

**UNIVERZITET CRNE GORE**  
**ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U PODGORICI**

MR IGOR ĐUROVIĆ

**VREMENSKO-FREKVENCIJSKE TRANSFORMACIJE U  
ESTIMACIJI PARAMETARA SIGNALA SA PRIMJENOM U  
DIGITALNOM WATERMARKINGU**

**- Doktorska disertacija -**

Podgorica 2000.

Koristim priliku da se zahvalim Prof. Dr Ljubiši Stankoviću koji me je uputio u problematiku vremensko-frekvencijske analize signala i stalnim savjetima značajno uticao na podizanje kvaliteta ove disertacije.

Zahvaljujem se na podršci tokom izrade teze Prof. Dr Srđanu Stankoviću.

Na kolegijalnoj pomoći zahvaljujem se Prof. Dr Zdravku Uskokoviću.

Na brižljivom čitanju i sugestijama koje su doprinijele kvalitetu disertacije zahvaljujem se Dr Radomiru - Matu Lakoviću.

Dio doktorske disertacije u okviru pete glave realizovan je u Laboratoriji za vještačku inteligenciju i analizu slike, Fakulteta za informatiku, Univerziteta Aristotel u Solunu. Stoga koristim priliku da se zahvalim na toplom prijemu i korisnim savjetima Prof. Dr Ioannis Pitasu.

Dio simulacija u okviru odjeljaka 3.5 i 5.2 za realizaciju diskretne frakcije Fourierove transformacije je realizovan zahvaljujući programu koji su mi ustupili Prof. Dr Haldun Ozaktas i mr Catagay Candan sa Univerziteta Bilkent u Ankari. Stoga im se zahvaljujem na ustupljenom softveru, korisnoj literaturi, te na konsultacijama vezanim za realizaciju frakcije Fourierove transformacije.

Upotreba robusnih transformacija u estimaciji trenutne frekvencije signala proistekla je iz rada sa Prof. Dr Vladimirom Katkovnikom, te mu se ovom prilikom srdačno zahvaljujem.

Koristim priliku da se zahvalim i kolegama iz Laboratorije L2: mr Veselinu Ivanoviću, mr Igoru Radusinoviću i dipl.ing. Milošu Dakoviću kao i mr Vojislavu Vukoviću na podršci i saradnji tokom izrade ove disertacije.

Zahvaljujem se kolegamicama mr Vesni Rubežić i mr Ani Jovanović na editorijalnim korekcijama.

Muziv 604

14373

## SADRŽAJ

<b>SADRŽAJ</b>	<b>3</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>4</b>
<b>UVOD</b>	<b>5</b>
<b>GLAVA I: VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA</b>	<b>9</b>
1.1. Uvod	10
1.2. Kratkotrajna Fourierova transformacija	14
1.3. Transformacije preuzete iz kvantne mehanike	16
1.4. Wignerova distribucija	18
1.5. Ambiguity funkcija	22
1.6. Cohenova klasa distribucija	23
1.7. S-metod	27
1.8. Reassignment metod	31
1.9. Dekompozicija distribucija Cohenove klase	36
1.10. Visokokoncentrisane distribucije	39
1.11. Distribucije višeg reda	48
1.12. Vremensko-frekvencijske transformacije višedimenzionih signala	51
1.13. Ostala višedimenziona predstavljanja signala	52
<b>GLAVA II: SOFTVERSKI I HARDVERSKI SISTEMI ZA VREMENSKO-FREKVENCIJSKU ANALIZU</b>	<b>60</b>
2.1. Softver za vremensko-frekvencijsku analizu	61
2.2. Virtualni instrumenti za vremensko-frekvencijsku analizu	62
2.2.1. Implementacija instrumenta	62
2.2.2. Softverska implementacija i rad sa instrumentom	63
2.2.3. Primjeri	65
2.2.4. Analiza performansi sistema	66
2.2.4.1. Estimacija trenutne frekvencije	68
2.2.4.2. Estimacija amplitude signala	73
2.2.4.3. Numerička efikasnost	77
2.2.4.4. Konvergencija S-metoda	78
2.3. Hardver za vremensko-frekvencijsku analizu	80
2.4. Hardverski sistemi za prostorno/prostorno-frekvencijsku analizu	82
<b>GLAVA III: PARAMETARSKJE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE METODE ZA ESTIMACIJU SIGNALA</b>	<b>90</b>
3.1. Radon Wignerova distribucija	91
3.2. Radonova transformacija za kreiranje signal adaptivnog jezgra	92
3.3. Wigner Houghova transformacija	92
3.4. TF distribucije za parametarsku identifikaciju	94
3.5. Veza frakcije Fourierove transformacije i transformacija koordinata vremensko-frekvencijskih predstavljanja	98
3.6. Transformacija koordinata L-Wignerove distribucije	102



<b>GLAVA IV: NEPARAMETARSKE VREMENSKO-FREKVENCIJSKE METODE ZA ESTIMACIJU SIGNALA .....</b>	<b>105</b>
4.1. Estimacija trenutne frekvencije adaptivnim vremensko-frekvencijskim distribucijama .....	107
4.2. IF estimacija u uslovima impulsnih smetnji - robusni spektrogram .....	110
4.3. Robusna WD u estimaciji trenutne frekvencije.....	125
4.4. Algoritam za neparametarsku estimaciju Wignerove distribucije višedimenzionih signala .....	134
4.5. Prostorno-promjenljivo filtriranje.....	139
 <b>GLAVA V: PRIMJENA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH METODA U DIGITALNOM WATERMARKINGU .....</b>	 <b>146</b>
5.1. Digitalni watermarking - pregled .....	147
5.2. Digitalni watermarking u FRFT domenu .....	151
5.3. Watermarking u Radon Wignerovom domenu.....	153
5.4. Watermarking sa pseudo-slučajnim amplitudama u projekcionom prostorno/prostorno-frekvencijskom domenu .....	165
5.5. Upotreba šablona u watermarkingu u Radon Wignerovom domenu.....	172
 <b>ZAKLJUČAK .....</b>	 <b>177</b>
 <b>LITERATURA .....</b>	 <b>182</b>
 <b>PRILOG .....</b>	 <b>202</b>

# SADRŽAJ

Primjena vremensko-frekvencijskih distribucija u estimaciji trenutne frekvencije i amplitude signala je glavna tema ove disertacije. Kako vremensko-frekvencijske distribucije mogu biti računski veoma zahtjevne, razmatrane su softverske i hardverske realizacije ovih transformacija. Razvijen je virtuelni instrument za vremensko-frekvencijsku analizu, koji omogućava estimaciju parametara monokomponentnih i multikomponentnih signala visokom tačnošću. U disertaciji je razvijena hardverska struktura sistema za prostorno/prostorno-frekvencijsku analizu. Predloženi sistem je zasnovan na adaptivnom 1D S-metodu po projekcionim linijama.

U radu su razmatrane parametarske i neparametarske metode estimacije. Kod parametarskih, izvršeno je unapredjenje reassignment metoda. Takodje, ukazano je da je frakciona Fourierova transformacija specijalni slučaj transformacije koordinata ambiguity funkcije, i da neki drugi oblici transformacije koordinata mogu biti veoma upotrebljivi.

Postojeće vremensko-frekvencijske transformacije nijesu omogućavale uspješnu analizu signala zahvaćenih impulsnim smetnjama. Stoga su u radu predložene modifikacije spektrograma i Wignerove distribucije, kojima se mogu estimirati parametri signala sa impulsnim smetnjama. Algoritam za neparametarsku estimaciju trenutne frekvencije signala sa impulsnim smetnjama primijenjen je na modifikovani spektrogram. Neparametarski algoritam je primijenjen i na estimaciju položaja signala u vremensko-frekvencijskom domenu. Na osnovu određene pozicije signala u vremensko-frekvencijskoj ravni izvršeno je vremenski-promjenljivo filtriranje.

Digitalni watermarking je razmatran kao oblast primjene vremensko-frekvencijskih transformacija. Predloženi watermarking sistemi pružaju mogućnost kreiranja većeg broja watermark signala i poboljšanu otpornost na uobičajene atake od postojećih.

# ABSTRACT

The main issue of this thesis is application of the time-frequency distributions to the instantaneous frequency and amplitude estimation. Time-frequency distributions can pose high calculation requirements, so it is necessary to consider possibilities of software and hardware realization. The virtual instrument for time-frequency analysis, that offers highly accuracy estimation for monocomponent and multicomponent signals, is developed, as well as the hardware system for space/spatial-frequency analysis. Proposed system is based on the adaptive 1D S-method along projections lines.

Both parametric and nonparametric methods of estimation are considered. The improvement of reassignment method that decreases its calculation complexity is developed. Also, it is shown that the fractional Fourier transform is a special case of the ambiguity function coordinate transform. Some other forms of general coordinate transform can be more useful in certain applications.

The standard time-frequency distributions can not be successfully used for estimation of signals corrupted with impulse noise. The modifications of the spectrogram and the Wigner distribution that can be used for signals estimation in impulse noise environment are proposed. The algorithm for nonparametric estimation of signal in impulse noise environment is applied by using the modified spectrogram. The nonparametric algorithm is used for signals' region of support estimation in the time-frequency domain. The time-varying filtering is obtained by using the determined signals' region of support.

The digital watermarking is considered as a specific application of the time-frequency distributions. The proposed solutions overcome drawbacks of the existing watermarking methods.

# **UVOD**

---

# UVOD

Poslednjih decenija estimacija parametara signala izuzetno je aktuelan problem. Prevažadni razlog je u značajnim primjenama. Oblasti praktične primjene ovih istraživanja su: adaptivno uklanjanje šuma i interferencija (uključujući eho), analiza i sinteza govora, analiza muzičkih signala, aseizmički dizajn i zemljotresno inženjerstvo, geofizička istraživanja, analiza vibracija i udara sagorijevanja u automobilskim motorima, analiza digitalne slike i teksturnih površi, biološka i biomedicinska istraživanja, itd.

Dva najznačajnija parametra signala su amplituda i trenutna frekvencija. U slučaju da signal ima frekvenciju koja se veoma brzo mijenja u toku vremena, klasične metode za estimaciju amplitude i trenutne frekvencije postaju neupotrebljive. Grupa metoda kreirana za rješavanje ovih problema je zasnovana na vremensko-frekvencijskim transformacijama. Razvijen je veliki broj transformacija. Metode primjene vremensko-frekvencijskih transformacija u estimaciji, baš kao i one klasične, mogu se podijeliti na parametarske i neparametarske.

U ovoj disertaciji se analiziraju primjene vremensko-frekvencijskih transformacija u estimaciji amplitude i trenutne frekvencije signala, kao i u digitalnom watermarkingu. Disertacija je podijeljena u pet poglavlja.

Prvo poglavlje sadrži osnovna razmatranja vezana za vremensko-frekvencijske transformacije. Opisane transformacije predstavljaju osnovu za istraživanja koja su obavljena u okviru ove disertacije.

Problem koji se može pojaviti u primjeni vremensko-frekvencijskih transformacija u estimaciji amplitude i trenutne frekvencije signala je u softverskoj i hardverskoj složenosti ovih rješenja. Stoga je druga glava disertacije posvećena izučavanju ovih problema. U pogledu softverskih rješenja, dat je kratak osvrt na neke postojeće programe. Posebno značajna grupa softverskih rješenja su virtuelni instrumenti za vremensko-frekvencijsku analizu. Virtuelna (softverska) instrumentacija danas je veoma popularna, prije svega zbog jeftinijeg i bržeg razvoja, bržeg uključivanja savremenih saznanja i veće modularnosti kreiranih instrumenata. Kako postojeći instrumenti ne posjeduju mogućnost implementacije nekih od transformacija koje pokazuju

dobre rezultate u estimaciji amplitude i trenutne frekvencije signala, kreiran je originalni virtuelni instrument razvijen za te namjene.

Nakon pregleda postojećih hardverskih rješenja u vremensko-frekvencijskoj analizi, posebna pažnja, u okviru drugog poglavlja, posvećena je realizaciji S-metoda kao izuzetno jednostavnoj. Poznato je da se S-metod može realizovati pomoću dva bloka, od kojih je jedan blok klasičan (za proračun kratkotrajne Fourierove transformacije), dok drugi blok omogućava autokorelaciju *STFT*. Kod višedimenzionih signala još više su došle do izražaja prednosti S-metoda. Posebno zbog toga što trenutno ne postoji drugi metod koji bi sveo računanje Cohenove klase višedimenzionih signala na višedimenzionu *STFT* ili višedimenzioni spektrogram, za razliku od jednodimenzionog slučaja gdje je moguće primjeniti određene dekompozicijske metode. Stoga je u sklopu rada originalno razvijen hardverski sistem signal adaptivnog 2D S-metoda. Računanje je svedeno na adaptivni jednodimenzioni S-metod po projekcionim pravcima.

Parametarski metodi estimacije signala predstavljaju treću cjelinu disertacije. Kod ovih metoda, oblik signala je poznat, odnosno pretpostavljen. Najčešće su kreirani za estimaciju parametara linearnih *FM* signala, s tim da se pojedine modifikacije mogu koristiti i za druge, složenije tipove signala. Najpoznatiji metodi iz ove grupe, koji su detaljno analizirani u disertaciji, su: Radon Wignerova distribucija, adaptivno određivanje funkcije jezgra i Wigner-Houghova transformacija. Ovi metodi se u kombinaciji sa reassignment distribucijama, koriste kao sredstvo za parametarsku identifikaciju signala. Mane svih reassignment predstavljanja su relativno složena realizacija koja uključuje preodabiranje signala i proračun tri distribucije. U disertaciji je pokazano da se znatno jednostavniji oblici reassignment metoda dobijaju ako se kao polazna distribucija koristi S-metod. Ovakav pristup omogućava parametarsku identifikaciju bez preodabiranja i bez proračuna više distribucija.

U trećem poglavlju disertacije, razmatrana je i opšta linearna transformacija koordinata vremensko-frekvencijskih predstavljanja čiji je specijalni slučaj rotacija, odnosno frakciona Fourierova transformacija. Ispitivane su veze ovako dobijene transformacije sa parametarskim metodima za estimaciju signala, a posebno sa dechirpingom. Kao teorijska novost, razmatrana je i transformacija koordinata L-Wignerove distribucije.

Druga grupa metoda za estimaciju amplitude i trenutne frekvencije signala su neparametarski metodi, razmatrani u četvrtom poglavlju disertacije. Najčešći neparametarski metod za estimaciju parametara signala je detekcija veličine i pozicije maksimuma vremensko-frekvencijske transformacije u nekom trenutku. Posebno značajan doprinos neparametarskim metodima je primjena algoritma zasnovanog na poredjenju standardne devijacije i biasa. Ovaj algoritam je detaljno izložen u okviru teze. Algoritam dobro funkcioniše u slučajevima kada je estimirani signal zahvaćen Gausovim bijelim šumom. Problem u primjeni algoritma nastaje u uslovima impulsnih smet-

nji. Da bi se algoritam za estimaciju trenutne frekvencije primijenio na ovakve signale, prethodno je izvršena, modifikacija periodograma i dobijen robusni spektrogram (robusni  $M$ -periodogram). U ovoj disertaciji pokazano je da se neparametarski algoritam za estimaciju trenutne frekvencije može primjenjivati na estimaciju trenutne frekvencije signala u okruženju impulsnih šumova kod robusnog spektrograma. Razmatrana je i mogućnost realizacije robusne Wignerove distribucije. Pored estimacije trenutne frekvencije, algoritam se može primijeniti i na estimaciju same distribucije, odnosno estimaciju amplitude signala. U ovom slučaju veoma je efikasan i kod nepovoljnog odnosa signal/šum. Uspješno određivanje oblasti u kojoj se signal nalazi u vremensko-frekvencijskoj ravni povezano sa definicijom Weylovog filtra, primijenjeno je na vremenski-promjenljivo filtriranje. U disertaciji, koncept vremenski-promjenljivog filtriranja je proširen na prostorno-promjenljivo filtriranje, kako signala zahvaćenih šumom tako i za separaciju  $FM$  signala od signala slike.

U petom poglavlju izložena su gledišta i mogućnosti primjene vremensko-frekvencijskih transformacija u digitalnom watermarkingu. Pored opisa dosadašnjih rješenja u ovoj oblasti, dato je i proširenje koncepta dodavanjem watermarka u vremensko-frekvencijski domen. Kao osnovni vremensko-frekvencijski domen, posmatran je domen frakcije Fourierove transformacije. Pokazano je da dodavanje watermarka u ovom domenu obezbjeđuje mogućnost kreiranja većeg broja watermarkova nego što je slučaj kod  $FT$  i  $DCT$  domena. Pored ovoga, razmatrana je mogućnost ugradnje watermarka u obliku linearnog  $FM$  signala (ili sume linearnih  $FM$  signala). Za detekciju ovakvog watermarka korišćena je Radon-Wignerova distribucija. Predložena su i opisana dva metoda ugradnje signala u Radon-Wignerovom domenu: 1) Ugradnja jednog, ili nekoliko,  $FM$  signala i njihovo pretraživanje po parametrima, na osnovu poznatog tipa signala, 2) ugradnja velikog broja  $FM$  signala i njihovo pretraživanje na osnovu ključa. Predloženi watermarking sistemi omogućavaju vjerodostojnu detekciju uz visoku otpornost na različite tipove ataka.

U ovoj disertaciji izloženi su rezultati, do kojih se došlo istraživanjima u posljednjih pet godina, kao i detaljno prezentirano stanje metoda za estimaciju parametara signala pomoću vremensko-frekvencijskih transformacija. Posebna pažnja je posvećena digitalnom watermarkingu kao jednoj od oblasti praktične primjene ovih istraživanja.

# **GLAVA I**

---



# 1. VREMENSKO-FREKVENCIJSKA ANALIZA

## 1.1 Uvod

Analiza signala u vremenskom, ili frekvencijskom, domenu nametnula je ograničenja. Ova ograničenja su znatna kada se spektralni sadržaj signala brzo mijenja u vremenu. Tri značajne oblasti, u kojima se ovakvi signali pojavljuju, su: akustika, biomedicina i industrijske aplikacije. Logično rješenje je istovremena analiza signala i po vremenu i po frekvenciji. Oblast koja proučava ove probleme je vremensko-frekvencijska analiza signala (*time-frequency signal analysis*) [1]-[5]. Primjenjivost ove oblasti potkrepljuje veliki broj radova koji su posvećeni: modelovanju i prepoznavanju govora [6]-[10], analizi muzičkih signala [11]-[13], analizi radarskih i sonarnih signala [14]-[19], analizi akustičnog rasipanja [20], biološkim aplikacijama [21, 22], analizi mišićnih i srčanih vibracija [23], analizi elektroencefalografskih signala [24], praćenju moždanih aktivnosti [25, 26], monitoringu mašina [27, 28], analizi udara sagorijevanja kod automobilskih motora [29, 30], analizi i sintezi digitalne slike [31]-[38], analizi teksturnih površi [39]-[41], analizi optičkih interferograma [31, 42], kod spread-spektarskih komunikacija [43]-[45], u klasifikaciji nelinearnih sistema [46], za *blind* separaciju signala [47], adaptivno uklanjanje ehoa [48], u aseizmičkom dizajnu i analizi seizmičkih signala [49], itd. Značajne primjene vremensko-frekvencijskih transformacija ( $TF$ ) su u estimaciji amplitude i trenutne frekvencije (*instantaneous frequency - IF*) signala [50]-[64].  $TF$  transformacije se koriste kod parametarskih i neparametarskih metoda estimacije i identifikacije signala. Za kratkotrajne signale, i u slučaju da ne postoji predznanje o tipu signala,  $TF$  transformacije pokazuju prednost u identifikaciji signala u odnosu na Kalmanove adaptivne filtre. U slučajevima kada je važno vrijeme računanja i složenost sistema,  $TF$  transformacije su kvalitetnije rješenje od skrivenih Markovljevih modela (*Hidden Markov model - HMM*) [64].

Neka je  $x(t)$  signal, odnosno zavisnost signala od vremena, i neka  $X(\omega)$  označava njegovu Fourierovu transformaciju ( $FT$ ), odnosno zavisnost signala od frekvencije. Oba oblika karakterišu na jedinstven način signal i posjeduju transformacionu vezu koja predstavlja preslikavanje jedan-na-jedan. Veza izmedju signala i spektra je Fourierova

odnosno inverzna Fourierova transformacija (*IFT*):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (1.1)$$

*TF* transformacijama (predstavljanjima) se preslikava signal  $x(t)$  (ili  $X(\omega)$ ) u *TF* ravan,  $x(t) \Rightarrow TF_x(t, \omega)$ . Postoje dvije grupe *TF* transformacija: linearne i nelinearne. Transformacija je linearna ako je za linearnu kombinaciju signala:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \quad (1.2)$$

jednaka linearnoj kombinaciji *TF* transformacija:

$$TF_z(t, \omega) = A \cdot TF_x(t, \omega) + B \cdot TF_y(t, \omega)$$

Nelinearna *TF* transformacija signala oblika (1.2), u opštem slučaju, može se zapisati:

$$TF_z(t, \omega) = A_1 \cdot TF_{xx}(t, \omega) + A_2 \cdot TF_{yy}(t, \omega) + B_1 \cdot TF_{xy}(t, \omega) + B_2 \cdot TF_{yx}(t, \omega) \quad (1.3)$$

gdje su  $TF_{xx}(t, \omega)$  i  $TF_{yy}(t, \omega)$  korisne komponente signala (auto-članovi), dok su  $TF_{xy}(t, \omega)$  i  $TF_{yx}(t, \omega)$  neželjeni, interferentni produkti ovakve transformacije (kros-članovi) [66].

Očuvanje linearnosti i potiskivanje kros-članova, su, između ostalih, dva veoma značajna zahtjeva koja se postavljaju u postupku izbora *TF* transformacija [3]. Međutim, ovo nijesu i jedini zahtjevi koji se postavljaju u odnosu *TF* transformacije. Zbog različitosti primjena kreiran je veliki broj *TF* transformacija.

Prvi rezultati u vremensko-frekvencijskoj analizi mogu se naći kod Bunsena i Kirchhoffa, koji su definisali *TF* spektar u cilju lokalizacije energije signala po vremenu i frekvenciji u električnim kolima [65]. Ipak, i pored ovih pionirskih radova pravim tvorcem *TF* analize može se smatrati Gabor, koji je 1946-te definisao Gaborovu transformaciju [67]. Na osnovama Gaborove transformacije definisan je spektrogram (*SPEC*) [3, 68], [74]-[78]. Dvije godine kasnije (1948), Ville [79] je, u analizu govornih i radarskih signala, uveo koncept koji je postojao u kvantnoj mehanici - Wignerovu distribuciju (*WD*). Za ovu je transformaciju mađjarski fizičar P. E. Wigner dobio Nobelovu nagradu za fiziku [80]. Ova transformacija se nekad naziva Wigner-Ville-ovom distribucijom. Može se reći da su dvije najvažnije transformacije *TF* analize, *SPEC* i *WD*, razvijene od Gabora i Villea prije gotovo pedeset godina. Međutim, ove transformacije posjeduju i niz loših osobina, tako da su u upotrebu ušla i druga rješenja. Villeovi radovi su omogućili uvođenje drugih transformacija iz kvantne mehanike. To su: Rihaczekova, Pageova, Levinova i Born-Jordanova distribucija [81]-[85]. Posebno su interesantne Rihaczekova distribucija (*RD*), koja ima fizičko tumačenje vezano za

radove Kirchoffa i Bunsena [65, 81, 82], i Born-Jordanova distribucija (*BJD*), koja predstavlja prvu distribuciju sa potisnutim interferencijama [68, 85].

Krajem osamdesetih godina, pojavom moćnih računara, omogućen je razvoj drugih *TF* metoda. Važan rezultat je generalizacija kvadratnih vremensko-frekvencijski invarijantnih distribucija u Cohenovu klasu (*CD*) distribucija. Generalizaciju su obavili Claasen i Mecklenbrauker [86]-[88], ali je ova klasa dobila ime po Cohenu zbog više preglednih radova koje je Cohen objavio, odnosno zbog značajnog fundamentalnog teorijskog osnova koji je dao [1, 2]. Osnovna distribucija *CD* klase je *WD*. Generalizacija je obavljena na osnovu funkcije jezgra. Cohenovi, Claasenovi i Mecklenbraukerovi radovi omogućili su razvoj većeg broja distribucija [1]-[4],[10],[68]-[73],[86]-[99].

Pored Cohenove klase, u primjeni je više drugih nelinearnih distribucija i klasa. Ove distribucije, među kojima su poznate Altes-Marinovićeva i pseudo Bertandova distribucija [100, 101], odlikuju se znatno složenijom hardverskom i softverskom realizacijom. Danas su ove, zajedno sa Cohenovom klasom, generalizovane u šire klase distribucija, od kojih se izdvaja hiperbolna klasa [102]-[105].

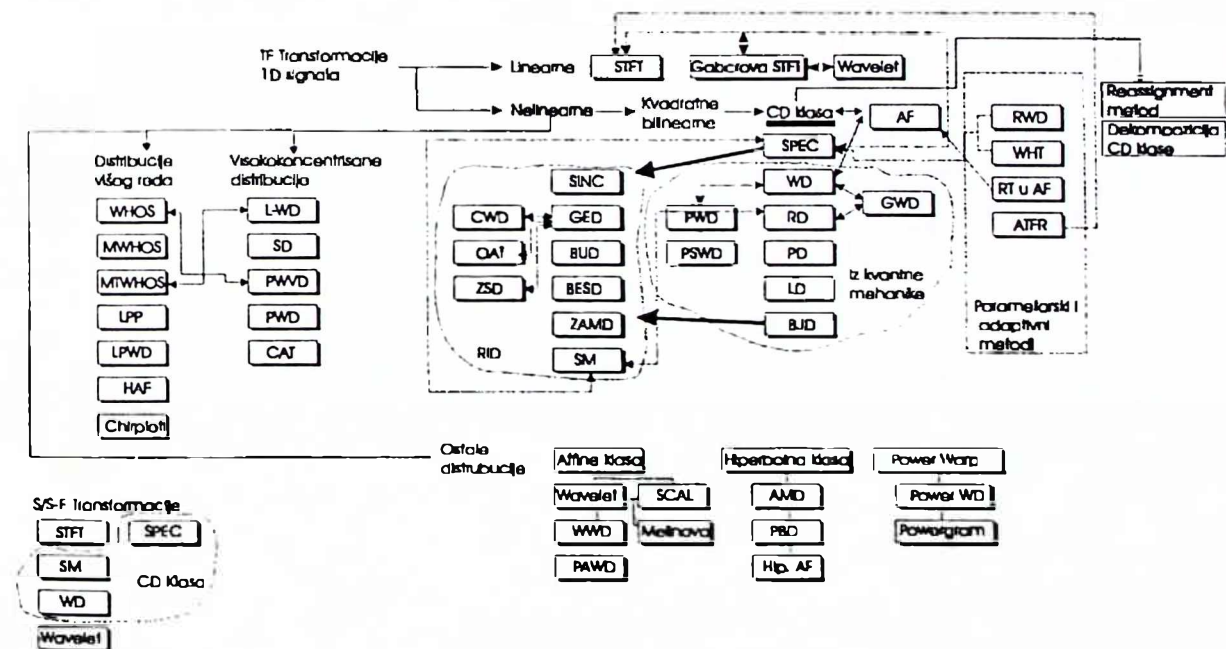
Distribucije višeg reda (*higher order distributions*) i visokokoncentrisane distribucije (*highly concentrated distributions*) su grupa rješenja koja prevazilaze pojedine nedostatke *CD* klase [59], [106]-[139]. Osnovna distribucija višeg reda je Wignerov bispektar [106, 107]. Analogno Wignerovim spektrima višeg reda, kojima pripada Wignerov bispektar, definisana je multivremenska Wignerova distribucija [109]. Drugo rješenje iz ove grupe su ambiguity funkcije višeg reda (*higher order ambiguity function - HAF*) [135]. Ove distribucije se koriste za estimaciju parametara polinomijalno faznih signala [136, 137]. Najnovija rješenja u oblasti distribucija višeg reda su lokalni periodogram (spektrogram) višeg reda i lokalna polinomijalna *WD* [117, 127]. Intenzivno se proučavaju i distribucije koje su u stanju da razviju signal i po drugim pravcima, osim vremena i frekvencije, kakva je na primjer *chirplet* transformacija [133]. Najvažnija rješenja iz ove grupe su distribucije koje se svode na *2D TF* ravan. Tako se multivremenska *WD* sa potisnutim kros-članovima svodi na L-Wignerovu distribuciju (*L-WD*) [110]. Druga slična transformacija je S-distribucija (*SD*) [115, 116]. Ove dvije distribucije su blisko vezane za *WD*, a u realizaciji mogu početi od *STFT*. *L-WD* i *SD* su osnova za izvodjenje L i S-klase distribucija. Za analizu polinomijalno faznih signala koriste se i različiti oblici polinomijalnih distribucija [125, 132]. Razvojem signala po kompleksnom argumentu vremena definisana je i interesantna kompleksna *WD* [111].

Vrijeme i frekvencija nijesu jedine karakteristike signala od kojih se može početi u razmatranju. Drugi podjednako zastupljen koncept su vremenski-skalirane transformacije [140]-[153]. Osnovna transformacija ove grupe je Mellinova, odnosno wavelet transformacija. Uopštenjem wavelet transformacije dobija se generalizovana affine klasa

distribucija. Wavelet transformacija je našla veliku primjenu u analizi i sintezi signala, kompresiji podataka, filtriranju, itd [140, 142, 150, 151]. Danas su definisane i klase distribucija nad proizvoljnim karakteristikama signala. Ovi metodi se popularno nazivaju "*beyond time-frequency*" [102, 103, 105], [154]-[163]. Ovi koncepti su, međutim, znatno složeniji od vremensko-frekvencijskih transformacija tako je njihova primjenjivost ograničena.

Metodi  $TF$  analize se mogu uopštiti i za slučaj višedimenzionalnih signala. Ovo je veoma značajno zbog činjenice da postoji potreba primjene ovih koncepata u analizi optičkih interferograma, odnosno teksturnih površi. Ovakva analiza se naziva prostorno/prostorno-frekvencijska analiza signala (*space/spatial-frequency analysis - S/S - F*).

U okviru ovog poglavlja biće opisane  $TF$  transformacije prezentirane u uvodu. Pored ovih transformacija biće obradjeni i neki drugi široko primjenjivani  $TF$  metodi: S-metod ( $SM$ ) [95, 116], "reassignment" metod [164]-[167] i dekompozicija  $CD$  klase [168]-[170]. Šematski prikaz  $TF$  transformacija dat je na slici 1.1.



Slika 1.1: Šematski prikaz vremensko-frekvencijskih distribucija i metoda i veza izmedju njih. Većina distribucija je obradjena u okviru prvog poglavlja disertacije.

## 1.2 Kratkotrajna Fourierova transformacija

Kratkotrajna Fourierova transformacija (*Short Time Fourier Transform - STFT*) je definisana sa:

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.4)$$

ili:

$$STFT(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega + \theta) W^*(\theta) e^{j\theta t} d\theta, \quad (1.5)$$

gdje je  $w(\tau)$  (odnosno  $W(\theta)$ ) funkcija prozora. Pored linearnosti *STFT* zadovoljava i drugu značajnu osobinu - *TF* invarijantnost. *TF* predstavljanje  $TF_x(t, \omega)$  je vremensko-frekvencijski invarijantno ako je transformacija signala  $y(t) = x(t) \exp(j\omega_0 t)$  jednaka  $TF_y(t, \omega) = TF_x(t - t_0, \omega - \omega_0)$ . Invarijantnost po jednom pravcu je zadovoljena kada se za pomjeraj po drugom uvrsti nula.

*STFT* je u blisku vezana sa Gaborovom transformacijom. Gabor je posmatrao razvoj signala  $x(t)$  u red čiji elementi zavise od vremena i frekvencije:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} h_{m,n}(t), \quad (1.6)$$

gdje su  $C_{m,n}$  Gaborovi koeficijenti (u prvo vrijeme nazvani su Gaborovim logonima), a  $\{h_{m,n}(t)\}$  su vremenski i frekvencijski pomjerene vrijednosti osnovnog prozora:

$$h_{m,n}(t) = h(t - mT) e^{jn\omega t}. \quad (1.7)$$

U Gaborovom radu korišćen je Gausov normalizovani prozor, dat kao:

$$h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} \exp(-\alpha t^2) \quad (1.8)$$

*STFT* signala  $x(t)$ , preko skupa prozorskih funkcija  $\gamma_{m,n}(t) = \gamma(t - mT) e^{jn\omega t}$ , se definiše kao:

$$STFT(nT, m\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \gamma_{m,n}^*(t) dt \quad (1.9)$$

Koeficijenti *STFT* su jednaki koeficijentima Gaborovog reda, pod uslovom da je:

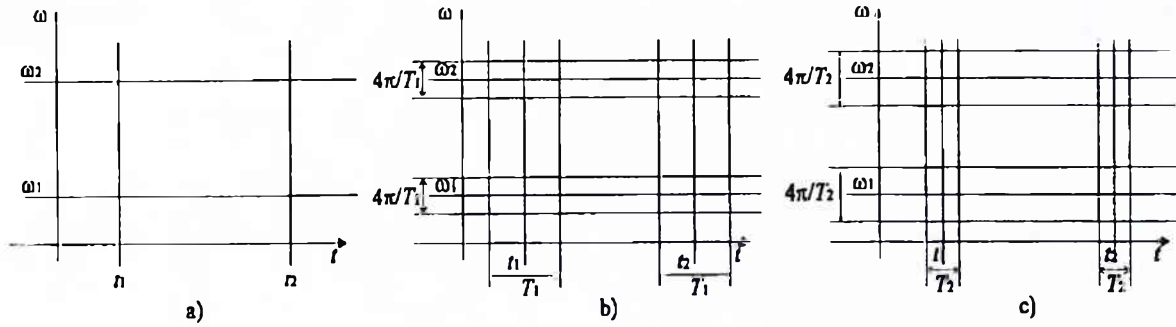
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{m,n}(t) \gamma_{m,n}^*(\tau) = \delta(t - \tau). \quad (1.10)$$

Danas su prevaziđeni problemi sa sporom konvergencijom Gaborovog razvoja upotrebom wavelet transformacije.

Nedostatak *STFT* je njena kompleksnost, koja se prevazilazi upotrebom energetske verzije (kvadrata modula) - spektrograma (*SPEC*)  $SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2$ . *STFT* je reverzibilna, odnosno iz transformacije se može jednoznačno odrediti signal:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi w^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.11)$$





Slika 1.2: a) Idealno vremensko-frekvencijsko predstavljanje dvije sinusoide i dva Dirakova impulsa; b) *STFT* sa širokim prozorom; c) *STFT* sa uskim prozorom.

Ključni problem u upotrebi *SPEC* je u maloj vremensko-frekvencijskoj rezoluciji. Za ilustraciju problema rezolucije može se posmatrati suma dva Dirakova impulsa i dvije kompleksne sinusoide:

$$x(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t), \quad t_1 \neq t_2, \quad \omega_1 \neq \omega_2. \quad (1.12)$$

U *TF* ravni  $(t, \omega)$  signal (1.12) predstavlja Dirakove impulse duž pravih  $t = t_1$ ,  $t = t_2$ ,  $\omega = \omega_1$  i  $\omega = \omega_2$  (slika 1.2a). *STFT* signala (1.12) je jednaka:

$$\begin{aligned} STFT(t, \omega) = & w(t_1 - t)e^{-j\omega(t_1 - t)} + w(t_2 - t)e^{-j\omega(t_2 - t)} + \\ & + W(\omega - \omega_1)e^{j\omega_1 t} + W(\omega - \omega_2)e^{j\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Npr., ako je prozor  $w(t)$  pravougaoni širine  $T$  ( $w(t) = 1$  za  $|t| \leq T/2$ , odnosno  $w(t) = 0$  za  $|t| > T/2$ ), može se smatrati da je *FT* prozora  $W(\omega)$  različita od nule samo u intervalu glavne latice  $\omega \in [-2\pi/T, 2\pi/T]$ . Na slikama 1.2b i c, prikazana je *STFT* za dvije širine prozora  $T_1 < T_2$ . Sa *STFT* se, na zadovoljavajući način, mogu prikazivati Dirakovi impulsi koji su međusobno razdvojeni za  $|t_1 - t_2| > T = d$  ( $d$  je vremenska rezolucija), dok se kompleksne sinusoide mogu na zadovoljavajući način prikazivati ako su razdvojene za  $|\omega_1 - \omega_2| > 4\pi/T = D$  ( $D$  je frekvencijska rezolucija). Proizvod vremenske i frekvencijske rezolucije je konstantan za posmatrani tip prozora. Za pravougaoni prozor iznosi  $Dd = 4\pi$  dok je minimalan kod Gausovog prozora  $Dd = 1/2$  [171].

*STFT* se može jednostavno realizovati u diskretnom obliku preko odgovarajućih *FFT* algoritama kao:

$$STFT(n, m) = \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2-1} x(n+k)w^*(k)e^{-j\frac{2\pi}{N_w}mk}, \quad (1.14)$$

gdje je  $N_w$  širina prozora  $w(k)$ . Dakle, za svaki posmatrani trenutak  $n$ , računa se  $FFT$ . U slučaju da je posmatrani prozor pravougaoni  $w(k)$ ,  $STFT$  se može računati rekurzivno kao:

$$STFT(n+1, m) = [x(N_w/2) - x(-N_w/2) + STFT(n, m)]e^{j\frac{2\pi}{N_w}k} \quad (1.15)$$

Na osnovu relacije (1.14) potrebno je primjenom  $FFT$  rutine izračunati  $STFT$  u prvom trenutku, a zatim, u svakom slijedećem trenutku, primijeniti relaciju (1.15). Zbog nagomilovanja greške kvantizacije tokom vremena, treba ponoviti računanje  $STFT$  pomoću  $FFT$  algoritma. U slučaju, da je  $w(k)$  neki iz klase Blackman-Harrisovih prozorskih funkcija [172]:

$$w_B(t) = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos(2m\pi t/T), \quad \text{gdje je } \sum_{m=0}^M a_m = 1, \quad (1.16)$$

$STFT$  se može računati na osnovu  $STFT$  sa pravougaonim prozorom kao:

$$STFT_B(n, k) = a_0 STFT(n, k) + \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} [STFT(n, k+m) + STFT(n, k-m)], \quad (1.17)$$

Razmak izmedju odbiraka  $STFT$  po frekvenciji je  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . Blackman-Harrisovim prozorskim funkcijama pripadaju Hannova sa  $a_0 = a_1 = 0.5$  i Hammingova sa  $a_0 = 0.54$  i  $a_1 = 0.46$ .

Na osnovu  $STFT$ , Jones i Parks su definisali adaptivnu distribuciju sa prozorom u obliku Gausove klase funkcija:

$$ATFR(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w_{t, \omega}^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.18)$$

Prozor je Gausova funkcija jedinične energije  $w_{t, \omega}(t) = \sqrt[4]{-2 \operatorname{Re}(C_{t, \omega})/\pi} \exp(C_{t, \omega} t^2)$ , gdje je  $C_{t, \omega}$  kompleksni broj. Jones i Parks su razvili algoritam za izbor koeficijenata  $C_{t, \omega}$ , tako da kreirana adaptivna distribucija postiže maksimalnu koncentraciju.

### 1.3 Transformacije preuzete iz kvantne mehanike

Sve transformacije koje su u  $TF$  analizu prenesene iz kvantne mehanike su kvadratne, vremensko-frekvencijski invarijantne. Zbog svojstva da u kvantnoj mehanici predstavljaju vjerovatnoću, ovakve, i sve iz njih izvedene transformacije, nazivaju se distribucijama. U  $TF$  analizi predstavljaju energetska gustinu signala u tački  $(t, \omega)$  ravni. Najvažnija medju njima je Wignerova distribucija ( $WD$ ), uvedena u cilju redukcije neodređenosti momenta i položaja čestice u kvantnoj mehanici. Dobila je naziv po P.

E. Wigneru, koji ju je i otkrio [80]. U obradu signala,  $WD$  je uveo francuski naučnik J. Ville za analizu govornih signala. Tako se ova transformacija često naziva Wigner-Villeovom.  $WD$  se definiše kao:

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau = \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega + \theta/2) X^*(\omega - \theta/2) e^{j\theta t} d\theta. \quad (1.20)$$

U obliku (1.19)  $WD$  predstavlja  $FT$  lokalne autokorelacije signala  $x(t)$ ,  $r(t, \tau) = x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \Rightarrow WD(t, \omega) = FT_{\tau}\{r(t, \tau)\}$ . U praksi se koristi pseudo Wignerova distribucija ( $PWD$ ) kojom se ograničava signal po vremenu, jer je praktično nemoguće realizovati  $WD$  računajući signal u toku kompletnog trajanja:

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_e(\tau) x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau = \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_e(\theta) X(\omega + \theta/2) X^*(\omega - \theta/2) e^{j\theta t} d\theta. \quad (1.22)$$

Ekvivalentni prozor se obično definiše kao  $w_e(\tau) = w(\tau/2) w^*(-\tau/2)$ , dok je  $W_e(\omega) = FT\{w_e(t)\}$ . U daljem tekstu neće biti pravljena razlika između  $WD$  i njene pseudo forme.  $PWD$  predstavlja zaobljavanje  $WD$  po vremenu. U pojedinim primjenama koristi se zaobljavanje  $WD$  i po vremenu i po frekvenciji. Dobijena transformacija se naziva pseudo-zaobljena (smoothed) Wignerova distribucija ( $PSWD$ ):

$$PSWD(t, \omega) = g(t) *_t \int_{-\infty}^{\infty} w_e(\tau) x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.23)$$

Rihaczekova distribucija ( $RD$ ) [81, 82] je drugo interesantno predstavljanje u okviru grupe distribucija preuzetih iz kvantne mehanike. Definisana je kao:

$$\begin{aligned} RD(t, \omega) &= x(t) X^*(\omega) e^{-j\omega t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega + \theta) X^*(\omega) e^{j\theta t} d\theta. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Rihaczekova distribucija ima interesantno fizičko tumačenje. U radovima Kirchoffa i Bunsena, definisana je sa ciljem lokalizacije energije signala na jediničnom otporniku u jedinici vremena i frekvencije [65].  $WD$  i  $RD$  se mogu uopštiti u grupu generalizovanih Wignerovih distribucija:

$$GWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + (\alpha + 1/2)\tau) x^*(t + (\alpha - 1/2)\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \quad (1.25)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - (\alpha - 1/2)\theta) X^*(\omega - (\alpha + 1/2)\theta) e^{j\theta t} d\theta. \quad (1.26)$$

Za  $\alpha = 0$  dobija se  $WD$ , dok se za  $\alpha = -1/2$  dobija  $RD$ .



Pageova distribucija [83] polazi od poznavanja kauzalnog dijela signala (signala do posmatranog trenutka). Pageova distribucija ( $PD$ ) se definiše kao:

$$\begin{aligned} PD(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} |X_t^-(\omega)|^2 = \\ &= 2\operatorname{Re}\{x^*(t)X_t^-(\omega)e^{j\omega t}\} = 2\operatorname{Re}\{x^*(t)e^{j\omega t} \int_{-\infty}^t x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau\}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

gdje je  $X_t^-(\omega) = \int_{-\infty}^t x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$ .

Levinova distribucija ( $LD$ ) je slična  $PD$ , ali je zasnovana na antikauzalnom signalu poznatom nakon posmatranog trenutka:

$$\begin{aligned} LD(t, \omega) &= -\frac{\partial}{\partial t} |X_t^+(\omega)|^2 = \\ &= 2\operatorname{Re}\{x^*(t)X_t^+(\omega)e^{j\omega t}\} = 2\operatorname{Re}\{x^*(t)e^{j\omega t} \int_t^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

gdje je  $X_t^+(\omega) = \int_t^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$ .

Born-Jordanova distribucija ( $BJD$ ) je u  $TF$  analizu preuzeta iz kvantne mehanike [85]:

$$BJD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c_T(t, \tau) * \{x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)\} e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.29)$$

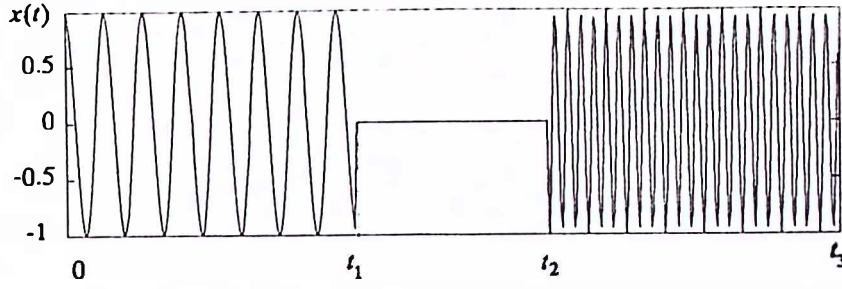
gdje je  $c_T(t, \tau) = 1/|\tau|$  za  $|t/\tau| < 1/2$  i 0 za  $|t/\tau| > 1/2$ . Posebno je značajna je jer može da potisne interferencije (kros-članove).

## 1.4 Wignerova distribucija

Relacijama (1.19)-(1.23) dati su najčešći analitički oblici  $WD$ . Kao posebno značajnu činjenicu, kod  $WD$  treba izdvojiti zadovoljavanje svih željenih osobina  $TF$  predstavljanja datih u Tabeli 1 u Prilogu. Osobina reverzibilnosti kod  $WD$  može se opisati kao:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi x^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} WD(\frac{t}{2}, \omega) d\omega. \quad (1.30)$$

Takodje,  $WD$  je idealna za klasu linearnih  $FM$  signala, što je veoma značajna osobina. Naime, za signal  $x(t) = A(t)\exp(j\phi(t))$  idealna distribucija se može definisati kao  $I(t, \omega) = 2\pi A^2(t)\delta(\omega - \phi'(t))$ . Za linearni  $FM$  signal  $x(t) = A\exp(jat^2/2 + jbt + jc)$ ,  $WD$  je idealna  $WD(t, \omega) = I(t, \omega) = 2\pi A^2\delta(\omega - at - b)$ . Medju osobinama distribucije treba izdvojiti: realnost distribucije,  $TF$  invarijantnost i marginalne uslove. Marginalni uslovi predstavljaju zakon o održanju energije, odnosno jednakost energija distribucije i energije signala. Da bi distribucija postojala samo u oblasti definisanosti signala, po vremenu i frekvenciji, zahtijeva se poštovanje  $TF$  ograničenja (osobine 11 i 12 iz Tabele 1 iz Priloga). Ove dvije osobine, međjutim, ne definišu distribuciju u intervalu postojanja signala što će biti demonstrirano na sljedećem primjeru.



Slika 1.3: Suma dvije sinusoide ograničenog trajanja.

**Primjer:** Posmatra se signal:

$$x(t) = \begin{cases} \exp(jat) & t \in [t_0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, t_2) \\ \exp(jbt) & t \in [t_2, t_3] \end{cases} \quad (1.31)$$

koji predstavlja dvije kompleksne sinusoide ograničenog trajanja, između kojih je signal jednak nuli. Signal je dat na slici 1.3. Na slici 1.4a prikazano je idealno  $TF$  predstavljanje za signal (1.31).  $WD$ ,  $RD$  i  $PD$  su prikazane na slikama 1.4b, c i d.

Uočljivo je, da, iako van intervala postojanja  $t \in [t_0, t_3]$ ,  $WD$  ne postoji (ispunjava  $TF$  ograničenje), ipak, u dijelu gdje signala nema  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $WD$  postoji. Razlog zbog koga  $WD$  nije idealna je postojanje kros-članova, koji su prouzrokovani nelinearnošću transformacije. Za multikomponentni signal:

$$x(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t) \quad (1.32)$$

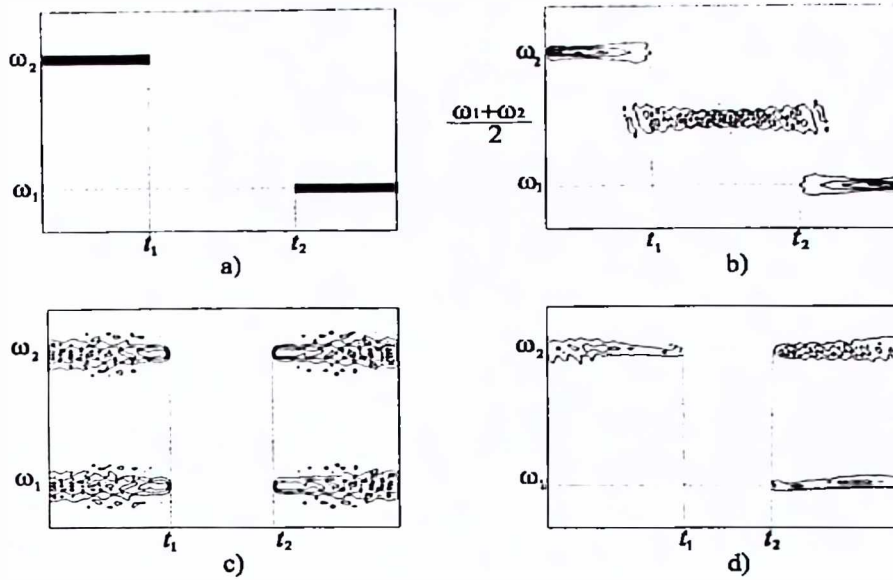
$WD$  je jednaka:

$$WD(t, \omega) = \sum_{i=1}^M WD_{ii}(t, \omega) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^M WD_{ij}(t, \omega) \right\}, \quad (1.33)$$

gdje je:

$$WD_{ij}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t + \tau/2) x_j^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.34)$$

Komponente  $WD_{ii}(t, \omega)$  su auto-članovi, dok su  $WD_{ij}(t, \omega)$  kros-članovi. Za  $M$ -komponentni signal,  $WD$  ima  $M(M-1)/2$  kros-članova, koji po amplitudi mogu da budu znatno veći od auto-članova i da ih potpuno "maskiraju". Ako se dvije komponente signala u  $(t, \omega)$ -ravni nalaze u okolini tačaka  $(t_1, \omega_1)$  i  $(t_2, \omega_2)$  (slika 1.5), tada se kros-član, koji je oscilatoran, nalazi u okolini sredine između ove dvije tačke:  $(t_{12}, \omega_{12})$ ,  $t_{12} = (t_1 + t_2)/2$ ,  $\omega_{12} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Učestanost oscilacija po vremenu iznosi



Slika 1.4: Vremensko-frekvencijsko predstavljanje nestacionarnog signala - sume dvije sinusoide ograničenog trajanja: a) Idealna distribucija; b) Wignerova distribucija; c) Rihaczekova distribucija; d) Pageova distribucija.

$1/|t_1 - t_2|$ , dok učestanost oscilacija u pravcu frekvencije iznosi  $2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ . Ovo je ilustrovano na slici 1.6.

Pored kros-članova, kao značajan problem kod  $WD$ , treba izdvojiti pojavu unutrašnjih interferencija za signale sa nelinearnom fazom:

$$x(t) = Ae^{j\phi(t)}. \quad (1.35)$$

$WD$  signala (1.35) je jednaka:

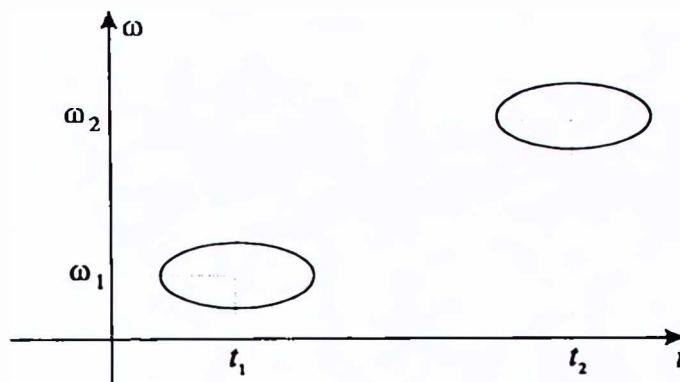
$$WD(t, \omega) = I(t, \omega) *_{\omega} FT\left\{\exp\left[j2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{(2k+1)} \tau^{(2k+1)} / 2^{2k+1} (2k+1)!\right]\right\}, \quad (1.36)$$

odnosno, odstupa od idealne transformacije. Na slici 1.7, data je ilustracija unutrašnjih interferencija kod  $WD$ .

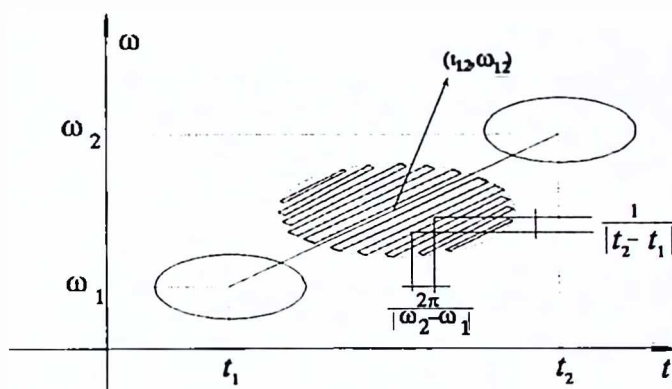
Diskretna realizacija  $WD$  je relativno jednostavna. Podrazumijeva određivanje  $FT$  (nekim od  $FFT$  algoritama) lokalne autokorelacije signala  $x(n+k)x^*(n-k)$ :

$$WD(n, m) = \sum_{k=-N_w}^{N_w-1} w_e(k) x(n+k) x^*(n-k) e^{-j \frac{4\pi m}{N_w} k}. \quad (1.37)$$

Za paran broj odbiraka nije moguće dobiti Hermitsku simetriju, odnosno realnu  $WD$ . Naime, svi članovi u sumi  $x(n+k)x^*(n-k)$  za  $|k| \leq N_w - 1$  posjeduju partnera

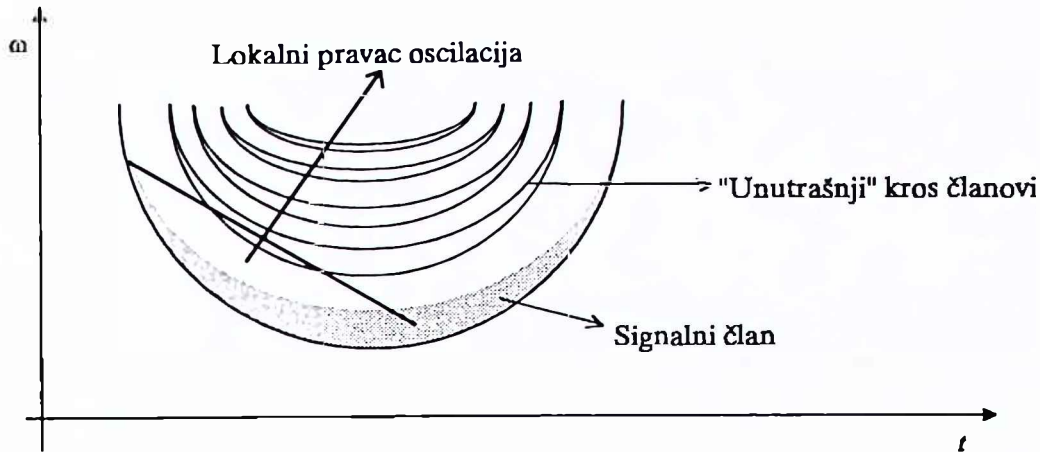


Slika 1.5: Dvokomponentni signal



Slika 1.6: Dvokomponentni signal: auto i kros-članovi.

$x(n - k)x^*(n + k)$ . Zbir ovakvih članova daje realnu  $FT$  odnosno  $WD$ . Član  $x(n - N_w)x^*(n + N_w)$  ne posjeduje odgovarajući par pa bi prouzrokovao pojavu imaginarne vrijednosti  $WD$ . Da bi se ovo izbjeglo, ovaj član se može izjednačiti sa nulom (što vodi nezadovoljavanju marginalnih uslova), ili se može uzeti kao  $|x(n - N_w)|^2$ , jer je odabrani signal periodičan se periodom  $2N_w$ . Kod  $WD$ , signal je neophodno odabrati dvostruko više nego kod Nikvistovog kriterijuma. Ovo zahtijeva veće memorijske i hardverske resurse. U suprotnom, moguća je pojava efekata aliasinga. Problematici izbjegavanja aliasinga kod  $WD$  posvećeno je više radova [99], [173]-[177]. Ujedno,  $WD$  nije pozitivna distribucija. Ova osobina je značajna jer distribucije predstavljaju gustinu energije, koja bi morala biti pozitivna veličina. Neki od metoda za dobijanje pozitivnih distribucija opisani su u [178]-[187].



Slika 1.7: Ilustracija pojave unutrašnjih interferencija kod nelinearnog  $FM$  signala.

## 1.5 Ambiguity funkcija

U analizi radarskih signala intenzivno se koristi ambiguity funkcija ( $AF$ ), čiji su neki mogući oblici:

$$\begin{aligned} A(\theta, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{j\theta t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega + \theta/2)X^*(\omega - \theta/2)e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Veza između  $AF$  i  $WD$  je  $2D$   $FT$ :  $WD(t, \omega) = FT_{2D}\{A(\theta, \tau)\}$ . Važnost  $AF$  je, prije svega, u pozicioniranju auto- i kros-članova. Za signal sa slike 1.5 auto-članovi u ambiguity domenu su koncentrisani oko koordinatnog početka dok su kros-članovi dislocirani i nalaze se oko  $(\pm(t_1 - t_2), \pm(\omega_1 - \omega_2))$  (slika 1.8). Za slučaj opštih signala važe ista pravila. Naime, auto-članovi su uvijek koncentrisani u okolini koordinatnih osa, dok su kros-članovi dislocirani od ovih pozicija. Na slici 1.9 prikazana je  $AF$  sume linearnog i sinusoidalnog  $FM$  signala:

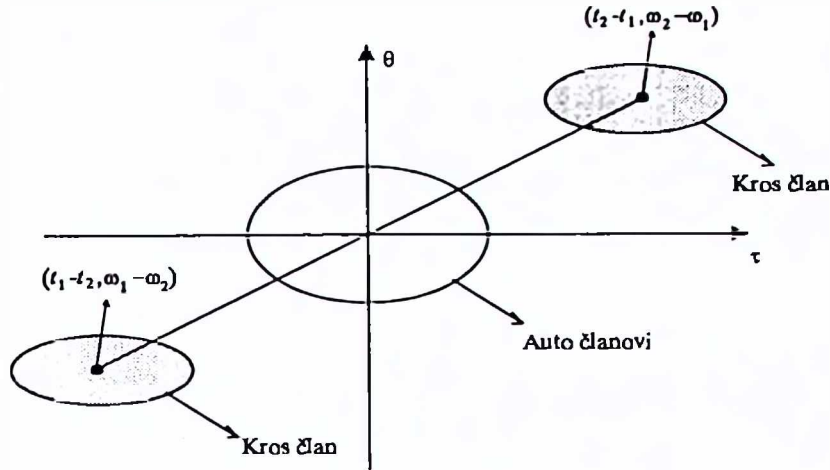
$$x(t) = e^{-j8\pi(t+2)^2} + e^{j[-12 \sin(1.5\pi(t+1)) - 20\pi t]}. \quad (1.39)$$

Analiza položaja unutrašnjih interferencija u ambiguity domenu biće obavljena na primjeru signala sa kubnom fazom  $x(t) = \exp(ja\tau^3/3)$ , čije je idealno predstavljanje definisano kao  $I(t, \omega) = 2\pi\delta(\omega - at^2)$  dok je  $AF$  data kao:

$$A(\theta, \tau) = e^{ja\tau^3/3} \sqrt{\frac{\pi}{-ja\tau}} e^{j\theta^2/4a\tau}. \quad (1.40)$$

Idealno predstavljanje signala sa kubnom fazom u ambiguity domenu je:

$$i(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(t, \omega) e^{j\theta t + j\omega\tau} dt d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{-ja\tau}} e^{j\theta^2/4a\tau}. \quad (1.41)$$



Slika 1.8: Ilustracija položaja auto i kros-članova u ambiguity domenu.

Iz relacija (1.40) i (1.41) može se uočiti da se  $AF$  od idealnog predstavljanja u ambiguity domenu razlikuje za član  $e^{j\alpha\tau^3/3}$ , koji je za malo  $\tau$  približan jedinici, odnosno idealnom predstavljanju. Zaključak je da se pojava unutrašnjih interferencija intenzivira udaljavanjem od  $\tau$  ose, odnosno, u slučaju opšteg signala, udaljavanjem od koordinantnog početka.

## 1.6 Cohenova klasa distribucija

Na osnovu prethodne analize kreirana je Cohenova klasa ( $CD$ ) generalizovanih kvadratnih distribucija [1, 2], koje ispunjavaju uslov  $TF$  invarijantnosti. Relacijama (1.42)-(1.46) dati su ekvivalentni izrazi koji se koriste za proračun  $CD$  klase:

$$CD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) x(u + \tau/2) x^*(u - \tau/2) e^{j\theta u - j\theta t - j\omega\tau} d\tau d\theta du = \quad (1.42)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) A(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\omega\tau} d\tau d\theta = \quad (1.43)$$

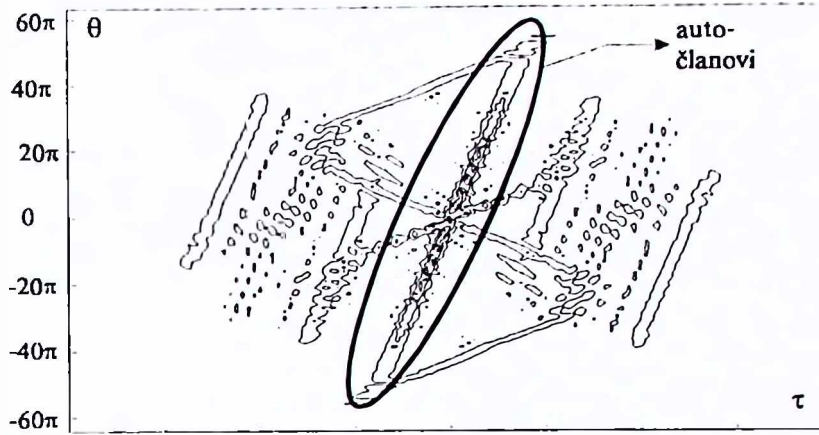
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_T(t - u, \tau) x(u + \tau/2) x^*(u - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau du = \quad (1.44)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_\Omega(\theta, \omega - u) X(u + \theta/2) X^*(u - \theta/2) e^{-j\theta t} d\theta du = \quad (1.45)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t - u, \omega - \xi) W D(u, \xi) du d\xi. \quad (1.46)$$

Sa  $c(\theta, \tau)$  je označena funkcija jezgra - *kernel function* u ambiguity domenu (ovaj oblik funkcije jezgra se najčešće kratko naziva jezgro i, ako to drugačije nije naglašeno, pod





Slika 1.9: Ambiguity funkcija sume linearnog i sinusoidalnog FM signala sa označenom oblašću auto-članova.

jezgrom se podrazumijeva ova funkcija) [1, 2], [86]-[88]. Funkcija jezgra u vremenskom domenu (*time lag*) je:

$$c_T(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta, \quad (1.47)$$

dok je funkcija jezgra u frekvencijskom domenu (*frequency lag*) data kao:

$$C_\Omega(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (1.48)$$

Funkcija jezgra u  $TF$  domenu je data kao:

$$\Pi(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\omega \tau} d\tau d\theta. \quad (1.49)$$

Na osnovu izraza (1.46)  $CD$  klasa se može smatrati klasom zaobljenih  $WD$ .  $WD$  kao osnovno predstavljanje  $CD$  klase, dobija se ako se u (1.42)-(1.46) uvrsti  $\Pi(t, \omega) = 2\pi\delta(t)\delta(\omega)$ , odnosno  $c(\theta, \tau) = 1$ . Za različite funkcije jezgra dobijaju se različite distribucije Cohenove klase. U Tabeli 2 u Prilogu dat je spisak korišćenijih distribucija  $CD$  klase i formulacija njihovih jezgara [1]-[4], [10], [68]-[99].

U Tabeli 3 u Prilogu navedene su matematičke formulacije željenih osobina  $TF$  predstavljanja izražene preko funkcije jezgra.

$CD$  klasa se, osim 2 –  $D$  zaobljavanjem  $WD$ , može računati kao  $FT$  konvolucije funkcije jezgra u vremenskom domenu i lokalne autokorelacije signala (1.44), odnosno kao  $FT$  konvolucije funkcije jezgra u frekvencijskom domenu i lokalne autokorelacije spektra signala  $X(\omega + \theta/2)X^*(\omega - \theta/2)$ . Ipak, najvažniji analitički izraz za računanje  $CD$  klase je (1.43) kao 2 –  $D$   $FT$  proizvoda funkcije jezgra i  $AF$ . Kako se na udaljenim pozicijama od koordinatnog početka nalaze samo interferencije (kros-članovi i

unutrašnje interferencije), to je logično da se funkcijom jezgra izvrši "filtriranje"  $AF$ . Klasa "niskopropusnih" funkcija jezgara sačinjava klasu  $RID$  distribucija (*Reduced Interference Distribution*) - distribucija sa potisnutim interferencijama. Kreiranje distribucija ove klase najčešće polazi od očuvanja marginalnih uslova  $c(\theta, 0) = c(0, \tau) = 1$ . Već pominjana  $BJD$  je jedna od  $RID$  distribucija. Takođe,  $SPEC$  je  $RID$  distribucija i pored toga što ne ispunjava marginalne uslove. Najpoznatije  $RID$  distribucije su: generalizovane eksponencijalne distribucije (od kojih je najvažnija Choi-Williamsova distribucija), generalizovane Butterworthove distribucije, Zhao-Atlas-Marks distribucija, Besselova distribucija, S-metod, itd. U *Tabeli 4* u Prilogu date su pojedine distribucije  $CD$  klase i željene osobine koje zadovoljavaju.

Jedna od mogućnosti za poredjenje distribucija  $CD$  klase je razmatranje uticaja funkcije jezgra na auto-član linearnog  $FM$  signala  $x(t) = A \exp(jat^2/2 + jbt)$  [188]-[191]. Cohenova klasa ovog signala je jednaka:

$$CD(t, \omega) = A^2 C(\omega - at - b), \quad (1.50)$$

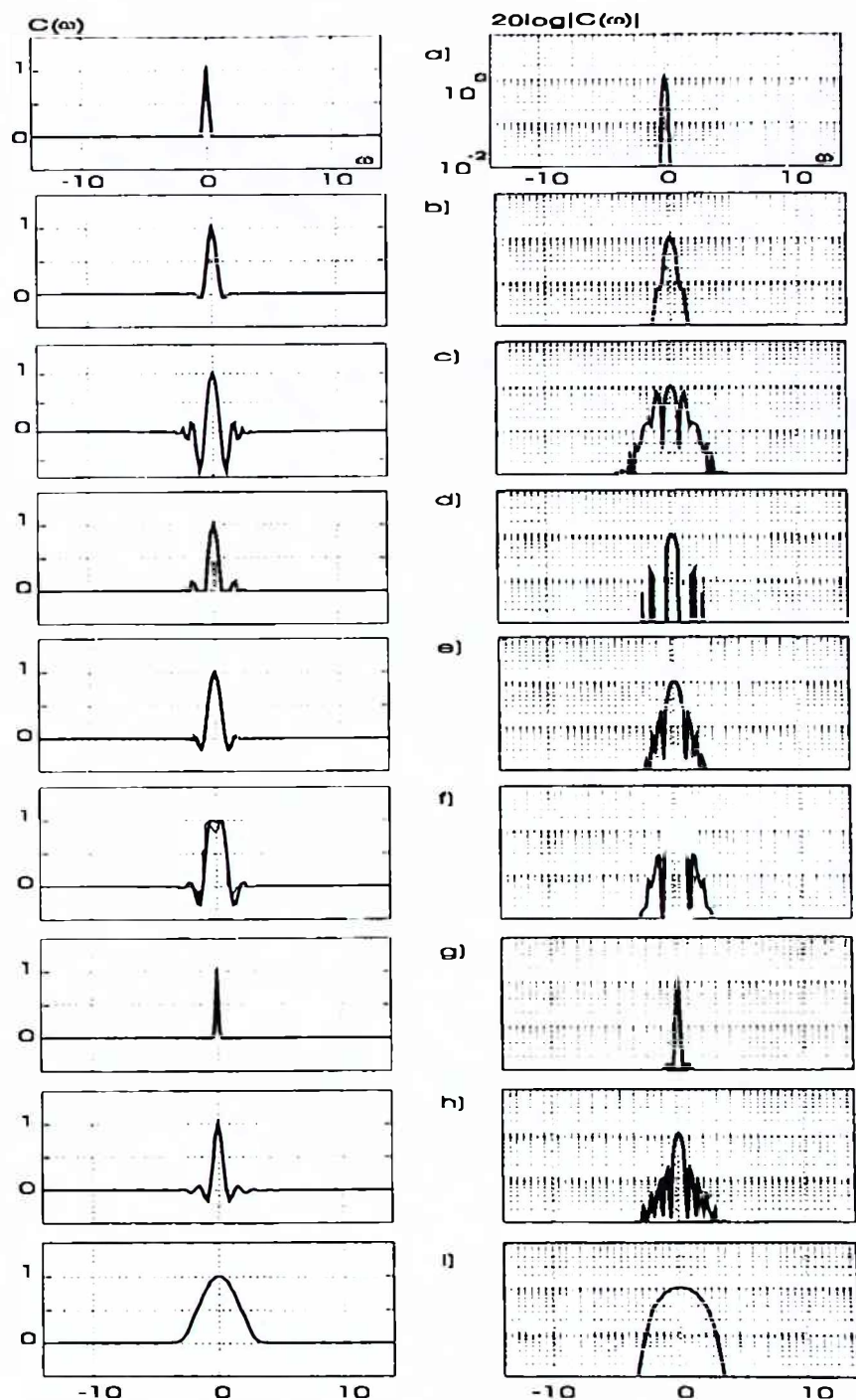
gdje je  $C(\omega)$  funkcija auto-člana:

$$C(\omega) = FT\{c(-a\tau, \tau)\}. \quad (1.51)$$

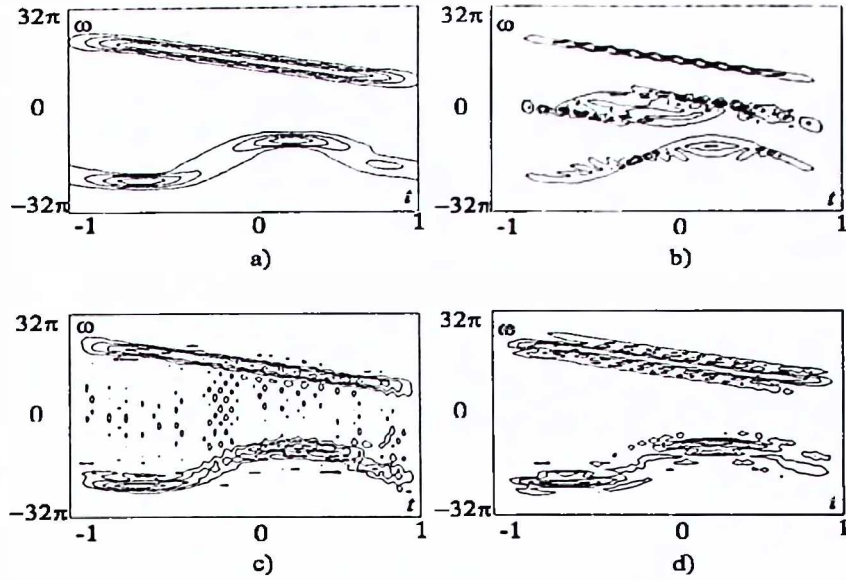
Funkcija auto-člana za  $WD$  je idealna. Očigledno je da oblik auto-člana, a posebno dvije karakteristike auto-člana: širina i maksimalna vrijednost, determinišu u značajnoj mjeri kvalitet distribucije. U *Tabeli 5* u Prilogu dati su auto-članovi nekih  $RID$  distribucija i  $WD$  (sa pseudo formama). Na *slici 1.10* data je uporedna analiza funkcije auto-člana za niz distribucija  $CD$  klase za  $a = 0.25$  u uslovima svodjenja širine jezgra za sve distribucije na istu vrijednost. Na *slici 1.11* dat je izgled pojedinih distribucija  $CD$  klase za sumu linearnog i sinusoidalnog  $FM$  signala. Kako je za zadovoljavanje marginalnih osobina potrebno da važi  $c(\theta, 0) = c(0, \tau) = 1$ , u nekim slučajevima, kod ovakvih distribucija, nije moguće izbjeći kros-članove u potpunosti. Na *slukama 1.12* i *1.13* prikazana je  $AF$  i  $GED$  za sumu Gausovskih signala, i to kada je moguće dobiti idealnu distribuciju bez kros-članova, i kada to nije moguće.

Distribucije  $CD$  klase, u opštem slučaju, nijesu pozitivne, osim  $SPEC$  koji ne zadovoljava marginalne uslove. Cohen i Zaporovanny su definisali skup pozitivnih distribucija signala  $s(t)$  koje zadovoljavaju marginalne osobine [179]. Veoma efikasan algoritam za računanje pozitivne distribucije sa zadovoljenim marginalnim osobinama predložio je Emresoy u [182].





Slika 1.10: Normalizovana funkcija auto-člana za  $a=0.25$ : a) Pseudo Wignerova distribucija; b) Choi-Williamsova distribucija; c) ZAM distribucija; d) Nenegativna ZAM distribucija; e) Born-Jordanova distribucija; f) Zang-Sato distribucija; g) S-Metod; h) Nenegativni S-metod; i) Spektrogram (Kod svih distribucija za zaobljavanje je korišćen Hannov prozor. Posmatrana je oblast  $[-14.1, 14.1]$  u svim primjerima).



Slika 1.11: Distribucije sume linearnog i sinusoidalno modulisanog FM signala: a) Spektrogram sa Hanningovim prozorom širine  $T=1$ ; b) Pseudo Wignerova distribucija sa pravougaonim prozorom  $T=0.38$ ; c) Choi-Williamsova distribucija; d) ZAMD sa Hanningovim prozorom  $T=2$ .

## 1.7 S-Metod

Pored izraza (1.22),  $PWD$  se može računati preko  $STFT$  sa istim prozorom  $w(\tau)$ , kao:

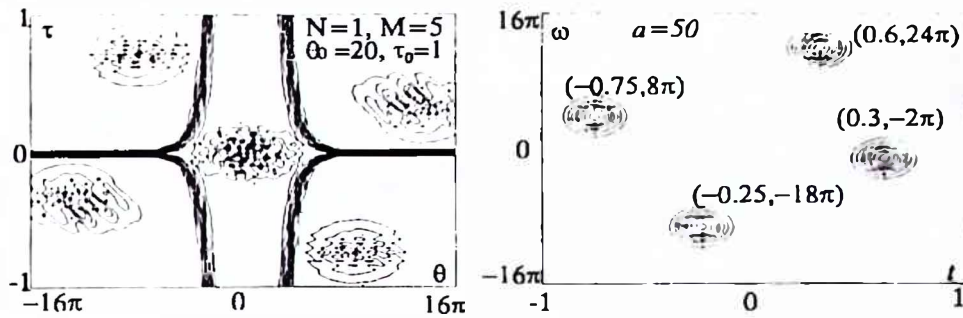
$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega + \theta) STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (1.52)$$

Modifikovanjem izraza (1.52), uvođenjem frekvencijskog prozora  $P(\theta)$ , dobijena je transformacija koja je nazvana S-metod ( $SM$ ) [59, 95, 114]:

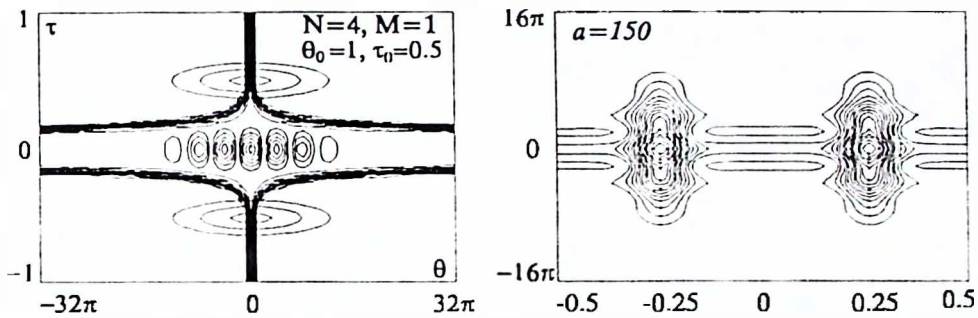
$$SM(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) STFT(t, \omega + \theta) STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (1.53)$$

Specijalni slučajevi ove transformacije su  $SPEC$  za  $P(\theta) = \pi\delta(\theta)$  i  $PWD$  za  $P(\theta) = 1$ . Kako ova distribucija počiva na  $STFT$ , to nije potrebno preodabrati signal. Krajnje dvije transformacije S-metoda,  $SPEC$  i  $WD$ , posjeduju bitno različite osobine.  $SPEC$  je male rezolucije bez interferentnih kros-članova, dok je  $WD$  dobro koncentrisana, ali posjeduje kros-članove. Ovdje će biti obavljena analiza vezana za širinu frekvencijskog prozora kod  $SM$ . Posmatran je multikomponentni signal oblika:

$$x(t) = \sum_{m=1}^M x_m(t) = \sum_{m=1}^M r_m(t) e^{j\phi_m(t)}. \quad (1.54)$$



Slika 1.12: Generalizovana eksponencijalna distribucija sume chirp impulsa: a) U ambiguity domenu; b) U vremensko-frekvencijskom domenu (Parametri su označeni na crtežu. Dobijeno je vremensko-frekvencijsko predstavljanje blisko idealnom.).



Slika 1.13: Generalizovana eksponencijalna distribucija sume chirp impulsa: a) U ambiguity domenu; b) U vremensko-frekvencijskom domenu (Parametri su označeni na crtežu. Vremensko-frekvencijsko predstavljanje posjeduje kros-članove.).

*SPEC* ovog signala je jednak:

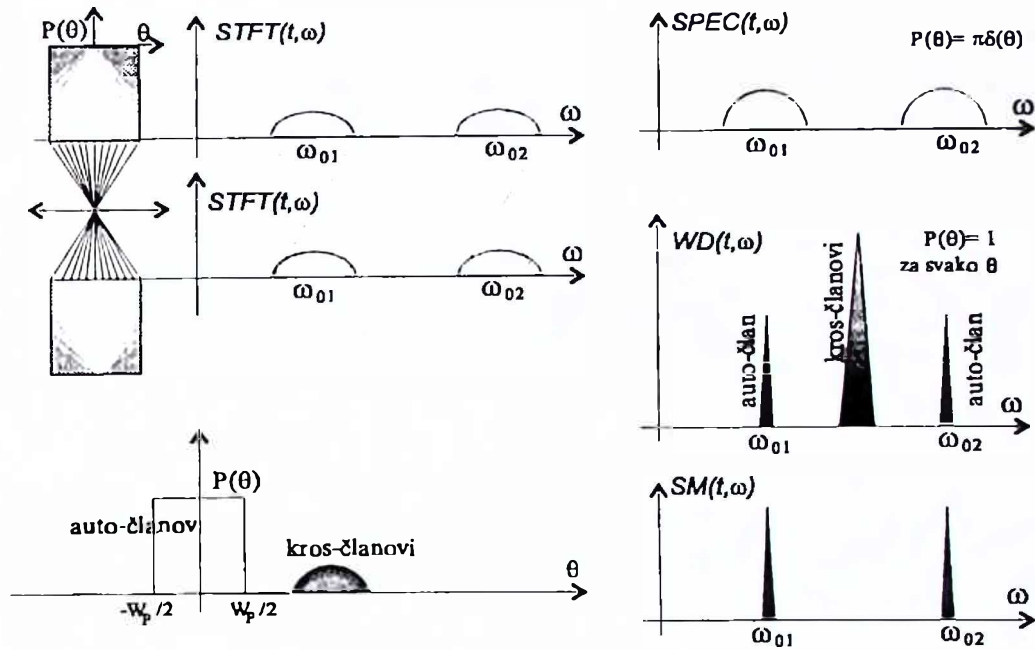
$$SPEC(t, \omega) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M STFT_m(t, \omega - \phi'_m(t)) STFT_n^*(t, \omega - \phi'_n(t)), \quad (1.55)$$

gdje je *STFT* signala  $x_m(t)$  označena kao  $STFT_m(t, \omega)$ . Neka su sve  $STFT_m(t, \omega)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  jednake nuli van intervala  $|\omega| \geq W_B/2$ . *WD* signala (1.54) je:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} STFT_m(t, \omega + \theta - \phi'_m(t)) STFT_n^*(t, \omega - \theta - \phi'_n(t)) d\theta. \quad (1.56)$$

U okviru dvostrukog sumiranja u (1.56), nenulti elementi postoje za:

$$|\omega + \theta - \phi'_m(t)| < W_B/2, \quad |\omega - \theta - \phi'_n(t)| < W_B/2, \quad (1.57)$$



Slika 1.14: Ilustracija računanja S-metoda sa specijalnim slučajevima: spektrogramom i Wignerovom distribucijom.

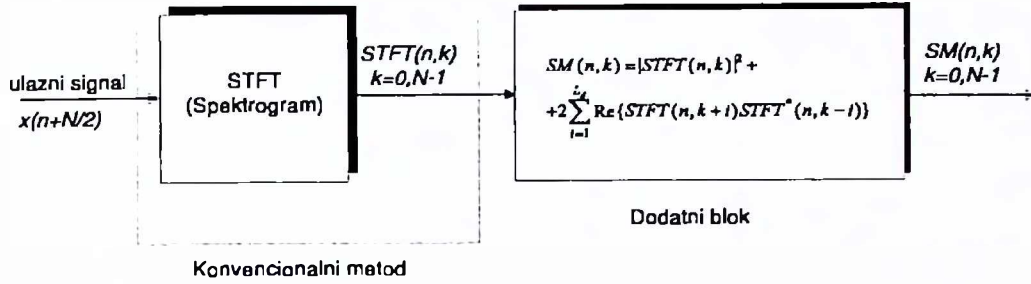
odnosno, sumirajući ova dva izraza dobija se:

$$\left| \omega - \frac{\phi'_m(t) + \phi'_n(t)}{2} \right| < W_B/2. \quad (1.58)$$

Iz (1.58) se može zaključiti da kros-članovi duž  $(\phi'_m(t) + \phi'_n(t))/2$  postoje za svako  $m$  i  $n$ . Oduzimanjem dva izraza u (1.58) dobija se  $|\theta - [\phi'_m(t) - \phi'_n(t)]/2| < W_B/2$ . Za  $m = n$  auto-članovi se nalaze u okolini  $\theta = 0$ , i njihova se kompletna integracija može obaviti za  $|\theta| < W_B/2$ . Za  $m \neq n$  kros-članovi su dislocirani. Ako je širina frekvencijskog prozora jednaka  $W_P$  ( $P(\theta) = 0$  za  $|\theta| > W_P/2$ ), takva da važi  $W_B \leq W_P < |\phi'_m(t) - \phi'_n(t)| - W_B$ , integracija auto-članova će biti obavljena u potpunosti, odnosno, kros-članovi između  $m$ -te i  $n$ -te komponente će biti eliminisani. Na slici 1.14 prikazana je realizacija  $SM$  sa specijalnim slučajevima  $SPEC$  i  $WD$ .  $SM$  može dati koncentraciju blisku idealnoj bez interferentnih kros-članova. Istovremeno, za znatno poboljšanje koncentracije nije neophodna kompletna integracija po frekvenciji, već je dovoljno integraliti u dijelu auto-člana (kod diskretnih realizacija to je nekoliko odbiraka).

Diskretna realizacija  $SM$  polazi od  $SPEC$ , uz dodavanje članova u skladu sa relacijom:

$$SM(n, k) = \sum_{l=-L_d}^{L_d} \Pi(l) STFT(n, k+l) STFT^*(n, k-l). \quad (1.59)$$



Slika 1.15: Ilustracija računanja S-metoda na osnovu konvencionalnog računanja STFT i dodatnog bloka.

