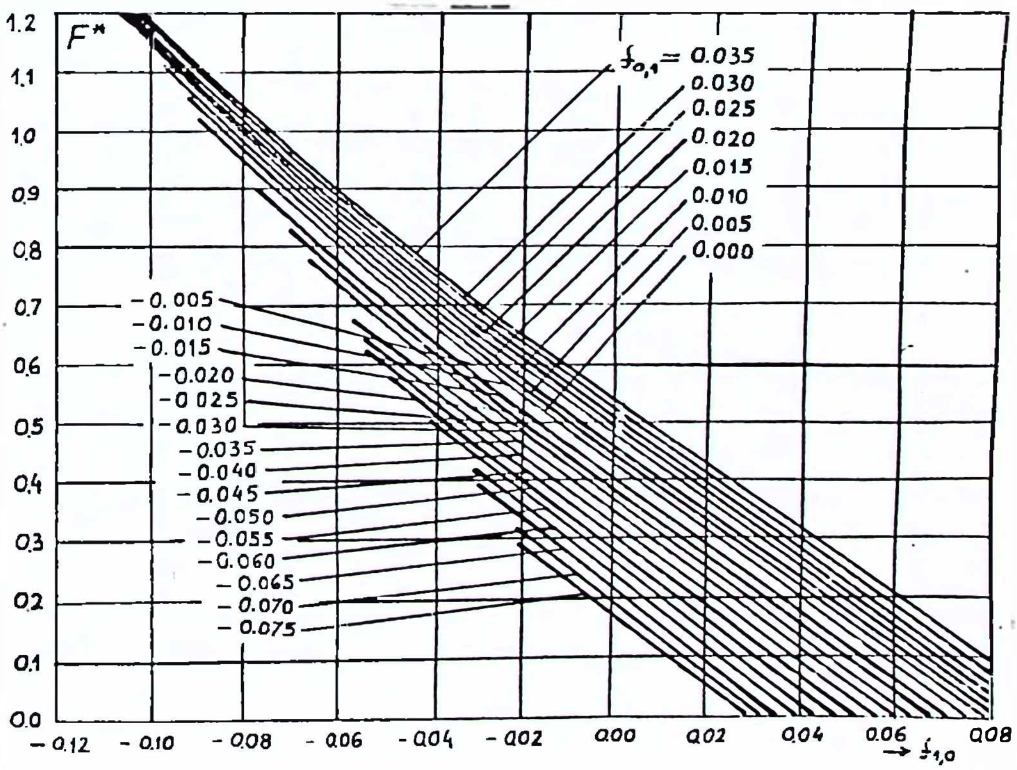
Iz raspodjele univerzalne funkcije $F^*$ sa sl. 6 zapaža se, da se pri većim ubrzanjima spoljašnje struje, a to znači pri većim vrijednostima parametara nestacionarnosti $f_{0,1}$, nulta vrijednost funkcije $F^*$ pomjera ka većim pozitivnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$, tj. ka većoj konfuzornoj oblasti u kojoj su i veći podužni gradijenti spoljašnje brzine. U slučaju strujanja sa većim usporenjima, tj. pri većim negativnim vrijednostima porametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, sa slike 6 se može zapaziti, da se nulta vrijednost univerzalne funkcije $F^*$ pomjera




sl.5

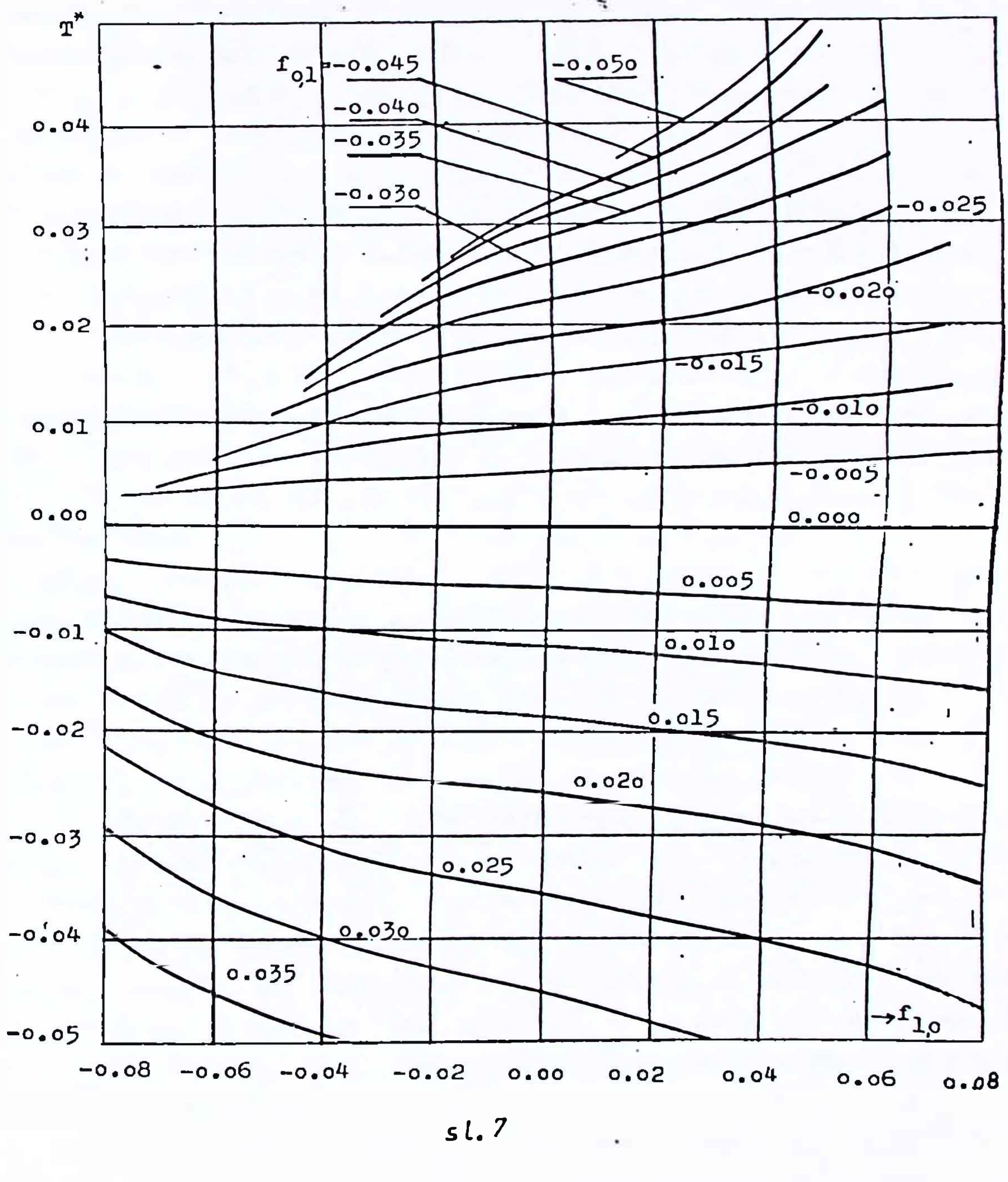
ka manjim pozitivnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$, tj. ka manjoj konfuzornoj oblasti u kojoj podužni gradijenti spoljašnje brzine imaju manje vrijednosti, a to znači da se granični sloj za takve slučajeve strujanja formira na užem dijelu opstrujavane površine.

Raspodjela sračunate univerzalne funkcije $T^*$ u zavisnosti od pozitivnih i negativnih vrijednosti dinamičkog parametra $f_{1,0}$ i parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ data je na sl. 7, na kojoj se zapaža da ova funkcija ima negativne vrijednosti za ubrzana kretanja, odnosno pozitivne vrijednosti pri usporenim kretanjima. Uočljivo je takodje, da se veličine univerzalne funkcije $T^*$ po apsolutnoj vrijednosti smanjuju sa povećanjem negativne vrijednosti dinamičkog parametra $f_{1,0}$, tj. sa primicanjem tački odvajanja graničnog sloja, i to kako za ubrzana tako i za usporena kretanja, odnosno za $f_{0,1}>0$ i $f_{0,1}<0$. Isto tako se zapaža da za stacionarno strujanje data funkcija $T^*$ ima vrijednost nula, što je sobzirom na relaciju (3.2.3) bilo prirodno i očekivati.




sl. 6

Na slici 8 prikazana je raspodjela univerzalne funkcije $H^{**}$ koja predstavlja odnos debljine istiskivanja i debljine gubitka impulsa. Zapaža se da funkcija $H^{**}$ sa porastom pozitivne vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ opada, tj. odnosi debljina su, posmatrano u odnosu na stacionarni problem ($f_{0,1}=0$), manji kod ubrzanih strujanja a veći kod usporenih strujanja za koje parametri nestacionarnosti $f_{0,1}$ imaju negativne vrijednosti.



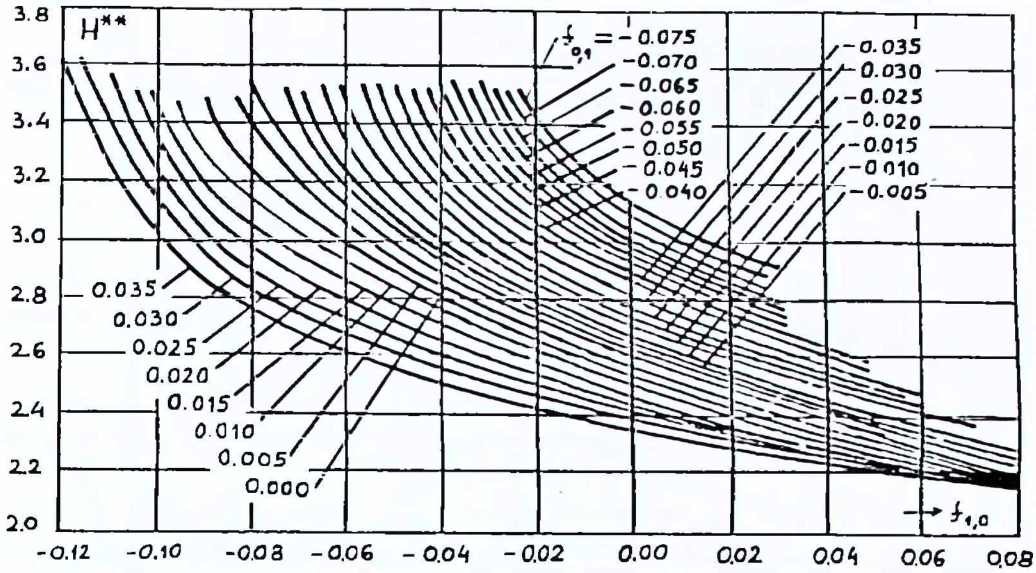

sl. 7

Takodje se sa slike uočava da, pri svim parametrima nestacionarnosti, tj. i pri ubrzanim i pri usporenim strujanjima, funkcija $H^{**}$ raste počev od njene najniže vrijednosti u prednjoj zaustavnoj tački u kojoj dinamički parametar $f_{1,o}$ ima najveću pozitivnu vrijednost, pa do njene najveće vrijednosti u tački odvajanja graničnog sloja označenom sa najvećom negativnom vrijednosti dinamičkog parametra, što opravdava i samu prirodu postojanja graničnog sloja. U svim oblastima graničnog sloja, a to znači i u konfuzornoj i u difuzornoj oblasti, funkcija $H^{**}$ opada sa povećanjem ubrzanog kretanja, dok ona upadljivo raste duž cijelog graničnog sloja pri većim vrijednostima usporenog kretanja. U konfuzornoj oblasti ($f_{1,o}>0$), promjena funkcije $H^{**}$ pri ubrzanim i usporenim kretanjima je manja, u odnosu na promjene te funkcije u difuzornoj oblasti ($f_{1,o}<0$) pri obadvije vrste kretanja. Interesantno je zapaziti, da funkcija $H^{**}$ ima gotovo iste vrijednosti u tačkama odvajanja graničnog sloja i to kako za ubrzana ($f_{o,1}>0$) tako i za usporena kretanja ($f_{o,1}<0$).

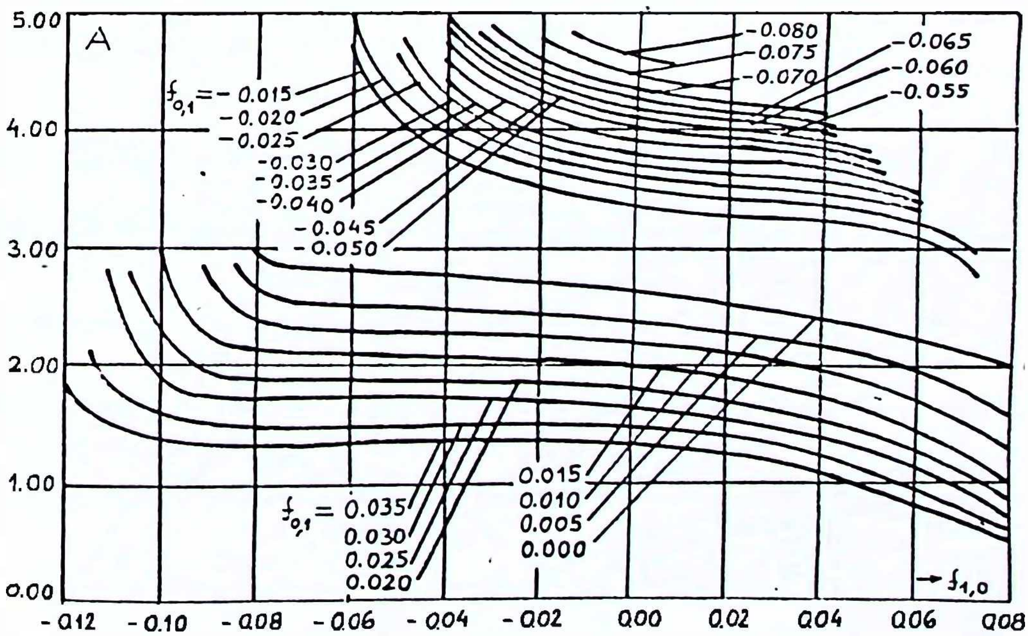
Vrijednosti univerzalnih veličina A, B i $\Phi''(o)$, koje prema izrazu (2.1.19) služe za odredjivanje karakteristika graničnog sloja konkretnog strujanja, tj. debljine istiskivanja $\delta^{*}$, debljine gubitka impulsa $\delta^{**}$ i tangencijalnog napona na zidu $\tau_w$ [22], date su na sl. 9, sl. 10 i sl. 11, respektivno. Sa slika se zapaža da veličine A, B i $\Phi''(o)$, prikazane u funkciji od dinamičkog parametra $f_{1,o}$ pri pozitivnim i negativnim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{o,1}$, slijede logiku ponašanja nestacionarnog graničnog sloja. Naime, sa ubrzavanjem kretanja veličine A i B opadaju duž cijelog graničnog sloja a veličina $\Phi''(o)$ raste, dok sa usporavanjem kretanja ponašanje ovih veličina je suprotno, tj. A i B rastu a $\Phi''(o)$ opada.

Na sl. 12 i sl. 13 daju se raspodjele univerzalnih funkcija $f_{1,o}/B^2$ i $f_{o,1}/B^2$, od kojih i počinju proračuni karakterističnih veličina nestacionarnog graničnog sloja, s obzirom da su na osnovu izraza (2.1.19), (3.1.6) i (3.1.8) ove funkcije povezane sa brzinom na spoljašnjoj granici graničnog sloja, koja je, kako će se vidjeti u glavi V na konkretnim primjerima, potrebna kao ulazni podatak za neophodna sračunavanja partikularnih problema.

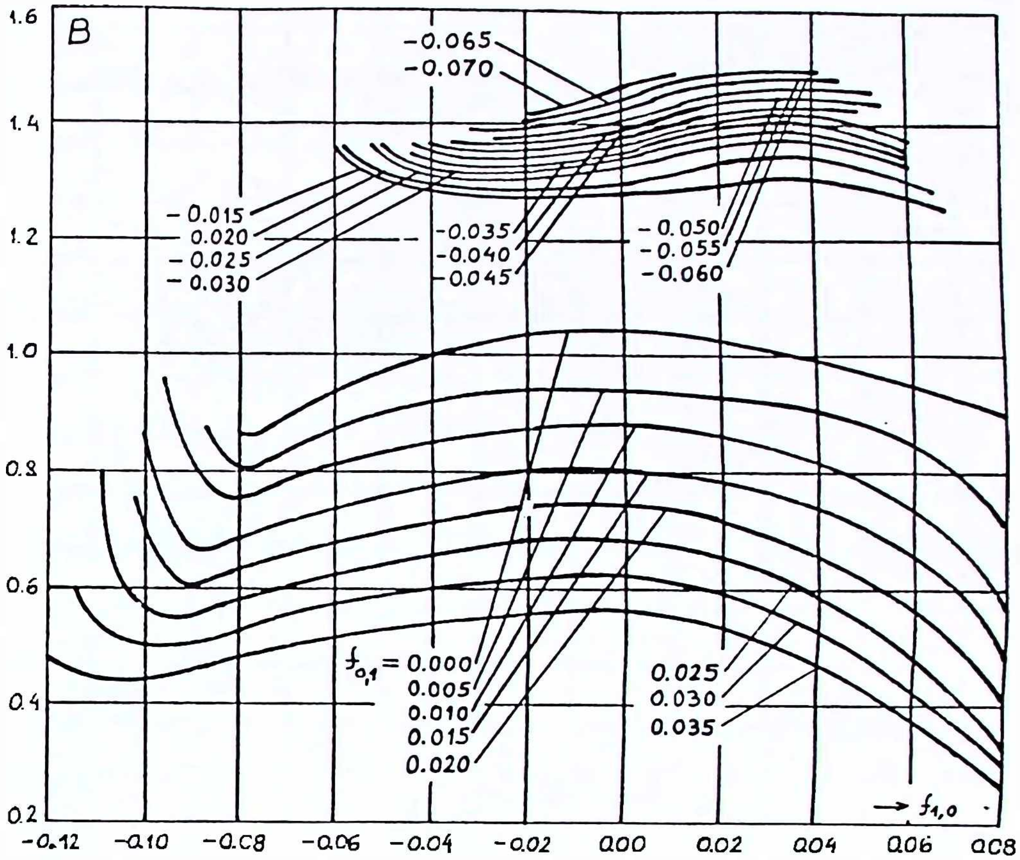
Pošto jednačina (3.2.1) za $f_{o,1}=0$, kako je i ranije već naznačeno, prelazi u jednačinu stacionarnog graničnog sloja (3.2.8), koju je SALJNIKOV izveo u radu [22], prirodno je bilo očekivati da će se raspodjele univerzalnih rešenja $\zeta$, $F^{*}$, $H^{**}$, A, B, $\Phi''(o)$ i $f_{1,o}/B^2$ prikazanih na sl. 5, 6, 8, 9, 10, 11 i 12,


H**
$f_{0,1}$ = −0.075
−0.070
−0.065
−0.060
−0.055
−0.050
−0.045
−0.040
−0.035
−0.030
−0.025
−0.020
−0.015
−0.010
−0.005
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
$f_{1,0}$

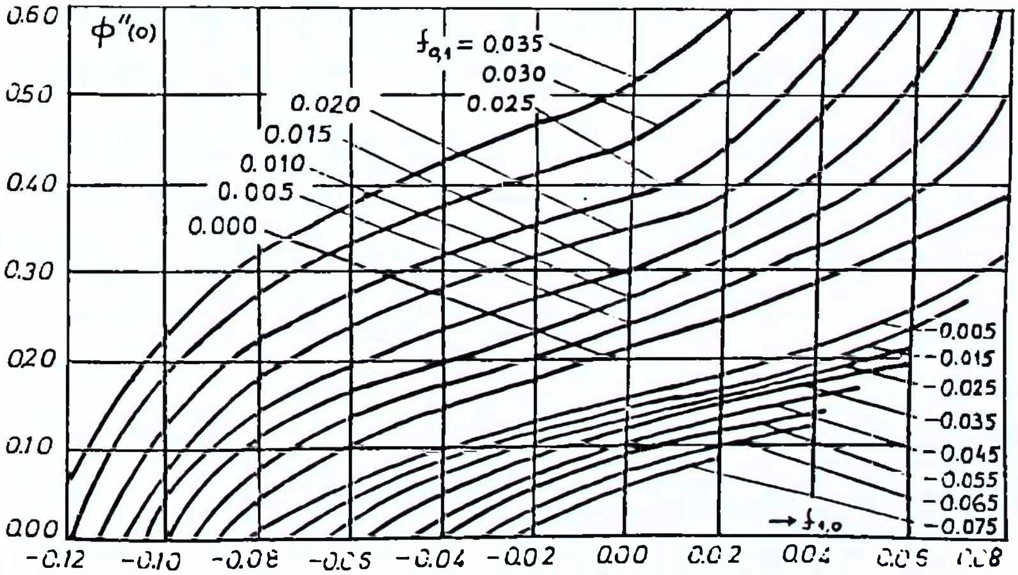
sl. 8


A
$f_{0,1}$ = −0.015
−0.020
−0.025
−0.030
−0.035
−0.040
−0.045
−0.050
−0.080
−0.075
−0.070
−0.065
−0.060
−0.055
$f_{0,1}$ = 0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
$f_{1,0}$

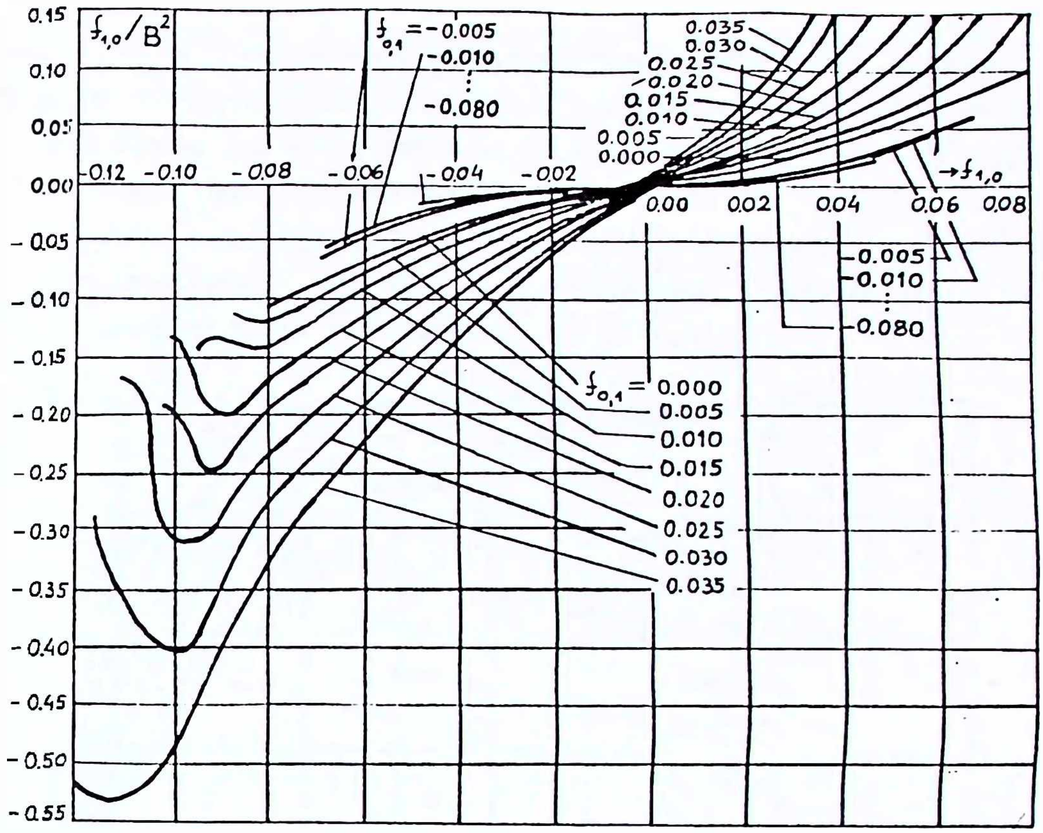
sl. 9


B
-0.065
-0.070
- 0.015
0.020
- 0.025
- 0.030
-0.035
-0.040
-0.045
- 0.050
- 0.055
-0.060
$f_{0,1}$ = 0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
→ $f_{1,0}$
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.12
-0.10
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08

