

U N I V E R Z I T E T " V E L J K O V L A H O V I Ć "

MAŠTINSKI FAKULTET TITOGRAD

MR MILAN VUKČEVIĆ, DIPL.ING.

PRILOG ISTRAŽIVANJU TERMO-MEHANIČKIH PARAMETARA PRI

OBRADI PRESOVANJEM

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

TITOGRAD, 1989. GODINA

62.7.135 1970-1.3



Mu IV 590

Инд. 8952

Z A H V A L J U J E M,

*Prof. Mašinskog fakulteta u Titogradu
dr Vuku Domazetoviću, na podršci, vo-
djenju i ostvarivanju uslova za reali-
zaciju ovog rada;*

*Prof. Moskovskog državnog univerziteta
P.M.Ogibalovu i njegovim saradnicima na
postojanim konsultacijama i novim znanjima.*

S A D R Ź A J

Strana

1.	OSNOVNE TEORIJSKE POSTAVKE PROBLEMA PLASTIČNOSTI	1
1.1.	METODE PRAĆENJA KRETANJA DEFORMABILNOG TIJELA	1
1.2.	ELEMENTI TEORIJE NAPONA	2
1.2.1.	Naponi u tijelu	2
1.2.2.	Glavne ravni, glavni naponi, invarijante	3
1.2.3.	Intenzitet napona	4
1.2.4.	Bivektorni zapis naponskog stanja	4
1.2.5.	Diferencijalne jednačine ravnoteže	6
1.3.	ELEMENTI TEORIJE DEFORMACIJA	7
1.3.1.	Deformacija, brzina deformacije	7
1.3.2.	Razlaganje tenzora deformacije (brzine deformacije)	9
1.3.3.	Glavne ose, glavne deformacije, invarijante.....	11
1.3.4.	Intenzitet deformacije (brzine deformacije)	11
1.4.	USLOVI POJAVE PLASTIČNIH DEFORMACIJA	12
1.5.	JEDNAČINE STANJA PLASTIČNO DEFORMISANOG TIJELA	16
1.5.1.	Male elasto-plastične deformacije	16
1.5.2.	Teorija plastičnog tečenja	18
1.6.	JEDNAČINA TOPLOPROVODNOSTI	21
1.7.	POČETNI I GRANIČNI USLOVI ZA JEDNAČINE TEORIJE PLASTIČ.	24
1.8.	TIPIČNA UPROŠĆENJA JEDNAČINA TEORIJE PLASTIČNOSTI	26
2.	INŽENJERSKO-MATEMATIČKE METODE PRIMIJENJENE TEORIJE PL.	30
2.1.	ANALITIČKE METODE	31
2.1.1.	Inženjerska metoda	31
2.1.2.	Metoda karakteristika (linija klizanja)	31
2.1.3.	Energetske metode	32
2.2.	EKSPERIMENTALNO-ANALITIČKE METODE	47

3.	PRILOZI PRIMJENE TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA METALA U OBRADI DEFORMISANJEM	49
3.1.	OSNOVNE POSTAVKE TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA METALA	49
3.1.1.	Presovanje kružnog diska konstantne debljine	56
3.1.2.	Presovanje kružnog diska konstantne debljine sa radi- jalnim rebrima	58
3.1.3.	Presovanje kružnog diska promjenljive debljine	64
3.1.4.	Presovanje kružnog diska promjenljive debljine sa radija- lnim rebrima	66
3.1.5.	Presovanje radijalno ojačanih uzoraka	69
4.	MODELIRANJE PROCESA OMD NA OSNOVU VARIJACIONOG PRINCIPA, PRIMJENOM MKE	71
4.1.	DIFERENCIJALNA I VARIJACIONA POSTAVKA PROBLEMA TEORIJE TEČENJA KRUTO-PLASTIČNOG TIJELA	71
4.2.	PENALNI VARIJACIONI METOD	76
4.3.	VARIJACIONA POSTAVKA PROBLEMA PLASTIČNOG TEČENJA POMOĆU KRIVOLINIJSKIH ORTOGONALNIH KOORDINATA	78
4.4.	VARIJACIONA POSTAVKA PLASTIČNOG TEČENJA ZA REALNO DEFORMABILNO TIJELO	81
4.5.	KINEMATSKO-TEMPERATURNNA DISKRETIZACIJA PLASTIČNOG TEČENJA U OKVIRU DVODIMENZIONALNOG MKE	83
4.6.	NAPONSKO-DEFORMACIONA DISKRETIZACIJA PLASTIČNOG TEČENJA U OKVIRU DVODIMENZIONALNOG MKE	91
4.7.	ANALIZA KONVERGENCIJE RAZMATRANOG FIZIČKI NELINEARNOG PROBLEMA	99
4.8.	DISKRETNA FORMALIZACIJA FUNKCIONALA	103
5.	TEORIJA PLASTIČNOG TEČENJA ZASNOVANA NA METODI MALOG PARAMETRA I NJENA NUMERIČKA REALIZACIJA	108
5.1.	OSNOVNE HIPOTEZE TEORIJE	108
5.2.	MODELIRANJE POGRANIČNIH SLOJEVA	115

III.