Ako je prozor  $\Pi(l)$  pravougaoni, relacija (1.59) postaje:

$$SM(n, k) = |SPEC(n, k)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{L_d} STFT(n, k+l) STFT^*(n, k-l) \right\}. \quad (1.60)$$

Realizacija  $SM$  se obavlja nadovezivanjem na blok za standardno računanje  $SPEC$ , dijela koji obavlja nekoliko dodatnih sabiranja (slika 1.15). Frekvencijski prozor  $\Pi(l)$  moguće je definisati kao signal zavisao [115, 116, 192]. Za realizaciju je neophodno usvojiti adaptivni nivo. Obično se usvaja u procentima maksimalne vrijednosti  $SPEC$  u posmatranom trenutku kao  $R_n = \max\{|SPEC(n, k)|\}/Q$ . Zatim se izvršava sumiranje isključivo onih članova  $STFT$  koji ispunjavaju uslov da je  $|STFT(n, k+l)| > \sqrt{R_n}$  i  $|STFT(n, k-l)| > \sqrt{R_n}$ . U realizaciji se obično usvaja da za prvu tačku, koja ne ispunjava uslov, prestane sumiranje daljih članova. Zbog izbjegavanja grešaka prouzrokovanih oscilatornošću auto-člana ili šumom, ponekad se isključenje nepotrebnih računanja obavlja nakon dva ili tri odbirka koji ne zadovoljavaju uslov. Ako se usvoji  $Q = 1$ , dobija se  $SM(n, k) = SPEC(n, k)$ , odnosno, ako je  $Q = \infty$ , dobija se  $SM(n, k) = WD(n, k)$ . Obije realizacije,  $SM$ , sa konstantnim i signal-adaptivnim frekvencijskim prozorom, moguće je jednostavno implementirati odgovarajućim ASIC čipovima.

$SM$  kao distribucija  $CD$  klase, ima jezgra u ambiguity i  $TF$  domenu koja su jednaka [105]:

$$c(\theta, \tau) = \Pi(-\theta/2) *_{\theta} A_w(\theta, \tau) / \pi, \quad \Pi(t, \omega) = 2p(2t)WD_w(-t, -\omega), \quad (1.61)$$

gdje su  $A_w(\theta, \tau)$  i  $WD_w(t, \omega)$   $AF$  i  $WD$  funkcije prozora  $w(t)$ , koji se koristi za proračun  $STFT$ , dok je  $p(t) = IFT\{\Pi(\theta)\}$ . Moguće je definisati  $SM$  zasnovan na autokorelaciji vremensko-pomjerenih  $STFT$ , zaobljenih vremenskim prozorom  $p(\tau)$  [95, 193]:

$$SM_t(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) STFT(t + \tau/2, \omega) STFT^*(t - \tau/2, \omega) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.62)$$



Relacija (1.62) se, za  $p(\tau) = \delta(\tau)$ , svodi na *SPEC*, dok se, za  $p(\tau) = 1$ , dobija *WD*. Funkcija jezgra, za ovako definisanu distribuciju, je  $c(\theta, \tau) = p(-\tau/2) *_{\tau} A_w(\theta, \tau)$ . U aplikacijama, praktičnom se pokazala relacija (1.53), pa se pod *SM* podrazumijeva distribucija definisana tim izrazom. Zbog niza dobrih osobina, *SM* je skrenuo veliku pažnju, pa je postao predmet interesovanja šireg kruga istraživača [105, 193, 194]. Hardverska realizacija *SM* je analizirana u [195, 196]. *SM* je generalizovan za višedimenzionalne signale zajedno sa hardverskom arhitekturom za realizaciju [34, 197]. Slične autokorelacione metode primjenjene su na proračun affine distribucija, pseudo-Bertrandove i pseudo-affine *WD* [105, 199]. Realizacije *SM* su analizirane i u sklopu algoritama za *IF* estimaciju [57, 59, 200].

Na slici 1.16 prikazani su *SPEC*, *WD* i *SM* signala:

$$x(t) = \exp^{-j3.5\pi(t-2.5)^2} + \exp^{j\{6\sin[1.5\pi(t+1)] - 12\pi t\}}. \quad (1.63)$$

Na slici 1.17 prikazani su *WD* i *SM* sa konstantnim konvolucionim prozorom, za signal:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-4(t-0.5)^2} \exp^{j[180\pi(t-0.5)^3 + 50\pi t]} + 0.5e^{-4(t-0.5)^2} \exp(j20\pi t) + \\ + 0.707e^{-40(t-0.5)^2} e^{j50\pi t^2 + j150\pi t}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

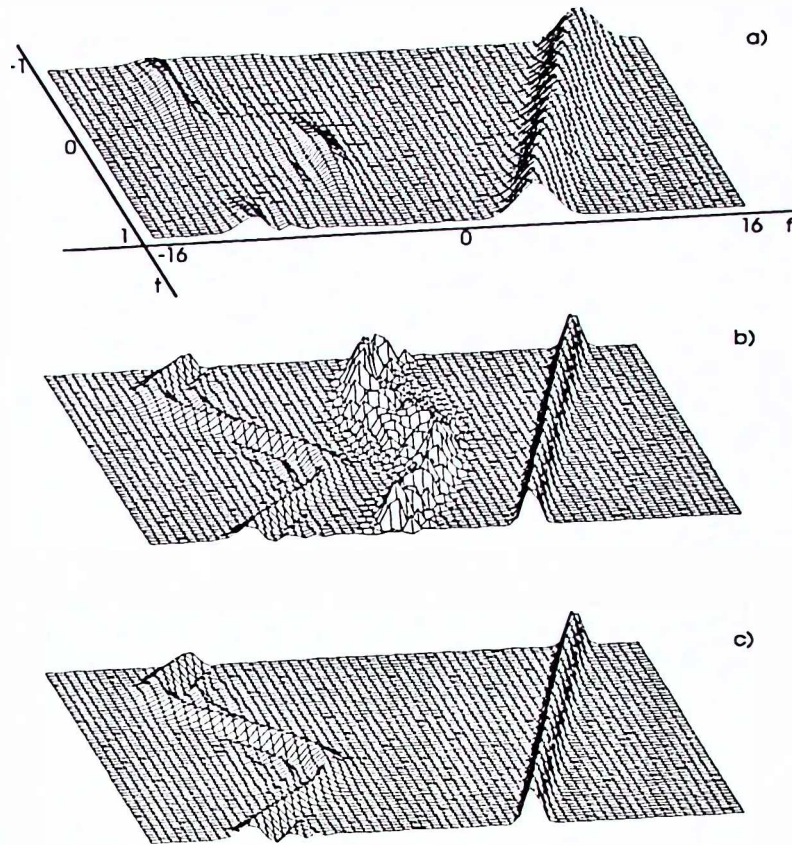
## 1.8 Reassignment metod

Kodera, Gedrin i Villedary su uveli *reassignment* metod u geofiziku i primijenili ga na *SPEC* [164]. Zbog nedostatka teorijskih objašnjenja, ovaj metod je dugo bio nezapažen. Metod su na *TF* analizu primijenili Auger i Flandrin, nazivajući ga metodom za poboljšanje čitljivosti vremensko-frekvencijskih distribucija [165]. Primijenjen je na veliki broj distribucija *CD* i vremenski skalirane (affine) klase. U novije vrijeme, ovaj metod se intenzivno koristi za različite namjene. Jedna od najznačajnijih je parametarska identifikacija signala na osnovu Wigner-Houghove transformacije [56]. U [167] razmatrana je rekurzivna realizacija *reassignment* distribucija.

*Reassignment* metod polazi od *TF* transformacije  $TF_x(t, \omega)$  signala  $x(t)$ , na osnovu koje se formira modifikovano predstavljanje:

$$RTF_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF(t', \omega') \delta(t - \hat{t}_x(t', \omega')) \delta(\omega - \hat{\omega}_x(t', \omega')) dt' d\omega', \quad (1.65)$$

gdje su  $\hat{t}_x(t', \omega')$  i  $\hat{\omega}_x(t', \omega')$  pomjerene vrijednosti vremena i frekvencije. Vrijednosti modifikovane transformacije se koncentrišu na težištu u okolini posmatrane tačke u  $(t, \omega)$  ravni. Vrijednosti pomjerenog vremena i frekvencije za distribuciju Cohenove



Slika 1.16: Suma sinusoidalnog i linearnog FM signala: a) Spektrogram sa Hannovim prozorom širine  $T=2$ , b) Wignerova distribucija sa Hannovim prozorom širine  $T=2$ , c) S-metod sa Hannovim prozorom širine  $T=2$  i konvolucionim prozorom širine  $L_d=4$ .

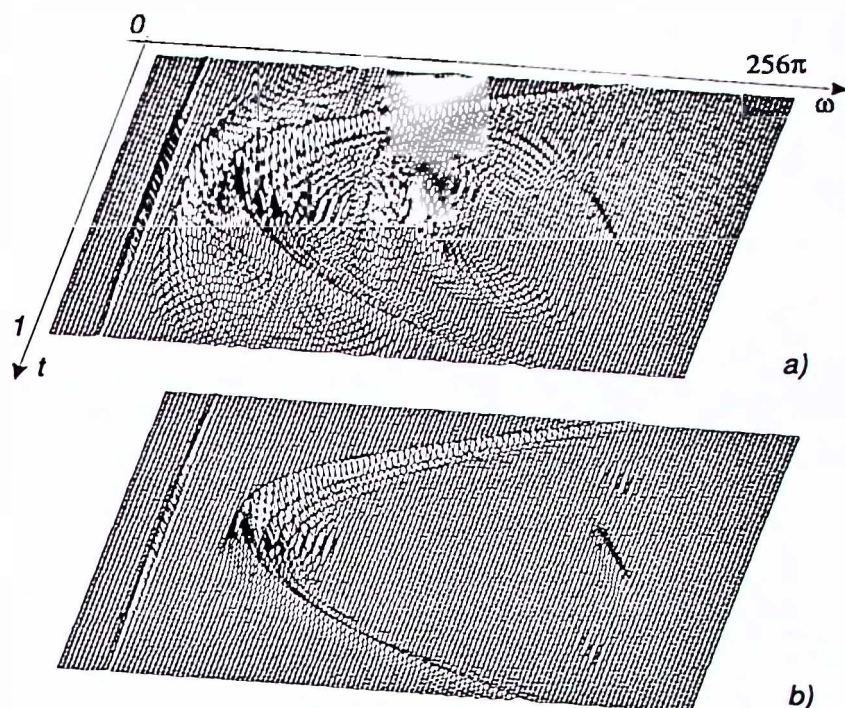
klase (sa funkcijom jezgra u  $TF$  domenu  $\Pi(t, \omega)$ ) se računaju kao [165]:

$$\begin{aligned} \hat{t}_x(t, \omega) &= t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} = \\ &= t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{TF_x(t, \omega)} \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x(t, \omega) &= \omega - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} = \\ &= \omega - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \Pi(u, \Omega) W D_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{TF_x(t, \omega)} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Važne osobine modificiranih predstavljanja su:

1. Modificirano predstavljanje **nije bilinearno**;
2. **Vremensko-frekvencijska invarijantnost**:  $WD$  vremenski-frekvencijski pomerenog signala  $y(t) = x(t - t_0)e^{j\omega_0 t}$  je:  $WD_y(t, \omega) = WD_x(t - t_0, \omega - \omega_0)$ , dok su



Slika 1.17: Trokomponentni signal: a) Wignerova distribucija, b) S-metod.

pomjerene vrijednosti vremena i frekvencije jednake:  $\hat{t}_y(t, \omega) = \hat{t}_x(t - t_0, \omega - \omega_0) + t_0$  i  $\hat{\omega}_y(t, \omega) = \hat{\omega}_x(t - t_0, \omega - \omega_0) + \omega_0$  odakle slijedi  $RTF_y(t, \omega) = RTF_x(t - t_0, \omega - \omega_0)$ ;

### 3. Očuvanje energije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} RTF_x(t, \omega) dt \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \text{ ako važi } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, \omega) dt \frac{d\omega}{2\pi} = 1 \quad (1.68)$$

**4. Idealna koncentracija linearnih FM signala i impulsa:** Ovdje se idealnom podrazumijeva koncentracija na  $IF$ , a ne i idealna amplituda distribucije. Za linearni FM signal  $x(t) = Ae^{j(at^2/2 + bt)}$ , WD je idealna  $WD(t, \omega) = 2\pi A^2 \delta(\omega - at - b)$  a pomjerena vrijednost po frekvenciji je jednaka:  $\hat{\omega}_x(t, \omega) = b + a\hat{t}_x(t, \omega)$ , pa je modificovana distribucija jednaka:

$$\begin{aligned} RTF_x(t, \omega) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t', \omega') \delta(t - \hat{t}_x(t', \omega')) dt' \frac{d\omega'}{2\pi} \right) \delta(\omega - at - b) = \\ &= G_x(t, \omega) \delta(\omega - at - b). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Iz (1.69) slijedi zaključak o koncentraciji duž  $IF$  uz promjenljivu amplitudu  $G_x(t, \omega)$ . Za Dirakov impuls  $x(t) = A\delta(t - t_0)$  WD je idealna i jednaka  $WD_x(t, \omega) = A^2 \delta(t - t_0)$ , dok je pomjereno vrijeme jednako poziciji impulsa  $\hat{t}_x(t, \omega) = t_0$ . Modifikovana



distribucija, u ovom slučaju, jednaka je:

$$RTF_x(t, \omega) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t', \omega') \delta(\omega - \tilde{\omega}_x(t', \omega')) dt' \frac{d\omega'}{2\pi} \right) \delta(t - t_0). \quad (1.70)$$

5. Modifikacija WD je WD: Za  $WD$  važi da je  $\Pi(t, \omega) = 2\pi\delta(t)\delta(\omega)$ , odnosno, pomjeraj po vremenu jednak je:

$$\hat{t}_x(t, \omega) = t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u 2\pi\delta(u)\delta(\Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{WD_x(t, \omega)} = t. \quad (1.71)$$

Za pomjerenu vrijednost po frekvenciji dobija se rezultat  $\hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega$ . ■

Na slici 1.18 prikazan je algoritam diskretne implementacije modifikovanih distribucija. Vrijednost  $R$  predstavlja nivo ispod kojeg se ne vrši pomjeranje vrijednosti. Kod reassignment metoda usvaja se nivo (od 5 do 10% maksimalne vrijednosti distribucije) ispod kojeg se ne vrši pomjeranje vrijednosti distribucije. Ovaj metod ostvaruje dobro potiskivanje interferencija zbog njihove oscilatornosti, dok se uticaj šuma redukuje adaptivnim nivoom.

U literaturi se navodi nekoliko izraza za pomjerene vrijednosti vremena i frekvencije kod modifikovanog  $SPEC$ , iz dva razloga: 1)  $SPEC$  je prvo  $TF$  predstavljanje na koje je primijenjen reassignment metod i 2) u praksi se kao najbolje iz grupe modifikovanih predstavljanja za široku klasu signala pokazao modifikovani  $SPEC$  sa uskim prozorom. Kako je jezgro za  $SPEC$ , sa parnim i realnim prozorom  $w(t)$ , u  $(t, \omega)$  domenu jednako  $\Pi(t, \omega) = WD_w(t, \omega)$ , pomjeraj se može izraziti kao:

$$\hat{t}_x(t, \omega) = t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u WD_w(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WD_w(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} = \quad (1.72)$$

$$= t - Re \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u RD_w^*(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} RD_w^*(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} \right\} = \quad (1.73)$$

$$= t - Re \left\{ \frac{STFT_{Tw}(t, \omega) STFT_w^*(t, \omega)}{|STFT_w(t, \omega)|^2} \right\} = t - Re \left\{ \frac{STFT_{Tw}(t, \omega)}{STFT_w(t, \omega)} \right\} = \quad (1.74)$$

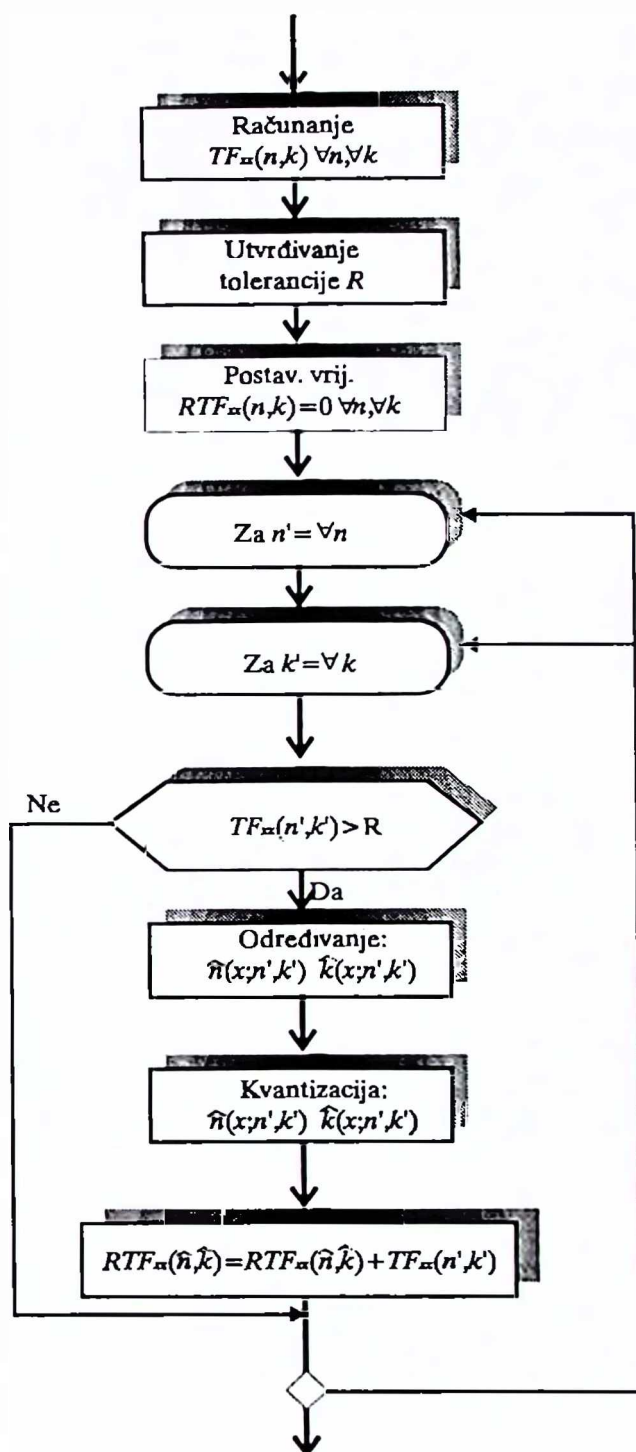
$$= -\frac{\partial}{\partial \omega} [\phi_{STFT}(t, \omega)] \quad (1.75)$$

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega WD_w(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WD_w(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} = \quad (1.76)$$

$$= \omega - Re \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega RD_w^*(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} RD_w^*(u, \Omega) WD_x(t - u, \omega - \Omega) du d\Omega} \right\} = \quad (1.77)$$

$$= \omega + Im \left\{ \frac{STFT_{Dw}(t, \omega) STFT_w^*(t, \omega)}{|STFT(t, \omega)|^2} \right\} = \omega + Im \left\{ \frac{STFT_{Dw}(t, \omega)}{STFT(t, \omega)} \right\} = \quad (1.78)$$

$$= \omega + Im \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\phi_{STFT}(t, \omega)] \right\}. \quad (1.79)$$



Slika 1.18: Algoritam za realizaciju reassignment modifikovanih distribucija.

U izrazima (1.72)-(1.79) pojedine oznake predstavljaju:  $WD_x(t, \omega)$  -  $WD$  signala  $x(t)$ ,  $RD_x(t, \omega)$  -  $RD$  signala  $x(t)$ ,  $Re$  - realni dio i  $Im$  - imaginarni dio. U indeksu  $STFT$  oznaka  $w$  znači primjenu prozora  $w(t)$ ,  $Tw$  označava prozor  $tw(t)$ , dok je  $Dw$  prozor  $dw(t)/dt$ . Kako je, u opštem slučaju,  $STFT$  kompleksna veličina, to se može zapisati kao  $STFT_w(t, \omega) = A_{STFT}(t, \omega) \exp(j\phi_{STFT}(t, \omega))$ , gdje su  $A_{STFT}(t, \omega)$  amplituda i  $\phi_{STFT}(t, \omega)$  faza  $STFT$ . U izrazima (1.75) i (1.79), za pomjerene vrijednosti vremena i frekvencije figuriše, izraz za fazu  $STFT$ . Dakle, faza  $STFT$ , koja se ne koristi kada se primjenjuje  $SPEC$ , dovoljna je za određivanje modifikovanog  $SPEC$ . Ova činjenica je korištena za kreiranje tzv. diferencijalnog reassignmenta [166]. Za distribuciju  $CD$  klase, u opštem slučaju, vrijednosti pomjerenog vremena i frekvencije su jednake:

$$\hat{t}_x(t, \omega) = t - \frac{TFR^i(t, \omega)}{TFR(t, \omega)}; \quad \hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega - \frac{TFR^{\bar{\omega}}(t, \omega)}{TFR(t, \omega)}, \quad (1.80)$$

gdje su  $TFR^i(t, \omega)$  i  $TFR^{\bar{\omega}}(t, \omega)$  distribucije  $CD$  klase sa jezgrima  $j\partial/\partial\theta[c(\theta, \tau)]$  i  $j\partial/\partial\tau[c(\theta, \tau)]$ , respektivno. Jezgro "osnovnog"  $TF$  predstavljanja  $TFR(t, \omega)$  je  $c(\theta, \tau)$ .

Na slici 1.19 prikazane su neke modifikovane i nemodifikovane distribucije sume kompleksne sinusoide sa linearnim i sinusoidalnim  $FM$  signalom. Svi signali su ograničenog trajanja. Jasna je bliskost modifikovanih predstavljanja idealnoj distribuciji.

## 1.9 Dekompozicija distribucija Cohenove klase

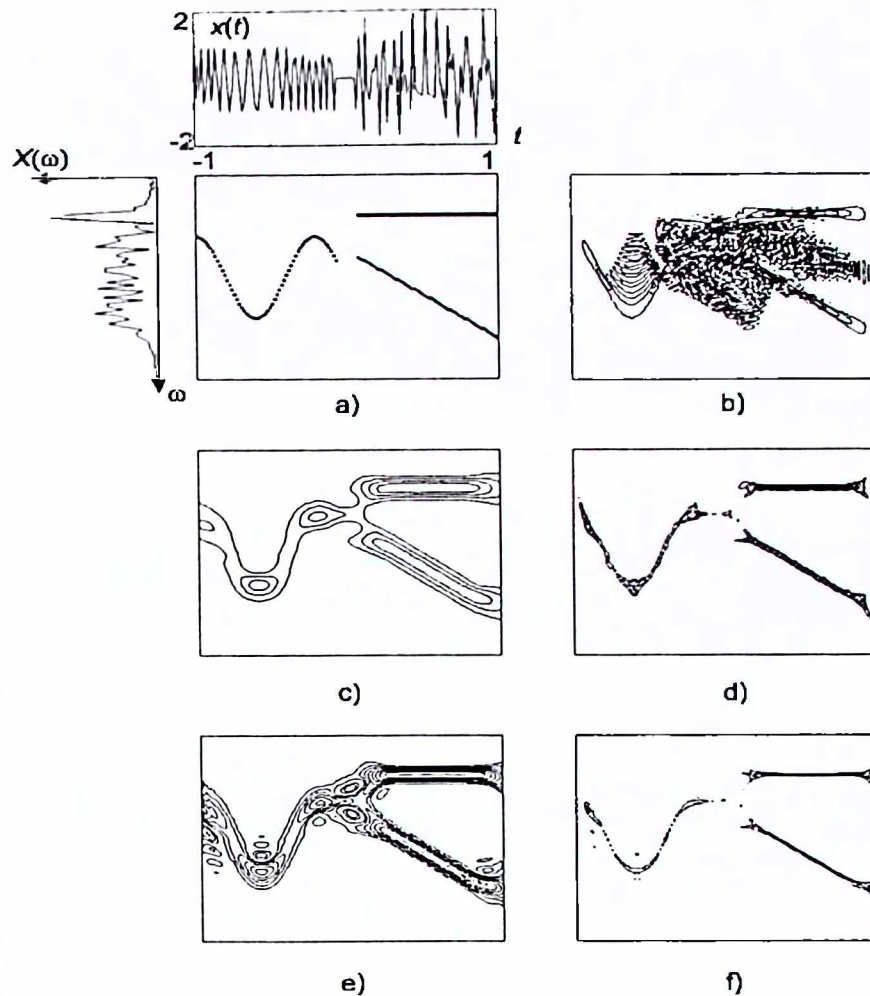
Najvažnija  $TF$  predstavljanja grupisana su u  $CD$  klasu. Da bi se izbjegao problem aliasinga neophodno je preodabrati signal. Ovo traži dvostruko veće memorijske i hardverske zahtjeve. Stoga je veliki broj radova posvećen istraživanju mogućnosti da se računanje distribucija  $CD$  klase svede na računanje  $SPEC$ , odnosno  $STFT$ . Ove tehnike se nazivaju dekompozicionim i sastoje se od razlaganja jezgra, odnosno matrice koja predstavlja jezgro, u nekom od domena (najčešće je to *time-lag* domen), pomoću dekompozicije po sopstvenim ili singularnim vrijednostima [168]-[170].

U diskretnom domenu moguće je napisati distribuciju  $CD$  analogno relaciji (1.44) preko jezgra u time-lag domenu kao:

$$CD(n, \omega) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} [x(n + n_1) e^{-j\omega(n + n_1)}] \times \\ c_T \left( -\frac{n_1 + n_2}{2}, n_1 - n_2 \right) [x(n + n_2) e^{-j\omega(n + n_2)}]^*. \quad (1.81)$$

Kako se funkcija jezgra  $c_T(-(n_1 + n_2)/2, n_1 - n_2)$  može tretirati kao matrica, to se može razložiti preko sopstvenih vrijednosti. Za kvadratnu matricu  $A$  sopstvene vrijednosti su rješenja jednačine [201]:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.82)$$



Slika 1.19: Suma tri FM signala: a) Idealno TF predstavljanje; b) WD; c) SPEC; d) Modifikovani SPEC; e) PSWD; f) Modifikovana PSWD.

po  $\lambda$ , gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica istih dimenzija kao matrica  $\mathbf{A}$ . Broj korijena jednačine (1.82) jednak je redu matrice  $\mathbf{A}$ . Sopstveni vektori matrice  $\mathbf{A}$  dobijaju se rješavanjem matrične jednačine:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}. \quad (1.83)$$

Kolone matrice  $\mathbf{Q}$  su sopstveni vektori matrice  $\mathbf{A}$ , dok je  $\mathbf{\Lambda}$  dijagonalna matrica čiji su elementi sopstvene vrijednosti. Suma kvadrata vrijednosti u koloni matrice sopstvenih vektora normalizuje se na vrijednost 1. Matrica  $\mathbf{Q}$  je ortogonalna, odnosno za nju važi  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . Na osnovu izloženog, dekompozicijom funkcije jezgra  $c_T\left(-\frac{n_1+n_2}{2}, n_1-n_2\right)$  preko sopstvenih vrijednosti i sopstvenih vektora, izraz za dis-

tribuciju  $CD$  klase (1.81) može se zapisati kao:

$$CD(n, \omega) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \left| \sum_{n_1} x(n + n_1) e^{j\omega(n+n_1)} q_k^*(n_1) \right|^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k |STFT_{q_k}(n, \omega)|^2, \quad (1.84)$$

gdje su  $\lambda_k$  odgovarajuće sopstvene vrijednosti i  $q_k(n)$  sopstveni vektori funkcije jezgra. Oznaka  $STFT_{q_k}(n, \omega)$  predstavlja  $STFT$  sa prozorom koji je jednak  $k$ -tom sopstvenom vektoru matrice  $Q$ . Kod  $RID$  distribucija sopstvene vrijednosti eksponencijalno opadaju od najveće ka najnižoj. Stoga se računanje (1.84) može efikasno, sa malom greškom, obaviti uzimanjem nekoliko najvećih sopstvenih vrijednosti.

Druga slična tehnika je dekompozicija preko singularnih vrijednosti matrice (*singular values decomposition* -  $SVD$ ). Matrica, koja predstavlja funkciju jezgra u *time-lag* domenu, može se zapisati kao:

$$A = U^T S V = \sum_{i=1}^N \sigma_i u_i v_i^T, \quad (1.85)$$

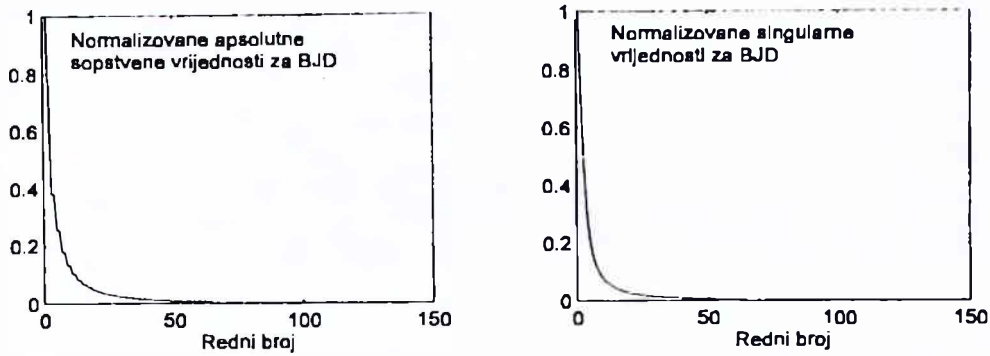
gdje je  $S = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  dijagonalna matrica singularnih vrijednosti. Kolone  $U$  i  $V$  su sopstveni vektori matrica  $AA^T$  i  $A^T A$ , respektivno. Kod  $SVD$  dekompozicije, takodje, važe pravila za brzo opadanje singularnih vrijednosti od najveće ka najnižoj. Stoga se, sa malom greškom, dekompozicija može obaviti uzimanjem svega nekoliko singularnih vrijednosti. Kod  $SVD$  matrica jezgra ne mora biti kvadratna. Distribucije  $CD$  klase mogu se realizovati kao:

$$CD(n, \omega) = \sum_i \sigma_i STFT_{u_i}(n, \omega) STFT_{v_i}^*(n, \omega), \quad (1.86)$$

gdje indeksi označavaju funkcije prozora koje su primijenjene kod odgovarajućih  $STFT$ . Npr.,  $SM$  se može izraziti kao:

$$SM(n, \omega) = \sum_i \Pi(i) STFT_{W_{\theta w}}(n, \omega) STFT_{W_{\theta w}}^*(n, \omega). \quad (1.87)$$

Funkcija frekvencijskog prozora  $\Pi(i)$  je, u skladu sa (1.59) pravougaona širine  $2L_d + 1$ . Operator u indeksu  $STFT$  označava modulisani prozor  $W_{\theta w} \equiv w(l) e^{j\theta l}$ . Modulisani prozori, u opštem slučaju, ne formiraju ortogonalne matrice (osim kod pravougaonih prozora). Na slikama 1.20a i b prikazane su sopstvene i singularne vrijednosti za jezgro  $BJD$ . Na slici 1.21 prikazana je  $BJD$  signala (1.63) računata definiciono i preko 5 najvećih singularnih vrijednosti.



Slika 1.20: Dekompozicija jezgra Born-Jordanove distribucije: a) Normalizovane apsolutne sopstvene vrijednosti u opadajućem redoslijedu; b) Normalizovane singularne vrijednosti u opadajućem redoslijedu.

## 1.10 Visokokoncentrisane distribucije

Značajan problem u  $TF$  analizi predstavlja uklanjanje unutrašnjih interferencija kod nelinearno moduliranih signala. Distribucije koje se koriste za ove namjene nazivaju se visokokoncentrisanim (*highly concentrated*). Predstavnik ove grupe je  $L$ -Wignerova distribucija ( $L-WD$ ) definisana kao [109, 110, 202]:

$$LWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^L(t + \tau/2L) x^{*L}(t - \tau/2L) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.88)$$

$L-WD$  nelinearno moduliranog signala  $x(t) = A \exp(j\phi(t))$  jednaka je:

$$\begin{aligned} LWD(t, \omega) &= \\ &= A^{2L-2} I(t, \omega) *_{\omega} FT \left\{ \exp \left[ j2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{(2k+1)} \tau^{(2k+1)} / 2^{2k+1} L^{2k+1} (2k+1)! \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

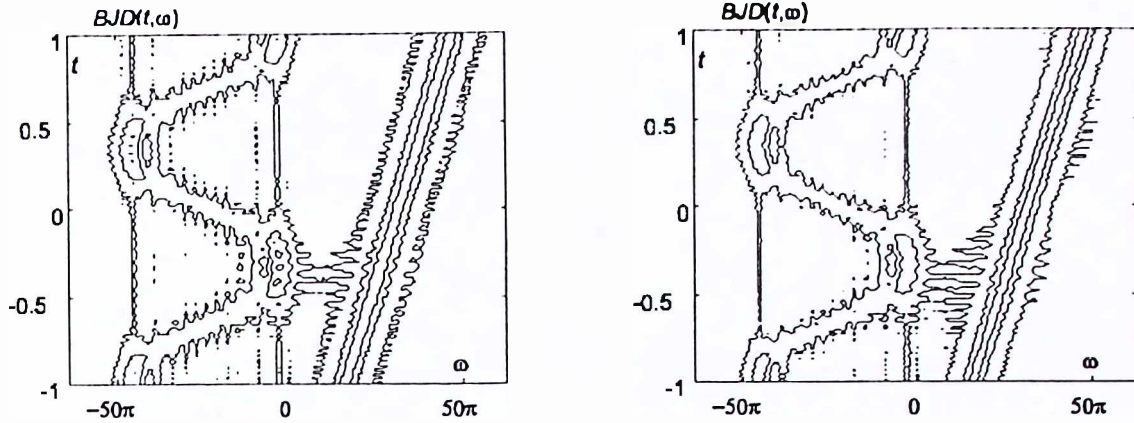
Članovi koji doprinose unutrašnjim interferencijama manji su  $L^{2k+1}$  puta nego odgovarajući kod  $WD$  odnosno za  $A = 1$  kada  $L \rightarrow \infty$ ,  $L-WD$  teži idealnoj distribuciji  $LWD(t, \omega) = I(t, \omega)$ . Na slici 1.22 prikazana je  $WD$  i  $L-WD$  za  $L = 2, 4, 8$  signala:

$$x(t) = \exp(j24 \sin(\pi t)). \quad (1.90)$$

Zbog stepenovanja signala sa  $L$ , broj kros-komponenti, kod ove distribucije, bio bi značajno uvećan. Međutim, autokorelacionom tehnikom, koja je korišćena kod  $SM$ , može se  $L-WD$   $L$ -tog reda svesti na autokorelaciju  $L-WD$   $L/2$ -tog reda. Za diskretne signale to se može zapisati kao:

$$LWD_L(n, k) = \sum_{l=-L}^L \Pi(l) LWD_{L/2}(n, k+l) LWD_{L/2}(n, k-l). \quad (1.91)$$





Slika 1.21: Born-Jordanova distribucija: a) Računata dekompozicionim algoritmom preko pet najvećih singularnih vrijednosti; b) Računata definiciono.

Npr.,  $L - WD$  sa  $L = 2$  se može sračunati na taj način što se, na osnovu  $STFT$ , sračuna  $SM$  bez kros-članova, a zatim se izvrši autokorelacija  $SM$  u skladu sa (1.91). Daljom primjenom autokorelacije (1.91) može se dobiti  $L - WD$  višeg reda. Na taj način se dobija  $L - WD$  bez preodabiranja i bez kros-članova. Predložena tehnika primjenjiva je i za konstantnu i za signal adaptivnu širinu prozora  $\Pi(t)$ . Na osnovu  $L - WD$  definisana je  $L$ -klasa distribucija:

$$CD_L(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_L(\theta, \tau) x^L(u + \tau/2L) x^{*L}(u - \tau/2L) e^{j\theta u - j\theta t - j\omega \tau} d\tau d\theta du. \quad (1.92)$$

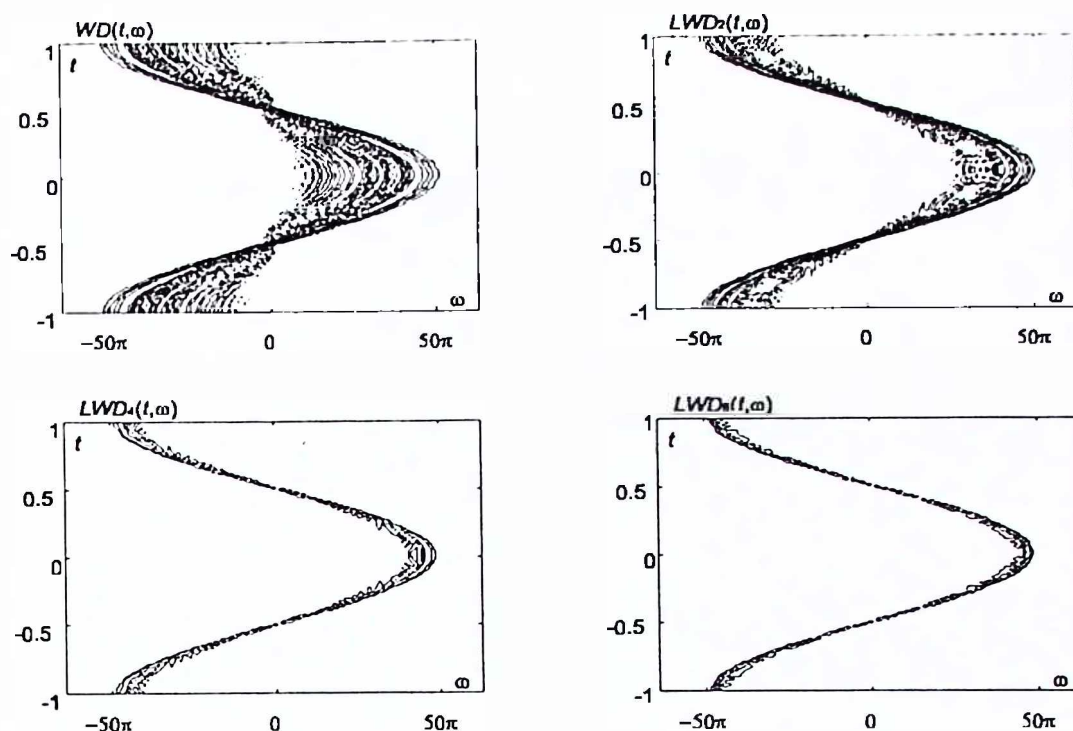
U radu [110] analizirane su osobine ove grupe predstavljanja. Analogno svakoj distribuciji  $CD$  klase, može se definisati odgovarajuća distribucija  $L$ -klase.  $L$ -ambiguity funkcija se definiše kao:

$$LAF(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^L(t + \tau/2L) x^{*L}(t - \tau/2L) e^{j\theta t} dt. \quad (1.93)$$

Mana  $L - WD$  je stepenovanje amplitude signala (1.89) sa  $L > 1$ .  $L - WD$  zadovoljava generalizovani marginalni uslov  $\int_{-\infty}^{\infty} LWD(t, \omega) d\omega = |x(t)|^{2L}$ . Ovo dovodi do nerealne slike o amplitudi signala u nekim slučajevima, međutim, može se iskoristiti u robusnoj identifikaciji postojanja signala u prisustvu velikog šuma. Neka je dat signal:

$$x(t) = e^{-j8\pi t} e^{-256(t+0.5)^2} \quad (1.94)$$

zahvaćen kompleksnim Gausovim bijelim sumom  $\nu(t)$  (*complex Gaussian white noise - CGWN*) sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom. Varijanse realnog i imaginarnog



Slika 1.22: Distribucije sinusoidalno modulisanog signala: a) Wignerova distribucija; b,c,d)  $L$ -Wignerova distribucija za  $L=2,4$  i  $8$  respektivno.

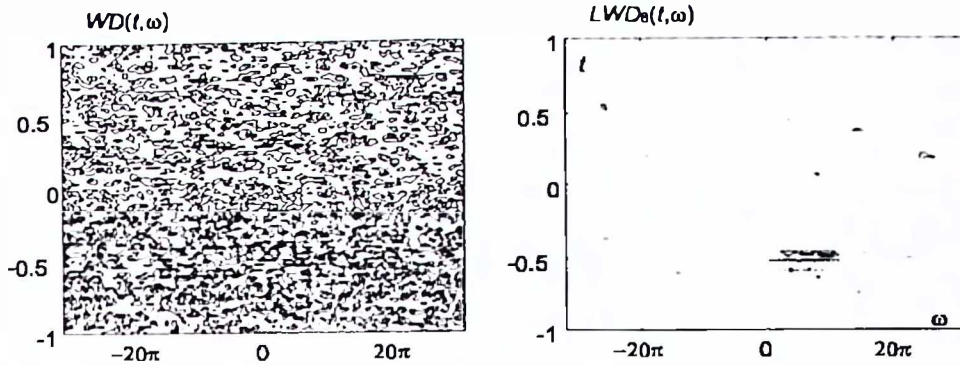
dijela su jednake i iznose  $\sigma_v^2/2$ . Ovaj model šuma će biti razmatran u većem dijelu rada. Posmatrani odnos signal/šum je  $10 \log(A^2/\sigma_v^2) = -3 \text{ dB}$ . Na slici 1.23 prikazane su  $WD$  i  $L-WD$  ovog signala za  $L = 8$ . Pozicija na kojoj je signal jasno se ističe za  $L = 8$ .

Ruski naučnik Tatarski [124] je uočio da se originalna  $WD$  u kvantnoj mehanici razlikuje od one koja se koristi u obradi signala. Prevodeći originalnu  $WD$  na uobičajeni oblik u  $TF$  analizi dobija se:

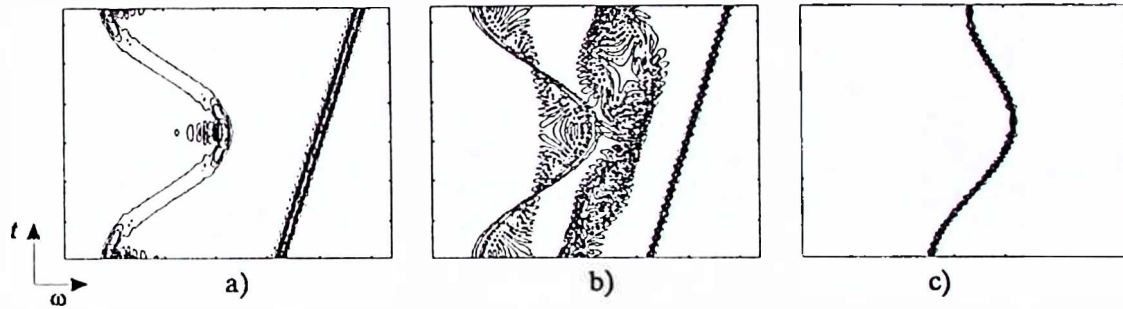
$$SD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{[L]}(t + \tau/2L) x^{*[L]}(t - \tau/2L) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.95)$$

gdje  $[L]$  označava stepenovanje samo faze, a ne i amplitude signala. Za signal  $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ , primjenom ovog operatora, dobija se  $x^{[L]}(t) = A(t)e^{jL\phi(t)}$ . Distribucija definisana sa (1.95) u literaturi se navodi kao S-distribucija ( $SD$ ) [115, 116]. Za  $L \rightarrow \infty$   $SD$  teži idealnoj distribuciji  $SD(t, \omega) \rightarrow I(t, \omega)$ . Ova činjenica važi samo u slučaju primjene S-distribucije na monokomponentne signale. Kod multikomponentnih signala direktna primjena relacije (1.95) dala bi distribuciju koncentrisanu oko težišta signalnih komponenti. Na slici 1.24 prikazani su  $SM$ ,  $WD$  i  $SD$  za  $L = 10$  signala





Slika 1.23: Distribucije signala zahvaćenog šumom: a) Wignerova distribucija; b) L-Wignerova distribucija za  $L=8$ .



Slika 1.24: Distribucije dvokomponentnog signala: a) S-metod; b) Wignerova distribucija; c) S-distribucija za  $L=10$ .

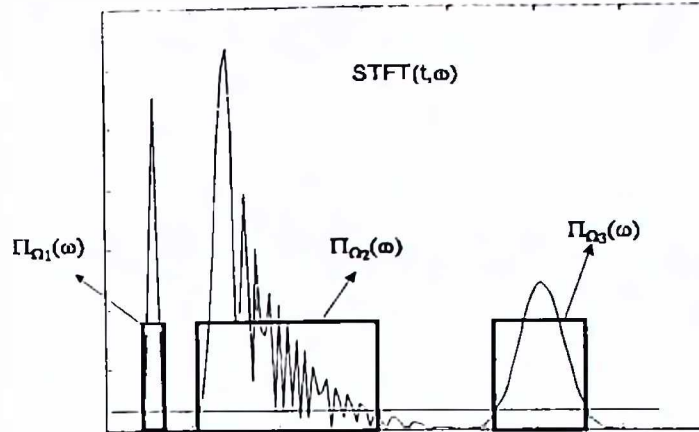
(1.63). Ovaj značajan problem može se prevazići upotrebom autokorelacionih tehnika i signal-adaptivnog frekvencijskog prozora. Ovakva realizacija može se opisati slijedećim koracima [116]:

1. Odredi se  $STFT(t, \omega)$  posmatranog signala.

2. Uz usvojeni signal adaptivni nivo  $R_{lev}(t) = \max_{\omega} \{|STFT(t, \omega)|\}/Q$ , gdje se  $Q$  zadaje, odrede se oblasti pojedinačnih signalnih komponenti u skladu sa slikom 1.25. Sa  $\Pi_{\Omega_i}(\omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$  označeni su frekvencijski prozori za komponente signala. Prozor je jednak jedinici u okviru signalne komponente.  $P$  je broj detektovanih komponenti signala.

3. Izvrši se normalizacija  $STFT^{(n)}(t, \omega) = \sum_{i=1}^P STFT(t, \omega) \sqrt{E_{\omega}/E_{x_i}(t)} \Pi_{\Omega_i}(\omega)$ , gdje je  $E_{\omega}$  energija prozora upotrijebljenog za računanje  $STFT$ , dok je  $E_{x_i}(t)$  energija signala u okviru jedne komponente.

4. Normalizovani  $SM$  se, u skladu sa prethodnim tumačenjima, može sračunati



Slika 1.25: Ilustracija odredjivanja adaptivnog konvolucionog prozora za računanje S-distribucija.

kao:

$$SD_1(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0 P(\theta) STFT(t, \omega + \theta) STFT^{*(n)}(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (1.96)$$

5.  $SD$  višeg reda se zatim mogu računati kao:

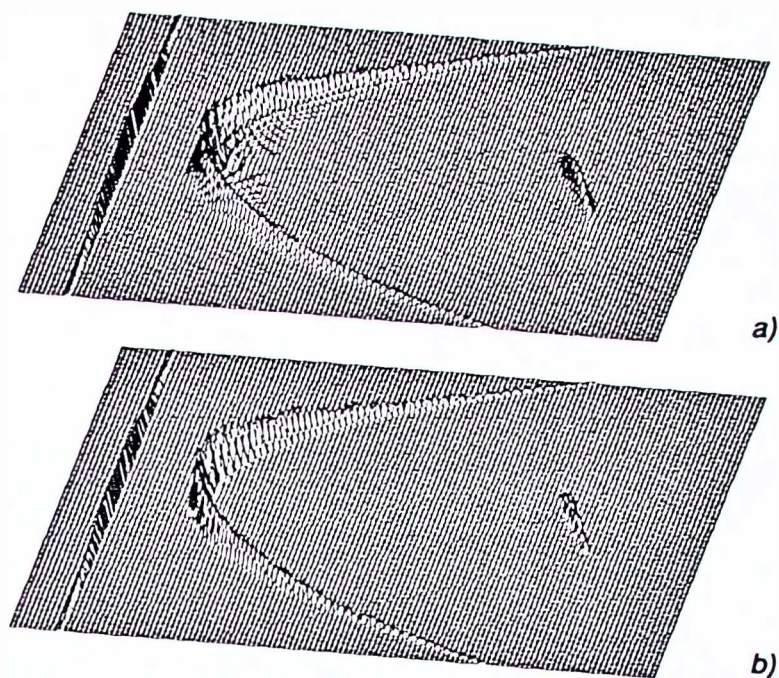
$$SD_L(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0 P(\theta) SD_{L/2}^{(n)}(t, \omega + \theta) SD_{L/2}^{(n)}(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (1.97)$$

$SD$  za  $Q = 1$  se svodi na  $SPEC$ , dok se za  $Q \rightarrow \infty$  svodi na  $WD$ . Frekvencijski prozor  $P(\theta)$  u relacijama (1.96) i (1.97) je signal-adaptivan, i za svaku signalnu komponentu jednak njenoj širini. Na slici 1.26 prikazana je  $SD$  signala (1.64) za  $L = 2$  i  $L = 4$  na intervalu  $[0, 1]$ . Korišten je Hannov prozor  $w(t)$  jedinične širine sa  $N_w = 256$  odbiraka. Usvojena je vrijednost  $Q = 5$ . Na slici 1.27 prikazana je  $SD$  u  $t = 0.5$  za  $L = 1, 2, 4$  i  $8$ . Sa slike je jasno uočljivo smanjivanje unutrašnjih interferencija kako se  $L$  povećava.

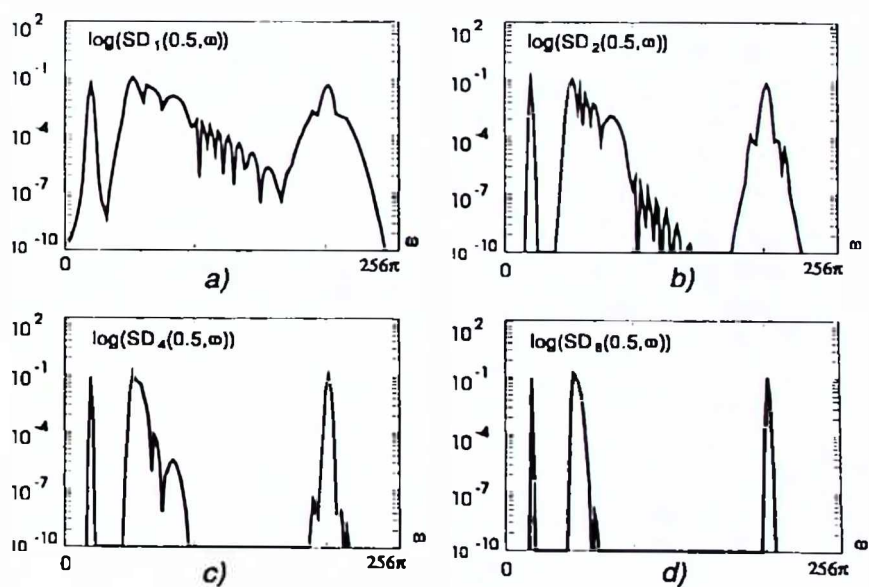
Drugo rješenje iz ove grupe su polinomijalne Wigner-Villeove distribucije. Ove distribucije su uvedene sa težnjom da se definiše idealno  $TF$  predstavljanje za signale sa  $IF$  u obliku polinoma višeg reda. Jednu polinomijalnu distribuciju su definisali Boashash i Ristić kao [112, 125, 132, 194]:

$$PWVD_k(t, \omega) = \int_{\tau} x^*(t + \lambda_1 \tau) \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}_i\{x(t + \lambda_{i+1} \tau)\} e^{-j\omega \tau} d\tau, \quad (1.98)$$

gdje je  $k$  parni red distribucije,  $\mathcal{P}_i\{\cdot\}$  je operator kompleksnog konjugovanja ako je  $i$  parno, a jedinični operator u slučaju da je  $i$  neparno. Koeficijenti  $\lambda_i$  moraju biti izabrani tako da polinomijalna Wigner-Villeova distribucija bude realna, odnosno da, za polinomijalno fazni signal  $x(t) = A \exp\{j \sum_{i=1}^p a_i t^i\}$ , bude idealna i jednaka delta impulsu na trenutnoj frekvenciji  $PWVD(t, \omega) = 2\pi A^k \delta(\omega - \sum_{i=1}^p i a_i t^{i-1})$ . Skup jednačina,



Slika 1.26: S-distribucija trokomponentnog signala za: a)  $L=2$ ; b)  $L=4$ .



Slika 1.27: Distribucije trokomponentnog signala u tački  $t=0.5$ : a) S-metod; b) S-distribucija  $L=2$ ; c) S-distribucija  $L=4$ ; d) S-distribucija  $L=8$ .

koje opisuju ove uslove, može se zapisati kao:

$$\lambda_{2i} = -\lambda_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k/2; \quad \sum_{i=1}^{k/2} \lambda_{2i} = 1/2; \quad \sum_{i=1}^{k/2} \lambda_{2i}^m = 0 \text{ za neparno } m \geq 3 \quad (1.99)$$

Ove jednačine ne opisuju koeficijente na jedinstven način. Za polinomijalnu Wigner-Villeovu distribuciju reda  $k = 2$  jednačina (1.98) se svodi na:

$$PWVD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t + 0.675\tau) x^{*2}(t - 0.675\tau) x^*(t + 0.85\tau) x(t - 0.85\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.100)$$

odnosno, skaliranjem po frekvenciji dobija se:

$$PWVD(t, \omega) = \frac{1}{2.7} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t + \frac{\tau}{4}) x^{*2}(t - \frac{\tau}{4}) x^*(t + A\frac{\tau}{2}) x(t - A\frac{\tau}{2}) e^{-j(\omega/2.7)\tau} d\tau, \quad (1.101)$$

gdje je  $A = 0.85/1.35$ . Iz oblika (1.100) i (1.101) jasno slijedi pojava velikog broja kros-komponenti za multikomponentne signale. Realizacija ove distribucije za multikomponentne signale može se svesti na računanje:

$$PWVD(t, \omega) = \frac{1}{5.4\pi} LWD_2(t, \omega') *_{\omega'} WD_A(t, \omega'), \quad (1.102)$$

gdje je  $LWD_2(t, \omega)$ ,  $L - WD$  reda  $L = 2$ , dok je  $WD_A(t, \omega)$  skalirana  $WD$ :

$$WD_A(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t + A\frac{\tau}{2}) x(t - A\frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.103)$$

Skalirana frekvencija je  $\omega' = \omega/2.7$ . U skladu sa prethodno izvedenim činjenicama, numerička realizacija polinomijalne Wigner-Villeove distribucije može se opisati relacijom:

$$PWVD(n, k) = \sum_{i=-L_d}^{L_d} P(i) LWD_2(n, k + i) WD(n, k + [i/A]), \quad (1.104)$$

gdje je širina frekvencijskog konvolucionog prozora  $P(i)$  jednaka  $2L_d + 1$ , dok  $[ \cdot ]$  označava najbliži cijeli broj. Zbog zaokruživanja, neophodno je izvršiti interpolaciju signala po frekvenciji čija se distribucija traži. U praksi se pokazalo da je neophodan nivo interpolacije četiri puta. Ovo se postiže odgovarajućim dodavanjem nula u vremenskom domenu. Konvolucionu frekvencijski prozor može se koristiti za rekurzivni proračun  $LWD_2(n, k)$  i  $WD(n, k)$  iz  $STFT$  u skladu sa prethodnim razmatranjima.

Drugi tip polinomijalnih distribucija uveden je sa istom logikom, s tim što, u ovom slučaju, podintegralni izraz posjeduje stepene koji nijesu cijeli brojevi [203]. Za eliminaciju unutrašnjih interferencija trećeg reda može se posmatrati polinomijalna  $WD$  oblika:

$$PWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R^{a_1}(t, \tau/2) R^{a_2}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.105)$$



gdje je  $R(t, \alpha) = x(t + \alpha)x^*(t - \alpha)$ . Za  $FM$  signal  $x(t) = Ae^{j\phi(t)}$  ova distribucija ima oblik:

$$PWD(t, \omega) = A^{2(a_1 + a_2)} \delta(\omega - (a_1 + 2a_2)\phi'(t)) *_{\omega} FT[e^{jQ(t, \tau)}], \quad (1.106)$$

gdje je:

$$Q(t, \tau) = (a_1/2^2 + 2a_2) \frac{\phi^{(3)}(t)\tau^3}{3!} + (a_1/2^4 + 2a_2) \frac{\phi^{(5)}(t)\tau^5}{5!} + \dots \quad (1.107)$$

Da bi se distribucija idealno koncentrisala duž  $IF$ , neophodno je da važi  $a_1 + 2a_2 = 1$ , dok je uslov za eliminisanje trećeg izvoda faze  $a_1/2^2 + 2a_2 = 0$ . Odavde slijedi  $a_1 = 4/3$  i  $a_2 = -1/6$ . Npr., za eliminisanje unutrašnjih interferencija višeg reda može se posmatrati sljedeći oblik polinomijalne distribucije:

$$PWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R^{a_{-1}}(t, \tau/2) R^{a_0}(t, \tau) R^{a_1}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.108)$$

Pod uslovima o idealnoj koncentraciji duž  $IF$  i o eliminaciji unutrašnjih interferencija trećeg i petog reda, dobija se sistem jednačina:

$$a_{-1} + 2a_0 + 4a_1 = 1; \quad a_{-1}/8 + a_0 + 8a_1 = 0; \quad a_{-1}/32 + a_0 + 32a_1 = 0. \quad (1.109)$$

Rješenje sistema jednačina (1.109) je  $a_{-1} = 64/65$ ,  $a_0 = -2/9$  i  $a_1 = 1/180$ .

Poredjenjem relacija (1.107) i (1.36), uočava se da kod  $WD$  peti izvod faze (uz postojanje interferencija trećeg) donosi član  $\phi^{(5)}(t)\tau^5/(2^4 \cdot 5!)$ , dok je kod polinomijalne  $WD$  ovaj član znatno uvećan  $-\phi^{(5)}(t)\tau^5/(2^2 \cdot 5!)$ . Interferentni članovi polinomijalne distribucije, koji su većeg reda od reda distribucije, povećavaju se znatno brže nego što je to slučaj kod  $WD$ . Sličan zaključak se može izvesti i za polinomijalne Wigner-Villeove distribucije.

Za signale sa konstantnom amplitudom može se posmatrati distribucija sa kompleksnim argumentom vremena [111]:

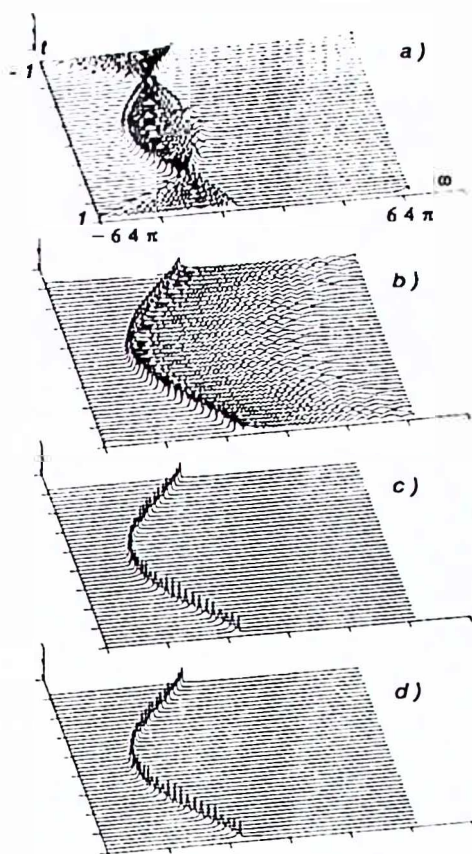
$$CWD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/4)x^*(t - \tau/4)x^{-j}(t + j\tau/4)x^j(t - j\tau/4)e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.110)$$

Faktor koji unosi unutrašnje interferencije u ovu distribuciju može se zapisati kao:

$$Q(t, \tau) = \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^4 \cdot 5!} + \phi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{4^8 \cdot 9!} + \phi^{(13)}(t) \frac{\tau^{13}}{4^{12} \cdot 13!} + \dots \quad (1.111)$$

Kod ove distribucije eliminisane su interferencije trećeg reda, dok je uticaj interferencija višeg reda značajno smanjen (kod petog reda  $2^4 = 16$  puta, sedmi red je eliminisan, a deveti smanjen 512 puta itd.). Diskretna realizacija distribucije sa kompleksnim argumentom vremena može se zapisati kao:

$$CWD(n, \omega) = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} w(m)x(n+m)x^*(n-m)x^{-j}(n+jm)x^j(n-jm)e^{-j4\omega m}, \quad (1.112)$$



Slika 1.28: Distribucije signala faze petog reda: a) Wignerova distribucija; b) Polinomijalna Wignerova 4-tog reda; c) Polinomijalna Wignerova 6-tog reda; d) Distribucija sa kompleksnim argumentom vremena.

gdje se kompleksni argument u izrazu  $x(n + jm)$  može razviti preko reda kao:

$$x(n + jm) = \frac{1}{N} \sum_{l=-M}^{M-1} x(l) e^{(j(n-l)-m)\pi/N} \frac{\sinh[(j(n-l)-m)\pi]}{\sinh[(j(n-l)-m)\frac{\pi}{N}]}, \quad (1.113)$$

gdje je  $2M = N$ . Dobra osobina kompleksne distribucije je zadržavanje amplitude distribucije. Ako je signal  $x(l)$  amplitude  $A$ , vrijednost distribucije duž  $IF$  je  $2\pi A^2$ . Mane ovakvog predstavljanja su nemogućnost realizacije za multikomponente signale, odnosno osjetljivost na ograničenje dužine registara [111]. Za signal:

$$x(l) = e^{j(10l^5 + 50l^3 - 130l)} \quad (1.114)$$

su na slici 1.28 prikazane:  $WD$ , polinomijalna Wignerova 4-tog i 6-tog reda i distribucija sa kompleksnim argumentom vremena.



## 1.11 Distribucije višeg reda

Distribucije višeg reda (*higher order distributions*) veoma su interesantno područje istraživanja, uvedeno zbog umanjivanja uticaja šuma na signal. U  $TF$  analizi, osnovnu grupu ovih predstavljanja čine Wignerovi spektri višeg reda (*WHOS- Wigner higher order spectra*) [106]-[109], [125]. Predstavnik ove grupe je Wignerov bispektar definisan kao:

$$WHOS_2(t, \omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t - \alpha) x(t - \alpha + \tau_1) x(t - \alpha + \tau_2) e^{-j\omega_1 \tau_1 - j\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2, \quad (1.115)$$

gdje je  $\alpha = (\tau_1 + \tau_2)/3$ . Uopštenje bispektra u spektre višeg reda dali su Fonolosa i Nikias. Wignerov spektar proizvoljnog reda  $k$  se definiše kao [106, 107]:

$$WHOS_k(t, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_k} R_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k (e^{-j\omega_i \tau_i} d\tau_i), \quad (1.116)$$

gdje je generalizovana autokorelaciona funkcija data kao:

$$R_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = x^*(t - \alpha) \prod_{i=1}^k x(t - \alpha + \tau_i). \quad (1.117)$$

Kod ovih distribucija, srednja frekvencija izražena preko multidimenzionog prostora:

$$E\{\omega_m\} = \frac{\int_{\omega_1} \dots \int_{\omega_k} \omega_k WHOS_k(t, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_k}{\int_{\omega_1} \dots \int_{\omega_k} WHOS_k(t, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_k} \quad (1.118)$$

jednaka je skaliranoj trenutnoj frekvenciji signala  $E\{\omega_m\} = C\phi'(t)$ . Da bi ovo bilo zadovoljeno, vremensko kašnjenje  $\alpha$  mora biti jednako  $\alpha = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k \tau_i$ . Preko  $FT$ ,  $WHOS$  se može izraziti kao:

$$WHOS_k(t, \omega_1, \dots, \omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta} X^* \left( \sum_{i=1}^k \omega_i + \frac{\theta}{k+1} \right) \prod_{i=1}^k X \left( \omega_i - \frac{\theta}{k+1} \right) e^{-j\theta t} d\theta. \quad (1.119)$$

Problem kros-članova je prisutan i kod  $WHOS$  multikomponentnih signala. U radovima [108, 204] je pokazano da se, u slučaju multikomponentnih signala,  $WHOS$  moraju modifikovati da bi bila omogućena eliminacija kros-članova. Modifikovani  $WHOS$ , sveden na jednu frekvencijsku koordinatu, se definiše kao:

$$MWHOS_k(t, \omega) = \int_{\theta} P(\theta) X^* \left( (k-2L+2)\omega + \frac{\theta}{k+1} \right) \times \\ \times X^{*(L-1)} \left( \omega + \frac{\theta}{k+1} \right) X^{k-L+1} \left( \omega - \frac{\theta}{k+1} \right) e^{-j\theta t} d\theta. \quad (1.120)$$

Specijalni slučajevi bispektar i trispektar dobijaju se za  $k = 2$  i  $k = 3$ , dok se za  $k$  neparan cijeli broj i  $L = (k + 1)/2$  relacija (1.120) svodi na:

$$MWHOS_k(t, \omega) = \int_0 P(\theta) X^L(\omega + \frac{\theta}{2L}) X^{*L}(\omega - \frac{\theta}{2L}) e^{-j\theta t} d\theta. \quad (1.121)$$

Izraz (1.121) je suštinski dualna forma  $L - WD$ . Ova razmatranja su dovela do definisanja multivremenskih  $WHOS$  kao [109]:

$$MTWHOS_k(t_1, \dots, t_k, \omega) = \int_{\tau} x^* \left( \sum_{i=1}^k t_i + \frac{\tau}{k+1} \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^{L-1} x^* \left( -t_i + \frac{\tau}{k+1} \right) \prod_{i=L}^k x \left( t_i - \frac{\tau}{k+1} \right) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.122)$$

Modifikovana verzija relacije (1.122), u skladu sa prethodnim razmatranjima, može se zapisati kao:

$$MTWHOS_k(t, \omega) = \int_{\tau} w^{k+1} \left( \frac{\tau}{k+1} \right) x^* \left( (k-2L+2)t + \frac{\tau}{k+1} \right) \times \\ \times x^{*(L-1)} \left( t + \frac{\tau}{k+1} \right) x^{k-L+1} \left( t - \frac{\tau}{k+1} \right) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.123)$$

Bispektar se definiše za  $k = 2$  i  $L = k/2 = 1$ :

$$MTWHOS_2(t, \omega) = \int_{\tau} w^3(\tau/3) x^*(2t + \tau/3) x^2(t - \tau/3) e^{j\omega\tau} d\tau, \quad (1.124)$$

odnosno preko  $STFT$  i frekvencijskog prozora  $P(\theta_1, \theta_2)$ :

$$MTWHOS_2(t, \omega) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta_1} \int_{\theta_2} P(\theta_1, \theta_2) STFT^*(2t, \omega + \theta_1 + \theta_2) \times \\ \times STFT(t, \omega - \theta_1) STFT(t, \omega - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (1.125)$$

Za  $k$  neparan cijeli broj i  $L = (k + 1)/2$ , multivremenski  $WHOS$  se svode na  $L - WD$ :

$$MTWHOS_k(t, \omega) = LWD_L(t, \omega) = \int_{\tau} w(\tau) x^L(t + \frac{\tau}{2L}) x^{*L}(t - \frac{\tau}{2L}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.126)$$

Druga interesantna veza koja je postoji kod spektara višeg reda je sa polinomijalnim distribucijama. Polinomijalna Wignerova-Villeova distribucija, data izrazom (1.98), je projekcija  $WHOS$ , datih relacijama (1.116) i (1.119), duž frekvencijskih pravaca [125]:

$$\omega = \frac{\omega_i}{\lambda_{i+1} + \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{l+1}}, \text{ za } i = 1, \dots, k-1. \quad (1.127)$$

Druga grupa distribucija višeg reda su lokalne polinomijalne  $TF$  transformacije. Lokalni polinomijalni periodogram se definiše kao [127]-[131]:

$$X(\vec{\omega}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w^*(\tau) e^{-j\vec{x}(\vec{\omega}, \tau)} d\tau, \quad (1.128)$$

gdje je  $\chi(\vec{\omega}, \tau) = \omega_1 \tau + \omega_2 \frac{\tau^2}{2!} + \omega_3 \frac{\tau^3}{3!} + \dots + \omega_m \frac{\tau^m}{m!}$ . Lokalni polinomijalni periodogram je  $(m+1)$ -dimenziona transformacija čije su koordinate  $t$  i  $\vec{\omega} = (\phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(m)}(t))$ , gdje je  $\phi'(t)$   $IF$  a  $\phi^{(k)}(t)$   $(k-1)$  izvod  $IF$ . Za  $\omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_m = 0$  ova transformacija se svodi na  $STFT$ . Lokalni polinomijalni periodogram je linearna transformacija. Ova transformacija se, očigledno, može koristiti za estimaciju parametara signala. Lokalna polinomijalna  $WD$  se definiše kao [117]:

$$LPWD(\vec{\omega}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j\chi_1(\vec{\omega}, \tau)} d\tau, \quad (1.129)$$

gdje je  $\chi_1(\vec{\omega}, \tau) = \omega_1 \tau + \omega_3 \frac{\tau^3}{3!} + \dots + \omega_{2n+1} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . Lokalna polinomijalna  $WD$  nije linearna transformacija. Dobra osobina ove transformacije je svodjenje reda transformacije na niži (odnosno dvostruko manji). Analogno prethodnom, moguće je definisati i druge lokalne polinomijalne transformacije.

U  $IF$  estimaciji često se koristi ambiguity funkcija višeg reda (*higher order ambiguity function* -  $HAF$ ) [133]-[137].  $HAF$  se mogu koristiti za estimaciju viših redova faze signala.  $HAF$   $M$ -tog reda se definiše kao:

$$HAF(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_M(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}) e^{-j\omega \prod_{i=1}^{M-1} \tau_i} \prod_{i=1}^{M-1} d\tau_i, \quad (1.130)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t); \quad x_2(t, \tau_1) = x_1(t + \tau_1) x_1^*(t - \tau_1) \\ &\dots \\ x_M(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}) &= x_{M-1}(t + \tau_{M-1}, \tau_1, \dots, \tau_{M-2}) x_{M-1}^*(t - \tau_{M-1}, \tau_1, \dots, \tau_{M-2}) \end{aligned} \quad (1.131)$$

Za  $M = 2$  i  $a = 2$ , svodi se na standardnu  $WD$ , dok za  $M = 3$  i  $a = 4$ , ova transformacija postaje:

$$\begin{aligned} HAF(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau_1/2 + \tau_2/2) x^*(t + \tau_1/2 - \tau_2/2) \times \\ &\times x^*(t - \tau_1/2 + \tau_2/2) x(t - \tau_1/2 - \tau_2/2) e^{-j\omega \tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (1.132)$$

i, za kvadratno modulisan signal  $x(t) = Ae^{jct^3/6}$ , idealno se koncentriše na prvom izvodu trenutne frekvencije  $HAF(t, \omega) = 2\pi A^4 \delta(\omega - ct)$ .

U najnovija dostignuća u definisanju distribucija višeg reda mogu se ubrojati radovi O'Neill i Williamsa [138, 205] gdje je razmatrana kombinovana analiza signala u  $TF$  i ambiguity domenu. Jednu distribuciju višeg reda izložili su Zavorsky i Fujii u cilju eliminisanja interferencija trećeg reda u  $WD$  [119].

## 1.12 Vremensko-frekvencijske transformacije višedimenzionih signala

Za slučaj višedimenzionih signala (npr. signala slike) mogu se definisati višedimenzionalne *STFT* transformacije - prostorno/prostorno-frekvencijske transformacije (*space/spatial-frequency - S/S-F*) [31]-[38], [197, 198]. Višedimenzionalna *STFT* za signal  $x(t_1, t_2, \dots, t_M)$  jednaka je:

$$\begin{aligned} STFT(t_1, t_2, \dots, t_M; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M) = \\ = \int_{\tau_1} \int_{\tau_2} \dots \int_{\tau_M} x(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \dots, t_M + \tau_M) \times \\ \times w^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M) e^{-j\omega_1\tau_1 - j\omega_2\tau_2 - \dots - j\omega_M\tau_M} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_M. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Uvodeći vektorske oznake  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$ ,  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M)$ , izraz za višedimenzionalnu *STFT* može se napisati kao:

$$STFT(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{\tau}} x(\vec{t} + \vec{\tau}) w^*(\vec{\tau}) e^{-j\vec{\omega}\vec{\tau}} d\vec{\tau}. \quad (1.134)$$

Analogno, moguće je definisati *WD* višedimenzionih signala kao:

$$WD(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{\tau}} x(\vec{t} + \vec{\tau}/2) x^*(\vec{t} - \vec{\tau}/2) e^{-j\vec{\omega}\vec{\tau}} d\vec{\tau}. \quad (1.135)$$

Po analogiji sa *CD* klasom, može se definisati šira klasa *S/S-F* invarijantnih distribucija:

$$CD(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{2M}} \int_{\vec{\tau}} \int_{\vec{\theta}} \int_{\vec{u}} c(\vec{\theta}, \vec{\tau}) x(\vec{u} + \vec{\tau}/2) x^*(\vec{u} - \vec{\tau}/2) e^{j\vec{\theta}\vec{u} - j\vec{\theta}\vec{t} - j\vec{\omega}\vec{\tau}} d\vec{\tau} d\vec{\theta} d\vec{u}. \quad (1.136)$$

Najznačajnije primjene *S/S-F* distribucija su u analizi slike, posebno u okviru teksturne segmentacije, kao i u oblasti analize optičkih interferograma. Kod analize realnih signala veliki problem predstavlja definisanje Hilbertove transformacije višedimenzionog signala [31, 36]. Za proračun distribucije na osnovu relacije (1.136) potrebna je  $3M$ -dimenzionalna *FFT* transformacija. Stoga je u ovom slučaju, neophodno izvršiti svodjenje na *STFT*. Ovo je dovelo do uvođenja višedimenzionog *SM* koji je formalno definisan kao:

$$SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{\pi^M} \int_{\vec{\theta}} P(\vec{\theta}) STFT(\vec{t}, \vec{\omega} + \vec{\theta}) STFT^*(\vec{t}, \vec{\omega} - \vec{\theta}) d\vec{\theta}. \quad (1.137)$$

Efekti aliasinga i uslovi izbjegavanja kros-članova analizirani su u [34]. Pored ovih prednosti, kod *SM* su, na isti način kao i ostali kros-članovi, izbjegnuti i kros-članovi koji kod realnog signala postoje između pozitivnih i negativnih frekvencija. Stoga u ovom slučaju nije potrebno računanje analitičkog dijela višedimenzionog signala,

odnosno nema potrebe za Hilbertovom transformacijom signala. Diskretna realizacija  $SM$  2D signala slike može se obaviti kao:

$$SM(n_1, n_2, k_1, k_2) = |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)|^2 + 2 \sum_{i_1=0}^{L_d} \sum_{\substack{i_2=-L_d \\ i_1+|i_2| \neq 0}}^{L_d} \text{Re}\{STFT(n_1, n_2, k_1+i_1, k_2+i_2)STFT^*(n_1, n_2, k_1-i_1, k_2-i_2)\}, \quad (1.138)$$

podrazumijevajući da je prostorno-frekvencijski konvolucioni prozor  $P(i_1, i_2)$  pravougaoni širine  $2L_d + 1$  po obje koordinate. Neka je dat signal:

$$f(t_1, t_2) = \cos[20\pi(t_1 - 0.75)^2 + 22\pi(t_2 - 0.75)^2] + 0.5e^{j[(-100 \cos(\pi t_1/2) - 100 \cos(\pi t_2/2))]} \quad (1.139)$$

u oblasti  $|t_1| < 0.75$  i  $|t_2| < 0.75$ . Ovom signalu je dodata "uska" komponenta:

$$f_1(t_1, t_2) = \cos\{1000\pi[(x + 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]\} \quad (1.140)$$

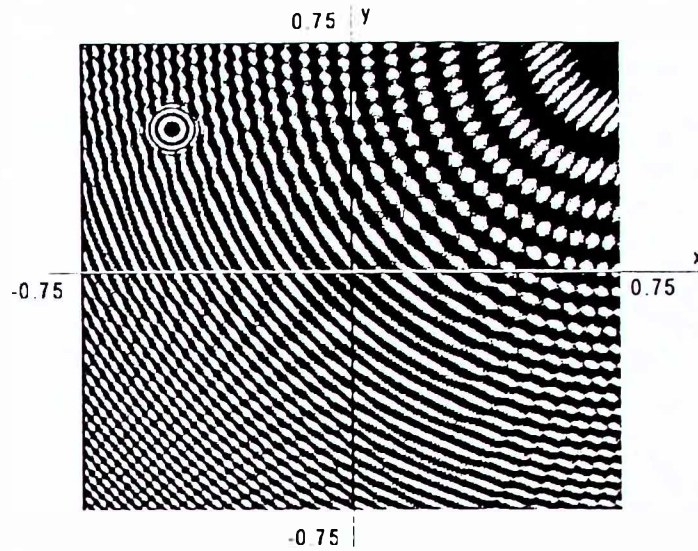
u intervalu  $|t_1 + t_2| < 0.1$  i  $|t_2 - t_1 - 1| < 0.1$ . Na slici 1.29 prikazan je signal  $f(t_1, t_2) + f_1(t_1, t_2)$ . Signal je odsječen 2D Hannovim prozorom širine 1 po obje koordinate. U primjeru je za  $STFT$  i  $SM$  uzeto  $N_w = 64$  odbiraka po obje koordinate, dok je za  $WD$  uzeto dvostruko više odbiraka  $M = 2N_w = 128$ . Distribucije u tački  $(x, y) = (-0.25, -0.25)$  su prikazane na slici 1.30. Na slici 1.30a prikazan je kvadrat modula  $STFT$  ( $SPEC$ ), na 1.30b  $WD$  dok je na slikama 1.30c i 1.30d prikazan  $SM$  za konvolucione prozore  $L_d = 2$  i  $L_d = 3$ . Uočljive su prednosti  $SM$  u smislu nepostojanja kros-članova u odnosu na  $WD$ , odnosno poboljšanje koncentracije u odnosu na  $SPEC$ .

### 1.13 Ostala višedimenziona predstavljanja signala

Altes-Marinovičeva i Bertandova distribucija, koje su medju prvim definisanim  $TF$  transformacijama, ne zadovoljavaju osobine  $TF$  invarijantnosti [100, 101]. Kao i neke distribucije koje su već obuhvaćene radom, one imaju porijeklo u kvantnoj mehanici. U najnovije vrijeme, ove transformacije su ponovo aktuelne, pa su izvedene i šire klase predstavljanja zasnovane na ovim distribucijama. Neke od ovih klasa u sebi uključuju i  $CD$  klasu kao potklasu [2], [102]-[104], [157, 206, 207].

Značajnu grupu čine vremensko-skalirane transformacije i njihov predstavnik wavelet transformacija (*wavelet* - u slobodnom prevodu znači talasić) [140]-[151], [208]. Wavelet transformacija ima brojne primjene u: kompresiji, prenosu video signala, kodiranju podopsega, multirezolucionoju analizi, filtriranju i drugim oblastima. Kod vremensko-skaliranih transformacija umjesto frekvencije, se kao druga karakteristika signala, pored





Slika 1.29: Dvodimenzioni signal.

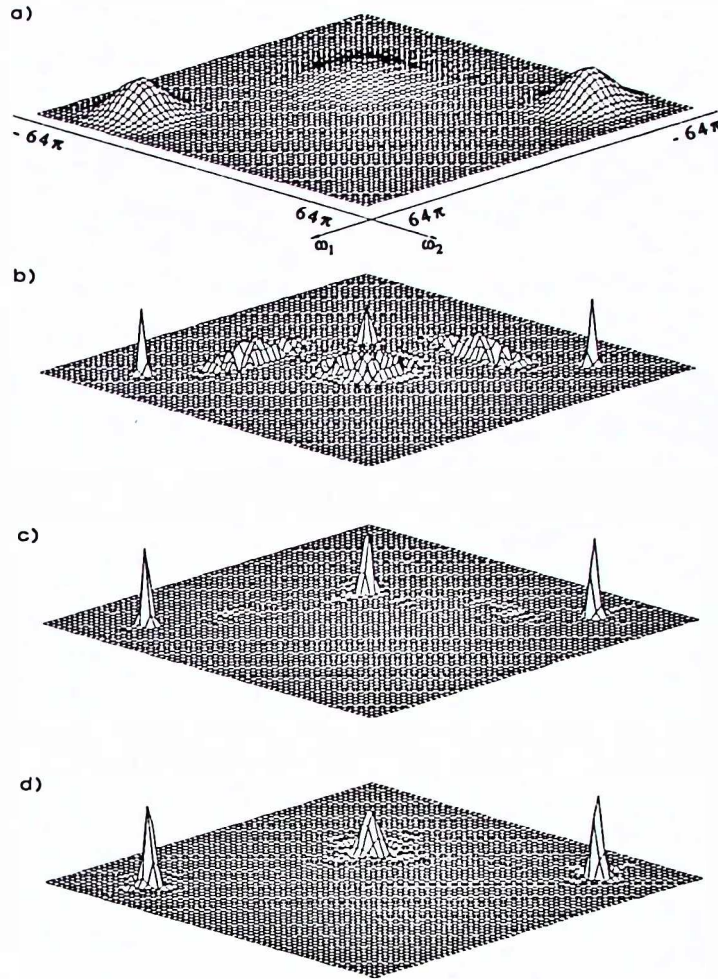
vremena, koristi skala. Na osnovu wavelet transformacije izvedena je klasa affine distribucija, po istoj analogiji, kako se može povezati  $CD$  klasa sa  $STFT$ . U poslednje vrijeme se analiziraju i druge karakteristike signala. Proširenje analize signala po drugim karakteristikama naziva se "*beyond time-frequency*" [102, 103, 105], [154]-[159].

$STFT$  se karakteriše konstantnom vremenskom i frekvencijskom rezolucijom za sve frekvencije. Osnovna ideja kod wavelet transformacije je definisati transformaciju sa promjenljivom rezolucijom u odnosu na frekvenciju. Za niže frekvencije, težnja je postići veću frekvencijsku rezoluciju, i obrnuto. Ovo se postiže upotrebom prozora promjenljive širine, koja se smanjuje sa porastom frekvencije. Wavelet transformacija kontinualnih signala se definiše kao:

$$WT(t, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) h^*(\tau/a) d\tau, \quad (1.141)$$

gdje je  $a$  parametar skalirane frekvencije ( $a = \omega_0/\omega$ ). Uobičajeno je  $h(t)$  vezano sa prozorom kod  $STFT$  kao  $h(t) = w(t)e^{j\omega_0 t}$ , gdje je  $\omega_0$  konstantna frekvencija. Jedna od funkcija koje se često koriste je Morletov (modulisani Gausovski) wavelet  $h(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\alpha t^2} e^{j\omega_0 t}$ , gdje su vrijednosti  $\alpha$  i  $\omega_0$  takve da je odnos  $h(0)$  i prvog maksimuma jednak  $1/2$ , odnosno da je  $\omega_0 = \pi \sqrt{1/(\alpha \ln 2)}$ . Iz definicije  $h(t)$ , očigledno je da malo  $\omega$  (veliko  $\alpha$ ) odgovara širokom waveletu, a važi i obrnuto. Ilustracije radi, posmatran je već korišćeni signal sume dva Dirakova impulsa i dvije kompleksne sinusoide (1.12).





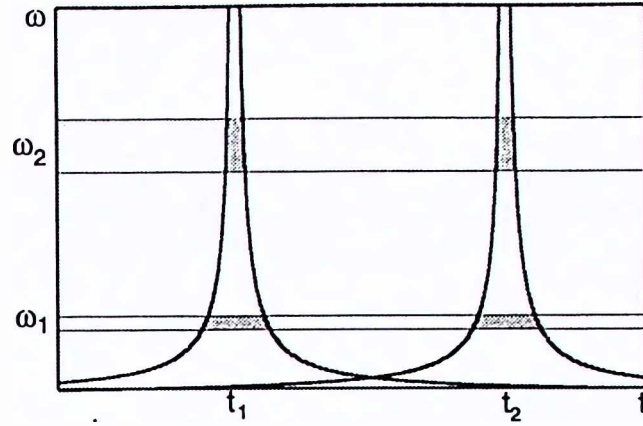
Slika 1.30: Predstavljanje lokalne frekvencije dvodimenzionog signala: a) Spektrogram; b) Wignerova distribucija; c) S-metod  $L_d=2$ ; d) S-metod  $L_d=3$ .