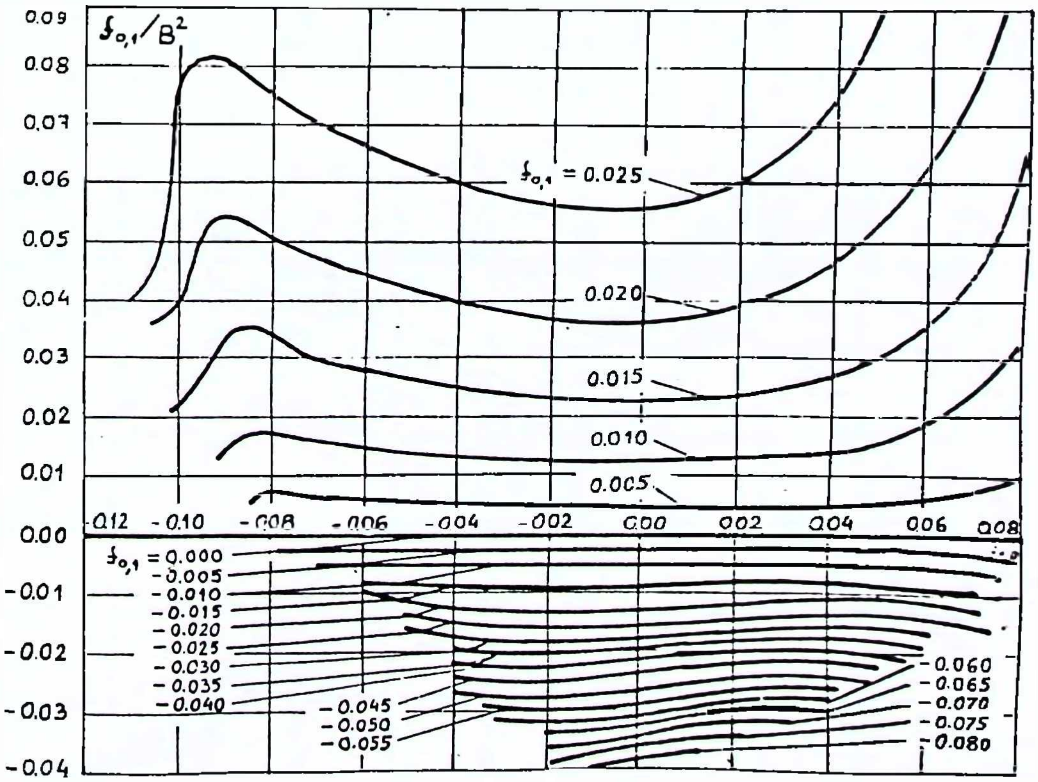
sl. 10


φ''(0)
$f_{0,1}$ = 0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
-0.005
-0.015
-0.025
-0.035
-0.045
-0.055
-0.065
-0.075
→ $f_{1,0}$
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.12
-0.10
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08

sl. 11

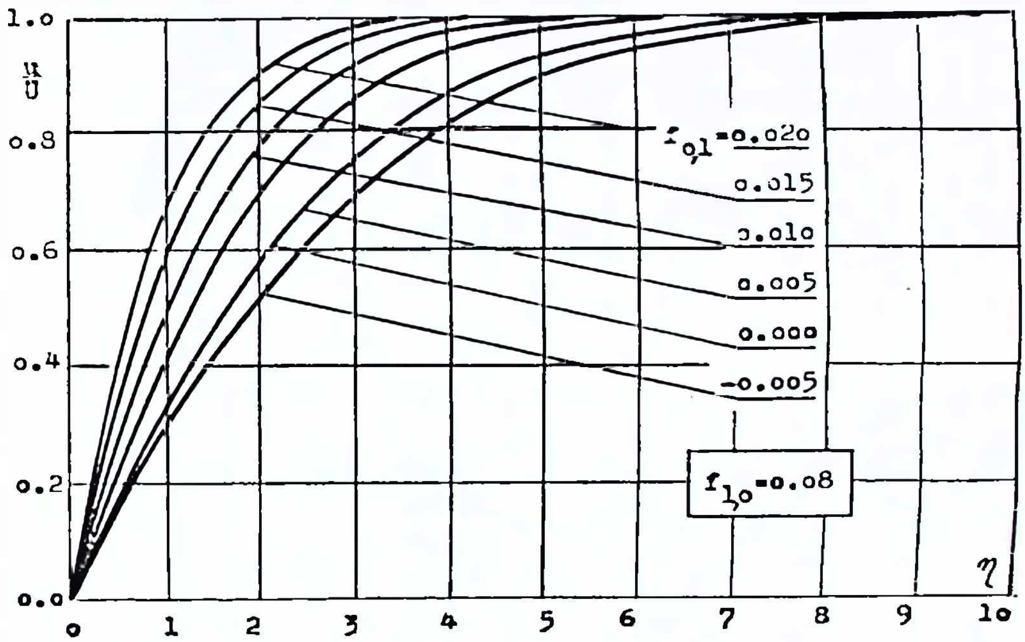

$f_{1,0}/B^2$
$f_{0,1}$ = -0.005
-0.010
-0.080
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
$\rightarrow f_{1,0}$
-0.005
-0.010
-0.080
$f_{0,1}$ = 0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035

sl. 12

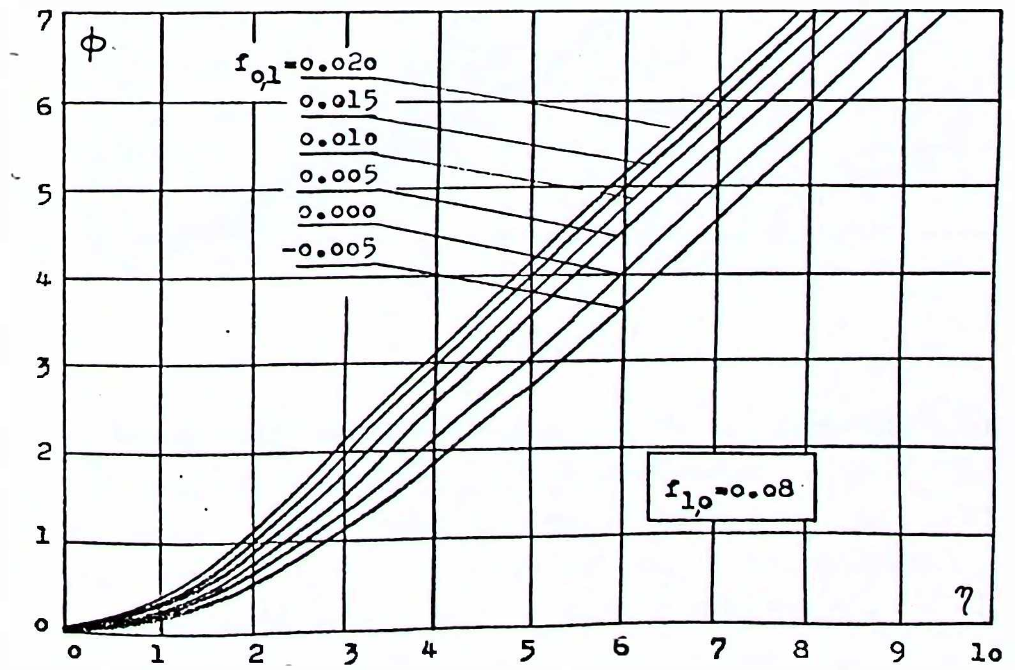

$f_{0,1}/B^2$
$f_{0,1}$ = 0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
$f_{0,1}$ = 0.000
-0.005
-0.010
-0.015
-0.020
-0.025
-0.030
-0.035
-0.040
-0.045
-0.050
-0.055
-0.060
-0.065
-0.070
-0.075
-0.080

sl. 13

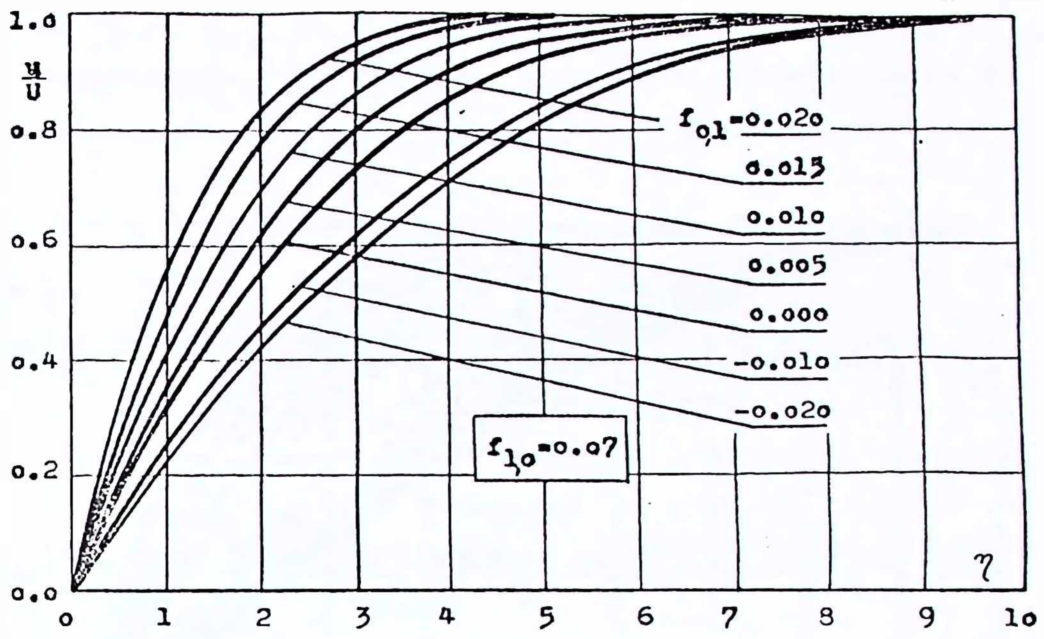
respektivno, za parametar nestacionarnosti $f_{0,1}$ jednako nuli, poklapati sa univerzalnim rešenjima stacionarnog graničnog sloja koje su, označene na isti način, prisutne u mnogim, u literaturi navedenim radovima. Neznatna odstupanja prisutna oko prednje zaustavne tačke i tačke odvajanja graničnog sloja, uzrokovane su izborom vrijednosti koraka dinamičkog parametra $f_{1,0}$ pri numeričkoj integraciji jednačine (3.2.1).



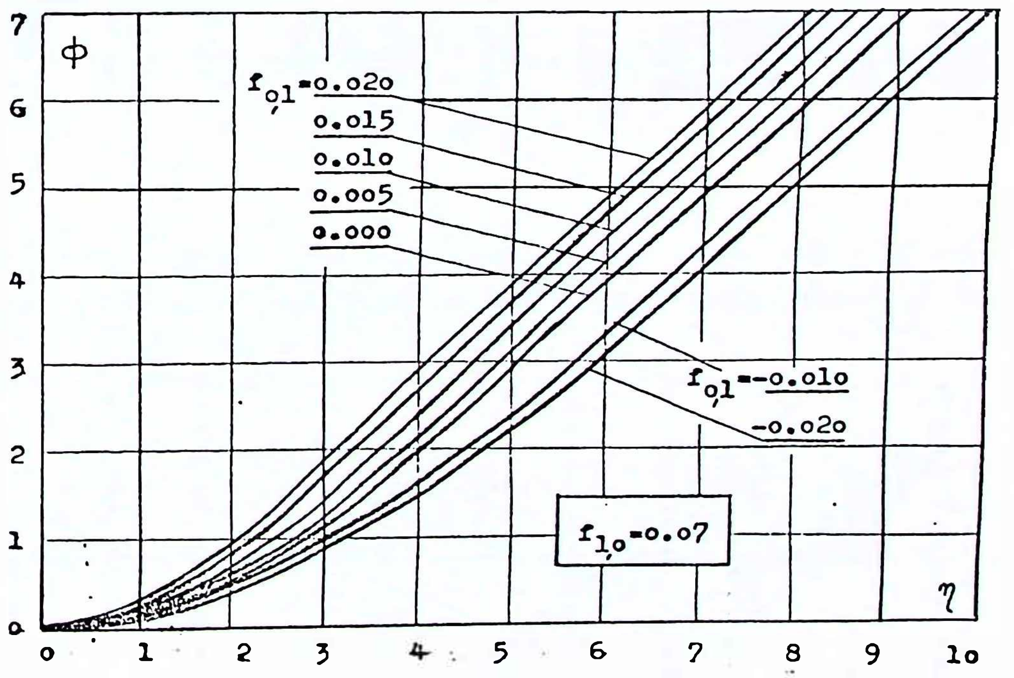

sl. 14




sl. 15



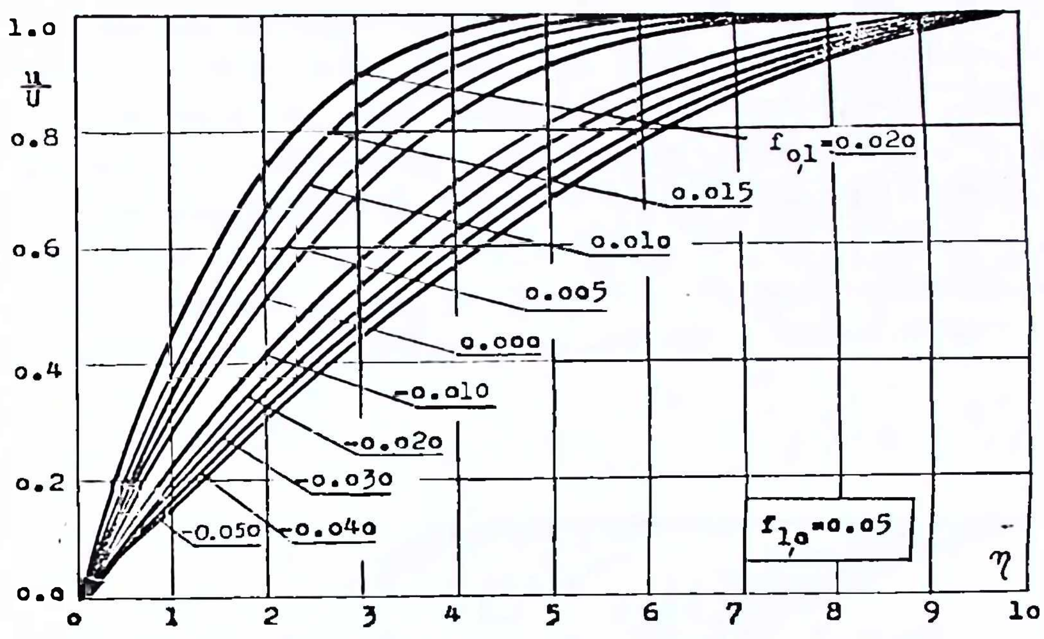

sl. 16




sl. 17

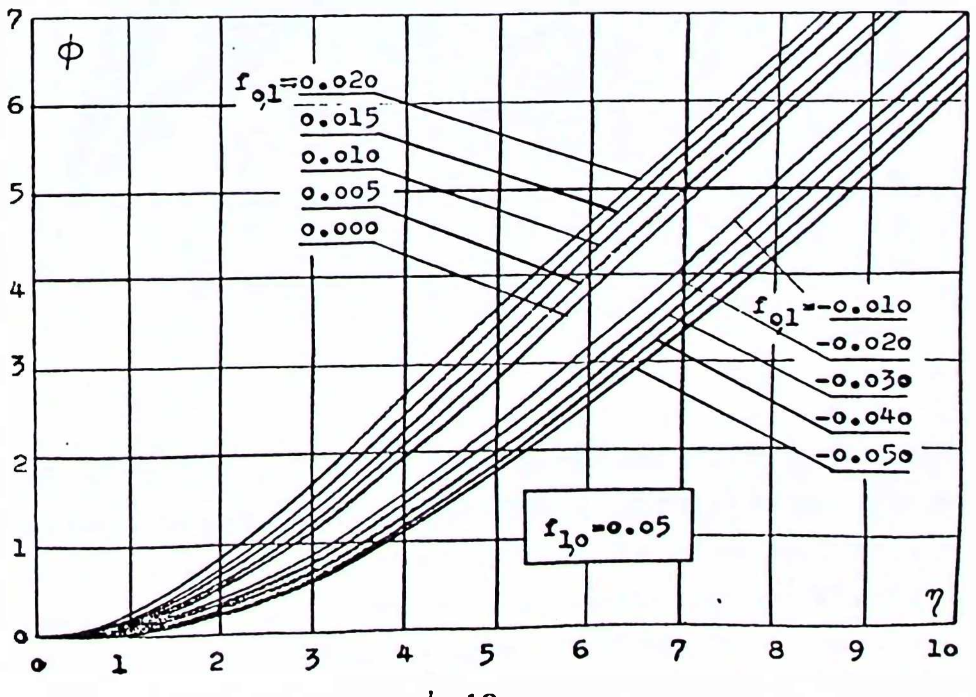
Rasporedi odnosa brzina u/U i bezdimenzione strujne funkcije Φ pri različitim pozitivnim i negativnim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ dati su na sl. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 i 23 za vrijednosti dinamičkog parametra u konfuzornoj oblasti $f_{1,0}$=0.08; 0.07; 0.05; 0.03 i 0.01, a za dinamičke parametre u difuzornoj oblasti $f_{1,0}$=-0,01; -0.03; -0.05;

-0.07 i -0.08 na sl. 26.27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 i 35, dok njihove raspodjele na mjestu gdje spoljašnja brzina U ima



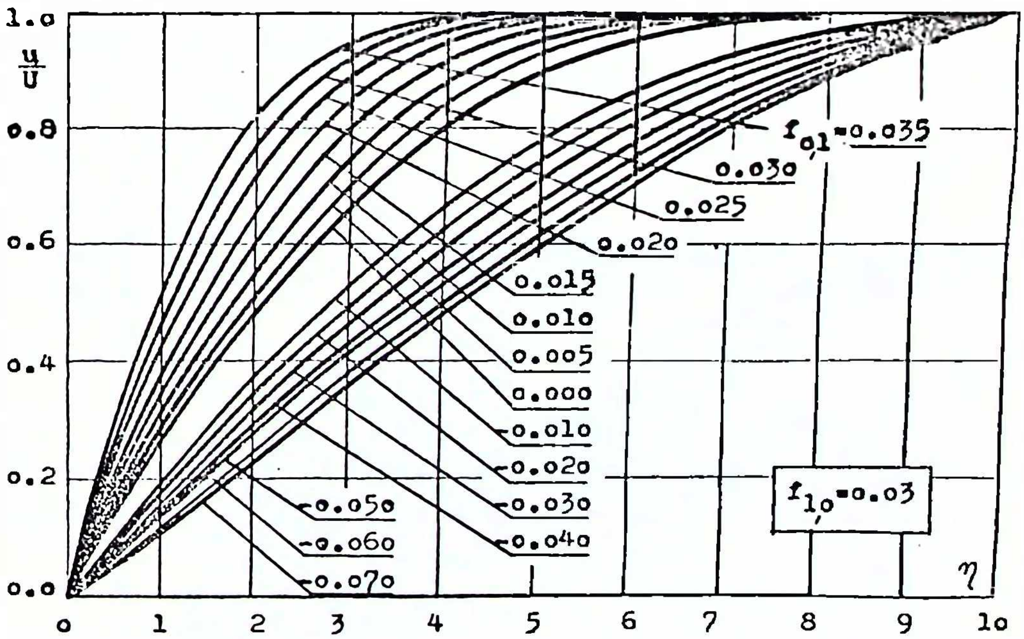

sl.18

maksimalnu vrijednost ($f_{1,o}$=0) daju sl. 24 i sl. 25. Zapaža se sa svih slika, na kojima su date raspodjele odnosa u/U, da brzina u



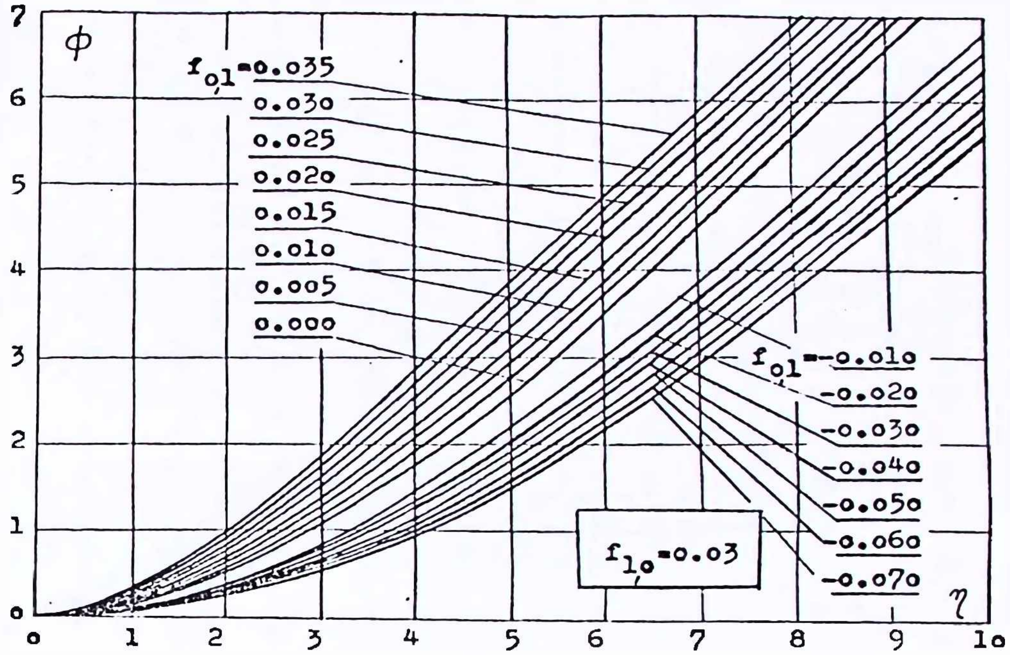

sl. 19

graničnom sloju u brže teži ka spoljašnjoj brzini U sa porastom intenziteta ubrzanih kretanja, tj. pri povećavanju pozitivne vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, i to kako u konfuzornoj oblasti ($f_{1,0}>0$), tako i u difuzornoj ($f_{1,0}<0$), odnosno duž cijele površine opstrujavanog tijela. Medjutim, sa tih istih slika se isto tako vidi da brzina u sporije teži ka spoljašnjoj brzini U, tj. odnos u/U opada pri usporenijim kretanjima struje, odnosno pri povećanju negativnih vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, i to takodje duž cijele konfuzorno-difuzorne oblasti graničnog sloja. Isto tako je uočljivo da, smanjivanjem konfuzorne oblasti graničnog sloja prikazano opadanjem pozitivnih vrijednosti dinamičkog parametra

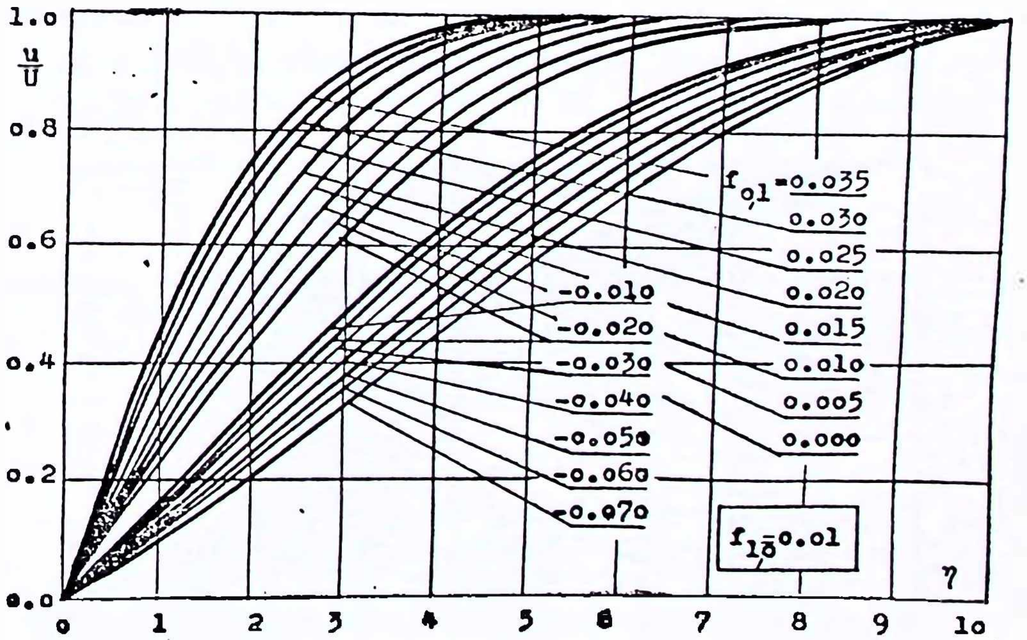



*sl. 20*

$f_{1,0}$ od 0.08 do 0.01, kao i sa povećavanjem difuzorne oblasti tj. pri povećavanju negativnih vrijednosti dinamičkog parametra $f_{1,0}$ od -0,01 do -0.08, odnos brzina u/U opada kako pri ubrzanim tako i nešto intenzivnije pri usporenim kretanjima struje. Sva ova zapažanja potvrdjuju jednu važnu činjenicu , da se debljina graničnog sloja smanjuje sa ubrzavanjem kretanja, odnosno povećava

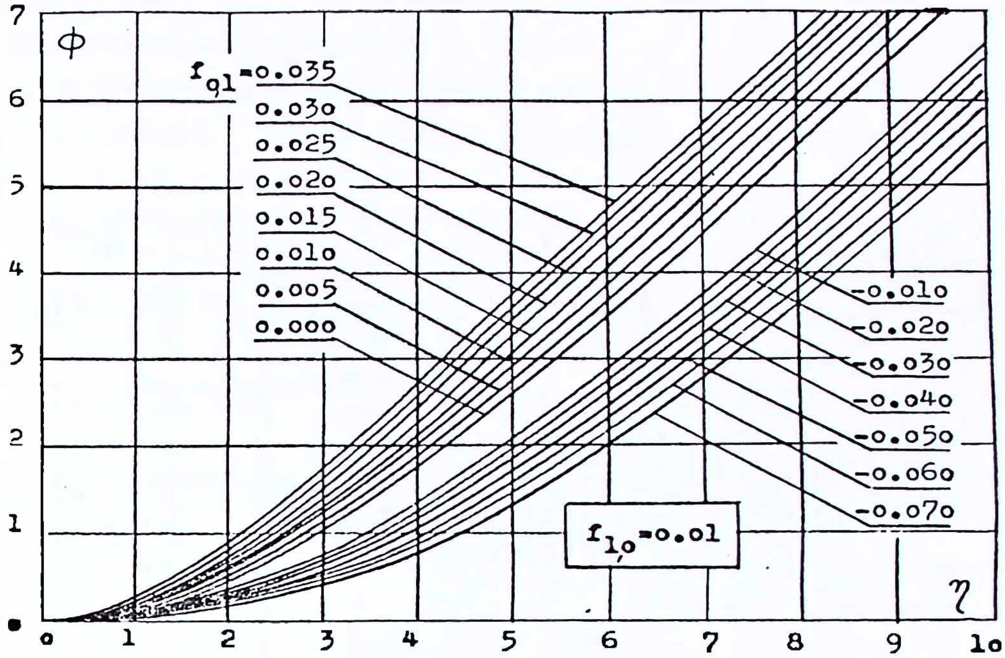



sl. 21



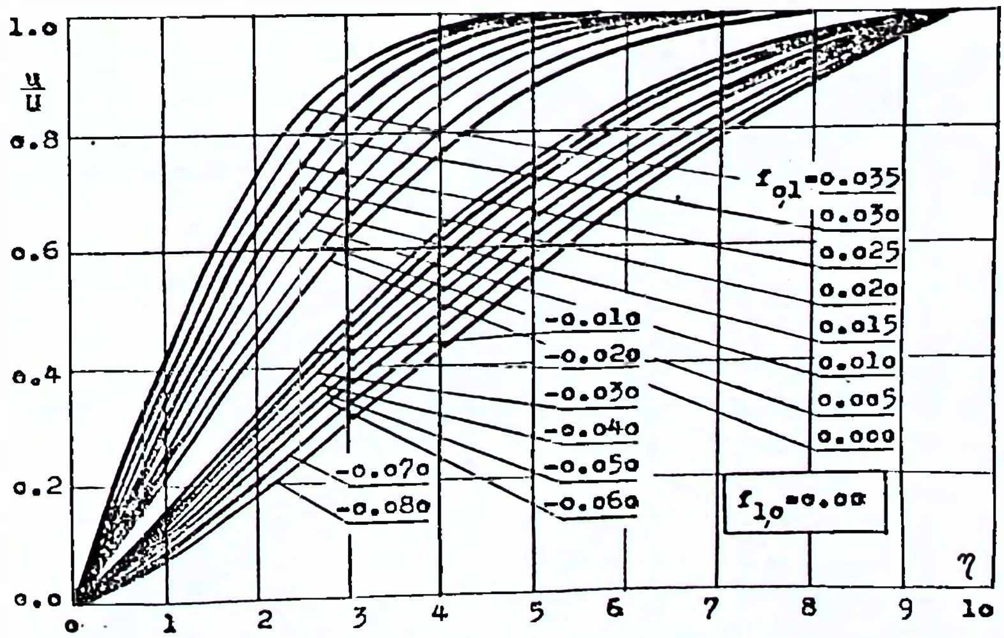

sl. 22

sa usporavanjem spoljašnje struje, i to u svim presjecima opstrujavane površine, počevod prednje zaustavne tačke (oblast




sl. 23

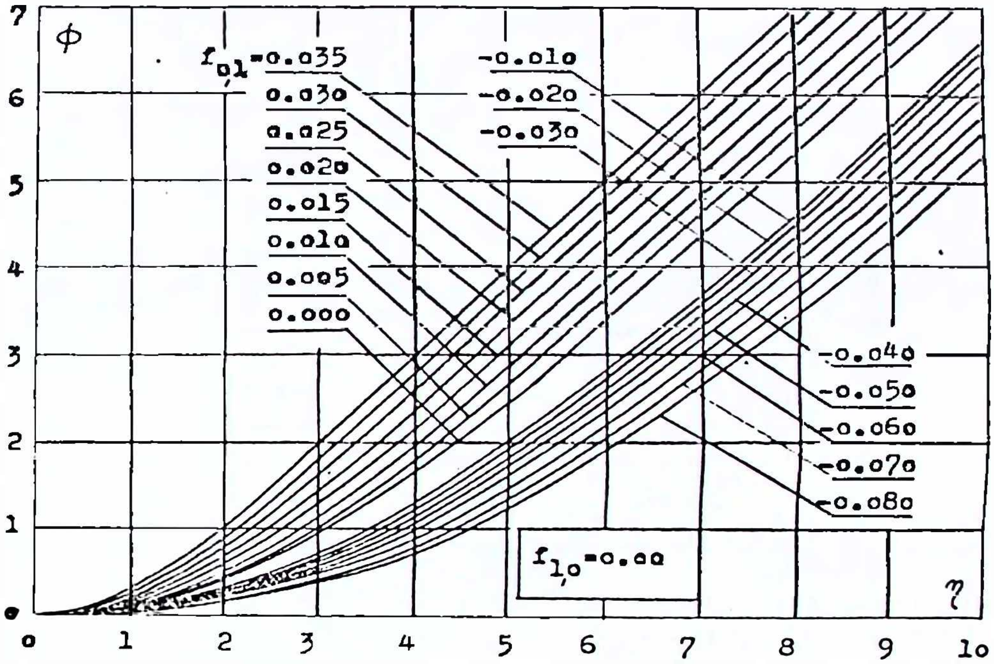
najveće konfuzornosti) pa sve do tačke njegovog odvajanja (oblast najveće difuzornosti). To zapravo znači da ubrzana kretanja odlažu pojavu odvajanja graničnog sloja sa konture, odnosno da se tačka odvajanja pomjera nizvodno, dok usporena kretanja imaju suprotan efekat koji se sastoji u pomjeranju tačke odvajanja ka prednjoj




sl. 24

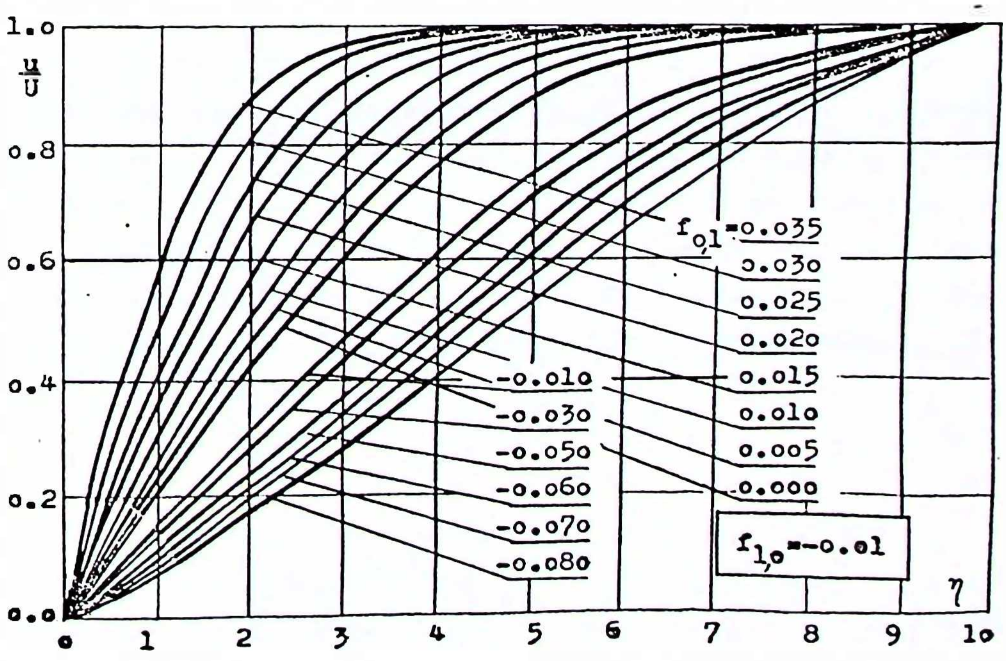
zaustavnoj tački, tj. u formiranju graničnog sloja na manjem dijelu opstrujavane površine.