	Strana
5.2.1. Kinematsko-temperaturna ekstrapolacija slobodne površine	115
5.2.2. Predstavljanje uslova na kontaktu	124
5.2.3. Redukcija stepena slobode graničnih elemenata	132
5.3. ODREDJIVANJE SFERNIH NAPONA I POČETNIH BRZINA ZA PLASTIČNO DEFORMISANO TIJELO	141
5.4. ODREDJIVANJE TEMPERATURNOG POLJA DEFORMISANOG TIJELA	148
6. EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA	153
6.1. USLOVI I PLAN IZVODJENJA EKSPERIMENTA	153
6.2. POVEZANOST SILE I GEOMETRIJE VIJENCA KOD PRESOVANJA	157
6.3. UTICAJ PARAMETARA NA MINIMALNU SILU PRESOVANJA	158
6.4. ANALIZA OTPORA VIJENCA	161
6.5. OCJENA POPUNJENOSTI KALUPA PREKO GRADIJENATA SILE PRESOVANJA I ŠIRINE VIJENCA	165
6.6. OCJENA INTENZIVNOSTI RASTA SILE DOPRESOVANJA	167
6.7. ANALIZA UTICAJA PRIPREMKA I GEOMETRIJSKIH ODNOSA NA KARAKTERISTIČNE VELIČINE PRI PRESOVANJU	169
6.8. UTICAJ GEOMETRIJE ZA SLUČAJ IZRAŽENE ŠUPLJINE OBA KALUPA	172
6.9. ISTRAŽIVANJE GEOMETRIJE ZONE INTENZIVNOG TEČENJA U FAZI DOPRESOVANJA	175
Z A K L J U Č A K	186
L I T E R A T U R A	196
P R I L O Ž I	

UVOD I CILJ RADA

Osnovni zadatak procesa obrade metala deformisanjem jeste davanje željenog oblika metalu plastičnim deformisanjem koje prati i odgovarajuća promjena njegovih svojstava. Za ovaj vid prerade metala može se reći da je najvećim dijelom vezan za serijski tip proizvodnje, što uslovljava da se znatan dio proizvedenog metala obradjuje plastičnim deformisanjem. Iz skupa procesa obrade deformisanjem se svojom aktuelnošću i složenošću izdvaja zapreminsko oblikovanje koje karakteriše veliki broj nedovoljno istraženih problema što je posebno naglašeno kod presovanja kao tipskog predstavnika.

Teorijska istraživanja mehanike ove klase problema su prevashodno zasnovana na primjeni metoda teorije plastičnosti i to, prije svega, inženjerskog, energetskog i metoda linija klizanja. Rješenja za neophodnu deformacionu silu, na bazi pomenutih metoda, je moguće bilo dobiti uz korišćenie mnogih aproksimacija što uslovljava neophodnost eksperimentalne provjere pri njihovom korišćenju (Prilog I).

Deformaciona sila se predaje presovanom uzorku ne samo neposrednim kontaktom sa alatom već i preko plastično nedeformisanih, krutih djelova tijela. Ova činjenica znatno uprošćava matematički aparat za slučaj jednostavnog modeliranja dijela metala koji intenzivno teče, ali gruba aproksimacija zone uslovljava dobijanje uvećanih vrijednosti za silu. Zato su istraživanja usmjerena u pravcu relativno tačnog modeliranja zone intenzivnog tečenja (neophodna je eksperimentalna i računarska podrška) što se bez sumnje povoljno odražava na tačnost odredjivanja sile dopresovanja.

Veoma značajan je i problem naponsko-kinematskog rješavanja relativno tankih ožljebljenih elemenata. Primjena istaknutih metoda teorije plastičnosti za ovu klasu odpresaka je vrlo otežana. Dostignuta su rješenja na bazi primjene teorije tečenja tankog sloja metala u postavci A.A.Iljušina, za slučaj aksijalne ožljebljenosti (Prilog I). U mašinskoj industriji se mnogo primjenjuju radijalno ojačani uzorci te su istraživanja usmjerena i u pravcu nala-

ženja naponsko-kinematskih rješenja za ove često korišćene elemente.