čija je wavelet transformacija jednaka:

$$\begin{aligned}
 WT(a, t) = & \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[ w((t_1 - t)/a) e^{-j\omega_0(t_1 - t)/a} + w((t_2 - t)/a) e^{-j\omega_0(t_2 - t)/a} \right] + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[ e^{j\omega_1 t} W[a(\omega_0/a - \omega_1)] + e^{j\omega_2 t} W[a(\omega_0/a - \omega_2)] \right]. \quad (1.142)
 \end{aligned}$$

Na slici 1.31 prikazana je oblast u kojoj postoji wavelet transformacija signala (1.12). Wavelet transformacija je linearna. Kvadrat amplitude waveleta naziva se skalogram  $SCAL(a, t) = |WT(a, t)|^2$ . Analogno  $CD$  klasi, iz waveleta se može definisati affine klasa distribucija kao:

$$AD(t, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - \tau}{a}, a\theta\right) W D(\tau, \theta) d\tau d\theta, \quad (1.143)$$



Slika 1.31: Ilustracija promjenljive rezolucije za wavelet transformaciju.

gdje je  $\Pi(t, \theta)$  funkcija jezgra. Predstavnik ove klase je wavelet-Wignerova distribucija definisana kao:

$$WWD(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) w(\tau/a) e^{-j\tau\omega_0/a} d\tau. \quad (1.144)$$

Pored affine klase interesantna je i takozvana hiperbolna klasa distribucija. Dvije istorijski veoma značajne distribucije iz ove klase su Altes-Marinovičeva  $Q$ -distribucija:

$$AMD(t, \omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega e^{\beta/2}) X^*(\omega e^{-\beta/2}) e^{-j\omega t \beta} d\beta, \quad (1.145)$$

i Bertrandova unitarna  $P_0$ -distribucija:

$$PBD(t, \omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega G_P(\beta) e^{\beta/2}) X(\omega G_P(\beta) e^{-\beta/2}) G_P(\beta) e^{-j\omega t \beta} d\beta \quad (1.146)$$

gdje je  $G_P(\beta) = (\beta/2) / \sinh(\beta/2)$ .

Hiperbolna klasa kvadratnih  $TF$  distribucija može se definisati kao:

$$HC(t, \omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Gamma_T\left(\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_2}{\omega}\right) e^{j\omega t \ln \frac{\omega_1}{\omega_2}} X(\omega_1) X^*(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \quad (1.147)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T\left(\ln \frac{\omega}{\omega_r} - b, \beta\right) V_X(b, \beta) e^{j\omega t \beta} db d\beta = \quad (1.148)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_T(\zeta, \beta) B_X(\zeta, \beta) e^{j(\omega t \beta - \zeta \ln \frac{\omega}{\omega_r})} d\zeta d\beta, \quad \omega > 0, \quad (1.149)$$

gdje je  $\omega_r > 0$  normalizovana frekvencija. Hiperbolna autokorelacija signala je definisana kao:

$$V_X(b, \beta) = \omega_r e^b X(\omega_r e^{b+\beta/2}) X^*(\omega_r e^{b-\beta/2}), \quad (1.150)$$

dok je hiperbolna  $AF$  data kao:

$$B_X(\zeta, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} V_X(b, \beta) e^{j\zeta b} db = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega e^{\beta/2}) X^*(\omega e^{-\beta/2}) e^{j\zeta \ln \frac{\omega}{\omega_r}} d\omega. \quad (1.151)$$

Funkcije jezgra  $\Gamma_T(b_1, b_2)$ ,  $\Phi_T(b, \beta)$  i  $\Psi_T(\zeta, \beta)$  jedinstveno određuju  $TF$  predstavljanje hiperbolne klase. Jezgra za hiperbolnu klasu su međusobno vezana kao:

$$\Gamma_T(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \Phi_T(-\ln \sqrt{b_1 b_2}, \ln b_1/b_2); \quad \Psi_T(\zeta, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(b, \beta) e^{j\zeta b} db. \quad (1.152)$$

Hiperbolna klasa je klasa svih distribucija koje zadovoljavaju  $TF$  skaliranje  $HC_Y(t, \omega) = HC_X(at, t/a)$ , gdje je  $Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} X(\omega/a)$  i hiperbolni vremenski pomjeraj  $HC_Y(t, \omega) = HC_X(t - c/\omega, \omega)$ , gdje je  $Y(\omega) = e^{-jc \ln(\omega/\omega_r)} X(\omega)$ . Detaljna analiza osobina ove klase, podklasa i veze sa drugim  $TF$  klasama dati su u [102, 103].

Druga složena klasa distribucija, definisana i analizirana u [104] je stepena (*power class*) klasa distribucija. Složenost hardverske realizacije ovih klasa onemogućava proširenje njihove primjene.

Cohen je, u svojim radovima [2, 206, 207], analizirao opštu teoriju predstavljanja signala i združenih predstavljanja signala. Posebno interesantna je analiza energetske gustina jedne i združenih gustina dvije i više promjenljivih. Tako se, za energetske gustinu  $P(a)$ , uvodi karakteristična funkcija definisana kao:

$$M(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha a} P(a) da. \quad (1.153)$$

Inverzna transformacija je:

$$P(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha) e^{-j\alpha a} d\alpha. \quad (1.154)$$

Karakteristična funkcija signala  $x(t)$  je data kao:

$$M(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\alpha A} x(t) dt, \quad (1.155)$$

gdje operator  $A$  zadovoljava sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} e^{j\alpha A} x(t) &= e^{j\alpha A} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) u(a, t) da = \\ &= e^{j\alpha A} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) u(a, t) da = \int_{-\infty}^{\infty} F(a) e^{j\alpha a} u(a, t) da. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Signal  $x(t)$  može se razložiti preko ortogonalne baze funkcija  $u(a, t)$  do funkcije  $F(a)$ , kao:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(a) u(a, t) da. \quad (1.157)$$

Inverzna unitarna transformacija je:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) u^*(a, t) dt. \quad (1.158)$$

Kod unitarnih transformacija važi  $\int_{-\infty}^{\infty} u(a, t) u^*(a', t) da = \delta(a - a')$ .  $FT^*$  i  $FT$ , definisane preko ortogonalnog sistema funkcija  $u(\omega, t) = e^{-j\omega t} / \sqrt{2\pi}$ , su unitarne transformacije. Korišćenjem relacija (1.155)-(1.158), dobija se:

$$M(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(a)|^2 e^{j\alpha a} da, \quad (1.159)$$

odnosno, važi da je gustina energije signala jedne promjenljive definisana kao  $P(a) = |F(a)|^2$ . U specijalnom slučaju vremena, gustina energije signala se svodi na trenutnu snagu signala, a kod frekvencije na spektralnu gustinu snage signala. Za primjer neke druge karakteristike signala može se uvesti inverzna frekvencija  $r = \omega_0/\omega$ . Gustina energije po ovoj karakteristici je  $P(r) = \frac{\omega_0}{r^2} |X(\omega_0/r)|^2$ .

Ovaj koncept se može proširiti na dvije karakteristike signala  $(a, b)$  i uvesti gustina  $P(a, b)$ . Marginalne osobine za ovakve karakteristike su:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(a, b) db = |F(a)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(a, b) da = |F(b)|^2. \quad (1.160)$$

U ovom slučaju, uvodi se Fourierova transformaciona veza izmedju  $2D$  karakteristične funkcije i  $2D$  gustine promjenljive kao:

$$M(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha a + j\beta b} P(a, b) da db; \quad (1.161)$$

$$P(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha, \beta) e^{-j\alpha a - j\beta b} d\alpha d\beta. \quad (1.162)$$

Uvodeći metod funkcije jezgra, Cohen je definisao opštu klasu  $2D$  distribucija proizvoljnih varijabli kao:

$$P(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\theta, \tau) x^*(t) M(\theta, \tau) x(t) e^{-j\theta a - j\tau b} d\theta d\tau, \quad (1.163)$$

gdje važi operatorska relacija  $M(\theta, \tau)x(t) = e^{j\theta A + j\tau B}x(t)$ . Operatori  $A$  i  $B$  zavise od primjenjene karakteristike signala. Npr., za vrijeme operator je jednak  $t$ , za frekvenciju  $\frac{1}{j} \frac{d}{dt}$ , operator inverzne frekvencije je  $FT$  funkcije  $\omega_0/\omega$ , dok je za skalu  $\frac{1}{2j} (t \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt} t)$ . O operatorskoj algebri, koja je neophodna za ova kompleksna istraživanja, može se više naći u [209]. Cohen je, u svojim radovima, veliku pažnju poklonio analizi složenih klasa distribucija. Tako je izveo klasu vremenski-inverzno frekvencijskih distribucija:

$$P(t, r) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\omega_0}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\theta t - j\tau \omega_0/r + j\theta u} c(\theta, \tau) x^*(u - \tau/2) x(u + \tau/2) du d\tau d\theta = \quad (1.164)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\omega_0}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\theta t - j\tau \omega_0/r + j\tau u} c(\theta, \tau) X^*(u + \theta/2) X(u - \theta/2) du d\tau d\theta. \quad (1.165)$$

Karakteristiku skale, u skladu sa Melinovom transformacijom, definisao je preko seta ortogonalnih funkcija  $u(c, t) = e^{jc \ln t} / (\sqrt{2\pi t})$ ,  $t \geq 0$ . Ovo je poslužilo definisanju opšte klase vremensko-skaliranih distribucija:

$$P(t, c) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(e^{-\sigma/2} u) e^{-j\theta t - j\sigma c + j\theta u} c(\theta, \sigma) x(e^{\sigma/2} u) d\theta d\sigma d\sigma. \quad (1.166)$$

Korak dalje je bilo definisanje združenog predstavljanja vremena, frekvencije i skale kao:

$$P(t, \omega, c) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\theta, \tau, \sigma) e^{-j\theta t - j\tau \omega - j\sigma c} d\theta d\sigma d\tau, \quad (1.167)$$

gdje je  $M(\theta, \tau, \sigma)$  karakteristična funkcija. Distribucija vremena-frekvencije-skale zadovoljava sljedeće marginalne osobine:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega, c) dc &= P(t, \omega), \quad \int_0^{\infty} P(t, \omega, c) dt = P(\omega, c), \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega, c) d\omega &= P(t, c). \end{aligned} \quad (1.168)$$

Cohenove generalizacije, kao i u slučaju klase  $TF$  invarijantnih distribucija, izvedene su na bazi funkcije jezgra. Ovaj pristup je djelimično problematičan sa stanovišta nejedinstvenosti karakteristične funkcije i nepostojanja direktne veze distribucija sa različitim funkcijama jezgra. Brojni autori analizirali su rješenja koja prevazilaze probleme koji postoje kod koncepta funkcije jezgra. Međutim, može se konstatovati da neka ograničenja ovih koncepata prevazilaze problem karakteristične funkcije.

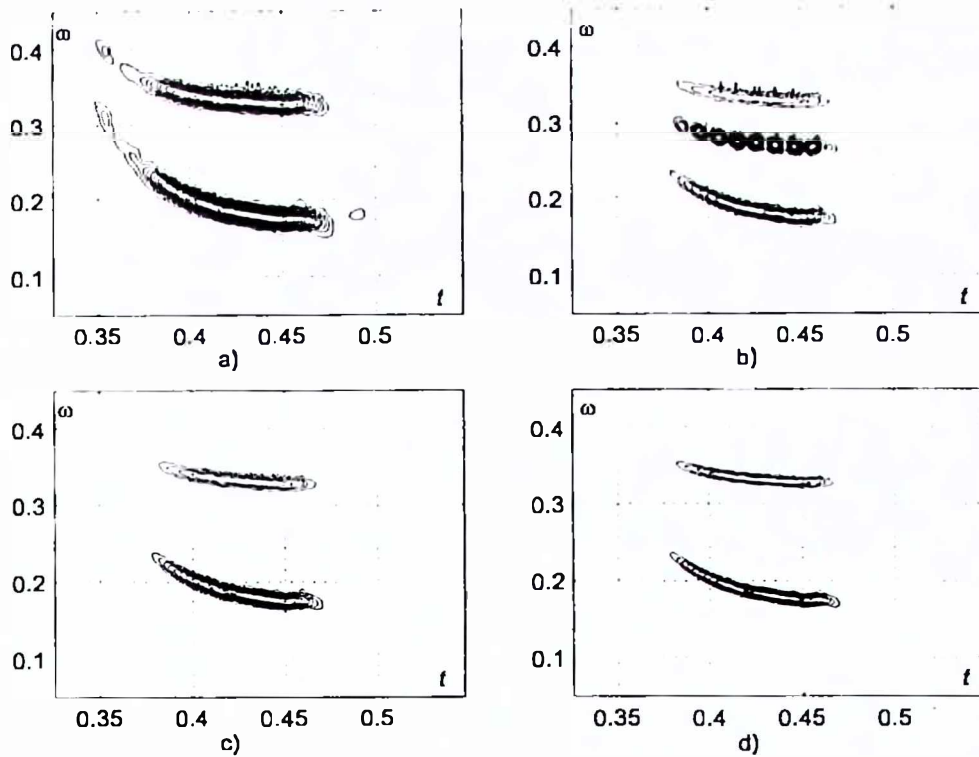
Medju rješenjima, koja treba pomenuti, su i *chirpleti* [133, 210]. Ova transformacija nastala je još 1820. godine u optici, i bliska je idejama transformacija koordinata Wignerove distribucije. U obradi signala, fizičku interpretaciju su dali Mann i Haykin, dok je kasnije ova transformacija dobila i svoje odgovarajuće tumačenje u obliku  $WD$ . Ideja je da se pored vremena i frekvencije signalu dodijeli još jedna koordinata (uslovno se može nazvati skalom), koja će jasnije determinisati moguće položaje signala u  $(t, \omega)$  prostoru.

Najnoviji napori se ulažu da se pojednostavi računanje pojedinih složenih distribucija. Posebno se izdvaja računanje pseudo affine  $WD$  bez kros-članova, definisane kao [105]:

$$PAWD^{(k)}(t, \omega) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda_k(u)\omega) X^*(\lambda_k(-u)\omega) e^{j\omega \xi_k(u)} \mu_k(u) du, \quad f > 0, \quad (1.169)$$

gdje je  $\lambda_k(u) = (k(e^{-u} - 1)/(e^{-ku} - 1))^{1/(k-1)}$ ,  $k \neq 0, 1$ ,  $\xi_k(u) = \lambda_k(u) - \lambda_k(-u)$ , dok je  $\mu_k(u)$  proizvoljna pozitivna funkcija. U graničnim slučajevima, važi  $\lambda_0(k) = \frac{u}{1 - e^{-u}}$ ,  $\lambda_1(k) = \exp(1 + \frac{ue^{-u}}{e^{-u} - 1})$ . Specijalni slučajevi opšte distribucije (1.169) su  $k = 2$  -  $WD$ ,  $k = 1/2$  -  $D$  distribucija,  $k = 0$  - Bertandova distribucija,  $k = -1$  - Unterbregerova distribucija,  $k = \pm\infty$  - Margenau-Hill distribucija. Cilj, koji su Goncvaes





Slika 1.32: Signal zvuka slijepog miša: a) Scalogram; b) Pseudo affine WD; c) Zaobljena pseudo affine WD; d) Pseudo Bertrandova distribucija.

i Baraniuk, postavili je svodjenje (1.169) na proračun wavelet transformacije, koju je, na osnovu odgovarajućih algoritama, moguće efikasno računati. Izraz (1.169) se može zapisati kao:

$$PAWD^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_k(u)}{\sqrt{\lambda_k(u)\lambda_k(-u)}} D_x(t, \lambda_k(u)\omega) D_x^*(t, \lambda_k(-u)\omega) du. \quad (1.170)$$

Analogno, kao kod *SM*, izbjegavanje kros-članova se postiže kao:

$$PAWD^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \frac{\mu_k(u)}{\sqrt{\lambda_k(u)\lambda_k(-u)}} D_x(t, \lambda_k(u)\omega) D_x^*(t, \lambda_k(-u)\omega) du. \quad (1.171)$$

Na slici 1.32 prikazani su: scalogram, pseudo affine *WD*, zaobljena pseudo affine *WD* i pseudo Bertrandova distribucija signala koji ispušta slijepi miš.



## **GLAVA II**

---

## 2. SOFTVERSKI I HARDVERSKI SISTEMI ZA VREMENSKO-FREKVENCIJSKU ANALIZU

U okviru ovoga poglavlja, biće opisani principi konstruisanja softverskih i hardverskih sistema za  $TF$  analizu. Više naučno-istraživačkih timova prezentiralo je svoje rezultate kreirajući softverske pakete za realizaciju  $TF$  distribucija. Posebno interesantna rješenja su virtuelni instrumenti ( $VI$ ). Takodje, postoji i više prezentiranih hardverskih rješenja.

U okviru *odjeljka 2.1* biće razmatrani neki od programa koji se koriste u  $TF$  analizi. Primjena  $VI$  u  $TF$  analizi razmatrana je u *odjeljku 2.2*. Posebno je opisan originalno razvijeni  $VI$  sa opisom rada i analizom performansi. Postojeća hardverska rješenja su opisana u *odjeljku 2.3*. Projektovanje hardverskog sistema, koje se može realizovati u ASIC tehnologiji, za  $S/S - F$  analizu signala dato je u okviru *odjeljka 2.4*.

### 2.1 Softver za vremensko-frekvencijsku analizu

Najpoznatiji zaokruženi softverski sistem za  $TF$  analizu kreirali su CNRS (Francuska) i Univerzitet Rice (Texas, USA). Realizovan je za MATLAB kao poseban toolbox [211]. Ovim softverom se realizuju  $SPEC$  i Gaborova transformacija, distribucije  $CD$  klase, te pojedine distribucije vremenski-skalirane i hiperbolne klase. U okviru paketa realizovane su brojne prozorske funkcije i najčešće korišćeni oblici  $FM$  signala. Realizacija distribucija  $CD$  klase je zasnovana na dekompoziciji funkcije jezgra. Paket posjeduje mogućnost računanja modifikovanih - reassignment distribucija. Osnovu paketa čine funkcije (m-fajlovi) otvorene strukture, dok je za podešavanje grafičkog prikaza kreiran odgovarajući interfejs za interaktivni rad. U *Tabeli 6* u Prilogu dat je pregled funkcija ovog sistema.

Drugi toolbox za vremensko-frekvencijsku analizu, koji se često koristi, kreiran je na Queensland University, Australija, pod rukovodstvom Dr. B. Boashasha. Obuhvata distribucije koje je realizovala ova istraživačka grupa, a prije svega polinomijalnu Wigner-Villeovu distribuciju. Treći paket za  $TF$  analizu originalno je kreiran na Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici. Razvijen je u MATLAB-u 386 sa interaktivnim di-

jelom za specificiranje distribucije i signala realizovanim u C-jeziku [189, 191, 212, 213]. Nosi naziv *Softverski paket za realizaciju distribucija* (SPZRD), i u mogućnosti je da realizuje distribucije  $CD$  klase, prikaže funkciju jezgra u svim domenima,  $AF$ ,  $STFT$ , kao i neke od distribucija višeg reda. Paket može da radi za signale zadate analitički, i za diskretne signale u obliku odbiraka.

## 2.2 Virtuelni instrumenti za vremensko-frekvencijsku analizu

Razvoj virtuelnih (softverskih) instrumenata ( $VI$ ), u posljednje vrijeme, izaziva veliko interesovanje naučne javnosti. To je i logično, s obzirom da je izazovno iskoristiti velike memorijske kapacitete i mogućnosti obrade podataka, koje pružaju, danas vrlo prisutni PC računari za potrebe kompleksnih mjerenja. U ovom smislu, za kreiranje  $VI$  razvijen je i posebni programski paket firma *National Instruments - Lab View* [214]. Koncept virtuelne instrumentacije pomjera kreiranje mjernih instrumenata iz velikih laboratorija na radne stolove brojnih istraživača. Razvoj  $VI$  omogućava uključivanje novih saznanja znatno brže nego što je to slučaj kod klasičnih instrumenata. Ovaj odnos je danas  $1 \div 2$  godine za  $VI$  do  $5 \div 10$  godina za klasične instrumente.  $VI$  se odlikuju modularnošću, niskom cijenom (jedan računar može biti istovremeno ili povremeno nekoliko mjernih instrumenata) i jednostavnošću prepravki i prilagođavanja. Na slici 2.1, šematski su prikazane prednosti  $VI$ . Posebna primjena  $VI$  u  $TF$  analizi je u estimaciji parametara signala: amplitude i  $IF$ . Postoje dva rješenja u ovoj oblasti. Oba su kreirana u *Lab View*-u. Prvi je kreirao *National Instruments*, a drugi je realizovao naučno-istraživački tim Univerziteta u Bariju [54, 214]. Mana oba postojeća rješenja je nemogućnost primjene nekih od savremenih metoda u ovoj oblasti. Takodje, ovi instrumenti nijesu prilagođeni analizi multikomponentnih signala. U okviru instrumenta realizovane su samo  $WD$  [54] i Gaborov spektrogram [214], što se ne može smatrati dovoljnim za kvalitetnu estimaciju brojnih tipova signala koji se javljaju u praksi.

### 2.2.1 Implementacija instrumenta

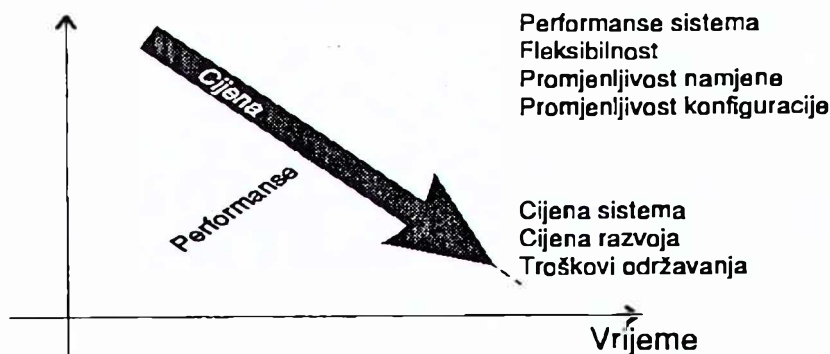
$VI$ , kreiran na ETF-u u Podgorici, baziran je na postojećim  $VI$  u ovoj oblasti [54, 214], a omogućava proširenje primjene uz određena poboljšanja. Proširenje i poboljšanje se prije svega ogleda u mogućnosti realizacije  $SM$ , sa konstantnim i signal adaptivnim prozorom, i, iz njega, izvedenih distribucija višeg reda. Paket je realizovan u *Matlab*-u 4.2 [215]-[219]. Može biti implementiran kako za analogne signale zadate funkcionalnom zavisnošću, tako i za diskretne signale zadate u vidu odbiraka (koji se smještaju u datoteku na disku). Instrument, za zadati signal, prvo traži  $STFT$  sa odgovarajućim

prozorom kao osnovu za računanje  $SM$ . Računanje ove transformacije postiže se  $FFT$  algoritmima uz mogućnost korišćenja rekurzivnih relacija. Proračun  $SM$  sa konstantnom širinom  $(2L_d + 1)$  konvolucionog prozora  $\Pi(\theta)$  obavlja se sabiranjem vrijednosti  $SPEC$  sa  $L_d$  konvolucionih članova. U slučaju da se uvrsti  $L_d = 0$ , dobija se  $SPEC$ , dok se za,  $L_d \geq N/2$ , dobija pseudo  $WD$ . Zbog jednostavnosti, ostavljena je mogućnost da se pseudo  $WD$  računa definiciono implementacijom odgovarajućeg  $FFT$  algoritma na lokalnu autokorelaciju signala. Za proračun  $WD$ , signal je neophodno preodabrati.  $L - WD$  2-reda se realizuje kao autokorelacija  $SM$ , dok se  $L - WD$  četvrog reda realizuje kao autokorelacija  $L - WD$  drugog reda. Ujedno, moguća je realizacija signal adaptivnih pseudo kvantnih distribucija (S-distribucija) u skladu sa algoritmima opisanim u prvom poglavlju.

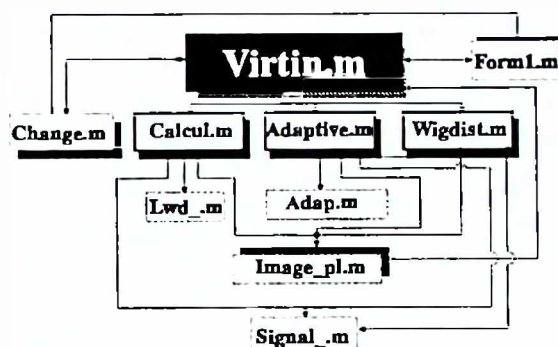
## 2.2.2 Softverska implementacija i rad sa instrumentom

Programski paket, kojim je instrument realizovan, sastoji se od niza script i funkcijskih fajlova. Osnovni program, koji definiše panel instrumenta, početne vrijednosti za distribuciju i signal, kao i pozive na odgovarajuće programe za izračunavanje distribucija, je `virtin.m`. Iz njega se vrši pozivanje programa za računanje adaptivnih distribucija (`adaptive.m`),  $L - WD$  autokorelacionim metodama, na osnovu  $STFT$  (`calcul.m`) i  $WD$  (`wigdist.m`). Da bi se ovi programi pojednostavili, `adaptive.m` poziva funkciju `adap.m`, a `calcul.m` poziva funkciju `lwd.m`. Ove dvije funkcije mogu se koristiti nezavisno od paketa. Opšti princip u programu je uočiti koliku je promjenu parametara korisnik zadao i zahtijevano izvršiti sa najmanjim brojem kalkulacija. Npr., ako je povećana konvoluciona širina prozora, dodaju se samo oni članovi koji nijesu inicijalno bili sračunati, a ako se promjene odnose na grafički prikaz, vrši se samo novo prikazivanje, bez nepotrebnog proračuna. Pomoćni program `change.m` uveden je za određivanje broja odbiraka signala, koji se nalaze u fajlovima (ako je odabrana ova opcija). Pored toga ovaj fajl ima i dodatnu, kontrolnu, namjenu za slučaj promjene izabranog tipa signala. Grafički prikaz obavlja program `image_pl.m`. Ovaj program se, sa neznatnim izmjenama, može koristiti uvijek kada se od programa zahtijeva da, po želji korisnika, vrši grafičko prikazivanje. Fajl `form1.m` definiše pomoćni prozor za preciziranje signala i grafičkog prikaza. Fajl `signal.m` definiše predefinisane funkcionalne zavisnosti koje su date u Tabeli 7 u Prilogu. To su: suma chirp impulsa, linearni  $FM$  signal, sinusoidalni  $FM$  signal i kombinacije ovih signala, kao i neki signali koji su, u vidu primjera, demonstrirani u radu. Naravno, može se izabrati proizvoljna funkcijska zavisnost. Na slici 2.2 prikazana je veza izmedju pojedinih programa kojima je realizovan instrument.

U gornjem lijevom uglu panela instrumenta nalaze se mogućnosti izbora distribucije: No -  $SM$  sa konstantnom konvolucionom širinom prozora i, iz njega, izvedene  $L - WD$ ,



Slika 2.1: Prednosti virtuelnih instrumenata.



Slika 2.2: Veze izmedju pojedinih fajlova koji čine instrument.

Yes - signal adaptivni *SM* i, iz njega, izvedene *SD*, *WD* - definicioni proračun *WD*. Na desnoj strani instrumenta nalazi se izbor parametara signala, distribucije i izbor grafičkog prikaza u odjeljcima srodnih opcija. U gornjem desnom uglu vrši se izbor tipa prozora i parametara koji se odnose na prozor (širina prozora i broj odbiraka u okviru prozora). Moguće je izabrati neke od najčešće korištenih prozorskih funkcija: Hannovu, Hammingovu, pravougaonu, itd. Vrsta i parametri signala podešavaju se u drugom bloku. Pored broja odbiraka i trajanja signala, specificira se i da li je signal zadat funkcijom (*function*) ili odbircima u fajlu na disku (*file*). U slučaju dodavanja odgovarajućeg hardvera (A/D konvertora), moguće bi bilo vršiti obradu signala koji se preuzimaju sa porta računara. Preciziranje signala se obavlja u meniju *InputFile*. Moguće je izbor proizvoljne funkcije ili fajla. Ujedno, u okviru ovog menija, može se editovati fajl *signal.m*. Sadržajem prve dvije sekcije određena je *STFT* signala. Treća sekcija kontrolnog dijela panela instrumenta se mijenja u zavisnosti od metoda koji je izabran. U slučaju signal nezavisnih algoritama, može se izabrati širina konvolucionog

prozora  $L_d$ , dok se kod signal adaptivnih algoritma bira adaptivni nivo  $Q$ . Četvrti blok daje mogućnost izbora reda  $L-WD$  ( $L = 1, 2, 4$ ), dok je kod  $SD$  uvrštena i mogućnost  $L = 8$ . Kod ovih distribucija, mogu se uzimati i veće vrijednosti  $L$ , jer se povećanje  $L$  ne odražava na zadovoljavanje marginalnih osobina. Peti box služi za izbor grafičkog prikaza. Mogući izbori su: kolorne mape (*colormap* i *colorflat*), mrežaste površi (*mesh* i *waterfall*) i izo-linije (*contour*). Poslednji blok predstavljaju opcije: *Start* -početak izračunavanja, *Save* - služi za snimanje promjenljivih koje su trenutno u memoriji u privremenu datoteku na disku, *Sound* - na aktivni zvučnik računara pušta signal sa kojim se radi, *Help* - daje uputstva o korišćenju programa, *Close* - zatvara program, dok *Print* - šalje u Clipboard izgled panela instrumenta. U meniju *Options* podešavaju se opcije za rad: prikazivanje samo pozitivnih frekvencija, izbor koraka po vremenu, podešavanje kolorne mape za grafičke prikaze, uglovi pod kojima su prikazani podaci, ako je izabran prikaz u obliku mrežastih površi, broj izo-linija za konturne crteže, moguće prikazivanje signala i  $FT$  signala.

### 2.2.3 Primjeri

**Primjer 1** (Sonarni signal). Na slici 2.3 prikazan je sonarni signal  $x(t)$  sa dodatom vremenski-pomjerenom verzijom  $x(t - T)$ . *SPEC* sa normalizovanom vremenskom osom prikazan je na slici 2.3a, dok je *SM* sa konstantnom širinom konvolucionog prozora prikazan na slici 2.3b. Povećanjem  $L_d$  od 0 (*SPEC*) do  $L_d = 6$ , uz zadržavanje svih ostalih parametara nepromijenjenih, značajno se popravljja koncentracija distribucije, bez pojave kros članova.

**Primjer 2** (Numerički primjer). Dat je multikomponentni signal:

$$x(t) = e^{-j24\pi t^2} + e^{-j16\cos(2\pi t) - j24\pi(t+1.5)^2 - j64\pi t} + e^{j16\cos(2\pi t) - j24\pi(t+1.5)^2 + j64\pi t} \quad (2.1)$$

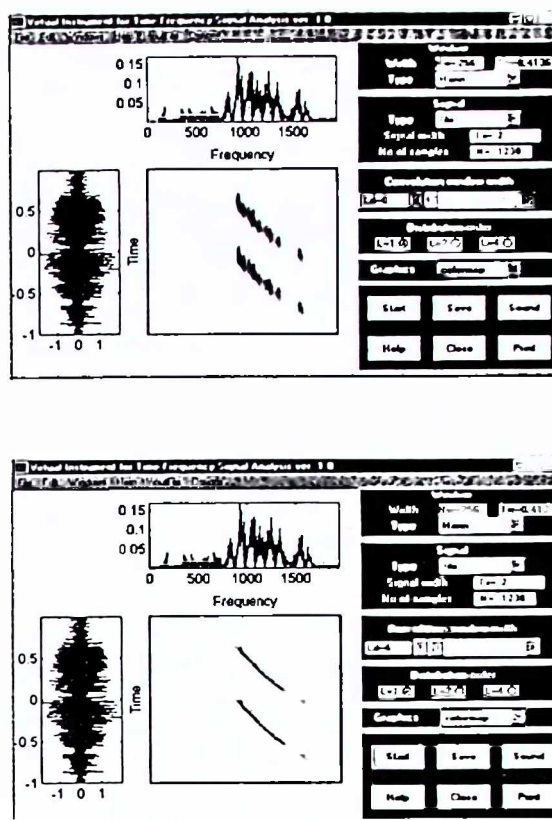
*SPEC* za ovaj signal prikazan je na slici 2.4a. Može se uočiti da: 1) Sve komponentne distribucije su raširene po  $TF$  ravni, 2) Kros-članovi ne postoje. Kod *WD* (slika 2.4b) sve komponente su visokokoncentrisane, ali su kros-članovi veoma izraženi (čak "maskiraju" komponentu u sredini). *SM* (slika 2.4c) produkuje visoku koncentraciju bez kros-članova. Distribucija četvrtog reda ( $L = 2, L_d = 0$ ) prikazana je na slici 2.4d.

**Primjer 3** (Signal vibracija motora). Signal vibracija motora mjeran na 2000 [obr/min] prikazan je na slici 2.5. Kako signal posjeduje značajnu niskopropusnu komponentu, koja nije interesantna za analizu, to je ona filtrirana visokopropusnim filtrom. *SPEC* i *SM* za  $L_d = 3$  prikazani su na slici 2.6. Analiza  $IF$  i amplitude za ovakve signale je veoma značajna za detekciju udara sagorijevanja, čije učestano pojavljivanje može čak i da uništi motor [30].

**Primjer 4** (Numerički primjer). Posmatra se realni signal:

$$x(t) = e^{-2t^2} \cos(25\pi t) + \cos(120t^3 + 45\pi t) + 1.5e^{-25t^2} \cos(40\pi t^2 + 150\pi t). \quad (2.2)$$



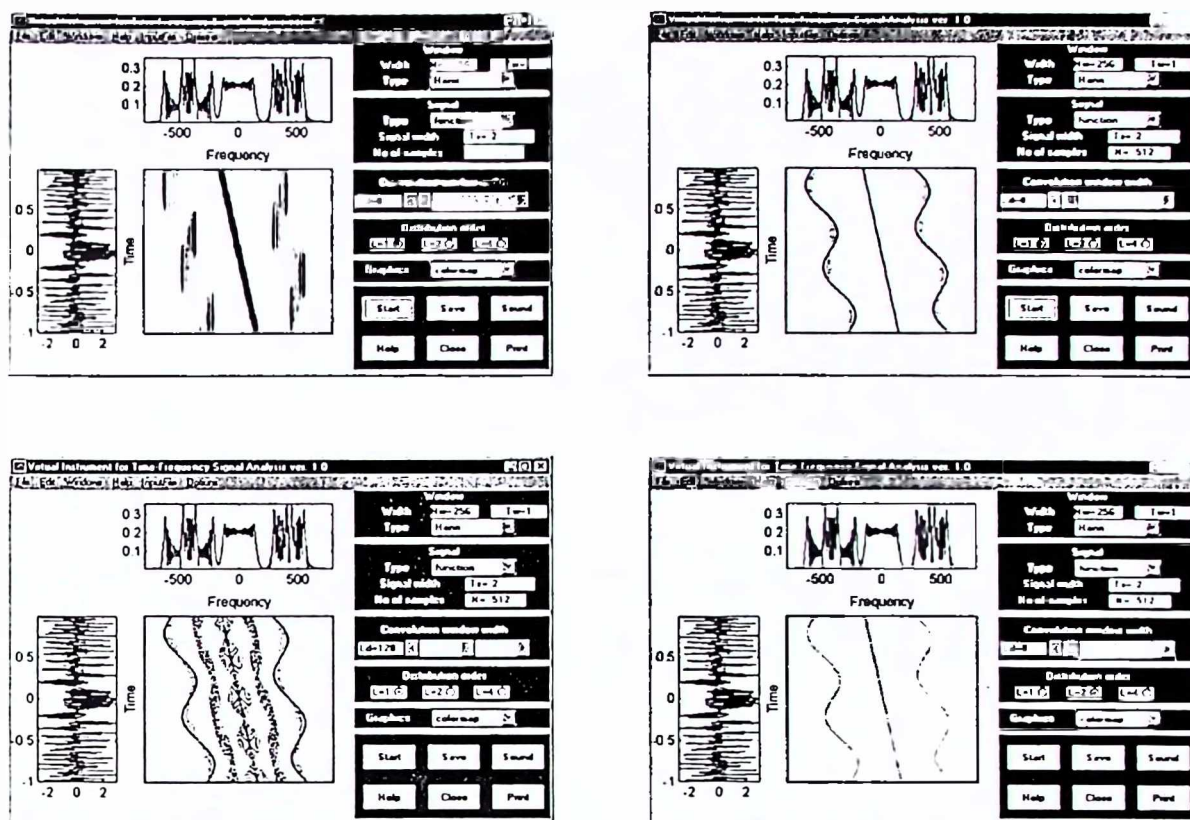


Slika 2.3: Sonarni signal: a) Spektrogram; b) S-metod.

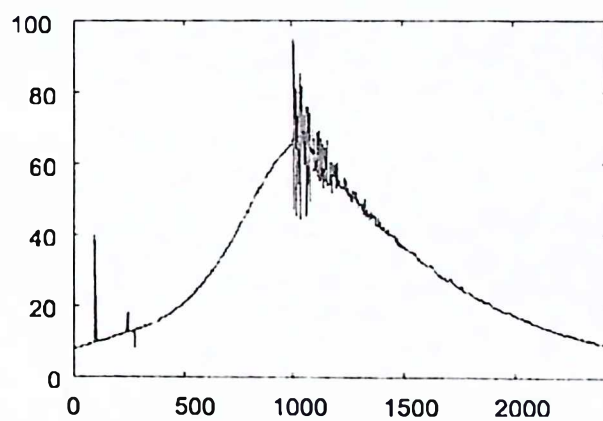
Na slici 2.7 prikazane su  $WD$ ,  $SM$  sa konstantnom i adaptivnom širinom prozora i  $SD$  višeg reda.

## 2.2.4 Analiza performansi sistema

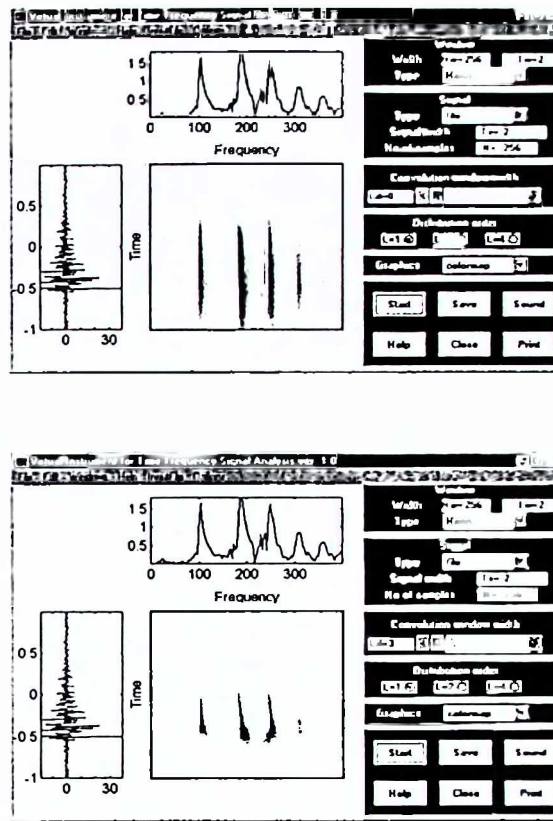
Performanse sistema predstavljaju performanse primijenjenih  $TF$  transformacija. Dvije najčešće primjene  $TF$  metoda su estimacija amplitude i  $IF$ . Uzroci grešaka u estimaciji ovih parametara su: ulazni šum, uključujući grešku kvantizacije A/D konvertora, bias usljed ulaznog šuma, greške u procjeni amplitude usljed efekata "curenja spektra" (*leakage effects*), kvantizaciona greška usljed diskretizacije po frekvenciji, međusobni uticaj komponentni u slučaju multikomponentnih signala, i uticaj pojave kros-članova. U sklopu ove tačke, biće izvedeni izrazi za bias i varijansu estimacije amplitude i  $IF$  pomoću  $TF$  transformacija. Biće razmatran i uticaj kros-članova na estimaciju parametara kod multikomponentnih signala. Ujedno, biće analizirani numerički zahtjevi pojedinih transformacija, kao i konvergencija auto-članu  $SM$  ka auto-članu  $WD$ .



Slika 2.4: Suma dva sinusoidalna i linearnog frekvencijski modulisanog signala: a) Spektrogram; b) Wignerova distribucija; c) S-metod; d) L-Wignerova distribucija.



Slika 2.5: Signal vibracija automobilskeg motora u uslovima pojave udara sagorijevanja.



Slika 2.6: Signal vibracija automobilskeg motora: a) Spektrogram; b) S-metod.

#### 2.2.4.1 Estimacija trenutne frekvencije

Analiza će biti obavljena na primjeru  $WD$ .  $IF$  se, pomoću  $WD$ , može procijeniti kao [42, 60, 220]:

$$\hat{\omega}(n) = k_m(n)\Delta\omega = \pi k_m(n)/T_w; \quad k_m(n) = \arg \left\{ \max_k \{WD(n, k)\} \right\}. \quad (2.3)$$

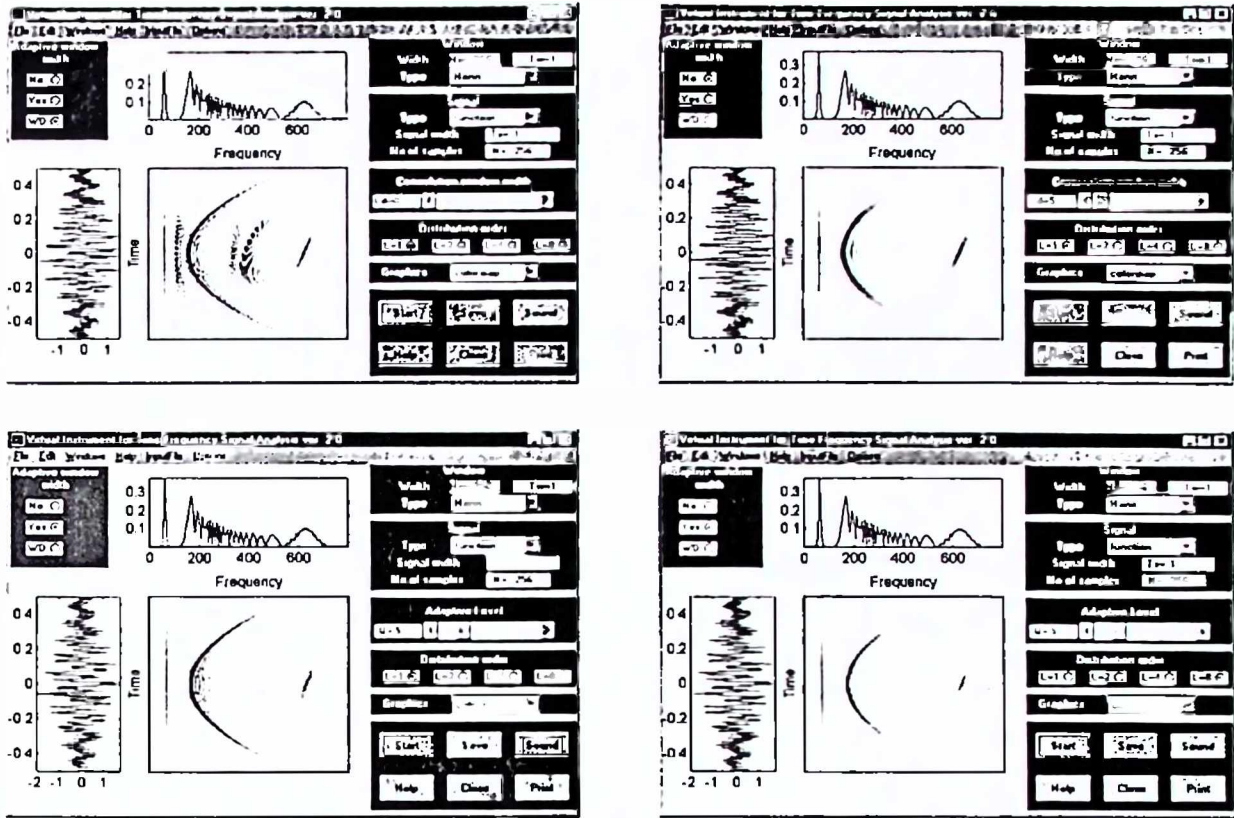
Važno je napomenuti da ovo nije jedini mogući način tretiranja trenutne frekvencije. O ovom i drugim pristupima može se više naći u radovima [50, 51], [221]-[223].  $WD$  je u diskretnoj formi data kao:

$$WD_h(t, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT)x(t+nT)x^*(t-nT)e^{-j2nT\omega}, \quad (2.4)$$

Neka je dat signal zahvaćen sa  $CGWN$ :

$$x(t) = f(t) + \nu(t) = Ae^{j\varphi(t)} + \nu(t). \quad (2.5)$$

Aditivni šum ima varijansu  $\sigma_\nu^2$ .  $IF$  je jednaka prvom izvodu faze  $\omega(t) = \varphi'(t)$ . Prozor  $w_h(nT) = \frac{T}{h}w(nT/h)$  je konačne širine  $h$ , gdje je  $T$  korak odabiranja. Funkcija prozora



Slika 2.7: Signal sume sinusoidalnog, kratkotrajnog linearnog FM signala i signala sa kvadratnom frekvencijom: a) WD; b) SM; c) SD  $L=2$ ; d) SD  $L=8$ .

je parno simetrična  $w(t) = w(-t)$  i ograničenog trajanja  $w(t) = 0$  za  $|t| > 1/2$ . Greška  $I/F$  estimacije je:

$$\Delta \hat{\omega}_h(t) = \omega(t) - \hat{\omega}_h(t). \quad (2.6)$$

Da bi se linearizovala greška estimacije potrebno je odrediti prvi izvod  $WD$ :

$$\frac{\partial WD_h(t, \omega)}{\partial \omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) x(t + nT) x^*(t - nT) (-j2nT) e^{-j2nT\omega}. \quad (2.7)$$

Kako je:

$$x(t + nT) x^*(t - nT) = f(t + nT) f^*(t - nT) + f(t + nT) \nu^*(t - nT) + \nu(t + nT) f^*(t - nT) + \nu(t + nT) \nu^*(t - nT), \quad (2.8)$$

član koji predstavlja korisnu komponentnu je:

$$f(t + nT) f^*(t - nT) = |A|^2 e^{j(\varphi'(t)2nT + \Delta\varphi(t, nT))}. \quad (2.9)$$



Izraz u eksponentu je dobijen razvijanjem  $\varphi(t + nT)$  i  $\varphi(t - nT)$  u Taylorov red u okolini tačke  $t$ . Greška usljed nelinearnosti  $IF$  može se izraziti kao:

$$\Delta\varphi(t, nT) = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \omega^{(2s)}(t) \frac{(nT)^{2s+1}}{(2s+1)!} \quad (2.10)$$

$$\text{ili } \Delta\varphi(t, nT) = \frac{(nT)^3}{3!} [\omega^{(2)}(t + \tau_1) + \omega^{(2)}(t - \tau_2)], \quad (2.11)$$

gdje je  $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq nT$ . Greške u sistemu se mogu razdvojiti na: 1) Grešku usljed  $\Delta\hat{\omega}_h(t)$ ; 2) Rezidualnu grešku usljed nelinearnosti faze; 3) Grešku usljed šuma. Po-drazumijevajući da su ostale greške u sistemu male, dobija se:

$$\frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 + \frac{\partial^2 W D_h(t, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_0 \Delta\omega + \frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\Delta\omega} + \frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\nu} = 0, \quad (2.12)$$

gdje za parnu prozorsku funkciju važi :

$$\frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 = |A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) (-j2nT) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 W D_h(t, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_0 = -|A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) (2nT)^2 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\Delta\omega} = |A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) \Delta\varphi(t, nT) (2nT) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\nu} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) [f(t + nT) \nu^*(t - nT) + \\ & + \nu(t + nT) f^*(t - nT) + \nu(t + nT) \nu^*(t - nT)] (-j2nT) e^{-j2nT\omega}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Iz izraza (2.12)-(2.16) slijedi:

$$\Delta\hat{\omega}_h(t) = \frac{1}{2F_h} \left( L_h(t) + \frac{\Xi_h}{|A|^2} \right), \quad (2.17)$$

gdje su:

$$F_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) (nT)^2; \quad (2.18)$$

$$L_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) \Delta\varphi(t, nT) nT; \quad (2.19)$$

$$\Xi_h = \frac{1}{2} \frac{\partial W D_h(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_0 \delta_{\nu}. \quad (2.20)$$

Za Gausov bijeli šum važi  $E\{\Xi_h\} = 0$ , pa je srednja vrijednost estimacione greške jednaka:

$$E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{L_h(t)}{2F_h}. \quad (2.21)$$

Varijansa  $IF'$  estimacije je jednaka:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{1}{4F_h^2|A|^4} E\{\Xi_h^2\} = \frac{\sigma_v^2}{2|A|^2} \left(1 + \frac{\sigma_v^2}{2|A|^2}\right) \frac{L_h}{F_h^2}. \quad (2.22)$$

Pod pretpostavkom da  $h \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow 0$  i  $h/T \rightarrow \infty$ , dobija se da je:

$$F_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT)(nT)^2 \rightarrow h^2 E; \quad E_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h^2(nT)(nT)^2 \rightarrow hTE, \quad (2.23)$$

gdje su  $F$  i  $E$  konstante koje zavise od primijenjenog prozora:

$$F = \int_{-1/2}^{1/2} w(t)t^2 dt; \quad E = \int_{-1/2}^{1/2} w^2(t)t^2 dt. \quad (2.24)$$

Vrijednost  $L_h(t)$  koja utiče na bias  $IF'$  estimacije može se izraziti kao:

$$L_h(t) = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2s+1)}(t)}{(2s+1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT)(nT)^{2s+2} = \sum_{s=1}^{\infty} B_h(s) \varphi^{(2s+1)}(t), \quad (2.25)$$

gdje je  $B_h(s) = \frac{2}{(2s+1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT)(nT)^{2s+2}$ . Procjena  $L_h(t)$  može se obaviti kao [58, 60]:

$$L_h(t) \leq \frac{M_2}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT)(nT)^4 = M_2 |B_h(1)|; \quad \sup_t |\omega^{(2)}(t)| = M_2. \quad (2.26)$$

Za  $h \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow 0$ ,  $h/T \rightarrow \infty$ :  $B_h(s) \rightarrow 2F b_s h^{2s+2}$ , gdje je

$$b_s = \frac{1}{(2s+1)!F} \int_{-1/2}^{1/2} w(t)t^{-s+2} dt. \quad (2.27)$$

Primjenom relacija (2.21), (2.23), (2.26), dobija se:

$$E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \sum_{s=1}^{\infty} h^{2s} b_s \omega^{(2s)}(t), \quad (2.28)$$

odnosno:

$$|E\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\}| \leq h^2 |b_1| M_2. \quad (2.29)$$

Kod pravougaonog prozora, izraz za varijansu  $IF'$  estimacije svodi se na:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_h(t)\} = \frac{6\sigma_v^2}{|A|^2} \left(1 + \frac{\sigma_v^2}{2|A|^2}\right) \frac{T}{h^3}, \quad (2.30)$$

dok je bias jednak:

$$\text{bias}(t, h) = \frac{1}{40} h^2 \omega^{(2)}(t), \quad (2.31)$$

jer je  $b_1 = 1/40$ .

Zaključuje se da bias  $IF'$  estimacije zavisi od drugog izvoda  $IF'$ , dok se varijansa sastoji od dvije komponente od kojih je jedna posljedica šuma, a druga posljedica



medjusobnog djelovanja šuma i signala. Slični rezultati su izvedeni i u analizama vezanim za uticaj šuma na distribucije  $CD$  klase [224]-[236]. Povećanjem širine prozora smanjuje se varijansa, dok za bias važi suprotno. Ovo ukazuje na mogući kompromisni izbor širine prozora za estimaciju  $IF$  pomoću  $WD$ .

Varijansa  $IF$  estimacije pomoću  $SPEC$  jednaka je [62]:

$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}_n(l)\} = \frac{6\sigma_v^2 T}{|A|^2 h^3}. \quad (2.32)$$

Bias formalno ima isti analitički oblik kao bias  $WD$ , s tim što zavisi od prvog izvoda  $IF$  [59]. Tako na primjer, kod linearnog  $FM$  signala,  $IF$  estimacija pomoću  $WD$  ne posjeduje bias, dok kod  $SPEC$  posjeduje bias koji može biti značajan. Kada se  $IF$  brže mijenja, to  $SPEC$  postaje manje upotrijebljiv za estimaciju.

U [61] analizirana je  $IF$  estimacija ostvarena pomoću  $L - WD$ . Kod distribucije reda  $L$ , varijansa  $IF$  estimacije se povećava  $L^2$  puta u odnosu na  $WD$  (2.30), dok se bias smanjuje u istom odnosu. Kod  $SM$ , u slučaju da nema preklapanja komponenti signala u  $TF$  ravni, varijansa  $IF$  estimacije jednaka je varijansi  $IF$  estimacije za svaku pojedinačnu komponentu signala. Kao što će se to eksplicitnije vidjeti kod estimacije amplitude signala, kod  $WD$  dolazi do povećanja varijanse  $IF$  estimacije u slučaju multikomponentnih signala.

Pored biasa i varijanse, veliki problem u  $IF$  estimaciji može predstavljati greška usljed diskretizacije po frekvenciji, koja se može imenovati kao greška kvantizacije po frekvenciji [215]. Pod pretpostavkom da je uniformna vjerovatnoća da  $IF$  uzme bilo koju vrijednost iz intervala, varijansa kvantizacije je za  $WD$  jednaka:

$$\sigma_q^2 = \frac{(\Delta\omega)^2}{12} = \frac{\pi^2}{12h^2}. \quad (2.33)$$

U slučaju da je spoljni šum mali, ova greška može predstavljati najveću mjernu nesigurnost u sistemu. Može se umanjiti interpolacijom po frekvenciji pomoću metoda dodavanja nula "zero-paddinga" [172]. Mana ovog pristupa je značajno povećanje memorijskih i računskih potreba sistema. Druga grupa rješenja su metode za određivanje tzv. spektralnog pomjeraja  $\delta(n)$  na osnovu kojeg se  $IF$  estimacija određuje kao:

$$\hat{\omega}(n) = \pi(k_m(n) + \delta(n))/T_w. \quad (2.34)$$

A.E. Fillip [237] je realizovao algoritam za određivanje spektralnog pomjeraja za računanje maksimuma  $I^2T$  (odnosno frekvencije sinusoide) sa Hammingovim prozorom. Kod  $WD$  sa Hammingovim prozorom i linearni  $FM$  signal spektralni pomjeraj iznosi [237]:

$$\delta(n) = \frac{1}{2} \frac{WD(n, k_m - 1) - WD(n, k_m + 1)}{WD(n, k_m + 1) - 2WD(n, k_m) + WD(n, k_m - 1)}, \quad (2.35)$$

gdje je  $|\delta(n)| < 1/2$ . U radu [238] razmatrana je primjena ovih tehnika na više tipova prozora. Za Rife-Vincetove prozore oblika [238, 239]:

$$w(n) = \sum_{l=0}^P A(P, l) \cos(2\pi nl/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.36)$$

gdje su koeficijenti prozora ove klase  $A(P, l)$ , spektralni pomjeraj je:

$$\delta(n) = \frac{(P + 1/2)WD(n, k_m)[WD(n, k_m + 1) - WD(n, k_m - 1)]}{[WD(n, k_m) + WD(n, k_m + 1)][WD(n, k_m) + WD(n, k_m - 1)]}. \quad (2.37)$$

Hannov prozor pripada ovoj klasi za  $P = 1$ , odgovarajući spektralni pomjeraj jednak je [54, 238]:

$$\delta(n) = \frac{0.5WD(n, k_m)[WD(n, k_m + 1) - WD(n, k_m - 1)]}{[WD(n, k_m) + WD(n, k_m + 1)][WD(n, k_m) + WD(n, k_m - 1)]}. \quad (2.38)$$

Slične tehnike su razvijene i za druge tipove prozora u [238], kao i za pravougaoni prozor [240]. Za razliku od interpolacije, koja uvećava memorijske i računске zahtjeve, ove tehnike nemaju te probleme. Kod interpolacije, varijansa greške  $IF$  estimacije se smanjuje do nivoa:

$$\sigma_q^2 = \frac{\pi^2}{12h^2(K+1)^2}, \quad (2.39)$$

gdje  $K \times N_w$  predstavlja ukupan broj dodatih nula, dok je  $N_w$  broj odbiraka signala u okviru prozora. Varijansa  $IF$  estimacije pomoću  $WD$  za linearni  $FM$  signal odnosno varijansa  $IF$  estimacije pomoću  $SPEC$  za sinusoidalni signal, se umanjuje do  $N_w^{3/2}$  puta [50, 51, 241, 242]. Najveće poboljšanje se dobija kod primjene pravougaonog prozora, gdje su i najveći problemi usljed postojanja Gibsovog fenomena i efekata "curenja spektra". Kod nelinearnog  $FM$  signala postoji problem biasa, koji ograničava primjenu ovih tehnika. Međutim, eksperimenti su pokazali da se ovim tehnikama smanjuje i bias.

#### 2.2.4.2 Estimacija amplitude signala

Posmatra se  $WD$  signala  $f(n)$  zahvaćen  $CGWN$  varijanse  $\sigma_v^2$ :

$$WD_x(n, \omega) = \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2-1} w(k)w(-k)x(n+kT)x^*(n-kT)e^{-j2kT\omega}. \quad (2.40)$$

Varijansa distribucije jednaka je:

$$\sigma_{xx}^2 = E\{WD_x^2(n, \omega)\} - E^2\{WD_x(n, \omega)\}. \quad (2.41)$$

Kao i u slučaju  $IF$  estimacije, šum se sastoji od dvije komponente od kojih je jedna nastala usljed interakcije signala i šuma  $\sigma_{fv}^2$ , dok je druga posljedica šuma  $\sigma_{vv}^2$  [224, 225]  $\sigma_{xx}^2 = \sigma_{fv}^2 + \sigma_{vv}^2$ , gdje su:

$$\sigma_{fv}^2 = \sigma_v^2 \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2-1} w^4(k)[|f(n+k)|^2 + |f(n-k)|^2]; \quad \sigma_{vv}^2 = \sigma_v^2 E_w. \quad (2.42)$$

Korišćen je realan i paran prozor  $w_r^2(kT) = w(k)w(-k)$  energije  $E_w = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} w^4(k)$ . Ako je signal  $f(n)$  sa sporopromjenljivom amplitudom u okviru prozora,  $f(n) = A(n) \exp(j\varphi(n))$ , gdje je  $|A'(n)| \ll |\varphi'(n)|$ , varijansa  $WD$  jednaka je:

$$\sigma_{xx}^2(n) = E_w \sigma_v^2 [2A^2(n) + \sigma_v^2]. \quad (2.43)$$

Za procjenu vrijednosti biasa neophodno je pronaći srednju vrijednost  $WD$ :

$$E\{WD_x(n, \omega)\} = WD_f(n, \omega) *_{\omega} F_w(2\omega) + \sigma_v^2 w^2(0), \quad (2.44)$$

gdje je  $*_{\theta}$  oznaka konvolucije po frekvenciji, dok je  $F_w(\omega)$   $FT$  ekvivalentnog prozora  $F_w(\omega) = FT[w^2(k)]$ . Za  $w(0) = 1$  drugi član u izrazu (2.44) svodi se na  $\sigma_v^2$  i biće izostavljen u daljim analizama. Razvijanjem prvog člana u izrazu (2.44) u Taylorov red, zanemarujući članove višeg reda, dobija se:

$$\begin{aligned} WD_f(n, \omega) *_{\omega} F_w(2\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} WD_f(n, \omega - \theta) F_w(2\theta) d\theta \approx \\ &\approx WD_f(n, \omega) + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 WD_f(n, \omega)}{\partial \omega^2} m_2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

gdje je energetski moment ekvivalentnog prozora  $m_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 F_w(\omega) d\omega$ , a bias se može izraziti kao  $bias(n, \omega; N) = \frac{1}{8} B_f(n, \omega) m_2$  gdje je  $B_f(n, \theta) = \partial^2 WD_f(n, \omega) / \partial \omega^2$ . Iz prethodnih relacija uočava se linearno povećanje varijanse sa povećanjem širine prozora. Bias opada sa kvadratom širine prozora. Kao i u slučaju estimacije  $IF$ , ovo ukazuje na mogućnost odredjivanja optimalne širine prozora.

Za multikomponentni signal:

$$x(n) = \sum_{i=1}^M f_i(n) + \nu(n). \quad (2.46)$$

Varijansa  $WD$  jednaka je [216, 218]:

$$\sigma_{xx}^2 = \sigma_v^2 \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2-1} w^4(k) \left[ 2 \left| \sum_{i=1}^M f_i(n+k) \right|^2 + \sigma_v^2 \right], \quad (2.47)$$

odnosno, ako su komponente razdvojene u  $TF$  ravni izraz (2.47) svodi se na:

$$\sigma_{xx}^2 = \sigma_v^2 \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2-1} w^4(k) \left[ 2 \sum_{i=1}^M |f_i(n+k)|^2 + \sigma_v^2 \right]. \quad (2.48)$$

Kod  $WD$  multikomponentnih signala, kao neželjeni efekat pored kros-članova, pojavljuje se i povećanje varijanse u mjerenjima  $IF$  i amplitude signala. Zaključak o povećanju varijanse u estimaciji distribucije u slučaju multikomponentnih signala može se uopštiti na sve distribucije  $CD$  klase koje su date u diskretnoj formi kao:

$$CD_x(n, \omega; \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m, k) x(n+m+k) x^*(n+m-k) e^{-j2\omega k}, \quad (2.49)$$

gdje je  $\varphi(m, k)$  funkcija jezgra u time-lag domenu. Srednja vrijednost distribucije za multikomponentni signal (2.46) je:

$$E\{CD_x(n, \omega; \varphi)\} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{f_i}(n, \omega; \varphi) + \sigma_v^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m, 0). \quad (2.50)$$

Varijansa distribucije jednaka je:

$$\begin{aligned} \sigma_{CD}^2(n, \omega; \varphi) = & \sigma_v^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\varphi(m, k)|^2 + \\ & + \sigma_v^2 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \times \\ & \times \left[ \sum_{i=1}^M f_i(n + m_1 + k_1) \sum_{j=1}^M f_j^*(n + m_2 + k_2) \delta(m_1 - m_2 + k_1 - k_2) + \right. \\ & \left. \times \sum_{i=1}^M f_i(n - m_1 - k_1) \sum_{j=1}^M f_j^*(n - m_2 - k_2) \delta(m_1 - m_2 - k_1 + k_2) \right]. \quad (2.51) \end{aligned}$$

U slučaju da u oblasti, za  $\varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \neq 0$  za  $\forall i, j, i \neq j$  važi  $f_i(n + m_1 + k_1) f_j^*(n + m_2 + k_2) = 0$ , kros-članovi su potisnuti i nema povećanja varijanse distribucije usljed njihove pojave. U suprotnom, kada  $\varphi(m_1, k_1) \varphi^*(m_2, k_2) \neq 0$ , za  $\forall i, j, i \neq j$ , važi  $f_i(n + m_1 + k_1) f_j^*(n + m_2 + k_2) \neq 0$ , kros-članovi postoje i dolazi do povećanja vrijednosti varijanse distribucije.

Amplituda monokomponentnog signala se kod  $WD$  može procijeniti u skladu sa marginalnim uslovima kao:

$$\hat{A}^2(n) = \sum_{k=1}^{N_w} WD(n, k) \Delta\omega / 2\pi, \quad (2.52)$$

gdje je  $\Delta\omega$  korak po frekvenciji  $\Delta\omega = \pi / (TN_w)$ . Kako je energija signala koncentrisana u svega nekoliko odbiraka oko odbirka u kome je detektovan maksimum  $k_m(n) - K \leq k \leq k_m(n) + K$ , estimacija amplitude može se obaviti sumiranjem izraza (2.52) preko  $2K + 1$  članova reda. Varijansa estimacije amplitude za monokomponentni signal jednaka je:

$$\sigma_{\hat{A}}^2 = (2K + 1) \sigma_v^2 (2A^2(n) + \sigma_v^2) E_w / N_w^2. \quad (2.53)$$

Bias procjene amplitude je  $bias_{\hat{A}} = (2K + 1) \sigma_v^2 / (2N_w)$ . U slučaju estimacije amplitude linearnog  $FM$  signala, procjena amplitude može se popraviti pomoću spektralnog pomjeraja. Tako se za  $WD$  sa Hannovim prozorom procjena amplitude može obaviti kao [215, 216, 218]:

$$\hat{A}^2(n) = \sum_{i=-1}^1 WD(n, k_m(n) + i) \Delta(i) \Delta\omega / 2\pi, \quad (2.54)$$

gdje je:

$$\Delta(i) = \frac{a_i N_w}{\sum_{i=-1}^1 a_i \frac{\sin((\delta(n) - 2\pi i/N_w)N_w/2)}{\sin((\delta(n) - 2\pi i/N_w)/2)}}, \quad \{a_{-1}, a_0, a_1\} = \{0.25, 0.5, 0.25\}. \quad (2.55)$$

Slično ovom, za tehniku koja je opisana za Hammingov prozor (relacija (2.35)), popravka estimacije amplitude može se izvršiti kao [237]:

$$\hat{A}^2(n) = WD(n, k_m(n)) - \frac{1}{4} (WD(n, k_m(n) + 1) - WD(n, k_m(n) - 1)) \delta(n). \quad (2.56)$$

Bias kod *SPEC* jednak je:

$$bias_{SPEC}(n) = E\{SPEC_{xx}(n, \omega)\} - SPEC_{ff}(n, \omega) = \sigma_v^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} w^2(k), \quad (2.57)$$

dok je:

$$\sigma_{SPEC}^2(n, \omega) = \sigma_v^2 E_0 (2SPEC(n, \omega) + \sigma_v^2 E_0), \quad (2.58)$$

gdje je  $E_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w^2(k)$ . U oblasti komponente signala, kao i kod *WD*, postoje dvije komponente varijanse od kojih jedna zavisi od signala i šuma, a druga samo od šuma. Van oblasti auto-člana postoji samo komponenta usljed šuma. Za multikomponentni signal (2.46), u slučaju da se komponente signala ne preklapaju u *TF* ravni važi:

$$\sigma_{SPEC}^2(n, \omega) = \sigma_v^2 E_0 \left( 2 \sum_{i=1}^M SPEC_i(n, \omega) + \sigma_v^2 E_0 \right), \quad (2.59)$$

gdje je *SPEC* *i*-te komponente  $f_i(n)$  označen kao  $SPEC_i(n, \omega)$ . Kod signala koji nijesu preklapljeni u *TF* ravni nema povećanja varijanse distribucije pod uticajem drugih komponenti signala.

Kod *SM* bias distribucije jednak je:

$$bias_{SM}(n, \omega) = \sigma_v^2 \sum_{i=-N_w/2}^{N_w/2-1} w^2(i) \frac{\sin(i\Delta\omega(2L_d + 1))}{\sin(i\Delta\omega)}, \quad (2.60)$$

gdje je  $2L_d + 1$  širina konvolucionog prozora u frekventnom domenu, dok je varijansa *SM*:

$$\begin{aligned} \sigma_{SM}^2(n, \omega) = \\ = \sigma_v^2 \sum_{l_1=-L_d}^{L_d} \sum_{l_2=-L_d}^{L_d} E_{l_1-l_2} \left[ 2STFT_f(n, \omega + \omega_1) STFT_f^*(n, \omega + \omega_2) + \sigma_v^2 E_{l_1-l_2} \right], \end{aligned} \quad (2.61)$$

gdje je  $\omega_i = l_i \Delta\omega$  i  $E_{l_1-l_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w^2(k) e^{-j\Delta\omega(l_1-l_2)}$ . Za multikomponentne signale, u slučaju da se *STFT* bilo koje dvije komponente signala ne preklapaju, nema povećanja varijanse usljed drugih komponenti. **Povećanje nesigurnosti u procjeni amplitude adekvatno je pojavi kros-članova.** Sa povećanjem  $L_d$  varijansa *SM* u okviru komponente signala brzo se približava varijansi *WD* za tu komponentu signala.



Analiza za distribucije višeg reda znatno je komplikovanija. Pomoću  $L - WD$  se može izvršiti estimacija  $2L$ -tog stepena amplitude signala. Zbog toga se  $L - WD$  ne može smatrati vjerodostojnim sredstvom za amplitudsku estimaciju (osim ako je signal sa približno konstantnom amplitudom). Kod  $SD$  za monokomponentni i neprekla-pajući multikomponentni signal, za koji se  $SD$  računaju preko autokorelacionih algoritama, varijansa se može procijeniti kao varijansa  $WD$  za svaku komponentnu signala pojedinačno.

**Primjer 1.** Posmatran je analitički dio realnog linearnog  $FM$  signala:

$$f(t) = \exp(-t^2/4) \cos(15\pi t^2 + 90\pi t) \quad (2.62)$$

sa aditivnim šumom  $\nu(t)$ . Signal je odabran korakom odabiranja  $T = 1/256$  i odsječen Hannovim prozorom širine  $T_w = 2$ , sa  $N_w = 512$  odbiraka unutar prozora. Standardna devijacija šuma  $\nu(nT)$  je  $\sigma_\nu = 0.1$ . Koristeći  $K = 1$ , iz relacije (2.53), dobija se  $\sigma_A^2 = 4.4165 \times 10^{-5}$ , za maksimalnu amplitudu  $A = 1$ . Bias je  $B_{\hat{A}} = 2.9297 \times 10^{-5}$ . Greška estimacije  $A^2(n)$  je u okviru granica  $\pm(B_{\hat{A}} + 2\sigma_{\hat{A}}) = 1.33 \times 10^{-2}$  sa vjerovatnoćom od 95% za Gausovsku distribuciju greške. Na slici 2.8 prikazana je tačna i estimirana vrijednost sporopromjenljive amplitude linearnog  $FM$  signala. Za estimaciju amplitude iskorišćene su popravke pomoću relacija (2.38), (2.54), (2.55). Varijansa  $IF$  estimacije jednaka je  $\sigma_{\hat{A}}^2 = 6.8947 \times 10^{-5}$ . Kvantizaciona greška po frekvenciji je  $\sigma_q^2 = 0.20562$  i može se smanjiti do nivoa varijanse  $IF$  estimacije korišćenjem spektralnog pomjeraja. Kako je maksimalna frekvencija  $\omega_m = N_w\pi/(2T_w) = 128\pi$ , jasno slijedi da je relativna greška veoma niska. Prethodna analiza je obavljena za  $WD$  i  $SM$  sa  $L_d = 6$ . Za  $SM$  korišćen je dvostruko veći korak odabiranja. Svi rezultati su statistički ispitani. Kada je ulazni šum jedino posljedica A/D kvantizacione greške, tada se, podrazumijevajući 12-bitni konvertor, dobija ulazni šum varijanse  $\sigma_\nu^2 = 2^{-24}/3$ . U ovom slučaju se u sistemu javljaju samo greške usljed "curenja spektra" i diskretizacije po frekvenciji.

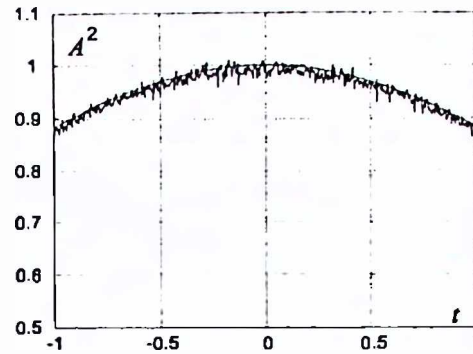
**Primjer 2.** Za dvokomponentni signal:

$$x(t) = e^{-t^2/4} e^{j(15\pi t^2 + 70\pi t)} (1 + e^{-j50\pi t}) + \nu(t) \quad (2.63)$$

varijansa  $WD$  je dvostruko veća nego u prethodnom primjeru. Ujedno, kros-član je dvostruko veći.  $SM$  sa  $L_d = 6$  daje istu varijansu amplitude i  $IF$  estimacije (detektovanjem pozicije lokalnih maksimuma) kao što je to u slučaju monokomponentnog signala.

#### 2.2.4.3 Numerička efikasnost

U [95] je data analiza broja računskih operacija potrebnih za proračun  $SM$  i  $WD$ . U Tabeli 8 u Prilogu dat je broj računskih operacija za proračun ovih distribucija, gdje je  $N_w$  širina prozora kod  $STFT$ , dok je sa  $2L_d + 1$  označena širina konvolucionog



Slika 2.8: Estimacija promjenljive amplitude realizovana pomoću tehnika spektralnog pomjeraja.

prozora koji se koristi u proračunu za  $SM$  u skladu sa prethodnom relacijom. Kod  $WD$  broj odbiraka u okviru prozora je  $2N_w$  zbog preodabiranja signala. Broj numeričkih kalkulacija za  $SPEC$  dobija se uvrštavanjem vrijednosti  $L_d = 0$  u izraze za  $SM$ .

Kako se računanje distribucija višeg reda obavlja rekursivno i kako je polazna funkcija ( $SM$ ) realna u svakoj od kaskadi, neophodno je  $N_w L_d / 2$  realnih množenja i sabiranja. Za  $SD$ , programsku realizaciju usložnjavaju logičke operacije, tako da broj numeričkih kalkulacija nije jedino bitan za njihov proračun. Problem koji postoji u softverskoj ne postoji u hardverskoj realizaciji, jer se pojedine operacije mogu obavljati paralelno korišćenjem odgovarajućih ASIC čipova.

Npr., posmatra se estimacija signala vibracija motora (primjer 3 iz 2.2.3) sa  $L_d = 3$  i širinom prozora  $N_w = 256$ . Odnos broja množenja i sabiranja kod  $WD$  i  $SM$  su 5120/1152 i 2752/768, respektivno.  $SM$  zahtijeva, naravno, više računskih operacija nego  $SPEC$ . U ovom slučaju je odnos 768/1152 i 384/768.

#### 2.2.4.4 Konvergencija S-metoda

Iz prethodne analize slijedi da je potrebno da frekvencijski prozor bude širine  $2L_d + 1 = N_w$  da bi se auto-član  $SM$  sveo na auto-član  $WD$ . To bi dovelo do pojave unutrašnjih interferencija, kros-članova i akumulacije šuma. Pokazuje se na nizu primjera, kao i u praktičnim realizacijama, da dodavanje nekoliko članova  $SPEC$ -u daje auto-član blizak auto-članu  $WD$  uz eliminisanje drugih neželjenih efekata. Analiza konvergencije auto-člana  $SM$  biće obavljena na primjeru linearnog  $FM$  signala  $x(t) = A \exp(jat^2/2 + jbt)$ . Auto-član ovog signala je definisan u [188] kao  $C(\omega) = FT_\tau\{c(-a\tau, \tau)\}$ . Posmatran je maksimum auto-člana ovog signala u  $\omega = 0$ . Za  $WD$  funkcija jezgra je (za pseudo formu)  $c(\theta, \tau) = w(\tau/2)w^*(-\tau/2)$ , pa je maksimum

auto-člana jednak za svako  $a$  i za  $w(t)$  parnu i realnu prozorsku funkciju dat. kao:

$$C_{WD}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau/2) d\tau. \quad (2.64)$$

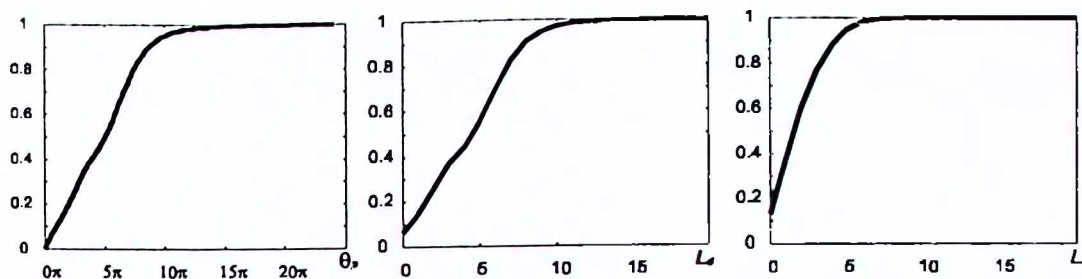
Funkcija jezgra kod  $SM$  jednaka je  $c(\theta, \tau) = P(-\theta/2) *_{\theta} A_w(\theta, \tau)$ , gdje je  $A_w(\theta, \tau)$   $AF$  funkcije prozora. Pod uslovom da je  $P(\theta)$  pravougaoni prozor širine  $2\theta_p$  i  $w(t)$  pravougaoni prozor širine  $T_w$ , dobija se da je maksimum auto-člana  $SM$  jednak:

$$C_{SM}(0; a) = 4 \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \frac{\sin(2\theta_p t)}{t} \frac{\sin(at(T - 2|t|))}{at} dt \quad (2.65)$$

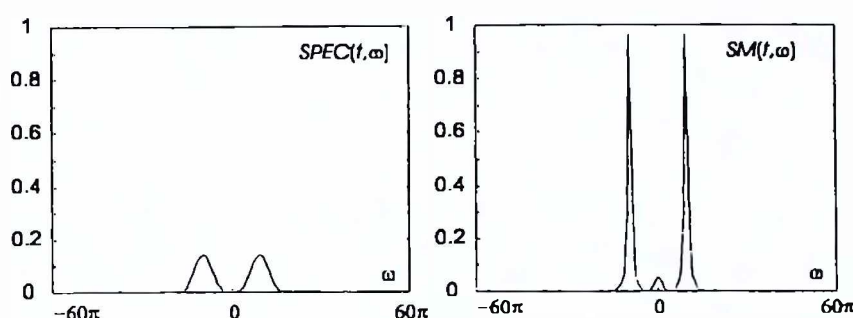
i za  $\theta_p \rightarrow \infty$  važi  $C_{SM}(0; a) \rightarrow C_{WD}(0)$  za svako  $a$ . Auto-član  $SPEC$ -a je proporcionalan kvadratu modula primijenjenog prozora [188]  $C_{SPEC}(\omega; a) \sim w^2(\omega/a)$  tako da je širina auto-člana približno jednaka  $aT$ . Na osnovu ovoga može se zaključiti da, za pravougaoni prozor  $w(t)$ , maksimum  $SM$  se aproksimativno linearno približava maksimumu auto-člana  $WD$ . Za analogni signal ovo je ilustrovano na slici 2.9a (dobijeno iz relacije (2.65)) dok je za diskretni signal prikazano na slici 2.9b (dobijeno numerički). Uzeto je  $T_w = 2$  i  $N_w = 128$ , dok je  $a = 10\pi$ , tako da je auto-član  $SPEC$  širine  $aT_w = 20\pi$ . Za  $\theta_p \approx 10\pi$  obuhvata se kompletan auto-član. U diskretnoj realizaciji to znači da  $L_d$  mora biti 10 da bi se dobio maksimalan auto-član. U slučaju da se upotrijebi Hannov prozor  $w(t)$  iste širine, u diskretnoj realizaciji za  $L_d = 5$  odbiraka, dobija se 95% auto-člana  $WD$ . Može se konstatovati da funkcija prozora, koja za datu širinu postiže maksimalnu koncentraciju energije u  $FT$  domenu, daje auto-član koji najbrže konvergira auto-članu  $WD$  [171]. Druga važna činjenica za određivanje amplitude signala u skladu sa relacijom (2.52) je zadovoljavanje marginalnih uslova.  $SPEC$  ne zadovoljava marginalne uslove, dok ih  $WD$  zadovoljava. U posmatranom numeričkom primjeru, integral duž  $\omega$  od  $SM$  sa Hannovim prozorom za  $L_d = 1$  daje 99.97% energije signala. Ujedno, ako se izvrši sumiranje  $SM$  za  $L_d = 5$ , preko samo tri člana ( $K = 1$ ), dobija se vjerodostojna estimacija amplitude relacijom (2.52). Veoma važna za analizu je i osobina potiskivanja kros-članova kod  $SM$ . Kao ilustracija za multikomponente signale može se posmatrati  $SM$  sa Hannovim prozorom  $w(t)$  širine  $T_w = 2$  sa  $N_w = 128$  odbiraka u okviru prozora sume dva paralelna linearna  $FM$  signala:

$$x(t) = \exp(jat^2/2 + jbt) + \exp(jat^2/2 - jbt), \quad (2.66)$$

gdje je  $a = b = 10\pi$ . Maksimumi komponenti signala su razdvojeni za jednu širinu auto-člana  $SPEC$   $aT_w = 20\pi$  (slika 2.10a). Rezultati na slici 2.10 su normalizovani u odnosu na auto-član  $WD$ . Za  $L_d = 5$  izvršena je gotovo kompletna koncentracija auto-člana (95%), dok je maksimalna vrijednost kros-člana manja od 6% auto-člana. Procenat koncentracije auto-člana za  $L_d = 4$  i  $L_d = 6$  je 88% i 98%, respektivno, dok je maksimalni kros-član veličine 2.5% i 12.7%. Na slici 2.10b prikazan je  $SM$  sa Hannovim prozorom za  $L_d = 5$ . Sa signal-adaptivnim  $SM$  moguće je postići kompletnu koncentraciju auto-člana bez pojave kros-članova.



Slika 2.9: Približavanje maksimuma auto-člana SM auto-članu WD: a) Analogni signal pravougaoni prozor; b) Diskretni signal pravougaoni prozor; c) Diskretni signal Hannov prozor.

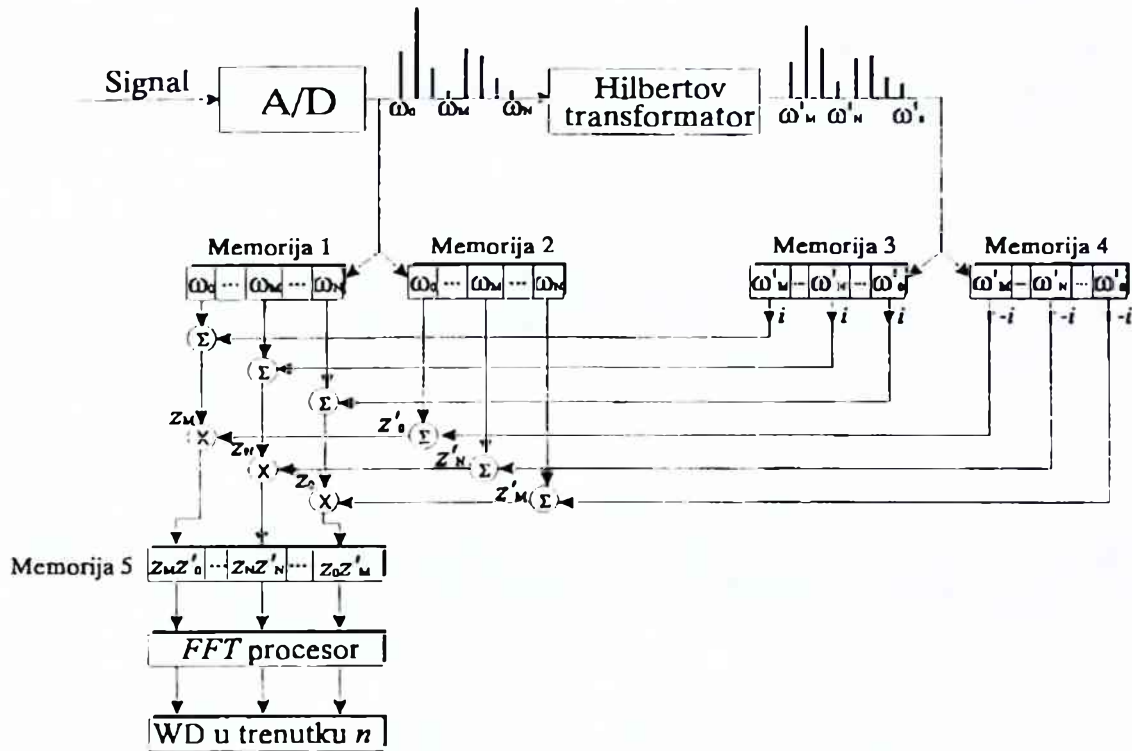


Slika 2.10: Suma dva linearna FM signala: a) Spektrogram; b) S-metod  $L_d=6$ .