Slična zapažanja odnose se i na raspodjele bezdimenzione strujne funkcije $\Phi$, prikazane na navedenim slikama pri različitim



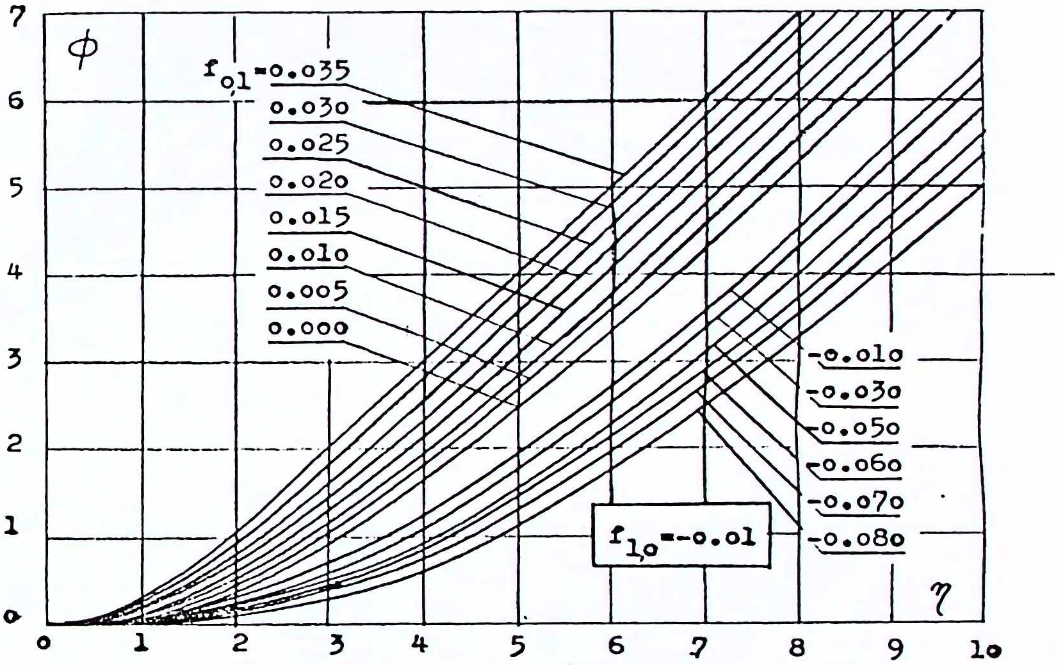

sl. 25

pozitivnim i negativnim vrijednostima dinamičkog parametra $f_{1,0}$ i




sl. 26

parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$. Kao reper za odredjivanje ponašanja raspodjela u/U i Φ u različitim presjecima konfuzorne i difuzorne oblasti graničnog sloja pri ubrzanim i usporenim kretanjima, mogu i ovdje, kako je to već ranije navedeno, poslužiti one raspodjele koje se odnose na stacionarni granični sloj prikazan na svim slikama sa $f_{0,1}=0$.



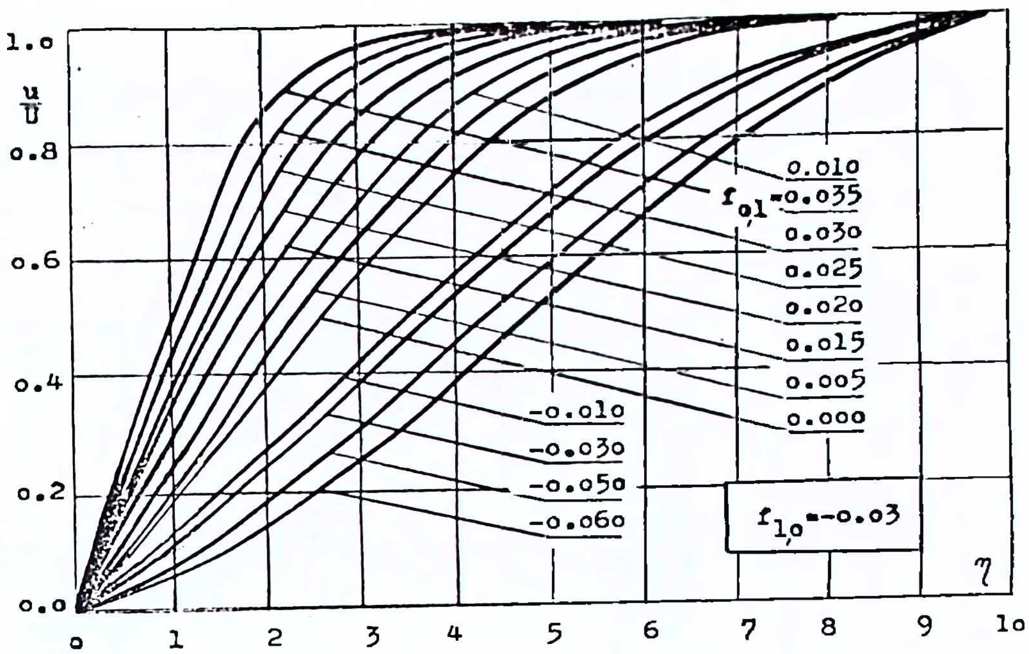

*sl. 27*

Odgovarajuće veličine A B i Φ"(o) potrebne za sračunavanje uobičajenih karakterističnih veličina nestacionarnog graničnog sloja $\delta^*$, $\delta^{**}$ i $\tau_w$ datih izrazom (2.1.19), slijedeći pri tome isti postupak kao i pri proračunu stacionarnog graničnog sloja [22], odredjuju se iz priloženih tabela univerzalnih rešenja posredstvom relacija $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$, izvedenih iz izraza (3.1.8) uz korišćenje (3.1.6) i (2.1.19), i koje glase

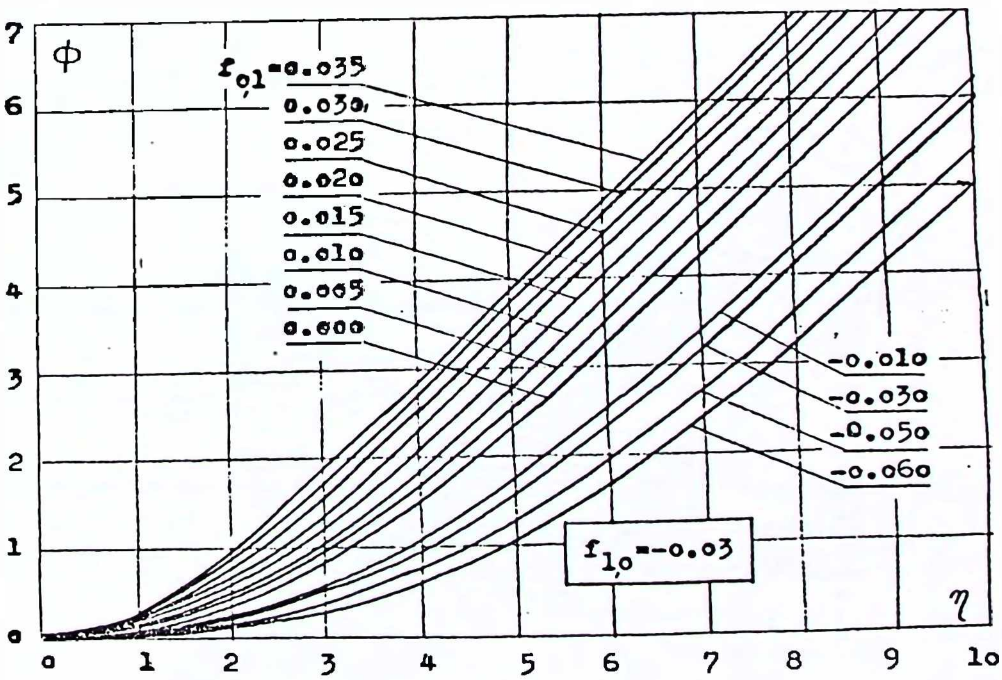
$$\frac{f_{1,0}}{B^2} = \frac{a_0 U'}{U^{b_0}} \int_0^x U^{b_0-1} dx \,, \qquad (4.2.6)$$

i

$$\frac{f_{0,1}}{B^2} = \frac{a_0 \dot{U}}{U^{b_0+1}} \int_0^x U^{b_0-1} dx \,. \qquad (4.2.7)$$

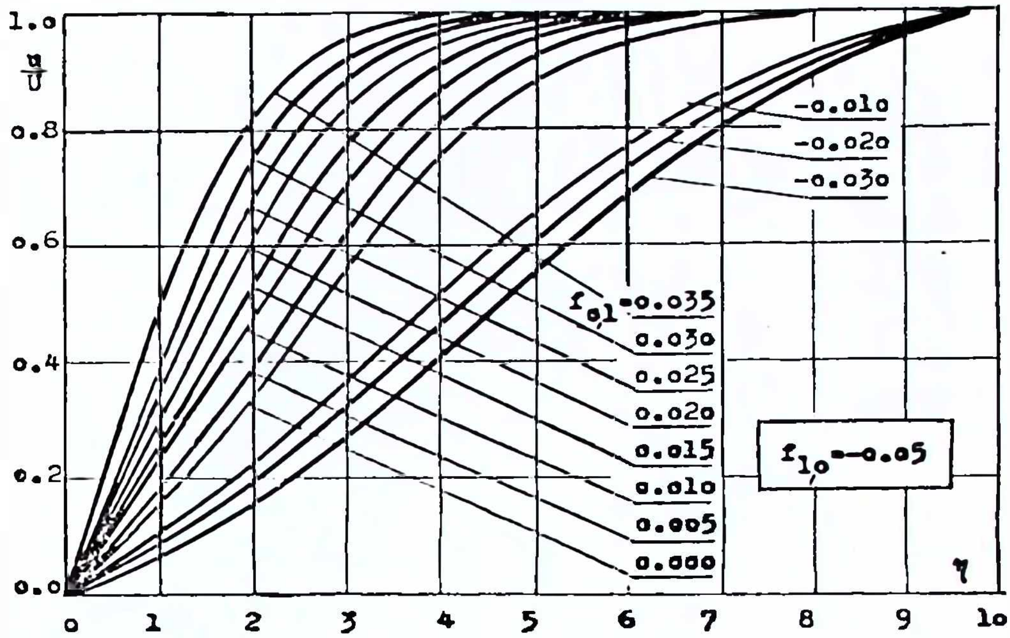



sl. 28

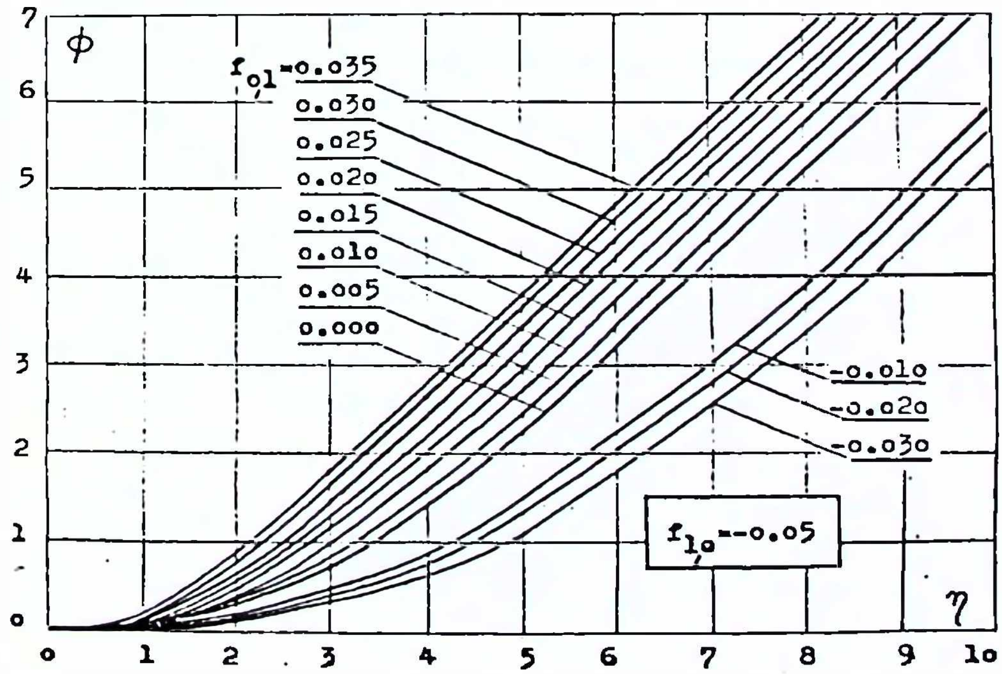



sl. 29

U desnu stranu relacija (4.2.6) i (4.2.7), naime, uvrštava se najprije zadata raspodjela spoljašnje brzine $U(x,t)$ gdje je X podužna a t vremenska koordinata, da bi se, zatim, pri zahtijevanom parametru nestacionarnosti $f_{01}$, u trenutku $t_0$, i za posmatrane različite koordinate na konturi $x_0$ i $x_{00}$ izračunale

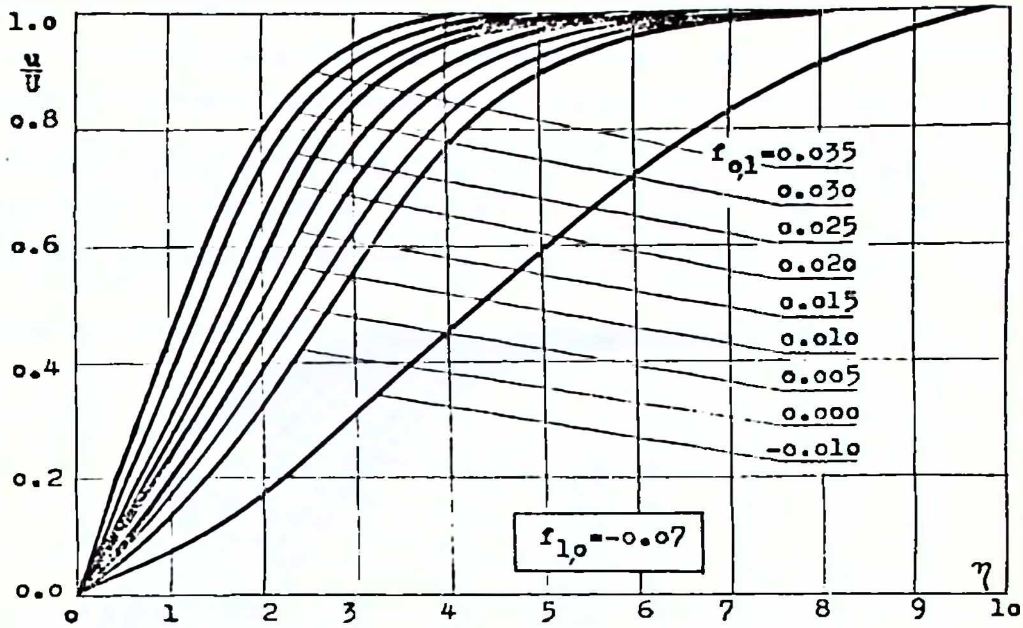



sl. 30



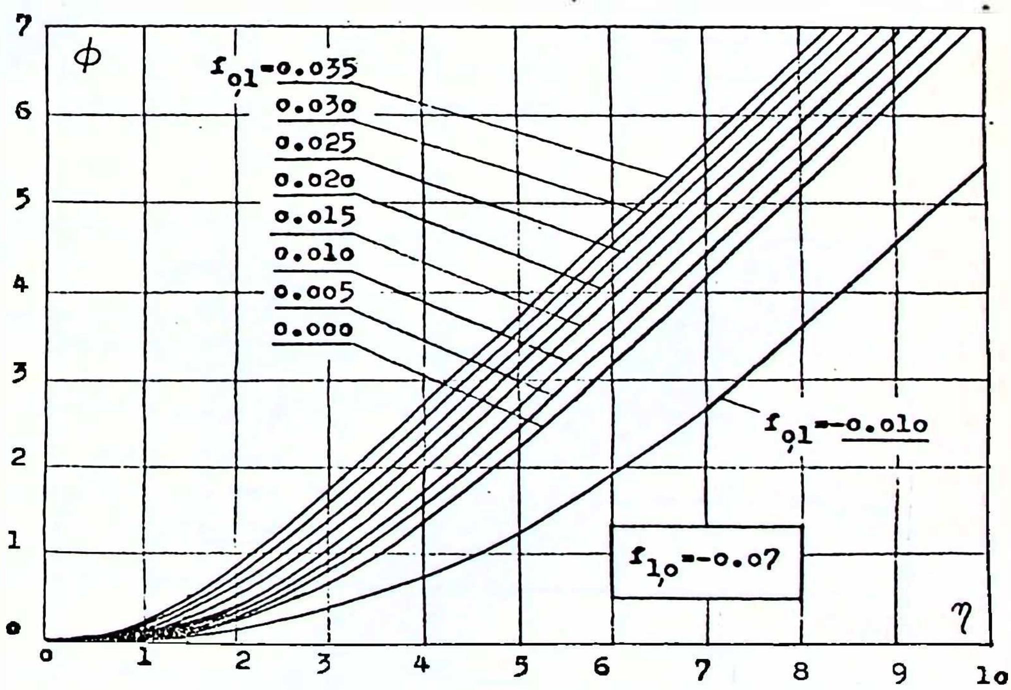

sl. 31

njihove trajne vrijednosti. Time su pri to, za vrijednosti $x_o$ i $x_{oo}$ odredjene lijeve strane relacija (4.2.6) i (4.2.7), tj.




*sl. 32*

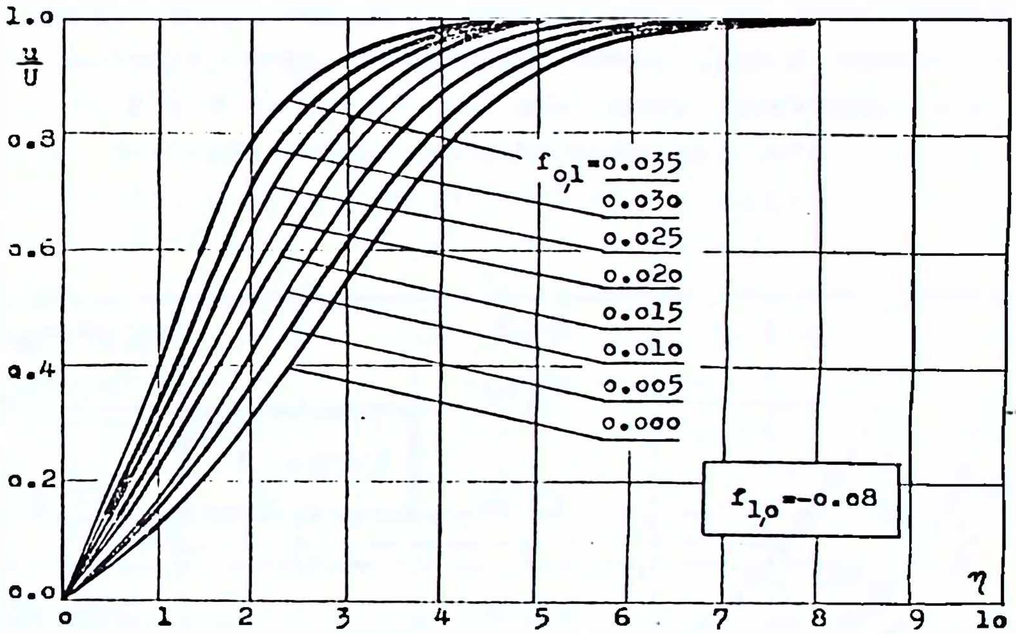




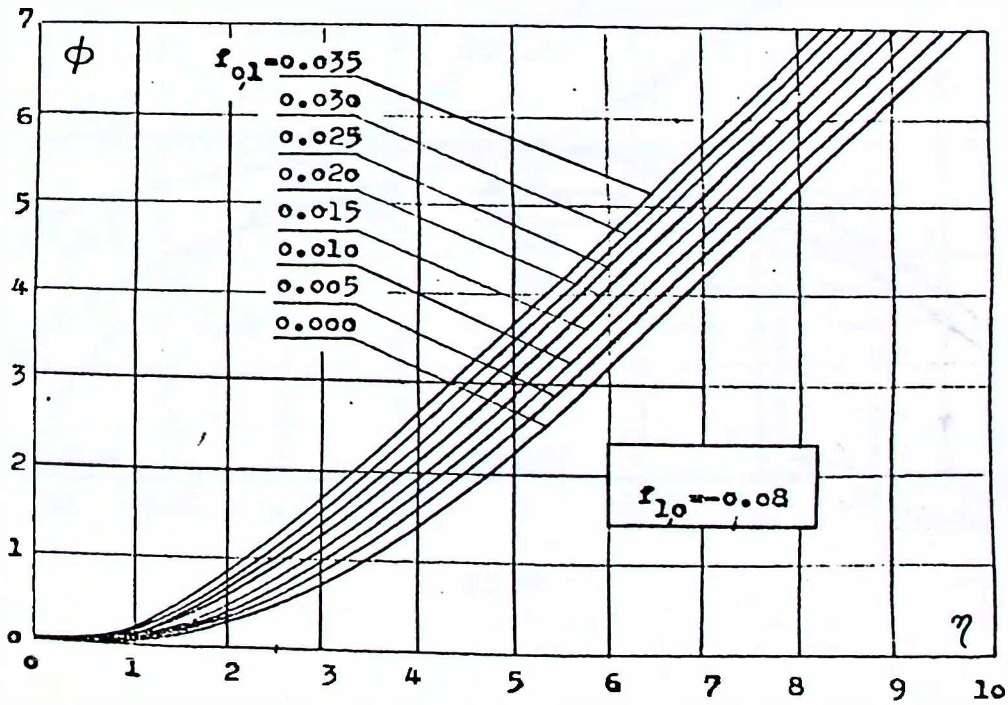

*sl. 33*

tj. $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$, koje ustvari predstavljaju univerzalna rešenja $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ smještena u tabelama T22 do T26 pri istom parametru nestacionarnosti $f_{0,1}$. Pošto se u raspodjeli

$f_{1,o}/B^2$, koja je prema izrazu (4.2.6) funkcija od x i t, u trenutku $t_o$ i pri parametru nestacionarnosti $f_{o,1}$ mogu naći, pri koordinatama $x_o$ obično smještenih na jednom dijelu konture, samo nekoliko njenih pripadnih vrijednosti $(f_{1,o}/B^2)_o$ koje se pokapaju sa univrzalnim veličinama $f_{1,o}/B^2$, a što za sračunavanje karakteristika graničnog sloja na cijeloj konturi nije dovoljno,

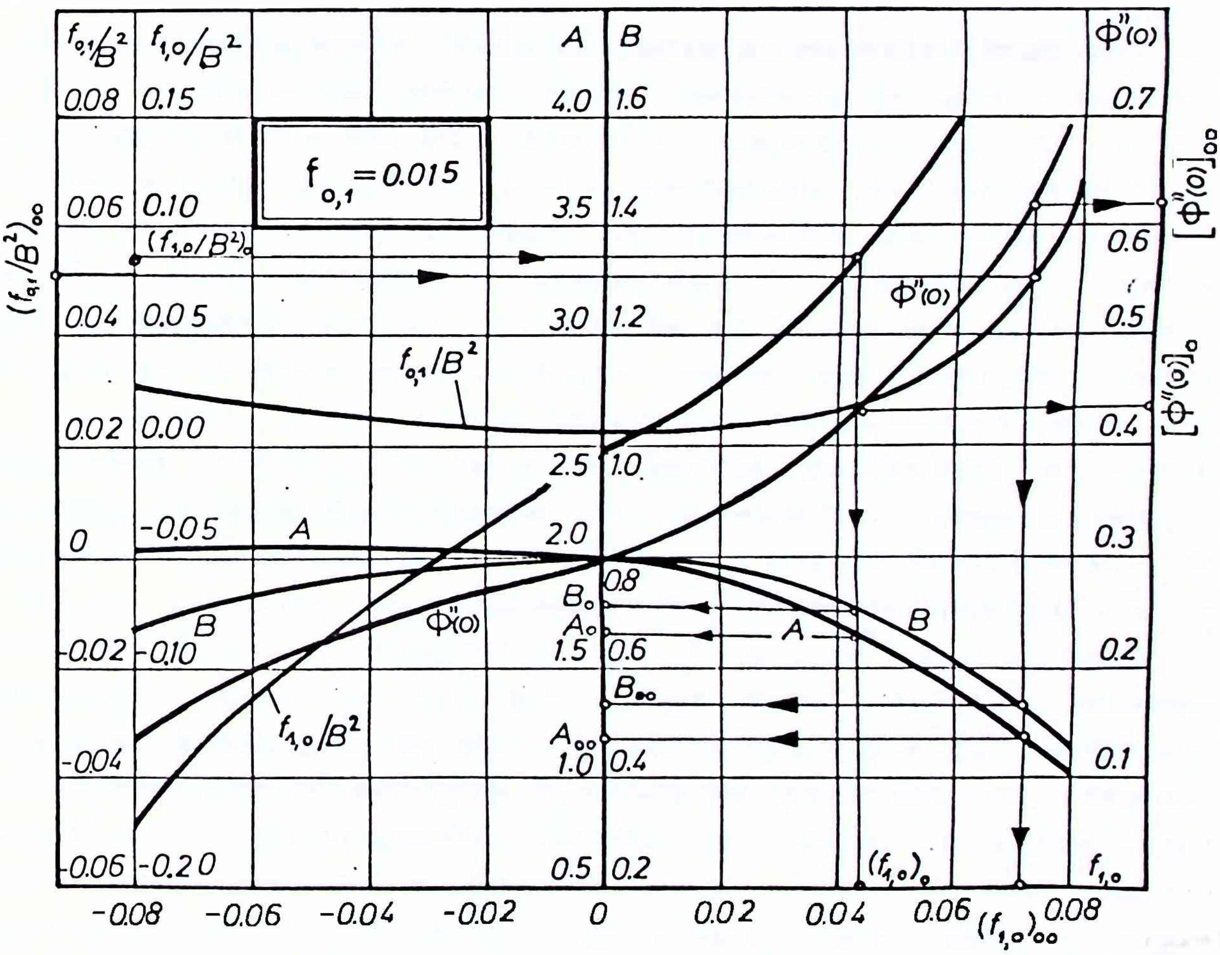



sl. 34




sl. 35

to se za odredjivanje preostalih koordinata na konturi označenih sa $x_{oo}$ mora koristiti raspodjela (4.2.7) u kojoj se takodje pri istim vrijednostima za to i $f_{o,1}$ nalaze one veličine $(f_{o,1}/B^2)_{oo}$ koje se mogu naći u tabeli univerzalnih rešenja $f_{o,1}/B^2$. Ukoliko veličine $(f_{1,o}/B^2)_o$ i $(f_{o,1}/B^2)_{oo}$ u univerzalnim tabelama pripadaju pored istog parametra $f_{o,1}$ i istom dinamičkom parametru $f_{1,o}$, to je postupak za sračunavanje karakteristika graničnog sloja lakši sobzirom na činjenicu da se za dvije koordinate $x_o$ i $x_{oo}$ na konturi može koristiti samo jedna grupa univerzalnih rešenja A, B i $\Phi''(o)$, i to ona koja dogovara tom dinamičkom parametru $f_{1,o}$. Na osnovu navedenih vrijednosti




sl. 36

$(f_{1,o}/B^2)_o$ i $(f_{o,1}/B^2)_{oo}$ koje se za $x_o$ i $x_{oo}$ poklapaju sa univerzalnim rešenjima $f_{1,o}/B^2$ i $f_{o,1}/B^2$, dalje se, u proračunu graničnog sloja prema (2.1.19) iz univerzalnih tabela za A, B i $\Phi''(o)$ nalaze veličine $(f_{1,o})_o$, $A_o$, $B_o$ i $[\Phi''(o)]_o$ odnosno $(f_{1,o})_{oo}$, $A_{oo}$, $B_{oo}$ i $[\Phi''(o)]_{oo}$, pri poznatom $f_{o,1}$. Treba napomenuti da se koordinate $x_o$ i $x_{oo}$, za koje se veličine $(f_{1,o}/B^2)_o$ i $(f_{o,1}/B^2)_o$ poklapaju sa univerzalnim rešenjima $f_{1,o}/B^2$ i $f_{o,1}/B^2$, obično u toku proračuna graničnog sloja dobijaju interpolacijom.