U vezi sa sve većom primjenom kompjuterske tehnike, posebno je aktuelan problem numeričkog odredjivanja naponsko-deformacionih polja po deformisanom uzorku. Numerička simulacija eksperimenta se vrši na osnovu metoda konačnih elemenata pri čemu je sam pristup odredjen usvojenim modelom materijala koji se deformiše: elasto-plastičnim ili plastičnim. S obzirom na velike plastične deformacije koje karakterišu razmatrane probleme posebno je pogodna primjena metoda konačnih elemenata za slučaj kruto-plastičnog materijala. Ova primjena je zasnovana na minimizaciji funkcionala koji zamjenjuje sistem jednačina teorije plastičnosti (Prilog I).

Istaknuto aktuelizira zadatak utvrdjivanja identičnosti varijacione i diferencijalne postavke zadatka teorije plastičnosti, kao i istraživanja suštine u ovom smislu opšte prihvaćenih funkcionala. Na osnovama takvih istraživanja može se napraviti i pomak naprijed u definisanju originalne numeričke postavke ovih ekstremno teških problema. Pri tome je nužno izvršiti analizu slojeva na slobodnoj i kontaktnoj granici koja treba da obezbijedi kako poštovanje uslova na granici, tako i teorijski dosljednu redukciju broja stepeni slobode diskretizovanog tijela.

Za verifikaciju teorijskih postavki neophodan je eksperiment. Takođe, eksperimentalna istraživanja mogu biti komponenta kompleksnog pristupa pri izučavanju razmatrane klase problema. Najveći broj dosad izvršenih eksperimentalnih istraživanja je obavljen na osnovu jednofaktornog eksperimentalnog plana (Prilog I). Posebno je važno u cilju minimizacije broja eksperimenata i istovremenog analiziranja uticaja većeg broja faktora izvršiti eksperimente na osnovama modernog višefaktornog plana eksperimenta.

Iz istaknutog slijedi da je cilj ovog rada da se da doprinos izučavanju procesa zapreminskog deformisanja, sa naglaskom na postupak presovanja, korišćenjem zbog složenosti problematike teorijskog, numeričkog i eksperimentalnog pristupa. Rad se sastoji iz šest glava, zaključka, spiska literature i priloga.

U PRVOJ GLAVI su dati osnovni (neophodni) pojmovi iz mehanike kontinuuma i teorije plastičnosti koji su poslužili kao osnova za izučavanja koja slijede.

U DRUGOJ i TREĆOJ GLAVI je razmotren problem presovanja sa teorijskog aspekta i data su rješenja na bazi korišćenja energetskog metoda i metoda teorije tečenja tankog sloja metala.

U ČETVRTOJ i PETOJ GLAVI su kritički sagledana postojeća numerička rješenja, predložen je novi pristup i izložena poboljšanja numeričke procedure.

ŠESTA GLAVA sadrži eksperimentalna istraživanja koja su bila neophodna komponenta u teorijskim i numeričkim rješenjima.

U ZAKLJUČKU su sistematizovani dobijeni rezultati i naznačeni pravci budućih istraživanja.

Zbog obimnosti materijala PRILOZI su dati odvojeno. Sastoje se iz 12 cjelina u kojima su izloženi duži teorijski izvodi i uradjeni računarski programi.

U radu su formule i slike označene sa tri cifre. Pri tome, prva cifra predstavlja broj glave, druga broj odjeljka u glavi, a treća mjesto formule ili slike u odjeljku. Literatura je pozivana brojem u srednjoj zagradi. Oznake nijesu posebno navedene, već je u tekstu svuda naglašavano šta odgovarajuća oznaka znači.

1. OSNOVNE TEORIJSKE POSTAVKE PROBLEMA PLASTIČNOSTI

1.1. METODE PRAĆENJA KRETANJA DEFORMABILNOG TIJELA

Neka se kao globalne koordinate posmatraju pravougaone koordinate (x_1, x_2, x_3) . Vrijeme se označava sa t . Radijus vektor tačke tijela \vec{r} je u tom slučaju:

$$\vec{r} = x_1 \cdot \vec{i}_1 + x_2 \cdot \vec{i}_2 + x_3 \cdot \vec{i}_3 \quad (1.1.1)$$

gdje su: $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ - jedinični vektori globalnog sistema koordinata.