## 2.3 Hardver za vremensko-frekvencijsku analizu

U praksi se može sresti veliki broj hardverskih sistema za  $TF$  obradu signala. Tokom godina, napretkom teorije i tehnologije, ova su rješenja značajno poboljšana. U tom smislu, za poredjenje može poslužiti sistem koji su razvili Boashash i Black 1987. godine [243] za realizaciju  $WD$ . Interesantno rješenje za realizaciju  $WD$  su ponudili Zhu, Peyrin i Goutte [38]. Ovo rješenje je prikazano na slici 2.11. Hardver za realizaciju  $TF$  distribucija  $CD$  klase na bazi dekompozicionih algoritama prezentiran je u [168, 170]. U [70] Amin razmatra rekurzivnu realizaciju  $TF$  distribucije  $CD$  klase, dok je u [78] isti autor prezentirao moguću realizaciju baziranu na filtarskim bankama. Vektorski-procesirane distribucije su analizirane u radu Cunninghama [244]. O problemima efikasnog računanja diskretne pseudo  $WD$  i mogućih hardverskih rješenja, detalji su objavljeni u radu [245].

Prethodno je već ukazano na činjenicu da bi veoma dobro bilo realizovati distribuciju koja ne posjeduje: kros-članove, suvišnu akumulaciju šuma i unutrašnje inter-



Slika 2.11: Principijski hardver za realizaciju Wignerove distribucije zasnovan na radovima Zhua, Peyrina i Gouttea.

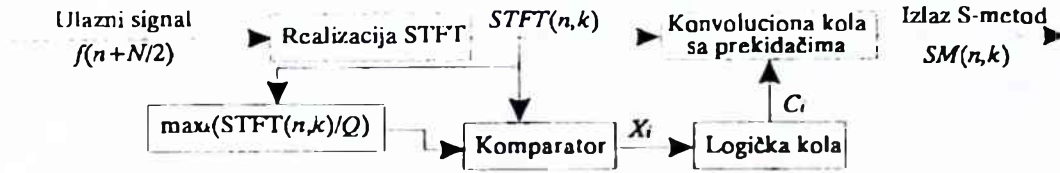
ferencije. Pokazano je da je takva distribucija  $SM$ , za čiju realizaciju nije potrebno preodabiranje. Ova distribucija pruža mogućnost jednostavne hardverske realizacije. U radovima [196, 246] razmatrana je mogućnost ASIC realizacije  $SM$  sa konstantnim i signal adaptivnim konvolucionim prozorom. Realizacija  $SM$  sa konstantnim konvolucionim prozorom može se opisati sa dva bloka. U prvom bloku realizuje se  $STFT$ , dok se u drugom realizuje odgovarajuća autokorelacija  $STFT$ . Zbog nemogućnosti čipova da procesiraju kompleksne podatke, odvojeno se vrši proračun  $SM$  za realni i imaginarni dio  $STFT$  prema relaciji:

$$\begin{aligned}
 SM(n, k) = & |STFT(n, k)|^2 + 2 \sum_{i=1}^{L_d} STFT_{Re}(n, k+i) STFT_{Re}^*(n, k-i) + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{L_d} STFT_{Im}(n, k+i) STFT_{Im}^*(n, k-i),
 \end{aligned} \quad (2.67)$$

gdje indeksi  $STFT$  označavaju realni i imaginarni dio  $STFT$ .

Realizacija signal adaptivnog  $SM$  uključuje odgovarajuća prekidačka kola, koja su u stanju da zaustave računanje  $SM$  u trenutku kada vrijednosti odgovarajućih  $STFT$  članova padnu ispod utvrdjenog nivoa. Da bi se dobila odgovarajuća upravljačka logika,





Slika 2.12: Blok šema sistema za realizaciju signal adaptivnog S-metoda.

za kontrolne impulse, uvode se komparatorska kola koja, za  $|STFT(n, k \pm i)|$  ispod zadatog nivoa, daju isključeno (odnosno onemogućavaju sabiranje dodatnih članova u  $SM$ ), i obrnuto:

$$X_{\pm i} = \begin{cases} 1 & |STFT(n, k \pm i)| > R \\ 0 & |STFT(n, k \pm i)| \leq R \end{cases} \quad (2.68)$$

Kontrolni signal, koji određuje da li se  $i$ -ti član sumira ili ne, formira se kao:

$$C_i = \prod_{m=1}^i X_{k+m} X_{k-m}, \text{ za } i = 1, 2, \dots, L_{d\max}; \quad C_i = C_{i-1} X_{k+i} X_{k-i}. \quad (2.69)$$

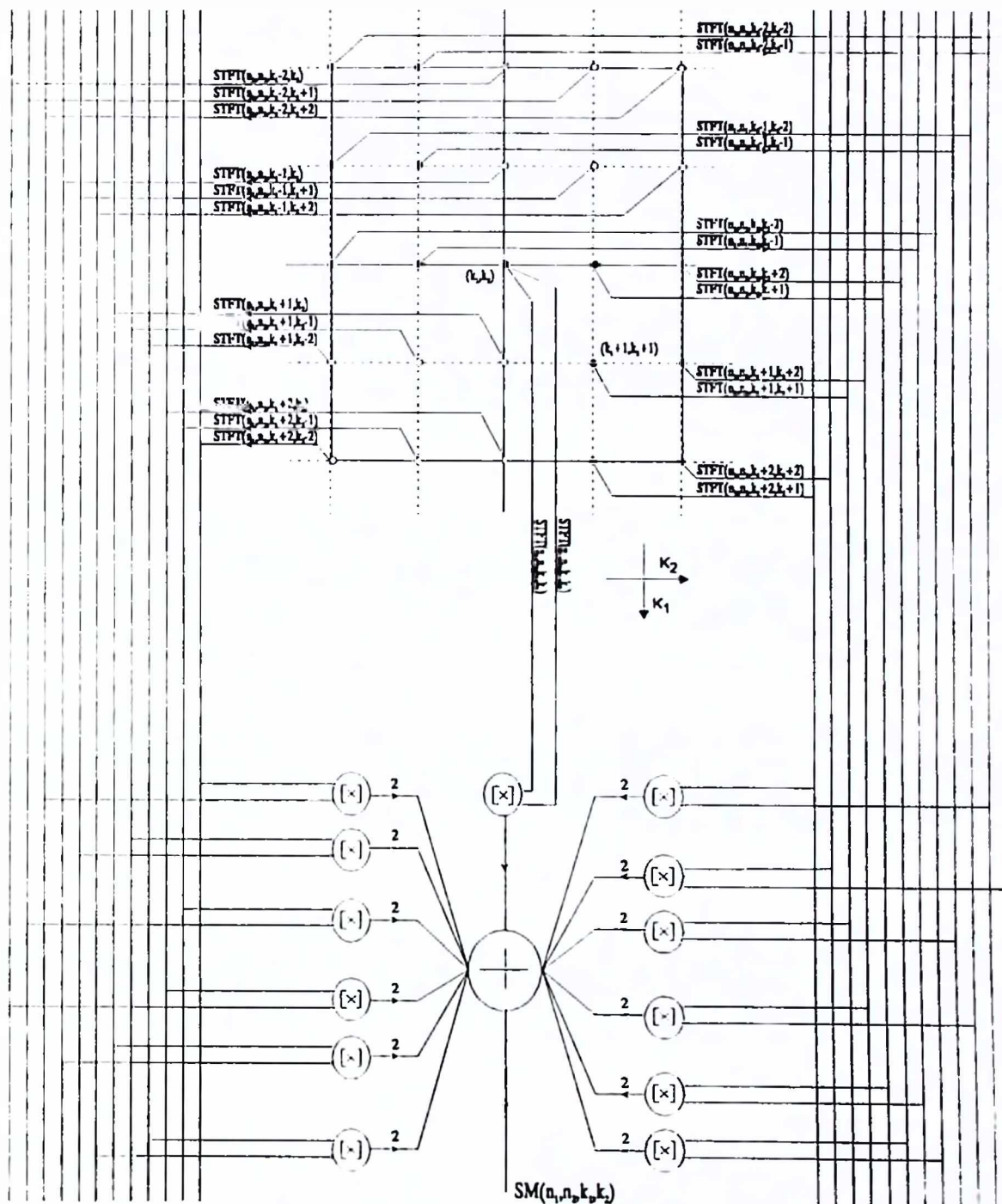
Maksimalna širina prozora je  $2L_{d\max} + 1$ . Kako se vrijednosti  $SPEC$  uvijek prosljeđuju na izlaz, to se može uzeti  $C_0 \equiv 1$ , čak i ako je  $|STFT(n, k)| \leq R$ . Na slici 2.12 prikazana je blok šema sistema za realizaciju signal adaptivnog  $SM$ .

U radu [246] analizirana je mogućnost rekurzivnog računanja  $L - WD$  bez kros-članova korištenjem istog hardvera. Slična blok šema za računanje polinomijalne Wigner-Villeove distribucije bez kros-članova, zasnovana na  $SM$ , data je u [112, 113].

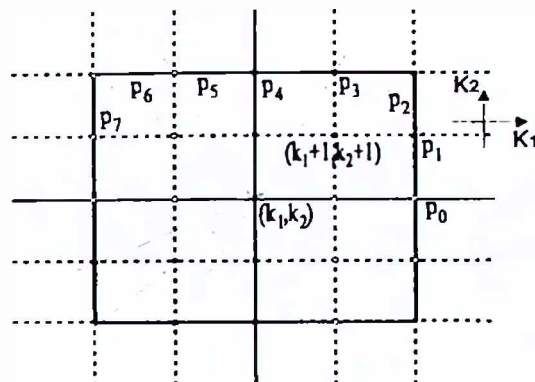
## 2.4 Hardverski sistemi za prostorno/prostorno-frekvencijsku analizu

Hardverska realizacija sistema za  $S/S - F$  analizu 2D signala je složenija nego klasični  $TF$  sistem. Razlog je u nepostojanju kvalitetnih dekompozicionih algoritama koji bi svodili distribucije  $CD$  klase na računanje 2D  $STFT$ . Stoga je  $SM$  gotovo neizostavan za  $S/S - F$  analizu.  $STFT$  se realizuje rekurzivno kao [196, 198, 247]:

$$\begin{aligned} STFT_{Re}(n_1 + 1, n_2, k_1, k_2) &= STFT_{Re}(n_1, n_2, k_1, k_2) \cos \frac{2\pi}{N} k_1 - \\ &\quad - STFT_{Im}(n_1, n_2, k_1, k_2) \sin \frac{2\pi}{N} k_1 + \\ &\quad + (-1)^{k_1} \left[ STFT_{Re}(n_2, k_2) \big|_{n_1+1+N/2} - STFT_{Re}(n_2, k_2) \big|_{n_1+1-N/2} \right] \\ STFT_{Im}(n_1 + 1, n_2, k_1, k_2) &= STFT_{Im}(n_1, n_2, k_1, k_2) \sin \frac{2\pi}{N} k_1 + \end{aligned} \quad (2.70)$$



Slika 2.13: Realizacija S-metoda sa konstantnim prozorom.



Slika 2.14: Projekzione linije za računanje signal adaptivnog 2D S-metoda.

$$+STFT_{Im}(n_1, n_2, k_1, k_2) \cos \frac{2\pi}{N} k_1 + (-1)^{k_1} \left[ STFT_{Im}(n_2, k_2)|_{n_1+1+N/2} - STFT_{Im}(n_2, k_2)|_{n_1+1-N/2} \right], \quad (2.71)$$

gdje indeksi *Re* i *Im* označavaju realni i imaginarni dio *STFT*. Na slici 2.13 prikazan je sistem za realizaciju *SM* sa konvolucionim prozorom  $P(m_1, m_2)$  za koji je  $L_1 = L_2 = 2$ . Kako se arhitektura odnosi samo na tačku  $(n_1, n_2, k_1, k_2)$ , to se potpuni sistem dobija dodavanjem istih dijelova za ostale tačke [247, 248]. Kompleksni množać  $[\times]$  na izlazu daje realni dio proizvoda odgovarajućih 2D *STFT*:

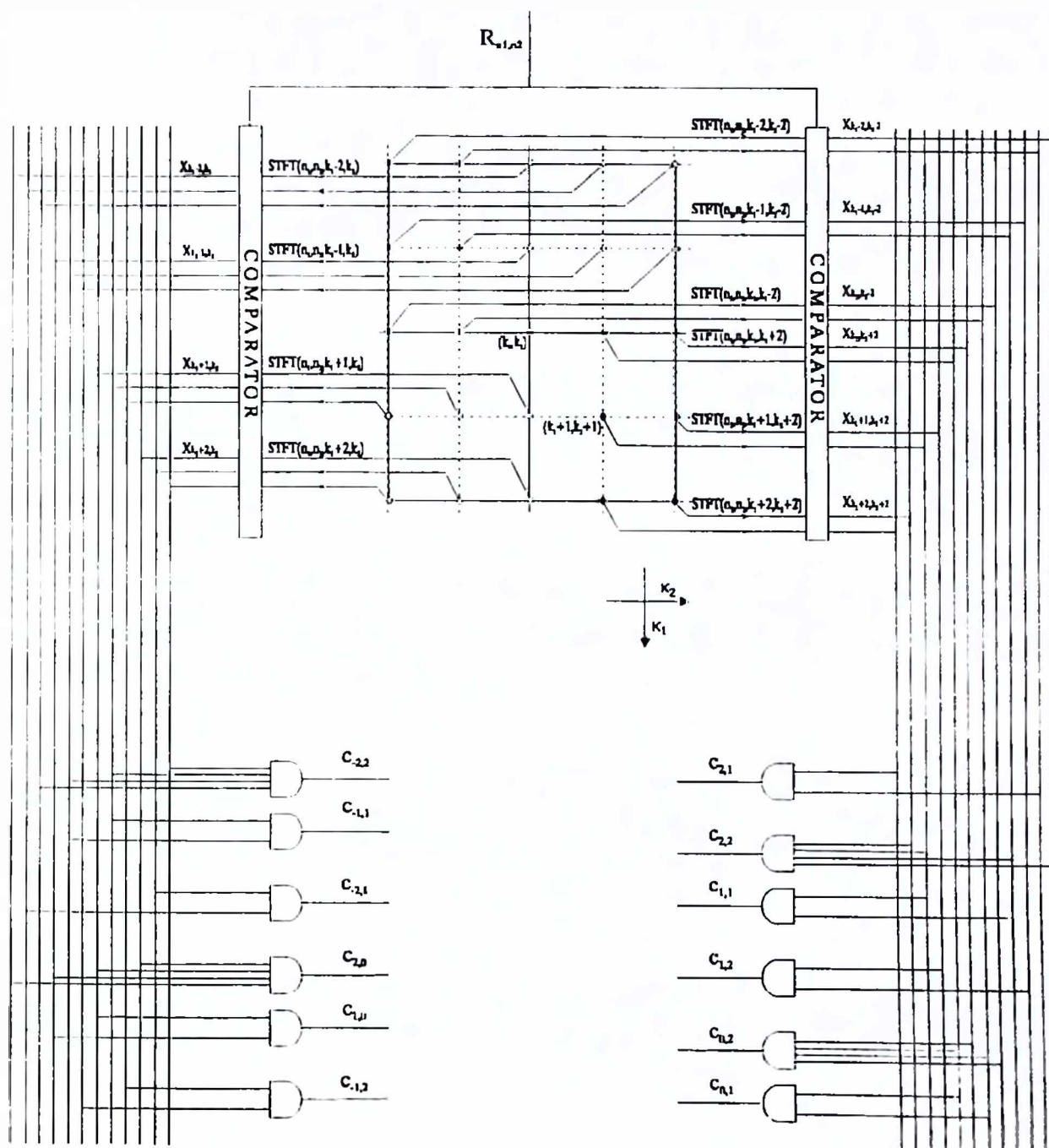
$$\begin{aligned} &STFT(n_1, n_2, k_1 + m_1, k_2 + m_2)[\times]STFT^*(n_1, n_2, k_1 - m_1, k_2 - m_2) = \\ &= STFT_{Re}(n_1, n_2, k_1 + m_1, k_2 + m_2)STFT_{Re}^*(n_1, n_2, k_1 - m_1, k_2 - m_2) + \\ &STFT_{Im}(n_1, n_2, k_1 + m_1, k_2 + m_2)STFT_{Im}^*(n_1, n_2, k_1 - m_1, k_2 - m_2). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Cjelokupni hardver za realizaciju *SM* sastoji se samo od kola za množenje i kola za sabiranje, što ga čini izuzetno pogodnim za ASIC implementaciju. Ukupno kašnjenje ovakvog sistema je neznatno veće od kašnjenja dijela za realizaciju *STFT* i jednako je zbiru kašnjenja potrebnih za realizaciju jednog stepena kompleksnog množenja i jednog stepena kompleksnog sabiranja.

Signal adaptivni *SM* dobija se kao [197]:

$$\begin{aligned} SM(n_1, n_2, k_1, k_2) &= |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)|^2 + 2 \sum_{(a,b)} \sum_{i=1}^{L_d} P_{n_1, n_2}(k_1, k_2, ai, bi) \times \\ &\times Re\{STFT(n_1, n_2, k_1 + ai, k_2 + bi)STFT^*(n_1, n_2, k_1 - ai, k_2 - bi)\}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

gdje je  $(a, b) \in S \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$  i *S* skup uzajamno prostih brojeva za koje je  $b > 0$ . Promjena dimenzija prozora se obavlja tako što se sumiranje obavlja po pravima



Slika 2.15: Realizacija kontrolnih signala za promjenljivu veličinu prozora.

$p_i, i = 1, 2, \dots$  kao na slici 2.14. Definisanjem para  $(a, b)$  vrši se sumiranje proizvoda  $2D$   $STFT$  za sve vrijednosti koje su različite od nule, odnosno veće od utvrđenog nivoa. Kada se, po odredjenom pravcu, dodje do vrijednosti  $STFT$  koja je manja od zadatog nivoa, sumiranje se prekida. Prozor  $P_{n_1, n_2}(k_1, k_2, ai, bi)$  će, u pomenutim pravcima, omogućiti sumiranje samo onih članova za koje su  $STFT(n_1, n_2, k_1 + ai, k_2 + bi)$  i  $STFT^*(n_1, n_2, k_1 - ai, k_2 - bi)$  različiti od nule, dok se ostali članovi, za koje su jedna, ili obje komponente, manje od zadatog nivoa, neće koristiti. Na ovaj način se konvolucionni prozor deformiše do proizvoljnog oblika u zavisnosti od vrijednost  $2D$   $STFT$ .

Zaustavljanjem sumiranja van auto-članova,  $2D$   $SM$  sa promjenljivim prozorom potiskuje kros-članove (odstranjivanje je moguće ako se  $2D$   $STFT$  pojedinih komponenti signala ne preklapaju), a uvođenje referentnog nivoa smanjuje i šum u sistemu.

Promjena dimenzija prozora se realizuje pomoću logičkih kola, kao na slici 2.15. Sve linije  $(i_1, i_2)$ ,  $i_1 \geq i_{01}$ ,  $i_2 \geq i_{02}$ , za posmatranu tačku  $(k_1, k_2)$ , koje su ispod definisanog nivoa  $R_{n_1, n_2}$ , su isključene. Ova referentna vrijednost se može definisati kao količnik maksimalne vrijednosti  $|STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)|$  za svaku tačku  $(k_1, k_2)$  i fiksiranog koeficijenta  $Q$ , pri čemu je  $1 \leq Q \leq \infty$   $R_{n_1, n_2} = \max_{k_1, k_2} |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)|/Q$ . Na slici 2.15 može se vidjeti realizacija kontrolnih signala za tačku  $(n_1, n_2, k_1, k_2)$ , ako su prethodno izračunate vrijednosti  $2D$   $STFT$ . Izlazi iz komparatora su označeni sa  $X_{i_1, i_2}$ ,  $i_{1,2} = 1, 2, \dots, N$ :

$$X_{i_1, i_2} = \begin{cases} 1 & |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)| > R_{n_1, n_2} \\ 0 & |STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)| \leq R_{n_1, n_2} \end{cases} \quad (2.74)$$

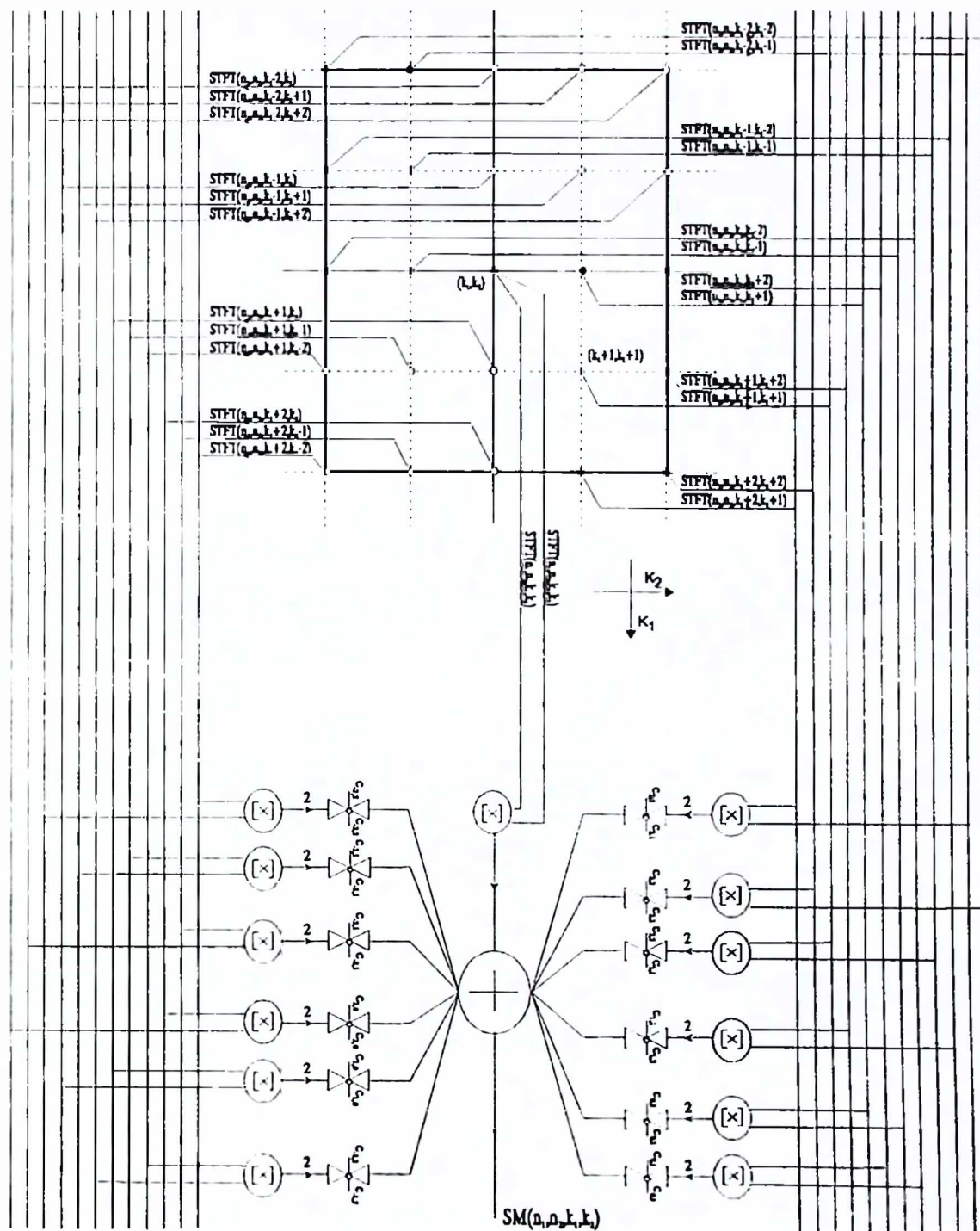
Kontrolni signali koji vrše isključivanje pojedinih linija, za posmatrano  $(k_1, k_2)$ , definisani su izrazom [197]:

$$C_{ai, bi} = \prod_{i=1}^{l < L_{\max}} X_{k_1 + ai, k_2 + bi} X_{k_1 - ai, k_2 - bi}, \quad i = 1, 2, \dots, L_{\max}, \quad (2.75)$$

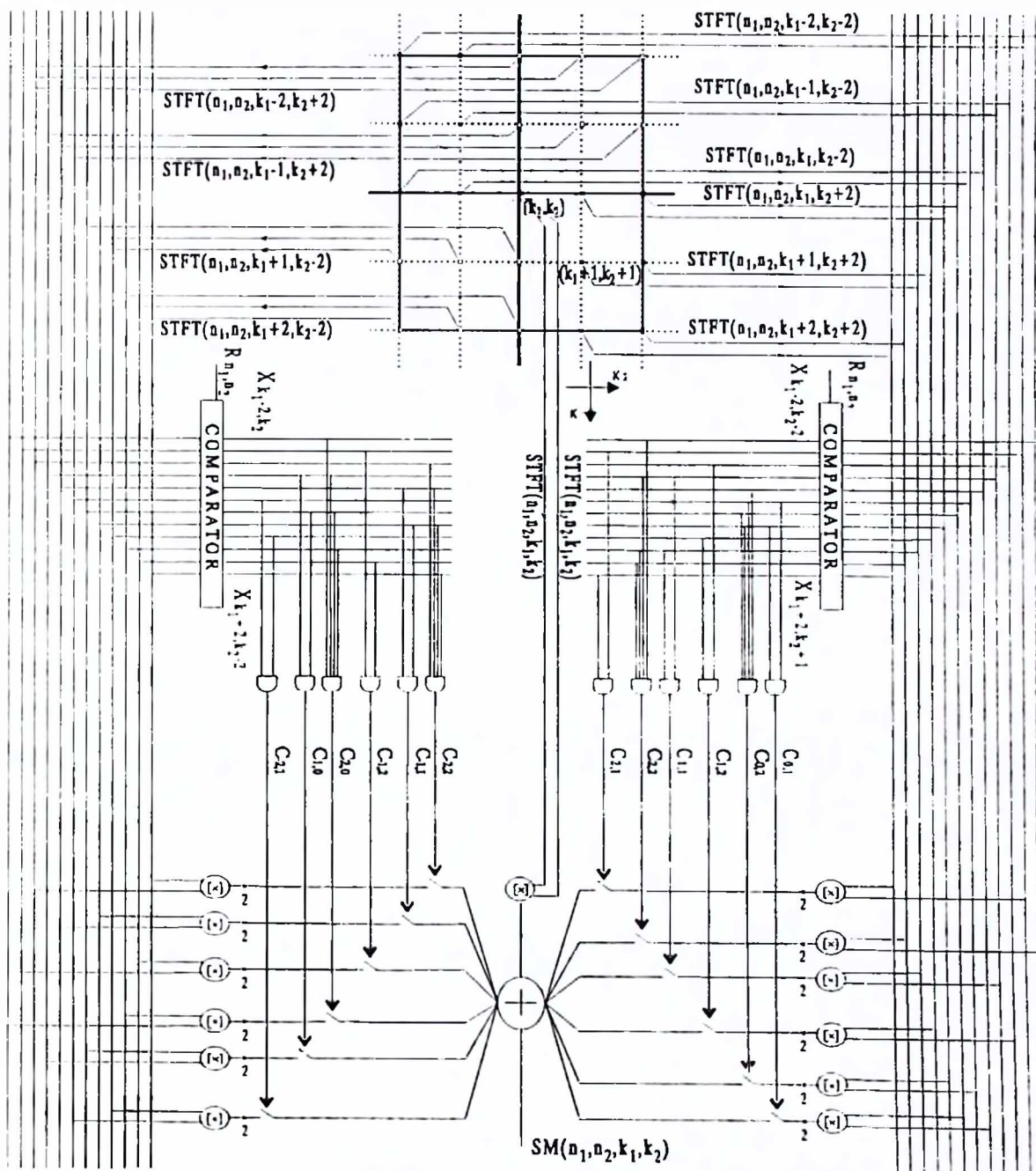
gdje  $L_{\max}$  odredjuje maksimalne dimenzije prozora.

Za  $(a, b) = (1, 0)$  dobijaju se kontrolni signali za pravu  $p_0$ , dok se za  $(a, b) = (2, 1)$  dobijaju kontrolni signali za pravu  $p_1$  sa slike 2.14 itd. Vrijednosti  $SPEC$  se, i u slučaju da je  $|STFT(n_1, n_2, k_1, k_2)| < R_{n_1, n_2}$ , uvijek propuštaju na izlaz sistema tj.  $C_{0,0} \equiv 1$ . Na slici 2.16 je, za tačku  $(n_1, n_2, k_1, k_2)$ , prikazan završni dio prozora za realizaciju  $2D$   $SM$  sa adaptivnom veličinom prozora koji koristi kontrolne signale sa slike 2.15. Na slici 2.17 prikazan je u cjelosti blok za realizaciju  $2D$   $SM$  sa promjenljivim dimenzijama prozora u tački  $(n_1, n_2, k_1, k_2)$ , podrazumijevajući da su vrijednosti  $2D$   $STFT$  izračunate na način opisan prethodno. Kompletan sistem za  $S/S - F$  analizu dobija se dodavanjem istog hardvera za ostale tačke. U primjeru je, bez gubitka opštosti, podrazumijevano  $L_{\max} = 2$ , odnosno primjena 8 pravih kao na slici 2.14. Ovakvim

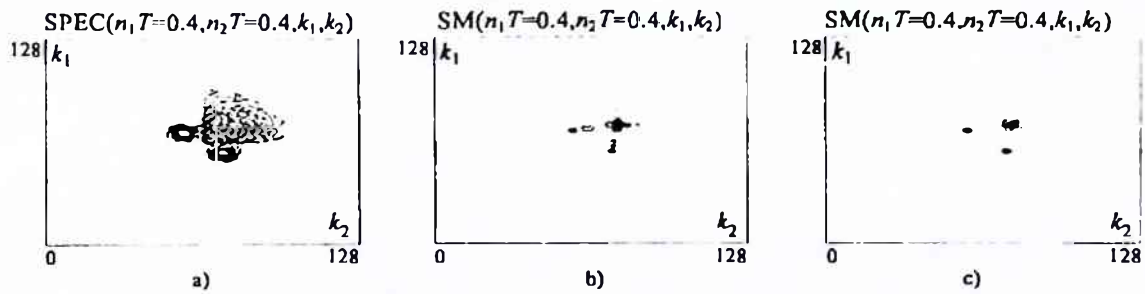




Slika 2.16: Završni dio sistema za računanje signal adaptivnog S-metoda.



Slika 2.17: Kompletna šema sistema za računanje signal adaptivnog 2D S-metoda.



Slika 2.18: Multikomponentni 2D signal u tački (0.4,0.4): a) Spektrogram, b) S-metod sa konstantnom širinom konvolucionog prozora, c) S-metod sa signal adaptivnom širinom prozora.

sistemom bi se obezbijedila  $S/S-F$  analiza 2D signala "on-line" čime bi bio prevaziđen problem relativno dugog vremena softverske  $S/S-F$  obrade.

**Primjer:** Posmatra se 2D signal zahvaćen šumom:

$$x(t_1, t_2) = e^{-j42\pi(t_1^3 + t_2^3)} + \cos(20\pi t_1^2 - 16\pi t_2^2) + \nu(t_1, t_2) \quad (2.76)$$

gdje je  $\nu(t_1, t_2)$  CGWN varijanse  $\sigma_\nu^2 = 0.6$ . Odabiranje je izvršeno periodom (1/128, 1/128), a distribucije su izračunate u tački  $(t_1, t_2) = (0.4, 0.4)$ . Korišćen je 2D Hannov prozor. Na slici 2.18 prikazani su:  $SPEC$ ,  $SM$  sa konstantnim dimenzijama prozora ( $L = 4$ ) i  $SM$  sa adaptivnim prozorom, pri čemu je  $Q = 2$ , u tački  $(t_1, t_2) = (0.4, 0.4)$ . Sa slika se jasno uočava bolja koncentracija auto-članova kod adaptivnog  $SM$  u odnosu na  $SM$  sa konstantnim prozorom. Odnos broja dodatih simetričnih  $STFT$  komponentni spektrogramu u slučaju adaptivnog i konstantnog prozora je u ovom slučaju 5483/590480.

## **GLAVA III**

---

### 3. PARAMETARSKI VREMENSKO-FREKVENCIJSKI METODI ZA ESTIMACIJU SIGNALA

#### 3.1 Radon Wignerova distribucija

Poznata je činjenica da se  $WD$  idealno koncentriše na  $IF$  linearnog  $FM$  signala [1, 3, 188]. Kako se brojni signali mogu tretirati kao linearni  $FM$  signali, ili njihove sume, to je njihova analiza posebno značajna. Za parametarsku identifikaciju linearnih  $FM$  signala razvijen je veliki broj metoda [23, 56, 97],[249]-[252]. Jedan od tih metoda je Radon-Wignerova distribucija ( $RWD$ ) [23, 249, 250] kojom se vrši projektovanje  $WD$  duž pravaca uz odgovarajuću integraciju vrijednosti. Očigledno je da se maksimumi projekcija nalaze na pozicijama gdje su detektovani linearni  $FM$  signali. Interferentni, oscilatorni kros-članovi će biti poništeni, pa neće biti detektovani.  $RWD$  se definiše kao:

$$D(r, \phi) = \Re[WD(t, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} WD(r \cos \phi - s \sin \phi, r \sin \phi + s \cos \phi) ds, \quad (3.1)$$

gdje ugao maksimuma  $\phi$  odgovara koeficijentu pravca linearnog  $FM$  signala  $x(t) = \exp(jat^2/2 + jbt)$  tako da važi  $\phi = \arctan a$ , dok vrijednost  $r$  determiniše poziciju linearnog  $FM$  signala.  $RWD$  se dechirpingom može svesti na proračun  $FT$  signala, odnosno:

$$D(a_1, \omega_0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ja_1 t^2/2 - j\omega_0 t} dt \right|^2. \quad (3.2)$$

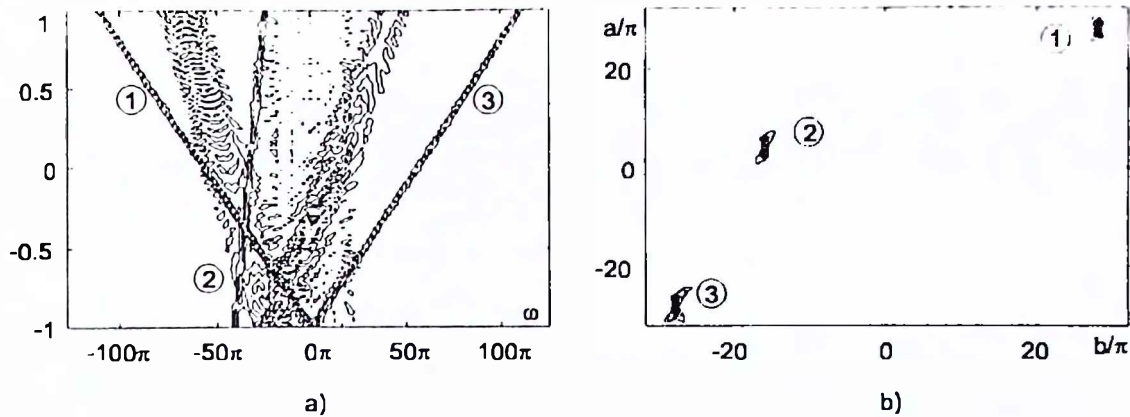
Maksimum  $D(a_1, \omega_0)$  odgovara poziciji na kojoj je detektovan par  $(a, b)$  parametara linearnog  $FM$  signala.

**Primjer:** Posmatra se signal:

$$x(t) = 2 \cos(14\pi t^2 + 28\pi t) + \exp(j(2\pi t^2 - 16\pi t)). \quad (3.3)$$

Na slici 3.1a prikazana je  $WD$  signala (3.3), dok je na slici 3.1b prikazana  $RWD$ . Na slikama su označene pozicije pojedinih komponenti.





Slika 3.1: Suma linearno-frekvencijski moduliranih signala: a) Wignerova distribucija; b) Radon Wignerova distribucija (Da bi se jasnije vidjele komponente najniži nivo izolacija kod RWD je 50% maksimalne vrijednosti.).

### 3.2 Radonova transformacija za kreiranje signal adaptivnog jezgra

Tehnika slična prethodnoj upotrijebljena je za adaptivno određivanje jezgra  $c(\theta, \tau)$  u ambiguity domenu [97].  $AF$  linearnog  $FM$  signala  $x(t) = \exp(jat^2/2 + jbt)$  koncentrisana je na pravouj liniji, koja prolazi kroz koordinatni početak  $A(\theta, \tau) = 2\pi e^{jbt} \delta(\theta + a\tau)$ . Stoga je moguće, pretraživanjem svih pravaca kroz koordinatni početak, odrediti pozicije na kojima se nalaze linearni  $FM$  signali u  $AF$  domenu.

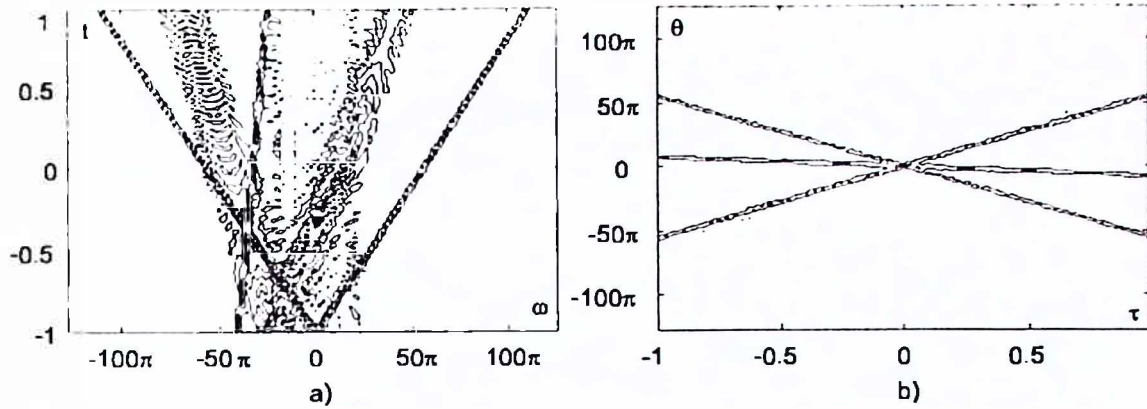
**Primjer.** Posmatra se signal (3.3).  $WD$  i  $AF$  ovog signala prikazane su na slikama 3.2a i 3.2b, dok su izgled adaptivnog jezgra i distribucija sa adaptivnim jezgrom prikazani na slikama 3.3a i 3.3b.

Prednost ove tehnike u odnosu na  $RWD$  ogleda se u mogućnosti proširenja primjenjivosti na slučaj nelinearnih  $FM$  signala [97].

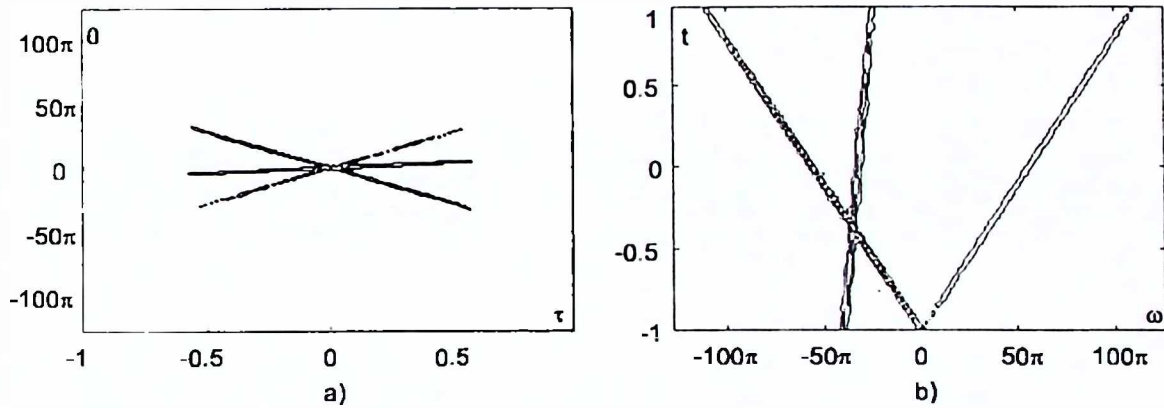
### 3.3 Wigner-Houghova transformacija

Wigner-Houghove transformacije ( $WHT$ ) za parametarsku identifikaciju signala razvijena je prvenstveno za linearne  $FM$  signale [253]. U tom obliku,  $WHT$  se svodi na  $RWD$ . Ovaj metod se jednostavno proširuje i ako se pretpostavi neki drugi oblik signala [56]. Za signal  $y(t) = A(t) \exp(j\phi(t, \vec{\theta}))$ , čija je  $IF \phi'(t, \vec{\theta})$  zavisna od parametara označenih vektorom  $\vec{\theta}$ ,  $WHT$ , može se definisati kao:

$$Q_x(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} TF(t, \phi'(t, \vec{\theta})) dt. \quad (3.4)$$



Slika 3.2: Suma linearno frekvencijski moduliranih signala: a) Wignerova distribucija; b) Ambiguity funkcija.



Slika 3.3: Suma linearno frekvencijski moduliranih signala: a) Adaptivno jezgro u ambiguity domenu; b) Distribucija sa adaptivnom funkcijom jezgra.

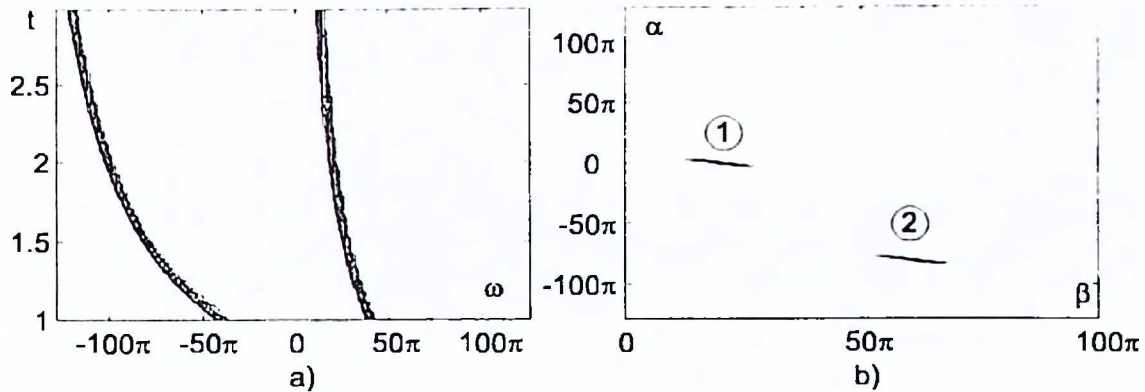
**Primjer.** Posmatra se signal sa logaritamskom fazom:

$$\phi(t, \alpha, \beta, \Phi_0) = \Phi_0 + \alpha t + \beta \ln(t) \quad (3.5)$$

čija je trenutna frekvencija hiperbolna  $\phi'(t, \alpha, \beta) = \alpha + \beta/t$ . *WHT* ovog signala je:

$$Q_x(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} TF(t, \alpha + \frac{\beta}{t}) dt. \quad (3.6)$$

Za signal sa dvije komponentne  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -80\pi$ ,  $\beta_1 = 20\pi$ ,  $\beta_2 = 60\pi$  i dodatnim *CGWN* sa odnosom signal/šum  $SNR = 10[dB]$  na slici 3.4a prikazan je signal-adaptivni *SM*, dok je *WHT* prikazana na slici 3.4b. Jasno se uočavaju pozicije komponentni signala.



Slika 3.4: Suma dva hiperbolički modulirana signala: a) Signal adaptivni S-metod; b) Wigner-Houghova transformacija (Zbog jasnosti prikaza, za sliku b) date su samo vrijednosti transformacije koje prelaze preko 50% maksimalne vrijednosti.).

### 3.4 TF distribucije za parametarsku identifikaciju

Očigledno je da optimalna transformacija na koju će biti primijenjena  $WHT$  zavisi od signala na koji se ovaj metod identifikacije primjenjuje. Npr., za sumu linearnih  $FM$  signala, optimalno je koristiti  $WD$ , što svodi primjenu na  $RWD$ . Kod  $WHT$  dolazi do poništavanja kros-članova usljed njihove oscilatornosti, tako da i pored velikih amplituda, ne bivaju detektovani. Kod nelinearnih  $FM$  signala pokazalo se da je dobro koristiti  $SM$  sa konstantnim i signal-adaptivnim konvolucionim prozorom. Kod signala sa velikom količinom aditivnog šuma (npr.  $SNR = 0[dB]$ ) neophodno je primijeniti sredstvo koje je moćnije od klasičnih bilinearnih predstavljanja. Stoga se, u ovim slučajevima, koristi reassignment metod i to primijenjen najčešće na  $PSWD$ . Kao što se vidjelo, za proračun ovog metoda potrebno je preodabrati signal, a zatim praktično naći tri distribucije i odrediti vremenski i frekvencijski pomjeraj za svaku tačku. Opisani problem se prevazilazi primjenom reassignment metoda na  $SM$  [254]-[257]:

$$SM_{w,w}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) STFT_w(t, \omega + \theta) STFT_w^*(t, \omega - \theta) d\theta. \quad (3.7)$$

Funkcija jezgra u  $TF$  domenu je  $\Pi(t, \omega) = 2p(2t)WD_w(t, \omega)$ , gdje su  $p(\tau) = IFT\{P(\theta)\}$  i  $WD_w(t, \omega)$   $WD$  funkcije prozora  $w(t)$ . Za odgovarajuću širinu prozora  $P(\theta)$  dobija se da je  $SM$  jednak zbiru  $WD$  auto-članova. Primjenjujući reassignment metod na  $SM$  dobija se  $TF$  pomjeraj:

$$t_r(t, \omega) = t + Re \left\{ \frac{SM_{\tau,w,w}(t, \omega)}{SM_{w,w}(t, \omega)} \right\}, \quad \omega_r(t, \omega) = \omega - Im \left\{ \frac{SM_{Dw,w}(t, \omega)}{SM_{w,w}(t, \omega)} \right\}, \quad (3.8)$$

gdje indeksi u  $SM_{w,w}(t, \omega)$  označavaju prozore korišćene u odgovarajućim  $STFT$  kalkulacijama:  $Dw \equiv dw(t)/dt$  i  $Tw \equiv tw(t)$ . Izraz za  $t_r(t, \omega)$  može se značajno uprostiti za pravougaoni prozor  $P(\theta)$ . Tada, polazeći od činjenice da je [171]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, t, \theta) \frac{dP(\theta)}{d\theta} d\theta = G(\omega, t, -\theta_p) - G(\omega, t, \theta_p) \quad (3.9)$$

važi:

$$t_r(t, \omega) = t + Im \left\{ \frac{STFT_w(t, \omega + \theta_p) STFT_w^*(t, \omega - \theta_p)}{SM_{w,w}(t, \omega)} \right\}, \quad (3.10)$$

gdje je  $2\theta_p$  širina prozora  $P(\theta)$ ,  $P(\theta) = 0$  za  $|\theta| > |\theta_p|$ . Kao što se očekivalo, ako je prozor  $P(\theta)$  širi od auto-člana (širine odgovarajuće  $|STFT_w(t, \omega + \theta_p)|$ ), tada za tu komponentu važi  $STFT_w(t, \omega + \theta_p) STFT_w^*(t, \omega - \theta_p) \simeq 0$ , odnosno  $t_r(t, \omega) = t$ . Ovo je isto kao za  $WD$ , što ukazuje da je  $SM$  jednak  $WD$  za auto-članove. Diskretni pomjeraj je jednak:

$$n_r(n, k) = n + Im \left\{ \frac{STFT_w(n, k + L_d) STFT_w^*(n, k - L_d)}{|STFT(n, k)|^2 + 2Re \sum_{i=1}^{L_d} STFT_w(n, k + i) STFT_w^*(n, k - i)} \right\}. \quad (3.11)$$

Ovo je veoma jednostavan oblik za aplikacije, koji može značajno da poboljša kvalitet auto-člana bez pojave kros-članova. Relacija (3.11) koristi  $STFT$  samo sa jednim prozorom, što je drugo značajno poboljšanje. Za računanje  $STFT_w(t, \omega)$  mogu se koristiti rekurzivne relacije, baš kao i za računanje  $STFT_{Dw}(t, \omega)$ , koja je, npr. za  $w(t)$  Hannov prozor, jednaka:

$$STFT_{Dw}(n, k) = \frac{j\pi}{2N_w T} [STFT_R(n, k - 1) - STFT_R(n, k + 1)], \quad (3.12)$$

gdje je  $T$  korak odabiranja, a oznaka  $STFT_R(n, k)$  predstavlja  $STFT$  sa pravougaonim prozorom.

Dalje poboljšanje može se dobiti ako se koristi pomjeraj samo po vremenu. Kako je  $SM$  blizak  $WD$ , vrijednosti vremenskog i frekvencijskog pomjeraja su male i teže nuli. Stoga, samo jedan pomjeraj može proizvesti dobre rezultate. Zbog jednostavnosti biće korišćen vremenski pomjeraj:

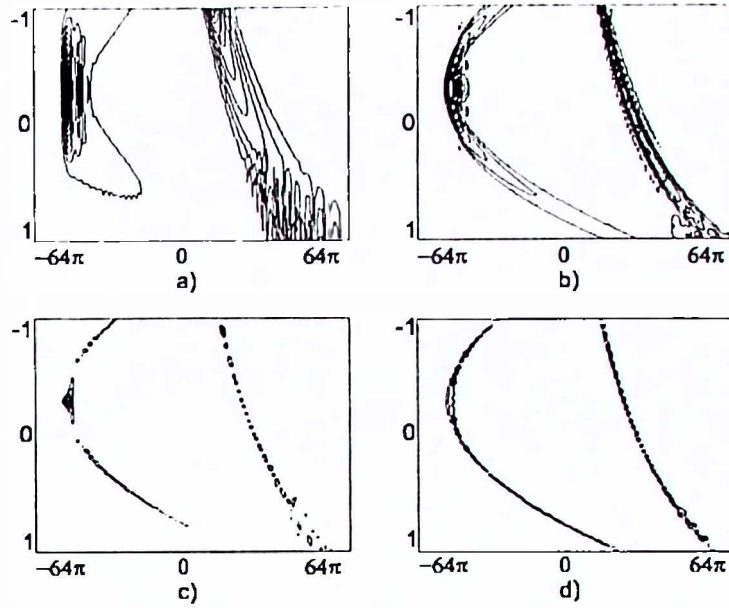
$$RSM(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} SM_{w,w}(t', \omega') \delta(t - t_r(t', \omega')) dt', \quad (3.13)$$

gdje je  $t_r(t', \omega')$  dato relacijom (3.10).

Važno je napomenuti da  $SM$  ne zahtijeva preodabiranje i računanje analitičkog signala za realne signale, što je znatno jednostavnije u odnosu na  $PSWD$  [56, 95].

**Primjer 1.** Data je suma nelinearnih  $FM$  signala:

$$x(t) = \exp(j2\pi(140t + 350 + 60 \ln(t + 2.5))) + \exp(j2\pi(7t^3 - 6t^2 + 24t)). \quad (3.14)$$



Slika 3.5: Suma dva hiperbolno modulirana signala: a) Spektrogram; b) S-metod; c) Modifikovani spektrogram; d) Modifikovani S-metod.

Parametri posmatranog signala su trajanje  $T_w = 2$  i broj odbiraka u primijenjenom Hannovom prozoru  $N_w = 128$ . Na slici 3.5 prikazani su *SPEC*, *SM* kao i odgovarajuće reassignment distribucije. Koncentracija signala na *IF*, kod modifikovanog *SM*, postignuta je gotovo u potpunosti.

**Primjer 2.** Posmatra se signal oblika:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (3.15)$$

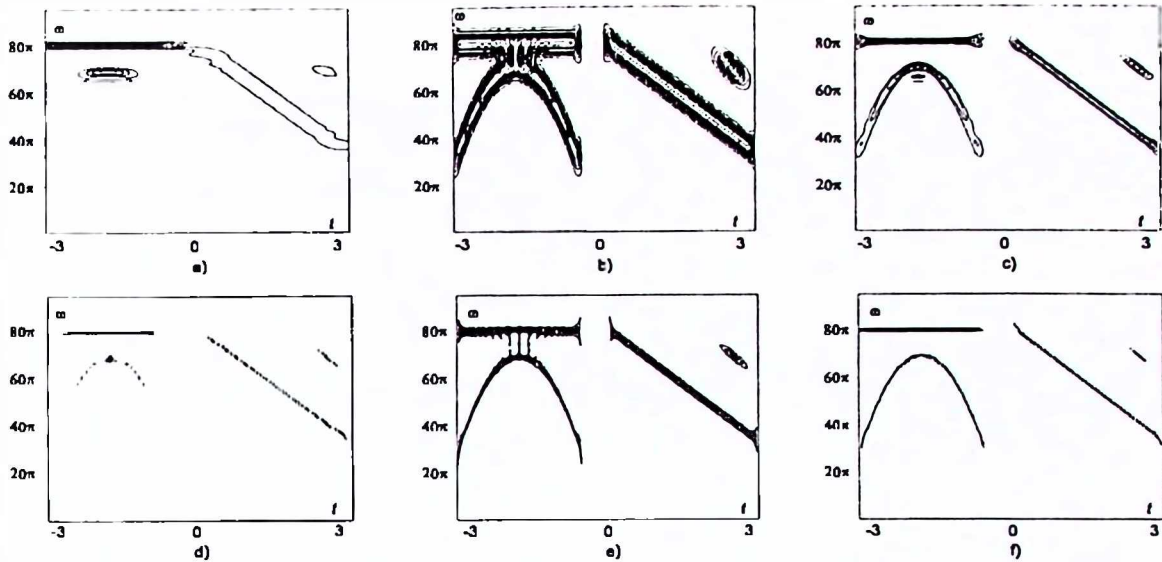
gdje su:

$$x_1(t) = e^{j80\pi t} + e^{-j9\pi((t+1.75)^3 - 7.75t)}, \quad -3 \leq t \leq -1/4 \quad (3.16)$$

$$x_2(t) = e^{-j8\pi t^2 + j81\pi t} + e^{-8(t+2.5)^2 - j8\pi t^2 + j109\pi t}, \quad 0 \leq t \leq 3. \quad (3.17)$$

Korak odabiranja je  $T = 1/96$ . *SPEC* ovog signala računati korišćenjem širokog ( $N_w = 192$ ) i uskog ( $N_w = 32$ ) Hannovog prozora prikazani su na slikama 3.6a i 3.6b. *SM* sa  $L_d = 2$ , zasnovan na *STFT* sa širokim prozorom  $N_w = 192$ , prikazan je na slici 3.6c. *SM* je, očigledno, blizak *WD* za svaku komponentnu signala pojedinačno. U numeričkim realizacijama za reassignment distribucije upotreba nivoa se podrazumeva [165]. Vrijednosti distribucije ispod nivoa se ne koriste za računanje reassignment distribucije. U ovim primjerima usvojen je nivo od 5% maksimalne vrijednosti odgovarajuće distribucije. Reassignment verzija *SPEC* sa širokim prozorom ne može biti





Slika 3.6: a) Spektrogram sa širokim prozorom; b) Spektrogram sa uskim prozorom; c) S-metod baziran na STFT sa širokim prozorom; d), e) i f) Odgovarajuća reassignment predstavljanja.

kompletno koncentrisana duž  $IF$  (slika 3.6d), dok verzija sa uskim prozorom ne razdvaja bliske komponentne signala (slika 3.6e). Reassignment verzija  $SM$  daje, gotovo kompletnu, koncentraciju duž  $IF$  (slika 3.6f).  $SM$  sa isključivo vremenskim pomjerajem daje veoma slične rezultate kao i kod pomjeraja u oba pravca (slika 3.7) uz numerički znatno jednostavniju realizaciju.

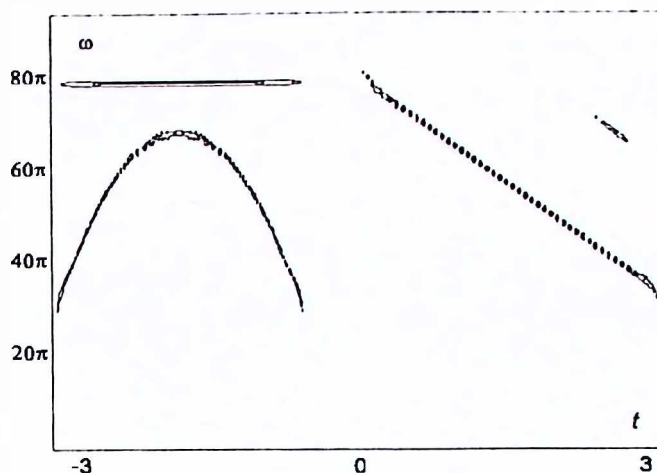
**Primjer 3.** Za parametarsku identifikaciju signala neophodno je dobro koncentrisati energiju signala duž  $IF$ . Kako reassignment distribucije idealno lokalizuju linearne  $FM$  signale, posmatrana je suma dva linearna  $FM$  signala:

$$x(t) = e^{j16\pi t^2 + j24\pi t} + e^{j16\pi t^2 - j24\pi t} \quad (3.18)$$

zahvaćena  $CGWN$  varijanse  $\sigma_v^2$ . Posmatrani su  $SPEC$  ( $L_d = 0$ ),  $SM$  za  $L_d = 1, 2, 3, 4$  i odgovarajuće reassignment ( $RTF$ ) distribucije. Odnos energija duž  $IF$  i van ovog regiona definisan je kao:

$$B = 10 \log \frac{\int \int_{(t,\omega) \in R} TF(t,\omega) dt d\omega}{\int \int_{(t,\omega) \notin R} TF(t,\omega) dt d\omega}. \quad (3.19)$$

Oblast  $R$  odgovara komponentnama signalna. Odnos  $B$  za različite distribucije (različito  $L_d$ ), kao funkcija odnosa šum-signal ( $\sigma_v/A$ ), prikazan je na slici 3.8. Nemodifikovane distribucije su označene sa  $TF$ . Npr., za  $\sigma_v/A = 1$  modifikovani  $SM$  za  $L_d = 4$



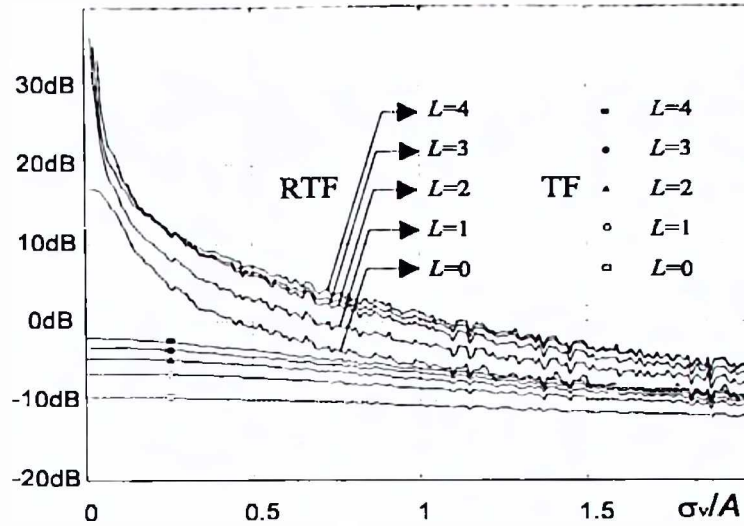
Slika 3.7: Modifikovani S-metod sa vremenskim pomjerajem.

daje odnos  $B$  veći za  $6.5[dB]$  nego modifikovani  $SPEC$ , ili odgovarajući nemodifikovani  $SM$ . Proširivanje konvolucionog prozora  $P(\theta)$  ne produkuje dalju koncentraciju auto-članova, odnosno dovelo bi do veće akumulacije šuma [226].

### 3.5 Veza frakcione Fourierove transformacije i transformacija koordinata vremensko-frekvencijskih predstavljanja

U posljednje vrijeme velika pažnja posvećuje se izučavanju frakcione Fourierove transformacije ( $FRFT$ ) i njenim primjenama u kvantnoj mehanici [258, 259] i optici [260]-[262]. Veliki broj radova ispituje osobine ove transformacije [282]-[284]. Veoma interesantan pregled osobina  $FRFT$ , sa aplikacijama u obradi signala i vezama sa  $TF$  transformacijama, dat je u [263]-[265]. Diskretna realizacija je razmatrana u [266]-[274]. Za numeričke realizacije, u okviru ovog rada, biće korišćen pristup koji su dali Catagay i Ozatkas u [270, 271]. Kao izvor ove transformacije mogu poslužiti matematički radovi [259, 275]. U novije vrijeme, značajnom povećanju pažnje, koja se posvećuje ovoj transformaciji, doprinijeli su radovi L.B. Almeide [263]. Najnovija istraživanja dovela su do primjene  $FRFT$  u dekompoziciji i filtriranju signala [276]-[281].

$FT$  normalizovana faktorom  $1/\sqrt{2\pi}$  može se shvatiti kao rotiranje signala  $x(t)$  u  $TF$  ravni za ugao  $\pi/2$  (slika 3.9), a inverzna  $FT$  kao rotiranje signala za ugao  $-\pi/2$ . Uzastopnom, četverostrukom primjenom  $FT$  na signal dobija se polazni signal, odnosno rotacija za ugao  $4 \cdot \pi/2 = 2\pi$  u  $TF$  ravni.  $FRFT$  se može tretirati kao rotiranje signala



Slika 3.8: Odnos koncentracija duž trenutnih frekvencija linearnih FM signala i van ove oblasti (TF označava bilinearna vremensko-frekvencijska predstavljanja, dok su RTF odgovarajuće modifikovane distribucije.).

za proizvoljan ugao  $\alpha$  u  $TF$  ravni:

$$X_{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_{\alpha}(u, t) dt, \quad (3.20)$$

gdje je:

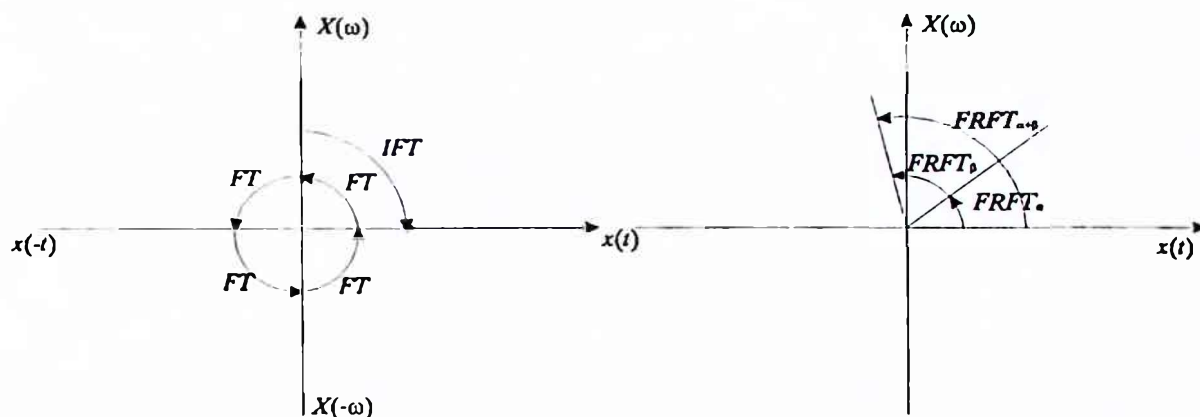
$$K_{\alpha}(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j(u^2+t^2)/2 \cot \alpha - jut \csc \alpha} & \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(t-u) & \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(t+u) & \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.21)$$

Inverzna  $FRFT$  je data kao:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(u) K_{-\alpha}(u, t) du. \quad (3.22)$$

$FRFT$  je unitarna transformacija, koja se razvija preko skupa Hermitskih funkcija [275]. Neke od fundamentalnih osobina  $FRFT$  su: 1) Specijalni slučajevi: a) za  $\alpha = 2k\pi$ ,  $X_{\alpha}(u) = x(u)$ ; b) Za  $\alpha = \pi + 2k\pi$ ,  $X_{\alpha}(u) = x(-u)$ ; c) Za  $\alpha = \pi/2 + 2k\pi$ ,  $X_{\alpha}(u) = X(u)$ ; 2) Aditivnost po uglu:  $FRFT_{\beta}\{X_{\alpha}(u)\} = X_{\alpha+\beta}(u)$ , gdje je  $FRFT_{\beta}$  oznaka  $FRFT$  za ugao  $\beta$ ; 3) Inverzna  $FRFT$  jednaka je  $FRFT$  za ugao  $-\alpha$ .

U Tabeli 9 u Prilogu date su  $FRFT$  za neke oblike signala.  $FRFT$  je našla veliku primjenu u  $TF$  analizi [171, 263], [285]-[288]. U [171] analizirana je transformacija koordinata  $AF$  kao jedno od fundamentalnih predstavljanja signala [289, 290]. Naime, traži



Slika 3.9: a) Ilustracija FRFT u vremensko-frekvencijskoj ravni; b) Ilustracija aditivnosti po uglu.

se signal  $x_\Lambda(t)$  takav da je njegova  $AF$  jednaka  $A(a\theta + b\tau, c\theta + d\tau)$ , gdje je transformacija definisana unimodularnom matricom (matricom sa jediničnom determinantom)  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1. \quad (3.23)$$

Unimodularnost matrice  $\Lambda$  mora biti zadovoljena radi postojanja inverzne transformacije. Primjenom transformacije date matricom  $\Lambda^{-1}$  na signal  $x_\Lambda(t)$  dobija se polazni signal  $x(t)$ , odnosno polazna transformacija u ambiguity domenu. Matrica inverzne transformacije je takodje unimodularna. U radu [286] je uočeno da je  $FRFT$ , zapravo specijalni slučaj transformacije koordinata za transformacionu matricu:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

U ovom slučaju važi da je  $x_\Lambda(t) = X_\alpha(t)$ . Dakle, rotaciji  $AF$  odgovara  $FRFT$  za isti ugao. Signal  $x_\Lambda(t)$  se, na osnovu [171], može izraziti kao:

$$x_\Lambda(t) = C \left\{ [x(t)e^{j\alpha_1 t^2/2}] *_t e^{jt^2/(2\beta_1)} \right\} e^{j\alpha_2 t^2/2}, \quad (3.25)$$

gdje je  $*_t$  oznaka konvolucije u vremenskom domenu. Vrijednosti parametara su  $\alpha_1 = (1 - a)/c$ ,  $\beta_1 = -c$  i  $\alpha_2 = (1 - d)/c$  gdje  $c \neq 0$ . Za  $c = 0$  dobija se veoma sličan oblik relaciji (3.25), koji se može naći u [171].

Važno je uočiti da transformacija signala  $x_\Lambda(t)$  transformacionom matricom  $K$  dovodi do signala  $x_{K\cdot\Lambda}(t)$ , koji, u opštem slučaju, nije jednak  $x_{\Lambda\cdot K}(t)$  zbog nekomutativnosti operacije matičnog množenja ( $\Lambda \cdot K \neq K \cdot \Lambda$ ). Međutim, za matrice rotacije

tipa (3.24) važi komutativnost, tako da važi  $X_{\alpha+\beta}(u) = X_{\beta+\alpha}(u)$  za proizvoljne uglove  $\alpha$  i  $\beta$ .

Isti zaključci važe i za transformaciju koordinata  $WD$ , s tim što rotacija signala za ugao  $\alpha$  dovodi do rotacije koordinata  $WD$  za ugao  $-\alpha$  [286, 287]. Slično, važi za distribucije  $CD$  klase pod uslovom da je jezgro distribucije u  $TF$  domenu sferno-simetrično  $\Pi(t, \omega) = f(\sqrt{t^2 + \omega^2})$  [285].

**Primjer 1.** Radonove transformacije  $AF$  i  $WD$  korišćene su u cilju odredjivanja pravca linearnog  $FM$  signala i za dizajn jezgra distribucije [23, 56, 97, 249, 250]. Ove transformacije su ekvivalentne kvadratu modula  $FRFT$  za dati ugao. Veoma efikasno odredjivanje pravca linearnog  $FM$  signala može se obaviti i korišćenjem transformacione matrice:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

što je prostije nego rotacija, odnosno  $FRFT$ . Ovoj transformacionoj matrici odgovara  $\Lambda_\Lambda(\theta, \tau) = A(\theta, \theta/\beta + \tau)$ . Transformacija se može odrediti kao izlaz iz kvadratno faznog filtra  $x_\Lambda(t) = x(t) * e^{-j\beta t^2/2}$ . Za linearni  $FM$  signal  $x(t) = \exp(j\omega_0 t + j\gamma t^2/2)$  dobija se:

$$x_\Lambda(t) = e^{-j\beta t^2/2} \sqrt{\frac{2\pi j}{\gamma - \beta}} e^{j(\omega_0 + \gamma t)^2/2(\gamma - \beta)}, \quad (3.27)$$

odnosno  $|x_\Lambda(t)|^2 = \frac{2\pi}{|\gamma - \beta|}$ . Ovaj izraz dostiže maksimum za  $\gamma = \beta$ , a zatim se na mjestu nadjenog maksimuma  $|x_\Lambda(t)|^2$ , mijenjajući  $\beta$ , detektuje pravac  $g = \tan(\varphi) = \beta$  linearnog  $FM$  signala u ambiguity ravni. Po vremenskoj osi maksimum je lociran u trenutku  $t$  tako da je  $\omega_0 + \gamma t = 0$  dok je  $x_\Lambda(t) = e^{-j\gamma t^2/2} \delta(\omega_0 + \gamma t)$ . Ova relacija, sa određenim koeficijentom pravca  $\beta = \gamma$ , determiniše noseću frekvenciju  $\omega_0$ . Ovaj metod je linearan i može se koristiti i kod multikomponentnih signala. Npr., posmatra se signal  $x(t) = A \exp(j2\pi t + j4\pi t^2/2) + B \exp(j3\pi t - j5\pi t^2/2)$ . U skladu sa (3.27), transformacija ima maksimalnu vrijednost  $|x_\Lambda(t)|^2$  za  $\beta_1 = 4\pi$  i  $\beta_2 = -5\pi$ . Maksimumi su locirani u trenucima  $t_1$  i  $t_2$  definisanim sa  $t_1\beta_1 + 2\pi = 0$  i  $t_2\beta_2 + 3\pi = 0$  i lociranim na nosećoj frekvenciji. Ovo, stoga, može značajno da simplifikuje kompleksna izvodjenja i definicije koje su prisutne u primjeni Radonove transformacije na  $AF$  ili  $WD$  [23, 56, 97, 249, 250].

**Primjer 2.** Skalirani signal  $x(kt)$  je neophodan u nekoliko  $TF$  distribucija, kao što su polinomijalna Wigner-Villeova transformacija [112, 194] i  $L - WD$  [109, 110, 202]. Najčešće se odredjuje interpolacijom i preodabiranjem. Skalirani signal, koji je neophodan u ovim distribucijama, može se dobiti iz generalizovanog oblika  $FRFT$  (3.23), sa transformacionom matricom:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad (3.28)$$



kojoj odgovara transformacija signala:

$$x_{\Lambda}(t) = C \left( \left\{ [x(t) * e^{jt^2/2\beta_1}] e^{j\alpha_1 t^2/2} \right\} * e^{-jt^2/2\beta_2} e^{-j\alpha t^2/2} \right), \quad (3.29)$$

gdje su  $\beta_1 = (k^2 - k)/\alpha$ ,  $\alpha_1 = \alpha/k$ ,  $\beta_2 = (1 - k)/\alpha$  i  $\alpha$  je proizvoljna konstanta [171]. Ovaj oblik ne zahtijeva interpolaciju za dobijanje visokokoncentrisanih distribucija višeg reda [171, 286].

Ovo su samo dva primjera u kojima se može primijeniti generalizovana *FRFT*, kao opšti slučaj transformacije koordinata *AF* i *WD*, na jednostavniji ili efikasniji način u odnosu na prostu rotaciju [286].

### 3.6 Transformacija koordinata L-Wignerove distribucije

Transformacija koordinata može se primijeniti na  $L - WD$  kao distribuciju višeg reda. Ako se traži signal koji daje  $L - WD$  sa transformisanim koordinatama  $LWD(at + b\omega, ct + d\omega)$ , dobijaju se slijedeća tri slučaja [171, 288]:

1) Za  $b \neq 0$ :

$$x_{\Lambda}(t) = k_1 \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^L(u) e^{j\frac{L}{2} \left( \frac{1-a}{b} \right) u^2} e^{-j\frac{Lc(u-t)^2}{2b}} du \right)^{1/L} e^{j\frac{1-d}{b} t^2/2}, \quad (3.30)$$

gdje je  $k_1$  takvo da je  $|k_1| = (1/2\pi|b|)^{1/2L}$ .

2) Za  $c \neq 0$ :

$$x_{\Lambda}(t) = k_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^L(u_1) e^{jL\frac{c(u_1-u_2)^2}{2(1-a)}} e^{-jLcu_2^2/2} e^{jLc\frac{(t-u_1)^2}{2(1-d)}} du_1 du_2 \right)^{1/L}, \quad (3.31)$$

gdje je  $k_2$  takvo da je  $|k_2| = \left( L|c|/2\pi\sqrt{|(1-a)(1-d)|} \right)^{1/L}$ .

3) Za  $b = c = 0$  svodi se na signal dat relacijom (3.29).

Ako se transformacija koordinata  $L - WD$  svede na rotaciju, odnosno  $a = d = \cos \alpha$  i  $c = -b = \sin \alpha$  u relaciji (3.30), birajući konstantu  $k_1$  tako da rotacija u suprotnom smjeru za isti ugao  $\alpha$  daje početnu transformaciju, dobija se L-frakciona Fourierova transformacija ( $L - FRFT$ ) [288]:

$$X_{L,\alpha}(u) = \left( \frac{L(1 - j \cot \alpha)}{2\pi} \right)^{1/2L} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^L(t) e^{j\frac{L}{2} \cot \alpha (u^2 + t^2) - jLut \csc \alpha} dt \right)^{1/L}. \quad (3.32)$$

Inverznoj  $L - FRFT$  odgovara rotacija za ugao  $-\alpha$ :

$$x(t) = \left( \frac{L(1 + j \cot \alpha)}{2\pi} \right)^{1/2L} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X_{L,\alpha}^L(u) e^{-j\frac{L}{2} \cot \alpha (u^2 + t^2) + jLut \csc \alpha} du \right)^{1/L}. \quad (3.33)$$

Osnovne osobine  $L - FRFT$  su: 1)  $\alpha = 0 \Rightarrow X_{L,0}(u) = x(u)$ ; 2)  $\alpha = \pi/2 \Rightarrow X_{L,\pi/2}(u) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{1/2L} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^L(t) e^{-jL\omega t} dt\right)^{1/L}$ , dok se za  $L = 1$  dobija  $FT$  skalirana faktorom  $1/\sqrt{2\pi}$ ; 3)  $\alpha = -\pi \Rightarrow X_{L,-\pi}(u) = x(-u)$ ; 4)  $L = 1 \Rightarrow X_{L,\alpha}(u) = X_{\alpha}(u)$ ; 5)  $L - FRFT$  je aditivna po uglu i ujedno komutativna. Ako se  $L - FRFT$  za  $L$  i  $\beta$  primijeni na  $X_{L,\alpha}(u)$  dobija se  $X_{L,\alpha+\beta}(u)$ .

$L - FRFT$  se može računati po sljedećim koracima: stepenovanje signala sa  $L$ , množenje sa chirp signalom (linearnim  $FM$  signalom), konvolucija sa chirpom, stepenovanje sa  $1/L$ , množenje sa chirpom i konstantnim članom.

$L - FRFT$  se može izraziti preko  $FRFT$  kao:

$$X_{L,\alpha}(u) = L^{1/2L} \left(\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}\right)^{\frac{L-1}{2L}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^L X_{\alpha}(u_i) du_i\right) e^{-j\frac{\cot \alpha}{2}(\sum_{i=1}^L u_i^2 - u^2)} \delta(Lu - \sum_{i=1}^L u_i^2) \right) \quad (3.34)$$

što se za  $L = 2$  svodi na:

$$X_{2,\alpha}(u) = \left(\frac{1 + j \cot \alpha}{\pi}\right)^{1/4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(u + \tau) X_{\alpha}^*(u - \tau) e^{-j \cot \alpha \tau^2} d\tau\right)^{1/2}. \quad (3.35)$$

$L - FRFT$  za sumu stepena  $L = k + m$  može se izraziti preko  $L - FRFT$  stepena  $k$  i  $m$  kao:

$$X_{k+m,\alpha}(u) = \left(\frac{(k+m)(1 + j \cot \alpha)}{2\pi km}\right)^{\frac{1}{2(k+m)}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} X_{k,\alpha}^k(u + \tau/k) X_{m,\alpha}^m(u - \tau/m) e^{-j\tau^2(\frac{k+m}{km})/2} d\tau\right)^{1/(k+m)}. \quad (3.36)$$

U Tabeli 10 u Prilogu date su  $L - FRFT$  nekih karakterističnih signala. U radu [283] proučavana je  $FRFT$  proizvoda i konvolucije dva signala. Analogno postupcima opisanim u [283], dobija se da je  $L - FRFT$  proizvoda signala  $z(t) = x(t)y(t)$  data relacijom:

$$Z_{L,\alpha}(u) = \left(\frac{L(1 - j \cot \alpha)(1 - \cot \beta \cot \gamma + j \cot \alpha \cot \beta)}{2\pi} \sin^2 \beta \sin^2 \gamma\right)^{1/2L} \times e^{ju^2/2\left(\cot \beta\left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{4 \sin^2 \alpha}\right) + \cot \gamma\left(1 - \frac{\sin^2 \gamma}{4 \sin^2 \alpha}\right)\right)} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} X_{L,\beta}^L\left(\frac{u \sin \beta}{2 \sin \alpha} + \tau \sin \beta\right) Y_{L,\gamma}^L\left(\frac{u \sin \gamma}{2 \sin \alpha} - \tau \sin \gamma\right) e^{-j\frac{L}{2 \sin \alpha} \tau^2 (\cos \beta \sin \beta - \cos \gamma \sin \gamma)} e^{-j\frac{L}{2 \sin \alpha} \tau^2 (\cos \beta \sin \beta + \cos \gamma \sin \gamma)} d\tau\right)^{1/L}, \quad (3.37)$$

gdje je  $\cot \alpha = \cot \beta + \cot \gamma$ . Relacija (3.37) može se znatno pojednostaviti uzimanjem  $\beta = \alpha$  i  $\gamma = \pi/2$  (ili  $\beta = \pi/2$  i  $\gamma = \alpha$ ):

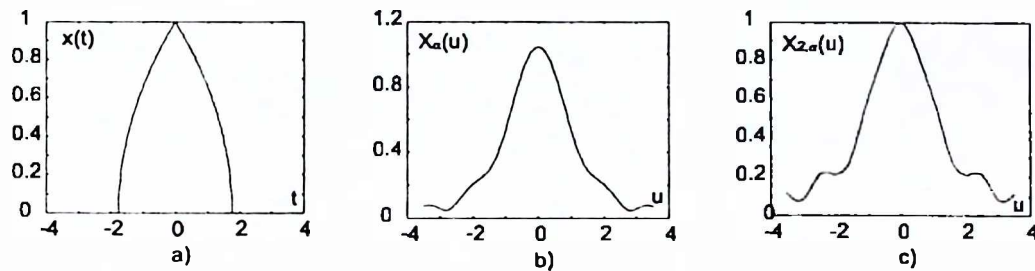
$$Z_{L,\alpha}(u) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{1/2L} e^{j\frac{L}{8} \cot \alpha} \times$$

$$\times \left( \int_{-\infty}^{\infty} X_{L,\alpha}^L \left( \frac{u}{2} + \tau \sin \alpha \right) Y_{L,\alpha}^L \left( \frac{u \csc \alpha}{2} - \tau \sin \alpha \right) e^{-jL\tau \cos \alpha \sin \alpha / 2 (u - \tau)} d\tau \right)^{1/L}. \quad (3.38)$$

**Primjer.** Posmatra se kvadratni korijen trougaonog prozora:

$$x(t) = \sqrt{1 - \frac{2|t|}{T}} \text{rect}_T(t), \quad (3.39)$$

gdje je  $\text{rect}_T(t)$  pravougaoni prozor koji ima vrijednost 1 za  $t \in [-T/2, T/2]$  i 0 drugdje. Signal (3.39) prikazan je na slici 3.10a. Na slici 3.10b data je FRFT signala (3.39) za  $\alpha = \pi/4$ , dok je na slici 3.10c prikazana  $L$ -FRFT za isto  $\alpha$  i  $L = 2$ . Isti rezultati koji se mogu dobiti za  $L$ -FRFT definiciono, mogu se dobiti i pomoću relacije (3.35), sumiranjem odgovarajućeg reda (koji zamjenjuje integral) preko nekoliko članova sa malom greškom.



Slika 3.10: a) Signal kvadratnog korjena trougaonog prozora; b) FRFT signala; c)  $L$ -FRFT signala za  $L=2$ .

## **GLAVA IV**

---

## 4. NEPARAMETARSKI VREMENSKO-FREKVENCIJSKI METODI ZA ESTIMACIJU SIGNALA

Neparametarski metodi se primjenjuju za estimaciju parametara signala čiji oblici nijesu unaprijed poznati. Dakle, zahtjevi, koji se postavljaju u odnosu na ove metode, su znatno kompleksniji. Pored metoda opisanih u [220, 291] i onih iz preglednih radova [50, 51], izdvaja se metod koji su publikovali Wang i Amin [64], koji uspostavlja vezu  $IF$  estimacije sa analizom prolazaka signala kroz nulu (*zero-tracking*). Osnovni neparametarski metod za  $IF$  estimaciju bazira se na odredjivanju frekvencije na kojoj je distribucija u datom trenutku maksimalna. Ovaj koncept je prikazan u okviru realizacije  $VI$  u drugom poglavlju ove disertacije.

Neparametarski regresioni metod, koji su razvili Goldenshluger i Nemirovski [292, 293], polazi od posmatranja neke veličine na čiju estimaciju utiču nesavršenost metoda i greška usljed spoljnih uticaja (šumova). Za realizaciju metoda, neophodno je utvrditi statističko odstupanje (*bias*) i varijansu estimacije veličine, a zatim procjeniti srednju kvadratnu vrijednost greške ( $MSE$  - *mean square error*) prema izrazu:

$$E\{\tilde{\xi}^2, p\} = bias^2(\tilde{\xi}, p) + var(\tilde{\xi}, p) \quad (4.1)$$

gdje su  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$  greška estimacije,  $\xi$  prava vrijednost i  $\hat{\xi}$  estimacija. U slučaju da se *bias* i varijansa mijenjaju na različite načine u zavisnosti od parametra  $p$  (npr. *bias* raste sa povećanjem  $p$  dok se varijansa smanjuje ili obrnuto), često se teorijski može odrediti vrijednost parametra  $p$  ( $p_{opt}$ ) koja minimizira  $MSE$ . U radovima Goldenshulgera i Nemirovskog [292, 293]  $p_{opt}$  je odredjivana statističkim metodima (na osnovu velikog broja snimanja veličine), zasnovanim na presijecanju intervala povjerenja (*confidence intervals*).