Kod izvodjenja brzih proračuna, sa ciljem odredjivanja orijentacionih vrijednosti, pri čemu se od rezultata ne očekuje naročita preciznost, mogu se dijagrami univerzalnih rešenja $f_{1,o}/B^2$, $f_{o,1}/B^2$, A, B i $\Phi''(o)$ prikazani na slikama 12, 13, 9, 10, 11 respektivno, za konkretnu vrijednost parametra nestacionarnosti $f_{o,1}$, iskoristiti kao nomogrami za odredjivanje veličina: $(f_{1,o})_o$, $A_o$, $B_o$, $[\Phi''(o)]_o$ i $(f_{1,o})_{oo}$, $A_{oo}$, $B_{oo}$, $[\Phi''(o)]_{oo}$ na osnovu $(f_{1,o}/B^2)_o$ i $(f_{o,1}/B^2)_{oo}$ nadjenih pri koordinatama $x_o$ i $x_{oo}$ na opisani način. Ovaj postupak je prikazan grafički na sl. 36 i to na shematski način. Naime, najprije je, počev od ordinate, koja odgovara vrijednosti $(f_{1,o}/B^2)_o$ sračunatoj za $x_o$ i to iz izraza (4.2.6), povučena prava paralelna sa apcisnom $f_{1,o}$-osom (smjer je označen strelicama) do presjeka sa onom raspodjelom $f_{1,o}/B^2$, koja pripada konkretnoj vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{o1}$. Iz te tačke je zatim ucrtana prava paralelna sa ordinatnom osom, koja presijeca redom odgovarajuće raspodjele A, B i $\Phi''(o)$ i na kraju odredjuje na opcisnoj osi traženu vrijednost $(f_{1,o})_o$. Povlačenjem pravih paralelnih sa apcisnom $f_{1,o}$-osom iz presječnih tačaka na pomenutim raspodjelama, pri konkretnom parametru $f_{o,1}$, dobijaju se i ostale veličine $A_o$, $B_o$ i $[\Phi''(o)]_o$ potrebne za sračunavanje karakterističnih veličina graničnog sloja u presjeku $x_o$, tj. $\delta^*(x_o)$, $\delta^{**}(x_o)$ i $\tau_w(x_o)$. Na isti način, počev od ordinate, koja sada odgovara vrijednosti $(f_{o,1}/B^2)_{oo}$ sračunatoj za $x_{oo}$ i to iz izraza (4.2.7), povučena je prava paralelna sa apcisnom $f_{1,o}$-osom do presjeka sa raspodjelom $f_{o,1}/B^2$ pri istom parametru $f_{o,1}$. Iz te tačke se zatim ucrtava prava paralelna sa ordinatnom osom, koja redom presijeca raspodjele A, B i $\Phi''(o)$ prikazane pri istom parametru nestacionarnosti $f_{o,1}$, a na apcisnoj osi odredjuje traženu vrijednost $(f_{1,o})_{oo}$. Zatim se povlačenjem pravih paralelnih sa apcisnom $f_{1,o}$-osam iz presječnih tačaka na ranije pomenutim raspodjelama, dobijaju i ostale veličine $A_{oo}$, $B_{oo}$ i $[\Phi''(o)]_{oo}$, potrebne takodje za sračunavanje karakterističnih veličina graničnog sloja ali sada u drugom presjeku označenom sa xoo, tj. $\delta^*(x_{oo})$, $\delta^{**}(x_{oo})$ i $\tau_v(x_{oo})$.

Dakle, kao što se do sada i vidjelo, univerzalna rešenja se mogu koristiti za donošenje generalnih zaključaka o razvoju graničnog sloja. Medjutim, puni njihov značaj dolazi do izražaja prilikom proračuna partikularnih problema, o čemu će biti riječi u narednoj glavi.

# V - GLAVA

## PRAKTIČNA PRIMJENA DOBIJENIH UNIVERZALNIH REŠENJA

### 1. PRORAČUN KONKRETNIH PROBLEMA NESTACIONARNOG GRANIČNOG SLOJA

U ovoj glavi rada vrši se proračun partikularnih problema graničnog sloja, sa zadatim karakteristikama spoljašnjeg strujanja. To znači, da se zadaje brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja. Za ovaj proračun koriste se univerazalna rešenja, odredjena u prethodnoj glavi i smještena u tabelama.

Proširujući metodu LOJCJANSKOG [19] na nestacionarne probleme graničnog sloja, BUŠMARIN i BASIN [44], NIKODIJEVIĆ [48] i drugi autori, su za svaki partikularni problem rešavali jednačinu impulsa, čime se produžava vrijeme njegovog proračuna. Zato je metoda koju je razvio SALJNIKOV u radu [22] za stacionarne probleme graničnog sloja, o čemu je bilo u uvodu i odjeljku 2.1 ovoga rada, aplikativnija za primjenu, sobzirom da je izbjegnuto rešavanje jednačine impulsa pri proračunu partikularnih problema. To je i bio razlog da se ova metoda proširi na nestacionarne probleme graničnog sloja. Dakle, proračun konkretnih problema nestacionarnog graničnog sloja primjenom formirane metode u ovom radu počinje, kako je to prikazano u odjeljku 4.2, zadavanjem raspodjele brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja kao funkcije podužne koordinate i vremena.

U ovom radu se, kao prvi primjer [48], proučavaju partikularni problemi kod kojih je brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja

$$\tilde{U}(x,t) = (B + A\tilde{t}^{n}) \sin \tilde{x} \; , \qquad (5.1.1)$$

gdje su A, B i n proizvoljne realne konstante. Ovakav raspored brzine, u opštem slučaju, odgovara ubrzanom ili usporenom kretanju spoljašnje struje na kružnom cilindru. Bezdimenzione veličine za brzinu $\tilde{U}$, podužnu koordinatu $\tilde{x}$ i vrijeme $\tilde{t}$ prisutne u izrazu (5.1.1), daju se u vidu

$$\tilde{U} = \frac{U}{U_o} \; ; \; \tilde{x} = \frac{x}{R} \; ; \; \tilde{t} = \frac{U_o}{R} t \; , \qquad (5.1.2)$$

u kojemu su: $U$ brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja, $U_o$ razmjera te brzine, $x$ podužna koordinata, $t$ vrijeme i $R$ poluprečnik cilindra.

Kao drugi primjer proučavaju se partikularni problemi, kod kojih je raspodjela brzine spoljašnjeg strujanja na kružnom cilindru čija se brzina središta mijenja sa vremenom po zakonu $U_\infty e^{kt}$, data u obliku

$$U(x,t) = 2 U_\infty e^{kt} \sin\left(\frac{x}{R}\right) , \qquad (5.1.3)$$

gdje je $k$=const. i $k>0$.

Potencijalno strujanje oko kružnog cilindra, čija se brzina središta mijenja sa vremenom po zakonu $U_\infty e^{kt}$ i čiji poluprečnik raste tokom vremena po zakonu $Re^{k_1 t}$, prikazano sa

$$U(x,t) = 2 U_\infty e^{kt} \sin\left(\frac{x}{Re^{k_1 t}}\right) , \qquad (5.1.4)$$

pri $k,k_1$=const, i $k,k_1>0$ koristi se za proračun nestacionarnog graničnog sloja u trećem primjeru. Na kraju se proučavaju i partikularni problemi kod kojih je brzina potencijalnog strujanja oko kružnog cilindra, čija se brzina središta takodje mijenja sa vremenom ili po zakonu $U_\infty t^m$ i čiji poluprečnik raste tokom vremena po zakonu $Rt^n$, data u obliku

$$U(x,t) = 2 U_\infty t^m \sin\left(\frac{x}{Rt^n}\right) , \qquad (5.1.5)$$

u kojemu je $m,n$=const, i $m, n>o$.

Stavljajući da je razmjera brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja $U_o=2U_\infty$ i prikazujući u izrazima (5.1.3), (5.1.4) i (5.1.5) [30], [42] veličine $U,x$ i $t$ u njihovom bezdimenzionom obliku, korišćenjem (5.1.2), dobija se da je raspodjela bezdimenzione brzine potencijalnog strujanja za drugi primjer u obliku

$$\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t}) = e^{m\tilde{t}} \sin \tilde{x} , \qquad (5.1.6)$$

gdje je $m=k\frac{R}{U_o}$, za treći primjer

$$\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t}) = e^{n\tilde{t}} \sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right), \qquad (5.1.7)$$

u kojemu je $m=k_1\frac{R}{U_o}$ i $n=k\frac{R}{U_o}$, i za četvrti primjer

$$\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t}) = p\tilde{t}^{\,m} \sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right), \qquad (5.1.8)$$

pri čemu su $p=(\frac{R}{U_o})^m$ i $r=(\frac{R}{U_o})^n$, a $m,n=const$, i $m,n>o$.

Za poznatu spoljašnju brzinu potrebno je, proračunavajući granični sloj kako to zahtijeva navedena metoda, izraziti veličine $f_{1,o}/B^2$ i $f_{o,1}/B^2$ u funkciji podužne koordinate i vremena koje, prikazane izrazima (4.2.6) i (4.2.7) i uz korišćenje bezdimenzionih vrijednosti za U, x i t posredstvom (5.1.2), glase

$$\frac{f_{1,0}}{B^2} = \frac{a_o \tilde{U}'}{\tilde{U}^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}^{b_o-1} d\tilde{x}, \qquad (5.1.9)$$

i

$$\frac{f_{o,1}}{B^2} = \frac{a_o \dot{\tilde{U}}}{\tilde{U}^{b_o+1}} \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}^{b_o-1} d\tilde{x}. \qquad (5.1.1o)$$

Stavljajući, sada, izraze (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7) i (5.1.8) za bezdimenzionu brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja, u desnu stranu izraza (5.1.9), dobija se da je raspodjela veličine $f_{1,o}/B^2$ u prvom i drugom primjeru ista, tj.

$$\frac{f_{1,0}}{B^2} = \frac{a_o \cos\tilde{x}}{(\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x}, \qquad (5.1.11)$$

za treći primjer

$$\frac{f_{1,0}}{B^2} = \frac{a_o \cos\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)}{e^{m\tilde{t}}\left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o-1} dx, \qquad (5.1.12)$$

i za četvrti

$$\frac{f_{1,0}}{B^2} = \frac{a_o \cos\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)}{r\tilde{t}\left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)\right]^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x}. \qquad (5.1.13)$$

Na isti način, stavljajući izraze (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7) i (5.1.8) u desnu stranu izraza (5.1.10), dobijaju se za vrijednosti $f_{o,1}/B^2$ u navedenim primjerima sledeći oblici: za prvi primjer

$$\frac{f_{0,1}}{B^2} = \frac{a_o A n \tilde{t}^{\,n-1}}{(B+A\tilde{t}^{\,n})^2 (\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{x} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \,, \tag{5.1.14}$$

za drugi

$$\frac{f_{0,1}}{B^2} = \frac{a_o m}{e^{m\tilde{t}} (\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \,, \tag{5.1.15}$$

za treći

$$\frac{f_{0,1}}{B^2} = \frac{a_o\left[n\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right) - m\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\cos\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]}{e^{n\tilde{t}}\left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o+1}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x} \,, \tag{5.1.16}$$

i za četvrti primjer

$$\frac{f_{0,1}}{B^2} = \frac{a_o\left[m\sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right) - \frac{n\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\cos\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)\right]}{p\tilde{t}^{\,m+1}\left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)\right]^{b_o+1}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^{\,n}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x} \,. \tag{5.1.17}$$

Postupak za korišćenje raspodjela $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ u cilju traženja bezdimenzione podužne koordinate $\tilde{x}_o$ kojoj u trenutku $\tilde{t}_o$, pri jednoj kombinaciji parametara A, B i n u prvom primjeru, pri m u drugom, m i n u trećem i m, n, p i r u četvrtom primjeru, pripadaju univerzalne veličine $A_o$, $B_o$ i $[\Phi''(0)]_o$, potrebne za odredjivanje karakteristika graničnog sloja u presjeku $x_o$, dat je u odeljku 4.2 ovog rada. zato su za numeričko sračunavanje funkcija $f_{1,0}/B^2$, prikazanih izrazima (5.1.11), (5.1.12) i (5.1.13) napisani na FORTRAN IV jeziku programi V, VI i VII, za prvi i drugi, za treći i za četvrti primjer, respektivno. Za numeričko sračunavanje funkcija $f_{0,1}/B^2$ na osnovu izraza (5.1.14), (5.1.15), (5.1.16) i (5.1.17), napisani su, takodje na FORTRAN IV jeziku, programi VIII, IX, X i XI respektivno za prvi, drugi, treći i četvrti primjer.

Dalje se, u tako nadjenoj podužnoj koordinati $\tilde{x}_o$ u trenutku $\tilde{t}_o$ i pri odredjenoj kombinaciji parametara koji se nalaze u izrazima za spoljašnju brzinu $\tilde{U}$ zavisno od primjera, odredjuju karakteristične veličine graničnog sloja: bezdimenzioni tangencijalni napon na tijelu

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\sqrt{Re}}{\rho U_o^2}\,\tau_w \;, \qquad (5.1.18)$$

bezdimenziona debljina gubitka impulsa

$$\tilde{\delta}^{**} = \frac{\sqrt{Re}}{R}\,\delta^{**} \;, \qquad (5.1.19)$$

i bezdimenziona debljina istiskivanja

$$\tilde{\delta}^{*} = \frac{\sqrt{Re}}{R}\,\delta^{*} \;, \qquad (5.1.20)$$

gdje je Re REYNOLDS-ov broj definisan izrazom $Re = \frac{U_o R}{\nu}$ . Ove bezdimenzione karakteristične veličine graničnog sloja, pošto se u njihovim desnim stranama za $\tau_w$, $\delta^{**}$ i $\delta^{*}$ stave vrijednosti iz izraza (2.1.19), i uz korišćenje izraza (5.1.2), postaju

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\tilde{U}^{\frac{b_o}{2}+1}}{\left(a_o \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}^{b_o-1} d\tilde{x}\right)^{1/2}}\,\Phi''(0) \;, \qquad (5.1.21)$$

$$\tilde{\delta}^{**} = \tilde{U}^{-b_o/2}\left(a_o \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}^{b_o-1} d\tilde{x}\right) B \;, \qquad (5.1.22)$$

i

$$\tilde{\delta}^{*} = \tilde{U}^{-b_o/2}\left(a_o \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}^{b_o-1} d\tilde{x}\right) A \;. \qquad (5.1.23)$$

Stavljajući izraze za bezdimenzionu spoljašnju brzinu $\tilde{U}$ tj. (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7) i (5.1.8), redom u izraze (5.1.21), (5.1.22) i (5.1.23), dobija se da je za prvi primjer bezdimenzioni tangencijalni napon na zidu

$$\tilde{\tau}_w = \left\{ \frac{(B+A\tilde{t}^{n})^3 (\sin\tilde{x})^{b_o+2}}{a_o \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x}} \right\}^{1/2} \Phi''(0) \;, \qquad (5.1.24)$$

bezdimenziona debljina gubitka impulsa

$$\tilde{\delta}^{**} = \left\{ \frac{a_o}{(B+A\tilde{t}^{n})(\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} B \;, \qquad (5.1.25)$$

bezdimenziona debljina istiskivanja

$$\tilde{\delta}^* = \left\{ \frac{a_o}{(B+A\tilde{t}^n)(\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} A , \qquad (5.1.26)$$

za drugi primjer

$$\tilde{\tau}_w = \left\{ \frac{e^{3m\tilde{t}} (\sin\tilde{x})^{b_o+2}}{a_o \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x}} \right\}^{1/2} \phi''(0) , \qquad (5.1.27)$$

$$\tilde{\delta}^{**} = \left\{ \frac{a_o}{e^{m\tilde{t}} (\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} B , \qquad (5.1.28)$$

$$\tilde{\delta}^* = \left\{ \frac{a_o}{e^{m\tilde{t}} (\sin\tilde{x})^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} (\sin\tilde{x})^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} A , \qquad (5.1.29)$$

za treći primjer

$$\tilde{\tau}_w = \left\{ \frac{e^{3n\tilde{t}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o+2}}{a_o \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x}} \right\}^{1/2} \phi''(0) , \qquad (5.1.30)$$

$$\tilde{\delta}^{**} = \left\{ \frac{a_o}{e^{n\tilde{t}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} B , \qquad (5.1.31)$$

$$\tilde{\delta}^* = \left\{ \frac{a_o}{e^{n\tilde{t}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o}} \int_0^{\tilde{x}} \left[\sin\left(\frac{\tilde{x}}{e^{m\tilde{t}}}\right)\right]^{b_o-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} A , \qquad (5.1.32)$$

i za četvrti primjer

$$\tilde{\tau}_w = \left\{ \frac{(p\tilde{t}^m)^3 [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0+2}}{a_0 \int_0^{\tilde{x}} [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0-1} d\tilde{x}} \right\}^{1/2} \phi''(0) , \qquad (5.1.33)$$

$$\tilde{\delta}^{**} = \left\{ \frac{a_0}{p\tilde{t}^m [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0}} \int_0^{\tilde{x}} [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} B , \qquad (5.1.34)$$

i

$$\tilde{\delta}^{*} = \left\{ \frac{a_0}{p\tilde{t}^m [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0}} \int_0^{\tilde{x}} [\sin(\frac{\tilde{x}}{r\tilde{t}^n})]^{b_0-1} d\tilde{x} \right\}^{1/2} A . \qquad (5.1.35)$$

Za numeričko sračunavanje bezdimenzionih karakterističnih veličina graničnog sloja $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$, napisani su na FORTRAN IV jeziku programi i to: za izraze (5.1.24), (5.1.25) i (5.1.26) u prvom primjeru program XII; program XIII za izraze (5.1.27), (5.1.28) i (5.1.29) u drugom primjeru; za izraze (5.1.30), 5.1.31) i (5.1.32) u trećem primjeru program XIV, i za izraze (5.1.33), (5.1.34) i (5.1.35) u četvrtom primjeru program XV.

Numerička sračunavanja svih navedenih izraza, za koja su napisani programi od V do XV, obavljaju se i u ovom slučaju primjenom računara DELTA 4850/160 (VAX/VMS).

## 2. ANALIZA DOBIJENIH REZULTATA

Numeričkim sračunavanjem izraza (5.1.11) i (5.1.14) za prvi primjer, na osnovu programa V i VII, stavljajući da je $A=\pm1$, $B=1$, $n=1,2,3$ i $\tilde{t}=0.1$, 0.2, 0.3, dobijene su vrijednosti za $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ u dvjesta tačaka opstrujavanog kružnog profila, počev od zaustavne tačke $\tilde{x}=0$ pa do $\tilde{x}=2,5$ rad. Sračunavanje izraza (5.1.15) za drugi primjer, izvodi se po programu IX, za $\tilde{t}=0.01$, 0.1, 1.0 pri $m=0.01$, 0.1, 1.0. Za treći primjer izrazi (5.1.12) i (5.1.16)

PROGRAM V

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1)**S
      F1=0.4408*(COS(X))/(SIN(X)**B)
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

računati su na osnovu programa VI i X za $\tilde{t}=0.1$, 1.0 pri m=0.01, 0.1 i n=0.1, dok su se izrazi (5.1.13) i (5.1.17), za četvrti primjer, uz programe VII i XI sračunavali za $\tilde{t}=0.1$, 1.0 pri m=0.01, n=0.01, p=0.9, r=0.9 kao i za $\tilde{t}=0.1$ pri drugim kombinacijama parametara m, n, p i r.

Univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ smještene u tabelama traže se u svim raspodjelama $f_{1,0}/B^2$ i $f_{1,0}/B^2$ sračunatim, na opisani način za sva četiri primjera, i to tako da budu obuhvaćene po mogućnosti što više univerzalnih veličina $f_{1,0}/B^2$ i $f_{1,0}/B^2$ koje odgovaraju jednoj vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$. Bilo je, kod sva četiri primjera, numerički sračunavatih vrijednosti za $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ medju kojima su se mogle naći univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ koje u tabelama pripadaju gotovo svim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ i to počev od $f_{0,1}=-0.035$ pa do $f_{0,1}=0.035$. Na taj način, pri svakoj vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, nalazi se po nekoliko bezdimenzionih koordinata $\tilde{x}$, u kojima su univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ jednake sa vrijednostima $f_{1,0}/B^2$ i

PROGRAM VI

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1/(EXP(AK*AKN)))**S
      F1=0.4408*COS(X/(EXP(AK*AKN)))/((EXP(AK*AKN))*(SIN(X/(EXP
     *(AK*AKN)))**B))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,AKN
      WRITE(15,301)AK,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

$f_{0,1}/B^2$ sračunate na osnovu navedenih izraza za sva četiri primjera. Tako navedenim vrijednostima za $\tilde{x}$ pripadaju univerzalne veličine A, B i $\Phi''(o)$ smještene u tabelama pri onim vrijednostima parametara $f_{1,0}$ i $f_{0,1}$ za koje su se i koristile univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ prilikom traženja tih istih koordinata $\tilde{x}$. Za poznatu koordinatu $\tilde{x}$ sa pripadnim univerzalnim veličinama A, B i $\Phi''(o)$, sračunavaju se karakteristike graničnog sloja $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$, na osnovu navedenih izraza u prethodnom poglavlju, za sva četiri primjera. Treba napomenuti, da se različite vrijednosti podužne koordinate $\tilde{x}$, dobijene iz raspodjela $f_{1,0}/B^2$ za navedene primjere pri višim pozitivnim i negativnim

PROGRAM VII

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,201)FI
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
201   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1/(AK*(AKN**FI)))**S
      F1=0.4408*COS(X/(AK*(AKN**FI)))/((AK*(AKN**FI))*((SIN(X/(AK*
     *(AKN**FI))))**B))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,FI,AKN
      WRITE(15,301)AK,FI,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'FI=',F8.5,'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

vrijednostima parametara nestacionarnosti $f_{0,1}$ ($f_{0,1}$>0.015 i $f_{0,1}$<-0.015), uglavnom koriste za sračunavanje vrijednosti $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ u okolini tačke odvajanja graničnog sloja.

Prema tome, pri jednim vrijednostima parametara, a to su recimo za prvi primjer A, B i n, i jednoj odredjenoj vrijednosti bezdimenzione primjenljive $\tilde{t}$, svakom parametru nestacionarnosti $f_{0,1}$ odgovara, uz pomoć raspodjela za $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$, nadjeni skup bezdimenzionih podužnih koordinata $\tilde{x}$, a to znači i po jedna kriva za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$. Kako postoje različite vrijednosti parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$ i to počev od -0.075 do 0.035 sa

PROGRAM VIII

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,201)FI
      READ(5,202)FIN
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
201   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1)**S
      F1=0.4408*FI*AK*(AKN**(AK-1))/(((FIN+FI*(AKN**AK))**2)*(SIN(X)**B
     *))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,FI,FIN,AKN
      WRITE(15,301)AK,FI,FIN,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'FI=',F8.5,'FIN=',F8.5,'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

korakom $\Delta f_{0,1}$=0.005, koje obuhvataju sve one univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ koje se mogu naći u numerički sračunatim raspodjelima za $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$, to je i razlog što su promjene karakterističnih veličina graničnog sloja $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ duž opstrujavane površine, prikazane sa tri skupa različitih krivih. Za novu vrijednost bezdimenzione promenljive $\tilde{t}$, i pri istim vrijednostima parametara, a to su u prvom primjeru bile veličine A, B i n, dobijaju se ponovo za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ tri nova skupa krivih.