Metod je u  $TF$  analizi primijenjen na periodogram [131]. Na osnovu zapažanja da se  $MSE$  sporo mijenja u okolini tačke  $p_{opt}$ , metod je, u radovima [60]-[62], [231], znatno unaprijeđen i sveden na traženje optimalne vrijednosti parametra  $p_{opt}$  (u ovom slučaju to je širina prozora koji se koristi u  $TF$  transformacijama) u skupu širina



prozora sa malo elemenata. U radovima [60]-[62], [231], metod je primijenjen na  $IF$  estimaciju pomoću periodograma,  $WD$  i  $L-WD$ , dok je u [294] primijenjen na  $IF$  estimaciju pomoću polinomijalne Wigner-Villeove distribucije. Metod je primijenjen i kod lokalnog polinomijalnog periodograma [118]. Veoma simplifikovana verzija ovog metoda može se upotrijebiti i za estimaciju vrijednosti distribucije, kao što je to uradjeno u radu [231]. Metod je korišćen za određivanje pravca prostiranja elektromagnetnog talasa kod antena (*DOA - direction of arrival*) i na identifikaciju sistema pomoću adaptivnog *LMS* algoritma [295, 296]. U okviru prvog dijela ovog poglavlja, biće razmotrena  $IF$  estimacija korišćenjem  $TF$  transformacija, prije svega  $WD$ . Predloženo rješenje dobro funkcioniše za signale zahvaćene bijelim Gausovskim šumom. Međutim, u slučaju da na signal djeluju impulsne smetnje, odnosno tzv. *heavy tailed* šumovi, kakvi se često javljaju prilikom prenosa informacija kroz komunikacione kanale,  $TF$  transformacije  $CD$  klase ne daju zadovoljavajuće rezultate. Stoga je, u drugom odjeljku, opisan modifikovani periodogram (robustni  $M$ -periodogram) [297, 298] i njegova primjena na  $IF$  estimaciju. U okviru ovog odjeljka, metod za neparametarsku estimaciju prilagodjen je ovoj transformaciji. Robusna  $WD$  je razmatrana u trećem odjeljku, gdje su date statističke i numeričke karakteristike ovog  $TF$  predstavljanja u  $IF$  estimaciji. U četvrtom odjeljku metod je primijenjen na estimaciju same distribucije (odnosno posredno amplitude signala). Generalizovan je za višedimenzionalne signale. Pokazano je da se, u ovom slučaju, metod može značajno simplifikovati i svesti na posmatranje dvije vrijednosti širine prozora. Značajan problem u analizi signala, koji brzo mijenjaju  $IF$ , je njihovo efikasno filtriranje. U radu je demonstriran koncept vremenski-promjenljivog filtriranja uz upotrebu  $TF$  distribucija. O vremenski-promjenljivom filtriranju biće riječi u petom odjeljku ovog poglavlja. Za vremenski-promjenljivo filtriranje primijenjeni su metodi opisani u četvrtom odjeljku što je dovelo do uspješnog filtriranja kako jednodimenzionalnih tako i višedimenzionalnih signala.

## 4.1 Estimacija trenutne frekvencije adaptivnim vremensko-frekvencijskim distribucijama

U drugoj glavi disertacije izvedeni su izrazi za bias i varijansu  $IF$  estimacije kod  $WD$ . Zanimajući grešku kvantizacije,  $MSE$   $IF$  estimacije kod  $WD$  za pravougaoni prozor može se izraziti kao  $E\{(\Delta\omega(t))^2\} = 6\sigma_v^2 T/A^2 h^3 + [\phi^{(3)}(t)h^2/40]^2$  gdje su  $T$  korak odabiranja,  $\phi^{(3)}(t)$  treći izvod faze signala,  $A$  konstantna amplituda signala i  $\sigma_v^2$  varijansa  $CGWN$  koji je zahvatio signal.  $IF$  estimacija je označena kao  $\hat{\omega}(t)$ , prava vrijednost  $IF$  sa  $\omega(t)$ , dok je  $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \hat{\omega}(t)$  greška  $IF$  estimacije. Optimalna vrijednost širine prozora  $h$  može se odrediti diferenciranjem  $MSE$  po  $h$  [62]

$\partial E\{(\Delta\omega(t))^2\}/\partial h|_{h=h_{opt}} = 0$ , pa se dobija:

$$h_{opt}(t) = \sqrt[7]{\frac{7200\sigma_v^2 T}{A^2[\phi^{(3)}(t)]^2}}. \quad (4.2)$$

Kod  $TF$  transformacija,  $MSE$  se može izraziti u obliku  $E\{(\Delta\omega(t))^2\} = ah^{-n} + bh^m$ , gdje prvi član potiče od varijanse  $IF$  estimacije dok drugi potiče od biasa. U ovom slučaju, optimalna vrijednost širine prozora jednaka je  $h_{opt}(t) = \sqrt[7]{na/mb}$ . Vrijednost za  $h_{opt}(t)$  (4.2) ne može da posluži za optimizaciju širine prozora jer u izrazu figuriše vrijednost biasa, koji zavisi od nepoznatog signala. U rješenju figurišu parametri problema koji se želi riješiti što onemogućava direktnu primjenu ove relacije. Za  $h = h_{opt}$  odnos biasa i varijanse je konstantan, i iznosi:

$$bias(t, h_{opt}) = \sqrt{\frac{m}{n}}\sigma(h_{opt}), \quad (4.3)$$

što se može iskoristiti u daljem izvodjenju. Pretpostavljajući da je  $IF$  Gausovska slučajna veličina, može se uvesti relacija:

$$|\omega(t) - (\hat{\omega}_h(t) - bias(t, h))| \leq \kappa\sigma(h), \quad (4.4)$$

koja važi sa vjerovatnoćom  $P(\kappa)$ . Npr.,  $P(2) = 0.95$  (pravilo "dviije sigme"),  $P(3) = 0.99$ ,  $P(4) = 0.999$ , itd. Dakle,  $IF$  nije moguće potpuno tačno odrediti, ali se može uočiti da se  $MSE$  relativno sporo mijenja u okolini tačke  $h = h_{opt}(t)$ . Problem se može simplifikovati uvodjenjem diskretnog skupa prozora [62]:

$$\mathbf{H} = \{h_s, h_s = 2h_{s-1}, s = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (4.5)$$

Zbog pogodnosti za  $FFT$  realizaciju, pretpostavljen je diadički skup prozora širine  $2^k$  odbiraka. Obično se u primjerima uzima  $N_0 = 4$  ili  $N_0 = 8$  odbiraka, a zatim naredni  $N_1 = 2N_0$ ,  $N_2 = 2N_1$ , ...,  $N_s = 2N_{s-1}$ ,  $s = 1, 2, \dots, J$ . Red veličine najmanje  $MSE$  za prozore iz skupa  $\mathbf{H}$  je isti kao u slučaju izbora  $h_{opt}(t)$ . Za svaki prozor iz posmatranog skupa, odnosno za svaku  $IF$  estimaciju ( $IF$  estimacije su određene kao frekvencija na kojoj je odgovarajuća  $WD$  maksimalna), formira se interval povjerenja  $D_s = [L_s, U_s]$ . Gornja i donja granica intervala date su kao:

$$L_s = \hat{\omega}_{h_s}(t) - (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s); \quad U_s = \hat{\omega}_{h_s}(t) + (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h_s), \quad (4.6)$$

gdje su  $\hat{\omega}_{h_s}(t)$  estimacije dobijene sa odgovarajućim širinama prozora  $h = h_s$ . Pod pretpostavkom da je  $h_{opt} \in \mathbf{H}$ , može se zapisati  $h(p) = h_{opt}2^p$ ,  $p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , gdje se za  $p = 0$  dobija optimalna širina prozora. Tada važi [63]:

$$\sigma(h(p)) = 2^{-pm/2}\sigma(h_{opt}); \quad bias(t, h(p)) = 2^{pn/2}\sqrt{\frac{m}{n}}\sigma(h_{opt}), \quad (4.7)$$

interval povjerenja se, u ovom slučaju, može zapisati kao:

$$D(p) = [\hat{\omega}_{h(p)}(t) - (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(p)), \hat{\omega}_{h(p)}(t) + (\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(p))]. \quad (4.8)$$

Optimalni prozor je najveći za koji se, još uvijek, presijecaju intervali povjerenja, odnosno za koji važi:

$$D_s \cap D_{s+1} \neq \emptyset \text{ i } D_{s+1} \cap D_{s+2} = \emptyset. \quad (4.9)$$

Da bi ovo bilo zadovoljeno, gornja granica intervala povjerenja  $D_s$  mora da bude veća od donje granice intervala povjerenja  $D_{s+1}$  i da gornja granica intervala povjerenja  $D_{s+1}$  bude manja od donje granice intervala povjerenja  $D_{s+2}$ . Ovo se može zapisati kao:

$$\min\{U_0\} \geq \max\{L_1\}; \quad \max\{U_1\} < \min\{L_2\}. \quad (4.10)$$

gdje je:

$$U_1 \in [\omega(t) + \text{bias}(h(1)) + \Delta\kappa\sigma(h(1)), \omega(t) + \text{bias}(h(1)) + (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1))] \quad (4.11)$$

i  $\min\{U_1\} = \omega(t) + \text{bias}(h(1)) + \Delta\kappa\sigma(h(1))$ . Slične relacije mogu se napisati i za  $U_0$ ,  $L_1$  i  $L_2$ . Na osnovu ovoga, relacije (4.10) svode se na:

$$\text{bias}(h(0)) + \Delta\kappa\sigma(h(0)) \geq \text{bias}(h(1)) - \Delta\kappa\sigma(h(1)) \quad (4.12)$$

$$\text{bias}(h(1)) + (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(1)) < \text{bias}(h(2)) - (2\kappa + \Delta\kappa)\sigma(h(2)). \quad (4.13)$$

Uvrštavajući vrijednosti iz relacija (4.7) u (4.12) i (4.13), dobija se:

$$\Delta\kappa \leq \sqrt{\frac{m}{n}} 2^{m/2} \frac{2^{n/2} - 1}{2^{m/2} + 1}. \quad (4.14)$$

Za vrijednost  $\Delta\kappa = 0$  dobija se:

$$\kappa < \sqrt{\frac{m}{n}} 2^{(m/2-1)} \frac{2^{n/2} - 1}{2^{m/2} + 1} (2^{(m+n)/2} - 1). \quad (4.15)$$

Vrijednosti  $\kappa$  i  $\Delta\kappa$  odredjuju granice valjanosti primijenjenog metoda. Tako se za  $\kappa + \Delta\kappa = 8$  dobija  $P(8) = 0.9999$ . Dakle, u skladu sa izvedenim relacijama i činjenicama opisanim u radovima [42], [60]-[62], za  $IF$  estimaciju pomoću  $WD$ , može se primjeniti slijedeći algoritam:

1. Posmatra se skup prozora opisanih relacijom (4.5);
2. Odredi se  $WD$  za svaku od posmatranih širina prozora;
3. Estimira se  $IF$  za svaku od dobijenih širina prozora kao pozicija na kojoj je odgovarajuća  $WD$  maksimalna u posmatranom trenutku  $t$ ;
4. Vrijednost varijanse  $IF$  estimacije, koja figuriše u izrazima za algoritam, procjenjuje se kao:  $\sigma(h_s) = \sqrt{\frac{6\sigma_v^2 T}{\lambda^2 h_s^3}}$ , dok se varijansa šuma  $\sigma_v^2$  i amplituda signala mogu procijeniti kao:

$$|\hat{A}|^2 + \hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |y(nT)|^2; \quad (4.16)$$

Ako je amplituda signala znatno veća od varijanse šuma važi procjena [63]:

$$\hat{\sigma}_{vr} = \text{median}\{| \text{Re } y(nT) - \text{Re}\{y((n-1)T)\}|/0.6745, n = 2, \dots, N\} \quad (4.17)$$

$$\hat{\sigma}_{vi} = \text{median}\{| \text{Im } y(nT) - \text{Im}\{y((n-1)T)\}|/0.6745, n = 2, \dots, N\} \quad (4.18)$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = (\hat{\sigma}_{vr}^2 + \hat{\sigma}_{vi}^2)/2. \quad (4.19)$$

Sa  $y(nT)$  označen je signal zahvaćen šumom. U radu [286] opisani su načini na koje se može procijeniti vrijednost varijanse Gausovskog šuma u drugim slučajevima;

5. Optimalna širina prozora je najveća za koju važi relacija (4.9);

6. Posmatra se naredni trenutak  $t$  i vrši povratak na korak 3.

U radu [62] opisana je  $IF$  estimacija predloženim algoritmom kada se kao bazno  $TF$  predstavljanje koristi periodogram. Slična analiza može se obaviti i za  $L - WD$  [61, 299].

## 4.2 IF estimacija u uslovima impulsnih smetnji - Robusni spektrogram

Standardni  $SPEC$   $I_s(t, \omega)$  za signal  $x(t)$ , zasnovan na standardnoj  $STFT$  ( $\hat{C}_h(t, \omega)$ ), definisan je kao:

$$I_s(t, \omega) = |\hat{C}_h(t, \omega)|^2 \quad (4.20)$$

$$STFT(t, \omega) = \hat{C}_h(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n w_h(nT)} \sum_n w_h(nT) x(t + nT) \exp(-j\omega nT), \quad (4.21)$$

gdje su prozor  $w_h(nT) = \frac{T}{h} w(nT/h) \geq 0$ ,  $h > 0$  širina prozora i  $\sum_n w_h(nT) \rightarrow 1$  kada  $h/T \rightarrow \infty$ . Period odabiranja je označen sa  $T$ .  $STFT$  se može opisati kao rješenje sljedećeg optimizacionog problema:

$$\hat{C}_h(t, \omega) = \arg \min_C J(\omega, C), \quad (4.22)$$

gdje je:

$$J(\omega, C) = \sum_n w_h(nT) |x(t + nT) - C_h^*(t, \omega) \exp(j\omega nT)|^2 = \sum_n w_h(nT) F(e), \quad (4.23)$$

dok je "funkcija gubitaka" (*loss function*):

$$F(e) = |e(nT)|^2 = |x(t + nT) - C_h^*(t, \omega) \exp(j\omega nT)|^2. \quad (4.24)$$

Minimizacija za odredjivanje  $C$  obavlja se na osnovu  $\partial J(\omega, C)/\partial C^* = 0$ , odakle slijedi (4.21).

Pokazano je da drugi oblici funkcije gubitaka, kakva je na primjer  $F(c) = |c|$ , mogu dati veoma dobre rezultate u slučaju signala sa *heavy-tailed* šumovima [300, 301, 303].

Heavy-tailed šumovi su modeli impulsnih smetnji, koje se često pojavljuju prilikom prenosa signala u komunikacionim kanalima. Periodogram dobijen korišćenjem ove funkcije naziva se robusni  $M$ -periodogram [297, 298]. Odgovarajući robusni  $SPEC$  ima oblik:

$$I_A(t, \omega) = |\hat{C}_h(t, \omega)|^2; \quad \hat{C}_h(t, \omega) = \arg \min_C J(\omega, C) \quad (4.25)$$

$$J(\omega, C) = \sum_n w_h(nT) |x(t + nT) - C_h^*(t, \omega) \exp(j\omega nT)|. \quad (4.26)$$

Minimizacijom  $J(\omega, C)$  dobija se rješenje u obliku:

$$\hat{C}_h(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n d(nT)} \sum_n d(nT) x(t + nT) \exp(-j\omega nT) \quad (4.27)$$

$$d(nT) = \gamma(nT) / \sum_n \gamma(nT); \quad (4.28)$$

$$\gamma(nT) = w_h(nT) |x(t + nT) - C_h(t, \omega) \exp(j\omega nT)|^{-1}. \quad (4.29)$$

Skup jednačina (4.27) i (4.29) je nelinearan sa nepoznatom  $C_h(t, \omega)$ . Ovaj sistem se može riješiti korišćenjem sljedeće iterativne procedure [298, 304, 305]:

**Korak 0:** Inicijalizacija (računanje standardne  $STFT$ ):

$$C_h^{(0)}(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n w_h(nT)} \sum_n w_h(nT) x(t + nT) \exp(-j\omega nT) \quad (4.30)$$

$$\gamma^{(0)}(nT) = w_h(nT) |x(t + nT) - C_h^{(0)}(t, \omega) \exp(j\omega nT)|^{-1}, \quad (4.31)$$

$$d^{(0)}(nT) = \gamma^{(0)}(nT) / \sum_n \gamma^{(0)}(nT); \quad (4.32)$$

**Korak (i):**  $k = 1, 2, \dots, K$ :

$$C_h^{(k)}(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n d^{(k-1)}(nT)} \sum_n d^{(k-1)}(nT) x(t + nT) \exp(-j\omega nT) \quad (4.33)$$

$$\gamma^{(k)}(nT) = w_h(nT) |x(t + nT) - C_h^{(k)}(t, \omega) \exp(j\omega nT)|^{-1}, \quad (4.34)$$

$$d^{(k)}(nT) = \gamma^{(k)}(nT) / \sum_n \gamma^{(k)}(nT) \quad (4.35)$$

sa pravilom za zaustavljanje proračuna:

$$\hat{k} = \min_i \{k : |C_h^{(k)}(t, \omega) - C_h^{(k-1)}(t, \omega)| / |C_h^{(k-1)}(t, \omega)| \leq \eta, k \leq K\}, \quad (4.36)$$

gdje su  $\eta > 0$  i  $K$  dati;

**Korak (ii):** Za robusni  $SPEC$  usvaja se vrijednost  $I_A(t, \omega) = |C_h(t, \omega)|^2$ , gdje je  $C_h(t, \omega) = C_h^{(\hat{k})}(t, \omega)$ .

Eksperimenti pokazuju dobru konvergenciju algoritma. Za vrijednost  $\eta = 0.1$  uobičajeni broj iteracija je između  $\hat{k} = 3 \div 5$ , i nikada ne prelazi 15.



**Primjer 1.** Posmatrana je suma tri kompleksne sinusoide (ovdje je posmatran robusni  $M$ -periodogram, kao specijalni slučaj vremenski nezavisnog robusnog  $SPLC$ ):

$$x(t) = \exp(j0.15st) + \exp(j0.5st) + \exp(j0.85st), \quad (4.37)$$

gdje je  $s = N_w\pi/T_w$  maksimalna frekvencija signala trajanja  $T_w$  sa  $N_w$  odbiraka u prozoru. U primjeru je uzeto  $T_w = 2$  i  $N_w = 1024$ . Signal (4.37) je zahvaćen šumom  $\nu(t) = \nu_{CR}(t) + j\nu_{CI}(t)$ , gdje su  $\nu_{CR}(t)$  i  $\nu_{CI}(t)$  međusobno nezavisni šumovi sa Cauchyevom raspodjelom. Funkcija gustine raspodjele Cauchyevog šuma je:

$$g(x) = \frac{a}{\pi(1 + (ax)^2)}. \quad (4.38)$$

Cauchyev šum se može simulirati kao  $\nu_C(t) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sigma} \sqrt{e^{x^2/2\sigma^2} - 1}$ , gdje je  $x$  promjenljiva distribuirana Gausovski sa varijansom  $\sigma^2$  i  $a = \sqrt{\pi/2}/\sigma$ . Na slici 4.1a prikazan je signal (4.37) zahvaćen šumom, na slici 4.1b prikazan je standardni periodogram ovog signala, dok je na slici 4.1c prikazan robusni  $M$ -periodogram.

Kao drugi model heavy-tailed šuma može se koristiti:

$$\nu(t) = a(\nu_1^3(t) + j\nu_2^3(t)) \quad (4.39)$$

gdje su  $\nu_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  Gausovi bijeli šumovi sa jediničnom varijansom  $N(0, 1)$ . Sličan, model impulsnog šuma koji se često koristi je  $\nu(t) = \nu_1(t)/\nu_2(t) + j\nu_3(t)/\nu_4(t)$ , gdje su  $\nu_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  Gausovi bijeli šumovi sa varijansom  $\sigma_i$ . Veoma važna klasa šumova su generalizovani Gausovi šumovi:

$$f(x) = \frac{k}{2A(k)\Gamma(1/k)} e^{-\|x\|/A(k)}^k, \quad (4.40)$$

gdje je  $\Gamma(k)$  gama funkcija, data kao  $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$  i:

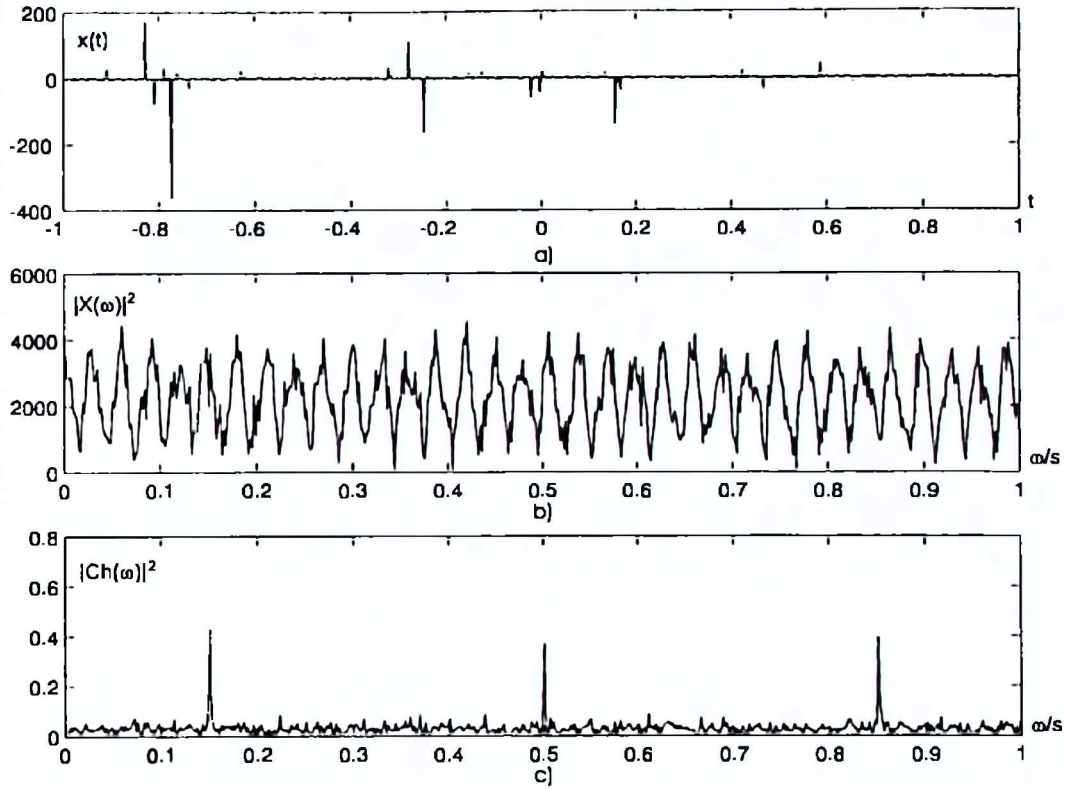
$$A(k) = \left[ \sigma^2 \frac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(3/k)} \right]^{1/2}. \quad (4.41)$$

Za  $k = 2$  dobija se standardni Gausovski šum, za  $k = 1$  šum sa Laplasovom raspodjelom, dok se za  $k = 0.5$  dobija model atmosferskog impulsnog šuma. Robusni  $M$ -periodogram se može odrediti i za višedimenzione signale. Npr., neka je data suma dvije  $2D$  kompleksne sinusoide:

$$x(t) = \exp(js(0.15t_1 + 0.85t_2)) + \exp(js(0.5t_1 + 0.5t_2)), \quad (4.42)$$

gdje je  $T_{w_1} = T_{w_2} = 2$  (trajanje signala po obje koordinate). Broj odbiraka po koordinatama je  $N_{w_1} = N_{w_2} = 256$  i  $s = N_{w_1}\pi/T_{w_1}$ . Signal (4.42) zahvaćen je šumom oblika:

$$\nu(t_1, t_2) = a(\nu_1^3(t_1, t_2) + j\nu_2^3(t_1, t_2)), \quad (4.43)$$

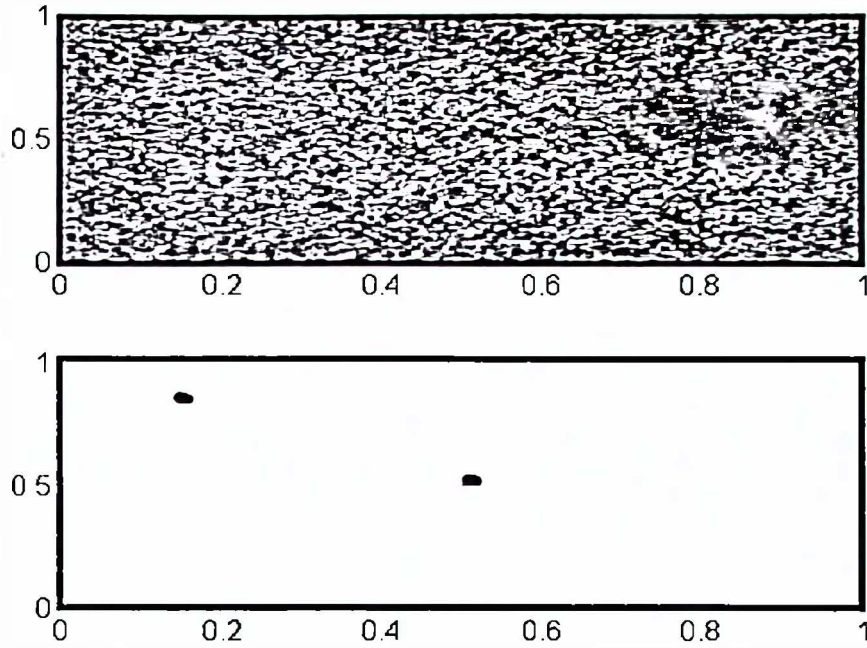


Slika 4.1: a) Suma kompleksnih sinusoida zahvaćenih Cauchyevim šumom; b) Standardni periodogram; c) Robusni periodogram.

gdje su  $\nu_i(t_1, t_2)$ ,  $i = 1, 2$  2D Gausovi bijeli šumovi sa jediničnom varijansom  $N(0, 1)$ . Na slici 4.2 prikazan je robusni i standardni periodogram signala (4.42) zahvaćenog šumom (4.43). U primjeru je uzeto  $a = 6$ . Jasna je prednost robusnog  $M$ -periodograma.

Robusni  $SPEC$  može da se, u skladu sa [42], [60]-[62], [298, 304, 305], koristi za estimaciju parametara signala zahvaćenog šumom  $x(nT) = s(nT) + \nu(nT)$  gdje su  $s(t) = Ae^{j\varphi(t)}$ ,  $n$  cijeli broj i  $T$  korak odabiranja. Kompleksni bijeli šum  $\nu(nT)$  ima parametre  $E\{\nu(nT)\} = 0$  i  $E\{|\nu(nT)|^2\} = \sigma_\nu^2$ . Po definiciji,  $IF$  je prvi izvod faze:  $\omega(t) = \varphi'(t)$  i može se estimirati kao:  $\hat{\omega}_h(t) = \arg \max_{\omega \in Q_\omega} I_A(t, \omega)$ . Primjena prozora  $\omega_h(nT)$  implementira ideju nepametarske  $IF$  estimacije kada je vremenski promjenljivo  $\omega(t)$  moguće procjeniti kao konstantu, u okviru uskog prozora  $\omega_h(nT)$  oko trenutka  $t$  [58, 127, 306]. U skladu sa [298], uz navedena ograničenja, mogu se izvesti asimptotske formule za varijansu i bias greške  $IF$  estimacije:  $\Delta\hat{\omega}_h(t) = \omega(t) - \hat{\omega}_h(t)$ , koje su date kao:

$$\text{var}(\Delta\hat{\omega}_h(t)) = V(F, G) \frac{T}{A^2 h^3} W_\omega + O(T/h^3); \quad (4.44)$$



Slika 4.2: Dvodimenzioni signal zahvaćen heavy tailed šumom: a) Standardni periodogram; b) Robusni  $M$ -periodogram.

$$E(\Delta\hat{\omega}_h(t)) = B_\omega h^2 \omega^{(2)}(t) + O(h^2). \quad (4.45)$$

Sa  $O(x)$  označana je mala vrijednost tako da  $O(x)/x \rightarrow 0$  kada  $x \rightarrow 0$ . Korišćene su oznake:

$$W_\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) u^2 du}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(u) u^2 du\right)^2}; \quad B_\omega = \frac{1}{3! \int_{-\infty}^{\infty} w(u) u^2 du} \int_{-\infty}^{\infty} w(u) u^4 du \quad (4.46)$$

$$V(F, G) = \int (F^{(1)}(v))^2 dG(v) / \left( \int F^{(2)}(v) dG(v) \right)^2 \quad (4.47)$$

$T \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $T/h^4 \rightarrow 0$ ,  $\omega^{(1)}(t) \neq 0$  i  $G$  je funkcija raspodjele šuma  $\nu(nT)$ , dok su  $F^{(1)}$  i  $F^{(2)}$  izvodi funkcije gubitaka  $F(e)$ .

#### Komentari:

1. Ako je šum Gausovski,  $\nu \sim N(0, \sigma^2/2)$  i funkcija gubitaka kvadratna  $F(e) = e^2$ , tada je  $V(F, G) = \sigma^2/2$ . Zamjenom ove vrijednosti u (4.45) dobijaju se poznate formule za varijansu greške  $IF$  estimacije dobijene pomoću standardne  $STFT$ . Ove formule se mogu dobiti kao specijalni slučajevi generalizovanih rezultata iz [58] i [118]. Slično se, za  $F(e) = |e|$ , dobija  $V(F, G) = \pi\sigma_v^2/2$ .

2. Faktor  $V(F, G)$  figuriše u formulama za varijansu. Tako, izbor funkcije gubitaka utiče samo na varijansu estimatora, ali ne i na bias. Formule za bias su iste i za robusne

i za nerobusne estimacije [62]. Slični rezultati se dobijaju i za lokalnu-polinomijalnu aproksimaciju u robusnoj regresionoj analizi [307].

3. Glavni članovi  $MSE$  daju:

$$E\{(\Delta\hat{\omega}_h(t))^2\} = V(F, G) \frac{T}{A^2 h^3} W_\omega + (B_\omega h^2 \omega^{(2)}(t))^2. \quad (4.48)$$

Smanjivanjem širine prozora  $h$  smanjuje se bias i povećava varijansa, i obrnuto. Optimalni prozor je:

$$h_{opt}(t) = \sqrt{\frac{3V(F, G)TW_\omega}{4A^2(B_\omega\omega^{(2)}(t))^2}}. \quad (4.49)$$

Ovo daje optimalni kompromisni odnos između biasa i varijanse uobičajen u neparametarskoj estimaciji. Optimalna širina prozora zavisi od: odnosa signal-šum  $A/\sigma_v$ , koraka odabiranja  $T$ , distribucije šuma, odabrane kriterijumske funkcije  $F$  i drugog izvoda trenutne frekvencije  $\omega^{(2)}(t)$ . Optimalni izbor širine prozora zavisi od drugog izvoda nepoznatog parametra koji se želi estimirati.

4. U radu [118] razmatrana je i estimacija amplitude pomoću robusnog  $M$ -periodograma. Asimptotska relacija za srednju kvadratnu grešku estimacije amplitude je:

$$E\{\hat{A}^2\} = V(F, G) \frac{2T}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(u) du + |m(t) B_A h^2 \Omega^{(1)}(t)|^2, \quad (4.50)$$

gdje je  $B_A = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(u) u^2 du$ . Svi osnovni zaključci izvedeni za  $IF$  estimaciju, neznatno izmijenjeni, mogu se primijeniti na estimaciju amplitude pomoću robusnog  $SPEC$ .

Kao što se vidi iz asimptotskog slučaja, estimaciona greška može se predstaviti kao suma determinističke komponente (biasa) i varijanse. Estimaciona greška može se zapisati kao:

$$|\omega(t) - \hat{\omega}_h(t)| \leq |bias(t, h)| + \kappa\sigma(h), \quad (4.51)$$

gdje je  $\sigma^2(h) = var(\Delta\hat{\omega}_h(t))$ . Nejednakost (4.51) važi sa vjerovatnoćom  $P(\kappa)$ , gdje  $\kappa$  odgovara mjeri standardne Gausovske distribucije  $N(0, 1)$ . Iz relacije (4.48) slijedi da  $|bias(t, h)| \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow 0$ . Neka je  $h = h_s$  tako malo da je  $|bias(t, h_s)| \leq \kappa\sigma(h_s)$ . Tada važi  $|\omega(t) - \hat{\omega}_{h_s}(t)| \leq 2\kappa\sigma(h_s)$  i za neko malo  $h_s$  svi segmenti  $D_s = [\hat{\omega}_{h_s}(t) - 2\kappa\sigma(h_s), \hat{\omega}_{h_s}(t) + 2\kappa\sigma(h_s)]$  imaju zajedničku tačku, odnosno  $\omega(t)$ . Posmatra se rastući niz  $h_s$ ,  $h_1 < h_2 < \dots$ , gdje je  $h_{s+}$  najveće  $h_s$  za koje segmenti  $D_{s-1}$  i  $D_s$  imaju zajedničku tačku. Vrijednost širine prozora  $h_{s+}$  naziva se optimalnom, i sa njom se vrši  $IF$  estimacija signala koja se označava kao  $\hat{\omega}_{h_{s+}}(t)$ . Optimalna širina prozora zavisi od trenutka posmatranja.

Osnovna ideja za ovakav izbor je sljedeća: ako segmenti  $D_{s-1}$  i  $D_s$  nemaju zajedničkih tačaka, to znači da je bias veliki u odnosu na standardnu devijaciju. Tako se statistička hipoteza za bias testira u datom obliku na nizu jednačina i najveća vrijednost, za koju ove nejednakosti daju presječnu tačku odgovara kompromisu između

biasa i varijanse, odnosno, u tom slučaju, bias i varijansa su istog reda veličine. Zadržavajući bias na prihvatljivom nivou, smanjuje se varijansa povećavanjem širine prozora. Detalji o postupku presijecanja intervala (koji se nazivaju i intervalima povjerenja) su dati u [63, 231].

Neka su amplituda  $A$  i standardna devijacija  $\sigma$  poznate i neka je  $\mathbf{H}$  rastući niz širina prozora  $\mathbf{H} = \{h_s | h_1 < h_2 < \dots < h_s < \dots < h_J\}$ . Korišćeni su diadični prozori širine  $N_s = 2N_{s-1}$  odbiraka u okviru prozora  $h_s$ . Ovo korespondira sa standardnim radix-2 algoritmima za proračun  $FFT$ . Relacija između širine prozora i broja odbiraka u prozoru je  $h_s = N_s T$ . U ovom slučaju (za razliku od  $IF$  estimacije standardnim  $TF$  transformacijama), širina najmanjeg prozora ne smije da bude mala (obično se uzima ili  $h_s/T = 16$  ili  $h_s/T = 32$ ) da bi se očuvala robusnost algoritma u odnosu na heavy tailed šumove.

Algoritam se sastoji od slijedećih koraka:

1. Robusni  $SPEC$  se računa za  $\forall h_s \in \mathbf{H}$ . Dobija se skup robusnih  $SPEC$  za trenutak  $t$ :  $\{I_A(t, \omega)\}, h_s \in \mathbf{H}$ . Estimacija se određuje kao:

$$\hat{\omega}_{h_s}(t) = \arg \left[ \max_{\omega \in Q_\omega} I_A(\omega, t; h_s) \right]. \quad (4.52)$$

2. Gornja i donja granica intervala povjerenja  $D_s$  se formiraju kao:

$$U_s(t) = \hat{\omega}_{h_s}(t) + 2\kappa\sigma(h_s); \quad L_s(t) = \hat{\omega}_{h_s}(t) - 2\kappa\sigma(h_s). \quad (4.53)$$

Varijansa  $\sigma^2(h_s)$  se estimira kao  $\hat{\sigma}^2(h_s) = \hat{\sigma}^2(h_J)h_J^3/h_s^3$ , gdje je  $\hat{\sigma}^2(h_J)$  varijansa estimacije dobijena korišćenjem najšireg prozora  $h_J$  u skladu sa:

$$\hat{\sigma}^2(h_s) = \frac{1}{N_J} \sum_{i=1}^{N_J} |x(t + iT)|^2 - \hat{A}^2. \quad (4.54)$$

Estimacija amplitude  $\hat{A}$  može se obaviti u skladu sa algoritmima opisanim u [231] za signal  $x(t + nT)/e(t + nT)$ , gdje je  $e(t + nT)$  greška u relaciji (4.24).

3. Optimalna širina prozora  $\hat{h}(t) = h_{s^+}(t)$  je određena kao najveća  $s = s^+$  ( $s = 1, 2, \dots, J$ ) za koju je zadovoljen uslov:

$$|\hat{\omega}_{h_{s-1}}(t) - \hat{\omega}_{h_s}(t)| \leq 2\kappa(\sigma(h_{s-1}) + \sigma(h_s)) \quad (4.55)$$

i  $\hat{\omega}_{h_s}(t)$  je  $IF$  estimacija sa adaptivnom širinom prozora u trenutku  $t$ .

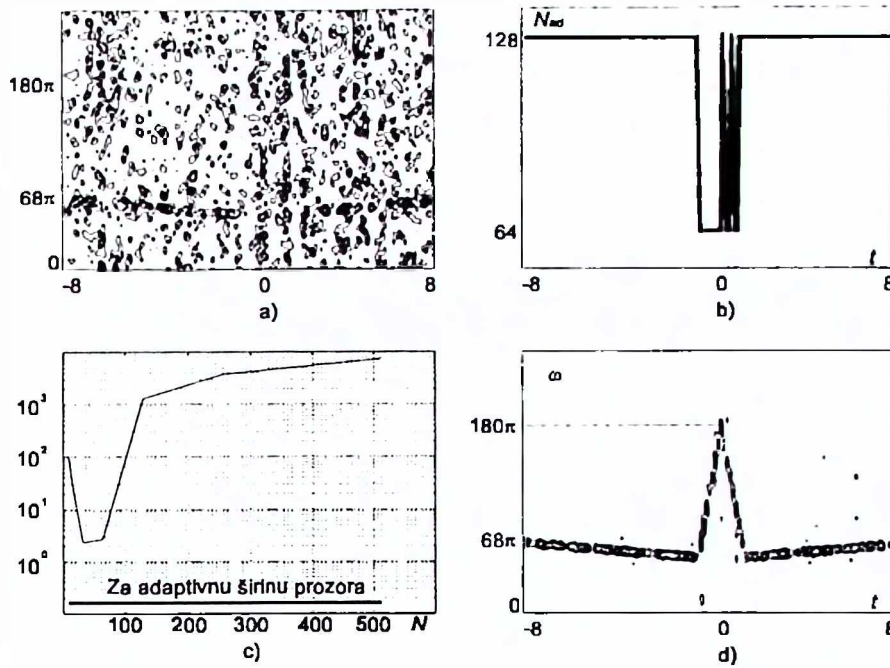
4. Robusni  $SPEC$  sa optimalnom širinom prozora je  $I^+(\omega, t) = I_A(\omega, t; \hat{h}(t))$ .

Koraci od 1. do 4. se ponavljaju za svako  $t$ .

**Primjer 2.** Dat je signal konstantne jedinične amplitude sa  $IF$ :

$$\omega(t) = \begin{cases} 180\pi - 126\pi|t| & |t| < 1 \\ 52\pi + 2\pi|t| & |t| \geq 1 \end{cases}. \quad (4.56)$$





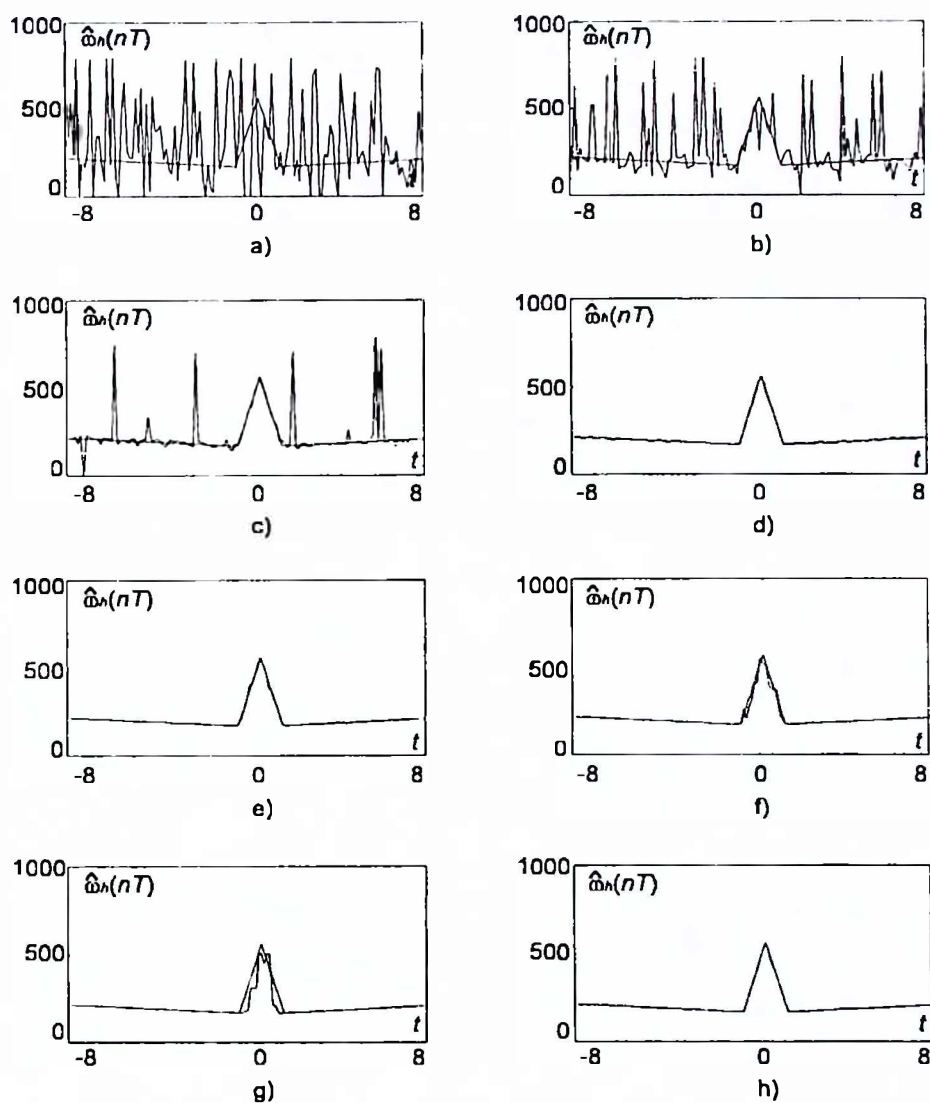
Slika 4.3: a) Standardni spektrogram signala sa  $N=128$ ; b) Adaptivna širina prozora za robusni spektrogram; c) Srednja kvadratna greška u zavisnosti od širine prozora; d) Robusni spektrogram sa adaptivnom širinom prozora.

Signal je zahvaćen velikom količinom heavy-tailed šuma:  $\nu_H(t) = \nu_R^3(nT) + j\nu_I^3(nT)$ , gdje su  $\nu_R(nT)$  i  $\nu_I(nT)$  međusobno nezavisni bijeli Gausovski šumovi  $N(0, 1)$ . Standardni *SPEC* ne može da posluži za *IF* estimaciju ovakvog signala (slika 4.3a). Primjena robusnog *SPEC*, zajedno sa razvijenim algoritmom, produkuje adaptivnu širinu prozora (slika 4.3b). *MSE IF* estimacije u zavisnosti od širine prozora prikazana je na slici 4.3c. Prava linija označava *MSE* sa adaptivnim robusnim *SPEC*. Robusni *SPEC*, računat korišćenjem adaptivne širine prozora, prikazan je na slici 4.3d. *IF* estimacija za različite širine prozora kod robusnog *SPEC*, zajedno sa adaptivnom *IF* estimacijom prikazana je na slici 4.4. Za spore promjene *IF*, algoritam uzima veće širine prozora, dok za brže promjene uzima užje prozore, kako je bilo i očekivano.

**Primjer 3.** Posmatra se signal sa *IF*:

$$\omega(t) = \begin{cases} 52\pi + 2\pi t & t \leq -1 \\ 117\pi + 67\pi t & -1 \leq t \leq 1 \\ 182\pi + 2\pi t & t \geq 1 \end{cases} \quad (4.57)$$

Na slici 4.5 prikazane su *IF* estimacija sa konstantnim dimenzijama prozora  $N = \{8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$ , kao i estimacija dobijena pomoću robusnog *SPEC* sa adaptivnom širinom prozora. Na slici 4.6a prikazana je adaptivna širina prozora, na



Slika 4.4: a)-g) Estimacija trenutne frekvencije signala pomoću robusnog spektrograma sa konstantnom širinom prozora  $N=\{8,16,32,64,128,256,512\}$ ; h) Estimacija trenutne frekvencije pomoću robusnog spektrograma sa adaptivnom širinom prozora.

slici 4.6b prikazana je  $MSE$  u zavisnosti od širine prozora, dok prava linija označava vrijednost  $MSE$  za adaptivni algoritam. Na slici 4.6c prikazan je robusni  $SPEC$  sa adaptivnom širinom prozora.

**Primjer 4.** Dat je signal sa nelinearnom  $IF$ :

$$\omega(t) = 20\pi a \sinh(12.5t) + 128\pi \quad (4.58)$$

zahvaćen šumom istog tipa kao u prethodnim primjerima.  $IF$  estimacija je prikazana na slici 4.7. Adaptivna širina prozora,  $MSE$ , estimacija sa adaptivnom širinom prozora i robusni  $SPEC$  sa adaptivnom širinom prozora prikazani su na slici 4.8.

**Primjer 5.** Posmatran je signal (4.58) zahvaćen kompleksnim Cauchyjevim šumom sa  $a = 0.5$  (4.38), prikazan na slici 4.10a. Standardni  $SPEC$  ne može produkovati bilo kakav valjan rezultat za ovaj tip šuma. Na slici 4.9 prikazani su standardni  $SPEC$  sa konstantnom širinom prozora  $N = 128$  i  $IF$  estimacija zasnovana na ovoj distribuciji. Adaptivna širina prozora prikazana je na slici 4.10b,  $MSE$  je prikazana je na slici 4.10c, dok je robusni  $SPEC$  sa adaptivnom širinom prozora prikazan na slici 4.10d.  $IF$  estimacije su date na slici 4.11. Očigledno je da robusni  $SPEC$ , u ovom slučaju, produkuje zadovoljavajuće rezultate.

Konačno, posmatran je signal (4.58) sa mješovitim Gausovim i heavy-tailed šumom (4.39):

(A) Rezultujući šum je prosta suma dvije vrste šuma:

$$\nu(nT) = (1 - \beta)\nu_G(nT) + \beta\nu_H(nT), \quad (4.59)$$

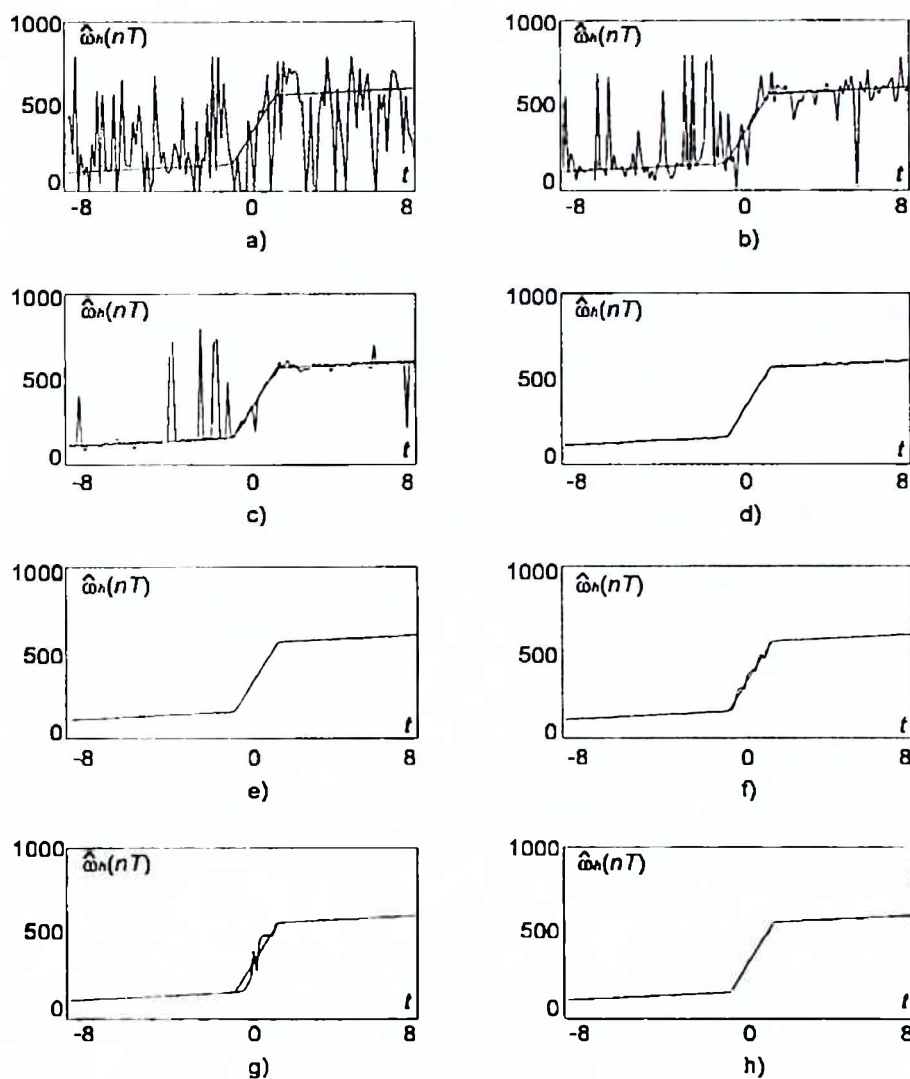
gdje je  $\nu_G(t)$   $CGWN$  sa varijansom  $\sigma_\nu^2$ . Realni i imaginarni dio heavy-tailed šuma su  $Re\{\nu_H(nT)\} = (Re\{\nu_G(nT)\})^3$  i  $Im\{\nu_H(nT)\} = (Im\{\nu_G(nT)\})^3$ .

(B) Šum sa funkcijom gustine vjerovatnoće u obliku:

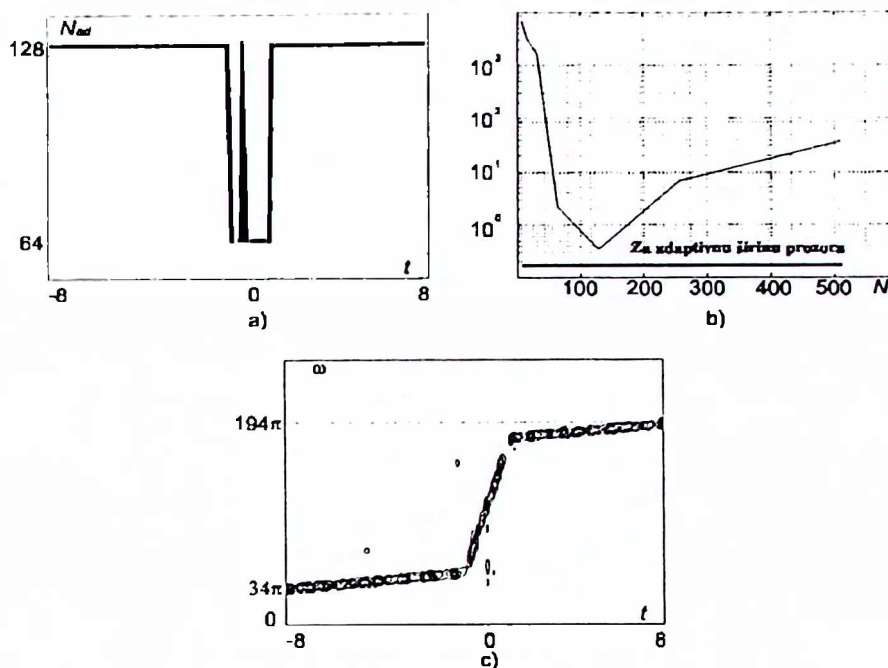
$$p(\xi) = (1 - \beta)p_G(\xi) + \beta p_H(\xi), \quad (4.60)$$

gdje je  $p_G(\xi)$  Gausovska funkcija gustine raspodjele  $N(0, \sigma)$ ,  $p_H(\xi)$  je funkcija gustine raspodjele heavy-tailed šuma, dok  $1 \geq \beta \geq 0$  određuje proporciju u miješanom šumu, odnosno, u drugom slučaju, vjerovatnoću pojavljivanja jednog ili drugog šuma u kanalu.

Posmatrane su različite proporcije  $\beta = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ .  $IF$  estimacije sa standardnim i robusnim  $SPEC$  su poredjene za različito  $\beta$  u primjerima (A) i (B) (Tabele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4). U oba slučaja važe slični zaključci. Za  $\beta = 0$  (čisto Gausovski šum) oba  $SPEC$  pokazuju slične rezultate (prvi red Tabela 4.1 i 4.2). Standardni  $SPEC$  je neznatno bolji od robusnog. Povećanjem  $\beta$ , greška  $IF$  estimacije za standardni  $SPEC$  značajno se povećava, dok varijansa greške  $IF$  estimacije za robusni  $SPEC$  ostaje niska i bliska slučaju Gausovskog šuma.  $MSE$   $IF$  estimacije za standardni  $SPEC$  sa  $N = 64$  (ovaj  $SPEC$  ima najmanju grešku estimacije sa



Slika 4.5: a)-g) Estimacija trenutne frekvencije signala pomoću robusnog spektrograma sa konstantnom širinom prozora  $N=\{8,16,32,64,128,256,512\}$ ; h) Estimacija trenutne frekvencije pomoću robusnog spektrograma sa adaptivnom širinom prozora.

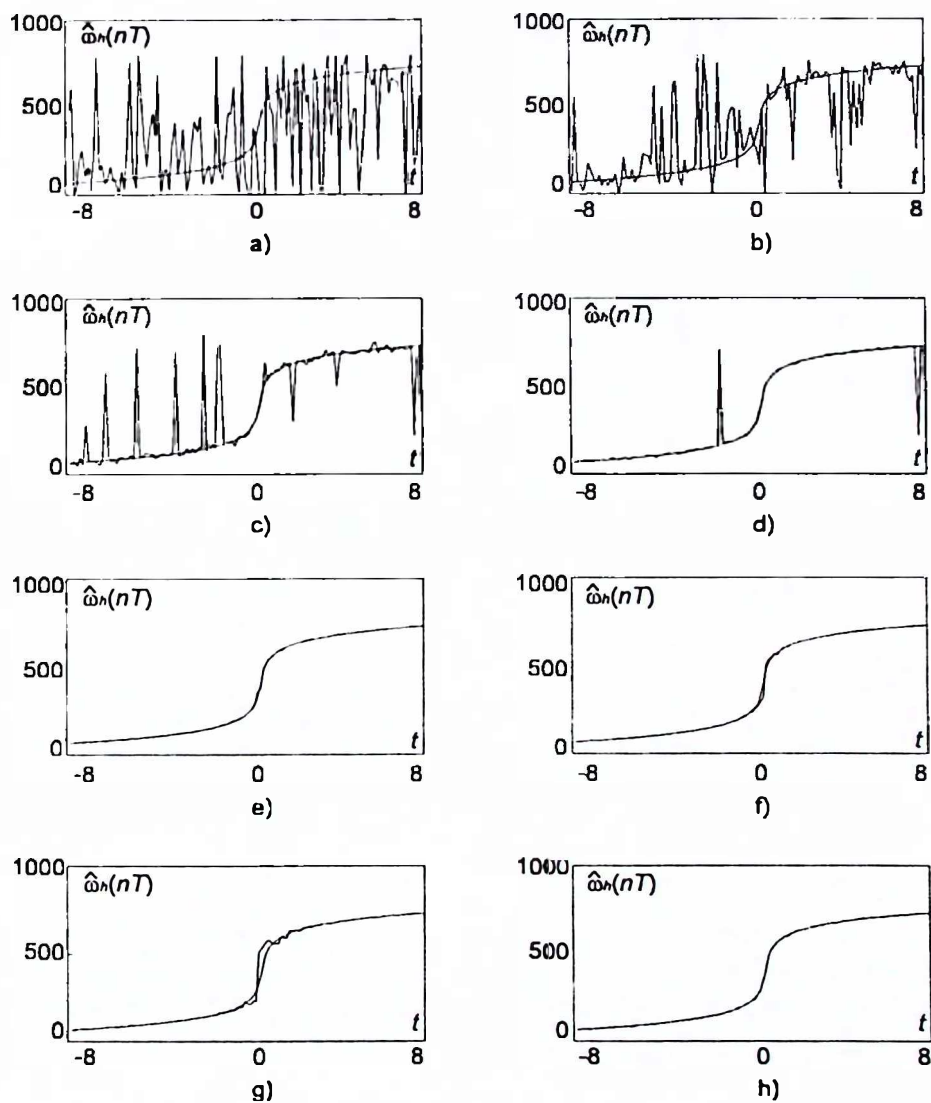


Slika 4.6: a) Adaptivna širina prozora; b) Srednja kvadratna greška estimacije trenutne frekvencije u zavisnosti od širine prozora; c) Robusni spektrogram sa adaptivnom širinom prozora.

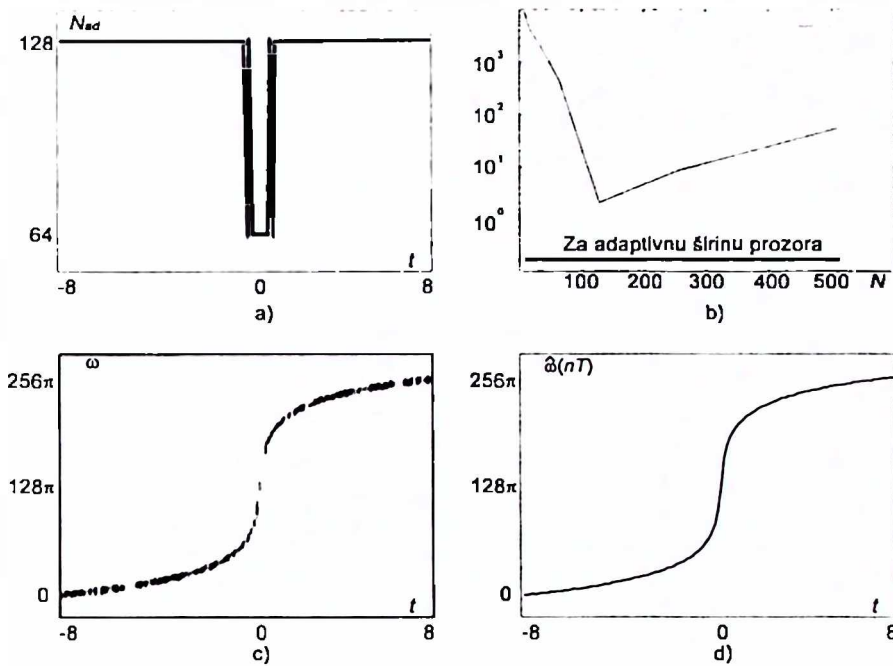
konstantnom širinom prozora) i adaptivnom širinom prozora, za različito,  $\beta$  dati su u Tabelama 4.1 i 4.2. Greška kvantizacije po frekvenciji definiše donju granicu tačnosti (u svim primjerima  $1/12 = 0.08333$ ). Može se vidjeti da kako količina heavy-tailed šuma raste, to jest kako se  $\beta$  povećava, značajno se povećava varijansa kod standardnog *SPEC*. Slični rezultati su prezentirani za standardni i robusni *SPEC* u Tabelama 4.3 i 4.4. Standardni *SPEC* postaje neupotrebljiv za  $\beta \geq 0.4$  u slučaju (A), i za  $\beta \geq 0.2$  u slučaju (B). Iz poslednje kolone Tabele 4.2 i poslednjeg reda Tabele 4.4 može se vidjeti da *MSE* ostaje niska i istog reda za sve proporcije između Gausovskog i heavy-tailed šuma kod *IF* estimacije sa robusnim adaptivnim *SPEC*. Ovo nije slučaj kada se koristi standardni *SPEC* (poslednja kolona Tabele 4.1 i poslednji red Tabele 4.2).

Već je uočeno da upotreba kvadratne funkcije greške kao funkcije gubitaka (može se zvati  $L_2$  normom) rezultira konvencionalnim *SPEC*. Dobro je poznato da linearna estimacija daje dobre rezultate i dobro filtriranje observacione greške, koja je prouzrokovana šumom Gausovske distribucije. Heavy tailed šum može da onemogući svaku linearnu estimaciju i da dovede do potpune degradacije funkcije spektra. Ako je distribucija šuma poznata, mogu se koristiti funkcije gubitaka maksimalne sličnosti





Slika 4.7: a)-g) Estimacija trenutne frekvencije signala pomoću robusnog spektrograma sa konstantnom širinom prozora  $N=\{8,16,32,64,128,256,512\}$ ; h) Estimacija trenutne frekvencije pomoću robusnog spektrograma sa adaptivnom širinom prozora.

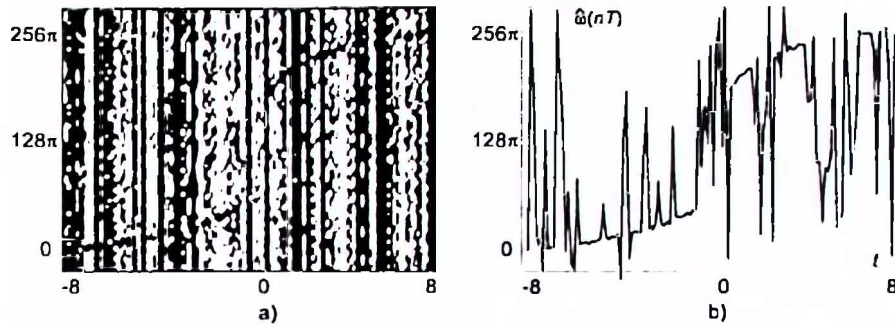


Slika 4.8: a) Adaptivna širina prozora za robusni spektrogram; b) Srednja kvadratna greška u zavisnosti od širine prozora; c) Robusni spektrogram sa adaptivnom širinom prozora; d) Estimacija trenutne frekvencije pomoću predloženog algoritma i robusnog spektrograma.

(*ML* - *maximaly likelihood*) kao univerzalno sredstvo za dizajniranje najbolje estimacije za dati šum. *ML* estimacije su, po pravilu, veoma osjetljive na devijaciju parametara modela i hipotetičku distribuciju. Svaka devijacija hipoteze može da dovede do velike degradacije *ML* estimacije. Posebno je velika osjetljivost u odnosu na pretpostavljenu distribuciju šuma. Minimax robusni pristup je uveden u statistici kao alternativa konvencionalnom *ML*, u cilju smanjivanja opisane osjetljivosti *ML* estimacija na pretpostavljenu distribuciju šuma [300, 301, 308, 309]. Funkcija gubitaka  $F(e) = |e|$  je primjer funkcije koja omogućava robusnu estimaciju u nekim klasama šumova sa heavy-tailed distribucijom. Mnoge klase robusnih funkcija gubitaka mogu se naći u [300, 308, 309]. Na osnovu prethodnih rezultata (Tabele 4.1-4.4), može se zaključiti da kombinacija funkcije gubitaka  $F(e) = e^2$  za male greške i  $F(e) = |e|$  za velike greške može dalje unaprijediti rezultate. Ova funkcija gubitaka definiše se kao:

$$F(e) = \begin{cases} e^2/2 & |e| \leq \Delta \\ \Delta|e| - \Delta^2/2 & |e| > \Delta \end{cases} \quad (4.61)$$

Funkcija gubitaka  $F(e)$  je optimalna u odnosu na klasu šumova (4.60). Parametar  $\Delta$  u (4.61), uzima se u zavisnosti od primijenjenog šuma [308]. Ova funkcija gubitaka



Slika 4.9: a) Standardni spektrogram sa konstantnom širinom prozora  $N=128$  (Vrijednosti spektrograma su limitirane na očekivanu maksimalnu vrijednost jednaku jedan); b) Estimacija trenutne frekvencije pomoću standardnog spektrograma.

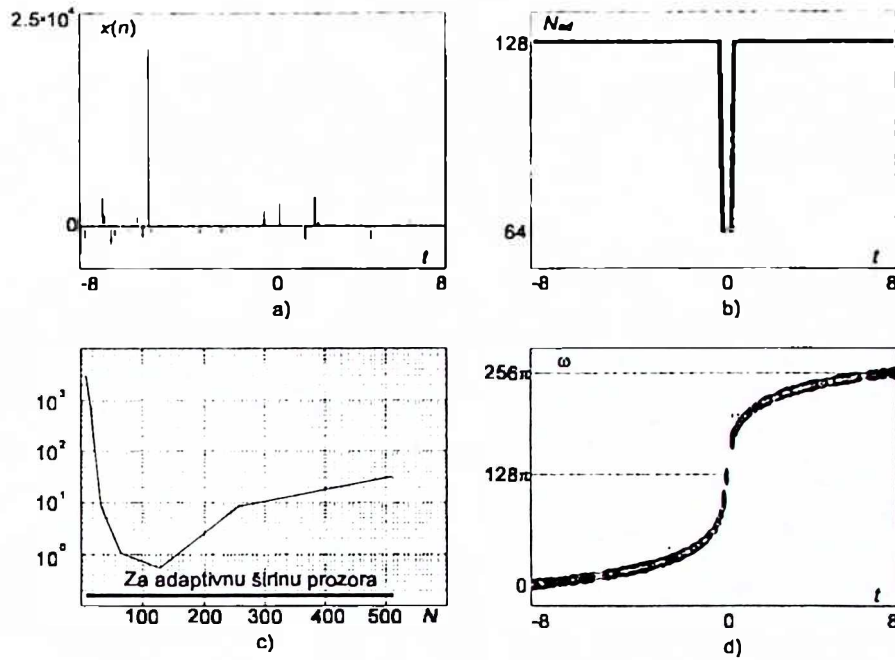
$\beta$	$N = 64$	<i>Adaptivna</i>
0	0.6856	0.1455
0.2	1.0392	0.5467
0.4	5.1502	4.6032
0.6	1060.9	253.22
0.8	3964.3	1434.3
1	5503.6	2819.2

Tabela 4.1: Srednja kvadratna greška za standardni spektrogram sa konstantnom i adaptivnom širinom prozora u slučaju (A).

je korišćena u robusnoj multikorisničkoj detekciji u negausovskim kanalima [310]. Za datu funkciju gubitaka (4.61), vrijednost  $STFT$  može se odrediti kao:

$$\hat{C}_h(t, \omega) = STFT(t, \omega) = \frac{\sum_{n, |e| \leq \Delta} w_h(nT) x(t + nT) e^{-j\omega nT} + \sum_{n, |e| > \Delta} w_h(nT) e^{-1(nT)} x(t + nT) e^{-j\omega nT}}{\sum_{n, |e| \leq \Delta} w_h(nT) + \sum_{n, |e| > \Delta} w_h(nT) e^{-1(nT)}}, \quad (4.62)$$

gdje je:  $|e(nT)| = |x(t + nT) - C_h(t, \omega) \exp(j\omega nT)|$ . Iz relacije (4.62) jasno je da za  $e(nT)$  veće od  $\Delta$  signal se umanjuje funkcijom  $e^{-1(nT)}$ . Računanje modifikovanog  $SPEC$  može se obaviti u skladu sa prethodno opisanim rekurzivnom procedurom za robusni  $SPEC$ . Za signal sa  $IF$  (4.58) zahvaćen šumom (4.59) u Tabeli 4.5 date su greške  $IF$  estimacije ostvarene pomoću modifikovanog  $SPEC$  za konstantnu ( $N = 64$ ) i adaptivnu širinu prozora. Modifikovani  $SPEC$  daje manju grešku  $IF$  estimacije nego odgovarajući robusni  $SPEC$ . Za ovu vrstu šuma standardni  $SPEC$  ne produkuje zadovoljavajući rezultat.



Slika 4.10: a) Signal zahvaćen Cauchyevim šumom; b) Adaptivna širina prozora; c) Srednja kvadratna greška u zavisnosti od širine prozora; d) Robusni spektrogram sa adaptivnom širinom prozora.

### 4.3 Robusna WD u estimaciji trenutne frekvencije

Ako se ne primjenjuje algoritam za adaptivno odredjivanje širine prozora, kod linearnih *FM* signala zahvaćenih heavy tailed šumom, robusni *SPEC* neće dati dobre rezultate. Stoga se pristupilo definisanju robusne *WD* na isti način kako su definisani robusni periodogram i *SPEC* [311]. Polazi se od *WD*:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n w_h(nT)} \sum_n w_h(nT) x(t + nT) x^*(t - nT) \exp(-j2\omega nT), \quad (4.63)$$

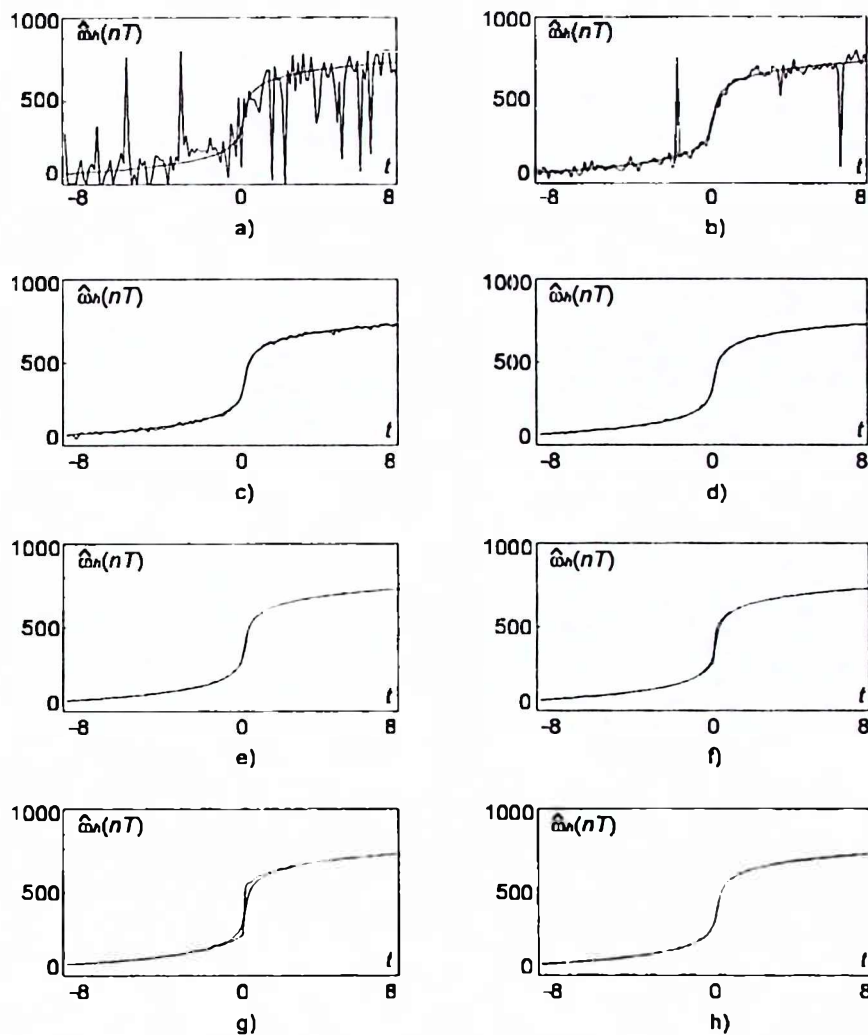
koja minimizira grešku:  $e(t, nT) = x(t + nT)x^*(t - nT) - WD(t, \omega) \exp(j2\omega nT)$  po funkciji gubitaka  $F(e) = |e|^2$ . Robusna *WD* ( $WD_R$ ) koja minimizira grešku po funkciji gubitaka  $F(e) = |e|$ , može se definisati kao:

$$WD_R(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n w_h(nT)} \sum_n w_h(nT) \frac{x(t + nT)x^*(t - nT)}{|e(t, nT)|} e^{-j2\omega nT}. \quad (4.64)$$

Iterativna procedura za proračun  $WD_R$  je definisana slijedećim koracima:

(0) Odredi se standardna *WD* ( $WD_R^{(0)}(t, \omega)$ ) za signal  $x(t)$ . Funkcija prozora je:

$$w_h^{(0)}(nT) = w_h(nT) |x(t + nT)x^*(t - nT) - WD^{(0)}(t, \omega) e^{j2\omega nT}|^{-1}. \quad (4.65)$$



Slika 4.11: a)-g) Estimacija trenutne frekvencije signala zahvaćenog Cauchyevim šumom pomoću robusnog spektrograma sa konstantnim širinama prozora  $N=\{8,16,32,64, 128,256,512\}$ ; h) Estimacija trenutne frekvencije pomoću robusnog spektrograma sa adaptivnom širinom prozora.



$\beta$	$N = 64$	<i>Adaptivna</i>
0	0.7124	0.1968
0.2	0.8974	0.1930
0.4	1.0478	0.2363
0.6	1.0602	0.2356
0.8	1.0843	0.2721
1	1.4888	0.2851

Tabela 4.2: Srednja kvadratna greška za robusni spektrogram sa konstantnom i adaptivnom širinom prozora u slučaju (A).

$\beta$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
N=8	1807.4	6440.6	7865.7	9231.7	9551.5	12581
N=16	52.897	4098.3	4965.5	5690.4	6452.0	8856.3
N=32	5.8204	2316.8	2223.4	3706.6	4715.8	5485.9
N=64	0.6187	1287.4	1699.1	1865.1	2608.8	3625.6
N=128	1.0585	8.4956	234.84	750.23	1261.4	1386.5
N=256	10.011	395.22	520.47	966.21	1182.8	269.60
N=512	32.244	1777.0	2748.3	2725.9	2700.1	222.92
Adaptivna	0.1973	227.18	498.03	665.69	1221.7	1442.0

Tabela 4.3: Srednja kvadratna greška za standardni spektrogram sa konstantnom i adaptivnom širinom prozora u slučaju (B).

(i) Odrede se slijedeće iteracije:

$$e(t, nT) = x(t + nT)x^*(t - nT) - WD_R^{(i-1)}(t, \omega) \exp(j2\omega nT) \quad (4.66)$$

$$WD_R^{(i)}(t, \omega) = \frac{1}{\sum_n w_h^{(i-1)}(nT)} \sum_n w_h^{(i-1)}(nT) \frac{x(t + nT)x^*(t - nT)}{|e(t, nT)|} e^{-j2\omega nT}. \quad (4.67)$$

Proračun se zaustavlja u onom koraku kada je:

$$\bar{k} = \min_k \{k : |WD_R^{(i)}(t, \omega) - WD_R^{(i-1)}(t, \omega)| / |WD_R^{(i-1)}(t, \omega)| \leq \eta, k \leq K\}, \quad (4.68)$$

gdje je  $K$  maksimalan dozvoljeni broj iteracija, dok je  $\eta$  maksimalna dozvoljena greška. U numeričkim proračunima korišćeno je  $\eta = 0.1$  i  $K = 15$ . Neke od osobina  $WD_R$  su: 1) Za linearni  $FM$  signal  $x(t) = \exp(jat^2/2 + jbt)$  i  $w_h(nT)$ , pravougaoni prozor beskonačne širine  $WD_R$  je idealno predstavljanje; 2)  $WD_R$  je realna distribucija; 3)  $WD_R$  je  $TF$  invarijantna (Za signal  $y(t) = x(t - t_0)e^{j\omega_0 t} \Rightarrow WD_R(y; t, \omega) = WD_R(x; t - t_0, \omega - \omega_0)$ ).

$\beta$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
N=8	3019.8	4763.9	4095.0	4914.0	5473.8	6869.1
N=16	130.89	255.20	141.88	364.21	779.45	726.77
N=32	61.585	15.397	13.625	10.599	9.3672	8.8703
N=64	0.7643	1.0887	1.0104	0.9121	0.8122	1.3339
N=128	0.7484	2.0492	1.3116	1.1158	1.4329	1.5898
N=256	9.6263	9.2244	8.9314	8.9170	8.9780	9.4466
N=512	31.821	33.203	32.380	33.558	33.117	32.471
Adaptivna	0.2152	0.4152	0.5998	0.5502	0.1435	0.1914

Tabela 4.4: Srednja kvadratna greška za robusni spektrogram sa konstantnom i adaptivnom širinom prozora u slučaju (B).

$\beta$	$N = 64$	Adaptivna
0	0.6714	0.1632
0.2	1.0021	0.3752
0.4	0.9866	0.5751
0.6	0.9235	0.5493
0.8	0.7726	0.1344
1	1.2568	0.1846

Tabela 4.5: Srednja kvadratna greška za modifikovani spektrogram za konstantnu i adaptivnu širinu prozora.

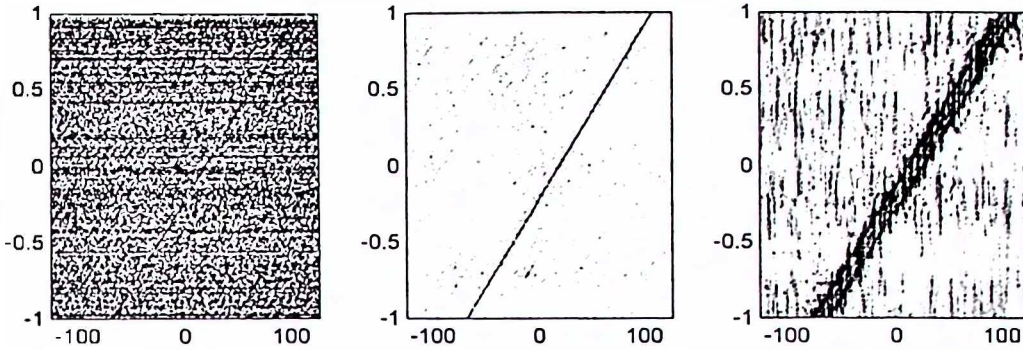
Huberova funkcija gubitaka (4.61) može se koristiti i kod robusne  $WD$ .  $WD$  sa Huberovom funkcijom gubitaka ( $WD_H$ ) definisana je kao:

$$WD_H(t, \omega) = \frac{\sum_{n, |e| \leq \Delta} w_h(nT) x(t + nT) x^*(t - nT) e^{-j2\omega nT}}{\sum_{n, |e| \leq \Delta} w_h(nT) + \sum_{n, |e| > \Delta} w_h(nT) |e(t, nT)|^{-1}} + \frac{\sum_{n, |e| > \Delta} w_h(nT) |e(t, nT)|^{-1} x(t + nT) x^*(t - nT) e^{-j2\omega nT}}{\sum_{n, |e| \leq \Delta} w_h(nT) + \sum_{n, |e| > \Delta} w_h(nT) |e(t, nT)|^{-1}} \quad (4.69)$$

i može se realizovati sličnom iteracionom procedurom kakva je opisana za  $WD_R$ . Osobine definisane kod  $WD_R$  važe i kod  $WD_H$ . U svim numeričkim primjerima korišćena je vrijednost  $\Delta = 1$ .

**Primjer 1.** Posmatra se linearni  $FM$  signal:

$$x(t) = \exp(j204.8\pi(t + 0.5)^2 - j128\pi(t + 0.5)) \quad (4.70)$$



Slika 4.12: Linearni FM signal zahvaćen heavy tailed šumom: a) Standardna WD; b) Robusna WD; c) Robusni SPEC.

zahvaćen šumom (4.39). Usvojena je vrijednost  $a = 0.85$ . Širina prozora, u svim primjerima, je  $h = N_w T = 1/4$ , gdje je  $N_w = 256$  (broj odbiraka u prozoru) i  $T = 1/1024$  (korak odabiranja). Na slici 4.12 prikazan je robusni SPEC, standardna WD i  $WD_R$  za signal (4.70). Standardna WD je prikazana normalizovano tako što su odsječene vrijednosti znatno veće od očekivane vrijednosti WD signala. Sa slike je jasno da robusni SPEC, za linearni FM signal, ne daje distribuciju blisku idealnoj, da je standardna WD neupotrebljiva, dok je  $WD_R$  bliska idealnoj.

Primjer 2. Na slici 4.13a prikazana je standardna WD signala:

$$x(t) = \exp(j204.8\pi t^3 - j204.8\pi t). \quad (4.71)$$

Na slikama 4.13b i 4.13c prikazane su standardna i robusna WD signala (4.71) zahvaćenog šumom istog tipa kao u prethodnom primjeru. Uočljivo je da, i za nelinearni FM signal zahvaćen heavy-tailed šumom,  $WD_R$  predstavlja kvalitetno sredstvo za analizu.

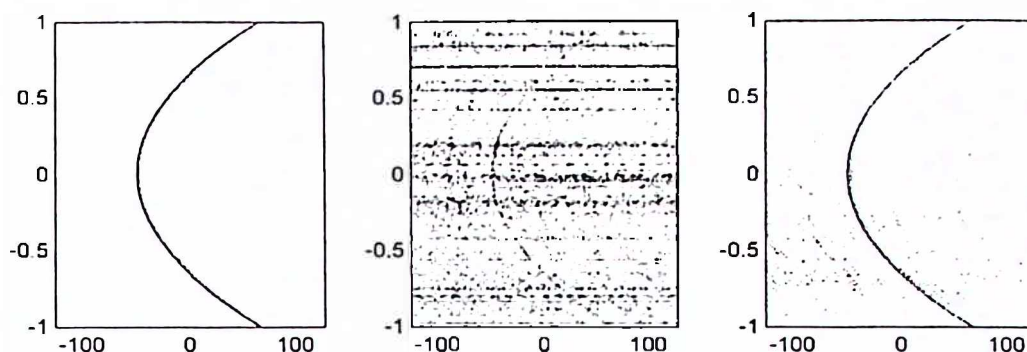
Primjer 3. Dat je dvokomponentni signal čije su komponente razdvojene u vremenu:

$$\begin{aligned} x(t) = & \exp(j204.8\pi t^2 + j102.4\pi) \exp(-4(t - 0.6)^2) + \\ & + \exp(j204.8\pi t^2 - j102.4\pi) \exp(-4(t + 0.6)^2) \end{aligned} \quad (4.72)$$

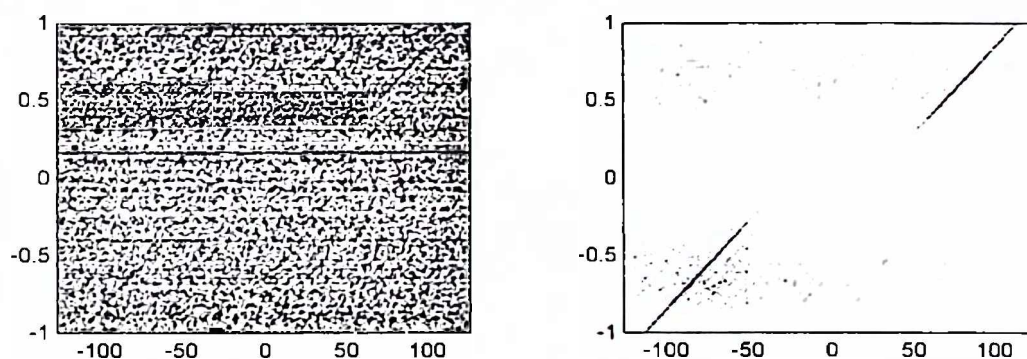
zahvaćen šumom istog tipa kao u prethodnim primjerima. Na slici 4.14 prikazane su standardna WD i  $WD_R$  signala (4.72). Jasna je prednost  $WD_R$ .

Primjer 4. Posmatran je signal sa dvije komponente koje se poklapaju u vremenu:

$$x(t) = \exp(j204.8\pi t^2 + j102.4\pi) + \exp(j204.8\pi t^2 - j102.4\pi). \quad (4.73)$$

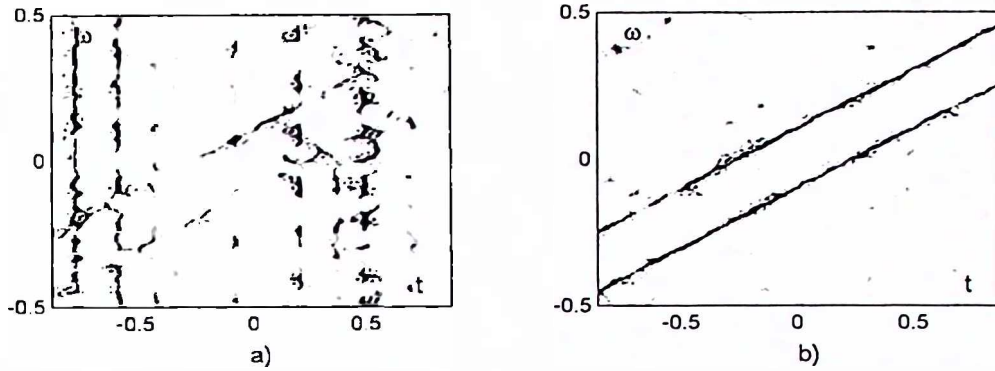


Slika 4.13: Kvadratno modulirani signal: a) WD signala bez šuma; b) Standardna WD signala zahvaćenog šumom; c) Robusna WD.



Slika 4.14: Suma chirp signala: a) Standardna WD; b) Robusna WD.

$WD_R$  ovakvog signala se dominantno koncentriše na kros-članu pa je, kao takva, neupotrebljiva. Naime, što u okviru teze neće biti posebno analizirano, robusne estimacije značajno ističu najveće vrijednosti signala i, kao takve, mogu da posluže za uklanjanje parazitskih interferencija istog oblika kakav je sam signal. Sa druge strane, odnos signal/šum sa kojim robusne distribucije, definisane na ovaj način, uspješno rade opada za povećanjem zaobljavanja signala. Stoga je u ovom slučaju upotrijebljena slijedeća procedura: 1) Odredjen je robusni *SPEC* (odnosno robusna *STFT*) sa pravougaonim prozorom, odnosno signal  $x(t)/e(t)$ , gdje je  $e(t)$  odgovarajući signal greške; 2) Za ovakav signal sračunat je *SM* sa  $L = 2$  baziran na *STFT* sa Hannovim prozorom. Na ovaj način, dobijena je distribucija prikazana na slici 4.15b. Na slici 4.15a prikazan je *SM* sračunat na osnovu standardne *STFT*.



Slika 4.15: S-metod sume dva linearno frekvencijski modulirana signala zahvaćena heavy tailed šumom.

$IF$  estimacija dobijena pomoću  $WD_R(t, \omega)$  određena je kao:

$$\hat{\omega}(t) = \arg \max_{\omega} WD_R(t, \omega). \quad (4.74)$$

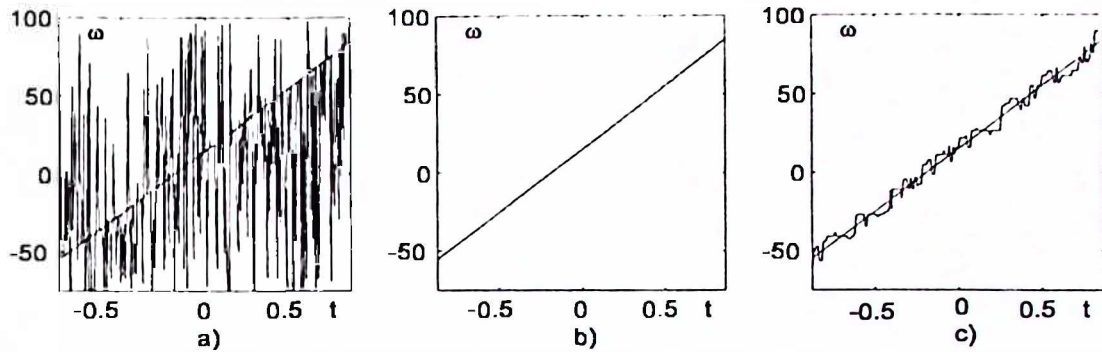
Pod istim uslovima pod kojim je izveden izraz za bias  $IF$  estimacije kod  $WD$ , može se zaključiti da je bias kod  $WD$  jednak biasu kod  $WD_R$  i da, za pravougaoni prozor širine  $h$ , iznosi  $E\{\Delta\hat{\omega}(t)\} = \phi^{(3)}(t)h^2/40$ . Na slici 4.16 prikazana je  $IF$  estimacija za signal (4.70) pomoću standardne  $WD$ ,  $WD_R$  i robusnog  $SPEC$ .

$WD$  se može posmatrati kao  $FT$  signala  $x(t+nT)x^*(t-nT)$ . Koristeći ovu činjenicu za određivanje varijanse  $IF$  estimacije kod  $WD$  može se primjenjivati ista procedura kao kod određivanja varijanse za robusni periodogram [62]. Kod robusnog periodograma varijansa je jednaka (4.45):

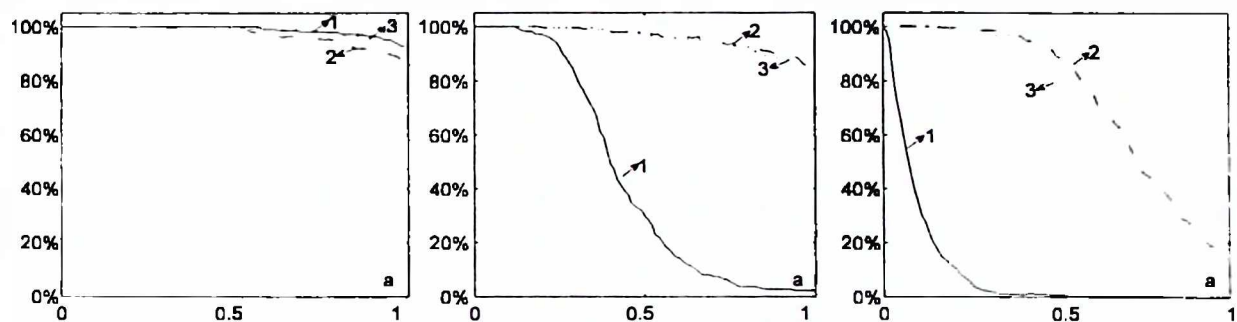
$$\text{var}\{\Delta\hat{\omega}(t)\} = \frac{6T}{A^2 h^3 p^2(0)}, \quad (4.75)$$

gdje su:  $T$  korak odabiranja,  $A$  amplituda posmatranog signala i  $p(x)$  vrijednost gustine vjerovatnoće posmatranog šuma  $\nu(t)$ . Npr., za Gausovski šum dobija se  $p(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ . Kod  $WD_R$ , za varijansu  $IF$  estimacije u asimptotskom slučaju, važi takodje relacija (4.45), uz zanemarivanje greške koja potiče samo od šuma  $\nu(t+nT)\nu^*(t-nT)$ . U slučaju da šum u odnosu na amplitudu nije mali, mora se napraviti statistička analiza. Stoga je posmatran signal (4.70) kome su dodavani šumovi dati relacijama (4.38), (4.39), (4.59), (4.60) i  $CGWN$   $\sigma^2 = a^2$ . Na osnovu velikog broja pokušaja, analizirana je vjerovatnoća lociranja  $IF$  na tačnu vrijednost u zavisnosti od  $a$  u granicama  $[0, 1]$ , dok je za šumove (4.59) i (4.60) uzeto  $a = 0.85$  i promjenljiv odnos "mješavine"  $\beta \in [0, 1]$ . U slučaju sa slike 4.17a, za Gausovski bijeli šum, kao što se može očekivati,





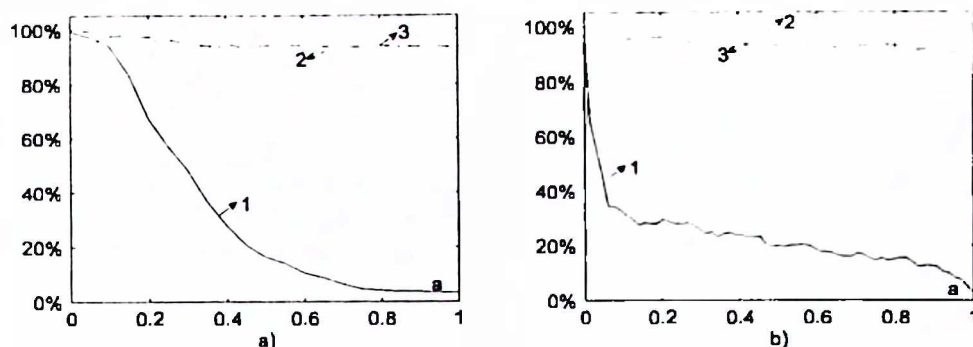
Slika 4.16: Estimacija trenutne frekvencije linearnog FM signala zahvaćenog heavy tailed šumom: a) Standardna Wignerova distribucija; b) Robusna Wignerova distribucija; c) Robusni spektrogram.



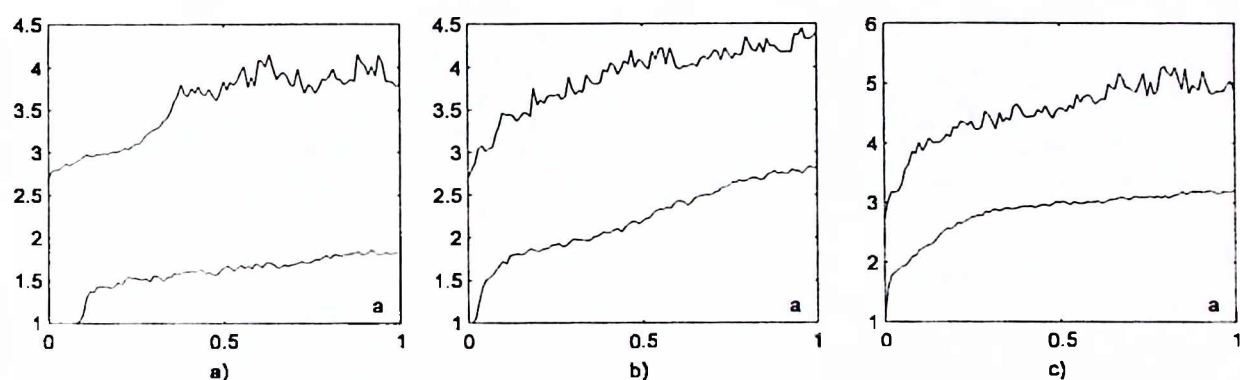
Slika 4.17: Procenat pogodaka IF: a) Signal sa Gausovim šumom; b) Signal sa kubom Gausovog šuma; c) Signal sa Cauchyevim šumom.

neznatno boljom od  $WD_H$  i  $WD_R$  pokazala se standardna  $WD$ . U ostalim slučajevima sa slike 4.17, porastom heavy tailed šuma standardna  $WD$  postaje neupotrebljiva za estimaciju. Na slici 4.18 data je tačnost za mješavine šumova (4.59) i (4.60). Sniman je i prosječan broj iteracija za računanje  $WD_H$  i  $WD_R$ . Sa slika 4.19 i 4.20 jasno je da proračun  $WD_H$  zahtjeva znatno manje numeričkih operacija nego  $WD_R$ .

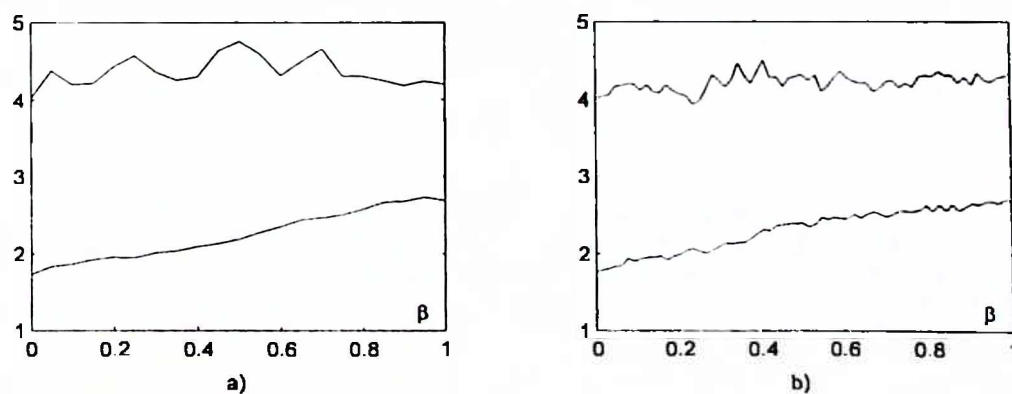




Slika 4.18: Procenat pogodaka IF: a) signal sa mješavinom šumova (A); b) signal sa mješavinom šumova (B).



Slika 4.19: Prosječan broj iteracija: a) Gausov šum; b) Heavy tailed šum; c) Cauchyev šum (Gornja kriva - robusna WD, donja kriva WD sa Huberovom funkcijom.).



Slika 4.20: Prosječan broj iteracija kod dvije smješe šumova. Gornje krive - robusna WD, donje krive - WD sa Huberovom funkcijom.

## 4.4 Algoritam za neparametarsku estimaciju WD višedimenzionih signala

Algoritam za neparametarsku estimaciju  $WD$ , zasnovan na specifičnom statističkom pristupu, demonstriran je u radu [231]. Ovaj algoritam je primijenjen na vremenski-promjenljivo filtriranje jednodimenzionih i višedimenzionih signala u [42, 312], [314]–[317]. Polazi se od pseudo  $WD$  višedimenzionog signala zahvaćenog šumom:

$$s(\vec{n}) = f(\vec{n}) + \nu(\vec{n}), \vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_Q\}, \quad (4.76)$$

gdje je  $f(\vec{n})$  signal dok je  $\nu(\vec{n})$   $CGWN$  varijanse  $\sigma_\nu^2$  [318]:

$$PWD_s(\vec{n}, \vec{\omega}) = \sum_{\vec{m}} w(\vec{m}) w^*(-\vec{m}) s(\vec{n} + \vec{m}) s^*(\vec{n} - \vec{m}) e^{-j\vec{\omega}\vec{m}}. \quad (4.77)$$

Autokorelaciona funkcija šuma je  $R_{\nu\nu}(2\vec{m}) = \sigma_\nu^2 \delta(2\vec{m})$ , pa je srednja vrijednost  $WD$ :

$$E\{PWD_s(\vec{n}, \vec{\omega})\} = WD_f(\vec{n}, \vec{\omega}) *_{\vec{\omega}} FT_w(2\vec{\omega}) + \sigma_\nu^2 *_{\vec{\omega}} FT_w(2\vec{\omega}), \quad (4.78)$$

gdje je  $FT_w(2\vec{\omega})$  višedimenziona  $FT$  funkcije prozora  $w(\vec{m})$ . Član  $\sigma_\nu^2 *_{\vec{\omega}} FT_w(2\vec{\omega}) = \sigma_\nu^2 w(0) = \sigma_\nu^2$  je konstanta i neće biti uziman u razmatranje. Bias se može odrediti kao:

$$bias(\vec{n}, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^Q \frac{\partial^2 WD_f(\vec{n}, \vec{\omega})}{\partial \omega_i^2} \frac{m_2(\omega_i^2)}{8}, \quad (4.79)$$

gdje je:

$$m_2(\omega_i^2) = \frac{1}{(2\pi)^Q} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \omega_i^2 FT_{ww}(2\vec{\omega}) \prod_{i=1}^Q d\omega_i. \quad (4.80)$$

Varijansa je jednaka:

$$\sigma_{ss}^2 = \sigma_\nu^2 \sum_{\vec{m}} w^4(\vec{m}) \left[ |f(\vec{n} + \vec{m})|^2 + |f(\vec{n} - \vec{m})|^2 + \sigma_\nu^2 \right], \quad (4.81)$$

odnosno, za sporopromjenljivu amplitudu važi:  $\sigma_{ss}^2 \approx E_w \sigma_\nu^2 (2A^2(\vec{n}) + \sigma_\nu^2)$ .  $MSE$  se definiše kao:  $e^2(\vec{n}, \vec{\omega}) = bias^2(\vec{n}, \vec{\omega}) + \sigma_{ss}^2$ . Kako važi  $E_w \sim N^Q$  i  $m_2(\omega_i^2) \sim N^{-4}$ , slijedi  $e^2(\vec{n}, \vec{\omega}; N) = C(\vec{n}, \vec{\omega}; N) N^{-4} + D(\vec{n}) N^Q$ . Npr., za Hannov višedimenzioni prozor važi:

$$C(\vec{n}, \vec{\omega}; N) = \sum_{i=1}^Q \frac{\partial^2 WD_f(\vec{n}, \vec{\omega})}{\partial \omega_i^2} \frac{\pi^4}{16}; \quad D(\vec{n}) = \left(\frac{3}{8}\right)^Q (2A(\vec{n}) + \sigma_\nu^2). \quad (4.82)$$

(4.82)

Optimalna vrijednost prozora se dobija za:  $\partial e^2(\vec{n}, \vec{\omega}; N) / \partial N|_{N=N_{opt}} = 0$ , i iznosi:

$$N_{opt} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{Q+2}{2}} \sqrt{\frac{4C(\vec{n}, \vec{\omega}; N)}{QD(\vec{n})}}. \quad (4.83)$$

Za  $N = N_{opt}$  odnos biasa i varijanse je konstantan  $bias(\vec{n}, \vec{\omega})/\sigma_{ss}|_{N=N_{opt}} = \sqrt{Q}/2$ . Za slučajnu promjenljivu važi:

$$|WD_f(\vec{n}, \vec{\omega}; N) - [WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N) - bias(\vec{n}, \vec{\omega}; N)]| \leq \kappa \sigma_{ss}(N), \quad (4.84)$$

sa vjerovatnoćom  $P(\kappa)$ . U slučaju da je bias mali, važi  $bias(\vec{n}, \vec{\omega}; N) \leq \Delta \kappa \sigma_{ss}$  i nejednakost (4.84) se može zapisati kao [231]:

$$|WD_f(\vec{n}, \vec{\omega}; N) - WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N)| \leq (\kappa + \Delta \kappa) \sigma_{ss}(N). \quad (4.85)$$

Kao i u prethodnim analizama mogu se uvesti intervali povjerenja  $D_p = [L_p, U_p]$ :

$$L_p = WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_p) - (\kappa + \Delta \kappa) \sigma_{ss}(N_p); \quad (4.86)$$

$$U_p = WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_p) + (\kappa + \Delta \kappa) \sigma_{ss}(N_p). \quad (4.87)$$

Posmatrajući diadični skup prozora  $N = \{N_p | N_p = 2^{-p} N_{opt}\}$  i provodeći analizu koja je opisana za  $IF$  estimaciju, dobija se da, za valjano funkcionisanje algoritma,  $\Delta \kappa$  i  $\kappa$  moraju biti u granicama:

$$\frac{1.5\sqrt{Q}}{1 + 2^{-Q/2}} \leq \Delta \kappa \leq \frac{6\sqrt{Q}}{2^{-Q/2} + 2^{-Q}} - 2\kappa; \quad \kappa < \frac{3\sqrt{Q}}{1 + 2^{-Q/2}} (2^{Q/2} - 1/4). \quad (4.88)$$

Kod estimacije distribucije, odnosno posredne estimacije amplitude, algoritam može biti značajno pojednostavljen upotrebom dvije vrijednosti dimenzije prozora  $N_1 \ll N_2$ , gdje  $N_1$  produkuje malu varijansu, dok  $N_2$  daje mali bias. Kada se intervali povjerenja, za ova dva prozora, presjeknu, to znači da je bias mali u poredjenju sa varijansom. U suprotnom, kada je bias veliki, koristi se širi prozor da bi bias bio redukovan. Rezultujuća adaptivna  $WD$  je:

$$WD_s^e(\vec{n}, \vec{\omega}) = \begin{cases} WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_1) & \Phi \text{ je istinito} \\ WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_2) & \Phi \text{ nije istinito} \end{cases}, \quad (4.89)$$

gdje  $\Phi$  istinito odgovara ispunjenju nejednakosti:

$$|WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_1) - WD_s(\vec{n}, \vec{\omega}; N_2)| \leq (\kappa + \Delta \kappa) [\sigma_{ss}(N_1) + \sigma_{ss}(N_2)]. \quad (4.90)$$

Na ovaj način, sa dvije širine prozora može se očekivati značajno poboljšanje, jer je  $WD$  ili sporopromjenljiva (bias veoma mali) ili visokokoncentrisana duž lokalne frekvencije (bias veoma veliki). Kada bi se koristilo više prozora između  $N_1$  i  $N_2$ , algoritam bi dominantno uzimao prozore ekstremnih širina. Varijansa estimacije za veoma mali odnos signal/šum može se za Hannov višedimenzioni prozor odrediti kao:

$$\sigma_{ss}^2 \approx \left(\frac{3N}{8}\right)^Q \left(\sum_{\vec{m}} |s(\vec{n} + \vec{m})|\right)^2. \quad (4.91)$$

Iz (4.91) slijedi  $\sigma_{ss}^2(N_1) = \sigma_{ss}^2(N_2)N_1^Q/N_2^Q$ . Na ovaj način su određeni svi parametri za računanje  $WD$ .

Kod multikomponentnih signala  $f(\vec{n}) = \sum_{i=1}^M f_i(\vec{n})$ , za procjenu se može koristiti višedimenzioni  $SM$ :

$$SM(\vec{n}, \vec{\omega}) = \sum_{\vec{\theta}} P(\vec{\theta}) STFT(\vec{n}, \vec{\omega} + \vec{\theta}) STFT^*(\vec{n}, \vec{\omega} - \vec{\theta}), \quad (4.92)$$

gdje je  $P(\vec{\theta})$  pravougaoni prozor širine  $2L_d + 1$  po svakom pravcu. Kada je  $SM$  približno jednak sumi  $WD$  pojedinačnih komponenti, važi da je varijansa  $SM$  jednaka:

$$\sigma_{ss}^2(\vec{n}, \vec{\omega}) = \begin{cases} \sigma_v^2 \sum_{\vec{m}} w^4(\vec{m}) [2A_i(\vec{n}) + \sigma_v^2] & \text{za } (\vec{n}, \vec{\omega}) \in R_{f_i} \\ \sigma_v^2 \sum_{\vec{m}} w^4(\vec{m}) & \text{za } (\vec{n}, \vec{\omega}) \notin R_{f_i} \end{cases}, \quad (4.93)$$

gdje je  $R_{f_i}$  oblast komponenti signala dok je  $A_i(\vec{n})$  amplituda komponente signala. Estimacija auto-člana u  $WD$ , bazirana na  $SM$  je:

$$SM^e(\vec{n}, \vec{\omega}) = \begin{cases} SM(\vec{n}, \vec{\omega}; N_1, L_d = 0) & \Phi \text{ je istinito} \\ SM(\vec{n}, \vec{\omega}; N_1, L_d > 0) & \Phi \text{ nije istinito} \end{cases}. \quad (4.94)$$

$\Phi$  je istinito kada važi:

$$\begin{aligned} |SM(\vec{n}, \vec{\omega}; N_1, L_d = 0) - SM(\vec{n}, \vec{\omega}; N_2, L_d > 0)| &\leq \\ &\leq (\kappa + \Delta\kappa) [\sigma_{ss}(N_1, L_d = 0) + \sigma_{ss}(N_2, L_d)]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Za  $L_d = 0$  dobija se  $SPEC$  (kvadrat modula  $STFT$ ).

Oblast monokomponentnog signala može se odrediti kao maksimum ekvivalentne  $WD$ . Oblast komponentni signala može se odrediti iz  $SM^e(\vec{n}, \vec{\omega})$  kao:

$$L_H(\vec{n}, \vec{\omega}) = \left\lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(SM^e(\vec{n}, \vec{\omega}) - Lev) \right\rceil, \quad (4.96)$$

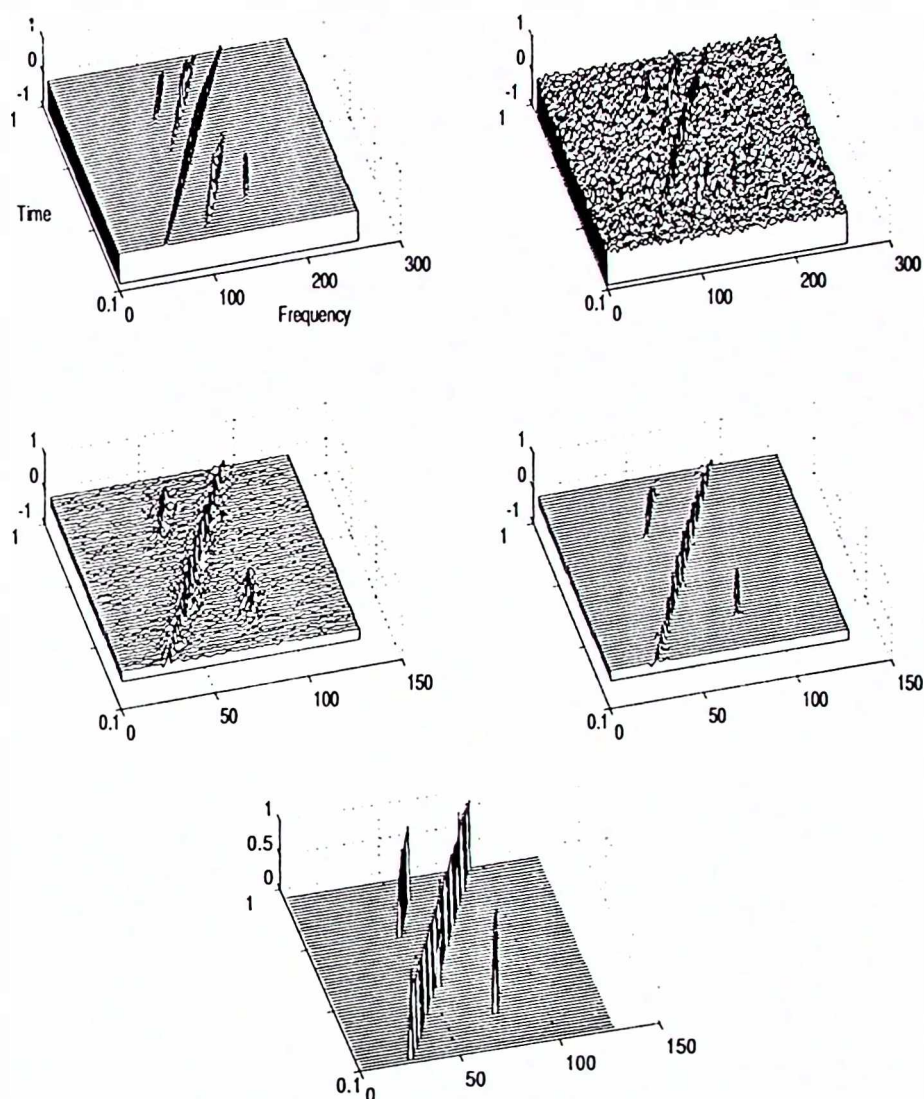
gdje je  $Lev$  referentni nivo. U algoritmu je korišćeno  $Lev = 0.1 \max_{\vec{\omega}} (SM^e(\vec{n}, \vec{\omega}))$ . Pod oblašću komponenti signala podrazumijevaju se tačke gdje je  $L_H(\vec{n}, \vec{\omega}) = 1$ .

Umjesto  $SM$  mogu koristiti druge  $RID$  distribucije [68]. Medjutim, računanje  $CWD$  ili  $BJD$  je znatno složenije od računanja  $SM$ .

**Primjer 1.** Posmatran je multikomponentni signal:

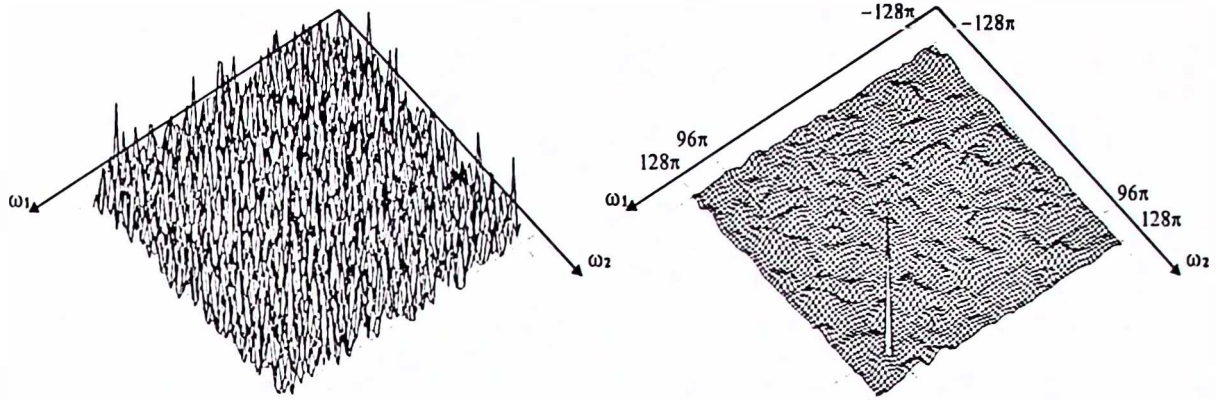
$$\begin{aligned} x(n) = & Ae^{-4(nT-9/16)^2 + j480(nT+1/5)^2} + Ae^{-100(nT-3/8)^2 + j525(nT+3/2)^2} + \\ & + Ae^{-100(nT-13/16)^2 + j740(nT)^2} + \nu(n), \end{aligned} \quad (4.97)$$

gdje je  $A$  izabrano tako da odnos signal/šum bude  $10 \log(E_f/\sigma_v^2) = -1[dB]$ . Širina prozora, u ovom slučaju, se bira u skupu  $N = \{32, 256\}$ , dok je  $SM$  računat za širinu konvolucionog prozora  $L_d = 2$ . Na slici 4.21a data je  $WD$  signala (4.97) bez šuma



Slika 4.21: Vremensko-frekvencijska predstavljanja multikomponentnog signala: a) Pseudo Wignerova distribucija originalnog signala bez šuma; b) Pseudo Wignerova distribucija signala zahvaćenog šumom sa prozorom širine  $N=512$ ; c) S-metod signala zahvaćenog šumom sa prozorom širine  $N=256$ ; d) S-metod signala zahvaćenog šumom sa vremenski-promjenljivim prozorom širine  $N=\{32, 256\}$ ; e) Oblast vremensko-frekvencijskih komponenti. (Broj odbiraka je prikazan na frekvencijskoj osi. Wignerova distribucija mora biti preodabrana sa faktorom 2. Prikazane su normalizovane vrijednosti distribucija.)





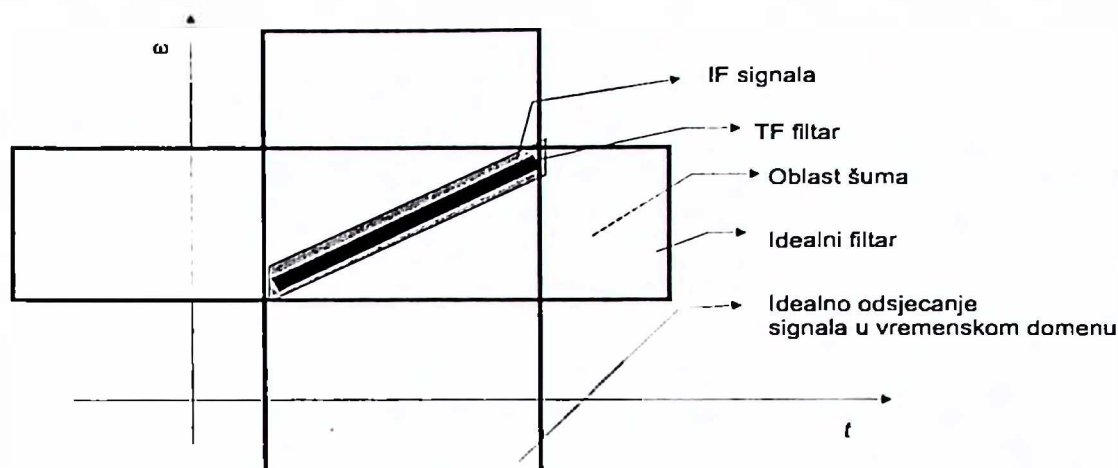
Slika 4.22: Odredjivanje oblasti komponenti signala  $R_f$  za prostorno-promjenljivi filter u tački  $(x,y)=(-0.5,-0.5)$ : a) Wignerova distribucija signala zahvaćenog šumom računata koristeći prozor  $128 \times 128$ ; b) Wignerova distribucija signala zahvaćenog šumom računata koristeći predloženi algoritam.

računata za širinu prozora  $N = 512$ , dok je  $WD$  signala (4.97) sa šumom data na slici 4.21b.  $SM$  sa širokim prozorom  $N_2 = 256$  prikazan je na slici 4.21c, dok je  $SM$  računat sa adaptivnim algoritmom prikazana na slici 4.21d. Na slici 4.21e prikazana je oblast u kojoj je detektovan signal (4.97).

**Primjer 2.** Posmatran je  $2D$  signal:

$$f(x, y) = 0.5e^{j(96\pi x^2 + 96\pi y^2)}e^{-1.5x^2 - 1.5y^2} \quad (4.98)$$

zahvaćen velikom količinom aditivnog šuma varijanse  $\sigma_{\nu\nu}^2 = 1$  tako da je odnos signal/šum  $10 \log(A^2/\sigma_{\nu\nu}^2) \approx -6[dB]$ . Signal (4.98) je oblika optičkih interferograma. Na slici 4.22 prikazano je odredjivanje oblasti  $R_f$  u tački  $(x, y) = (0.5, 0.5)$ .  $WD$  računata koristeći prozor  $(N_2 \times N_2) = (128 \times 128)$  prikazana je na slici 4.22a, dok je na slici 4.22b prikazana  $WD$  računata koristeći algoritam sa dva prozora  $(N_1 \times N_1) = (16 \times 16)$  i  $(N_2 \times N_2) = (128 \times 128)$ . Algoritam koristi distribuciju sa malom varijansom računatu za  $(N_1 \times N_1) = (16 \times 16)$  skoro svugdje osim u tačkama gdje je energija signala koncentrisana, gdje je korišćen prozor sa malim biasom  $(N_2 \times N_2) = (128 \times 128)$ .



Slika 4.23:  $FM$  signal zahvaćen šumom sa prikazom odgovarajućih filtera.

## 4.5 Prostorno-promjenljivo filtriranje

Kada signal i šum ne zauzimaju istu frekvencijsku oblast, efikasno filtriranje se može izvršiti korišćenjem stacionarnih filtera. U slučaju kada se signal i šum preklapaju u značajnom dijelu prostora i prostorno-frekvencijske oblasti, stacionarno filtriranje može biti neefikasno. Za signale koji zauzimaju istu prostornu i prostorno-frekvencijsku oblast, može se uvesti koncept prostorno-promjenljivog filtriranja. Separaciju pojedinih komponenti tada treba izvršiti u združenom  $S/S - F$  domenu. Na slici 4.23 šematski je prikazan  $FM$  signal zahvaćen šumom u  $TF$  ravni, kao i odgovarajući filteri.

Pored pristupa koji će ovdje biti prezentiran, za vremensko-promjenljivo filtriranje (slučaj  $1D$  signala) postoji i više drugih pristupa. Koncept prostorno-promjenljivog filtriranja uveo je Zadeh [319]. Zadehov pristup ima ekvivalent u  $TF$  transformacijama i to je  $RD$  [81, 82]. Zbog kompleksnosti  $RD$ , umjesto Zadehove, koristi se Weylova korespondencija sa ekvivalentnom u  $WD$  [320]-[322]. Jedan od značajnih pristupa u vremenski-promjenljivom filtriranju polazi od Wienerovog optimalnog filtra za nestacionarne signale [323]. Drugi koncept svodi filtriranje u  $TF$  ravni na filtriranje po pojedinim projekcijama [324]. Danas je najveća pažnja koncentrisana na primjenu uopštenih razvojnih spektara (*generalized evolutionary spectra*) u vremenski-promjenljivom filtriranju [325]-[329]. U radu [325], Weylov spektar se pokazao kao optimalni u okviru te klase. Stoga, ovaj pristup polazi od modifikovanog Weylovog spektra, i filtriranje se obavlja odredjivanjem oblasti u kojoj se signal nalazi u  $TF$  ravni. Koncept dobro funkcioniše u slučaju  $FM$  signala.

Posmatra se višedimenzioni signal zahvaćen šumom (4.76). Nestacionarno višedimenziono filtriranje definiše se po analogiji sa  $1D$  vremenski-promjenljivim filtrom [320,

323, 325, 330, 332, 333] kao:

$$(Hs)(\vec{r}) = \int_{\vec{v}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) s(\vec{r} + \vec{v}) d\vec{v}, \quad (4.99)$$

gdje je  $h(\vec{r}, \vec{v})$  impulsni odziv prostorno-promjenljivog filtra. Izraz (4.99) predstavlja modifikaciju standardne Weylove korespondencije [312, 313]:

$$(Hs)(\vec{r}) = \int_{\vec{v}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) s(\vec{v}) d\vec{v}. \quad (4.100)$$

Modifikacija je izvršena da bi se za ulazni signal u obliku  $FM$  signala  $f(\vec{r}) = Ae^{j\phi(\vec{r})}$  dobio  $(Hf)(\vec{r}) = cf(\vec{r})$ , ako je filter u  $S/S - F$  oblasti definisan kao delta funkcija  $\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r}))$  duž lokalne frekvencije  $\nabla\phi(\vec{r})$  za signale koji zadovoljavaju metod stacionarne faze. Osobina  $S/S - F$  distribucija da su dobro koncentrisane oko lokalne frekvencije  $\vec{\omega}_l(\vec{r}) = \nabla\phi(\vec{r})$  je važna tačka u njihovom uvođenju i primjeni. Neka se  $FT$  višedimenzionog  $FM$  signala  $f(\vec{r}) = Ae^{j\phi(\vec{r})}$  može dobiti korišćenjem višedimenzionog metoda stacionarne faze [50, 171, 334]:

$$F(\vec{\omega}) = \int_{\vec{r}} Ae^{j\phi(\vec{r})} e^{-j\vec{r}\vec{\omega}} d\vec{r} = Ae^{j\phi(\vec{r}_0)} e^{-j\vec{r}_0\vec{\omega}} \sqrt{\frac{(2\pi j)^Q}{\prod_{i=1}^Q \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}_0)}{\partial r_i^2}}}, \quad (4.101)$$

gdje je  $\vec{\omega} = \nabla\phi(\vec{r}_0)$ . Neka je postignuta idealna koncentracija  $S/S - F$  predstavljanja sa  $\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r}))$  za  $f(\vec{r})$ . Kada nema ulaznog šuma  $s(\vec{r}) = f(\vec{r})$ , očekuje se da će filter dati na izlazu nepromijenjeni signal. U skladu sa Parservalovom relacijom, dobija se iz (4.97):

$$\begin{aligned} (Hs)(\vec{r}) &= \int_{\vec{v}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) s(\vec{r} + \vec{v}) d\vec{v} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\vec{\omega}} L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) F(\vec{\omega}) e^{j\vec{r}\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\omega}} \delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r})) Ae^{j\phi(\vec{r}_0)} e^{-j\vec{r}_0\vec{\omega}} \sqrt{\frac{j^Q}{\prod_{i=1}^Q \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}_0)}{\partial r_i^2}}} e^{j\vec{r}\vec{\omega}} d\vec{\omega} = cAe^{j\phi(\vec{r})}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Iz uslova da je metod stacionarne faze zadovoljen, važi  $\vec{\omega} = \nabla\phi(\vec{r}) = \nabla\phi(\vec{r})$ , pa slijedi  $\vec{r}_0 = \vec{r}$  i  $c = \sqrt{\prod_{i=1}^Q \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}_0)}{\partial r_i^2}}$ .  $L_H(\vec{r}, \vec{\omega})$  se definiše kao:

$$L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{v}} h(\vec{r} - \vec{v}/2, \vec{r} + \vec{v}/2) e^{-j\vec{\omega}\vec{v}} d\vec{v}. \quad (4.103)$$

Na ovaj način dobila se modifikacija Weylovog filtra sa amplitudskom varijacijom izlaznog signala, koja je zavisna od varijacije lokalne frekvencije.

Weylov filter će, u ovom slučaju, proizvesti  $(Hs)(\vec{r}) = cAe^{j\phi(\vec{r})} e^{-j\vec{r}\nabla\phi(\vec{r})}$  što nije željeni izlaz. Signal, osim varijacije amplitude, ima i značajnu varijaciju faze, što opravdava uvedenu modifikaciju (4.97). Weylov filter ne može da filtrira signale u predstavljenim numeričkim primjerima. Interesantno je, sa teoretske tačke, posmatrati

slučaj kada je funkcija  $L_H(\vec{r}, \vec{\omega})$  geometrijska sredina idealno koncentrisane distribucije duž lokalne frekvencije  $\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r}))$  i duž grupnog kašnjenja  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_g(\vec{\omega}))$ , gdje, za asimptotske signale, važi  $\vec{r}_g(\vec{\omega}) = \nabla^{-1}\phi(\vec{r})$  [50]. Tada će za

$$\begin{aligned} L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) &= (2\pi j)^{Q/2} \sqrt{\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r}))\delta(\vec{r} - \vec{r}_g(\vec{\omega}))} = \\ &= (2\pi j)^{Q/2} \sqrt{j^Q \prod_{i=1}^Q \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}_0)}{\partial r_i^2} \delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{r}))}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

izlaz iz filtra biti isti kao i ulazni signal, bez dodatne amplitudske varijacije.

Izvođenje optimalne funkcije  $H$  biće obavljeno u skladu sa odredjivanjem Wienerovog filtra za stacionarne signale [171, 323, 332]. Greška  $f(\vec{r}) - (Hs)(\vec{r})$  je ortogonalna u odnosu na  $s^*(\vec{r} + \vec{\alpha})$  kada  $MSE$  dostiže minimum [171, 332]:

$$E \left\{ \left[ f(\vec{r}) - \int_{\vec{v}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) s(\vec{r} + \vec{v}) d\vec{v} \right] s^*(\vec{r} + \vec{\alpha}) \right\} = 0. \quad (4.105)$$

Očekivana vrijednost ambiguity funkcije  $AF_{ss}(\vec{\theta}, \vec{v})$  [335, 336] je:

$$\overline{AF}_{ss}(\vec{\theta}, \vec{v}) = \int_{\vec{r}} E \{ s(\vec{r} + \vec{v}/2) s^*(\vec{r} - \vec{v}/2) \} e^{-j\vec{\theta}\vec{r}} d\vec{r} \quad (4.106)$$

dok je  $FT h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2)$  po promjenljivoj  $\vec{r}$  dato kao:

$$A_H(\vec{\theta}, \vec{v}) = \int_{\vec{r}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) e^{-j\vec{\theta}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (4.107)$$

Iz (4.105) slijedi:

$$\overline{AF}_{fs}(\vec{\theta}, \vec{\alpha}) = \int_{\vec{v}} \int_{\vec{u}} A_H(\vec{u}, -\vec{v}) \overline{AF}_{ss}(\vec{\theta} - \vec{u}, \vec{\alpha} - \vec{v}) d\vec{u} d\vec{v} \quad (4.108)$$

za procese koji su pretežno koncentrisani oko koordinatnog početka u ambiguity domenu (različiti od nule samo u oblasti  $|\vec{\theta}|, |\vec{r}|, |\vec{\alpha}|, |\vec{v}|$  gdje je  $e^{j(\vec{\theta}\vec{v} - \vec{u}\vec{\alpha} - \vec{u}\vec{r})/2} \approx 1$ ). Ovi procesi se u 1D slučaju nazivaju underspread procesima [323, 335, 336].

**Napomena:** Relacija (4.108) direktno slijedi iz (4.105), bez dodatnih pretpostavki, ako se posmatraju kvazistacionarni procesi [171, 312, 332], to jest  $E\{f(\vec{r})s^*(\vec{r} + \vec{\alpha})\} = E\{f(\vec{r} - \vec{\alpha}/2)s^*(\vec{r} + \vec{\alpha}/2)\}$  i  $E\{s(\vec{r} + \vec{v})s^*(\vec{r} - \vec{\alpha})\} = E\{s(\vec{r} + (\vec{v} - \vec{\alpha})/2)s^*(\vec{r} - (\vec{v} - \vec{\alpha})/2)\}$ . Ovo daje dodatnu fizičku motivaciju za izvođenje modifikacije (4.97). ■

Višedimenziona  $FT$  relacije (4.108) rezultira u  $\overline{WD}_{ss}(\vec{r}, \vec{\omega}) = L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) \overline{WD}_{ss}(\vec{r}, \vec{\omega})$ , gdje je  $\overline{WD}_{ss}(\vec{r}, \vec{\omega})$  Wignerov spektar (očekivana vrijednost  $WD$  [337] signala  $s(\vec{r})$ ):

$$\overline{WD}_{ss}(\vec{r}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{v}} E \{ s(\vec{r} + \vec{v}/2) s^*(\vec{r} - \vec{v}/2) \} e^{-j\vec{\omega}\vec{v}} d\vec{v}. \quad (4.109)$$

Ako signal i šum nijesu korelirani, važi:

$$L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) = \frac{\overline{WD}_{ff}(\vec{r}, \vec{\omega})}{\overline{WD}_{ff}(\vec{r}, \vec{\omega}) + \overline{WD}_{\nu\nu}(\vec{r}, \vec{\omega})}. \quad (4.110)$$

**Napomena:** Za stacionarne signale sa  $\overline{WD}_{ff}(\vec{r}, \vec{\omega}) = S_{ff}(\vec{\omega})$ ,  $h(\vec{r} - \vec{v}/2, \vec{r} + \vec{v}/2) = h(\vec{r})$  i  $L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) = H(\vec{\omega}) = \mathcal{FT}\{h(\vec{v})\}$  relacije (4.109) i (4.110) svode se na stacionarni Wienerov filtar [171, 332]. ■

Kako je Wignerov spektar signala  $f(\vec{r})$  koncentrisan unutar oblasti  $R_f$ , dok je šum dominantno rasporedjen van ovog regiona, dobija se jednostavno rješenje (4.110):

$$L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{za } (\vec{r}, \vec{\omega}) \in R_f \\ 0 & \text{za } (\vec{r}, \vec{\omega}) \notin R_f \end{cases} \quad (4.111)$$

$R_f$  se može definisati kao oblast u kojoj je  $\overline{WD}_{ff}(\vec{r}, \vec{\omega}) \neq 0$ . Ovo se može primijeniti na široku klasu  $L^M$  signala, koji se dobro koncentrišu u  $S/S - F$  ravni, dok je bijeli šum  $\nu(\vec{r})$  rasprostranjen u  $S/S - F$  ravni. Kako se u numeričkim izrazima delta impuls svodi na jediničnu vrijednost, za relaciju (4.111) važe prethodno izvedeni zaključci.

**Napomena:** Relacija (4.111) bi se mogla dobiti i na poluintuitivan način kao u [330]. Tada neke pretpostavke, koje su uvedene u izvodjenje kao pretpostavka o underspreadness procesu, nijesu neophodne [331]. Više detalja o ovom izvodjenju može se naći za 1D slučaj u [330]. ■

U numeričkim relacijama koriste se pseudo (prostorno ograničeni oblici) filtarske relacije (4.99):

$$(Hs)(\vec{r}) = \int_{\vec{v}} h(\vec{r} + \vec{v}/2, \vec{r} - \vec{v}/2) w(\vec{v}) s(\vec{r} + \vec{v}) d\vec{v}. \quad (4.112)$$

Analiza, koja je data prethodno za (4.99), važi i za (4.112) pod uslovom da je  $w(\vec{0}) = 1$ . Ova relacija omogućava korišćenje prostorno ograničenog intervala. Prozor ne utiče na filtarski izlaz ako je  $w(\vec{0}) = 1$ . Koristeći Parsevalovu teoremu, relacija (4.112) dobija oblik:

$$(Hs)(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^Q} \int_{\vec{\omega}} L_H(\vec{r}, \vec{\omega}) STFT(\vec{r}, \vec{\omega}) d\vec{\omega} \quad (4.113)$$

Diskretni oblik filtarske relacije (4.113) je:

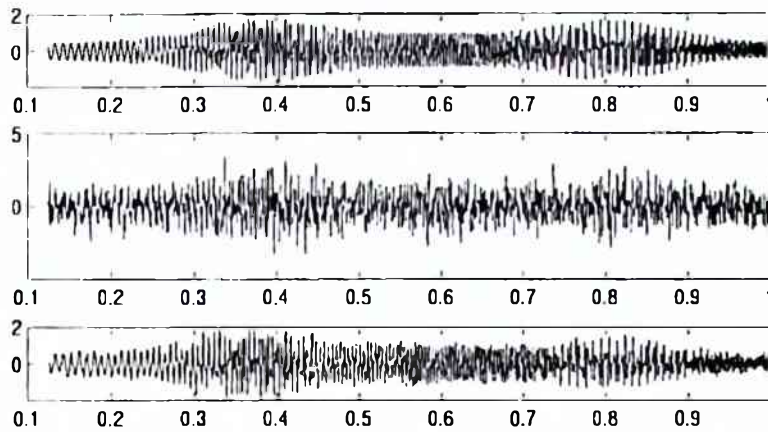
$$(Hs)(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L_H(\vec{n}, \vec{k}) STFT(\vec{n}, \vec{k}), \quad (4.114)$$

gdje je  $L_H(\vec{n}, \vec{k})$  jednako 1 kada je  $WD$  signala različita od nule. Da bi se obavilo filtriranje, neophodno je znati  $STFT$  i  $L_H(\vec{n}, \vec{k})$ . Računanje  $STFT$  je jednostavno, dok se odredjivanje oblasti  $L_H(\vec{n}, \vec{\omega})$  može izvršiti pomoću algoritma opisanog u prethodnom odjeljku. Prethodni algoritam predstavlja estimaciju  $WD$  bez šuma na osnovu samo jednog posmatranja "zašumljenog" signala. Za odredjivanje regiona  $R_f$  (odnosno  $L_H(\vec{r}, \vec{\omega})$ ), može se koristiti  $STFT(\vec{r}, \vec{\omega})$ , odnosno  $SPEC$ , samo ako se lokalna frekvencija ne mijenja u prostoru, ili se može smatrati konstantnom u okviru prozora  $w(\vec{v})$ . U suprotnom, kada je varijacija lokalne frekvencije značajna u posmatranom domenu, za niske i visoke frekvencije, efikasna estimacija oblasti pomoću  $SPEC$  ili skalograma



se ne može obaviti. Oblast koja bi bila određena pomoću ovih algoritama bila bi preširoka, odnosno filtriranje bi bilo neefikasno.

**Primjer 1.** Za multikomponentni signal (4.97) zahvaćen  $CGWN$ , sa odnosom signal/šum  $-1[dB]$ , oblast  $R_f$  je određena na slici 4.21e. Signal (4.97), sa i bez šuma, prikazan je na slikama 4.24a i 4.24b, dok je filtrirani signal prikazan na slici 4.24c.



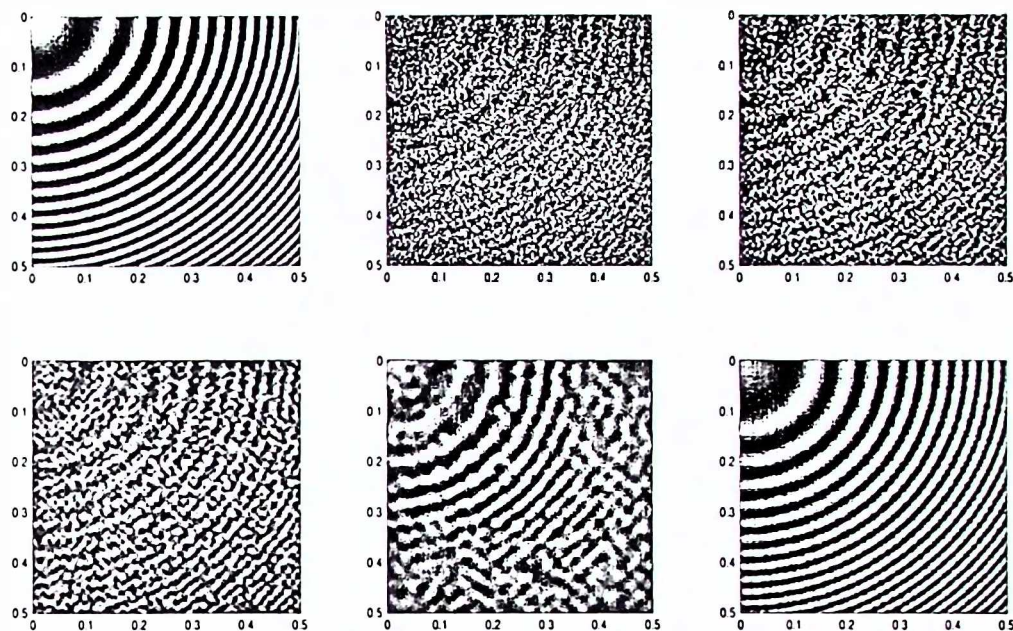
Slika 4.24: Vremenski-promjenljivo filtriranje multikomponentnog signala: a) Originalni signal bez šuma; b) Signal zahvaćen šumom; c) Signal filtriran pomoću vremensko-promjenljivog filtra.

**Primjer 2.** Monokomponentni signal (4.98), u granicama  $[x, y] \in [0, 0.5]$ , sa  $N = 128$  odbiraka u prozoru, prikazan je na slici 4.25a. Ovaj signal, zahvaćen  $CGWN$  sa odnosom signal/šum  $-6[dB]$ , prikazan je na slici 4.25b. Na slikama 4.25c, 4.25d i 4.25e prikazan je signal (4.98) zahvaćen šumom i filtriran idealnim niskopropusnim filtrom sa graničnom učestanostima  $f_c = (3/4)f_{\max}$ , gdje je  $f_{\max}$  maksimalna frekvencija koju može da prikaže  $WD$  bez aliasinga (za ovu vrijednost frekvencije obuhvaćen je kompletan signal, ali i velika količina šuma),  $f_c = f_{\max}/2$  i  $f_c = f_{\max}/4$ . Ako se smanjuje granična frekvencija, smanjuje se šum, ali i degradira signal. Signal filtriran predloženim postupkom, gdje je oblast signala određena neparametarskim algoritmom i prikazana u jednoj tački na slici 4.22b, dat je na slici 4.25f. Sa slike se uočavaju prednosti predloženog algoritma.

**Primjer 3.** Multikomponentni 2D signal:

$$f(x, y) = \exp(j(-104\pi(x^2 + x) - 104\pi y^2)) + \exp(j(-104\pi x^2 - 104\pi(y^2 + y))) \quad (4.115)$$

zahvaćen je velikom količinom  $CGWN$ , varijanse  $\sigma_{\nu\nu}^2 = 1.7$ . Za računanje  $SPEC$ , koristi se Hannov prozor sa  $(N_1 \times N_1) = (16 \times 16)$ , dok je za računanje  $SM$  korišćen široki Hannov prozor sa  $(N_2 \times N_2) = (128 \times 128)$  odbiraka i  $L_d = 2$ . Originalni signal



Slika 4.25: Filtriranje dvodimenzionog signala: a) Originalni signal bez šuma; b) Signal zahvaćen šumom; c)-e) Signal filtriran niskopropusnim filtrima sa različitim graničnim frekvencijama; f) Signal filtriran koristeći prostorno-promjenljivi filter.

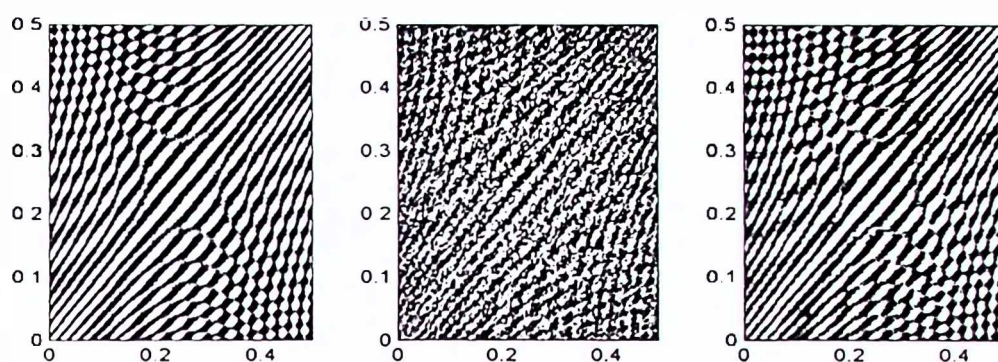
prikazan je na slici 4.26a, signal zahvaćen šumom prikazan je na slici 4.26b, dok je signal filtriran predloženim pristupom prikazan na slici 4.26c.

Primjer 4. Posmatrana je separacija linearnog *FM* signala iz slike. Ovo odgovara problemu notch filtra u stacionarnom slučaju. Lokalna frekvencija je promjenljiva i treba je odrediti za svaku tačku. Detekcija, zasnovana na *SPEC*, prouzrokovala bi širok region, odnosno nezadovoljavajuće filtriranje. *SPEC* bi mogao biti iskorišćen samo kod konstantnih ili sporopromjenljivih lokalnih frekvencija. *WD* omogućava veoma precizno određivanje lokalne frekvencije kada se ona mijenja u slici. To rezultuje efikasnošću kojom je predložena procedura primijenjena na slici 4.27. Originalna slika "Tigar" prikazana je na slici 4.27a, dok je linearni *FM* signal prikazan na slici 4.27b. Slika sa *FM* signalom prikazana je na slici 4.27c, dok je izdvojeni *FM* signal prikazan na slici 4.27d. Rekonstrukcija je veoma dobra, premda je odnos maksimalne vrijednosti originalne slike i linearnog *FM* signala veoma visok:

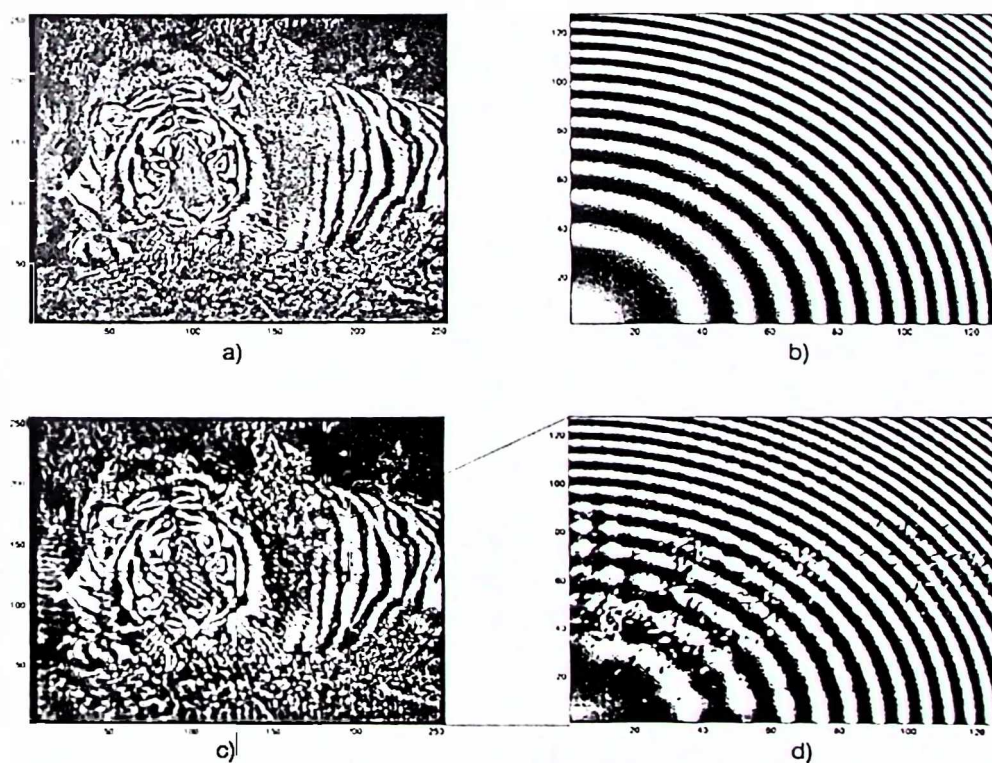
$$20 \log_{10} \frac{\max\{\nu(\vec{r})\}}{\max\{f(\vec{r})\}} = 18.5[dB], \quad (4.116)$$

gdje je  $\nu(\vec{r})$  šum, odnosno, u ovom slučaju, slika, dok je  $f(\vec{r})$  frekvencijski modulisan signal.





Slika 4.26: a) Dvodimenzioni multikomponentni signal bez šuma; b) Signal zahvaćen šumom; c) Filtrirani signal.



Slika 4.27: a) Originalna slika; b) Dio linearno frekvencijski modulisanog signala koji je dodat slici; c) Suma dva prethodna signala; d) Rekonstruisani linearno frekvencijski modulisani signal sa slike c).

## **GLAVA V**

---

## 5. PRIMJENA VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH METODA U DIGITALNOM WATERMARKINGU

### 5.1 Digitalni watermarking - pregled

Tri osnovne metode zaštite multimedijalnih informacija su: kriptografija, ugradnja signatura (potpisa) i watermarking. Kriptografski zaštićenoj informaciji se ne može pristupiti bez odgovarajućeg ključa. Zaštićeni fajl do trenutka dekodiranja ne predstavlja multimedijalnu informaciju. Potpis (signatura) je dodatak informaciji, koji, u slučaju da je došlo do promjene informacije, te promjene sugerise i upozorava eventualnog korisnika. Signatura može biti u fajlu koji nosi informaciju, ili zaseban fajl. Ako dodje do oštećenja informacije usljed prenosa komunikacionim kanalom, i pored njene suštinske valjanosti, signatura će sugerisati da se informacija ne smije koristiti. Digitalni watermarking (vodeni žig) je novost u zaštiti autorskih prava nad multimedijalnim podacima. Cilj je u multimedijalnu informaciju (slika, zvuk, film) unijeti signal, koji neće kvariti multimedijalni sadržaj (neće biti vidljiv u slici i čujan u zvuku), i kojeg će vlasnik informacije moći detektovati na osnovu tajne informacije - ključa watermarka. Zahtijevi u odnosu na watermarking tehnike su:

- Da ne kvari primjetno originalni signal;
- Da se watermark ne može ukloniti uobičajenim tehnikama u obradi signala (npr. kod slike to su: kompresija, filtriranje, operacije na histogramu, geometrijske transformacije, itd), koje predstavljaju atake (Jedan od ataka može biti i deformisanje signala usljed šuma u komunikacionim kanalima.);
- Da se ne može otkriti na jednostavan način bez poznavanja posebne informacije ključa watermarka;
- Da je detekcija watermarka od strane ovlašćenih lica vjerodostojna, odnosno da je mala vjerovatnoća detekcije pogrešnog, nepostojećeg ili nedetekcije postojećeg watermarka;
- Poželjno bi bilo da se ista tehnika može primijeniti na sve oblike multimedijalnih podataka.
- Da se može razviti veliki broj varijanti watermarka.



Osnovna razlika između klasične kriptografske zaštite i watermarkinga je u tome što, u slučaju da se "provali" ključ kod podataka koji su zaštićeni kriptografski, vlasnik potpuno gubi kontrolu nad njegovom distribucijom. Kod watermarkinga, u slučaju da u digitalnom materijalu vlasnik autorskih prava otkrije svoj ključ, ima mogućnost da tuži neovlašćenog distributera.

Do sada je razvijen veliki broj tehnika za umetanje watermarka. Po mjestu dodavanja watermarking tehnike se dijele na:

1. Watermarking u domenu signal [338]-[343]. Watermark se dodaje u djelovima signala koji neće biti značajnije oštećeni. Npr., visokoteksturne površi kod slike ili "glasna" područja u zvuku. Problem kod ovih tehnika je što odsijecanje dijela signala, u kojem je watermark dodat, vodi gubitku zaštite. Detalji u kojima je watermark smješten su značajno oštećeni.

2. Dodavanje watermarka u transformacionim domenima (*DFT*, *DCT*, wavelet, Fourier-Mellinov, *JPEG*, itd) [344]-[357]. Uobičajeno se selektuje oblast u kojoj su koeficijenti transformacije srednje veličine. Dodavanje watermarka u maksimalnim koeficijentima, kod slike, dovelo bi do mijenjanja osvjetljaja, dok bi dodavanje minimalnim koeficijentima bilo osjetljivo na atake, a posebno na filtriranje i kompresiju sa gubicima, odnosno kvarilo bi detalje slike.

Po vrsti samog watermarka dijele se na:

1. Korelirane signale. U više područja se ubacuju korelirane informacije koje bi trebale da omoguće detektovanje watermarka i u slučaju usrednjavanja velikog broja istih multimedijalnih sadržaja sa različitim watermarkom.

2. Pseudoslučajne sekvence, slične tehnike kao one koje se koriste u "spread-spectrum" komunikacijama.

Po načinu detekcije watermarking tehnike dijele se na:

1. Tehnike kod kojih je za detektovanje watermarka neophodno poznavanje originalne informacije. Loša osobina je veličina, brzina softvera i baze podataka za pretraživanje watermarka i posredno ugrožavanje autorskih prava. Ovakva šema naziva se privatnom. Prednost je u mogućnosti detekcije malih watermarka, odnosno malom oštećenju originalne informacije.

2. Detekcija watermarka bez poznavanja originalne informacije, ali sa poznatim watermark signalom. Ovakva šema se naziva polu-privatnom. Većina današnjih tehnika pripada ovoj grupi.

3. Detekcija bez originalne informacije i bez poznavanja watermarka, odnosno samo na osnovu određenih informacija o mogućim vrijednostima ključa watermarka. Ove šeme se intenzivno istražuju i nude najviše mogućnosti. Nazivaju se javnim šemama zasnovanim na javnim ključevima.

Neke šeme, koje se danas predlažu, su kombinacije nekih od tri osnovne grupe šema

(obično se koriste kombinacije druge i treće grupe). U nekim slučajevima teško je utvrditi kojoj šemi pripada predložena tehnika.

U radu će, kao osnovni multimedijalni sadržaj biti razmatrana sivoskalirana (*gray-scale*) fotografija (slika), ali će biti date napomene o karakteristikama watermarkinga u ostalim tipovima multimedijalnih signala. Kod zvuka, dodavanje watermarka je slično kao kod sivoskaliranje fotografije, s tim što je spektralni (frekvencijski) sadržaj slike obično znatno niskopropusniji od spektralnog sadržaja zvuka. Kod slike u boji, vrši se razdvajanje na tri komponente u neki od modela, kao što je *HSV*. Ovi modeli se sastoje od komponente osvjetljaja (luminente komponente) i dvije komponente boja (hrominente komponente). Hrominente komponente nijesu pogodne za watermarking već se koristi samo luminentna komponenta. Ako bi se kod filma svaki frejm nezavisno zaštitio, pažljiviji gledalac bi mogao da u pojedinim područjima, detektuje podrhtavanje slike. Stoga, se samo neki od frejmova podvrgavaju watermarkingu, dok se ostalima dodaje watermark, koji ima istu vezu prema watermarku u osnovnom frejmu kao što je medjusobni odnos dva frejma. Npr., u *MPEG* formatu, samo neki frejmovi (*I* frejmovi), su nezavisni, dok su ostali vezani vektorima pomjeraja za ove frejmove (*P* i *B* frejmovi). Watermark se dodaje u *I*-frejmove, dok ostali frejmovi ostaju isti.

Danas se u praksi koristi više watermarking tehnika. Najpoznatija je *Digimarc* [360], koju koristi *CorelDraw*. Pored toga, postoje drugi komercijalni [361, 362] i naučno-istraživački [363, 364] programi za watermarking. Iako je tehnika počela da se razvija od 1997. godine, već postoji veliki broj radova. Posebno se ističu pregledni radovi [339, 351], [365]-[369]. Watermarking se može povezati i sa prenošenjem više slika jednim kanalom, odnosno sa skrivanjem podataka [350]. Osnovne tehnike za dodavanje watermarka u obliku pseudo-slučajne sekvence opisao je Cox [351]. Tehnikama dodavanja watermarka u wavelet domen posvećeni su radovi [353, 354]. Nelinearno filtriranje za uklanjanje *spread-spectrum* watermarka iz slike razvijeno je u [370]. Tehnike nelinearnog filtriranja nijesu i jedine koje mogu da posluže za brisanje watermarka. O tehnikama za brisanje watermarka može se više pročitati u [371]. Jedan efikasan način za brisanje *Digimarc* ataka opisan je u [376]. Ujedno, u radovima se watermarking sistemi testiraju na različite tipove ataka. Stoga je kreiran *Stirmark* program, koji atakuje sliku sa watermarkom i *Stirmark* benchmark, pomoću kojeg se može porediti nova watermarking šema sa postojećim [372, 373]. Proces razvoja watermarking sistema opisan je radu [374]. Watermarking se može posmatrati i kao podoblast steganografije, koja podrazumijeva prenošenje poruka tajnog sadržaja u sklopu drugih poruka. Limiti steganografije opisani su u [375]. Može se konstatovati da današnje watermarking šeme nijesu dostigle te granice. Neke praktične aplikacije watermarkinga u različitim tipovima multimedijalnih podataka opisane su u [345], [377]-[383]. Dodavanje water-

marka u *DCT* domen razvijeno je u [347]-[349],[352, 359]. Digitalni watermarking video signala u *MPEG* – 2 domenu razmatran je u [379]. Detalji o vjerodostojnosti watermarka mogu se naći u [384, 385]. Tehnike haotičnog miješanja piksela watermarka i slike razmatrane su u radovima [339, 341, 342, 343]. Dodavanje watermarka u strukturnu organizaciju slike razmatrano je u [386]. Watermarking zasnovan na detekciji sličnosti pojedinih dijelova slike ili transformacije slike razmatran je u [378].

U ovom poglavlju razmatrane su tehnike watermarkinga u transformacionom domenu. Kod ovih tehnika, nakon pronalaženja odgovarajuće transformacije slike, detektuju se koeficijenti (obično u sredini propusnog opsega) u kojima će dodavanje watermarka najmanje vizuelno kvariti sliku. Zatim se, nekom od tehnika, doda watermark tim koeficijentima i, nakon inverzne transformacije, dobije slika sa ugrađenim watermarkom. Postoji mogućnost da su pojedini regioni slike vizuelno oštećeni dodatim watermarkom. Kod slike su posebno osjetljiva "ravna" područja, dok su kod zvuka osjetljiva "tiha" područja. S druge strane, u visokoteksturnim regionima slike (visokopromjenljivim), može se neprimjetno dodati mnogo više signala nego što je to slučaj kod manje promjenljivih područja. Kod muzičkih djela, poznata je činjenica da su pojedini zvukovi nedozvoljeni. Stoga se, za visokokvalitetne snimke, mora strogo voditi računa o tome da watermark ne produkuje takve zvukove. Neka je sa  $I$  označena slika, dok je watermark  $I_w$  i slika sa watermarkom  $I^* = I + I_w$ . Maskiranje watermarka može se obaviti na osnovu relacije:

$$I_M = I(1 - \text{mask}(I)) + \text{mask}(I)I^* = I + \text{mask}(I)I_w, \quad (5.1)$$

gdje je  $\text{mask}(I)$  signal u granicama  $[0, 1]$  istih dimenzija kao originalna informacija. Za područja u kojima se na neprimjetan način može dodavati signal,  $\text{mask}(I)$  je bliže 1 dok je u suprotnom slučaju bliže 0. Za sliku se veoma često, za vizuelno maskiranje koristi *HVS*-sistem razvijen u [347]. Ovim sistemom se oko svakog piksela formira matrica dimenzija  $9 \times 9$  za koju se predmetni piksel nalazi u sredini. Zatim se odredi varijansa ovih podataka i maskirajući signal predstavlja normalizovanu varijansu (varijansa podijeljena sa maksimalnom varijansom pojedinačnog piksela). Ako svih  $9 \times 9 = 81$  piksela imaju istu vrijednost, varijansa je jednaka nuli, odnosno maskirajući signal, za tu tačku, neće dozvoliti promjenu vrijednosti osvijetljaja koja bi mogla biti primijećena. Za zvuk se kao maskirajući signal obično koristi srednja vrijednost energije nekoliko desetina odbiraka oko odbirka za koji se watermark želi kreirati [387].

## 5.2 Digitalni watermarking u FRFT domenu

Sve dosadašnje tehnike za dodavanje watermarka koriste ili prostorni ili transformacioni domen. Da bi povećali fleksibilnost ovih algoritama uveden je watermarking u  $FRFT$  domenu [388]. Posmatran je signal slike  $s(n_x, n_y)$  za koji je  $2D$   $FRFT$  data kao:

$$S_{\alpha_x, \alpha_y}(u_x, u_y) = FRFT_{\alpha_y}^{n_y \rightarrow u_y} \{ FRFT_{\alpha_x}^{n_x \rightarrow u_x} \{ s(n_x, n_y) \} \}, \quad (5.2)$$

gdje simbol  $FRFT_{\alpha}^{n \rightarrow u}$  označava  $1D$   $FRFT$ . Može se reći da je  $FRFT$  domen kombinacija prostornog i prostorno-frekvencijskog domena. Za  $|\alpha| \leq \pi/4$   $FRFT$  je u dominantno prostornom domenu, dok je za  $3\pi/4 \geq |\alpha| > \pi/4$  u dominantno prostorno-frekvencijskom domenu. Da bi se u  $FRFT$  domen unio signal, koji je u prostornom domenu realan  $(y(t) + y^*(t))/2$ , neophodno je u  $FRFT$  domen za ugao  $\alpha$  dodati transformacione koeficijente  $Y_{\alpha}(u)$ , dok se u  $FRFT$  domen za ugao  $-\alpha$  dodaju konjugovano kompleksni koeficijenti  $Y_{\alpha}^*(u)$ . Posmatran je samo dominantno frekvencijski domen.

Nakon odredjivanja diskretne  $2D$   $FRFT$  korišćenjem algoritma opisanog u [270, 271], vrši se preuredjivanje koeficijenata u nerastući niz  $S = \{S_i | S_i \geq S_{i-1}\}$ . Prvih  $L$  se izostavlja a watermark se dodaje u narednih  $M$  koeficijenata. Dodavanje watermarka u najviše koeficijente može prouzrokovati značajnu deformaciju slike, dok se watermark u najnižim koeficijentima može obrisati algoritmima kompresije slike sa gubicima ili niskopropusnim filtriranjem bez značajne vizuelne promjene slike. Watermark se dodaje kao [347]:

$$S_i^w = S_i + k'_i |Re\{S_i\}| + j k''_i |Im\{S_i\}|, \quad i = L+1, L+2, \dots, L+M, \quad (5.3)$$

gdje je  $(k'_i, k''_i)$   $i = L+1, L+2, \dots, L+M$  realni ključ watermarka. Neka je watermark Gausovski bijeli šum varijanse  $\sigma^2$ , to jest neka su varijanse  $k'_i$  i  $k''_i$  jednake  $\sigma^2/2$ . Slika sa potencijalnim watermarkom je označena kao  $s^{(a)}(n_x, n_y)$ . Odluka da li je watermark detektovan donosi se poredjenjem detekcione vrijednosti (odziva detektora) u tzv. korelator metodu:

$$d = \sum_{i=L+1}^{L+M} [k'_i - j k''_i] S_i^{(a)} \quad (5.4)$$

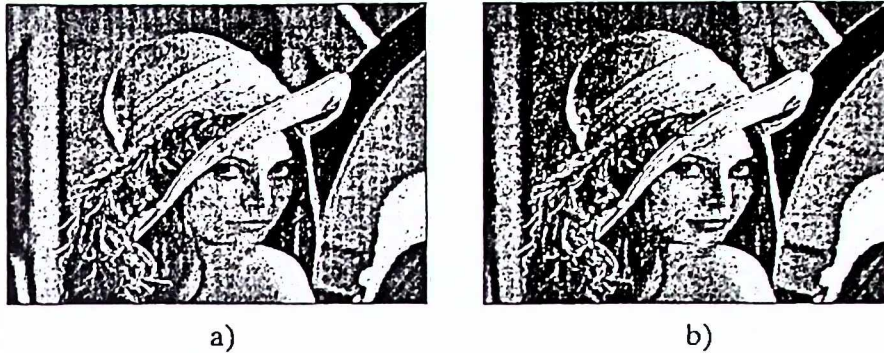
sa izabranim pragom. Ako na sliku sa watermarkom nijesu primijenjeni ataci ili šum usljed prenosa komunikacionim kanalima, tada je vrijednost  $d$  data kao:

$$d = \sum_{i=L+1}^{L+M} [k'_i - j k''_i] [S_i + k'_i |Re\{S_i\}| + j k''_i |Im\{S_i\}|]. \quad (5.5)$$

Kako  $M$  može biti veliko (za sliku dimenzija  $256 \times 256$  može biti i nekoliko hiljada) i ako je watermark nekorelisan sa slikom, srednja vrijednost  $d$  je:

$$E\{d\} = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=L+1}^{L+M} [|Re\{S_i\}| + |Im\{S_i\}|] \quad (5.6)$$





Slika 5.1: Test slika "Lena": a) Originalna slika; b) Slika sa watermarkom.

Ako nema watermarka u slici  $E\{d\} = 0$ , dok je varijansa u oba slučaja jednaka:

$$\text{var}\{d\} = \sigma^2 \sum_{i=L+1}^{L+M} |S_i|^2. \quad (5.7)$$

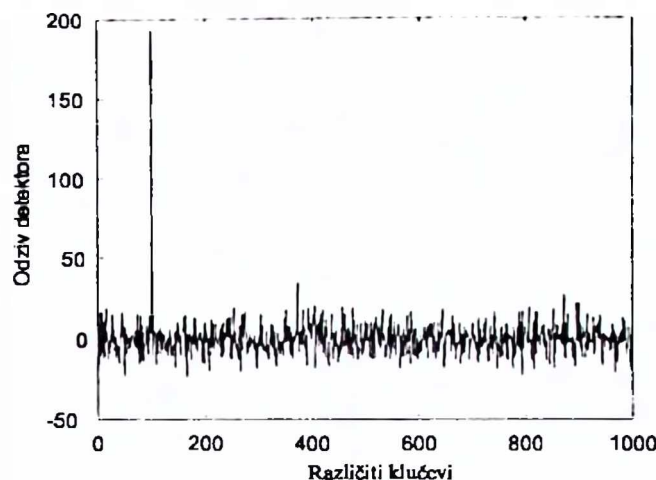
Prag detekcije je  $E\{d\}/2$ , dok je varijansa watermarka izabrana kao kompromis između nevidljivosti watermarka i vjerojatnoće pogrešne detekcije (lažnih alarma). Zbog mogućih ataka, u proračunima vjerojatnoće greške, koriste se veće varijanse od sračunate  $k \cdot \text{var}\{d\}$ ,  $k > 1$ .

Algoritam je testiran za različite test slike i atake. U prikazanim primjerima, korištena je standardna test slika "Lena" ( $256 \times 256$ )-slika 5.1a. Slika "Lena" sa watermarkom ( $L = 8000$ ,  $M = 8000$ ,  $\sigma^2 = 0.04$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.375\pi$ ) prikazana je na slici 5.1b. Na slici 5.2 prikazan je odziv detektora na 1000 različitih ključeva. Detektovan je jedino pravi ključ br. 100. Za 1000 različitih watermarkova odziv detektora u slici sa watermarkom i bez watermarka prikazan je na slici 5.3a. Dalje se može pretpostaviti da pirat poznaje ključ watermarka i poziciju ključa watermarka ali da ne zna transformacione uglove. Odziv detektora preko različitih transformacionih uglova prikazan je na slici 5.3b. Ova slika jasno pokazuje da je ovim konceptom moguće kreirati više watermarka nego u slučaju watermarkinga u  $DCT$  ili  $FT$  domenu.

Ovaj pristup omogućava robusnost na neke uobičajene atake (geometrijske transformacije, filtriranje, promjene u histogramu). Slika "Lena" zahvaćena bijelim Gausovskim šumom varijanse  $\sigma^2 = 6000$  prikazana je na slici 5.4a, dok je odsječena slika "Lena" prikazana na slici 5.4b. Odziv detektora u oba slučaja za 1000 različitih watermarka prikazan je na slikama 5.4c i 5.4d. Samo je pravi watermark broj 100 detektovan.

Za ilustraciju  $FRFT$  watermarkinga, u slučaju zvučnih signala, posmatran je ljudski govor u ambijentalnom šumu sa 32768 odbiraka (slika 5.5a). Ovom signalu je dodat watermark pod uglom  $\alpha = 0.375\pi$ . Pri realizaciji, korišćen je brzi algoritam





Slika 5.2: Odziv detektora za hiljadu ključeva.

za računanje  $FRFT$  prezentiran u [273]. Na slikama 5.5b i 5.5c prikazani su signal zahvaćen watermarkom i detekcija watermarka.

### 5.3 Watermarking u Radon-Wignerovom domenu

Postoji uobičajeno mišljenje da se deterministički signali ne mogu upotrijebiti za digitalni watermarking. Razlozi su u nemogućnosti kreiranja velikog broja watermark signala i mogućnosti da se, nekom od jednostavnih tehnika, signal izbriše bez oštećenja informacija koja je nosioc watermarka. Pokazuje se, međutim, da linearni  $FM$  signali mogu da posluže za watermarking. Pseudo- $WD$  distribuciju signala slike je data kao:

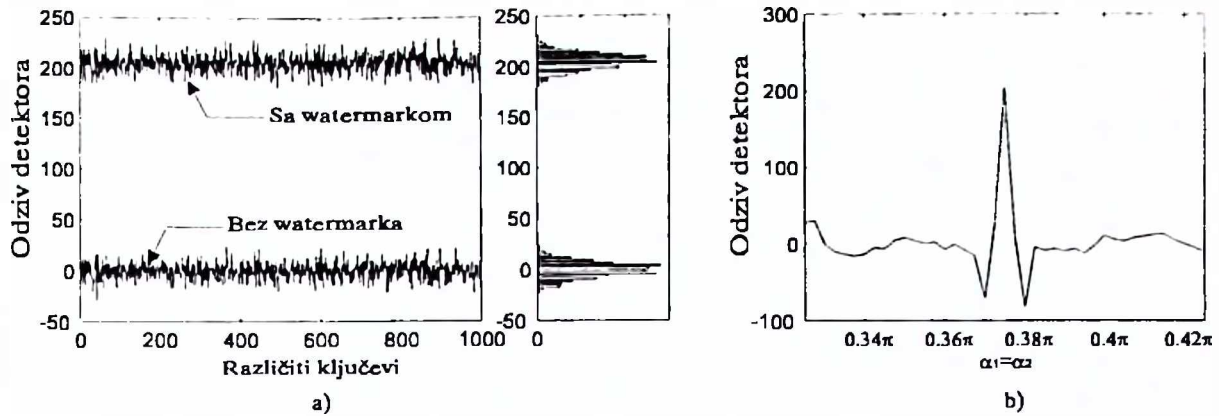
$$WD(x, y, \omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x+\xi/2, y+\eta/2) I^*(x-\xi/2, y-\eta/2) w(\xi, \eta) w^*(-\xi, -\eta) e^{-j(\omega_x \xi + \omega_y \eta)} d\xi d\eta, \quad (5.8)$$

gdje je  $w(\xi, \eta)$  2D prozorska funkcija. Predloženi watermark baziran je na 2D chirp signalu (linearni  $FM$ ):

$$\Omega(x, y) = 2A \cos(ax^2 + by^2 + c) = A(e^{j(ax^2 + by^2 + c)} + e^{-j(ax^2 + by^2 + c)}), \quad (5.9)$$

gdje je  $A$  amplituda watermarka.  $WD$  ovog signala je visokokoncentrisana na lokalnoj frekvenciji:

$$WD(x, y, \omega_x, \omega_y) = A^2 WD(\omega_x - 2ax, \omega_y - 2by) + A^2 WD(\omega_x + 2ax, \omega_y + 2by) + \text{kros-clanovi}, \quad (5.10)$$



Slika 5.3: a) Detekcije watermarka u slici; b) Detekcija watermarka za različite uglove.

gdje je vrijednost  $FT$  prozora  $W(\omega_x - 2ax, \omega_y - 2by)$  bliska delta funkciji  $\delta(\omega_x - 2ax, \omega_y - 2by)$  za dovoljno širok prozor. Kako će kros-članovi u  $WD$  biti eliminisani koristeći projekcije to oni neće biti analizirani.