PROGRAM IX

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1)**S
      F1=0.4403*AK/(2*(EXP(AK*AKN))*(SIN(X)**5))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,AKN
      WRITE(15,301)AK,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

Iz svakog od tri skupa krivih potrebno je odrediti samo po jednu krivu, koje će predstavljati raspodjele veličina $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ u zavisnosti od bezdimenzione podužne koordinate $\tilde{x}$, i to pri jednoj vrijednosti bezdimenzionog vremena $\tilde{t}$ i jednoj vrijednosti poarametara A, B i n u prvom primjeru, m u drugom, m i n u trećem, i m,n,p i r u četvrtom primjeru. Za pravilno odredjivanje po jedne krive iz ta tri navedena skupa krivih bilo da je to raspodjela $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$, potrebno je koristiti važan zaključak po kome je $\frac{\partial}{\partial t}(U\delta^{*})=0$, a koji je dobijen iz relacije (3.1.18) prilikom izvodjenja jednačine impulsa razmatranog problema. Naime, taj zaključak pokazuje da proizvod spoljašnje brzine $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t})$ i debljine istiskivanje $\tilde{\delta}^{*}(\tilde{x},\tilde{t})$ ne zavisi od promjene bezdimenzionog vremena $\tilde{t}$ za bilo koju bezdimenzionu vrijednost podužne koordinate $\tilde{x}$. To

PROGRAM X

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,201)FI
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
201   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1/(EXP(AK*AKN)))**S
      F1=0.4408*(FI*SIN(X/(EXP(AK*AKN)))-AK*(X/(EXP(AK*AKN)))*
     *COS(X/(EXP(AK*AKN))))/(2*EXP(FI*AKN)*(SIN(X/(EXP(AK*AKN)))
     ***(B+1)))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,FI,AKN
      WRITE(15,301)AK,FI,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'FI=',F8.5,
     *'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

znači da je potrebno, pri jednim vrijednostima parametara A, B i n, recimo za prvi primjer, a za različite vrijednosti bezdimehzionog vremena $\tilde{t}$, tražiti onu koordinatu $\tilde{x}_o$ u kojoj se vrijednosti proizvoda $\tilde{U}(\tilde{x}_o,\tilde{t})\ \tilde{\delta}^*(\tilde{x}_o,\tilde{t})$, dobijenih inače pri različitim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{o,1}$, vrlo malo razlikuju medjusobom, a to znači i od vrijednosti proizvoda $\tilde{U}(\tilde{x}_o,o)\ \tilde{\delta}^*(\tilde{x}_o,o)$ u trenutku $\tilde{t}=0$. Primjećuje se da je ovaj uslov najbolje zadovoljen za manje pozitivne vrijednosti parametra nestacionarnosti tj. $f_{o,1}=0.005$ i 0.010, zavisno od primjera, za koje se vrijednosti proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^*$ u tačkama $\tilde{x}_o$ duž konture sa

PROGRAM XI

```
      DIMENSION U(201),R(251)
      READ(5,200)AK
      READ(5,201)FI
      READ(5,202)FIN
      READ(5,204)FINI
      READ(5,203)AKN
200   FORMAT(F12.5)
201   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(F12.5)
204   FORMAT(F12.5)
203   FORMAT(F12.5)
      N3=250
      P=0.
      N=200
      B=5.714
      S=4.714
      N1=N+1
      N2=N-1
      DO 100 K=1,N3
      X=P+K*0.01
      DX=X/N
      DO 101 M=1,N1
      X1=(M-1)*DX
101   U(M)=SIN(X1/(FI*(AKN**AK)))**S
      F1=0.4408*(FIN*SIN(X/(FI*(AKN**AK)))-(AK*X/(FI*(AKN**AK)))*
     *COS(X/(FI*(AKN**AK))))/(2*FINI*(AKN**(FIN+1))*(SIN(X/(FI*(
     *AKN**AK)))**(B+1)))
      F=0.
      DO 102 M2=1,N2,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      R(K)=F*F1
100   CONTINUE
      WRITE(6,301)AK,FI,FIN,FINI,AKN
      WRITE(15,301)AK,FI,FIN,FINI,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'FI=',F8.5,'FIN=',F8.5,'FINI=',F8.5,
     *'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(R(K),K=1,N3)
      WRITE(15,302)(R(K),K=1,N3)
302   FORMAT(10F10.6)
      STOP
      END
```

promjenom vremena $\tilde{t}$ medjusobom razlikuju od 2 do 4%. Prema tome, za raspodjele $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ koje odgovaraju strujanju sa malim ubrzanjem, iz tri skupa krivih odredjenih za jednu vrijednost $\tilde{t}$, uzima se po jedna kriva odredjena posredstvom parametra nestacionarnosti $f_{0,1}=0.005$ u prvom i drugom primjeru i pri $f_{0,1}=0.010$ za treći i četvrti primjer. Tako odredjene krive za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$, dobijene u prvom primjeru pri manjim ubrzanjima za

PROGRAM XII

```
      DIMENSION FI(111),FIN(111),R(111),A(111),DZ(111),DDZ(111),
     *TAU(111),V(111),VDZ(111),U(201)
      READ(5,190)AK
      READ(5,190)AKK
      READ(5,190)BK
      READ(5,190)BKK
      READ(55,202)(FI(I),I=1,111)
      READ(55,202)(FIN(I),I=1,111)
      READ(55,202)(R(I),I=1,111)
      READ(55,202)(A(I),I=1,111)
190   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(6F12.5)
      H=5.714
      S=4.714
      S1=7.714
      DO 10 I=1,111
      DX=FI(I)/200
      DO 20 M=1,201
      X1=(M-1)*DX
20    U(M)=SIN(X1)**S
      F=0.
      DO 102 M2=1,199,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      Z=0.4406/((BK+AKK*(BKK**AK))*(SIN(FI(I))**H))
      DZ(I)=A(I)*SQRT(Z*F)
      DDZ(I)=R(I)*SQRT(Z*F)
      Z1=((BK+AKK*(BKK**AK))**S)*(SIN(FI(I))**S1)
      TAU(I)=FIN(I)*SQRT(Z1/(0.4406*F))
      V(I)=(BK+AKK*(BKK**AK))*SIN(FI(I))
10    VDZ(I)=V(I)*DZ(I)
      WRITE(6,301)AK,AKK,BK,BKK
      WRITE(21,301)AK,AKK,BK,BKK
301   FORMAT(5X,'AK=',F5.3,'AKK=',F6.3,'BK=',F .5,'BKK=',F .5/)     .d/)
      WRITE(6,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
      WRITE(21,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
302   FORMAT(9F12.5)
      STOP
      END
```

---

A=1, B=1, n=2 i 3, uporedjuju se sa rezultatima koje je NIKODIJEVIĆ dobio u radu [48], pri čemu je, primjenjujući metodu LOJCJANSKOG za svaki konkretni problem rešavao impulsnu jednačinu uz korišćenje univerzalnih rešenja dobijenih pri magnetnom parametru $g_{1,0}$ jednakom nuli. Naime, zapaža se sa sl. 41, 42, 43 i 45 da je tačnost zadovoljavajuća, s obzirom da se raspodjele za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ računate ovom metodom, razlikuju u pojedinim tačkama od 1,2 do 2,5%, a vrijednosti za $\tilde{\delta}^{**}$ bliže tački odvajanja od 5% do 9%, od vrijednosti prikazanih isprekidanim linijama dobijenih od strane NIKODIJEVIĆA.

PROGRAM XIII

```
      DIMENSION FI(111),FIN(111),R(111),A(111),DZ(111),DDZ(111),
     *TAU(111),V(111),VDZ(111),U(201)
      READ(5,190)AK
      READ(5,190)AKN
      READ(50,202)(FI(I),I=1,111)
      READ(50,202)(FIN(I),I=1,111)
      READ(50,202)(R(I),I=1,111)
      READ(50,202)(A(I),I=1,111)
190   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(6F12.5)
      A=5.714
      B=4.714
      B1=7.714
      DO 10 I=1,111
      DX=FI(I)/200
      DO 20 M=1,201
      X1=(M-1)*DX
20    U(M)=SIN(X1)**B
      F=0.
      DO 102 M2=1,199,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      Z=0.4403/(2*EXP(AK*AKN)*(SIN(FI(I))**A))
      DZ(I)=A(I)*SQRT(Z*F)
      DDZ(I)=R(I)*SQRT(Z*F)
      Z1=((2*EXP(AK*AKN))**B)*(SIN(FI(I))**B1)
      TAU(I)=FIN(I)*SQRT(Z1/(0.4403*F))
      V(I)=2*EXP(AK*AKN)*SIN(FI(I))
10    VDZ(I)=V(I)*DZ(I)
      WRITE(6,501)AK,AKN
      WRITE(44,501)AK,AKN
501   FORMAT(5X,'AK=',F6.3,'AKN=',F6.3/)
      WRITE(6,502)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
      WRITE(44,502)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
502   FORMAT(9F12.5)
      STOP
      END
```

Rezultati dobijeni na osnovu univerzalnih rešenja koja odgovaraju većim pozitivnim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{o,1}$=0.015 do 0.035 pokazuju, da se vrijednosti proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^{*}$ u nekoj tački $\tilde{x}_o$ pri različitom vremenu $\tilde{t}$ razlikuju od 20% do 60%, tako da se raspodjele za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ pri takvim parametrima $f_{o,1}$ vidno razlikuju od raspodjela koje je dobio NIKODIJEVIĆ i to za 15 do 40%, zavisno od porasta parametra $f_{o,1}$, što je nedopustivo.

Medjutim, kod strujanja sa većim ubrzanjem, što je u prvom primjeru slučaj za A=1, B=1 i n=1, kod drugog, trećeg i četvrtog, respektivno, za m=1.o, m=0.1 i n=0.1, m=0.1; primjećuje

PROGRAM XIV

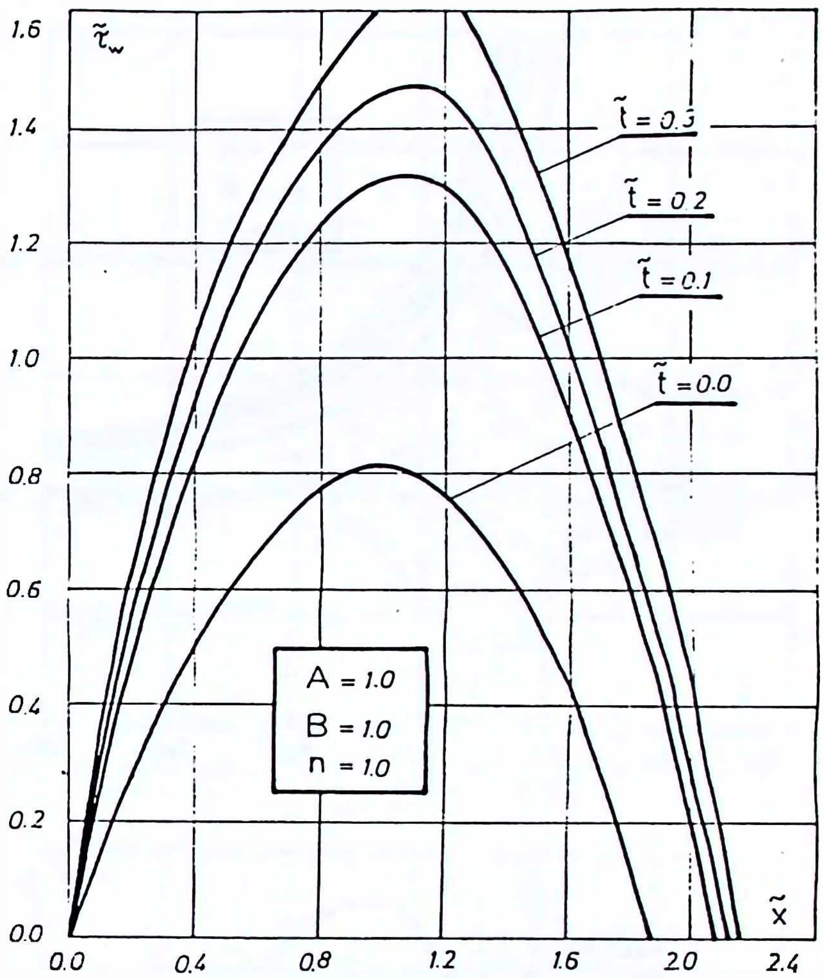
```
      DIMENSION FI(111),FIN(111),R(111),A(111),DZ(111),DDZ(111),
     *TAU(111),V(111),VDZ(111),U(201)
      READ(5,190)AK
      READ(5,190)AKK
      READ(5,190)AKN
      READ(60,202)(FI(I),I=1,111)
      READ(60,202)(FIN(I),I=1,111)
      READ(60,202)(R(I),I=1,111)
      READ(60,202)(A(I),I=1,111)
190   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(6F12.5)
      B=5.714
      S=4.714
      S1=7.714
      DO 10 I=1,111
      DX=FI(I)/200
      DO 20 M=1,201
      X1=(M-1)*DX
20    U(M)=SIN(X1/EXP(AK*AKN))**B
      F=0.
      DO 102 M2=1,199,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      Z=0.4405/(2*EXP(AKK*AKN)*(SIN(FI(I)/(EXP(AK*AKN))))**S))
      DZ(I)=A(I)*SQRT(Z*F)
      DDZ(I)=R(I)*SQRT(Z*F)
      Z1=((2*EXP(AKK*AKN))**3)*(SIN(FI(I)/(EXP(AK*AKN))))**S1)
      TAU(I)=FIN(I)*SQRT(Z1/(0.4405*F))
      V(I)=2*EXP(AKK*AKN)*SIN(FI(I)/EXP(AK*AKN))
10    VDZ(I)=V(I)*DZ(I)
      WRITE(6,301)AK,AKK,AKN
      WRITE(62,301)AK,AKK,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F5.3,'AKK=',F5.3,'AKN=',F5.3/)
      WRITE(6,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
      WRITE(62,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,111)
302   FORMAT(9F12.6)
      STOP
      END
```

se da je sračunavanje vrijednosti za $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ moguće sprovesti pri višim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{0,1}$, tj. za $f_{0,1}>0.015$ zavisno od posmatranog primjera. Naime, potrebne koordinate $\tilde{x}$ na konturi, u kojima se sračunavaju karakteristične veličine graničnog sloja $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$, ne mogu se odrediti na osnovu univerzalnih veličina $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ koje pripadaju manjim pozitivnim vrijednostima parametra $f_{0,1}$, jer ih i nema u numeričkim raspodjelama za $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ u sva četiri primjera. Prema tome, za ubrzana strujanja, prikazana u prvom primjeru za A=1, B=1 i n=2, proizvodi $\tilde{U}\tilde{\delta}^{*}$ sračunati pri parametru $f_{0,1}=0.015$, u nekoj koordinati $\tilde{x}_0$, razlikuju se medjusobom tokom

PROGRAM XV

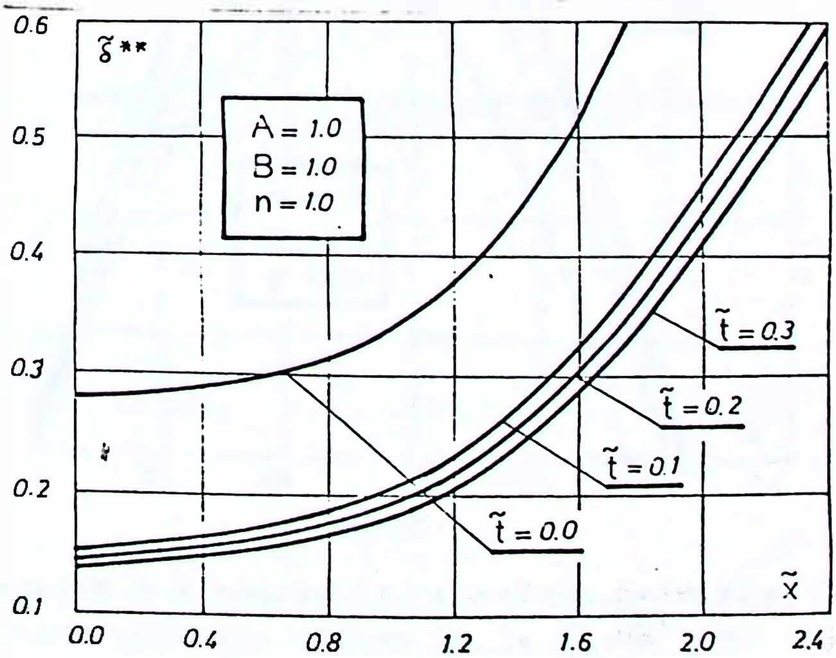
```
      DIMENSION FI(59),FIN(59),R(59),A(59),DZ(59),DDZ(59),TAU(59),
     *V(59),VDZ(59),U(201)
      READ(5,190)AK
      READ(5,190)AKK
      READ(5,190)BK
      READ(5,190)BKK
      READ(5,190)AKN
      READ(5,202)FI
      READ(56,202)(FIN(I),I=1,59)
      READ(56,202)(R(I),I=1,59)
      READ(56,202)(A(I),I=1,59)
190   FORMAT(F12.5)
202   FORMAT(6F12.5)
      P=5.714
      S=4.714
      S1=7.714
      DO 10 I=1,59
      DX=FI(I)/200
      DO 20 M=1,201
      X1=(M-1)*DX
20    U(M)=SIN(X1/(AKK*(AKN**AK)))**S
      F=0.
      DO 102 M2=1,199,2
102   F=F+(DX/3.)*(U(M2)+4.*U(M2+1)+U(M2+2))
      Z=0.4408/((2*BKK*(AKN**BK))*(SIN(FI(I)/(AKK*(AKN**AK)))**P))
      DZ(I)=A(I)*SQRT(Z*F)
      DDZ(I)=R(I)*SQRT(Z*F)
      Z1=((2*BKK*(AKN**BK))**3)*(SIN(FI(I)/(AKK*(AKN**AK)))**S1)
      TAU(I)=FIN(I)*SQRT(Z1/(0.4408*F))
      V(I)=(2*BKK*(AKN**BK))*SIN(FI(I)/(AKK*(AKN**AK)))
10    VDZ(I)=V(I)*DZ(I)
      WRITE(6,301)AK,AKK,BK,BKK,AKN
      WRITE(30,301)AK,AKK,BK,BKK,AKN
301   FORMAT(5X,'AK=',F8.5,'AKK=',F8.5,'BK=',F8.5,'BKK=',F8.5,
     *'AKN=',F8.5/)
      WRITE(6,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,59)
      WRITE(30,302)(FI(I),V(I),A(I),DZ(I),R(I),DDZ(I),FIN(I),
     1TAU(I),VDZ(I),I=1,59)
302   FORMAT(9F12.6)
      STOP
      END
```

vremena $\tilde{t}$ do 8%, a pri parametru $f_{o,1}$=0.035 i do 40%. Za strujanja sa još većim ubrzanjem, što je u prvom primjeru slučaj za A=1, B=1 i n=1, proizvodi $\tilde{U}\tilde{\delta}^*$ se sračunavaju tek pri $f_{o,1}$=0.025, i u tački $\tilde{x}_o$ se, pri promjeni vremena $\tilde{t}$, medjusobom razlikuju do 25%, dok pri parametru nestacionarnosti $f_{o,1}$=0.035 razlika njihovih vrijednosti sračunatih u tački $\tilde{x}_o$ pri različitom vremenu $\tilde{t}$ ide i do čitavih 60%. Slična razmatranja odnose se i na strujanja sa



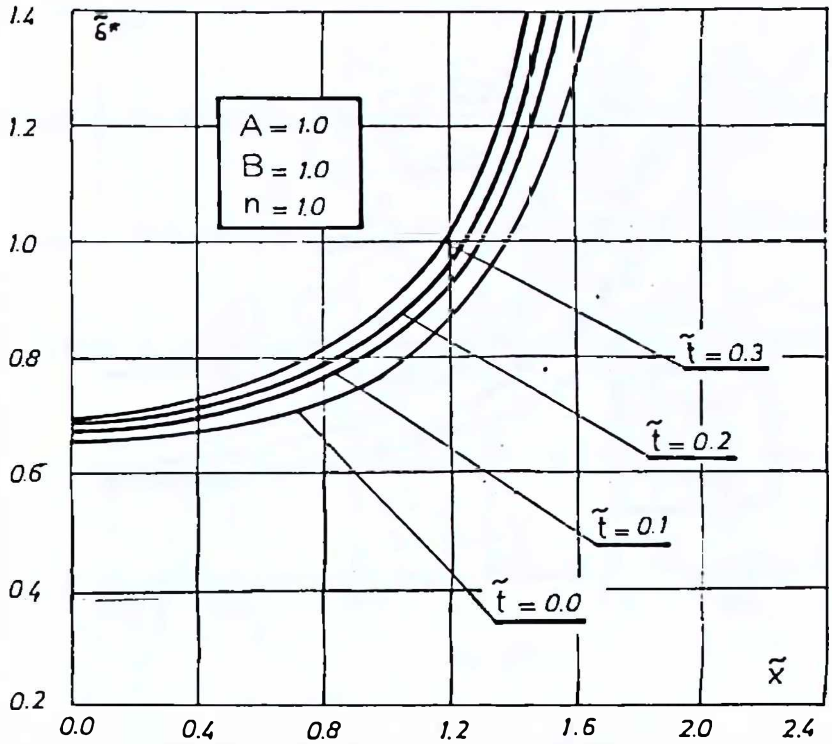
$\tilde{\tau}_w$
$\tilde{t} = 0.3$
$\tilde{t} = 0.2$
$\tilde{t} = 0.1$
$\tilde{t} = 0.0$
A = 1.0
B = 1.0
n = 1.0
$\tilde{x}$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
0.0
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4


sl. 37

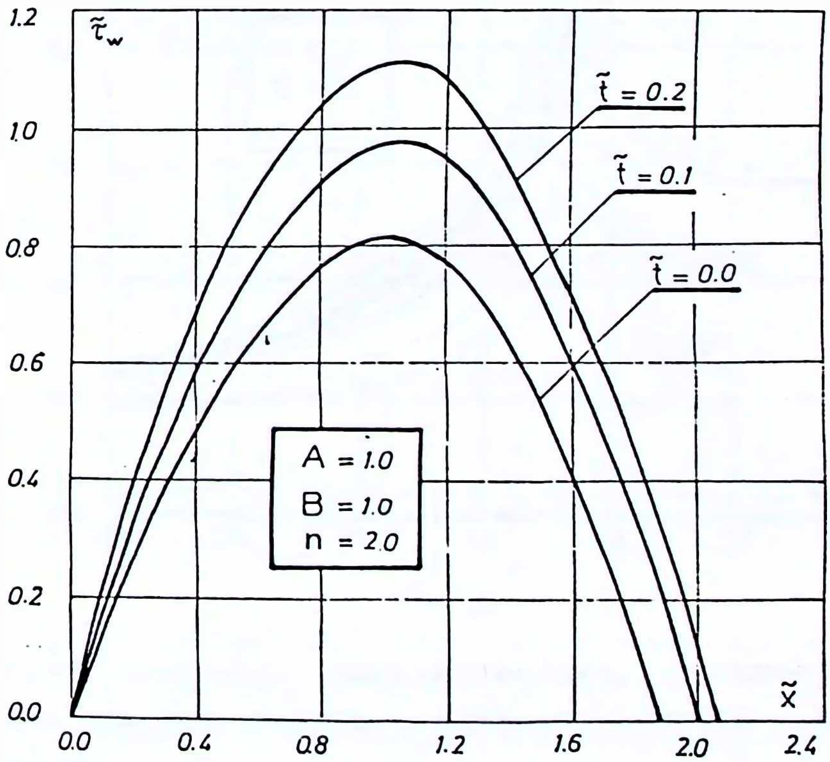


$\tilde{\delta}^{**}$
A = 1.0
B = 1.0
n = 1.0
$\tilde{t} = 0.3$
$\tilde{t} = 0.2$
$\tilde{t} = 0.1$
$\tilde{t} = 0.0$
$\tilde{x}$
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.0
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4


sl. 38

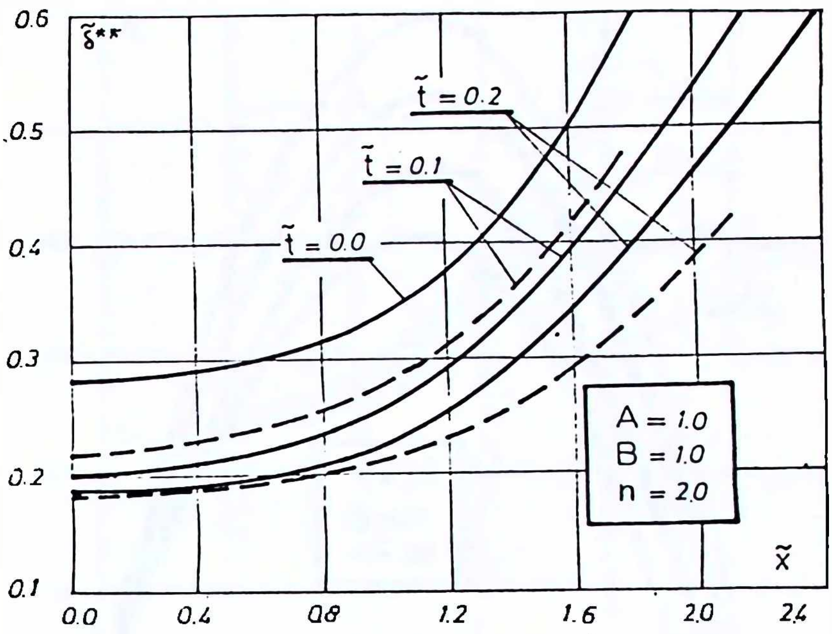



sl.39

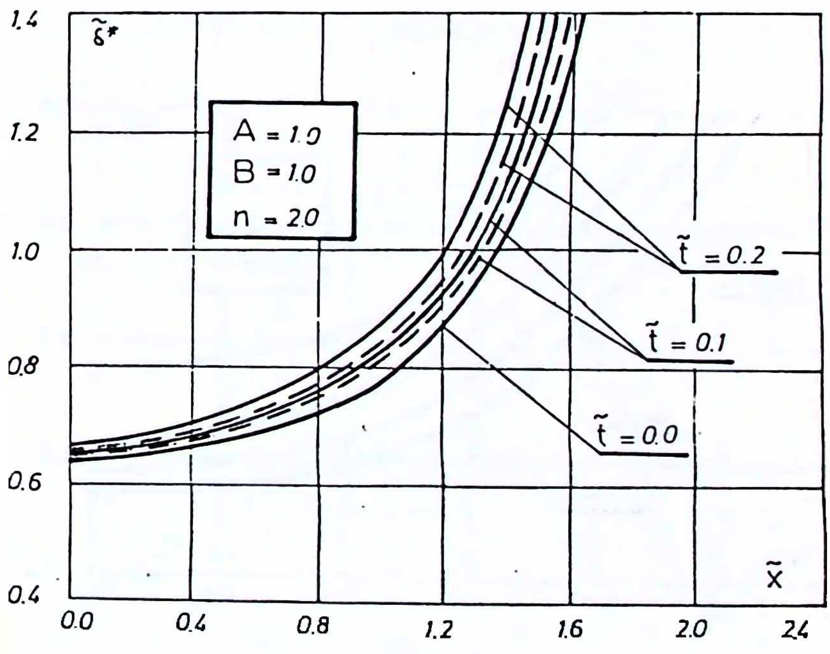



sl.40

većim ubrzanjem kod ostala tri navedena primjera. Dakle, nema ni govora o zadovoljavanju uslova da je $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{U}\tilde{\delta}^*)=0$, tj. da u nekoj koordinati $\tilde{x}_o$ konture, tokom promjene vremana $\tilde{t}$, vrijednost



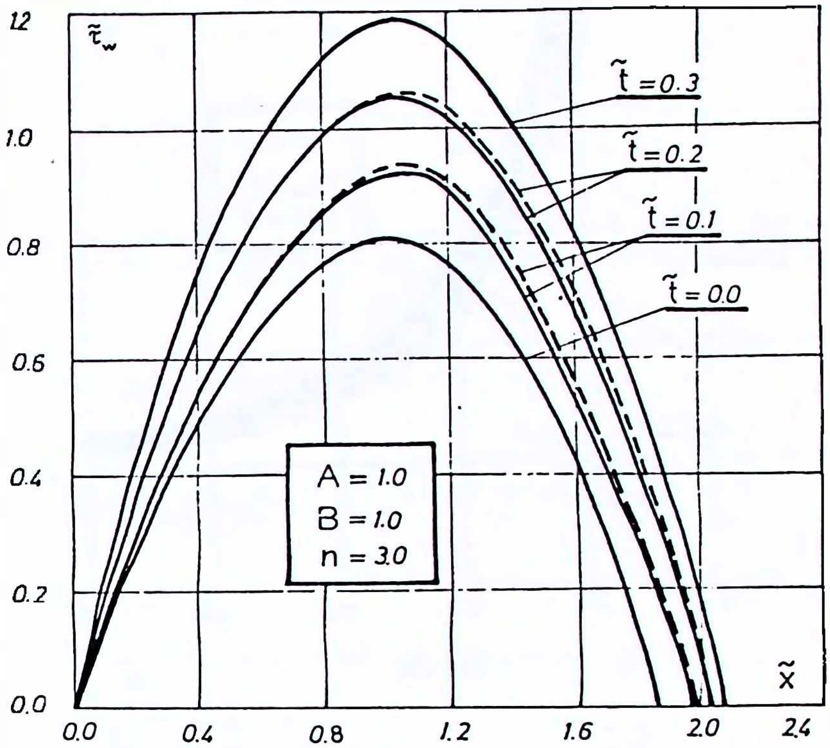

sl. 41



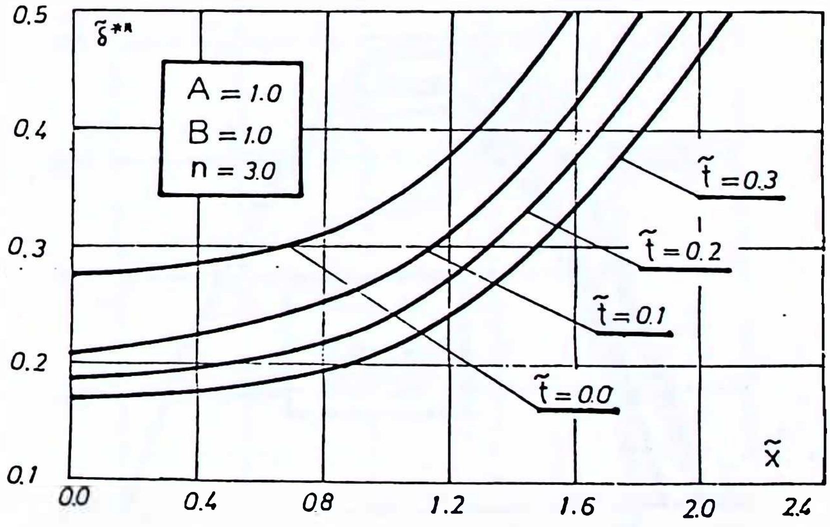

sl. 42

proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^{*}$ ostaje nepromijenjena, odnosno uz izvjesnu toleranciju da su moguća njihova sasvim mala medjusobna razlikovanja.

Strujanja sa usporavanjem se u ovom radu proučavaju u prvom primjeru, i to kad parametri u izrazu (5.1.1) za raspodjelu spoljašnje brzine $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t})$ imaju vrijednosti: A=-1, B=1 i n=1,2,3.

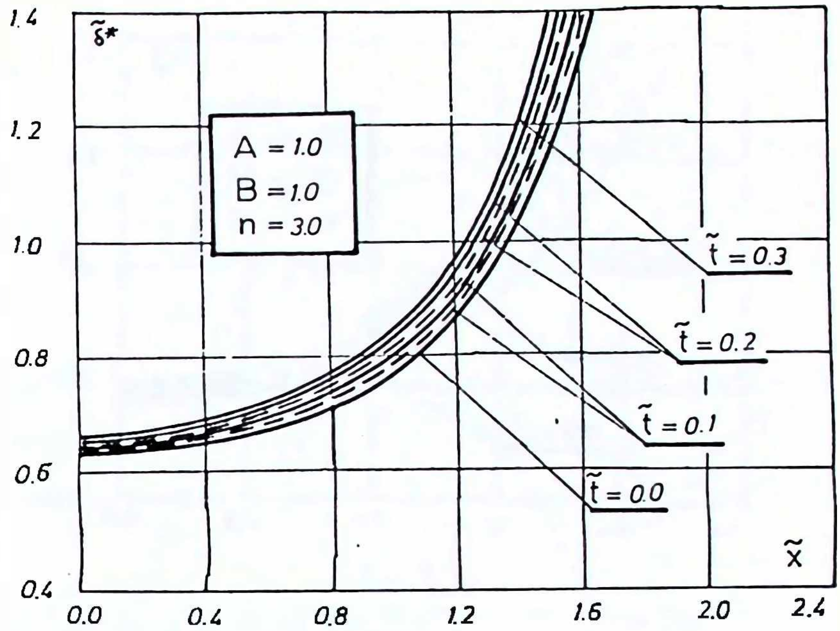



sl. 43

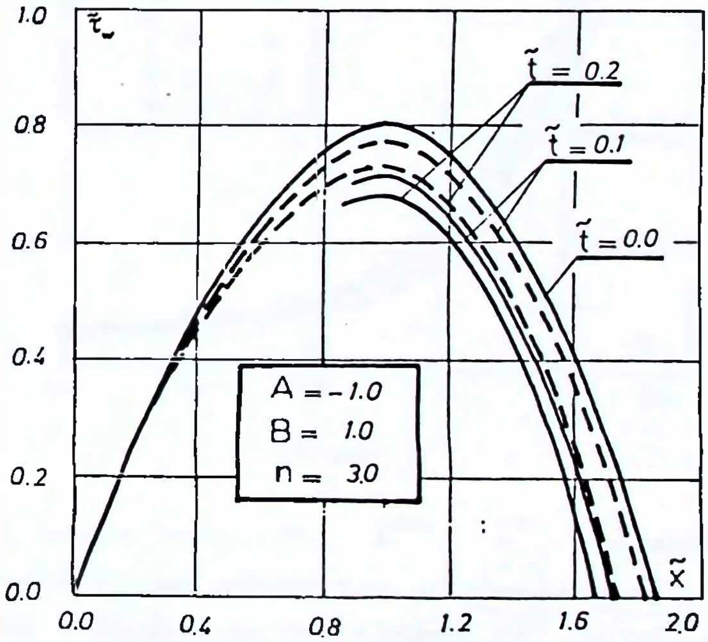



sl. 44

Medjutim, univerzalne veličine $f_{0,1}/B^2$ sa pripadnim parametrom $f_{0,1}$ mogu se naći pomoću izraza (5.1.14) samo u onim raspodjelama za $f_{0,1}/B^2$, sračunatih pri različitim vrijednostima bezdimenzione vremenske koordinate $\tilde{t}$, za koje su A=-1, B=1 i n=3, tj. pri malom usporavanju spoljašnje struje $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{t})$, poslije čega se pri tako odredjenom parametru nestacionarnosti $f_{0,1}$ univerzalne veličine $f_{1,0}/B^2$ nalaze u raspodjeli $f_{1,0}/B^2$ koja je data izrazom (5.1.11).

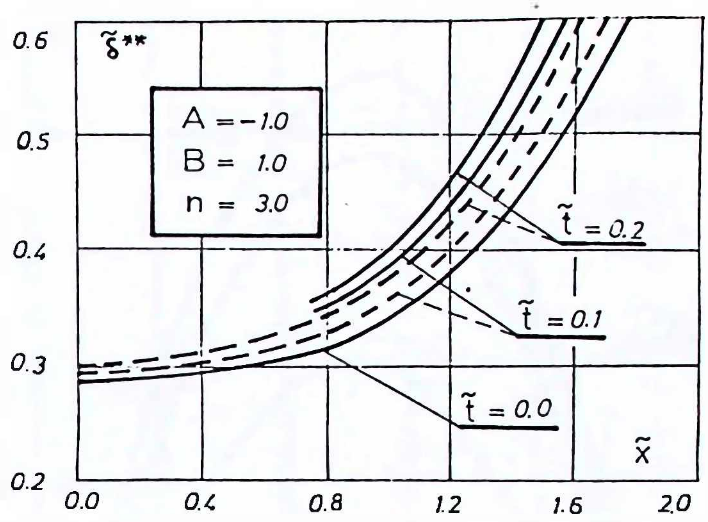



sl. 45

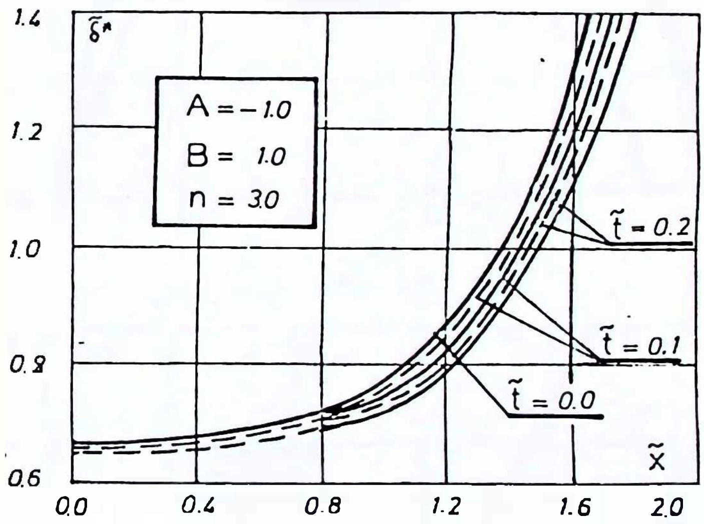



sl. 46

Dakle, za slučajeve strujanja sa većim usporavanjem, prikazanih i A=-1, B=1 i n=1 i 2, nije moguće prema opisanom postupku prona podužne koordinate $\tilde{x}$ na konturi u kojima je potrebno računa karakteristike graničnog sloja $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$, $\tilde{\delta}^*$. Čak i za strujanja malim usporenjem (A=-1, B=1, n=3) bezdimenzione podužne koordina $\tilde{x}$ se, sa odgovarajućim univerzalnim veličinama $\Phi''(o)$, B i

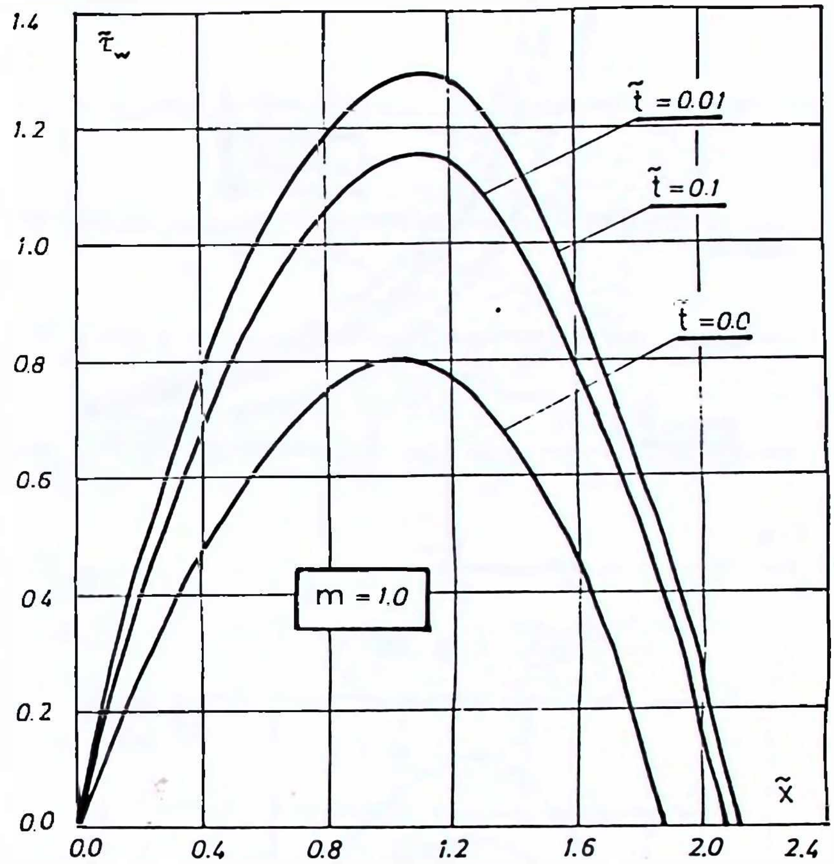



sl. 47

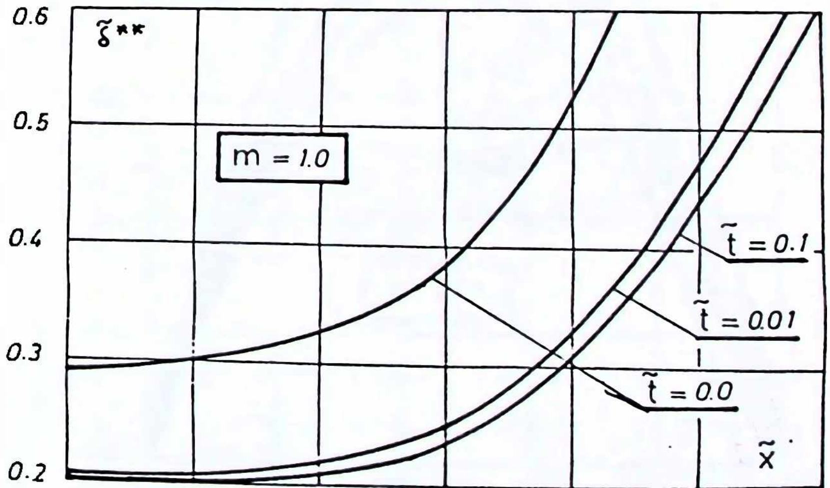



sl. 48

potrebne za sračunavanje $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$, $\tilde{\delta}^{*}$, odredjuju pri većim negativnim vrijednostima parametra nestacionarnosti $f_{o,1}$, tako da se za $f_{o,1}=-0.025$ vrijednosti proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^{*}$ sa promjenom vremena $\tilde{t}$ u nekoj tački $\tilde{x}_o$ na kontiri razlikuju medjusobno i do 10%. Za još veće negativne vrijednosti parametra $f_{o,1}$, tj. za $f_{o,1}<-0.025$, uslov da se vrijednost proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^{*}$ zanemarljivo mijenja tokom vremena $\tilde{t}$ u nekoj tački $\tilde{x}_o$ više nije od koristi. Pošto univerzalne veličine $f_{o,1}/B^2$ smještene u tabelama, imaju za usporena strujanja ($f_{o,1}<0$) veoma male vrijednosti, dolazi se do zaključka da će uslov $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{U}\tilde{\delta}^{*})=0$ približno biti zadovoljen samo kod strujanja

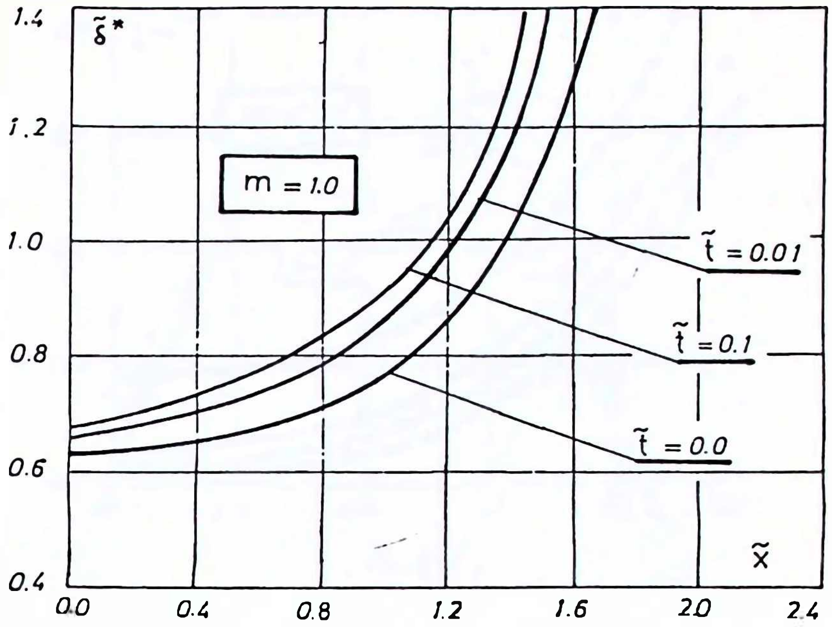



sl. 49

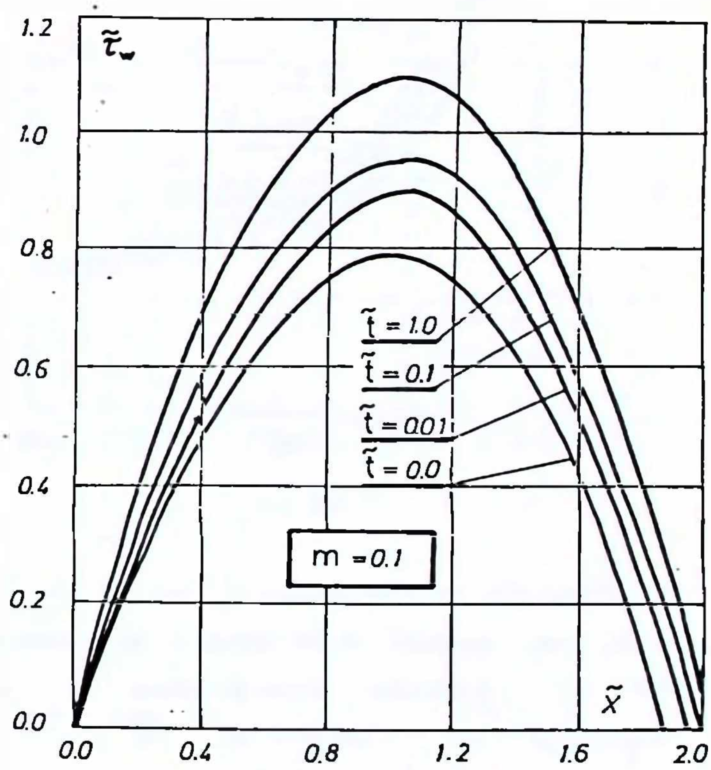



sl. 50

sa veoma malim usporavanjem, dok se strujanja sa naglim "kočenjem", tj. ona pri velikom usporavanju struje pri čemu i parametar $f_{0,1}$ ima velike negativne vrijednosti, primjenom ove metode ne mogu proračunavati. Naime, kod ovakvih strujanja, vrijednost $f_{0,1}/B^2$ dobijene izrazom (5.1.14) znatno su veće od

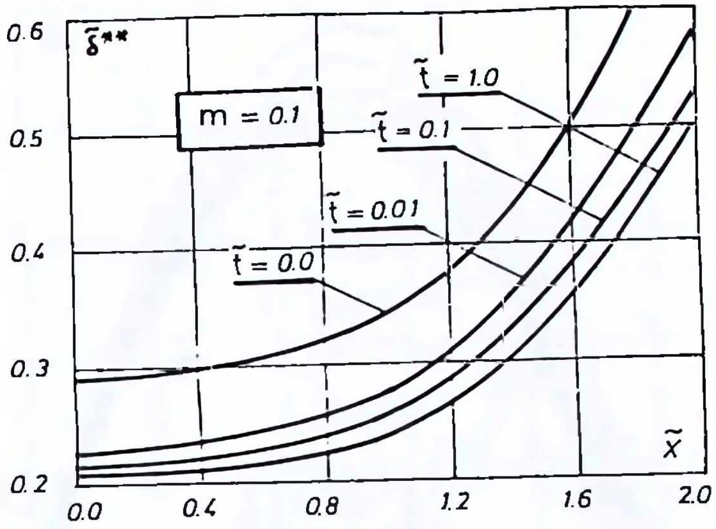



sl. 51

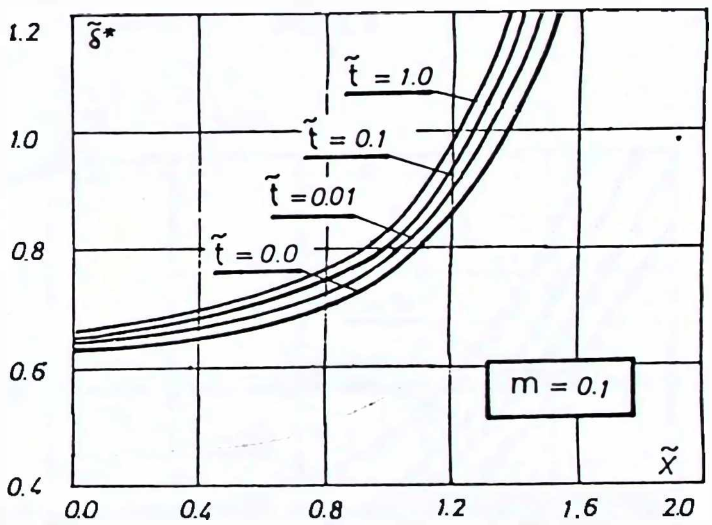



sl. 52

univerzalnih veličina $f_{0,1}/B^2$ smještenih u tabelama, tako da se ne mogu naći koordinate $\tilde{x}$ u kojima je potrebno sračunati $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$. Tek kod strujanja sa veoma malim usporavanjem, primjenom ove metode moguće je naći, na osnovu univerzalnih veličina $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ koje u tabelama pripadaju manjim negativnim vrijednostima parametra $f_{0,1}$, tj. $f_{0,1}=-0.005$ i $-0.010$, dovoljno

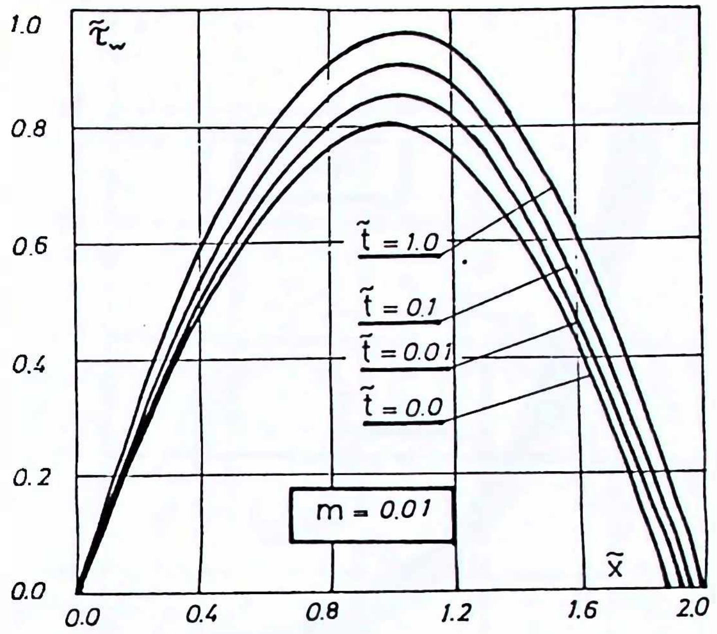



sl. 53

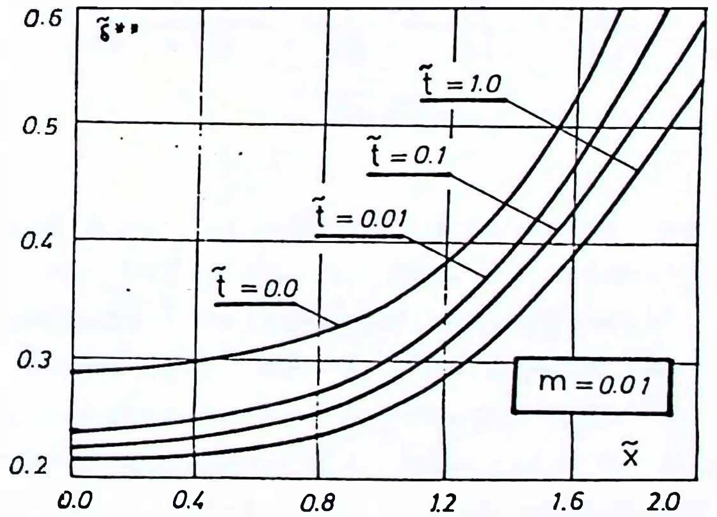



sl. 54

koordinata $\tilde{x}$ potrebnih za sračunavanje veličina $\tilde{\tau}_v$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^*$ duž cijele konture počev od zaustavne tačke pa do tačke odvajanja graničnog sloja. U konkretnom slučaju za A=-1, B=1 i n=3, raspodjele $\tilde{\tau}_v$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^*$ prikazane na slikama 46, 47 i 48, dobijene su na osnovu ovih univerzalnih veličina $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ koje su se u raspodjelama datih izrazima (5.1.11) i (5.1.14), na zadovoljavajući način, sobzrirom na vremensku nepromenljivost proizvoda $\tilde{U}\tilde{\delta}^*$, mogle naći jedino pri parametru $f_{0,1}$=-0.025. Kako pri takvom parametru nestacionarnosti $f_{0,1}$ univerzalnih veličina $f_{1,0}/B^2$ i $f_{0,1}/B^2$ u tabelama ima vrlo malo,



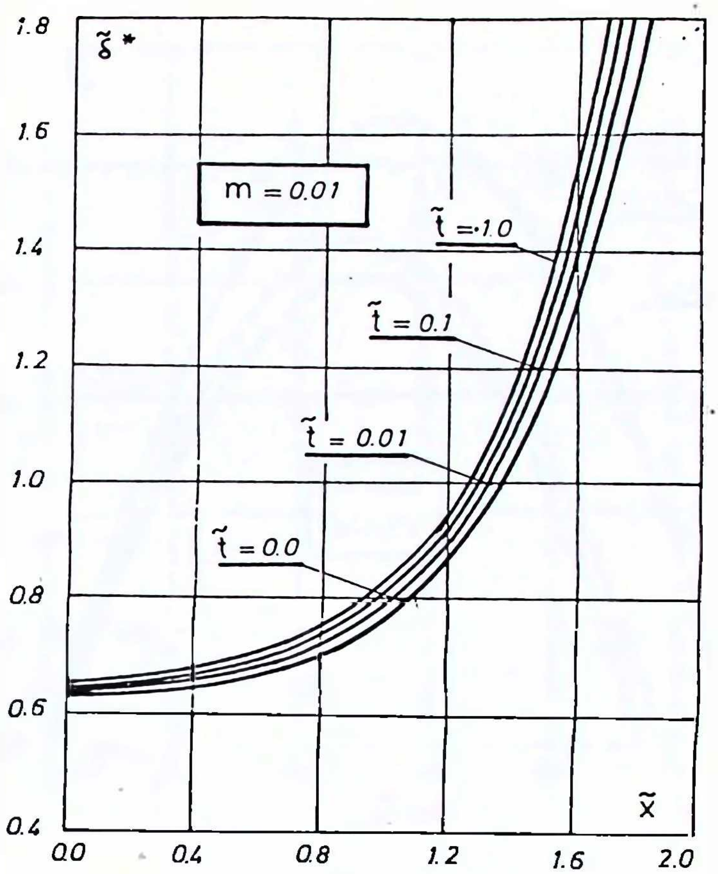

sl. 55




sl. 56

to je i razlog da se duž cijele konture ne mogu prikazati raspodjele $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ što se i vidi na sl. 46, 47 i 48, na kojima su takodje, radi uporedjivanja, prikazani isprekidanim linijama rezultati koje je NIKODIJEVIĆ dobio u radu [48] i u odnosu na koje postoje u pojedinim tačkama odstupanja od 5% do 8%.