Nakon geometrijskih transformacija, kakve su translacija, rotacija i skaliranje, chirp signal (5.9) se može zapisati u obliku:

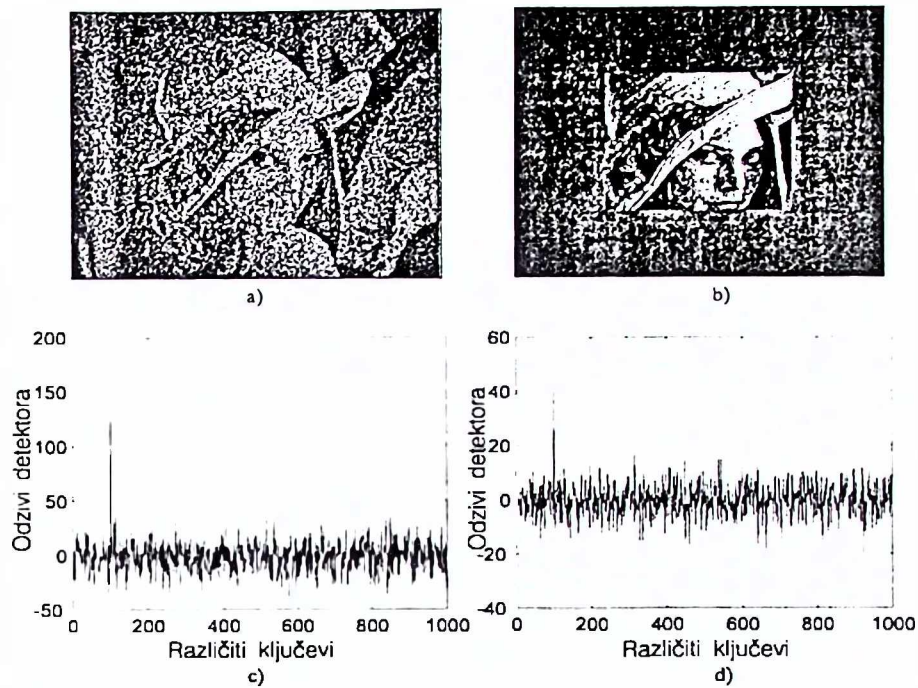
$$\Omega'(x, y) = 2A \cos(a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6). \quad (5.11)$$

Ova transformacija odgovara transformaciji centrirane u iskošenu elipsu sa centrom van koordinatnog početka. Sa stanovišta koncentracije  $WD$  na lokalnoj frekvenciji, može se reći da je invarijantna u odnosu na transformaciju, odnosno mijenja se samo pozicija lokalne frekvencije:

$$\begin{aligned} WD(x, y, \omega_x, \omega_y) = & A^2 W(\omega_x - 2a_1 x - a_3 y - a_4, \omega_y - 2a_2 y - a_3 x - a_5) + \\ & + A^2 W(\omega_x + 2a_1 x + a_3 y + a_4, \omega_y + 2a_2 y + a_3 x + a_5) + \\ & + \text{kros-clanovi}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dakle, geometrijske transformacije ne utiču na maksimalnu vrijednost  $WD$ , koja se namjerava koristiti za detekciju watermarka, odnosno  $WD$  watermarka ostaje bliska delta impulsu. Međutim, iako je korišćena specifična i veoma prepoznatljiva funkcija u prostoru, energija je još uvijek znatno manja od energije  $WD$  slike, jer je vrijednost  $A$  drastično manja od prosječne vrijednosti slike. To je razlog zbog kojeg se delta impulsi watermarka ne mogu detektovati korišćenjem  $WD$ .

Očigledno, neophodno je dodatno koncentrisati energiju signala watermarka  $\Omega(x, y)$ , dok energija slike treba da bude rasuta u prostoru. Maksimum  $WD$  chirpova (5.11) distribuiran je duž linearnih hiperravni  $\omega_x = \pm 2a_1 x \pm a_3 y \pm a_4$ ,  $\omega_y = \pm 2a_2 y \pm a_3 x \pm a_5$  u  $4D$



Slika 5.4: a) Slika "Lena" sa dodatim šumom; b) Odsječena slika "Lena"; c) Detekcija watermarka nakon dodavanja šuma; d) Detekcija watermarka nakon odsjecanja.

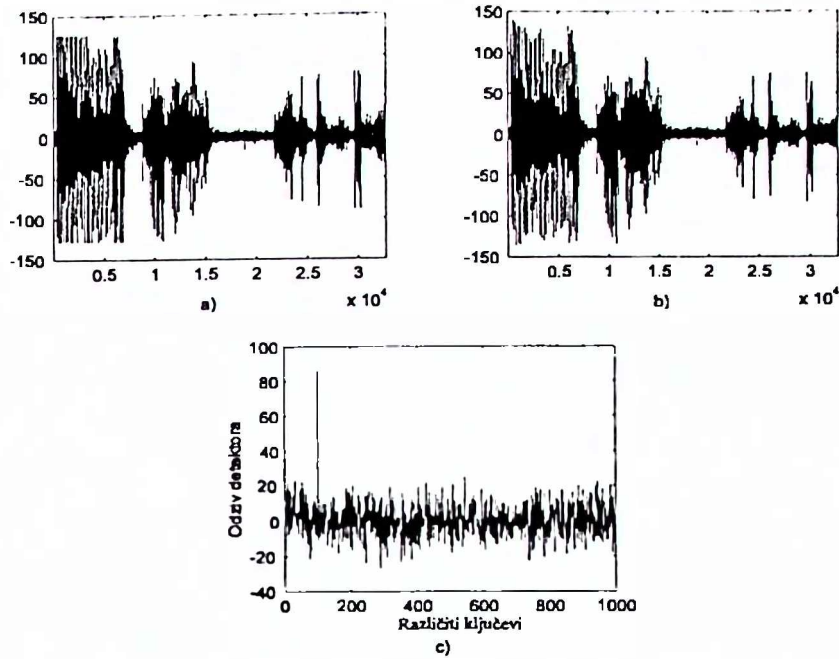
$S/S-F$  domenu, dok je  $WD$  slike rasuta u  $4D$  prostoru. Zbog toga je potrebno koristiti projekciju  $WD$  slike sa watermarkom. Ovo omogućava kompletnu koncentraciju  $WD$  watermarka (sume maksimuma Wignerovih distribucija watermarka), koja se može očekivati na jednoj projekcionoj ravni. U projekcionoj ravni watermarka, kompletna energija watermarka će biti koncentrisana u jednoj tački, i, za veoma mali watermark u poredjenju sa slikom, moći će prevazići energiju slike za ovu projekciju i energiju watermarka za druge projekcione ravni. Na ovaj način, moguće je detektovati mali watermark, koji ima mnogo manju amplitudu od prosječne amplitude slike.

Po analogiji sa  $1D$  slučajem [23, 249, 250], projekcija  $2D WD$ , to jest  $2D RW D$ , može se zapisati u obliku:

$$P_a(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WD(x, y, \omega_x, \omega_y) \delta(\omega_x - 2a_1x - a_3y - a_4, \omega_y - 2a_2y - a_3x - a_5) dx dy, \quad (5.13)$$

gdje su  $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  transformacioni parametri. Projekcioni maksimumi  $M(a) = \max_{\omega_x, \omega_y} P_a(\omega_x, \omega_y)$ , koji će biti korišćeni za detekciju watermarka, su funkcije samo transformacionih parametara.

Neka je data slika  $I(x, y)$  sa watermarkom  $\Omega(x, y)$ :  $I'(x, y) = I(x, y) + \Omega(x, y)$ .



Slika 5.5: a) Originalni zvuk; b) Zvuk sa dodatim watermarkom; c) Detekcija watermarka.

$RWD$  od  $I'(x, y)$  može se dobiti množenjem slike  $I'(x, y)$  sa  $\Omega_v(x, y) = e^{-j(a_v x^2 + b_v y^2 + c_v xy)}$ , gdje  $a_v$ ,  $b_v$  i  $c_v$  definišu projekcione ravni. Promjenom njihovih vrijednosti mijenja se i projekciona ravan. Računanjem  $2D FT$  od:

$$I'(x, y)\Omega_v(x, y) = (I(x, y) + \Omega(x, y))\Omega_v(x, y) \quad (5.14)$$

dobija se  $RWD$ :

$$\begin{aligned} P(\omega_x, \omega_y; \Omega_v) &= |FT_{2D}\{I(x, y)\Omega_v(x, y)\}|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I'(x, y)\Omega_v(x, y)e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \right|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Na ovaj način korišćenjem različitih parametara  $a_v$ ,  $b_v$  i  $c_v$  dobijaju se  $RWD$  za različite projekcije. Odluka o prisustvu watermarka se obavlja pronalaženjem maksimuma:

$$M(a_v, b_v, c_v) = \max_{\omega_x, \omega_y} P(\omega_x, \omega_y; \Omega_v) \quad (5.16)$$

i poredjenjem sa podrazumijevanim referentnim pragom. Direktno pretraživanje po sva tri parametra ( $a_v, b_v, c_v$ ) moglo bi da bude sporo i neefikasno. Medjutim, postoji mogućnost uzastopnog pretraživanja po  $a_v$  i  $b_v$  uz pronalaženje maksimuma, dok bi se faktor  $c_v$  pronalazio na osnovu pozicije maksimuma  $FT$  po prethodna dva parametra.

Ovo bi svelo broj numeričkih izračunavanja sa reda  $mK^3$  na red  $2mK$ . Postojanje dominantnog maksimuma znači da watermark postoji u slici. Može se postaviti pitanje: Koliki je minimalni nivo watermarka koji se može detektovati? Opšti odgovor je teško dati ali će biti data simplifikovana analiza za grubu estimaciju performansi. Neka je slika bijeli šum sa  $N \times N$  piksela i neka je prostorni prozor dimenzija  $N \times N$ . Energija slike  $E_I$  uniformno je rasuta preko  $S/S - F$  domena sa energetsom gustinom proporcionalnom  $E_I/N^4$ . Amplituda  $WD$  watermarka je proporcionalna  $A^2N^2$ . Sumirajući maksimume u projekcionoj ravni, dobija se maksimalna očekivana vrijednost  $RWD$  watermarka reda  $A^2N^4$ . Vrijednosti  $RWD$  slike su reda  $E_I/N^2$ . Energija slike može se aproksimativno predstaviti standardnom devijacijom slike  $A_I = \sigma_I$  kao  $E_I = A_I^2N^2$ . Tako je odnos maksimuma  $RWD$  watermarka i  $RWD$  originalne slike, koji je relevantan za detekciju watermarka, dat kao:

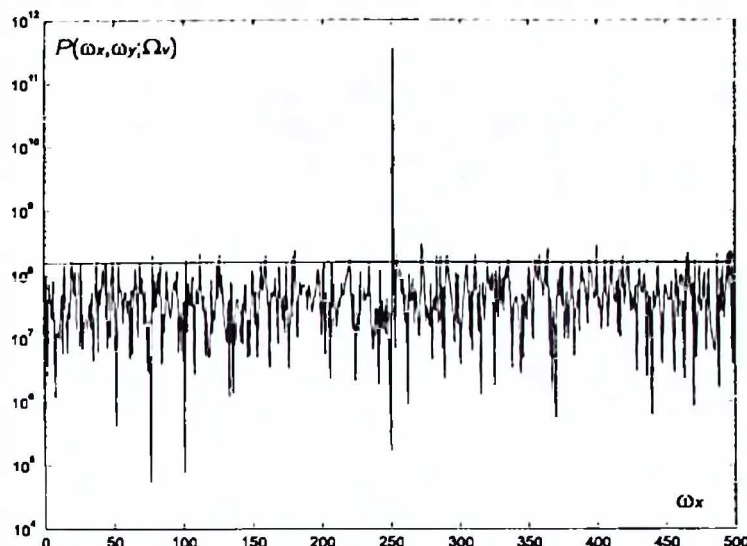
$$R = \sqrt{\frac{A^2N^4}{E_I/N^2}} = \frac{A}{\sigma_I}N^2. \quad (5.17)$$

Očigledno je da performanse detekcije watermarka zavise od odnosa izmedju  $AN^2$  i  $A_I$ . Čak i veoma male vrijednosti  $A/A_I$  podrazumijevaju veliki odnos  $R$ . U realnim slučajevima, kada slika nije bijeli šum, i dalje postoji margina i relacija (5.17) obezbjeđuje dobar odnos detekcije u odnosu na stepen vidljivosti watermarka. Ovo će biti demonstrirano na slučaju slike sa bijelim šumom  $A_I^2 = \sigma_I^2 = 256^2$  i amplitudom watermarka  $A = 1.25$ . Očekivana vrijednost watermarka  $R = 1280$  dobijena je za  $N = 512$ . To se dobija na slici 5.6 na kojoj je prikazana projekcija duž linije gdje je watermark detektovan. Primjeri sa realnim signalima biće dati kasnije.

Kao prag detekcije može se koristiti polovina očekivane vrijednost  $RWD$   $A^2N^4/2$ . Medjutim, originalna slika ima  $RWD$  različitu od nule u posmatranoj hiperravni. Stoga se, kao prag detekcije, uzima  $kA^2N_1^2N_2^2$ , gdje je  $k > 0.5$  (u primjerima je korišćeno  $k = 0.6$ ), dok su dimenzije ciljne slike  $N_1 \times N_2$ .

Kako se koristi watermark koji je  $2D$  signal sa promjenljivom frekvencijom u prostoru, otporan je na stacionarno filtriranje, to jest na filtriranje koje ne mijenja svoje parametre. Kako je prethodno zaključeno, maksimumi  $WD$  i maksimumi njihovih projekcija neće se promijeniti tokom translacije i rotacije slike. Svako razumno odsjecanje neće degradirati detekciju watermarka sve dok je odnos  $R$  visok. Watermark je otporan na promjenu učestanosti odabiranja (*resampling*). Medjutim, u ovom slučaju, pozicija maksimuma u projekcijama će biti promijenjena. Ova činjenica može prouzrokovati probleme kada se koristi samo jedan watermark, to jest, ako se žele primijeniti dva watermarka u dvije slike. Ovo se prevazilazi korišćenjem dva signala kao watermark. Tako će *resampling* promijeniti pozicije ali će njihov relativni odnos ostati isti. Ovo znači da je moguće, na osnovu relativnih pozicija maksimuma, dobiti informaciju o watermarku nakon *resamplinga*. Takodje, korišćenjem dva signala kao watermarka može





Slika 5.6: Ilustracija performansi odredjivanja detekcionog nivoa watermarka u slici bijelog šuma.

se generisati veliki broj watermarka sa različitim relativnim pozicijama za detekciju. Slika sa watermarkom je u ovom slučaju:

$$I'(x, y) = I(x, y) + \Omega_1(x, y) + \Omega_2(x, y), \quad (5.18)$$

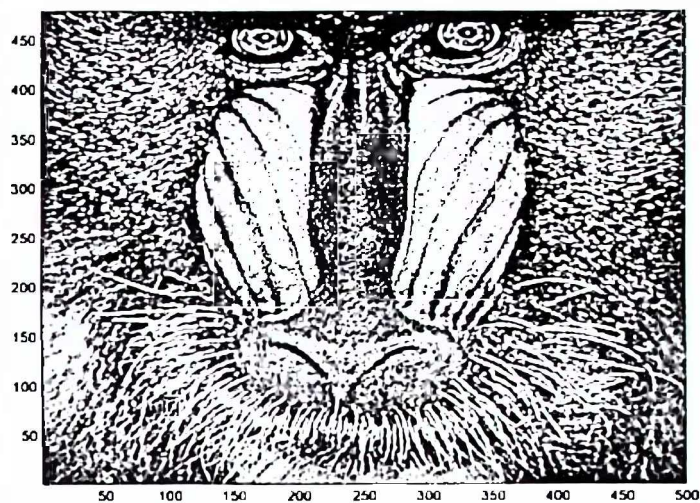
gdje je:

$$\Omega_1(x, y) = 2A \cos(a'x^2 + b'y^2 + c'); \quad \Omega_2(x, y) = 2A \cos(a''x^2 + b''y^2 + c''). \quad (5.19)$$

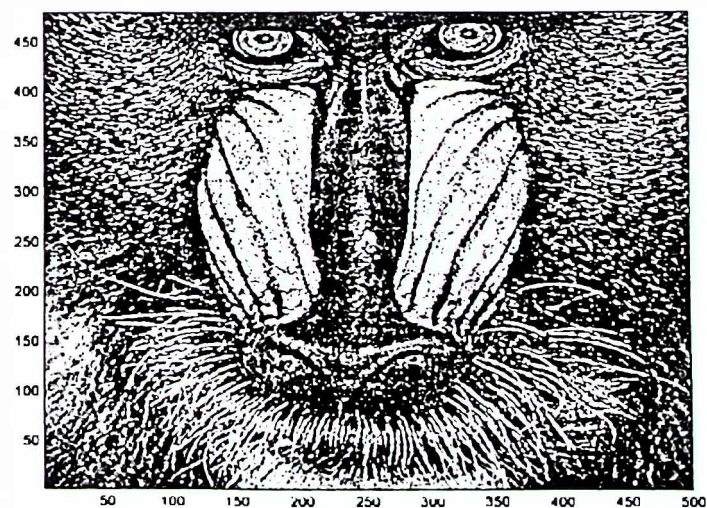
Ovdje je neophodno znati da postoje dva watermarka i da se procedura detekcije sastoji od pronalaženja dva maksimuma u projekcionoj ravni.

**Primjer 1.** U ovoj grupi primjera biće korišćena slika "Baboon". Originalna slika sa  $480 \times 500$  piksela prikazana je na slici 5.7. Na slici 5.8 prikazana je slika sa watermarkom (5.18), gdje su  $a' = 102\pi$ ,  $b' = 152\pi$ ,  $a'' = 152\pi$  i  $b'' = 102\pi$ . Amplituda watermarka je  $A = 1.25$ , odnosno, aproksimativno, 1% maksimalne vrijednosti slike.  $RWD$  duž linije gdje je maksimum ( $a' = 102\pi$ ,  $b' = 152\pi$ ) detektovan prikazana je na slici 5.9. Detekcija watermarka prikazana je na slici 5.10, gdje su date vrijednosti maksimuma u različitim projekcijama. Oko 1% najvećih koeficijenata sa ekstremno visokim amplitudama nije uzeto za računanje projekcija. Za detekciju se koriste jednačine (5.15) i (5.16). Sa slike 5.10, je veoma jednostavno odrediti parametre ( $a', b'$ ) i ( $a'', b''$ ).

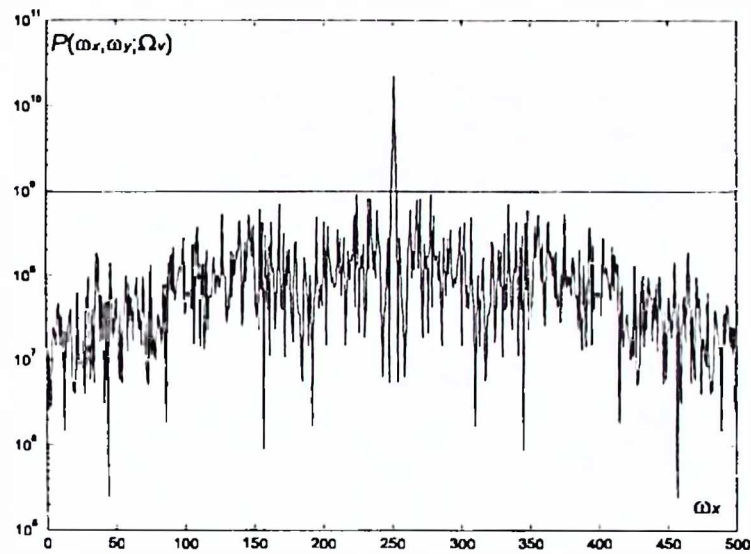
**Primjer 2.** Slika sa watermarkom filtrirana  $7 \times 7$  median filtrom prikazana je na slici 5.11, dok je detekcija prikazana na slici 5.12. Primijenjena je tehnika opisana relacijama (5.15) i (5.16).



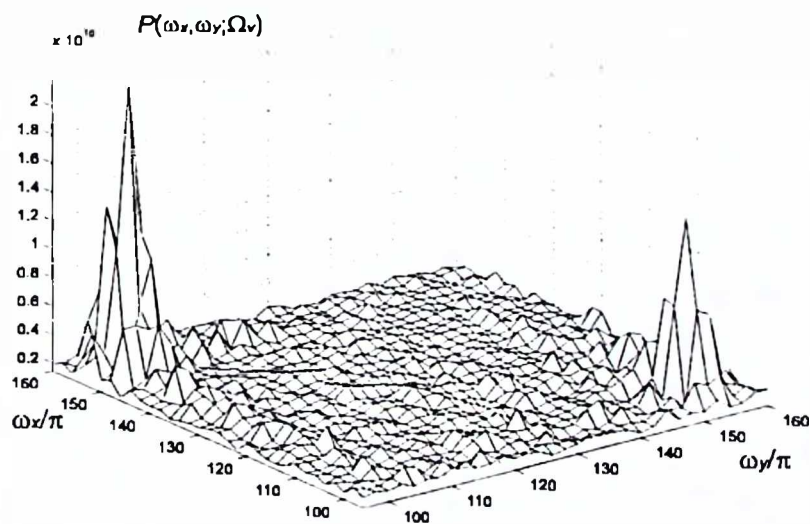
Slika 5.7: Originalna slika "Baboon".



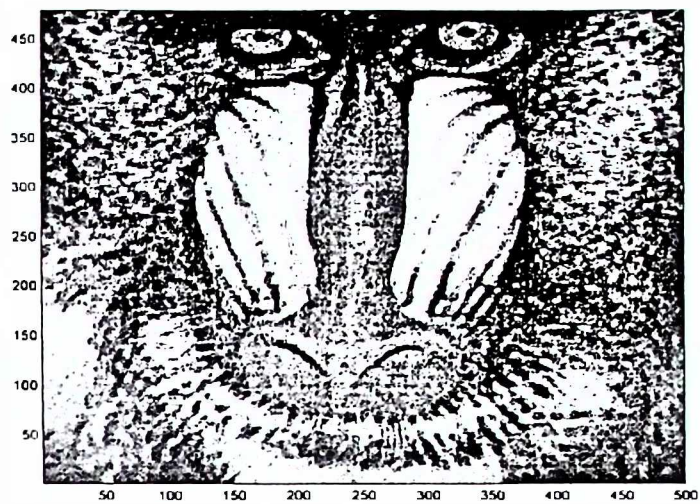
Slika 5.8: Slika "Baboon" sa dodatim watermarkom.



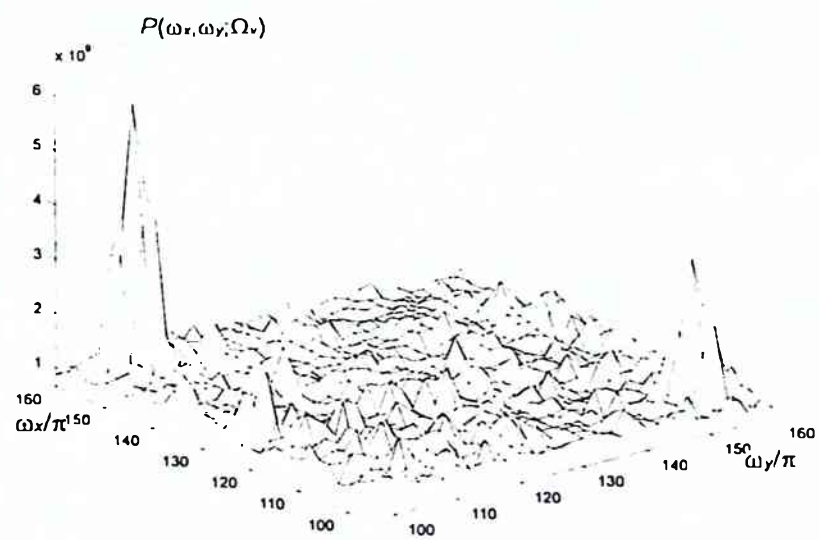
Slika 5.9: Projekcija Radon Wignerove distribucije duž linije gdje je detektovan globalni maksimum.



Slika 5.10: Maksimumi projekcija u slici sa watermarkom i odredjivanje parametara watermark signala.

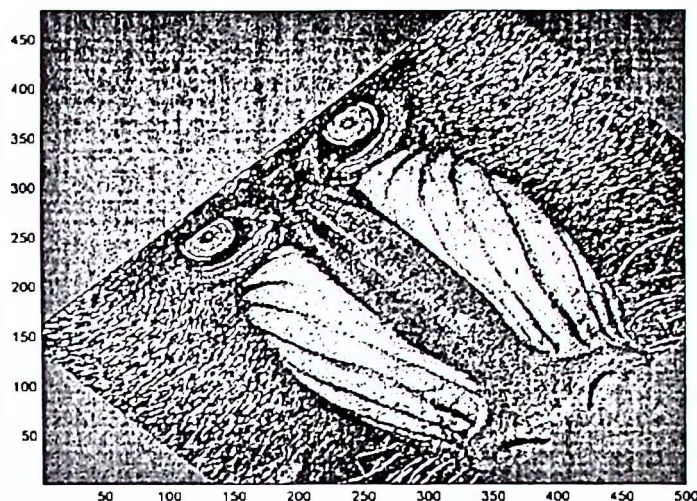


Slika 5.11: Slika sa watermarkom filtrirana 7x7 median filtrom.



Slika 5.12: Detekcija parametara watermarka u slici filtriranom median filtrom.





Slika 5.13: Slika atakovana translacijom, rotacijom i odsjecanjem.

**Primjer 3.** U ovom slučaju je, na sliku sa watermarkom, primijenjena geometrijska distorzija. Posmatran je watermark sa parametrima  $a' = 102\pi$ ,  $b' = 102\pi$ ,  $a'' = 152\pi$  i  $b'' = 152\pi$ . Geometrijska distorzija se sastoji od translacije (za 1/4 originalne veličine duž  $x$  ose), odsjecanja (1/4 slike je odsječeno duž  $x$  pravca) i rotacije za ugao  $45^\circ$ . Rezultat je prikazan na *slici 5.13*. Detekcija je moguća bez poteškoća (*slici 5.14*).

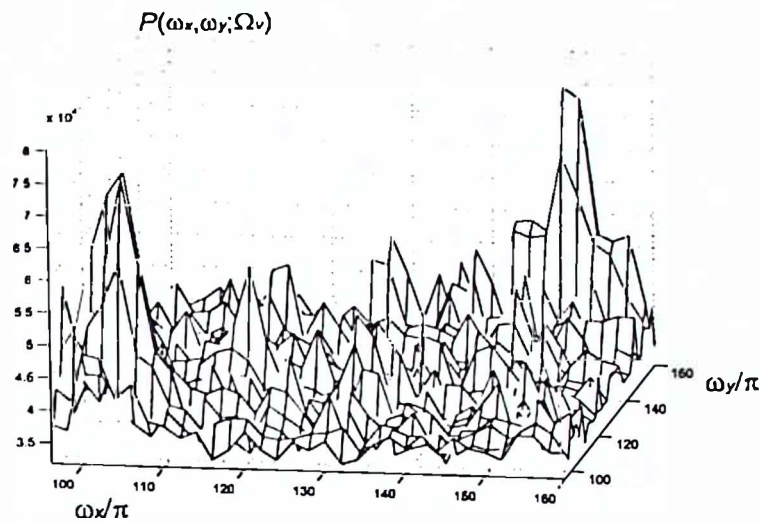
**Primjer 4.** Ovdje će biti ilustrovano da se notch filtrom ne može značajno degradirati signal watermarka. Slika sa watermarkom je filtrirana korišćenjem notch filtra sa promjenljivom frekvencijom, koja se može očitati iz procedure detekcije watermarka. Detekcija watermarka, nakon notch filtriranja, prikazana je na *slici 5.15*. Watermark nije dobro koncentrisan u  $FT$  domenu pa se stacionarnim filtrom ne može izbrisati čak i kada se za filtriranje koriste mali regioni oko lokalne frekvencije. Watermark je jedino dobro koncentrisan u projekcionoj ravni. Oduzimanjem se watermark ne može obrisati zbog nepoznavanja faznih članova  $c'$  i  $c''$ , koji se ne mogu dobiti u postupku detekcije. Slika ima dominantan uticaj na fazne članove. Ukoliko bi se koristio watermark sa promjenljivom amplitudom problem njegovog brisanja bio bi značajno uvećan.

Watermark se može detektovati naslijepo, bez poznavanja parametara, na osnovu poznatog koncepta watermarkinga.

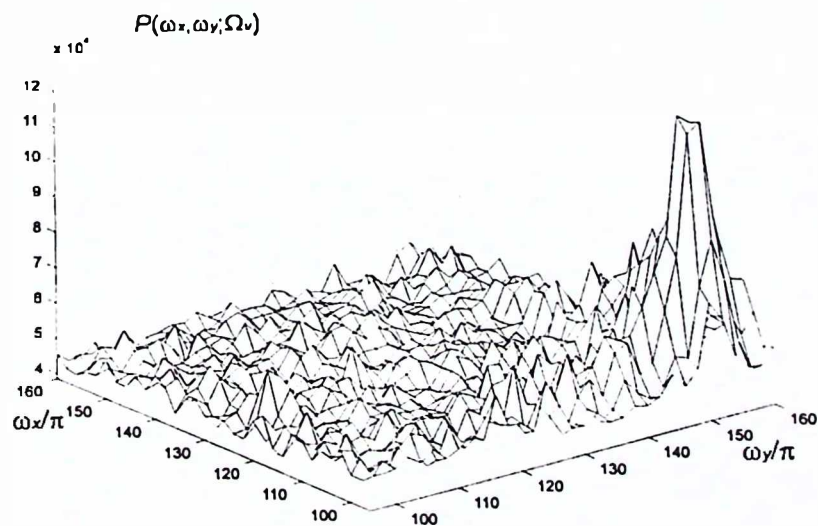
Ista tehnika se može primijeniti i na signal zvuka. Detekcija watermarka obavlja se projekcijom oblika:

$$RWD_z(\omega, a') = \left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp(-ja't^2 - j\omega t) dt \right|^2, \quad (5.20)$$

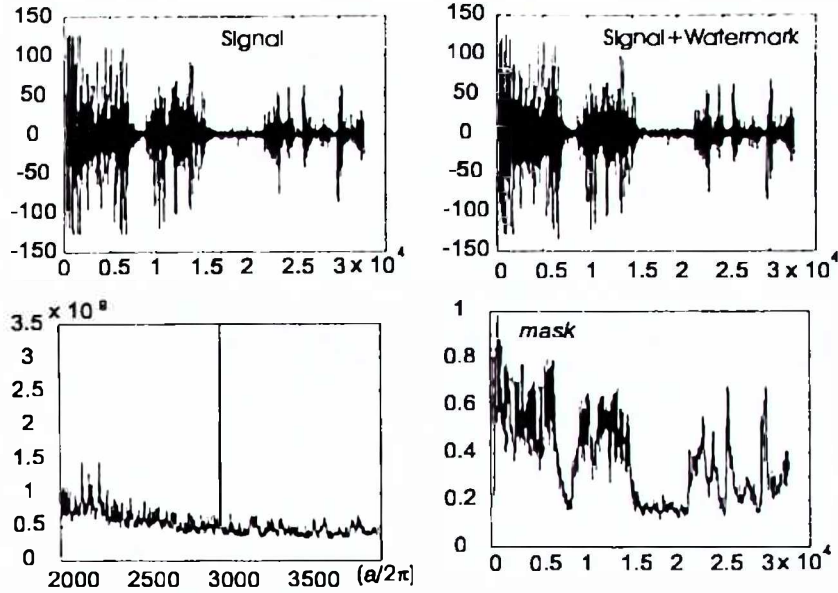




Slika 5.14: Detekcija watermarka u odsječenoj, transliranoj i rotiranoj slici.



Slika 5.15: Detekcija jednog chirp signala dodatog slici nakon filtriranja lokalnim notch filtrom.



Slika 5.16: a) Originalni zvuk; b) Zvuk sa watermarkom; c) Detekcija watermarka; d) Signal za maskiranje.

gdje je  $z(t)$  signal zvuka kome je dodan watermark. Maksimalna vrijednost odgovara koeficijentu pravca realnog linearnog  $FM$  signala  $y(t) = 2A \cos(at^2/2 + bt)$ , koji se koristi kao watermark. Pozicija  $\omega$  na kojoj je maksimum detektovan odgovara  $\omega = b$ . Na slici 5.16 posmatran je signal zvuka u ambijentalnom šumu sa dodatim watermarkom (slika 5.16b). Signal zvuka ima  $N = 2^{15} = 32768$  odbiraka. Zvuku je pogodno dodati veći signal u odbircima u kojima je amplituda zvuka veća. Maskirajući signal je formiran na slijedeći način:

$$g(t) = |\max\{z(t)w(t)\}|, \quad \text{mask}(z(t)) = g(t)/\max(g(t)), \quad (5.21)$$

gdje je  $w(t)$  prozor širine  $M$  odbiraka (u primjerima je uzimano  $M = 64$ ). Signal  $g(t)$  je maksimum  $z(t)$  u prozoru oko tačke  $t$ , dok je maskirajući signal dobijen normalizacijom  $g(t)$ . Watermark ima amplitudu  $A = 10$ , i dodan je na frekvenciji  $a/(2\pi) = 3000$ . Prije detekcije, u cilju popravljavanja performansi, izvršena je eliminacija niskofrekventnih komponenti čime je povećana rezolucija watermarka. Detekcija je prikazana na slici 5.16c, dok je maskirajući signal prikazan na slici 5.16d.

Pored primjene na linearne  $FM$  signale, prezentirani koncept se može uopštiti i na druge tipove signala. Npr., ako je watermark signal dat u obliku  $y(t) = 2A \cos(f(t; \vec{a}))$ , gdje je  $\vec{a}$  vektor parametara, detekcija se može obaviti sa:

$$P_z(\omega; \vec{a}) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp(-j f(t; \vec{a})) dt \right|^2. \quad (5.22)$$

Maksimum watermarka se očekuje na poziciji  $a' = a$ . Npr., watermark se može dodati u obliku  $y(t) = 2A \cos(a \sin(bt))$ , a pretraživanje obaviti po parametrima  $a$  i  $b$ . Maksimum detekcije se očekuje na poziciji  $a' = a$  i  $b' = b$ . Ovo je potpuna analogija upotrebi Wigner-Houghove transformacije u parametarskoj identifikaciji signala [56]. Na ovaj način watermark se može sakriti i u drugim oblicima signala i pri tome "pirat" gubi mogućnost da otkrije watermark samo na osnovu poznavanja tehnika. Mana ove tehnike je pretraživanje po svim parametrima, koje može biti neefikasno.

## 5.4 Watermark sa slučajnom amplitudom u prostorno/prostorno-frekvencijskom domenu

Klasični watermark u  $FT$  domenu sa pseudoslučajnim amplitudama slike  $I(x, y)$  može se u prostornom domenu prikazati kao:

$$W_T(x, y) = \sum_{i=1}^M A_i \exp[j(xa_i + yb_i)] = \sum_{i=1}^M A_i S_{F_i}(x, y), \quad (5.23)$$

gdje je  $A_i$  ključ watermarka (slučajno generisana amplituda), dok  $a_i$  i  $b_i$  determinišu lokalne transformacione koeficijente u  $FT$  domenu. Zbog jednostavnosti, i bez gubitka opštosti, biće razmatrana analitička slika [31, 37]. Watermark se detektuje sumiranjem vrijednosti  $2D$   $FT$  signala  $I'(x, y) = I(x, y) + W_T(x, y)$  u tačkama određenim sa  $a_i$  i  $b_i$  kao:

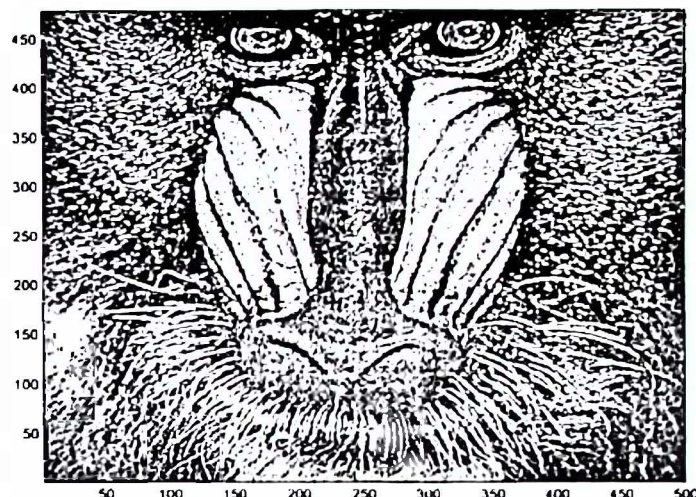
$$d = \sum_{i=1}^M A_i FT_{2D}[I'(x, y)]|_{za (\omega_x, \omega_y)=(a_i, b_i)}. \quad (5.24)$$

Prethodni koncept može se proširiti koristeći sumu  $2D$  linearnih  $FM$  signala i analizu iz prethodnog odjeljka, kao:

$$\begin{aligned} W_W(x, y) &= \sum_{i=1}^M A_i \exp[j(a_{i1}x^2/2 + a_{i2}y^2/2 + a_{i3}xy)] \exp[j(a_{i4}x + a_{i5}y)] = \\ &= \sum_{i=1}^M A_i S_{L_i}(x, y) S_{F_i}(x, y). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ovakav watermark se detektuje korelacijom koeficijenata po pojedinim projekcionim ravnima.  $RWD$  se može odrediti množenjem watermarka u svakoj projekcionoj ravni sa  $A_i S_{L_i}^*(x, y)$  i računanjem  $FT$  ovog proizvoda. Neka  $I_a(x, y)$  označava ciljnu sliku (sa watermarkom i sa mogućim atacima). Relacija za detekciju watermarka (5.25) u obliku (5.24) data je kao:

$$d = \sum_{i=1}^M RWD_i = \sum_{i=1}^M A_i FT_{2D}[I_a(x, y) S_{L_i}^*(x, y)]|_{za (\omega_x, \omega_y)=(a_{i4}, a_{i5})}, \quad (5.26)$$



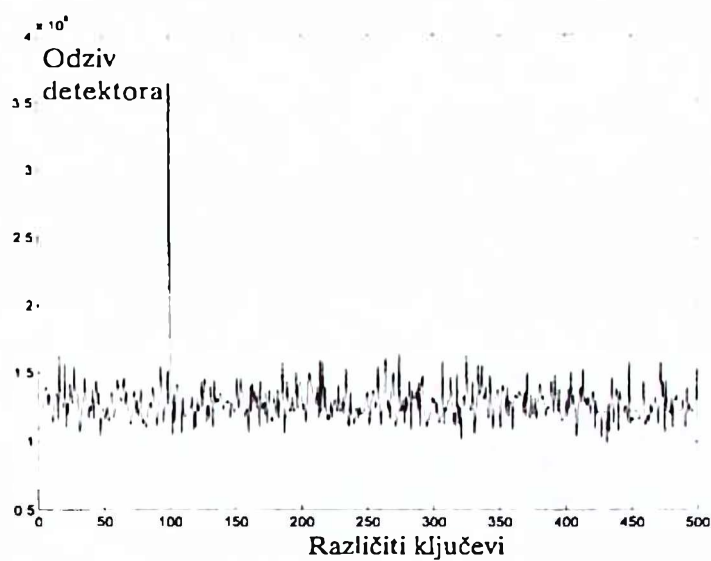
Slika 5.17: Slika "Baboon" sa watermarkom od  $K=121$  chirp komponente sa malim pseudoslučajnim amplitudama.

gdje bi  $d$  trebalo da bude veće od referentnog praga detekcije, dok  $RWD_i$  predstavlja Radon-Wignerovu distribuciju u projekcionoj ravni  $i$ . Ključ watermarka se formira kao slučajni Gausovski šum sa nultom srednjom vrijednošću. Varijansu amplitude  $A_i$  treba uzeti tako da obezbijedi kompromis između mogućnosti detekcije watermarka i vizuelne nevidljivosti. Stoga je lokacija oblasti gdje su dodati transformacioni koeficijenti  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$  odabrana u skladu sa kriterijumima vizuelne nevidljivosti. To je moguće obaviti primjenjujući tehnike vizuelnog maskiranja [347]. U ovom slučaju, detekcija je nemoguća bez unaprijed poznatog ključa watermarka.

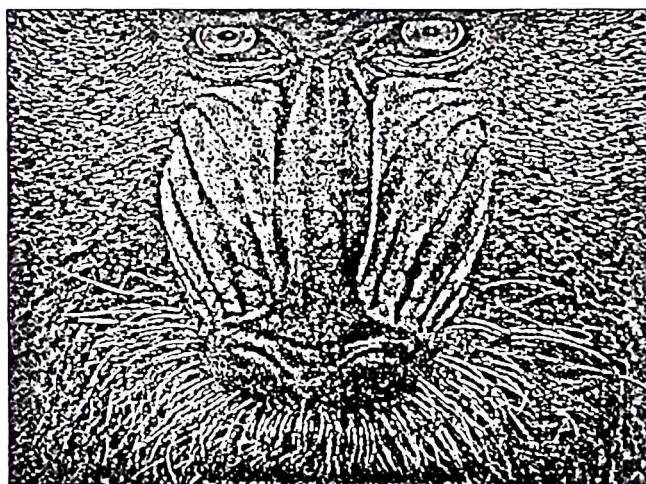
**Primjer 1.** Na slici 5.17 prikazana je slika sa watermarkom sa  $M = 121$  chirp komponenti. Amplitude watermarka su uzete kao Gausovski bijeli šum varijanse  $\sigma^2 = 0.25$ . Pozicije komponenti watermarka su u različitim projekcionim ravnima. Kako je sadržaj slike rasut duž različitih projekcionih ravni nije potrebno vršiti adaptaciju watermarka u odnosu na sliku. Detekcija je prikazana na slici 5.18. Odziv detektora je dat za 500 različitih watermarka. Samo je pravi watermark br.100 detektovan.

**Primjer 2.** Slika sa watermarkom iz prethodnog primjera filtrirana je visokopropusnim filtrom sa graničnom frekvencijom jednakom  $1/8$  maksimalne frekvencije u oba pravca (slika 5.19). Odgovarajući odziv detektora prikazan je na slici 5.20. Važno je napomenuti da standardne tehnike watermarkinga ne mogu proizvoditi zadovoljavajući rezultat za ovaj tip filtriranja.



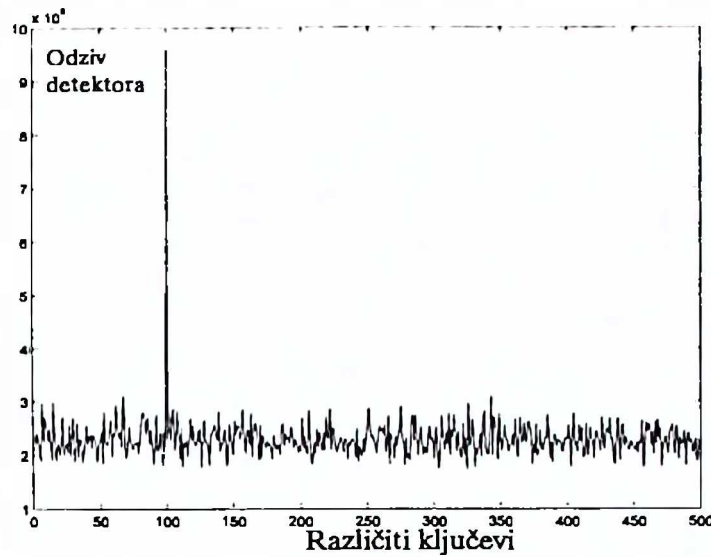


Slika 5.18: Odziv detektora za sliku sa watermarkom sa pseudoslučajnom amplitudom.



Slika 5.19: Visokopropusno filtrirana slika sa sumom od  $K=121$  mala chirp impulsa i sa slučajno generisanim amplitudama.





Slika 5.20: Odziv detektora za visokopropusno filtriranu sliku.

**Primjer 3.** Slika sa watermarkom, zahvaćena bijelim Gausovim šumom varijanse  $\sigma = \sqrt{600}$ , prikazana je na slici 5.21. Detekcija watermarka prikazana je na slici 5.22. Slični rezultati su dobijeni i za druge atake (niskopropusno, visokopropusno, median filtriranje, ekvilizaciju histograma i promjenu osvjetljaja, itd.), kao i za druge test slike.

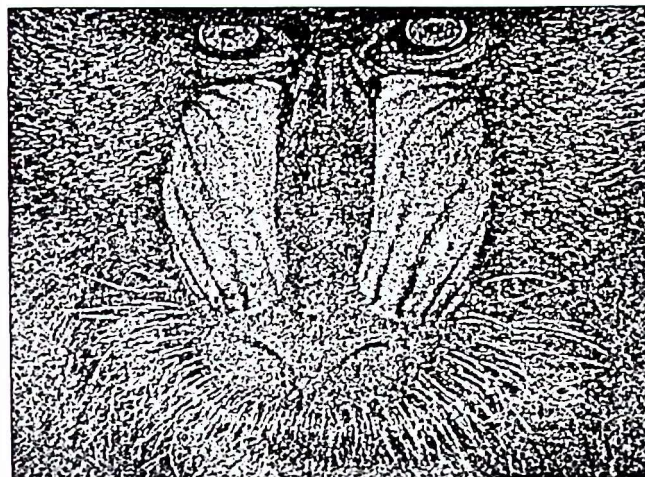
**Primjer 4.** Statistička provjera ove tehnike watermarkinga obavljena je korišćenjem 1000 različitih watermarka i slike "Baboon" (slika 5.23). Slika 5.24 daje statističke rezultate za niskopropusno filtriranu sliku. Moguće je sa obje slike uočiti znatan razmak u histogramima. U skladu sa tim, odluka o postojanju watermarka je vjerodostojna.

Jedan od problema sa prethodnom tehnikom watermarkinga može biti brzina kreiranja i detekcije postojanja watermarka. U tom cilju, definisan je watermark u združenom  $S/S - F$  domenu, koji se direktno može realizovati korišćenjem watermarka u  $FT$  domenu. Watermark u  $FT$  domenu je specijalni slučaj predložene watermarking tehnike. Ako se uzme  $\forall a_{i1} = a_1, \forall a_{i2} = a_2, \forall a_{i3} = a_3$   $i = 1, 2, \dots, M$ , watermark (5.26) postaje:

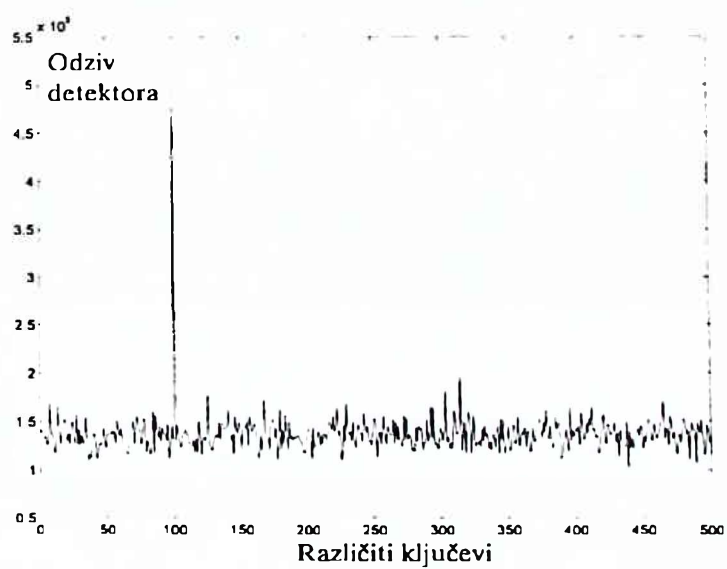
$$W_S(x, y) = \exp[j(a_1 x^2/2 + a_2 y^2/2 + a_3 xy)] \sum_{i=1}^M A_i \exp[j(a_{i4}x + a_{i5}y)]. \quad (5.27)$$

Ovaj watermark se može realizovati u četiri koraka:

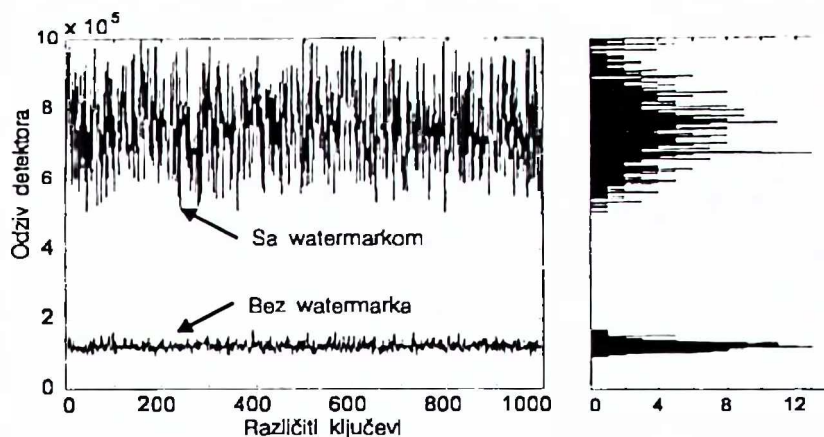
1. Kreiranje watermarka (5.23) u  $FT$  domenu korišćenjem transformacionih koeficijenata  $(a_{i4}, a_{i5})$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ;
2. Množenje ovih koeficijenata sa 2D kompleksnim linearnim  $FT$  signalom;
3. Dodavanje i vizuelno maskiranje watermarka;



Slika 5.21: Slika sa watermarkom zahvaćena bijelim Gausovim šumom.



Slika 5.22: Odziv detektora za sliku zahvaćenu Gausovim šumom.



Slika 5.23: Statistička provjera na 1000 realizacija u slici, sa i bez watermarka. Odgovarajući histogram je prikazan na desnoj strani.

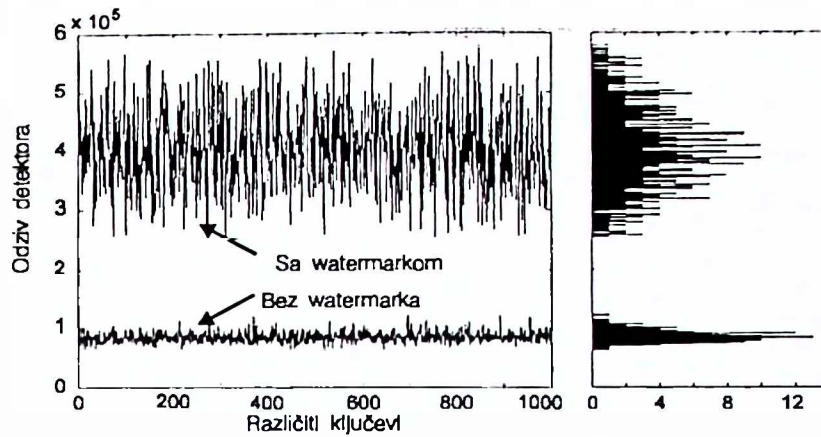
4. Procedura za detekciju watermarka sastoji se od množenja slike sa watermarkom sa  $\exp[-j(a_1x^2/2 + a_2y^2/2 + a_3xy)]$  i detekcije watermarka u skladu sa (5.26).

Watermark se može dodavati simultano u više hiperravni (u jednoj može biti watermark koji označava proizvođača, u drugoj distributera, u trećoj kupca, itd.), kao na primjer:

$$W_S(x, y) = \sum_{k=1}^K \exp[j(a_{1k}x^2/2 + a_{2k}y^2/2 + a_{3k}xy)] \sum_{i=1}^M A_{ik} \exp[j(a_{ik4}x + a_{ik5}y)]. \quad (5.28)$$

Koeficijenti  $A_{ik}$  su određeni na isti način kao u (5.23), (5.25) i (5.27). Ovaj rezultat nudi porast fleksibilnosti u odnosu na watermarking u  $FT$  domenu jer omogućava kreiranje više watermarka korišćenjem različitih vrijednosti  $(a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$ . Npr., kada su  $(a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$  bliski nuli, watermark će biti otporniji na niskopropusno filtriranje i kompresiju. Ako je  $(a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$  znatno veće od nule, watermark će biti otporniji na visokopropusno filtriranje.

**Primjeri.** Predloženi koncept je testiran na standardnim test slikama "Baboon" ( $480 \times 500$ ), "Lena" ( $128 \times 128$ ) i "Camera" ( $256 \times 256$ ), prikazanim u prvoj koloni slike 5.25. Slike sa watermarkom su prikazane u drugoj koloni slike 5.26. Detekcija watermarka u ovim slikama prikazana je na slici 5.26 (prva kolona). Treća i četvrta kolona predstavljaju slike sa watermarkom podvrgnute različitim atacima. Na sliku "Baboon" primijenjen je visokopropusni filter sa graničnom frekvencijom  $1/6$  maksimalne (treća kolona) i niskopropusni filter sa graničnom frekvencijom  $1/3$  maksimalne (četvrta kolona). Kod test slike "Lena" dodat je Gausovski bijeli šum  $\sigma = 60$  (treća kolona) i primijenjen Gausovski blur filter poluprečnika  $r = 4$  (četvrta kolona). Slika "Camera" je testirana u uslovima odsijecanja i operacija na histogramu. Detekcija je



Slika 5.24: Statistička provjera na 1000 realizacija u slikama, sa i bez watermarka, filtriranim niskopropusnim filtrom.

obavljena sa 500 različitih ključeva od kojih je jedino pravi watermark broj 100 detektovan. Za atakovane slike, detekcija watermarka prikazana je u drugoj i trećoj koloni slike 5.26.

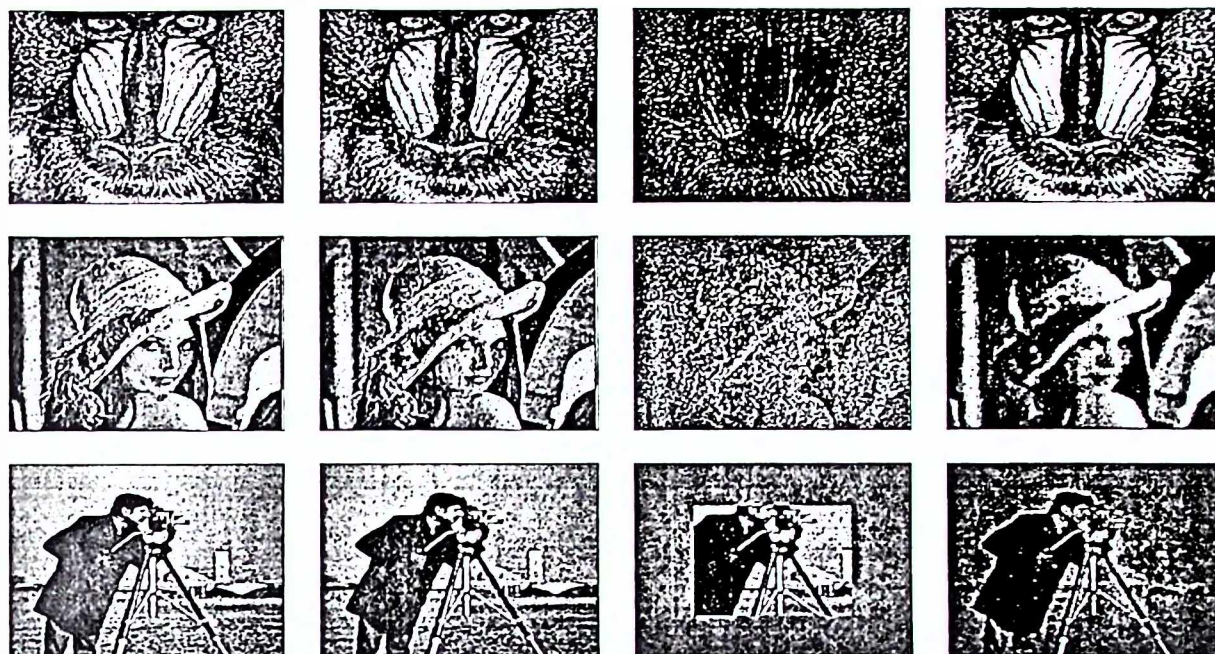
Treba uočiti da u slikama 5.23 i 5.24 postoji veliko rasipanje u vrijednostima histograma slike sa watermarkom. Ovo je moguće prevazići kao u relaciji (5.3), zato što bi amplituda watermarka bila vezana sa amplitudom  $RWD$  slike kao:

$$W_w(x, y) = \sum_{i=1}^M A_i |RWD_i| \exp[j(a_{i1}x^2/2 + a_{i2}y^2/2 + a_{i3}xy)] \exp[j(a_{i4}x + a_{i5}y)], \quad (5.29)$$

gdje je  $RWD_i$  vrijednost  $RWD$  slike u hiperravni sa parametrima  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ .

Predloženi watermark je testiran na tri test slike ("Baboon", "Lena" i "Fishing boat" - slika 5.27) na atake *Stirmark* sistema. Spisak slika *Stirmark* benchmarka, kao i ataka u sistemu, dat je u Tabeli 11 u Prilogu. Moguće je detektovati watermark u slučajevima: filtriranja, kompresije sa gubicima, brisanja kolona i vrsta, odsijecanja slike, itd. U Tabeli 5.1 dat je broj detektovanih watermarka od 26 različitih, koji su dodavani test slikama, na *JPEG* kompresiju i brisanje kolona i vrsta ( $1 \times 1$ ,  $1 \times 5$ ,  $5 \times 1$ ,  $5 \times 17$ ,  $17 \times 5$ ). Ovaj tip watermarka nije otporan na neke geometrijske transformacije.





Slika 5.25: Prva kolona: test slike; Druga kolona: Test slike sa watermarkom; Treća i četvrta kolona: Atakovane slike.

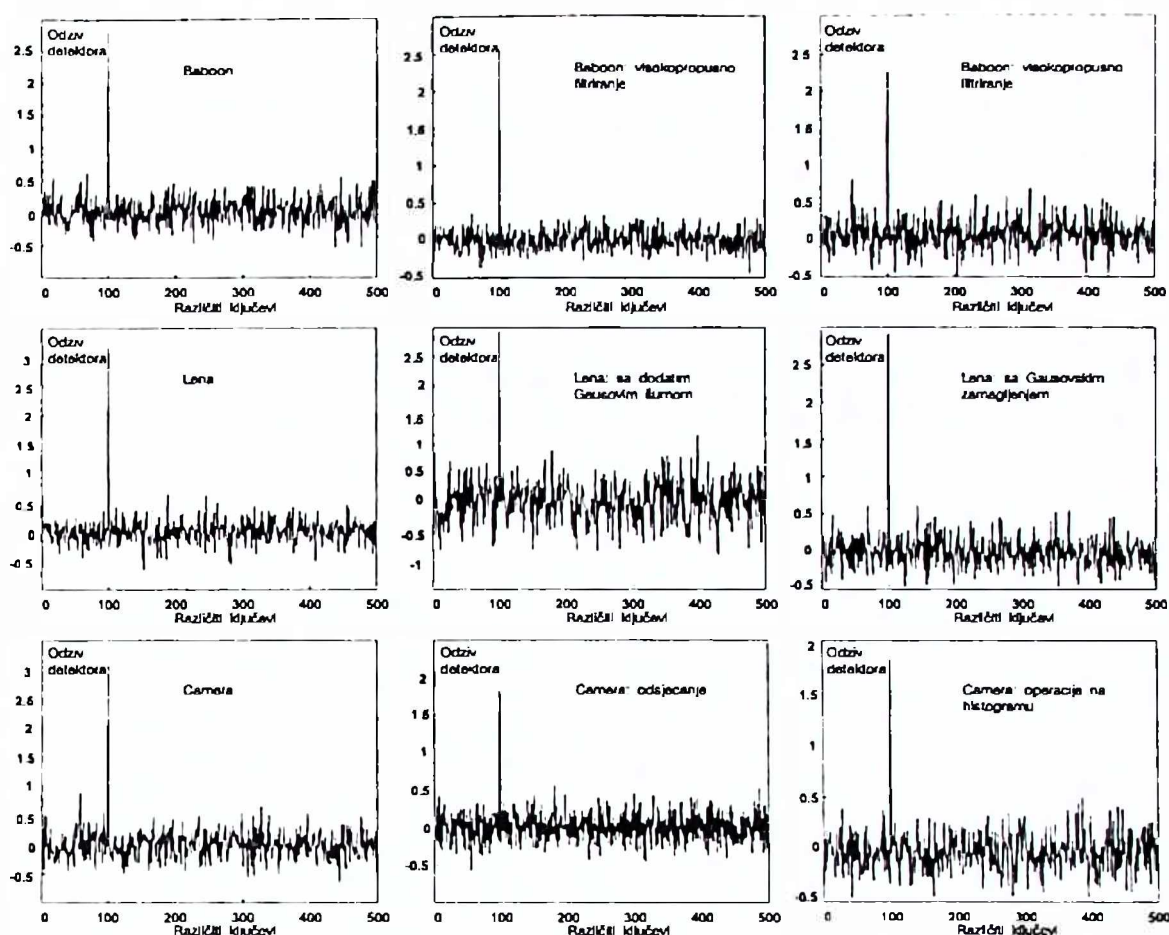
## 5.5 Upotreba šablona u watermarkingu u Radon Wignerovom domenu

U odjeljcima 5.3 i 5.4, demonstrirana su dva tipa watermarkinga. U prvom [389], dodavan je signal koji se pretražuje naslijepo (*blind*) po odgovarajućem prostoru parametara. Taj koncept je otporan na geometrijske operacije, koje uključuju translaciju, i na druge atake na sliku. Mana mu je što "pirat" može detektovati watermark bez prethodnog predznanja o vrijednostima parametara. Drugi razvijeni watermark [390] se dodaje kao pseudoslučajna sekvenca u *RWD* domenu. Ključ se može detektovati u slučaju brojnih

Attack⇒		JPEG			Brisanje redova i kolona
Slika ↓	10%	15%	20%	≥ 25%	1x1,5x1,1x5,5x17,17x5
Baboon	26	26	26	26	26
Lena	5	7	17	26	26
Fishing boat	24	26	26	26	26

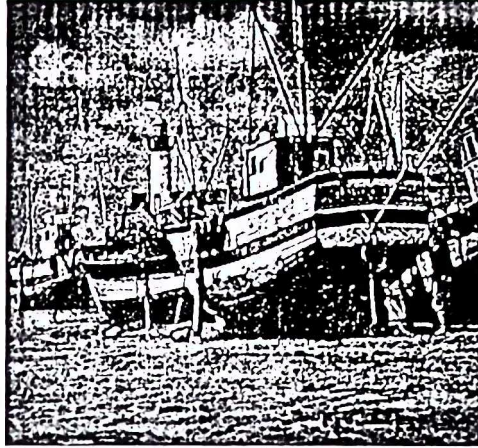
Tabela 5.1: Broj detektovanih watermarkova od 26 watermarkova za JPEG kompresiju i brisanje redova i kolona.





Slika 5.26: Odzivi detektora.

ataka, a, ujedno, "pirat" ne može, pretraživanjem naslijepo, pronaći ključ. Problem kod ovog watermarka je u činjenici da ataci u obliku translacije i nekih geometrijskih ataka, dovode do pomjeranja transformacionih koeficijenata (koji mogu biti pomjereni samo za konstantni fazni član) što onemogućava detekciju watermarka. U literaturi je apostrofiran problem nedovoljne fleksibilnosti i otpornosti postojećih watermarking tehnika na geometrijske atake [391, 392]. Stoga je, u [391, 392], kreiran watermarking u  $FT$  domenu, koji se, pored pseudoslučajne sekvence, sastoji od slične sekvence sa poznatim parametrima koji se pretražuju naslijepo. Ovu informaciju autori su nazvali *template*, odnosno šablon. U slučaju da se detektuje promjena parametara šablona, vrši se preračunavanje pozicija gdje se nalaze transformacioni koeficijenti pseudoslučajnog watermarka, i na osnovu toga, vrši detekcija ove informacije. U slučaju da promjene šablona nijesu detektovane, pseudoslučajni watermark se pretražuje direktno na uobičajeni način, pomoću ključa. U radovima [344, 393, 394], opisane su tehnike u



Slika 5.27: Test slika "Fishing boat".

kojima se, pomoću šablona, pokušava povećati fleksibilnost postojećih watermarking tehnika. Ovdje će biti korišćena dva, već razvijena, watermarka u  $RWD$  domenu od kojih će prvi, koji se pretražuje naslijepo, služiti kao šablon za detekciju parametara drugog watermarka. Ovakav watermark se može zapisati kao:

$$W_T(x, y) = A \exp[j(a_1 x^2/2 + a_2 y^2/2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6)] + \quad (5.30)$$

$$+ \sum_{i=1}^M A_i \exp[j(a_{1i} x^2/2 + a_{2i} y^2/2 + a_{3i} xy + a_{4i} x + a_{5i} y + a_{6i})] = \quad (5.31)$$

$$= AW(a) + \sum_{i=1}^M A_i W(a_i) = W_I + W_{II}, \quad (5.32)$$

gdje je  $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ . Amplituda  $A$  je značajno veća od  $A_i$ ,  $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ , gdje  $A_i$  predstavljaju ključ watermarka. Član  $W_I$  je šablon. Šablon je dat kao

$$W(a) = \exp[j(a_1 x^2/2 + a_2 y^2/2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6)] = \exp[j\Phi], \quad (5.33)$$

dok se faza šablona može zapisati kao:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_6 = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + a_6 \end{aligned} \quad (5.34)$$

gdje je:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Ako se na sliku primjeni linearna transformacija data relacijama:

$$X = ax + by + c; \quad Y = dx + ey + f, \quad (5.36)$$

odnosno u matricnom obliku kao:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

Faza šablona postaje:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{x} + (\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{b} \mathbf{D}) \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{b} \mathbf{e} + a_6 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1^T \mathbf{x} + b_6. \quad (5.38)$$

Iz matrica  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{b}_1$  i  $b_6$  rješavanjem sistema linearnih jednačina:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{b} \mathbf{D}, \quad b_6 = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{b} \mathbf{e} + a_6, \quad (5.39)$$

moгу se odrediti transformacione matrice  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{e}$ , uz prethodnu detekciju maksimuma  $RWD$ . Transformacija je data sa šest nezavisnih parametara. Prva jednačina nudi samo 3 nezavisne jednačine jer su matrice  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}$  simetrične, druga jednačina daje dvije nezavisne jednačine a treća relacija za fazni član poznata je samo do nivoa unutar granica  $2\pi$ . Stoga, je neophodno dodavati slici dva linearna  $FM$  signala koji će omogućiti 10 nezavisnih jednačina plus dvije jednačine, sa tačnošću do nivoa svodjenja faze u granice  $2\pi$ . Ovaj sistem je dovoljan da ukloni redundanciju u pogledu toga gdje se koji chirp pomjerio i da, metodom minimizacije  $MSE$ , determiniše, sa zadovoljavajućom tačnošću, neophodne transformacione matrice  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{e}$ . Kako su na parametre šablona i watermarka primjenjene iste transformacije, i pod uslovom da su određene transformacione matrice, watermark postaje:

$$W'_w(x, y) = \sum_{i=1}^M A_i \exp \left[ j \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{D} \mathbf{x} + (\mathbf{e}^T \mathbf{A}_i \mathbf{D} + \mathbf{b}_i \mathbf{D}) \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{A}_i \mathbf{e} + \mathbf{b}_i \mathbf{e} + a_{6i} \right) \right], \quad (5.40)$$

gdje je:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{3i} \\ a_{3i} & a_{2i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} a_{4i} & a_{5i} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Watermark (5.40) se može zapisati i kao:

$$W'_w(x, y) = \sum_{i=1}^M A_i \exp \left[ j \left( \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{A}_i \mathbf{e} + \mathbf{b}_i \mathbf{e} + a_{6i} \right) \right] \times \exp \left[ j \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{D} \mathbf{x} + (\mathbf{e}^T \mathbf{A}_i \mathbf{D} + \mathbf{b}_i \mathbf{D}) \mathbf{x} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Detekcija na pomjerenim pozicijama se obavlja pomoću ključa  $A_i \exp[-j(+\frac{1}{2}e^T A_i e + be_i + a_{Gi})]$ . Na ovaj način značajno je povećana fleksibilnost tehnike watermarka u  $RWD$  domenu.

Opšti algoritma za detekciju watermarka je:

1. Detekcija  $W_{II}$  kao što je opisano u (5.25)-(5.28) i [390];
2. Ako watermark nije detektovan, detekcija  $W_I$  kao u [389];
3. Ako je detektovan maksimum  $RWD \Rightarrow A_1, b_1, b_6 \Rightarrow$  rješavanje sistema nelinearnih jednačina (5.39)  $\Rightarrow D, e \Rightarrow$  Promjena  $W(a_i)$  koristeći transformacione matrice  $D, e \Rightarrow W'_{II}$ ;
4. Detekcija promijenjenog watermarka  $W'_{II}$ .

Ovakav watermarking zadržava robusnost u odnosu na filtriranja, kompresiju, operacije na histogramu i značajno povećava robusnost na geometrijske transformacije. Problemi su u: mogućoj vidljivosti watermarka, rješavanju jednačina (5.39) i u mogućoj primjeni složenijih geometrijskih transformacija na sliku. Izvršena su testiranja za ovaj tip watermarka pomoću *Stirmark* sistema i dobijena je potpuna otpornost na geometrijske atake, isključujući *Stirmark* atak (slučajni geometrijski atak). Važno je napomenuti da najbolji odziv na *Stirmark* atak daje *Digimarc* ali da i kod ovog programa iznosi 17%. Odnos maksimalnog signala sa dodatim watermarkom (*peak signal to noise ratio* -  $PSNR$ ), koji se koristi kao mjera vizuelne deformacije slike, je u prihvatljivim granicama i iznosi, u svim primjerima,  $PSNR = 40.17[dB]$ . Međutim, kako watermark obuhvata čitavu sliku, a šablon može biti i značajne amplitude, to je bolja mjera vizuelne degradacije slike standardni odnos signal/šum, koji u ovom slučaju iznosi  $SNR = 34.19[dB]$ .

# ZAKLJUČAK



## ZAKLJUČAK

U tezi su analizirane primjene vremensko-frekvencijskih distribucija u estimaciji signala i digitalnom watermarkingu. Ovom tezom su učinjeni pokušaji da se doprinese poboljšanju postojećih kao i razvoju novih metoda u ovoj oblasti.

Opisan je originalno razvijeni virtuelni instrument za vremensko-frekvencijsku analizu. Pored teorijskih osnova, opisa rada, data je i analiza performansi instrumenta koja predstavlja analizu performansi vremensko-frekvencijskih metoda koji su primijenjeni u instrumentu. Pokazano je da je estimacije amplitude i trenutne frekvencije multikomponentnog signala sa šumom, nepouzdanija što su kros-članovi veći. Stoga se za estimaciju ovih parametara može uspješno koristiti S-metod, koji za multikomponentne signale, može biti jednak sumi Wignerovih distribucija komponenti signala. Ujedno je kod estimacije trenutne frekvencije pokazano da greška usljed diskretizacije po frekvenciji može biti znatno veća od svih ostalih grešaka u sistemu. Stoga se za smanjenje greške ovog tipa moraju primjenjivati odgovarajuće tehnike spektralnog pomjeraja. Tehnike spektralnog pomjeraja, koje su u radu prilagođene bilinearnim transformacijama i linearnom  $FM$  signalu, svode grešku usljed diskretizacije po frekvenciji do nivoa ostalih grešaka koje postoje u sistemu. Kod estimacije amplitude mogu se koristiti tehnike spektralnog pomjeraja detektovanjem signalnih regiona i sumiranjem nekoliko odbiraka u okolini auto-člana. Pokazana je brza konvergencija auto-člana S-metoda ka auto-članu Wignerove distribucije. Konvergencija je bolja ako se za  $STFT$ , kao osnovu za proračun S-metoda, koriste prozori koji za datu širinu bolje koncentrišu energiju u Fourierovom domenu. Pokazano je da praktično, za  $L_d = 1$ , S-metod ispunjava marginalni uslov i da je u znatno manje računski zahtjevan u odnosu na Wignerovu distribuciju.

U radu je predstavljena hardverska struktura sistema za prostorno/prostorno-frekvencijsku obradu signala, zasnovanog na adaptivnom  $2D$  S-metodu. Hardverska realizacija podrazumijeva operacije sabiranja, množenja i upotrebu odgovarajućih logičkih komparatorskih kola i, kao takva, pogodna je za ASIC implementaciju. Na ovaj način može se umanjiti problem relativno dugog proračuna prostorno/prostorno-frekvencijskih distribucija. Proračun  $2D$  S-metoda je sveden na proračun adaptivnog S-metoda po odgovarajućim projekcionim pravcima.

Realizovan je reassigned S-metod. Ova distribucija može uspješno da posluži u parametarskoj identifikaciji signala. Prednosti ove distribucije, u odnosu na najčešće upotrebljavanu reassigned pseudo-zaobljenu Wignerovu distribuciju, su: manji memorijski zahtjevi usljed izbjegavanja preodabiranja, računanje jedne a ne tri distribucije uz mogućnost da se i ona rekurzivno računa. Ujedno, kako je auto-član S-metoda blizak auto-članu Wignerove distribucije za realizaciju reassigned S-metoda dovoljan je samo vremenski, ili samo frekvencijski pomjeraj.

U radu je pokazano da je frakciona Fourierova transformacija specijalni slučaj transformacije koordinata ambiguity funkcije. Pokazano je da neke druge transformacije koordinata, koje se dobijaju iz opšte transformacije koordinata ambiguity funkcije, mogu biti veoma upotrebljive u obradi signala, kao što su: dechirping, konvolucija sa chirp signalom ili skaliranje signala. Definisana je transformacija koordinata L-Wignerove distribucije i opisane veze ove transformacije sa transformacijom koordinata Wignerove distribucije i frakcionom Fourierovom transformacijom.

Robusni spektrogram je, u kombinaciji sa metodom za neparametarsku estimaciju, upotrijebljen za odredjivanje trenutne frekvencije signala u uslovima impulsnih smetnji. Razmatrana su dva robusna spektrograma od kojih je jedan uveden po analogiji sa robusnim  $M$ -periodogramom, a drugi koristi Huberovu funkciju gubitaka.

Za estimaciju trenutne frekvencije linearnih  $FM$  signala zahvaćenih većom količinom impulsnih smetnji, uvedene su robusna Wignerova distribucija i Wignerova distribucija sa Huberovom funkcijom gubitaka. Analizirane su asimptotske i statističke karakteristike estimacije trenutne frekvencije kod ove dvije distribucije. Razmatrana je i računaska kompleksnost ovih distribucija. Pokazano je da je robusna Wignerova distribucija, u većini slučajeva, bolje rješenje za estimaciju trenutne frekvencije, dok je Wignerova distribucija sa Huberovom funkcijom gubitaka manje zahtjevnja u pogledu kompleksnosti računanja. Spektrogram sa Huberovom funkcijom gubitaka se, međutim, pokazao boljim za estimaciju trenutne frekvencije u odnosu na robusni spektrogram. U svim analiziranim slučajevima, sa porastom količine impulsnog šuma klasične vremensko-frekvencijske distribucije ( $STFT$ , Wignerova distribucija itd.) postaju neupotrebljive.

Algoritam za neparametarsku estimaciju je efikasno primijenjen za estimaciju oblasti signala u prostorno/prostorno-frekvencijskom domenu. Pristup koristi prostorno/prostorno-frekvencijske distribucije sa samo dvije širine prozora i jednim posmatranjem analiziranog procesa. U slučaju monokomponentnih signala, korišćena je Wignerova distribucija, dok je u slučaju multikomponentnih signala upotrijebljen S-metod. Na osnovu detektovane oblasti signala i, u tezi predloženog, modifikovanog Weylovog filtra izvršeno je prostorno/prostorno-frekvencijsko filtriranje signala i to za veoma nepovoljan odnos signal/šum. Izvršeno je izdvajanje linearnog  $2D$   $FM$  signala male amplitude

iz signala slike. Primjeri, koji su upotrebljeni u tezi, inspirisani su realnim signalima - optičkim interferogramima.

U tezi je izvršena analiza mogućnosti da se vremensko/frekvencijske distribucije koriste u zaštiti autorskih prava kod multimedijalnih podataka - digitalnom watermarkingu. Analizirana su dva tipa watermarkinga, od kojih se jednim dodaje watermark u frakcionu Fourierov domen, dok drugi pristup koristi dodavanje watermarka u Radon-Wignerov domen.

Kod watermarkinga u frakcionom Fourierovom domenu analizirana je vrijednost praga detekcije i otpornost na atake. Ovaj je transformacioni domen fleksibilniji, u odnosu na watermarking u *DCT* i Fourierovom domenu, jer omogućuje kreiranje većeg broja watermark signala.

Razvijene su dvije tehnike watermarkinga u Radon-Wignerovom domenu. Prvi tip watermarka je veoma otporan na sve linearne geometrijske atake. Međutim, postoji mogućnost detekcije ovakvog signala samo na osnovu poznavanja metoda dodavanja. Drugi tip watermarka je veoma otporan na različite tipove ataka. Ključ je kreiran kao pseudoslučajna sekvenca, koja se detektuje korelacionim metodama. Na ovaj način moguće je kreirati veliki broj različitih watermark signala. Mana ovog metoda je neotpornost na geometrijske atake. Razvijena je kombinacije ove dvije tehnike radi povećanja otpornosti na geometrijske atake.

Istraživanja u ovoj oblasti daleko su od toga da ovom tezom budu zaključena. Na osnovu izloženog, neki od mogućih daljih pravaca rada su:

- Ispitivanje realizacije distribucija sa kompleksnim argumentom vremena za multikomponentne signale i signal zahvaćen šumom. Ovo bi trebalo da omogući uspješnu primjenu ove tehnike u estimaciji amplitude (jer je amplituda kod ove distribucije reda  $A^2$ , kao kod Wignerove distribucije) i u estimaciji trenutne frekvencije (zbog snažnog potiskivanja unutrašnjih interferencija). Treba, na osnovu izloženog, ispitati mogućnost hardverske realizacije ove distribucije.

- Ispitivanje statističkih osobina metoda spektralnog pomjeraja i njihovih mogućnosti u popravci estimacije trenutne frekvencije kod nelinearnih *FM* signala. Takođe, trebalo bi utvrditi da li reassignment metod korespondira sa metodima spektralnog pomjeraja.

- Definisane višedimenzionog reassignment metoda, kao i ispitivanje da li se reassignment metod može primijeniti na neke distribucije višeg reda, ili uzastopno primijeniti na Cohenovu klasu distribucija, u cilju popravke osobina transformacije.

- Realizacija virtuelnog instrumenta za vremensko-frekvencijsku analizu u nekom od viših programskih jezika. Virtuelni instrument bi trebalo da omogućiti izračunavanje distribucija Cohenove klase. Ujedno, neophodna bi bila realizacija novih funkcija u MATLAB toolbox-u, koje bi obuhvatile neke od pomenutih distribucija.

- Definisanje distribucije Cohenove klase sa minimalnim biasom, i ispitivanje spektralnog pomjeraja za distribucije Cohenove klase.
- Primjena robusnog  $2D$  periodograma za filtriranje slike zahvaćene šumom.
- Realizacija robusne  $RID$  distribucije za multikomponentne signale.
- Ispitivanje mogućnosti vremenski-promjenljivog filtriranja prirodnih signala, a posebno signala govora.
- Primjena Radon-Wignerove distribucije u watermarkingu različitih tipova signala, iznalaženje diskretne brze realizacije ove distribucije i mogućnost da se, kombinacijom više tipova watermarka, obezbjedi velika robusnost na atake.
- Primjena Radon-Wignerove distribucije u estimaciji kretanja.
- Analiza teksturnih površi vremensko-frekvencijskim metodima.

# **LITERATURA**



# Literatura

- [1] L.Cohen: "Time-frequency distributions-a review", Proc. IEEE, vol.77, no.7, July 1989, pp.941-981.
- [2] L.Cohen, "Time-frequency analysis", Prentice-Hall, 1995.
- [3] F.Hlawatsch, G.F.Boudreaux-Bartels: "Linear and quadratic time-frequency signal representations", IEEE Signal Processing Magazine, April 1992, pp.21-67.
- [4] Proceedings of IEEE, Special issue on time-frequency analysis, Vol. 84, No. 9, Sept. 1996.
- [5] Lj. Stanković et al: "Time-frequency signal analysis", research monograph, ETT Podgorica, 1999.
- [6] J. W. Pitton, K. Wang, B.-H. Juang: "Time-frequency analysis and auditory modeling for automatic recognition of speech", Proc. IEEE, Vol.84, No. 9, pp. 1199-1215, Sept. 1996.
- [7] E. Lukasik, S. Grochowski: "Comparison of some time-frequency analysis methods for classification of plosives", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [8] T. Le, T. Dornbæk, M. Glesner: "Sound signature analysis using time-frequency signal processing: application to active stall avoidance in axial compressors", Int. Conf. EURASIP 97, Rhode island, Greece, pp. 641-644.
- [9] P. Dreiseitel, H. Puder: "Speech enhancement for mobile telephony based on non-uniformly spaced frequency resolution", Int. Conf. EURASIP'97, Rhode island, Greece, pp. 965-968.
- [10] B. Zhang, S. Salo: "A time-frequency distribution of Cohen's class with a compound kernel and its application to speech signal processing", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol. 42, No.1, Jan.1994, pp. 54-65.
- [11] W.J.Piclemeier, G.H.Wakefield, M. H. Simoni: "Time-frequency analysis of musical signals", Proc. IEEE, Vol.84, No. 9, pp. 1216-1230, Sept. 1996.
- [12] C. Delfs, F. Jondral: "Classification of piano sounds using time-frequency signal analysis", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [13] G. Schrom, W. Pietsch, L. Reindl, F. Seifert: "Real-time measurement of the Wigner distribution with a SAW convolver", Int.Conf. IEEE Inst.Meas., Brussels, Belgium, 1996, pp.891-894.
- [14] G. C. Gaunard, H. C. Strifors: "Signal analysis by means of time-frequency (Wigner-type) distributions-Applications to sonar and radar echoes", Proc. IEEE, Vol.84, No. 9, pp. 1231-1248, Sept. 1996.
- [15] P. Loughlin, D. Groutage, R. Rohbaugh: "Time-frequency analysis of acoustic transients", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [16] S. Barbarossa, C. Gregori, G. Nicastro: "On the use of joint time-frequency representations in SAR signal processing", ETT, Vol. 2, No.6, Nov.-Dec. 1991, pp. 65-74.
- [17] J. A. Johnston: "Wigner distribution and FM radar signal design", IEE Proc.Part F, Vol.136, No.2, Apr.1989, pp. 81-87.
- [18] J. A. Johnston, A. C. Fairhead: "Waveform design and Doppler sensitivity analysis for nonlinear FM chirp pulses", IEE Proc. Part F, Vol. 133, No.2, Apr.1986, pp.163-175.

- [19] V.C. Chen, H. Ling: "Joint time-frequency analysis for radar signal and image processing", *IEEE Sig.Proc.Mag.*, Vol.16, No.2, Mar. 1999, pp.81-93.
- [20] L. R. Dragonette, D. M. Drumheller, C. F. Gaumond, D. H. Hughes, B. T. O'Connor, N.-C. Yen, T. J. Yoder: "The application of two-dimensional signal transformations to the analysis and synthesis of structural excitations observed in acoustical scattering", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1249-1263, Sept. 1996.
- [21] W. J. Williams: "Reduced interference distributions: Biological applications and interpretations", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1264-1280, Sept. 1996.
- [22] S. Qian, D. Chen: "Joint time-frequency analysis", *IEEE Sig.Proc.Mag.*, Vol.16, No.2, Mar.1999, pp.52-67.
- [23] J. C. Wood, D. T. Barry: "Time-frequency analysis of skeletal muscle and cardiac vibrations", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1281-1294, Sept. 1996.
- [24] S. Haykin, R. J. Racine, Y. Xu, C. A. Chapman: "Monitoring neuronal oscillations and signal transmission between cortical regions using time-frequency analysis of electroencephalographic activity", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1295-1301, Sept. 1996.
- [25] M. Sun, S. Qian, X. Yan, S. B. Baumann, X. G. Xia, R. E. Dahl, N. D. Ryan, R. J. Scabassi: "Localizing functional activity in the brain through time-frequency analysis and synthesis of the EEG", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1302-1311, Sept. 1996.
- [26] N. H. Morgan, A. S. Gevins: "Wigner distribution of human event-related brain potentials", *IEEE Trans.Bio.Eng.*, Vol.33, No.1, Jan.1986, pp.66-70.
- [27] A. El-Jaroudi, M. S. Redfern, L. F. Chaparro, J. M. Furman: "The application of time-frequency methods to the analysis of postural sway", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1312-1318, Sept. 1996.
- [28] L. E. Atlas, G. D. Bernard, S. B. Narayanan: "Applications of time-frequency analysis to signals from manufacturing and machine monitoring sensors", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1319-1329, Sept. 1996.
- [29] B. Samimy, G. Rizzoni: "Mechanical signature analysis using time-frequency signal processing: Application to internal combustion engine knock detection", *Proc. IEEE*, Vol.84, No. 9, pp. 1330-1343, Sept. 1996.
- [30] Lj. Stanković, J. F. Boehme: "Time-frequency analysis of multiple resonances in chamber combustion signals", *Sig. Proc.*, Vol.78, No3, Nov.1999.
- [31] J. Ilormigo, G. Cristobal: "High resolution spectral analysis of images using the pseudo-Wigner distribution", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1757-1763, June 1998.
- [32] G. Cristobal, J. Bescos, J. Santamaria: "Image analysis through the Wigner distribution function", *Appl. Opt.*, Vol. 28, no. 2, pp. 262-271, 1989.
- [33] G. Cristobal, C. Gonzalo, J. Bescos: "Image filtering and analysis through the Wigner distribution function", in *Advances in Electronics and Electron Physics*, P. W. Hawkes, Ed. Boston, MA: Academic, 1991, Vol. 80, pp. 309-397.
- [34] S. Stanković, Lj. Stanković, Z. Uskoković: "On the local frequency, group shift and cross-terms for multidimensional time-frequency distribution: A method for multidimensional time-frequency analysis", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol. 43, pp. 1719-1725, July 1995.
- [35] H. Suzuki, F. Kobayashi: "A method of two-dimensional spectral analysis using the Wigner distribution", *Electron. Commun. Jpn.*, Vol. 75, no. 1, pp. 1006-1013, 1992.
- [36] Y. M. Zhu, R. Goutte, F. Peyrin: "The use of a two-dimensional Hilbert transformation for Wigner analysis of 2-dimensional real signals", *Sig. Proc.*, Vol. 19, pp. 205-220, 1990.