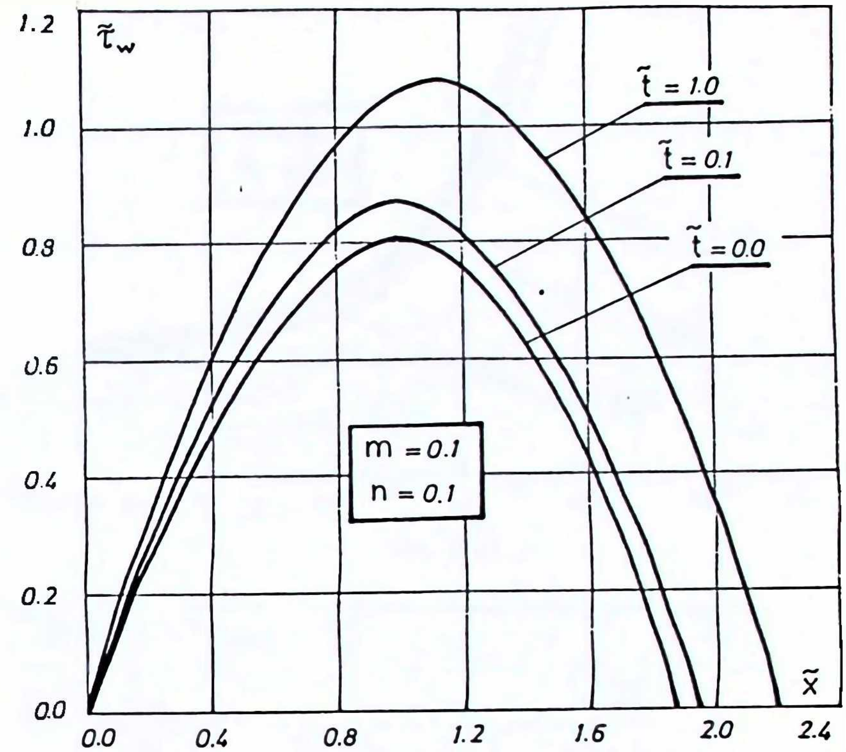
Krive na slikama označene sa $\tilde{t}=0$, počev od sl. 37 pa do sl. 69, prikazuju promjene karakterističnih veličina stacionarnog graničnog sloja duž konture, kojeg formira spoljašnja brzina $\tilde{U}(\tilde{x})$



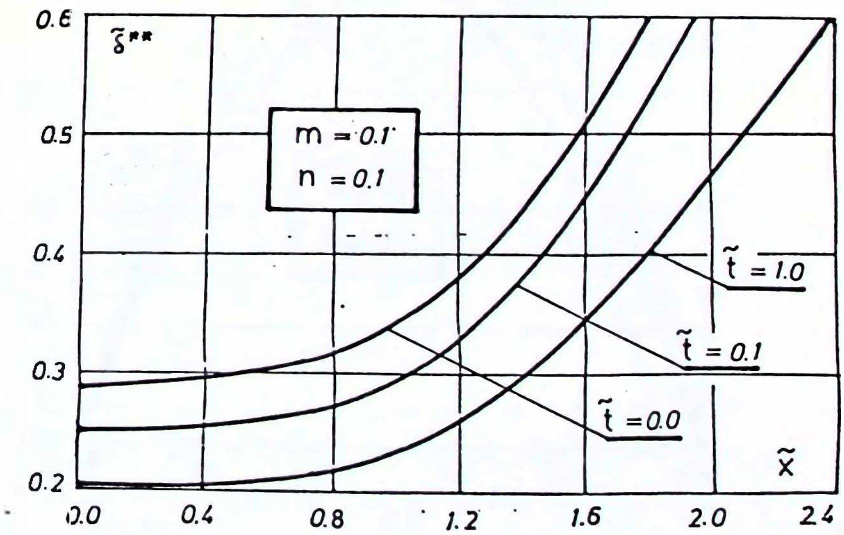

sl. 57

čije se raspodjele u navedenim primjerima dobijaju iz izraza (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7) i (5.1.8) stavljanjem u njih za vremensku koordinatu $\tilde{t}$ vrijednost jednaku nuli.

Sa slike 37, 40 i 43 zapaža se da vrijednosti bezdimenzionog tangencijalnog napona na zidu $\tilde{\tau}_w$, u prvom primjeru, opadaju duž cijele konture pri smanjivanju ubzranja spoljašnje struje i to počev od većeg, pri n=1 ka manjem ubrzanju za n=2 i 3. Takodje, sa istih slika se zapaža, da pri svim ubrzanim strujanjima (n=1,2,3), vrijednost napona $\tilde{\tau}_w$ duž konture raste sa porastom vremena $\tilde{t}$, što znači da se i tačka odvajanja graničnog sloja pomjera nizvodno i to najviše pri najvećim ubrzanjima, tj. za n=1 u prvom primjeru. Sa povećavanjem ubrzanja spoljašnje struje, od manjih (n=3) ka većim (n=2 i 1), zapaža se sa slika 38, 41 i 44 da se debljina gubitka impulsa $\tilde{\delta}^{**}$ smanjuje, a smanjuje se takodje i pri svakom ubrzanom strujanju tokom porasta vremena $\tilde{t}$, što se i vidi na istim slikama. Medjutim, suprotno je ponašanje bezdimenzione debljine istiskivanja $\tilde{\delta}^*$, jer sa povećavanjem

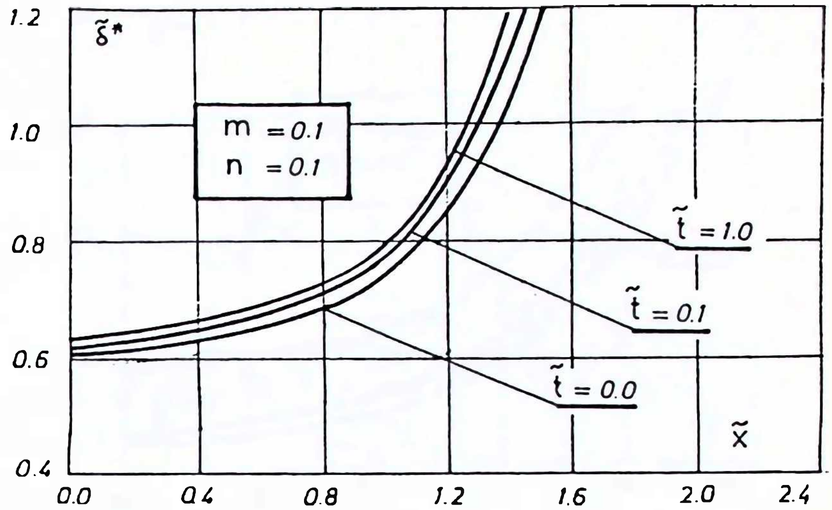



sl. 58

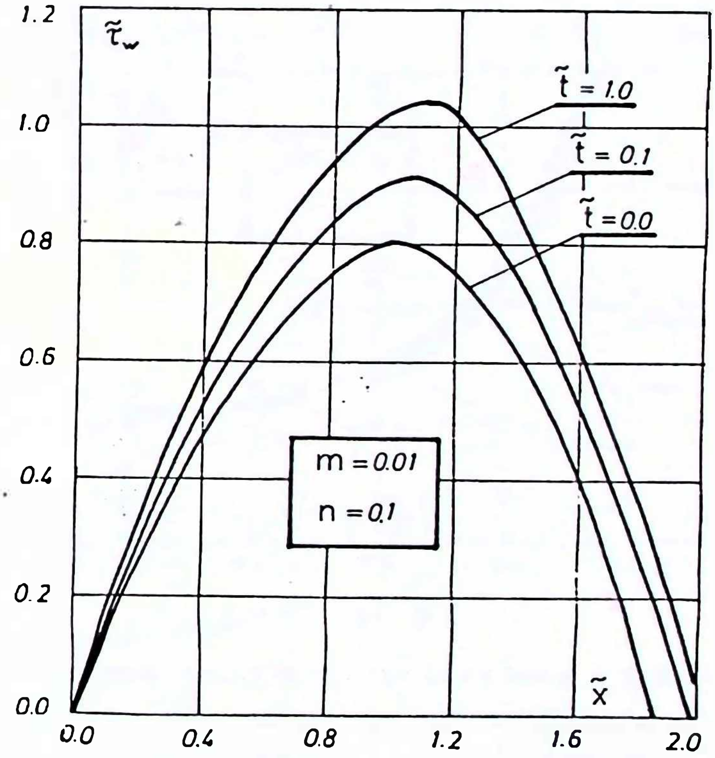



sl. 59

ubrzanja struje, kako se vidi na slikama 39, 42 i 45, veličina $\tilde{\delta}^{**}$ raste, a raste takodje i sa porastom vremena $\tilde{t}$, pri svakom ubrzanom strujanju, što se i zapaža na navedenim slikama. Dakle, sa povećavanjem ubrzanja spoljašnje struje i pri porastu vremena $\tilde{t}$, potvrdjuje se jedna logična činjenica u teoriji nestacionarnog graničnog sloja, a to je da se njegova debljina duž cijele opstrujavane konture smanjuje i da se tačka odvajanja odlaže, tj. pomjera nizvodno.

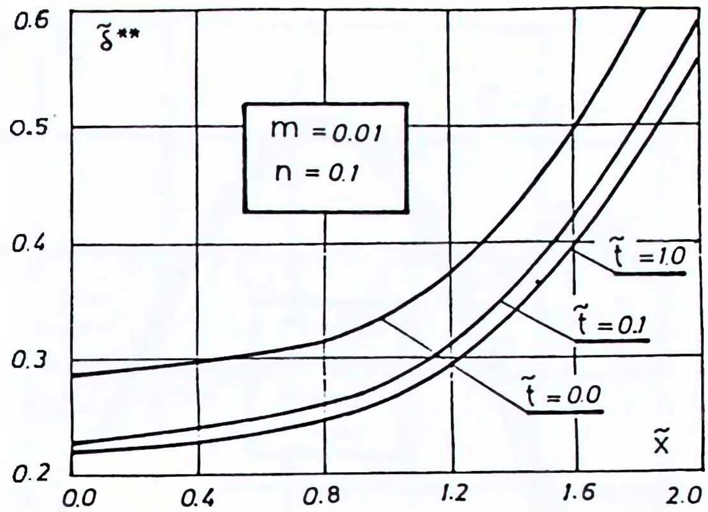



sl. 60

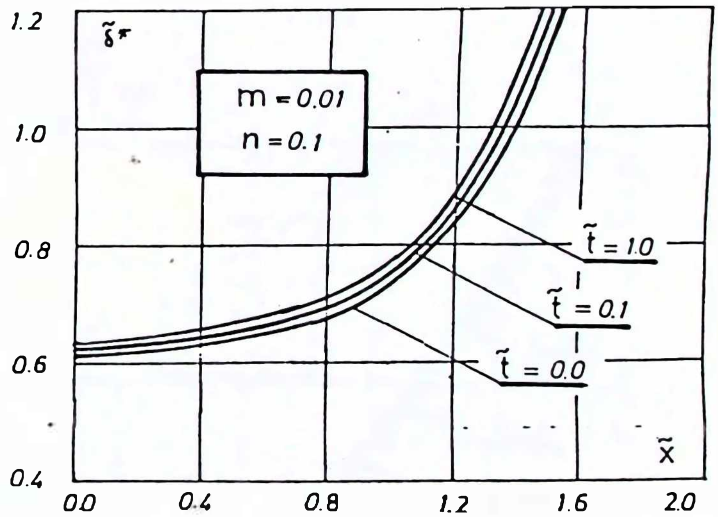



sl. 61

Pri usporenju spoljašnjeg strujanja, prikazanog u prvom primjeru sa A=-1, B=1 i n=3, granični sloj se tokom vremena suprotno ponaša u odnosu na prethodno razmatrani, što se vidi na slikama 46, 47 i 48. Naime, sa sl. 46 se zapaža da se sa porastom vremena tangencijalni napon $\tilde{\tau}_w$ smanjuje duž cijele konture i da se tačka odvajanja graničnog sloja pomjera ka prednjoj zaustavnoj tački. Sa porastom vremena debljina gubitka impulsa $\tilde{\delta}^{**}$ se povećava, dok se debljina istikivanja $\tilde{\delta}^*$ smanjuje, što je prikazano na sl. 47 i 48.

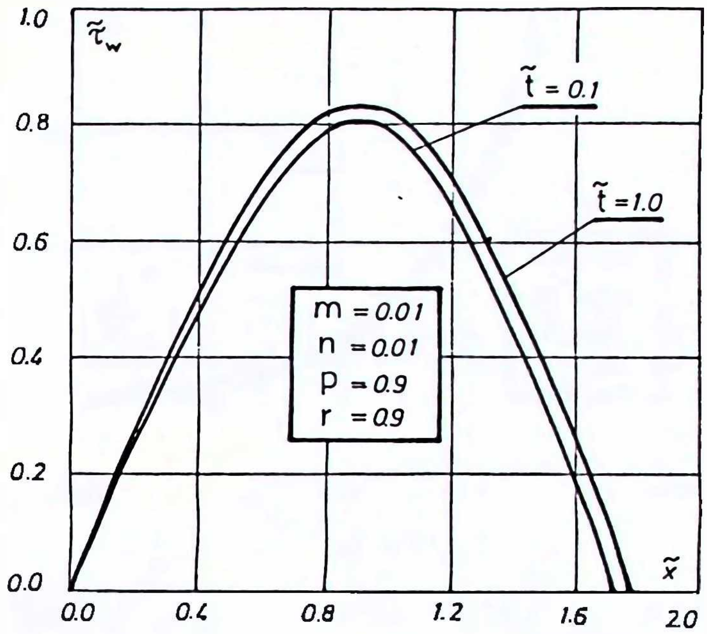



sl. 62

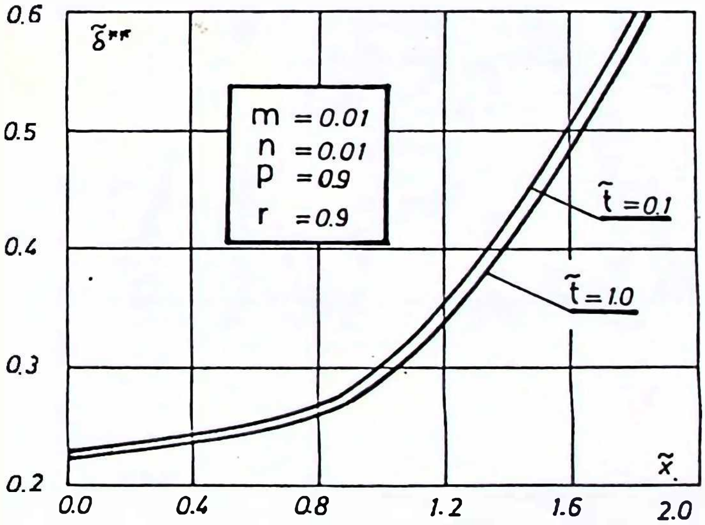



sl. 63

Kod drugog primjera, prikazanog izrazom (5.1.6), zapaža se sa sl. 49 do sl. 57, da se sa povećavanjem ubrzanja struje tj, pri m=0.01, 0.1 i 1.0, tačka odvajanja graničnog sloja pomjera niz konturu. Naime, kako se na sl. 49, 52 i 55 vidi, sa porastom parametra m od 0.01 do 1.0, a to znači pri povećavanju ubrzanja spoljašnje struje, vrijednost napona $\tilde{\tau}_w$ raste duž cijele konture, a takodje i sa porastom vremena $\tilde{t}$. Dok se debljina gubitka impulsa $\tilde{\delta}^{**}$, što se zapaža na sl. 50, 53 i 56, sa porastom ubrzanja struje smanjuje, a isto tako i sa porastom vremena $\tilde{t}$ pri svakom konkretnom ubrzanju, dotle se debljina istiskivanja $\tilde{\delta}^{*}$ povećava, prema sl. 51, 54 i 57, i pri porastu ubrzanja struje kao i pri porastu vremena $\tilde{t}$.

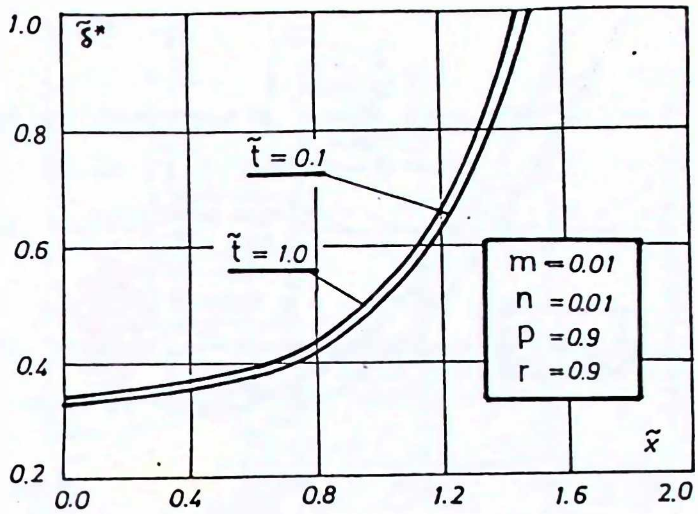



sl. 64

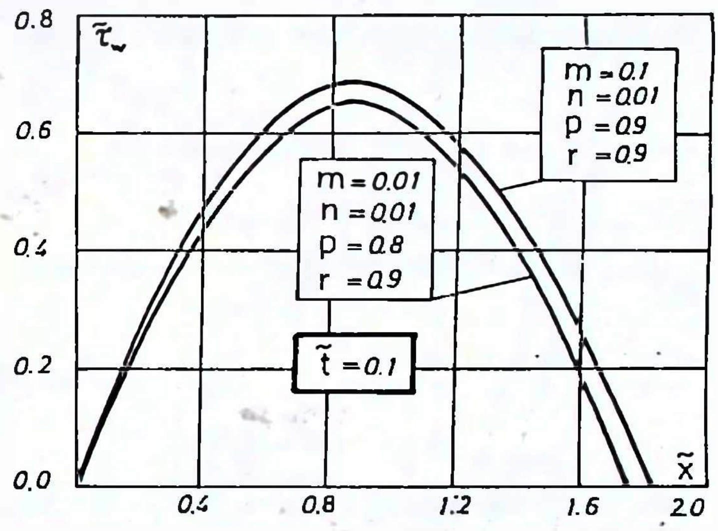



sl. 65

Ista zapažanja prisutna su i za treći primjer za koji je spoljašnja brzina data izrazom (5.1.7), i prema kojem su strujanja prouzrokovana manjim ubrzanjem porasta poluprečnika kružnog cilindra data pri m=0.01, a sa većim ubrzanjem pri m=0.1. Vidi se da sl. 58 i 61, da su pri parametru m=0.1, tj. pri strujanju sa većim ubrzanjem, vrijednosti napona $\tilde{\tau}_w$ veći duž cijele kontrue od napona $\tilde{\tau}_w$ pri manjem ubrzanju struje za koje je m=0.01, i da se isto tako vrijednosti $\tilde{\tau}_w$ povećavaju sa porastom vremena $\tilde{t}$. Sa povećavanjem ubrzanja struje, tj. pri porastu parametra m od 0.01



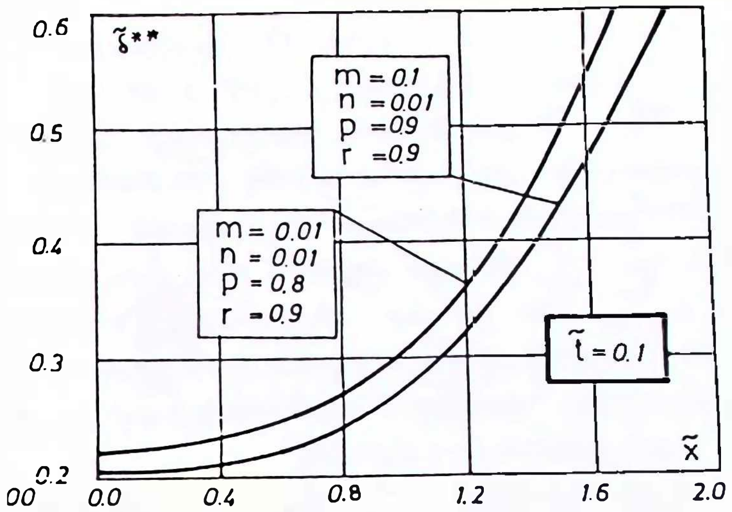

sl.66



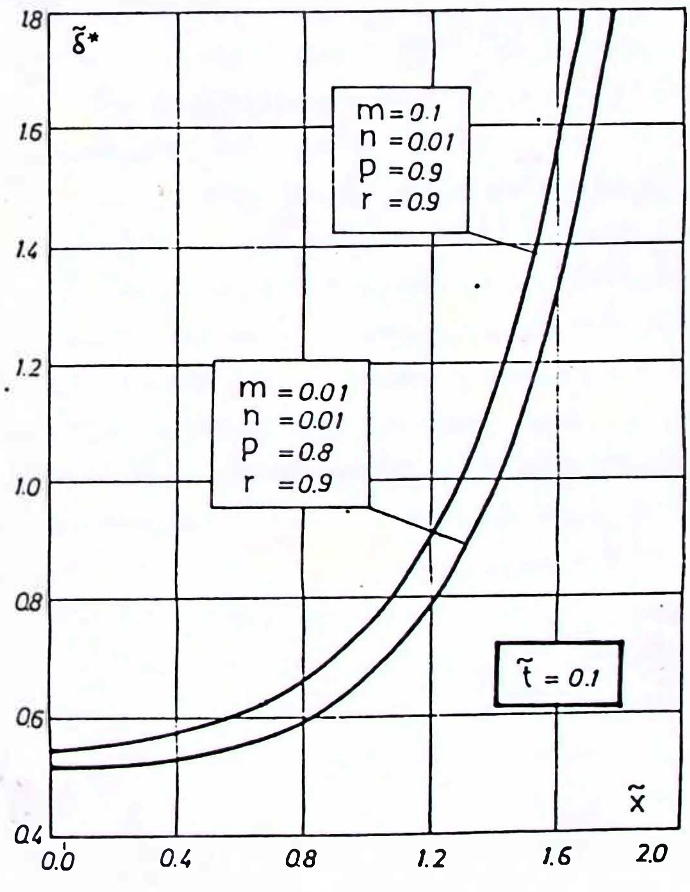

sl. 67

do 0.1 veličine $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^{*}$ se ponašaju suprotno. Naime, kako pokazuju sl. 59 i 62, veličine $\tilde{\delta}^{**}$ opadaju sa porastom ubrzanja struje kao i u toku vremena $\tilde{t}$, dok se prema sl. 60 i 63, veličine $\tilde{\delta}^{*}$ povećavaju i pri povećavanju ubrzanja spoljašnje struje i pri povećavanju vremena $\tilde{t}$ pri jednoj odredjenoj vrijednosti parametra m, što utiče da se tačka odvajanja graničnog sloja pomjera niz konturu.

Na sl. 64 do 69 daju se raspodjele tangencijalnog napona $\tilde{\tau}_w$, debljine gubitka impulsa $\tilde{\delta}^{**}$ i debljine istiskivanja $\tilde{\delta}^{*}$ nestacionarnog graničnog sloja formiranog na osnovu spoljašnje




sl. 68




sl. 69

brzine date izrazom (5.1.8). Zapaža se sa navedenih slika, da se sa povećavanjem parametra m od 0.01 na 0.1, a to znači sa povećavanjem ubrzanja struje prouzrokovane većim ubrzanjem središta opstrujavanog cilindra, povećavaju vrijednosti $\tilde{\tau}_w$ (sl. 64 i 67) i $\tilde{\delta}^*$ (sl. 66 i 69) a smanjuju vrijednosti $\tilde{\delta}^{**}$(sl. 65 i 68). Isto takvo ponašanje veličina $\tilde{\tau}_w$, $\tilde{\delta}^{**}$ i $\tilde{\delta}^*$ prisutno je i pri porastu vremena $\tilde{t}$, što dovodi do odlaganja tačke odvajanja graničnog sloja, odnosno do njenog pomjeranja niz konturu.

Primjenom ove metode moguće je odrediti trenutak prve pojave odvajanja graničnog sloja kao i mjesto, tj. podužnu koordinatu $\tilde{x}$ u kojoj se to odvajanje dešava. Za razliku od drugih metoda, gdje se trenutak prve pojave odvajanja graničnog sloja odredjuje, primenjujući metodu LOJCJANSKOG, rešavanjem impulse jednačine [44], [45], ili iz rekurzivnog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, dobijen predstavljanjem rešenja jednačine nestacionarnog graničnog sloja u obliku stepenog reda [42], ovdje se korišćenjem izraza za $\tilde{\tau}_w$, koji su u prvom, drugom, trećem i četvrtom primjeru dati sa (5.1.24), (5.1.27), (5.1.30) i (5.1.33), odredjuju one vrijednosti $\tilde{t}$ i $\tilde{x}$ pri kojima je vrijednost tangencijalnog napona $\tilde{\tau}_w$ vrlo mala, tj $\tilde{\tau}_w \approx 0$. Naime, ranije opisanim postupkom odredjuje se najmanja vrijednost vremena $\tilde{t}$ pri kojoj je, uz najmanju univerzalnu veličinu $\Phi''(o)$ i zadovoljavanjem uslova $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{U}\tilde{\delta}^*)=0$, moguće naći podužnu koordinatu $\tilde{x}$ tako da u toj tački tangencijalni napon $\tilde{\tau}_w$, računat navedenim izrazima zavisno od primjera, bude veoma mali. Kako postupak odredjivanja tog prvog trenutka odvajanja graničnog sloja kao i mjesto gdje se to odvajanje dešava traži nova numerička sračunavanja, to je i razlog da to ostaje kao predmet pažnje istraživanja u narednom periodu.

# Z A K LJ U Č A K

U ovom radu se razmatra nestacionarni ravanski granični sloj nestišljivog fluida.

Matematičko modeliranje problema vrši se u prvoj glavi, tj. formiraju se jednačine koje matematički opisuju kretanje u nestacionarnom ravanskom graničnom sloju nestišljivog fluida. Za formiranje ovih jednačina polazi se od NAVIÉ-STOKES-ove jednačine za nestišljive fluide i jednačine kontinuiteta. U istoj se glavi, za razmatrani problem, formiraju jednačina impulsa i jednačina ergije koje su neophodne pri izboru razmjere poprečne koordinate. Izjednačavanjem parcijalnih izvoda po vremenu sa nulom, iz formiranih jednačina se dobijaju odgovarajuće jednačine za stacionarni granični sloj.

Za rešavanje problema, koji je matematički modeliran u prvoj glavi, potrebno je izabrati odgovarajuću metodu sa kojom je neophodno riješiti formirani sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina sa odgovarajućim početnim i graničnim uslovima. Zbog toga se u drugoj glavi daje kratak pregled različitih oblika savremene metode uopštene sličnosti. U zavisnosti od toga da li u univerzalnoj jednačini figurišu integralno-diferencijalni ili samo diferencijalni funkcionali traženog rešenja, ovi oblici su podijeljeni na integralno-diferencijalni i čisto diferencijalni. Pažnja se posvećuje višeparametarskoj metodi LOJCJANSKOG koja je u teoriji stacionarnog graničnog sloja dala zavidne rezultate i koja je uspješno proširena na nestacionarne probleme. Medjutim, rešavanje svakog konkretnog problema, primjenom ove metode, svodi se na rešavanje impulsne jednačine. Zato se, dalje u ovoj glavi, analizira višeparametarska metoda SALJNIKOVA, koja se u teoriji stacionarnog graničnog sloja na mnogim konkretnim problemima potvrdila kao tačna i efikasna, naročito zbog činjenice da je izbjegnuto rešavanje impulsne jednačine. Imajući ovo u vidu, kao i saznanje da nije metoda SALJNIKOVA primjenjivana na nestacionarne probleme, to je i bio razlog da se ona odabira za proširivanje na razmatrani problem.

U trećoj glavi se odabrani integralno-diferencijalni oblik višeparametarske metode SALJNIKOVA, proširuje na nestacionarni ravanski granični sloj nestišljivog fluida, odnosno formira se metoda za rešavanje razmatranog problema. U svojstvu nezavisno promenljivih koristi se skup parametara, tako da se jednačina svodi na univerzalni oblik. Za svodjenje jednačine na pomenuti oblik koriste se jednačina impulsa i jednačina energije razmatranog problema. Formirana univerzalna jednačina se, zatim, piše u dvoparametarskom punom približenju sa parametrima $f_{1,0}$; $f_{0,1}$ koji izražavaju različite uticaje na razvoj graničnog sloja. Takodje se ukazuje na mogućnost dobijanja univerzalnih jednačina u dvoparametarskim približenjima lokalizovanim po $f_{1,0}$; $f_{0,1}$ respektivno, kao i na mogućnost dobijanja univerzalnih jednačina lokalizovanih po dva parametra istovremeno, a ovo zbog toga da bi se smanjile teškoće matematičke prirode kakve se javljaju pri rešavanju pune dvoparametarske jednačine.

Formirana univerzalna jednačina u punom dvoparametarskom približenju numerički se rešava u četvrtoj glavi. Na osnovu formiranih numeričkih algoritama daju se programi na FORTRAN IV jeziku koji se koristi za numeričko rešavanje univerzalnih jednačina na elektronskom računaru DELTA 4850/160 (VAX/VMS). Sa rešavanjem odgovarajućih univerzalnih jednačina, sračunavaju se istovremeno vrijednosti univerzalnih funkcija graničnog sloja i daju posredstvom odgovarajućih tabela. U samom radu se, radi lakšeg praćenja promjena univerzalnih funkcija graničnog sloja, one iste daju posredstvom odgovarajućih dijagrama. Ovi univerzalni rezultati koriste se za donošenje opštih zaključaka o razvoju graničnog sloja, a kasnije i za proračune partikularnih problema. Tako se zaključuje da ubrzano kretanje spoljašnje struje fluida pomjera tačku odvajanja graničnog sloja od prednje zaustavne tačke, tj. odlaže pojavu odvajanja graničnog sloja, dok usporeno kretanje spoljašnje struje pomjera tačku odvajanja graničnog sloja prema prednjoj zaustavnoj tački, što znači da dolazi do ranijeg odvajanja sloja. Prema tome, ubrzana kretanja spoljašnje struje fluida imaju povoljan uticaj na razvoj graničnog sloja, dok je uticaj usporenih kretanja nepovoljan. Takodje se zapaža da pri velikim usporenjima spoljašnje struje fluida može doći skoro do poklapanja prednje zaustavne tačke i tačke odvajanja graničnog sloja, a to praktično znači da se i ne formira granični sloj. Daje se i više zaključaka koji se odnose na ponašanje univerzalnih funkcija i na njihov uticaj na razvoj graničnog sloja.

U petoj glavi se dobijena univerzalna rešenja koriste za proračune konkretnih problema graničnog sloja. Za zadatu brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja odredjuju se karakteristične veličine graničnog sloja tj. tangencijalni napon na tijelu, debljina gubitka impulsa i debljina istiskivanja. Razmatraju se odabrani primjeri graničnog sloja na kružnom cilindru koji u sebi sadrže različite klase ubrzanih i jednu klasu usporenih kretanja fluida u spoljašnjoj struji. Formiranim postupkom, primjenjujući dobijena univerzalna rešenja, sračunavaju se veličine koje su od interesa za praćenje razvoja graničnog sloja, i koje se radi njihovog lakšeg praćenja grafički daju u radu. Sa tih dijagrama se zapaža da debljina gubitka impulsa za ubrzana spoljašnja strujanja opada, sa porastom vremena, dok ista veličina tokom vremena raste za usporena spoljašnja strujanja. Suprotno je sa ponašanjem debljine istiskivanja, jer sa porastom vremena ako se fluid u spoljašnjoj struji kreće ubrzano ona raste, a opada tokom vremena ako se fluid kreće usporeno. Takodje se potvrdjuju generalni zaključci, dati u četvrtoj glavi, da ubrzana kretanja spoljašnje struje pomjeraju tačku odvajanja graničnog sloja nizvodno i u tom smislu imaju povoljan uticaj na ovu pojavu, dok usporena kretanja imaju nepovoljan uticaj s obzirom da tačku odvajanja pomjeraju prema prednjoj zaustavnoj tački. Dalje se u ovoj glavi pokazuje da se primjenom ove metode postižu veoma povoljni rezultati za klase spoljašnjih strujanja sa malim ubrzanjem i za klase strujanja sa malim usporenjem. Proračuni graničnih slojeva pri velikom ubrzanju, odnosno velikom usporenju spoljašnje struje, primjenom ove metode nijesu zadovoljavajući. Ali kako je primjenom ove granični sloj proračunat ne rešavajući impulsnu jednačinu, što je i njena najbolja strana, to se zanemarujući pogoršanu tačnost prema ovoj prednosti, ova metoda može primijeniti i na granične slojeve sa srednjim ubrzanim odnosno usporenim kretanjem spoljašnje struje. Izloženi postupak se, bez problema, može koristiti i za druge klase spoljašnjih strujanja a i za druge oblike tijela.

Formirana metoda za razmatrani problem može se proširiti i na složenije probleme nestacionarnog graničnog sloja, što će i bit predmet daljih istraživanja.

# L I T E R A T U R A


[1] GERSTEN, K., Die Bedeutung der Prandtlschen Grenzschicht theorie nach 85 Jahren, Z.Flugwiss. Weltraumfo- rschung 13, pp. 209-218, 1989

[2] PRANDTL L., Uber Flussigkeitsbewegung belsehr Kleiner Reibung, Verhandl. d.III Inter. Mathem. Kongress, Helderberg,1904

[3] BLASIUS H., Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung Z. Math. u. Phys. 56, 1908

[4] FALKNER V.M., A further investigation of solution of boundary layer equations. ARC RM 1884, 1939.

[5] HOWARTH L., On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. ARC RM 1632, 1935

[6] TANI I., On the solution of the laminar boundary layer equations. J.Phys. Soc. Japan 4, 1949

[7] GORTLER H., Zahlentaifeln universeller Funktionen zur neuen Reihe fur die Berechnung laminarer Grenzschichten. Bericht No. 34 der Deutschen Versuchsanstalt fur Lufftahrt, 1957

[8] KARMAN V.Th. Uber laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 1921

[9] POHLHAUSEN K., Zur naherungsweisen Integration der Differe- ntialgleichung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM 1, 1921

[10] HARTREE D.R. On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the equations of the boundary layer, Proc.Camb.Phil. Soc. vol. 33, 1937.

[11] HOWART L., On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London A 919, 164, 1938

[12] HOLSTEIN H., BOHLEN T., Ein eintaches Verfahren zur Berechung laminarer Reibungsschichten, die dem Naherungsverfa- hren von K.Pohlhausen genugen. Lilienthal-Bericht S10, No.5, 1940

[13] TANI I., On the approximate solution of the laminar boundary layer equations JAS 21, 1954

[14] ŠKADOV V., Ob integrirovaniji uravnenij pograničnovo sloja, DAN SSSR, No. 4, 1959 (na ruskom)

[15] ŠKADOV V., K rešeniju zadači o pograničnom sloje, IAN SSSR, Odelenije tehn. nauk., Meh. i mašinostr, No.3, 1962 (na ruskom)

[16] ŠKADOV V., Pograničnij sloj s gradijentom dovljenija u potoke sžimaemoj židkosti,IAN SSSR, Odeljenije tehn.nauk. Meh. i mašinostr. No.2, 1963 (na ruskom)

[17] LOJCJANSKI G.L., Aerodinamika pograničnogo sloja-Gostehizdat, 1941 (na ruskom)

[18] LOJCJANSKI G.L., Dokladi Akad. Nauk SSSR, 35 No.8, 1942 (na ruskom)

[19] LOJCJANSKI G.L., Universaljnie uravnenija i parametričeskie približenija v teoriji laminarnovo pograničnovo sloja,Akademija Nauk SSSR, Prikladnaja matematika i mehanika, Tom 29, vipusk 1 Moskva, 1965 (na ruskom)

[20] SALJNIKOV N.V., OKA N.S., Obadnoj vazmožnoj forme universaljnih uravnenij lamenarnovo pograničnovo sloja, Akad. Nauk SSSR, Mehanika židkosti i gaza 1, Moskva, 1969 (na ruskom)

[21] SALJNIKOV N.V., Aboščenie universaljnovo uravnenija teoriji laminarnovo pograničnovo sloja G.L. Lojcjanskovo, Publications De L'institut Mathematique T. 13(27), Beograd, 1972 (na ruskom)

[22] SALJNIKOV N.V., A contribution to universal solutions of the boundary tayer theory, Teorijska i primenjena Mehanika 4, Beograd, 1978

[23] GOLDSTEIN S., ROSENHEAD L., Boundary layer growth. Proc. Cambr. Phil. Soc. 32, 1936

[24] AŠKOVIĆ R., Nestacionarnij pograničnij sloj na elipsoide vraščenija, Publications de l'institut mathematique, 5 (19), Beograd, 1965 (na ruskom)

[25] AŠKOVIĆ R., Nestacionarnij pograničnij sloj na telah vraščenija pri vnešnej skorosti, zavisjaščej ot vremeni no stepenomu i eksponencijaljnomu zakonu, Publications de l'institut mathematique, 5(19), Beograd, 1965 (na ruskom)

[26] AŠKOVIĆ R., Granični sloj na telu pokrenutom iz stanja izvesnih kratkotrajnih prethodnih nestacionarnih kretanja Matematički vesnik 4(19), 1967

[27] AŠKOVIĆ R., Laminar boundary layer on cylindrical bodies started from certain proceding non-steady motions, Publications de l'institut mathematique, 7(21), 1967

[28] AŠKOVIĆ R., An approximate solution of the boundary layer on a body started from certain proceding non-steady motions, Publications de l'institut mathematique 8(22), 1968

[29] GÖRTLER H., Verdragungswirkung der laminaren Grenzchicht und Druckwiderstand. Ing. - Arch. 14, 1944

[30] WATSON F.J., Boundary layer growth. Proc. Roy. Soc. A231, 1955

[31] ROZIN L.A., Približenij metod integrirovanija uravnenij nestacionarnovo pograničnovo sloja V nesžimaemoj židkosti. Prikl. matem. i meh. 21, vip 5, 1957 (na ruskom)

[32] HASSAN H.A., On unsteady laminar boundary layers. J.Fluid Mech. 9, 1960

[33] DJURIĆ M., One-parameter method for calculations of nonsteady laminar boundary layers, Publications de l'institut mathematique, 5(19), 1965

[34] DJURIĆ M., Unsteady laminar boundary layer on a rotational body which is put to spiral motion, Publications de l'institut mathematique, 5(19), 1965

[35] DJURIĆ M., A contribution to similar solutions in the case of unsteady boundary layers, Matematički vesnik 2(17), 1965

[36] DJURIĆ M., Prenošenje jednoparametarske metode na nestacionarne granične slojeve sa usisavanjem, Matematički vesnik 2(17), 1965

[37] DJURIĆ M., A method for solution of unsteady incompressible laminar boundary layers, Publications de l'institut mathematique 6(20), 1966

[38] DJURIĆ M., On the universal form of unstedy incompressible boundary-layer equation and its solution, Publications de l'institut mathematique 9(23), 1969

[39] DJURIĆ M., On the transformation of thermal boundary-layer equations, Publications de l'institut mathematique 9(23), 1969

[40] SALJNIKOV V., Sur une forme possible d' equations universelles de la couche limite laminare instationnare C.R.Acad. Sc. Paris, t.272., 1971

[41] DJUKIĆ DJ., O jednoj mogućoj formi univerzalnih jednačina nestacionarnog laminarnog graničnog sloja, Matematički vesnik 7(22), 1970

[42] DJUKIĆ DJ., Univerzalne jednačine nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti pri proizvoljnoj brzini spoljašnjeg strujanja, Matematički vesnik 8(23), 1971

[43] SALJNIKOV V., DJUKIĆ DJ., L'universalisation des equations de la couche limite laminare instationnaire,Proc. IUTAM Symp. 1971 on "Recent Research on Unsteady Boundary Layers," Les Presses de L'Univ. Lavel, Quebec. Vol. 1, 1972

[44] BUŠMARIN O., BASIN B., Parametričeskij metod rasčota laminarnovo nestacionarnog pograničnogo sloja, Inženerno-fizičeskij žurnal, tom XXII, No.2. 1972 (na ruskom)

[45] BUŠMARIN O., SARAJEV JU., Parametričeskij metod v teoriji nestacionarnovo prograničnovo sloja, Inžinerno-fizičeskij žurnal, tom XXVII, No.1, 1974 (na ruskom)

[46] BUŠMARIN O., STOLETOV V., Obobščeno-podobnij metod v teoriji nestacionarnovo prograničnovo sloja s universaljnim uravneniem v diferencijaljnoj forme, Inženerno fizičeskij žurnal, tom XXXIV, No.2, 1978 (na ruskom)

[47] SCHLICHTING H., Grenzschicht-theorie,ruski prevod, Moskva, 1974

[48] NIKODIJEVIĆ D., Nestacionarni magnetno-hidrodinamički granični sloj nestišljivog fluida, Doktorska disertacija,MF, Niš, 1986

[49] SALJNIKOV V., BORIČIĆ Z., NIKODIJEVIĆ D., Prilog proučavanju nestacionarnog MHD graničnog sloja, XVII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar 1986

[50] IOAN P., The unsteady hydromagnetic slip flow with Hall effect overan infinite flat plate. "Mat.vesn.", 9 No.2, 1972

[51] NORMAN E.A., Unsteady magnetohydrodynamic boundary layer on a semiinfinite flat plate. "Phys.Fluids" 16,No.11, 19

[52] KERESELIDZE Z.A., ŠIRIKADZE D.V., Rasčet pograničnovo sloja u poristoj plastini s peremenim otsosom v magnitnom pole."Magnitnaja gidrodinamika", No.2, 1974

[53] MESSIHA S.A.S., Steady magnetohydrodynamic boundary layer flow. "Boll. Unione mat. ital.", 9, No.3, 1974

[54] DEBNATH L., On the growth of unsteady hydromagnetic multiple boundary layers. "Meccanica" 9, No. 1, 1974

[55] ČANTRAK S., AŠKOVIĆ R., Sur un phenomene de la couche limite magnetohydrodynamique d'um ecoulement "Soc. sci. math. RSR" 17, No. 1, 1974

[56] AŠKOVIĆ R., Sur un probleme de la couche limite magnetohydrodynamique laminaire a conductevite electrique variable."Rev.roum.sci.techn.Ser mec. appl.", 21, No. 2, 1976

[57] PURI P., KULSHRESTHA P.K., Unsteady hydromagnetic boundary layer in a rotating medium,"trans.ASME", E43, No.2, 1976

[58] GHOSHAL S.K., GHOSHAL A., Finite diference method of solution of unsteady magnetic hydrodynamic boundary layer equations in a natural convection. "Proc. Indian Acod. Sci." A83, No.6, 1976

[59] AGRAWAL H.L., RAM P.C., Hydromagnetic laminar flow of an electricaly conducting fluid along a vertical wall, "Indian J.Pure and Appl. Math." , 6, No.1, 1975

[60] AŠKOVIĆ R., Univeralisation des equations de la couche limite magnetohidrodynamique laminare dans uns cas de conductivite electrique variable. "Teor. i primen. meh." 2, 1976

[61] BANSAL J.L., On the hydromagnetic boundary layer flow past a flat plate "Acta mech", 41, No. 1-2, 1981

[62] SINGH P., ANTONY R.S., An approximate variational solution of boundary layer flow when free stream varies as power function."Acta phys. Acad. sci. Hung." 52, No.2, 198

[63] LOJCJANSKI L., Lominarnij pograničnij sloj, Moskva, 1962 (na ruskom)

[64] VORONJEC K., OBRADOVIĆ N., Mehanika fluida, "Gradjevinska knjiga", Beograd 1970.

[65] BORIČIĆ Z., Univerzalne jednačine MHD graničnog sloja i njihova parametarska rešenja, Doktorska disertacija, Niš, 1971

[66] WEIGHARDT K., Uber einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing. - Arch. 16, 1948

[67] PAPKOV N.A., Metod lokaljnoj avtomodelnosti rasčota karakteristik laminarnovo pograničnovo sloja, Izvestija visših učebnih zavedenij, No.2, Aviacionaja tehnika, 1976 (na ruskom)

[68] PAPKOV N.A. Parametričeskie uravnenija laminarnovo pograničnovo sloja i metodi rasčota, osnovanie na ih rešenijah, Izvestija viših učebnih zavedenij, No. 4, Aviacionaja tehnika, 1979 (na ruskom)

[69] HISLAVSKAJA G.H., Diferencijaljnaja forma obоščeno-podobnovo uravnenija laminarnovo pograničnovo sloja, Inženerno- -fizičeskij žurnal, tom XXXI, No 6, 1976 (na ruskom)

[70] BOGDANOVA B.B., KOZLOV F.L., LOSINSKAJA I.T., Universaljnie upravnenija laminarnog prostranstvenovo pograničnovo sloja na krivolinejnoj pronicaenoj poverhnosti, Prikladnaja mehanika, Tom XVIII, No.3, 1982

[71] LOJCJANSKI L., Mehanika židkosti i gaza, Moskva, 1978 (na ruskom)

[72] TERRILL R.M., Laminar boundary layer flow near separation with and without suction. Phylos. Trans. Roy. Soc. London A, vol. 253, No. 1022, 1960

[73] ŠIŠKINA G.L, Dvuhparametričeskoe rešenie uravnenij_ laminarnovo pograničnovo sloja na pronicaemo poverhnosti, IAN SSSR, Mehanika Židskosti i gaza, No6 1973 (na ruskom)

[74] KAPUSTIANSKI M.S., Laminarnij pograničnij sloj V gazovom patoke, Trudi LPI. No.248, 1965, No.265,1966 (na ruskom)

[75] KARJAKIN JU., Dviženije provodjaščej židkosti v prostranstvenih laminarnih pograničnih slojah pri naličiji poperečnovo magnitnovo polje,Avtoreferat disertaciji, Lenjingrad, 1968 (na ruskom)

[76] ZOLOTOV L.N., Metod obobščenovo podobija v zadačah svodobnoj konvekciji s proizvoljnim raspredeleniem temperaturi ili teplovovo patoka na vertikaljnoj stenke, IAN SSSR, Mehanika Židkosti i gaza, No3, Moskva, 1980 (na ruskom)

[77] ZOLOTOV L.N. Dvuhparametričeskoe rešenie zadači o svobodnoj konvekciji vblizi vertikalnog neizotermičesk plastini, IAN SSSR, Mehanika židkosti i gaza, No. Moskva, 1980 (na ruskom)

[78] CIJAN J.B., Metoda za rešavanje temperaturskog graničnog sloja pri nestacionarnom laminarnom strujanju nestišljivog fluida, Matematički vesnik 8(23), 1971

[79] CIJAN J.B., On the method for Solution of Unsteady Laminar Thermal Boundary-Layers, Stojničky časopis pre proble mechaniky v strojnictve, Počnik XXII, čisto 3, 1971

[80] SALJNIKOV V., CIJAN B., DJUKIĆ DJ., Univerzalne jednačine temperaturskog laminarnog nestacionarnog graničnog sloja, Saopšteno na XII. Jugoslovenskom kongresu racionalne i primijenjene mehanike u Ohridu, 1974

[81] AŠKOVIĆ T., Metoda za rešavanje nestacionarnog magnetohidrodinamičkog graničnog sloja pri laminarnom strujanju nestišljivog fluida, Doktorska disertacija PMF, Beograd, 1976

[82] AŠKOVIĆ T., O jednoj mogućnosti tretiranja MHD temperaturskog nestacionarnog laminarnog graničnog sloja, Saopšteno na XII Jugoslovenskom kongresu racionalne i primenjene mehanike u Ohridu, 1974

[83] SARAJEV JU. V., Primenije parametričeskovo metoda dlja rešenja zadač nestacionarnovo temperaturnovo pograničnovo sloja, Inženerno-fizičeskij žurnal, Tom XXVIII, No. 2, 1975 (na ruskom)

[84] BASSINA I., BUŠMARIN O., Parametričeskij metod v teoriji periodičeskovo pograničnovo sloja pri boljših čislah struhala, Inženerno-fizičeskij žurnal, Tom XXX, No.1, 1976 (na ruskom)

[85] SALJNIKOV V., BORIČIĆ Z., Die universellen Grenzschichtgleichungen fur den Fall der kompressiblen laminaren Stromung, ZAMM 54, 1954

[86] SALJNIKOV V., BORIČIĆ Z., Beitrag zum Steuerunsproblem der MHD Grenzschicht, ZAMM 58, 1978

[87] SALJNIKOV V., DJUKIĆ DJ., Beitrag zu den Grenzschichtstromungsunteruchungen von nichtnewtonschen Potenzesetzflussigkeiten, ZAMM 56, 1976

[88] KUKIĆ M.D., Metoda za sračunavanje osnosimetričnog graničnog sloja na obrtnim telima, magistarski rad, PMF, Beograd, 1974

[89] TUPURKOVSKA P.S., Opstrujavanje na porozni profilski konturi sa viskozen fluid pri dviženje sa golemi brzini, Doktorska disertacija, MF, Skoplje, 1984

[90] NIKODIJEVIĆ D., Univerzalizacija osnosimetričnog MHD graničnog sloja na obrtnim telima, Magistarski rad, PMF, Beograd, 1981

[91] OBROVIĆ B., SALJNIKOV V., BORIČIĆ Z., Prilog istraživanju graničnog sloja za slučaj tzv. zamrznutog strujanja idealno disociranog glasa, Zbornik radova Maš. fakulteta, Kragujevac, 1980

[92] SALJNIKOV V., IVANOVIĆ D., MHD Grenzschichtstromung an porosen Wanden mit Absaugung bzw. Ausblasen, ZAMM, Bd. 68, Heft 4/5, T171, Berlin, 1988

[93] SALJNIKOV V., IVANOVIĆ D., MHD granični sloj na aeroprofilima sa poroznom konturom, Zbornik radova povodom 60-god. prof. L.Vujoševića, MF, Titograd, 1988

[94] SALJNIKOV V., DJORDJEVIĆ V., Universalisierung der Gleichung vom Temperaturgrenzschicht problem, ZAMM, Band 48, Heft 8 und Sonderheft, 1968

[95] SALJNIKOV V., DJORDJEVIĆ V., Temperaturski granični sloj pri Tanijevim raspodjelama spoljašnje brine, Saopšteno na Kongresu društva za mehaniku, Split, 1968

[96] BUŠMARIN N.O., Parametričkij metod rasčota nestacionarnovo laminarnovo pograničnovo sloja v nesžimaemoj židkosti s otsosom ili vduvom, Inženerno-fizičeskij žurnal, tom XXXI, No.4, 1976 (na ruskom)

[97] BOGDANOVA V.V., O vibore masštaba dlja poperečnoj koordinati v universaljnih uravnenijah pograničnovo sloja, Mehanika i energomašinstoenie, Trudi LPI No. 352, Lenjingrad, 1976

[98] PANTON R.L., Incopressible flow, John Wiley & sons, New York, pp. 577, 1984

[99] TOŠIĆ DJ. D., Uvod u numeričku analizu, Naučna knjiga, Beograd, 1978

[100] STRUMINSKIJ V.V., Sbornik teoretičeskih rabot po aerodinamike, CAGI, Oborongiz, 1957

**PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime i prezime autora: Dečan Ivanović

Godina rođenja: 16.06.1951

E-mail: decan@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore:

Mašinski fakultet Univerziteta Crne Gore

Naslov doktorske disertacije:

Nestacionarni laminarni granični sloj nestišljivog fluida

Prevod naslova na engleski jezik:

Unsteady laminar boundary layer of incompressible fluid flow

Datum odbrane: 12.06.1992

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci[1]

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Sve ovo navedeno nalazi se u mojoj farscikli, kao I kretanje u službi tokom četrdeset godina provedenog rada na Mašinskom fakultetu, I to počevši od izbora u zvanje docent do redovnog profesora, sve do odlaska u penziju prije 3 godine

Napomena

[1] Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

**PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE**

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Unsteady laminar boundary layer of incompressible fluid flow

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Prof. dr Viktor Sanjikov, Mentor, Beograd
Prof. dr Zoran Boričić, Niš
Prof. dr Luka Vujošević, Podgorica
Prof. dr Petar Vukoslavčević, Podgorica
Prof. dr Milojica Jaćimović, Podgorica

Sažetak*

Odgovarajuće jednačine nestacionarnog, linearnog, ravanskog, nestišljivog graničnog sloja, uvođenjem svrsishodni transformacija promjenljivih, skupova parametara sličnosti, momente I energijske jednačine, dobijaju univerzalnu, tj, uopštenu formu. Univerzalna jednačina je nemerički integraljena, u punoj dvoparametarskoj aproksimaciji, zadržavajući nestacionarni I dinamički parameter, kao I njihoove derivacije. Dobijena univerzalna rešenja, tj. Rešenja uopštene sličnosti, su upotrijebljena za sračunavanje I analiziranjekarakterističnih veličina nestacionarnog strujanja fluida( trenje na konturi, debljina istiskivanja I debljina gubitka impulsa) na krudnom cilindru, pri poznatoj vremenski promjenljivoj funkciji potenijalne brzine

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

The corresponding equations of unsteady, two-dimensional, incompressible boundary layer, by introducing the appropriate variable transformation, similarity parameter set, momentum and energy equations, being transformed into the so-called universal i.e. geeraliyed form. Universal equation is numerically integrated, in the full two-parameter approximation, with respect to the unsteady parameter an dynamic parameter and their derivatives. The obtain universal solutions i.e. generalized similarity solutions, are used for count and analyze the characteristic sizes of unsteady flow ( skin friction, momemtum thickness and displacement thickness) on the circular cylinder, when potential velocity function changeable in time is known.

Ključne riječi:
Nestacionarni granični sloj, laminarno nestišljivo strujanje viskoznog fluida

Ključne riječi na engleskom jeziku
Unsteady boundary layer, laminar incompressible flow of viscous fluid

Naučna oblast/uža naučna oblast
Mehanika fluida/nestacionarno strujanje fluida

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku
Fluid of mechanics/unsteady fluid flow

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu.

# IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Nestacionarni granični sloj viskoznog fluida

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commmons), za koju sam se odlučio/la[2].

Autorstvo

**<u>Autorstvo – bez prerada</u>**

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

**Potpis doktoranda**

Prof. dr Dečan Ivanović

U

[2] Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)

**Autorstvo**
Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

**Autorstvo – bez prerada**
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

**Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima**
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

**Autorstvo – nekomercijalno**
Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada**
Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

**Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima**
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.