- [37] Y. M. Zhu, F. Peyrin, R. Goutte: "Equivalence between the two-dimensional real and analytic signal Wigner distribution", *IEEE Trans. ASSP*, Vol. 37, pp. 1631-1634, Oct. 1989.
- [38] Y. M. Zhu, F. Peyrin, R. Goutte: "Transformation de Wigner-Ville: description d'un nouvel outil de traitement du signal et des images", *Ann. Telecom.*, Vol. 42, No.3-4, pp. 105-117, 1987.
- [39] T. Reed, H. Wechlers: "Segmentation of textured images and Gestalt organization using spatial/spatial-frequency representations", *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 12, pp. 1-12, 1990.
- [40] Y. M. Zhu, R. Goutte: "Analysis and comparison of space/spatial-frequency and multiscale methods for texture segmentation", *Opt. Eng.*, Vol. 34, No. 1, pp. 269-282, 1995.
- [41] Y. M. Zhu, R. Goutte, M. Amiel: "On the use of a two-dimensional Wigner-Ville distribution for texture segmentation", *Sig. Proc.*, Vol. 30, pp. 205-220, 1993.
- [42] S. Stanković, Lj. Stanković, I. Djurović: "Prostorno promjenljivo filtriranje", *Tehnika*, Vol. 47, No. 5-6, pp. E1-E6, Nov.-Dec. 1998.
- [43] M. G. Amin: "Interference mitigation in spread-spectrum communication systems using time-frequency distributions", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol. 45, No. 1, Jan. 1997, pp. 90-101.
- [44] C. Wang, M.G. Amin: "Performance analysis of instantaneous frequency-based interference excision techniques in spread spectrum communications", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.46, No.1, Jan.1998, pp.70-82.
- [45] M.G. Amin: "Time-frequency for interference excision in spread-spectrum communications", *IEEE Sig.Proc.Mag.*, Vol.16, No.2, Mar.1999, pp.33-34.
- [46] L. Galleani, L. L. Presti: A time-frequency method for nonlinear system classification in presence of noise", *Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997*.
- [47] A. Belouchrani, M.G. Amin: "Blind source separation based on time-frequency signal representation", *IEEE Trans. Sig.Proc.*, Vol.46, No. 11, Nov.1998, pp.2888-2897.
- [48] Y. Lu, J.M. Morris: "Gabor expansion for adaptive echo cancellation", *IEEE Sig.Proc.Mag.*, Vol.16, No.2, Mar.1999, pp.68-80.
- [49] J.J. Wang, J. Zhou: "Aseismic design based on artificial simulations", *IEEE Sig.Proc.Mag.*, Vol.16, No.2, Mar.1999, pp.94-99.
- [50] B. Boashash: "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 1: Fundamentals", *Proc. IEEE*, Vol.80, No.4, Apr.1992, pp.521-538.
- [51] B. Boashash: "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 2: Applications", *Proc. IEEE*, Vol.80, No.4, Apr.1992, pp.540-568.
- [52] L. Cohen: "Distributions concentrated along instantaneous frequency", *SPIE*, Vol.1348, pp. 149-157, 1990.
- [53] L. Cohen, C. Lee: "Instantaneous bandwidth", in *Time-frequency signal analysis-Methods and applications*, Longman Cheshire, Wiley, Edited by B. Boashash, 1991.
- [54] G. Andria, M. Savino, A. Trotta: "Application of Wigner-Ville distribution to measurements on transient signals", *IEEE Trans.Ins.Meas.*, Vol.43, No.2, Apr.1994, pp.187-193.
- [55] M. Wang, A. K. Chan, C. K. Chui: "Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol. 46, No.3, Mar.1998, pp.571-586.
- [56] S. Barbarossa, O. Lemoine: "Analysis of nonlinear  $F^M$  signals by patterns recognition of their time-frequency representation", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.3, No.4, Apr.1996, pp.112-115.
- [57] Lj. Stanković: "An analysis of some time-frequency and time-scale distributions", *Ann. Telecom.*, Vol.49, No.9-10, Sept.-Oct.1994, pp.505-517.

- [58] V. Katkovnik: "Nonparametric estimation of instantaneous frequency", IEEE Tran.Inf.Th., Vol.43, No.1, Jan.1997, pp.183-189.
- [59] Lj. Stanković, S. Stanković: "An analysis of instantaneous frequency presentation using time-frequency distributions-Generalized Wigner distribution", IEEE Tran.Sig.Proc., Vol.43, No.2, Feb.1995, pp.549-552.
- [60] V. Katkovnik, Lj. Stanković: "Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data driven window length", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.46, No.9, Sept.1998, pp.2315-2325.
- [61] Lj. Stanković, V. Katkovnik: "Instantaneous frequency estimation using higher order distributions with adaptive order and window length", IEEE Trans.Inf.Th., Vol.46, No.1, pp.302-311, Jan.2000.
- [62] V. Katkovnik, Lj. Stanković: "Instantaneous frequency estimation using periodogram with time varying window length", Sig.Proc., Vol.67, No.3, June 1998, pp.345-358.
- [63] Lj. Stanković, V. Katkovnik: "Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with variable window width", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.5, No.9, Sept.1998, pp.224-227.
- [64] C. Wang, M. G. Amin: "Zero-tracking time-frequency distributions", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [65] L. Cohen: "Preface to the special issue on time-frequency analysis", Proc.IEEE, Vol.84, No.9, Sep.1996, pp.1196-1197.
- [66] L. Cohen: "What is multicomponent signal", Proc.of ICASSP, Vol.5, pp.113-116, 1992.
- [67] D. Gabor: "Theory of communication", J. IEE, Vol.93, pp.423-457, 1946.
- [68] J. Jeong, W. Williams: "Mechanism of the cross-terms in spectrogram", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.40, No.10, Oct.1992, pp.2609-2613.
- [69] M.G. Amin, W.J. Williams: "High spectral resolution time-frequency distribution kernel", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.46, No.10, Oct.1998, pp.2796-2804.
- [70] M.G. Amin: "Recursive kernels for time-frequency signal representations", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.1, Jan.1996, pp.16-18.
- [71] G.T. Venkatesan, M.G. Amin: "Time-frequency distribution kernel design over a discrete powers-of-two space", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.12, Dec.1996, pp.305-307.
- [72] G.T. Venkatesan, M.G. Amin: "Time-frequency distribution kernels using *FIR* filter design techniques", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.45, No.6, June 1997, pp.1645-1650.
- [73] J. Jeong, W.J. Williams: "Kernel design for reduced interference distributions", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.40, No.2, Feb.1992, pp.402-412.
- [74] S. Kadambe, G.F. Boudreaux-Bartels: "A comparison of the existence of "cross terms" in the Wigner distribution and the squared magnitude of the wavelet transform and the short time Fourier transform", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.40, No.10, Oct.1992, pp.2498-2517.
- [75] J.B. Allen, L. R. Rabiner: "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis", Proc. IEEE, Vol.65, No.11, Nov.1977, pp.1558-1564.
- [76] S. Qiu: "The undersampled discrete Gabor transform", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.46, No.5, May 1998, pp.1221-1227.
- [77] R.N. Czerwinski, D.L. Jones: "Adaptive short-time Fourier analysis", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.4, No.2, Feb.1997, pp.42-45.
- [78] M.G. Amin, K.D. Feng: "Short-time Fourier transforms using cascade filter structures", IEEE CAS-II, Vol.42, No.3, Oct.1995, pp.631-640.

- [79] J. Ville: "Theorie et applications de la notion de signal analytique", *Cables et Transmission*, Vol.2, No.1, 1948, pp.61-74.
- [80] P. E. Wigner: "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys.Rev.*, Vol.40, 1932, pp.246-254.
- [81] W. Rihaczek: "Signal energy distribution in time and frequency", *IEEE Trans.Inf.Th.*, Vol.14, 1968, pp.369-374.
- [82] M.H. Ackroyd: "Short-time spectra and time-frequency energy distribution", *J. Acoust.Soc.Am.*, Vol.50, 1970, pp.1229-1231.
- [83] C.H. Page: "Instantaneous power spectra", *J. Appl. Phys.*, vol. 23, 1952, pp.103-106.
- [84] M.J. Levin: "Instantaneous spectra and ambiguity functions", *IEEE Trans.Inf.Th.*, Vol.13, 1967, pp.95-97.
- [85] M. Born, P. Jordan: "Zur Quantenmechanik", *Z. Phys.*, Vol.34, 1925, pp.858-888.
- [86] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker: "The Wigner distribution a tool for time-frequency signal analysis", Part I, *Philips J.Res.*, Vol.35, No.3, 1985, 217-250.
- [87] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker: "The Wigner distribution a tool for time-frequency signal analysis", Part II, *Philips J.Res.*, Vol.35, No.4-5, 1985, 276-300.
- [88] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker: "The Wigner distribution a tool for time-frequency signal analysis", Part III, *Philips J.Res.*, Vol.35, No.6, 1985, 372-389.
- [89] H.I. Choi, W.J. Williams: "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Trans.ASSP*, Vol. 73, No.6, June 1989, pp.862-871.
- [90] A. Papandreou, G.F. Boudreaux-Bartels: "Generalization of the Choi-Williams distribution and Butterworth distribution for time-frequency analysis", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.41, No.1, Jan.1993, pp.463-472.
- [91] D. Wu, J.M. Morris: "Time-frequency representations using a radial Butterworth kernel", *IEEE Symp. TFTSA*, PA, Oct.1994, pp.60-63.
- [92] Z. Guo, L.G. Durand, H.C. Lee: "A time-frequency distributions of nonstationary signal based on a Bessel kernel", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.7, July 1994, pp.170-177.
- [93] L.E. Atlas, Y. Zhao, R.J. Marks II: "The use of cone shape kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Trans.ASSP*, Vol.38, 1990, pp.1084-1091.
- [94] E.J. Diethorn: "The generalized exponential time-frequency distribution", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.5, May 1994, pp.1028-1037.
- [95] Lj. Stanković: "A method for time-frequency signal analysis", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.1, Jan.1994, pp.225-229.
- [96] S. Oh, R.J. Marks II: "Some properties of generalized time-frequency representation with cone-shaped kernels", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.40, No.7, July 1992, pp.1735-1745.
- [97] B. Ristić, B. Boashash: "Kernel design for time-frequency signal analysis using the Radon transform", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.41, No.5, May 1993, pp.1996-2008.
- [98] D. Wu, J.M. Morris: "Discrete Cohen's class of distribution", *IEEE Symp. TFTSA*, PA, Oct.1994, pp.532-535.
- [99] J. Jeong, W.J. Williams: "Alias-free generalized discrete-time time-frequency distribution", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.40, No.11, No.1992, pp.2757-2765.



- [100] N.M. Marinovich: "The Wigner distribution and the ambiguity function: Generalizations, enhancement, compression and some applications", PhD dissertation, City Univ. New York, 1986.
- [101] J. Bertrand, P. Bertrand: "Affine time-frequency distributions", in Time-frequency signal analysis: Methods and applications, B. Boashash, Ed. Melbourne, Australia: Longman-Cheshire, ch.5, pp.118-140, 1992.
- [102] A. Papandreou, F. Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels: "The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations - Part I: Constant- $Q$  warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.41, Dec.1993, pp.3425-3444.
- [103] F. Hlawatsch, A. Papandreou-Suppapola, G.F. Boudreaux-Bartels: "The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations - Part II: Subclasses, intersection with the affine and power classes, regularity, and unitary", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.45, Feb.1997, pp.303-314.
- [104] F. Hlawatsch, A. Papandreou-Suppapola, G.F. Boudreaux-Bartels: "The power classes - quadratic time-frequency representations with scale covariance and dispersive time-shift covariance", IEEE Trans.Sig.Proc., preprint, 1999.
- [105] P. Goncalves, R.G. Baraniuk: "Pseudo affine Wigner distributions: Definition and kernel formulation", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.46, No.6, June 1998.
- [106] J.R. Fonolosa, C.L. Nikias: "Analysis of transient signals using higher order time-frequency distributions", In Proc.ICASSP 93, Vol. 5, pp. 197-200.
- [107] C.L. Nikias, J.M. Mendel: "Signal processing with higher order spectra", IEEE Sig.Proc.Mag., July 1997, pp.10-37.
- [108] Lj. Stanković: "An analysis of Wigner higher order spectra of multicomponent signals", Ann. Telec., No.3/4, Mar/Apr. 1994, pp. 132-136.
- [109] Lj. Stanković: "Multitime definition of the Wigner higher order distribution: L-Wigner distribution", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.1, No.7, July 1994, pp.106-109.
- [110] Lj. Stanković: "L-class of time-frequency distributions", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.1, Jan.1996, pp.22-25.
- [111] S. Stanković, Lj. Stanković: "Introducing time-frequency distribution with a "complex-time" argument", Elec.Let., Vol.32, No.14, July 1996, pp.1265-1267.
- [112] Lj. Stanković: "On the realization of the polynomial Wigner-Ville distribution for multicomponent signals", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.5, No.7, July 1998, pp.157-159.
- [113] Lj. Stanković, S. Stanković, I. Djurović: "An architecture for realization of the cross term free polynomial Wigner-Ville distributions", Proc. of IEEE ICASSP, pp.2053-2056, Minhen, Apr. 1997.
- [114] Lj. Stanković: "A time-frequency distribution concentrated along the instantaneous frequency", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.3, Mar.1996, pp.89-91.
- [115] Lj. Stanković: "Highly concentrated time-frequency distribution: Pseudo quantum signal representation", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.5, No.3, Mar.1997, pp.543-551.
- [116] Lj. Stanković: "S-class of time-frequency distributions", IEE Proc. Vis.Im.Sig.Proc., Vol.144, No.2, Apr. 1997, pp.57-64.
- [117] Lj. Stanković: "Local polynomial Wigner distributions", Sig.Proc., Vol.59, No.1, May 1997, pp.123-128.
- [118] V. Katkovnik: "Discrete-time local polynomial approximation of the instantaneous frequency", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.46, No.10, Oct.1998, pp.2626-2637.
- [119] P. Zavorsky, N. Fujii: "Introduction of cross ambiguity function for elimination of cross-terms in Wigner distribution of the 3rd order", El.Let., 1996.

- [120] J.M. Mendel: "Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications", *Proc. IEEE*, Vol.79, No.3, Mar. 1991, pp.278-305.
- [121] J.R. Fonollosa, C.L. Nikias: "Wigner higher order moment spectra: Definition, properties, computation and application to transient signal analysis", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.41, No.1, Jan. 1993, pp.245-266.
- [122] I.I. Joung, R.L. Moses: "The bispectrum of complex signals: Definitions and properties", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.40, No.11, Nov. 1992, pp.2834-2836.
- [123] V. Katkovnik: "Local polynomial periodograms for signals the time-varying frequency and amplitude", *Proc. of Int. Conf. ASSP*, Vol.3, May 1996, pp.1399-1402.
- [124] V.I. Tatarski: "Wigner distribution in quantum mechanics", *na ruskom, Usp. Fiz. Nauk.*, Vol.139, No.4, Apr. 1983, pp.587-619.
- [125] B. Ristić, B. Boashash: "Relationship between the polynomial and higher order Wigner-Ville distribution", *IEEE Sig. Proc. Lett.*, Vol.2, No.12, Dec. 1995, pp.227-229.
- [126] Y. Wang, G. Zhou: "On the use of high order ambiguity function for multicomponent polynomial phase signals", *Proc. Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997*.
- [127] V. Katkovnik: "Local polynomial periodogram for time-varying frequency estimation", *South. Afr. Stat. Jour.*, Vol.29, 1995, pp.169-198.
- [128] V. Katkovnik: "Local polynomial approximation of the instantaneous frequency: Asymptotic accuracy", *Sig. Proc.*, Vol.52, 1996, pp.343-356.
- [129] V. Katkovnik: "A new form of the Fourier transform for time-varying frequency estimation", *Sig. Proc.*, Vol.47, 1995, pp.187-200.
- [130] V. Katkovnik: "Wavelets and local polynomial approximation", *Proc. IEEE TFTA*, 1996, pp.237-240.
- [131] V. Katkovnik: "Adaptive local periodogram for time-varying frequency estimation", *Proc. IEEE TFTA*, 1996, pp.329-332.
- [132] B. Ristić, B. Boashash: "Instantaneous frequency estimation of quadratic and cubic *FM* signals using the cross-polynomial Wigner-Ville distribution", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.44, No.6, June 1996, pp.1549-1553.
- [133] R.G. Baraniuk, D.L. Jones: "Wigner-based formulation of the chirplet transform", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.44, No.12, Dec. 1996, pp.3129-3135.
- [134] S. Barbarossa, V. Petrone: "Analysis of polynomial-phase signals by the integrated generalized ambiguity function", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.45, No.2, Feb. 1997, pp.316-327.
- [135] S. Barbarossa, A. Scaglione, G.B. Giannakis: "Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.46, No.3, Mar. 1998, pp.691-708.
- [136] A. Scaglione, S. Barbarossa: "On the spectral properties of polynomial-phase signals", *IEEE Sig. Proc. Lett.*, Vol.5, No.9, Sep. 1998, pp.237-240.
- [137] A. Scaglione, S. Barbarossa: "Statistical analysis of the product high-order ambiguity function", *IEEE Trans. Inf. Th.*, Vol.45, No.1, Jan. 1999, pp.343-355.
- [138] J.C. O'Neill, W.J. Williams: "A function of time, frequency, lag and Doppler", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.47, No.3, Mar. 1999, pp.789-799.
- [139] M. Benadir: "Characterization of polynomial functions and applications to time-frequency analysis", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.45, No.5, May 1997, pp.1351-1354.
- [140] O. Rioul, M. Vetterli: "Wavelets and signal processing", *IEEE Sig. Proc. Mag.*, Oct. 1991, pp.14-38.

- [111] N. Delpart, B. Escudie, P. Guilernain, R. Kronland-Martinet, Ph. Tcamichian, B. Torresani: "Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequency", IEEE Trans.Inf.Th., Vol.38, No.2, Feb./Mar. 1992, pp.644-661.
- [142] O. Rioul, P. Flandrin: "Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transform", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.40, No.7, July 1992, pp.1746-1757.
- [143] J. Kovačević, M. Vetterli: "Perfect reconstruction filter banks with rational sampling factors", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.41, No.6, June 1993, pp.2047-2066.
- [144] J. Kovačević, M. Vetterli: "Nonseparable two- and three-dimensional wavelets", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.43, No.5, May 1995, pp. 1269-1273.
- [145] J. Kovačević: "Subband coding systems incorporating quantizer models", IEEE Trans.Im.Proc., Vol.4, No.5, May 1995, pp. 543-553.
- [146] J. Kovačević, M. Vetterli: "FCO sampling of digital video using perfect reconstruction filter banks", IEEE Trans.Im.Proc., Vol.2, No.1, Jan.1993, pp.118-122.
- [147] R. Bernardini, J. Kovačević: "Local orthogonal bases I: Construction", MDSP Journal, July 1996.
- [148] R. Bernardini, J. Kovačević: "Local orthogonal bases II: Window design", MDSP Journal, July 1996.
- [149] C. Herley, J. Kovačević, K. Ramchandran, M. Vetterli: "Tillings of the time-frequency plane: Construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms", IEEE Trans. SP, Vol.41, No.12, Dec.1993, pp.3341-3359.
- [150] I. Daubachies: "Ten lectures on wavelets", SIAM, 1992.
- [151] M. Vetterli, J. Kovačević: "Wavelets and subband coding", Prentice Hall, 1994.
- [152] R.A. Carmona, W.L. Ilwang, B. Torresani: "Multiridge detection and time-frequency reconstruction", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.2, Feb.1999, pp. 480-492.
- [153] L.H. Sibul, L.G. Weiss, R.K. Yaoung: "Weighted time-frequency and time-scale transforms in reproducing kernel Hilbert spaces", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.4, No.1, Jan.1997, pp.21-23.
- [154] A.M. Sayeed, D.L. Jones: "Integral transforms covariant to unitary operators and their implications for joint signal representations", IEEE Trans. Sig.Proc., Vol.44, No.6, June 1996, pp.1365-1377.
- [155] A.M. Sayeed, D.L. Jones: "Equivalence of generalized joint signal representations of arbitrary variables", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.44, No.12, Dec.1996, pp.2959-2970.
- [156] F. Hlawatsch, T. Twaroch: "Extending the characteristic function method for joint  $a - b$  and time-frequency analysis", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [157] A. Papandreou-Suppapola, R.L. Murray, G.F. Boudreaux-Bartels: "Localized subclasses of quadratic time-frequency representations", Int. Conf. IEEE ASSP, Munchen 1997.
- [158] A.M. Sayeed: "On the equivalence of the operator and kernel methods for joint distributions of arbitrary variables", IEEE Trans. Sig.Proc., Vo.45, No.4, Apr.1997, pp.1067-1070.
- [159] R.G. Baraniuk: "Beyond time-frequency analysis: Energie densities in one and many dimensions", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.9, Sep.1998, pp.2305-2314.
- [160] J. McLaughlin, J. Droppo, L. Atlas: "Class-dependent time-frequency distributions via operator theory", ICASSP'97, Minhen 1997.
- [161] F. Hlawatsch, H. Bolcskei: "Covariant time-frequency distributions based on conjugate operators", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.2, Feb.1996, pp.44-46.
- [162] R.G. Baraniuk: "A limitation of the kernel method for joint distributions of arbitrary variables", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.2, Feb1996, pp.51-53.

- [163] R.G. Baraniuk: "Covariant time-frequency representations through unitary equivalence", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.3, No.3, Mar.1996, pp.79-81.
- [164] K. Kodera, C. De Villedary, R. Gendrin: "A new method for the numerical analysis of nonstationary signals", *Phys.Earth.Plan.Int.*, Vol.12, pp.142-150, 1976.
- [165] F. Auger, P. Flandrin: "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by reassignment method", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.43, pp.1068-1089, May 1995.
- [166] E. Chassande-Mottin, I. Daubechies, F. Auger, P. Flandrin: "Differential reassignment", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.4, No.10, Oct.1997, pp.293-294.
- [167] C. Richard, R. Lengellé: "Joint recursive implementation of time-frequency representations and their modified version by the reassignment method", *Sig.Proc.*, Vol.60, No.2, pp.163-179, 1997.
- [168] G.S. Cunningham, W.J. Williams: "Kernel decomposition of time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.6, June 1994, pp. 1425-1442.
- [169] J.R. O'Hair, B.W. Suter: "The Zak transform and decimated time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.44, No.5, May 1996, pp. 1099-1110.
- [170] G.S. Cunningham, W.J. Williams: "Fast implementations of generalized time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.6, June 1994, pp. 1496-1508.
- [171] A. Papoulis: "Signal analysis", McGrawHill Book Company, New York 1977.
- [172] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer: "Digital signal processing", Prentice Hall, Englewood cliffs, 1978.
- [173] J.M. Morris, D. Wu: "On alias-free formulations of discrete-time Cohen's class of distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.44, No.6, June 1996, pp.1355-1364.
- [174] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker: "The aliasing problems in discrete-time Wigner distributions", *IEEE Trans. ASSP*, Vol.31, pp.1067-1072, Oct.1983.
- [175] F. Peyrin, R. Prost: "A unified definition for the discrete-time, discrete-frequency, and discrete-time/frequency Wigner distributions", *IEEE Trans. ASSP*, Vol.34, No.8, pp.858-867, Aug. 1986.
- [176] A.H. Costa, G.F. Boudoux-Bartels: "A comparative study of alias-free time-frequency representations", *IEEE Conf.TFTSA*, pp.76-79, Paris, 1994.
- [177] Y.M. Zhu, F. Peyrin, R. Goutte: "Sur la transformation de pseudo-Wigner-Ville discrete en temps et en fréquence", *Ann.Telec.*, Vol.46, No.5-6, 1991, pp.301-309.
- [178] J.W. Pitton: "Linear and quadratic methods for positive time-frequency distributions", *Proc. of ICASSP*, Minhen 1997.
- [179] L.Cohen, T.E. Posch: "Positive time-frequency distribution functions", *IEEE Trans. ASSP*, Vol.33, No.1, Feb.1985, pp.31-38.
- [180] T. Hsien Sang, W.J. Williams, J.C. O'Neill: "An algorithm for positive time-frequency distributions", *IEEE Conf. TFTS*, Paris 1996, pp.165-168.
- [181] D. Groutage: "A fast algorithm for computing minimum cross-positive time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.45, No.8, Aug.1997, pp.1954-1970.
- [182] M.K. Emresoy, P.J. Loughlin: "Weighted least squares implementation of Cohen-Posch time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.46, No.3, Mar.1998, pp.753-757.
- [183] S.I. Shah, P.J. Loughlin, L.F. Chaparro, A. El-Jaroudi: "Informative priors for minimum cross-entropy positive time-frequency distributions", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.4, No.6, June 1997, pp.176-177.
- [184] J.R. Fonolosa: "Positive time-frequency distributions based on joint marginal constraints", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.44, No.8, Aug.1996, pp.2086-2091.

- [185] A. Frances, M. Porat: "Analysis and synthesis of multicomponent signals using positive time-frequency distributions", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.2, Feb.1999, pp.493-504.
- [186] F. Pedersen: "A Gabor expansion-based positive time-dependent power spectrum", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.2, Feb.1999, pp.587-590.
- [187] M.K. Emresoy, P.J. Loughlin: "Weighted least-squares implementation of Cohen-Posch time-frequency distributions with specified conditional and joint moment constraints", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.3, Mar.1999, pp.893-900.
- [188] Lj. Stanković: "The auto-term representation by the reduced interference distributions; The procedure for a kernel design", IEEE Trans. Sig.Proc., Vol.44, No.6, June 1996, pp.1557-1564.
- [189] I. Djurović: "Funkcija jezgra u vremensko-frekvencijskoj analizi i softverski paket za realizaciju distribucija", Magistarski rad, ETF Podgorica, jul 1996.
- [190] I. Djurović, Lj. Stanković: "O auto-članovima kod vremensko-frekvencijskih distribucija", 39. Konf. ETRAN, Vol.I, Zlatibor 1995, pp.218-221.
- [191] I. Djurović, Lj. Stanković: "Optimal Cohen class distributions with reduced auto-term", 11. Conf. PRIM, Budva 1996.
- [192] Lj. Stanković: "Signal dependent S-method", research monograph: "Time frequency signal analysis", pp.307-318, Podgorica 1999.
- [193] B. Friedlander, L.L. Scharf: "On the structure of time-frequency spectrum estimators", IEEE Trans.Sig.Proc., preprint.
- [194] B. Boashash, B.Ristić: "Polynomial time-frequency distributions and time-varying higher order spectra: Applications to analysis of multicomponent FM signals and to treatment of multiplicative noise", Sig.Proc., Vol.67, No.1, May 1998, pp.1-23.
- [195] S. Stanković, Lj. Stanković: "An architecture for the realization of a system for time-frequency signal analysis", IEEE Trans.CAS, Part II, no.7, july 1997, pp.600-604.
- [196] D. Petranović, S. Stanković, Lj. Stanković: "Special purpose hardware for time frequency analysis", Elec.Let., Vol.133, No.6, Mar.1997, pp.464-466.
- [197] S. Stanković, I. Djurović, V. Vuković: "An architecture for the space-frequency analysis of images", Elec.Let., vol.34, no.23, 12.Nov.1998, pp. 2224-2225.
- [198] Lj. Stanković, S. Stanković, Z. Uskoković: "A method for space-frequency image analysis", Facta Univ., Vol.8, No.2, 1995, pp.225-234.
- [199] P. Gonçaves, R. Baraniuk: "A pseudo Bertrand distribution for time-scale analysis", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, Mar. 1996, pp.82-84.
- [200] S.K. Leo: "Application of the L-Wigner distribution to the diagnostic local defects of gear tooth", Int.Jou. KSME, Vol.2, Feb.1999, pp.144-157.
- [201] G.H. Golub, C.F. Van Loan: "Matrix computation", The John Hopkins University press, Baltimore, USA, 1984.
- [202] Lj. Stanković: "A method for improved energy concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using L-Wigner distribution", IEEE Trans.Sig.Proc., vol.43, No.5, May 1995, pp.1262-1269.
- [203] S. Stanković, Lj. Stanković: "An approach to the polynomial Wigner-Ville distributions", IEEE Symp. on TFTA, Paris, June 1996 pp. 153-157.
- [204] S. Stanković, Lj. Stanković, Z. Uskoković: "Modified Wigner bispectrum and its generalizations", Circ.Syst. and Signal Proc., Vol.16, Jan.1997, pp.27-40.



- [205] J.C. O'Neill, P. Flandrin: "Virtues and vices of quartic time-frequency distributions", preprint.
- [206] L. Cohen: "A general approach for obtaining joint representations in signal analysis - Part I: Characteristic function operator method", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.44, No.5, May 1996, pp.1080-1090.
- [207] L. Cohen: "A general approach for obtaining joint representations in signal analysis - Part II: General class, mean and local values, and bandwidth", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.44, No.5, May 1996, pp.1091-1098.
- [208] B. Tacer, P. Loughlin: "Time-scale energy density functions", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.44, No.5, May 1996, 1310-1314.
- [209] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: "Functional analysis", New York: Dover, 1990.
- [210] S. Mann, S. Haykin: "The chirplet transform: physical consideration", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.43, no.11, Nov.1995, pp.2745-2761.
- [211] F. Auger, P. Flandrin, O. Lemoine, P. Goncalves: "Time-frequency toolbox for Matlab", [www-syntim.inria.fr/fractales/Software/TFTB](http://www-syntim.inria.fr/fractales/Software/TFTB).
- [212] I. Djurović: "Realizacija vremensko-frekvencijskih transformacija softverskim putem", *ETF Jour. El.Eng.*, Vol.6, No.1, Nov.1996, pp.5-15.
- [213] I. Djurović: "Softverski paket za realizaciju vremensko-frekvencijskih distribucija", I konf. IT'96, pp.271-274, Žabljak 1996.
- [214] Instrumentation reference and catalogue, National Instruments, 1996.
- [215] I. Djurović, Lj. Stanković: "A virtual instrument for time-frequency signal analysis", *IEEE Trans. Instr.Meas.*, Dec.1999, Vol.48, No.6, pp.1086-1092.
- [216] I. Djurović, Lj. Stanković: "Performanse virtuelnog instrumenta za vremensko-frekvencijsku analizu", *ETF Jour.Elec.Eng.*, Vol.8, No.1, Nov.1999, pp.5-19.
- [217] I. Djurović, Lj. Stanković, R. Dragović-Ivanović, S. Stanković: "Virtuelni instrument zasnovan na S-metodu za vremensko-frekvencijsku analizu", Simpozijum o mjerenjima, Beograd, Okt.1998, pp.243-257.
- [218] I. Djurović, Lj. Stanković: "Upotreba vremensko-frekvencijskih transformacija u estimaciji amplitude i trenutne frekvencije signala", XLIII ETRAN, Zlatibor'99.
- [219] I. Djurović, Lj. Stanković: "Virtuelni instrument za analizu signala nestacionarnog spektra", XLI ETRAN, Zlatibor 1997.
- [220] P. Rao, F.J. Taylor: "Estimation of the instantaneous frequency using discrete Wigner distribution", *El.Let.*, Vol.26, pp.246-248, 1990.
- [221] P. J. Loughlin, B. Tacer: "Comments on the interpretation of instantaneous frequency", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.4, No.5, May 1997, pp.123-125.
- [222] D. Wei, A.C. Bovik: "On the instantaneous frequencies of multicomponent  $AM - FM$  signals", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.5, No.4, Apr.1998, pp.84-86.
- [223] P.M. Oliveira, V. Barroso: "Instantaneous frequency of multicomponent signals", *IEEE Sig.Proc.Let.*, Vol.6, No.4, Apr.1999, pp.81-83.
- [224] Lj. Stanković, S. Stanković: "Wigner distribution of noisy signal", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.41, No.2, Feb.1993, pp.956-960.
- [225] Lj. Stanković, S. Stanković: "On the Wigner distribution of the discrete-time noisy signals with application to the study of quantization effects", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.7, July 1994, pp.1863-1867.
- [226] Lj. Stanković, V. Ivanović, Z. Petrović: "Unified approach to the noise analysis in the spectrogram and Wigner distribution", *Ann.Telec.*, Vol.51, No.11/12, Nov./Dec. 1996, pp.585-594.

- [227] Lj. Stanković, V. Ivanović: "Further results on the minimum variance time-frequency distribution kernels", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.45, No.6, June 1997, pp.1650-1656.
- [228] Lj. Stanković: "Do the reduced interference distributions reduce noise?", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, accepted.
- [229] V. Ivanović, Lj. Stanković, D. Petranović: "Finite word-length effects in implementation of distributions for time-frequency analysis", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.46, No.7, July 1998, pp.2035-2041.
- [230] I. Djurović, V. Ivanović: "Uticaj ograničene dužine registara na rezultate dobijene vremensko-frekvencijskom analizom", *XL ETRAN*, Vol.I, Budva 1996, pp.297-300.
- [231] Lj. Stanković, V. Katkovnik: "The Wigner distribution of noisy signals with adaptive time-frequency varying window", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.47, No.2, Feb.1999.
- [232] K.M.M. Prabhu, R.S. Sundaram: "Fixed-point error analysis of discrete Wigner-Ville distribution", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.45, No.10, Oct.1997, pp. 2579-2582.
- [233] X.G.Xia: "A quantitative analysis of  $SNR$  in the short-time Fourier transform domain for multicomponent signals", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.46, No.1, Jan.1998, pp. 200-203.
- [234] C. Griffin, P. Rao, F. Taylor: "Roundoff error analysis of the discrete Wigner distribution using fixed-point arithmetic", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.39, No.9, Sept.1991, pp.2096-2100.
- [235] M.G. Amin: "Minimum variance time-frequency distribution kernels for signals in additive noise", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.44, No.9, Sept.1996, pp.2352-2356.
- [236] S.B. Hearn, M.G. Amin: "Minimum variance time-frequency distribution kernels", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.43, No.5, May 1995, pp.1258-1262.
- [237] J.H. McClellan, R.J. Purdy: "Applications of digital signal processing to radar", in *Applications of digital signal processing*, ed. A.V. Oppenheim, Prentice Hall, 1978, pp.239-330.
- [238] G. Andria, M. Savino, A. Trotta: "Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy", *IEEE Trans.Ins.Meas.*, Vol.38, No.4, Aug.1989, pp.856-863.
- [239] D.C.Rife, G.A. Vincent: "Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tone", *Bell Syst.Tech.Jour.*, Vol.49, No.2, Feb.1970, pp.197-228.
- [240] B.G. Quinn: "Estimation frequency by interpolation using Fourier coefficients", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.42, No.5, May 1994, pp.1264-1268.
- [241] E. Dilaverogly: "Nonmatrix Cramer-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.46, No.2, Feb.1998, pp.463-474.
- [242] D.C. Rife, R.R. Boorstyn: "Single tone parameter estimation from discrete-time observations", *IEEE Trans.Inf.Th.*, Vol.20, No.5, Sept.1974, pp.591-598.
- [243] B.Boashash, P.J. Black: "An efficient real-time implementation of the Wigner-Ville distribution", *IEEE Trans.ASSP*, Vol.35, No.11, Nov.1987, pp.1611-1620.
- [244] G.S. Cunningham, W.J. Williams: "Vector-valued time-frequency representations", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.44, No.7, July 1996, pp.1642-1656.
- [245] M. Sun, C.-C. Li, L.N. Sekhar, R.J. Sclabassi: "Efficient computation of the discrete pseudo-Wigner distribution", *IEEE Trans.ASSP*, Vol.37, No.11, Nov.1989, pp. 1735-1741.
- [246] S. Stanković, Lj. Stanković, D. Petranović: "Hardware realization of the higher order time-frequency distributions", *ETF Jour. El.Eng.*, Vol.7, No.1, Apr.1998, pp.88-103.
- [247] V. Vuković: "Prostorno-frekvencijske distribucije u obradi slike", *Magistarski rad*, Univerzitet Crne Gore, 1999.

- [248] V. Vuković, S. Stanković: "Arhitektura za realizaciju sistema za prostorno-frekvencijsku analizu slike", III Konf. IT, Žabljak 1998, pp.300-302.
- [249] J.C. Wood, D.T. Barry: "Linear signal synthesis using the Radon-Wigner distribution", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.42, No.5, May 1994, pp.2105-2111.
- [250] J.C. Wood, D.T. Barry: "Radon transform of time-frequency distributions for analysis of multicomponent signals" IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.42, No.11, Nov.1994, pp.3166-3177.
- [251] A.L. Warrick, P.A. Delaney: "Detection of linear features using a localized Radon transform with a wavelet filter", Proc.IEEE ICASSP'97, Munchen, Germany, 1997.
- [252] I. Raveh, D. Mendelovic: "New properties of the Radon transform of the cross Wigner/ambiguity distribution function", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.7, July 1999, pp.2077-2080.
- [253] S.Barbarossa: "Analysis of multicomponent *LFM* signals by a combined Wigner-Hough transform", IEEE Trans. on Sig.Proc., vol.43, no.6, June 1995, pp.1511-1515.
- [254] I. Djurović, Lj. Stanković: "Time-frequency representation based on the reassigned S-method", Sig.Proc., Vol.77, No.1, Aug.1999, pp.115-120.
- [255] I. Djurović, Lj. Stanković: "A reassignment based method for time-frequency representation", IEEE Proc. of ICECS'99, Sept.1999, Paphos, Cyprus, Vol.III, pp.1357-1360.
- [256] I. Djurović, Lj. Stanković: "The reassigned S-method", Telsiks'99, Okt.1999, Vol. I, pp.434-437, Niš, Jugoslavija.
- [257] I. Djurović, Lj. Stanković: "Modifikovani reassignment spektrogram", zbornik radova IT'99, Žabljak, pp.73-76.
- [258] V. Namias: "The fractional order Fourier transform and its applications to quantum mechanics", J. Inst. Math.Appl., Vol.25, pp.241-265.
- [259] N. Weyl: "Quantenmechanik und groupentheorie", Ztsch. f. Physik, Vol.46, 1927, pp.1-47.
- [260] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, L.B. Almeida: "The fractional Fourier transform in optical propagation problems", J. Modern Optics, Vol.41, 1994, pp.4027-4044.
- [261] A.W. Lohmann: "Image rotation, Wigner rotation and fractional Fourier transform", J. Opt. Soc. Amer. A, Vol.10, 1994, pp.2181-2186.
- [262] A.W. Lohmann, B.W. Soffer: "Relation between the Radon-Wigner and fractional Fourier transform", J.Opt.Soc.Amer. A, Vol.11, 1994, pp.1798-1801.
- [263] L.B. Almeida: "The fractional Fourier transform and time-frequency representations", IEEE Trans. Sig. Proc., Vol.42, 1994, pp.3084-3091.
- [264] J. Sadowsky: "An application of the Weyl theory to signal processing", Proc. 23rd Asilomar Conf.Circ.Syst.Comp., 1989, pp.628-632.
- [265] X.G. Xia, Y. Owechko, B.H. Soffer, R.M. Matic: "On generalized-marginal time-frequency distributions", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.44, No.11, Nov.1996, pp.2882-2886.
- [266] B. Santhanam, J.H. McClellan: "The discrete rotational Fourier transform", IEEE Trans. Sig. Proc., Vol.44, No.4, Apr. 1996, pp.994-997.
- [267] A.C. McBride, F.H. Keer: "The discrete rational Fourier transform", IMA J. Appl. Math., Vol.39, 1987, pp.159-175.
- [268] E.V. Labunets, V.G. Labunets: "Fast fractional Fourier transform", EURASIP'98, Rhodes, Greece, 1998, pp.1757-1760.

- [269] S.-C. Pei, S.-S. Tseng: "A new discrete fractional Fourier transform based on constrained eigendecomposition of  $DFT$  matrix by Lagrange multiplier method", IEEE conf. ICASSP'97, Munchen, Germany.
- [270] C. Candan, M.A. Kutay, H.M. Ozatkas: "The discrete fractional Fourier transform", IEEE conf. ICASSP'99, Phoenix, USA, 1999, pp.1713-1716.
- [271] C. Candan: "The discrete fractional Fourier transform", MS Thesis, Bilkent University, Ankara, 1998.
- [272] S.-C. Pei, M.-H. Yeh, C.-C. Tseng: "Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections", IEEE Trans. Sig. Proc., Vol.47, No.5, May 1999, pp.1335-1348.
- [273] H.M. Ozatkas, O. Arikan, M.A. Kutay, G. Bozdagi: "Digital computation of the fractional Fourier transform", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.44, 1996, pp.2141-2150.
- [274] D.H. Bailey, P. N. Swartztrauber: "The fractional Fourier transform and applications" SIAM Review, Vol.33, No.3, Sept.1991, pp.389-404.
- [275] N. Wiener: "Hermitian polynomials and Fourier analysis", J. Math. Phys. MIT, Vol8, 1929, pp.70-73.
- [276] M.A. Kutay, H. Ozatkas, H.M. Ozatkas, O. Arikan: "The fractional Fourier domain decomposition (FFDD)", preprint.
- [277] M.A. Kutay, M.F. Erden, H.M. Ozatkas, O. Arikan, C. Candan, O. Guleryuz: "Cost-efficient approximation of linear systems with repeated and multi-channel filtering configurations", Proc. IEEE ICASSP 1998, Seattle 1998, pp.3433-3436.
- [278] M.A. Kutay, M.F. Erden, H.M. Ozatkas, O. Arikan, O. Guleryuz, C. Candan: "Space-bandwidth-efficient realizations of linear systems", Optics Letters, Vol.23, No.14, July 1998, pp.1069-1071.
- [279] M.A. Kutay, H. Ozatkas, M.F. Erden, H.M. Ozatkas, O. Arikan: "Solution and cost analysis of general multi-channel and multi-stage filtering circuits", Proc. IEEE-SP Int.Symp. TFTA, 1998, Pittsburgh, 1998, pp.481-484.
- [280] M.F. Erden, H.M. Ozatkas, M.A. Kutay: "Filtering in consecutive fractional Fourier transform domains - a method to synthesize general linear systems for more efficient digital and optical implementations", EUROSIP'98, Rhode island, Greece, 1998, pp.1753-1756.
- [281] M.F. Erden, M.A. Kutay, H.M. Ozatkas: "Repeated filtering in consecutive fractional Fourier transform domains and its application to signal restoration", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.5, May 1999, 1458-1462.
- [282] A.I. Zayed: "On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, No.12, Dec.1996, pp.310-311.
- [283] L.B. Almeida: "Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.4, No.1, Jan.1997, pp.15-17.
- [284] H.M. Ozatkas, M.A. Kutay: "Introduction to the fractional Fourier transform and its applications", Advances in Imaging and Elect. Physis, Vol.106, Chp.4, 1999, Academic Press, ed. P.W. Hawkes, pp.223-291.
- [285] H.M. Ozatkas, N. Erkaya, M.A. Kutay: "Effects of fractional Fourier transform on time-frequency distributions belonging to the Cohen class", IEEE Sig.Proc.Let., Vol.3, 1996, pp.10-11.
- [286] Lj. Stanković, I. Djurović: "Relationship between the ambiguity function and fractional Fourier transform", Ann. des Telec., Vol.53, No.7/8, July/Aug. 1998, pp.316-319.
- [287] S. Stanković: "Wignerova distribucija u obradi signala", MS teza, Univerzitet Zagreb, Hrvatska 1992.
- [288] I. Djurović: "Transformacija koordinata L-Wignerove distribucije", XLII ETRAN, Vol.I, Vrnjačka Banja, 1998, pp.239-242.

- [289] B. Harris: "Computing time-frequency distributions", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.39, No.3, Mar.1991, pp.727-729.
- [290] A. Papoulis: "Ambiguity function in Fourier optics", *J.Opt.Soc.Amer.*, Vol.64, No.6, Jun.1974, pp.779-788.
- [291] P.J. Loughlin, B. Taccr: "Instantaneous frequency and the conditional mean frequency of a signal", *Sig.Proc.*, Vol.60, 1997, pp.153-162.
- [292] A. Goldenshluger, A. Nemirovski: "On spatial adaptive estimation of nonparametric regression", *Mathematical methods of Statistics*, Vo.6, No.2, pp.135-170, 1997.
- [293] A. Goldenshluger, A. Nemirovski: "Adaptive de-noising of signals satisfying differential inequalities", *IEEE Trans.Inf.Th.*, Vol.43, No.3, 1997, pp.873-889.
- [294] B. Barkat, B. Boashash, Lj. Stanković: "Adaptive window in the polynomial Wigner-Ville distributions for the instantaneous frequency estimation of *FM* signal in additive Gaussian noise", in *Proc. IEEE ICASSP*, 1999, pp.1317-1320.
- [295] B. Krstajić, Lj. Stanković, Z. Uskoković, I. Djurović: "Combined adaptive system for identification of unknown systems with varying parameters in a noisy environment", in *Proc. IEEE ICECS'99*, Vol.2, Sept.99, Pafos, Cyprus, pp.745-748.
- [296] B. Krstajić, Lj. Stanković, Z. Uskoković, I. Djurović: "Identification of unknown systems with varying parameters in a noisy environment with new *VS LMS* algorithm", poslat za objavljivanje.
- [297] V. Katkovnik: "Robust *M*-periodogram", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.46, No.11, Nov.1998, pp.3104-3109.
- [298] V. Katkovnik: "Robust *M*-estimates of the frequency and amplitude of a complex-valued harmonic", *Sig.Proc.*, Vol.77, No.1, pp.71-84, August 1999.
- [299] Lj. Stanković, V. Katkovnik, I. Djurović: "Adaptive order and window length higher order time-frequency distributions in the *IF* estimation", *IEEE Proc. of ICECS'99*, Septembar 1999, Paphos, Kipar, Vol.II, pp.1077-1080.
- [300] D.F. Andrews, P.J. Bickel, F.R. Hampel, P.J. Huber, W.H. Rogers, J.W. Tukey: "Robust estimation of location: Survey and advances", *Princeton Univ.Press*, Prinstone, N.J., 1972.
- [301] P.J. Huber: "Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo", *Ann.Math.Statist.*, Vol.1, No.5, 1973, pp.799-821.
- [302] P. Petrus: "Robust Huber adaptive filter", *IEEE Trans.Sig.Proc.*, Vol.47, No.4, Apr.1999, pp. 1129-1133.
- [303] C.L. Nikias, M. Shao: "Signal processing with alpha-stable distributions and applications", *New York, Wiley*, 1995.
- [304] V. Katkovnik, I. Djurović, Lj. Stanković: "Instantaneous frequency estimation using robust spectrogram with varying window length", prihvaćen za objavljivanje, *Archiv fur Elektrotechnik*, 1999.
- [305] I. Djurović, V. Katkovnik, Lj. Stanković: "Instantaneous frequency estimation using adaptive robust *M*-periodogram", *Proc. of IEEE WISP 99*, Budimpešta, Septembar 1999, pp.176-181.
- [306] V. Katkovnik: "On multiple window local polynomial approximation with varying adaptive bandwidths", in *Proc. COMPSTAT*, pp.353-358, 1998.
- [307] A.B. Tsybakov: "Robust reconstruction of functions by the local-approximation methods", *Problems of Information Transmission*, Vol.22, 1986, pp.133-146.
- [308] P.J. Huber: "Robust statistics", *John Wiley&Sons Inc.*, 1981.
- [309] B.T. Poljak, J.Z. Tsyppkin: "Robust identification", *Automatika*, Vol.16, pp.53-63, 1980.



- [310] X. Wang, H.V. Poor: "Robust multiuser detection in non-Gaussian channels", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.2, Feb.1999, pp.289-305.
- [311] Lj. Stanković, I. Djurović, S. Stanković: "The robust Wigner distribution", Proc. of IEEE ICASSP'2000, Istanbul, prihvaćen za publikovanje.
- [312] Lj. Stanković: "On the time-frequency analysis based filtering", Ann.Telec., prihvaćen, 2000.
- [313] Lj. Stanković, S. Stanković, I. Djurović: "Space/spatial-frequency analysis based filtering", IEEE Trans.Sig.Proc., prihvaćen za publikovanje. 2000.
- [314] S. Stanković, I. Djurović, V. Vuković, Lj. Stanković: "Adaptivni izbor prozora u Wignerovoj distribuciji slike zahvaćene šumom", XLII konferencija ETRAN, Vol.I, Vrnjačka Banja 1998, pp. 236-238.
- [315] S. Stanković, Lj. Stanković, I. Djurović, V. Vuković: "Adaptivni algoritam za filtriranje slike", XIII Info-tek, Vrnjačka Banja, Jun 1998, pp. 225-229.
- [316] Lj. Stanković, S. Stanković, I. Djurović: "On the space-varying filtering", Telsiks'99, Oktobar 1999, Niš, Jugoslavija, Vol.1, pp.460-463.
- [317] Lj. Stanković, I. Djurović, S. Stanković: "Primjena vremensko-frekvencijskih transformacija u prostorno-promjenljivom filtriranju", zbornik radova IT'99, Žabljak, pp.36-39.
- [318] L. Jacobson, H. Wechsler: "Joint space/spatial-frequency representation", Sig.Proc., Vol.14, 1988, pp.37-68.
- [319] L.A. Zadeh: "Time-varying networks - I", Proc. IRE, Vol.49, pp.1488-1503, 1961.
- [320] G.F. Boudreaux-Bartels, T.W. Parks: "Time-varying filtering and signal estimation using the Wigner distribution", IEEE Trans. ASSP, Vol.34, No.6, June 1986, pp.442-451.
- [321] R.G. Shenoy, T.W. Parks: "The Weyl correspondence and time-frequency analysis", IEEE Trans. Sig.Proc., Vol.42, No.2, Feb.1994, pp.318-331.
- [322] A.J.E.M. Janssen: "Wigner weight functions and Weyl symbols of nonnegative definite linear operators", Philips J. Res., Vol.44, 1989, pp.7-42.
- [323] H. Kirchauer, F. Hlawatsch, W. Kozek: "Time-frequency formulation and design of nonstationary Wiener filters", Proc.Int.Conf.ASSP, pp.1549-1552, 1995.
- [324] F. Hlawatsch, W. Kozek: "Time-frequency projection filters and time frequency signal expansions", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.42, No.12, Dec.1994.
- [325] G. Matz, F. Hlawatsch, W. Kozek: "Generalized evolutionary spectra analysis and the Weyl spectrum of nonstationary random processes", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.45, No.6, June 1997, pp.1520-1534.
- [326] M.K. Emresoy, A. El-Jaroudi: "Evolutionary spectrum estimation by positivity constrained deconvolution", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.47, No.3, Mar.1999, pp. 889-893.
- [327] A.S. Kayhan, A. El-Jaroudi, L.F. Chaparro: "Evolutionary periodogram for nonstationary signals", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.42, No.5, June 1994, pp.1527-1536.
- [328] C.S. Detka, A. El-Jaroudi: "The generalized evolutionary spectrum", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.44, No.11, Nov.1996, pp.2877-2881.
- [329] H.A. Khan, L.F. Chaparro: "Non-stationary Wiener filtering based on evolutionary spectral theory", In Proc.ICASSP'97, Munchen, Germany 1997.
- [330] W. Kozek: "Time-frequency processing based on the Wigner-Weyl framework", Sig.Proc., Vol.29, No.1, pp.77-92, Oct.1992.
- [331] W. Kozek: "On the transfer function calculus for underspread LTV channels", IEEE Trans.Sig.Proc., Vol.45, No.1, Jan.1997, pp.219-223.

- [332] H.L. Van Trees: "Detection, estimation and modulation theory", New York:Wiley, 1968.
- [333] S.-W. Lee, J.-S. Lim, S.-J. Back, K.-M. Sung: "Time-varying frequency estimation by  $VFF$  Kalman filtering", Sig.Proc., Vol.77, 1999, pp.343-347.
- [334] E.T. Copson: "Asymptotic expansions", Cambridge University Press, New York, 1967.
- [335] F. Hlawatsch, G. Matz, H. Kirchauer, W. Kozek: "Time-frequency formulation and design of time-varying optimal filters", Tech.Rep.97-1, Vienna Univ. of Tech., Jan.1997.
- [336] W. Kozek, F. Hlawatsch, H. Kirchauer, U. Trautwein: "Correlative time-frequency analysis of nonstationary random processes", Proc. IEEE Int.Symp. TFTA, Philad., PA, pp.417-420, Oct.1994.
- [337] P. Flandrin, W. Martin: "The Wigner-Ville spectrum of nonstationary processes", in The Wigner distribution: Theory and applications in signal processing, eds. W. Mecklenbrauker, F. Hlawatsch, Elsevier, 1997.
- [338] N. Nikolaidis, I. Pitas: "Robust image watermarking in the spatial domain", Sig.Proc., Vol.66, 1998, pp.385-403.
- [339] G. Voyatzis, I. Pitas: "Chaotic watermarks in the spatial digital image domain", preprint.
- [340] P. Bas, J.-M. Chassery, F. Davoine: "Self-similar based image watermarking", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.2277-2280.
- [341] G. Voyatzis, I. Pitas: "Embedding robust watermarks by chaotic mixing", Proc. of ICASSP '97, Munchen, Germany.
- [342] G. Voyatzis, I. Pitas: "Protecting digital image copyrights: A framework", IEEE Computer Graphics&Applications, Vol.16, No.1, Jan. 1999, pp.18-24.
- [343] G. Voyatzis, I. Pitas: "Digital image watermarking using mixing systems", Computer&Graphics, Vol.22, No.3, 1998.
- [344] J.J.K. O'Ruanaidh, T. Pun: "Rotation, scale and translation invariant spread spectrum digital watermarking", Sig.Proc., Vol.66, No.3, May 1998, pp.283-302.
- [345] F. Deguillaume, G. Csurka, J.J.K. O'Ruanaidh, T. Pun: "Robust 3d dft video watermarking", in SPIE Electronic Imaging'99, San Jose, USA, Jan.1999.
- [346] G. Csurka, F. Deguillaume, J.J.K. O'Ruanaidh, T. Pun: "A Bayesian approach to affine transformation resistant image and video watermarking", IWIII'99, Dresden, Germany.
- [347] M. Barni, F. Bartolini, V. Capellini, A. Piva: "A DCT-domain system for robust image watermarking", Sig.Proc., Vol.66, No.3, May 1998, pp.357-372.
- [348] M. Barni, F. Bartolini, V. Capellini, A. Piva, F. Rigacci: "A M.A.P. identification criterion for DCT-based watermarking", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.17-20.
- [349] A. Piva, M. Barni, F. Bartolini, V. Capellini: "DCT-based watermark recovering without restoring to the uncorrupted original image", IEEE Proc. of ICIP'97, Santa Barbara, CA. Oct.1997, pp.520-523.
- [350] I. Rakočević, B. Reljin, P. Kostić, I. Reljin: "Secure transfer of several images using the same frame", Telsiks'99, Niš, 1999.
- [351] I.J. Cox, J. Kilian, F.T. Leighton, T. Shamoon: "Secure spread spectrum watermarking for multimedia", IEEE Trans.Im.Proc., Vol.6, No.12, Dec.1997, pp.1673-1687.
- [352] D. Tzovaras, N. Karagiannis, M.G. Strinzis: "Robust image watermarking in the subband or discrete cosine transform domain", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.2285-2288.
- [353] G. Nicchiotti, E. Ottaviani: "Non-invertible statistical wavelet watermarking", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.2289-2292.

- [354] L. Xie, G.R. Arce: "A blind wavelet based digital signature for image authentication", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.21-24.
- [355] J.J.K. O'Ruanaidh, W.J. Dowling, F.M. Bowland: "Phase watermarking of digital image", Proc. of IEEE ICIP'96, Laussane, Switzerland, Sept.1996, Vol.III, pp.239-242.
- [356] A. Herrigel, J.J.K. O'Ruanaidh, H. Peterson, S. Pereira, T. Pun: "Secure copyright protection technique for digital image", in Proc. IWIH'98, 1998.
- [357] S. Pereira, J.J.K. O'Ruanaidh, T. Pun: "Secure robust digital watermarking using the lapped orthogonal transform", available on-line, <http://cuiwww.unige.ch>.
- [358] A.G. Bors, I. Pitas: "Embedding parametric digital signatures in images", EUROSIP'98, Rhode, Greece.
- [359] A. Bors, I. Pitas: "Image watermarking using *DCT* domain constrain", IEEE Proc. of ICIP'96, Lausanne, Switzerland, Sept.1998, pp.231-234.
- [360] Digimarc Batch Embedding Tool c01.00.13 and Readmarc v1.5.8.
- [361] SureSign Server version 1.94.
- [362] DCT, Digital copyright technologie Ltd.
- [363] <http://cosimo.die.unifi.it/~piva/Watermarking/watermark.html>.
- [364] EIKONA, AIIA Lab, Deptment of Informatics, University Aristotle Thessaloniki, sa dodatkom EIKONAMARK.
- [365] C. Busch, K. Nahrstedt, I. Pitas: "Image security", IEEE Comp. Graph.&Appl., Vol.19, No.1, pp.18-23, Jan.1999.
- [366] B. Macq, I. Pitas: "Editorial: Special issue on watermarking", Sig.Proc., Vol.66, No.3, May 1998, pp.281-282.
- [367] Special issue identification&protection of multimedia information, Proc.IEEE, Vol.87,No.7, July 1999.
- [368] Special issue on watermarking, Signal Processing, Vol.66, No.3, 1998.
- [369] G. Voyatzis, N. Nikolaidis, I. Pitas: "Digital watermarking: An overview", EUROSIP'98, Rhode, Greece, Sept. 1998, pp.9-12.
- [370] G.C. Langelaar, R.L. Lagendijk, J. Biemond: "Removing spatial spectrum watermarks by non-linear filtering", EUROSIP'98, Rhode, Greece, pp.2281-2284.
- [371] F.A.P. Petitcolas, R.J. Anderson, M.G. Kuhn: "Attacks on copyright marking system", IWIH'98, pp.219-239.
- [372] F.A.P. Petitcolas: Stirmark 3.1 (<http://www.cl.cam.ac.uk/~fapp2/watermarking/stirmark/>).
- [373] M. Kutter, F.A.P. Petitcolas: "A fair benchmarking for image watermarking systems", Electronic Imaging'99, Vol.3657, Jan.1999.
- [374] F.A.P. Petitcolas, R.J. Anderson: "Evaluation of copyright marking systems", IEEE Multimedia Systems (ICMCS'99), Florence, Italy, June 1999.
- [375] R. Anderson, F. Petitcolas: "On the limits of steganography", dostupno na adresi (<http://www.cl.cam.ac.uk/~fapp2/watermarking/stirmark/>).
- [376] Anonymus (zgvan.bbs@bbs.ntu.edu.tw): Learn cracking IV - another weakness of PictureMarc.
- [377] M.D. Swanson, B. Zhu, A.H. Tewfik, L. Boney: "Robust audio watermarking using perceptual masking", Sig.Proc., Vol.66, 1998, pp.337-355.

- [378] P. Bassia, I. Pitas: "Robust audio watermarking in the time domain", EUSIPCO'98, Rhode 1998, pp.25-28.
- [379] F. Hartung, B. Girod: "Digital watermarking of *MPEG* – 2 coded video in the bitstream domain", ICASSP'97, Munchen, Germany.
- [380] F. Hartung, B. Girod: "Watermarking in uncompressed and compressed video", Sig.Proc., Vol.66, 1998, pp.283-302.
- [381] C. Busch, W. Funk, S. Wolhusen: "Digital watermarking: from concept to real-video applications", IEEE Comp. Graph.&Appl., Vol.19, No.1, pp.25-35, Jan.1999.
- [382] B.-L. Yeo, M.M. Yeung: "Watermarking 3D objects for verification", IEEE Comp. Graph.&Appl., Vol.19, No.1, pp.36-45, Jan.1999.
- [383] O. Benedes: "Geometry-based watermarking of 3D models", IEEE Comp. Graph.&Appl., Vol.19, No.1, pp.46-55, Jan.1999.
- [384] T. Kalker, J.P. Linnartz, G. Deporve, M. Maes: "On the reliability of detecting electronic watermarks in digital images", EUROSIP'98, Rhode, Greece, 1998, pp.13-16.
- [385] A.Z. Tirkel, C.F. Osborne, T.E. Hall: "Image and watermark registration", Sig.Proc., Vol.66, 1998, pp.373-383.
- [386] H. Kinoshita, M. Satoh: "Generation of the signature with structured information of the image", EUROSIP'98, Rhode, Greece, 1998, pp.2273-2276.
- [387] S. Stanković, I. Djurović: "Deterministički signali u zaštiti autorskih prava nad multimedijalnim podacima", XLIII konferencija ETRAN, Zlatibor 1999, Vol.III, pp.142-145.
- [388] I. Djurović, S. Stanković, I. Pitas: "Digitalni watermarking u FRFT domenu", Infofest'99, Budva, pp.60-65.
- [389] S. Stanković, I. Djurović, I. Pitas: "Watermarking in the space/spatial-frequency domain using two-dimensional Radon Wigner distribution", prihvaćen za publikovanje, IEEE Trans.Im.Proc., 1999.
- [390] I. Djurović, S. Stanković, I. Pitas, Lj. Stanković: "Generalization of the Fourier domain watermarking to the space/spatial-frequency domain", poslat za publikovanje.
- [391] S. Pereira, T. Pun: "Fast robust template matching for affine resistant image watermarks", available on-line, [http://cuiwww.unige.ch/~vision/Publications/ThierryPun\\_publications\\_refpap.html](http://cuiwww.unige.ch/~vision/Publications/ThierryPun_publications_refpap.html), 1999.
- [392] S. Pereira, T. Pun: "Robust template matching for affine resistant image watermarks", IEEE Trans.Im.Proc., prihvaćen za publikovanje, 1999.
- [393] S. Pereira, J.J.K. O'Ruanaidh, F. Deguillaume, G. Csurka, T. Pun: "Template based recovery of Fourier-based watermarks using log-polar and log-log maps", Proc.of IEEE ICMS'99, Vol.1, pp.870-974, Florence, Italy, 7.-11. June 1999.
- [394] J.J.K. O'Ruanaidh, S. Pereira: "A secure robust digital image watermarks", available on-line, [http://cuiwww.unige.ch/~vision/Publications/ThierryPun\\_publications\\_refpap.html](http://cuiwww.unige.ch/~vision/Publications/ThierryPun_publications_refpap.html), 1999.
- [395] G. Voyatzis, I. Pitas: "Chaotic watermarks for embedding in the spatial digital image domains", Proc.of IEEE ICIP'98, Chicago, Illinois, USA, 4.-7.Oct.1998.

# **PRILOG**

---



## PRILOG

Osobina	Uslov
O1. Realna vrijednost	U1. $P_x(t, \omega) = P_x^*(t, \omega)$
O2. Vremenska invarijantnost	U2. $P_{x'}(t, \omega) = P_x(t - t_0, \omega)$ gdje je $x'(t) = x(t - t_0)$
O3. Frekvencijska invarijantnost	U3. $P_{x'}(t, \omega) = P(t, \omega - \omega_0)$ gdje je $x'(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}$
O4. Trenutna snaga signala	U4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, \omega) d\omega =  x(t) ^2$
O5. Spektralna gustina snage	U5. $\int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, \omega) dt =  X(\omega) ^2$
O6. Vremenski moment	U6. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n P_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t^n  x(t) ^2 dt$
O7. Frekvencijski moment	U7. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n P_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n  X(\omega) ^2 d\omega$
O8. Skaliranje	U8. $P_{x'}(t, \omega) = P_x(at, \frac{\omega}{a})$ za $x'(t) = \sqrt{ a }x(at)$ , $a \neq 0$
O9. Trenutna frekvencija	U9. $\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega P_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, \omega) d\omega} = \omega_1(t) = \frac{d}{dt} \arg[x(t)]$
O10. Grupno kašnjenje	U10. $\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t P_x(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, \omega) dt} = t_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg[X(\omega)]$
O11. Vremensko ograničenje	U11. Ako je $x(t) = 0$ za $t \notin [t_1, t_2]$ tada $P_x(t, \omega) = 0$ za $t \notin [t_1, t_2]$
O12. Frekvencijsko ograničenje	U12. Ako je $X(\omega) = 0$ za $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$ tada $P_x(t, \omega) = 0$ za $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$
O13. Moyalova formula	U13. $\frac{1}{2\pi} \langle P_{x_1, y_1}(t, \omega), P_{x_2, y_2}(t, \omega) \rangle = \langle x_1(t), x_2(t) \rangle \langle y_1(t), y_2(t) \rangle^*$ gdje izraz označava unutrašnji proizvod $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$ odnosno za funkciju dvije promjenljive $\langle x(t, \omega), y(t, \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \omega)y^*(t, \omega) dt d\omega$
O14. Konvolucija	U14. $P_{x'}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_h(t - t_0, \omega) P_x(t_0, \omega) dt_0$ gdje je $x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_0)x(t_0)dt_0$
O15. Proizvod	U15. $P_{x'}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_h(t, \omega - \omega_0) P(t, \omega_0) d\omega_0$ gdje je $x'(t) = x(t)h(t)$
O16. Fourierova transformacija	U16. $P_{x'}(t, \omega) = P_x(-\omega/c, ct)$ gdje je $x'(t) = \sqrt{ c }X(ct)$ , $c \neq 0$
O17. Chirp konvolucija	U17. $P_{x'}(t, \omega) = P_x(t - \omega/c, \omega)$ gdje je $x'(t) = x(t) * \sqrt{ c }e^{jct^2/2}$
O18. Chirp proizvod	U18. $P_{x'}(t, \omega) = P(t, \omega - ct)$ gdje je $x'(t) = x(t)e^{jct^2/2}$

Tabela 1: Željene osobine vremensko-frekvencijskih predstavljanja.

Distribucija	$(\theta, \tau)$	$(t, \tau)$
Spektrogram ( <i>SPEC</i> )	$A_w(-\theta, -\tau)$	$w(-t - \tau/2)w^*(-t + \tau/2)$
Wignerova ( <i>WD</i> )	1	$\delta(t)$
Pseudo WD	$w(\tau/2)w^*(-\tau/2)$	$\delta(t)w(\tau/2)w^*(-\tau/2)$
Rihaczekova ( <i>RD</i> )	$e^{j\theta\tau/2}$	$\delta(t - \tau/2)$
Generalizovana WD	$e^{-j\alpha\theta\tau}$	$\delta(t + \alpha\tau)$
Pseudo-zaobljena WD	$f(\tau)H(\theta)$	$f(\tau)h(t)$
Pageova ( <i>PD</i> )	$e^{-j\theta \tau /2}$	$\delta(t +  \tau /2)$
Levinova ( <i>LD</i> )	$e^{j\theta \tau /2}$	$\delta(t -  \tau /2)$
Realna WD	$\cos(\theta\tau/2)$	$\frac{\delta(t+\tau/2)+\delta(t-\tau/2)}{2}$
Born-Jordanova ( <i>BJD</i> )	$\frac{\sin(\theta\tau/2)}{\theta\tau/2}$	$\frac{1}{ \tau }$ za $ t/\tau  < 1/2$ drugdje 0
SINC	$\text{rect}(\theta\tau/\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha t/2\tau)}{t\pi}$
Choi-Williamsova ( <i>CWD</i> )	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma^2}$	$\frac{\sigma}{4\pi \tau }e^{-\sigma^2(t/\tau)^2/4}$
Gen. ekspon. ( <i>GED</i> )	$e^{-(\theta/\theta_0)^{2M}(\tau/\tau_0)^{2N}}$	$IFT_\theta\{e^{-(\theta/\theta_0)^{2M}(\tau/\tau_0)^{2N}}\}$
Optimalni auto član ( <i>OD</i> )	$e^{- \theta\tau /\sigma}$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2 \tau/\sigma }{\tau^2/\sigma^2 + t^2}$
Zang-Satto ( <i>ZSD</i> )	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma^2} \cos(\theta\tau/2)$	$\frac{c_T(t+\tau/2, \tau) + c_T(t-\tau/2, \tau)}{2}$
Butterworthova ( <i>BUD</i> )	$\frac{1}{1+(\tau/\tau_0)^{2M}(\theta/\theta_0)^{2N}}$	$IFT_\theta\{\frac{1}{1+(\tau/\tau_0)^{2M}(\theta/\theta_0)^{2N}}\}$
Besselova ( <i>BESD</i> )	$\frac{J_1(2\pi\alpha\theta\tau)}{\pi\alpha\theta\tau}$	$\frac{2}{\pi\alpha \tau } \sqrt{1 - (t/\alpha\tau)^2} \text{rect}(\frac{t}{2\alpha\tau})$
Zhao-Atlas-Marks ( <i>ZAMD</i> )	$ \tau  \frac{\sin(\theta\tau/2)}{\theta\tau/2} w(\tau)$	$\begin{cases} w(\tau) &  t/\tau  < 1/2 \\ 0 &  t/\tau  > 1/2 \end{cases}$
S-metod ( <i>SM</i> )	$P(-\frac{\theta}{2}) *_{\theta} A_w(-\theta, -\tau)$	$2w(-t - \frac{\tau}{2})w^*(-t + \frac{\tau}{2})p(2t)$

Tabela 2: Vremensko-frekvencijske distribucije i njihova jezgra u ambiguity i time-lag domenu.

Osobina	Ograničenje jezgra
O1: Realna vrijednost	U1: $c(\theta, \tau) = c^*(-\theta, -\tau)$
O2: Vremenska invarijantnost	U2: svako $c(\theta, \tau)$
O3: Frekvencijska invarijantnost	U3: svako $c(\theta, \tau)$
O4: Trenutna snaga signala	U4: $c(\theta, 0) = 1$
O5: Spektralna gustina snage	U5: $c(0, \tau) = 1$
O6: Vremenski moment	U6: $c(\theta, 0) = 1$
O7: Frekvencijski moment	U7: $c(0, \tau) = 1$
O8: Skaliranje	U8: $c(\theta, \tau) = c(a\theta, \tau/a)$
O9: Trenutna frekvencija	U9: $c(\theta, 0) = 1$ i $\frac{\partial c(\theta, \tau)}{\partial \tau} \Big _{\tau=0} = 0$
O10: Grupno kašnjenje	U10: $c(0, \tau) = 1$ i $\frac{\partial c(\theta, \tau)}{\partial \theta} \Big _{\theta=0} = 0$
O11: Vremensko ograničenje	U11: $c_T(l, \tau) = 0$ za $ l/\tau  > 1/2$
O12: Frekvencijsko ograničenje	U12: $C_\Omega(\theta, \omega) = 0$ za $ \omega/\theta  > 1/2$
O13: Moyalova formula-Unitarnost	U13: $ c(\theta, \tau) ^2$
O14: Konvolucija	U14: $c(\theta, \tau_1)c(\theta, \tau_2) = c(\theta, \tau_1 + \tau_2)$
O15: Proizvod	U15: $c(\theta_1, \tau)c(\theta_2, \tau) = c(\theta_1 + \theta_2, \tau)$
O16: Fourierova transformacija	U16: $c(\theta, \tau) = c(c\tau, -\theta/c)$
O17: Chirp konvolucija	U17: $c(\theta, \tau) = c(\theta, \tau - \theta/c)$
O18: Chirp proizvod	U18: $c(\theta, \tau) = c(\theta - c\tau, \tau)$

Tabela 3: Ograničenja koja treba da zadovolji jezgro da bi bile zadovoljene pojedine željene osobine vremensko-frekvencijskih predstavljanja.

Distribucija	Osobine koje zadovoljava
<i>SPEC</i>	O1-O3, P, K
<i>WD</i>	O1-O18
<i>PWD</i>	O1-O4, O6, O9: $ w(0)  = 1$
<i>RD</i>	O2-O8, O11-O15
<i>GWD</i>	O2-O8, O11, O12: $ \alpha  \leq 1/2$ , O13-O15, i ostale za $\alpha = 0$
<i>PSWD</i>	O1: $w(t) \in R$ , O2-O3
<i>PD</i>	O1-O7, O11, O13-O15
<i>LD</i>	O1-O7, O11, O13-O15
<i>RWD</i>	O1-O12, O16
<i>BJD</i>	O1-O12, O16, K
<i>SINC</i>	O1-O8, O16, K
<i>CWD</i>	O1-O10, O16, K
<i>GED</i>	O1-O7, O8: $M = N$ , O9: $M \geq 1/2$ , O10: $N \geq 1/2$ , O16, $M = N$ , K
<i>OD</i>	O1-O10, O16, K
<i>ZSD</i>	O1-O8, O16, K
<i>BUD</i>	O1-O7, O8: $M = N$ , O9: $M \geq 1/2$ , O10: $N \geq 1/2$ , O16, $M = N$ , K
<i>BESD</i>	O1-O8, O11-O12: $ \alpha  \leq 1/2$ , O16, K
<i>ZAMD</i>	O1: prozor paran i realan, O2-O3, O11, K
<i>SM</i>	O1-O3, K

Tabela 4: Distribucije Cohenove klase i osobine koje zadovoljavaju (P - pozitivnost, K - potiskivanje kros članova).

Dist.	Auto-član	Sirina auto-člana	$C(0)$
<i>SPEC</i>	$\frac{2\pi}{a} w^2(\omega/a)$	$aT$	$\frac{2\pi}{a}$
<i>PWD</i>	$FT\{w^2(\tau/2)\}$	$k/T$	$mT$
<i>BJD</i>	$\frac{2\pi}{a} \omega [S(\frac{\omega^2}{2a}) - C(\frac{\omega^2}{2a})] + \sqrt{\frac{8\pi}{a}} \sin(\frac{\omega^2}{2a} + \frac{\pi}{4})$	3.3	$2.5/\sqrt{a}$
<i>SINC</i>	$2 \frac{\sin(\omega\sqrt{\alpha/2a})}{\omega\sqrt{\alpha/2a}}$	$2\pi\sqrt{2a/\alpha}$	$\sqrt{2\alpha/a}$
<i>CWD</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\tau^4/\sigma^2} e^{-j\omega\tau} d\tau$	$2.8\sqrt{2\pi\frac{a}{\sigma}} = 7.02\sqrt{\frac{a}{\sigma}}$	$1.8\sqrt{\sigma/a}$
<i>ZSD</i>	$\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\omega^4/\alpha^2\sigma^2} \cos(\frac{\omega^2}{2a} - \frac{\pi}{4})$	$4.3\sqrt{a}$	$\sqrt{\pi/a}$
<i>BUD</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(a\tau^2/\sigma)^{2N}} e^{-j\omega\tau} d\tau$	$h_1(N)\sqrt{\frac{a}{\sigma}}, h_1(N) \geq 2\pi$	$h_2(N)\sqrt{\frac{\sigma}{a}}, h_2(N) \geq 2$
<i>GED</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2\tau^4/\sigma^2)^N} e^{-j\omega\tau} d\tau$	$f_1(N)\sqrt{\frac{a}{\sigma}}, f_1(N) \geq 2\pi$	$f_2(N)\sqrt{\frac{\sigma}{a}}, f_2(N) \geq 1.8$
<i>BESD</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(2\alpha\pi a\tau^2)}{\alpha\pi a\tau^2} e^{-j\omega\tau} d\tau$	$10.5\sqrt{a\alpha}$	$1.15/\sqrt{a\alpha}$
<i>ZAMD</i>	$\frac{2\pi}{a} \left  \frac{1}{2} - \left  K(\frac{\omega^2}{2a}) \right ^2 *_{\omega} W(\omega) \right $	$2.56\sqrt{a}$	$\pi/a$
<i>SM</i>	$FT\{w^2(\tau/2)\}$	$k/T$	$mT$

Tabela 5: Auto-članovi distribucija Cohenove klase sa širinom i maksimalnom vrijednošću auto-člana. Za *GED* i *BUD* rezultati su dati za  $M = N$ .

Namjena	Funkcije
Definisanje trenutne amplitude	amexpols, amexpo2s, amgauss, amrect, amtriang
Definisanje trenutne frekvencije	fmconst, fmhyp, fmlin, fmodany, fmpar, fmpower, fmsin, gdpower
Definisanje signalnih oblika	altes, anaask, anabpsk, anafsk, anapulse, anaqpsk, anasing, anastep, atoms, dopnoise, doppler, klauder, mexhat, window
Aditivni šumovi	noisecg, noisecu
Modifikovanje signala	scale
Procesiranje u vrem. domenu	ifestar2, instfreq, loctime
Procesiranje u frek. domenu	fmt, ifmt, locfreq, sgrpdelay
Linearne transformacije	tfrgabor, tfrstft
Cohenova klasa	tfrbj, tfrbud, tfrbw, tfrgrd, tfrmh, tfrmhs, tfrmmce, tfrpage, tfrpmh, tfrppage, tfrpwv, tfrri, tfrriidb, tfrriidh, tfrriidn, tfrriidt, tfrsp, tfrspwv, tfrwv, tfrzam
Affine klasa	tfrbert, tfrdfla, tfrscal, tfrspaw, tfrunter
Reassignment distribucije	tfrgab, tfrmsc, tfrpmh, tfrppag, tfrpwv, tfrsp, tfrspwv
Ambiguity funkcija	ambifunb, ambifuwb
Postprocesiranje	friedman, holder, htl, margtfr, midscomp, momtfr, momttfr, plotsid, renyi, ridges, tfrideal
Vizuelizacija	plotifl, tfrqview, tfrview, tfrparam, tfrsave

Tabela 6: Funkcije MATLAB Toolbox-a za vremensko-frekvencijsku analizu.

Predefinisani signali (signal.m)
$x(t) = e^{-150(t+0.3)^2 - j12\pi t} + e^{-150(t+0.6)^2 + j14\pi t} + e^{-150(t-0.3)^2 + j18\pi t} + e^{-150(t-0.7)^2 + j10\pi t}$
$x(t) = e^{j8\pi t^2}$
$x(t) = e^{j32\cos(\pi t)}$
$x(t) = \cos(4\pi(t+2)^2)$
$x(t) = e^{j4\pi t^2} \cos(16\pi t)$
$x(t) = e^{j4\pi(t+2)^2} + e^{j[-8\sin(1.5\pi(t+1)) - 12\pi t]}$
$x(t) = e^{-12\pi t^2} + e^{-j[4\cos(2\pi t) + 12\pi(t+1.5)^2]}$
$x(t) = e^{-4t^2} e^{j(180\pi t^3 + 50\pi(t+0.5))} + \frac{1}{2} e^{-4t^2} e^{j20\pi(t+0.5)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-40t^2} e^{j[50\pi(t+0.5)^2 + 150\pi(t+0.5)]}$
$x(t) = e^{-j8\pi(2-t)^2} + e^{j[12\sin(1.5\pi(t+1)) - 20\pi t]}$

Tabela 7: Neki od predefinisanih signala koji se mogu koristiti u virtuelnom instrumentu.

	Wignerova distribucija	S-metod
Kompleksnih množenja	$\frac{N_w}{2}(4 + \log_2 N_w)$	$\frac{N_w}{2}(3 + L_d)$
Kompleksnih sabiranja	$N_w \log_2 2N_w$	$\frac{N_w}{2}(6 + L_d)$

Tabela 8: Broj numeričkih operacija kod Wignerove distribucije i S-metoda.



Signal	FRFT za ugao $\alpha$
$\delta(t - \tau)$	$\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{\tau^2+u^2}{2}\cot\alpha - j\tau u \csc\alpha}, \alpha \neq k\pi$
1	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2}{2}\tan\alpha}, \alpha - \pi/2 \neq k\pi$
$e^{j\omega t}$	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2+u^2}{2}\tan\alpha + j\omega u \sec\alpha}, \alpha - \pi/2 \neq k\pi$
$e^{-\tau^2/2}$	$e^{-u^2/2}$
$e^{jc\tau^2/2}$	$\sqrt{\frac{1+j\tan\alpha}{1+c\tan\alpha}} e^{j\frac{u^2}{2}\frac{c-\tan\alpha}{1+c\tan\alpha}}, \alpha - \arctan c - \pi/2 \neq k\pi$
$e^{-c\frac{t^2}{2}}$	$\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{c-j\cot\alpha}} e^{j\frac{u^2}{2}\frac{(c^2-1)\cot\alpha}{c^2+\cot^2\alpha}} e^{-\frac{u^2}{2}\frac{c\csc^2\alpha}{c^2+\cot^2\alpha}}$

Tabela 9: Frakciona Fourierova transformacija za neke signalne oblike.

Signal	L-FRFT
$x(t - t_0)$	$X_{L,\alpha}(u - t_0 \cos \alpha) e^{j\frac{t_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\omega t_0 \sin \alpha}$
$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X_{L,\alpha}(u - \omega_0 \sin \alpha) e^{-j\frac{\omega_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j\omega \omega_0 \cos \alpha}$
$x(-t)$	$X_{L,\alpha}(-u)$
$t^{1/L} x(t)$	$X_{L,\alpha}^{L-1}(u) (u \cos \alpha + j X'_{L,\alpha}(u))^{1/L}$
1	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2}{2}\tan\alpha}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2+\omega_0^2}{2}\tan\alpha + j\omega \omega_0 \sec\alpha}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2+\omega_0^2}{2}\tan\alpha} \cos(u\omega_0 \sec\alpha)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\sqrt{1+j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2+\omega_0^2}{2}\tan\alpha} \sin(u\omega_0 \sec\alpha)$
$e^{-t^2/2}$	$e^{-\frac{u^2}{2}}$
$x(ct)$	$\left(\frac{1-j\cot\alpha}{c^2-j\cot\alpha}\right)^{\frac{1}{2L}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha\left(1-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right)} X_{L,\beta}\left(u\frac{\sin\beta}{c\sin\alpha}\right), \beta = \arctan(c^2 \tan\alpha)$
$e^{-ct^2/2}$	$\left(\frac{1-j\cot\alpha}{c^2-j\cot\alpha}\right)^{\frac{1}{2L}} e^{j\frac{u^2}{2}\frac{(c^2-1)\cot\alpha}{c^2+\cot^2\alpha}} e^{-\frac{u^2}{2}\frac{c\csc^2\alpha}{c^2+\cot^2\alpha}}$
$e^{jct^2/2}$	$\left(\frac{1-j\cot\alpha}{c^2-j\cot\alpha}\right)^{\frac{1}{2L}} e^{j\frac{u^2}{2}\frac{c\tan\alpha}{1+c\tan\alpha}}$

Tabela 10: L-FRFT nekih karakterističnih signala.

<b>Ataci Stirmark sistema</b>
Gausovsko filtriranje
Median filter
Izoštavanje
Niskopropusno filtriranje
JPEG kompresija
GIF kompresija
Resampling bez JPEG kompresije
Resampling sa JPEG kompresijom
Odsjecanje bez JPEG kompresije
Odsjecanje sa JPEG kompresijom
Distorzija duž jedne koordinate
Rotacija sa odsjecanjem
Rotacija sa skaliranjem
Brisanje redova i kolona
Obrtanje slike
Slučajna geometrijska distorzija
<b>Test slike</b>
Lena
Bear
Skyline arch
Watch
Baboon
Fishing boat

Tabela 11: Ataci Stirmark sistema.

## PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Igor Đurović

Godina rođenja 1971

E-mail igordj@ucg.ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

Naslov doktorske disertacije

Vremensko frekvencijske reprezentacije u estimaciji  
parametara signala sa primjenom u digitalnom  
watermarkingu

Prevod naslova na engleski jezik

Time-frequency representations in estimation of signal parameters, with  
application in digital watermarking

Datum odbrane

Jul 2000

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci<sup>1</sup>

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos  
doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

---

<sup>1</sup> Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

## IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la<sup>1</sup>.

### Autorstvo

Potpis doktoranda

Igor Đurović



U Podgorici 07.02.2022

---

<sup>1</sup> Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)