Brzina kretanja tačke tijela je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \vec{i}_1 + \frac{dx_2}{dt} \vec{i}_2 + \frac{dx_3}{dt} \vec{i}_3 = v_1 \cdot \vec{i}_1 + v_2 \cdot \vec{i}_2 + v_3 \cdot \vec{i}_3 \quad (1.1.2)$$

ili

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = v_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.1.3)$$

Na osnovu poznatog polja brzina može se naći trajektorija kretanja tačke tijela. Neka materijalna tačka u trenutku $t=0$ ima koordinate x_{10}, x_{20} i x_{30} a pri $t > 0$ - x_1, x_2 i x_3 , tada se iz diferencijalnih jednačina (1.1.3) na osnovu poznatih početnih uslova dobija:

$$x_\alpha = x_{\alpha 0} + f_\alpha(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.1.4)$$

Jednačine (1.1.4) su parametarske jednačine trajektorije kretanja tačke tijela koja se u početnom trenutku nalazi u tački s koordinatama x_{10}, x_{20}, x_{30} pri čemu je parametar vrijeme t .

U mehanici kontinuuma [20,21,22,104] su našli primjenu dva međusobno ekvivalentna pristupa na kretanje deformišućeg materijala: gledište Ojlera i gledište Lagranža. Suština Ojlerovog pristupa se sastoji u razmatranju date tačke prostora kroz koju prolaze razne čestice deformisanog tijela. Kretanje sa aspekta Ojlera se smatra poznatim ako brzina, ubrzanje, temperatura i druge tražene veličine su zadane kao funkcije koordinata tačke prostora x_α i vremena t . Veličine x_1, x_2, x_3, t se nazivaju promjenljivim Ojlera.

Suština Lagranževog postupka se sastoji u koncentraciji pažnje na konkretnu česticu kontinuuma i razmatranju istorije njene deformacije i kretanja uopšte. Koordinate $x_{\alpha 0}$ individualizirane tačke tijela i vrijeme t se nazivaju promenljivim Lagranža. Veza Ojlerovih i Lagranževih promjenljivih je data jednačinama (1.1.4). Izbor promenljivih se vrši na osnovu karaktera zadatka koji se razmatra.

Čestica koja se u trenutku t nalazi u tački \vec{r} ima brzinu $\vec{v}(\vec{r}, t)$ i zato će njena koordinata u trenutku $t+dt$ biti $\vec{r} + \vec{v}dt$, pri čemu je $\vec{v}dt$ beskonačno mali vektor pomjeranja. To znači da se u svakom trenutku t , za ispitivanje kretanja tijela, za mali interval vremena dt može usvojiti Lagranžev metod ako se \vec{r} smatra početnim vektorom a $\vec{v}dt$ vektorom pomjeranja. Istaknuto uslovljava poklapanje teorije malih deformacija po metodu Lagranža i teorije beskonačno malih deformacija tj. brzine deformacija po metodu Ojlera.

1.2. ELEMENTI TEORIJE NAPONA

1.2.1. Naponi u tijelu

Naponi u tijelu se označavaju sa $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$. Veličina [29, 61, 67] :

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (1.2.1)$$

je poznata još iz vremena Paskala pod nazivom hidrostatski napon. Formulom (1.2.1) se taj napon izražava kao aritmetička sredina dijagonalnih elemenata tenzora σ_{ij} . Veličina $p(x_1, x_2, x_3, t) = p$ je skalar. No, moguće je obrazovati sljedeći dijagonalni tenzor:

$$(p \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad (1.2.2)$$

gdje je δ_{ij} simbol Kronekera, određen na sljedeći način

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pri } i \neq j \\ 1 & \text{pri } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Polje tenzora napona σ_{ij} se može razložiti na dva dijela, na polje Paskalovih napona s tenzorom napona $p\delta_{ij}$ (njega često nazivaju sfernim tenzorom

napona) i komplementarni dio $S_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ koji se naziva devijatorom napona.

Devijator napona je po opredjeljenju ravan:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.2.3)$$

gdje se po ponovljenom indeksu $k \in [1, 2, 3]$ vrši sumiranje:

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (1.2.4)$$

Sferni napon p teži da izmijeni zapreminu tijela a komponente devijatora $S_{\alpha\beta}$ da izmijene oblik bez izmjene zapremine u čemu je fizička opravdanost ovakvog razlaganja napona.

1.2.2. Glavne ravni, glavni naponi, invarijante

U svakoj tački tijela pri datom naponskom stanju postoje tri međusobno normalne ravni u kojima djeluju samo normalni naponi, tangentni su ravni nuli. Te ravni se nazivaju glavnim ravnima a naponi na njima glavnim naponima. Vrijednosti glavnih napona su korijeni jednačine trećeg stepena u kojoj je, kako je to uobičajeno, u inženjerskoj literaturi p označeno sa σ [29, 33, 34].

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.2.5)$$

pri čemu su koeficijenti ove jednačine izraženi preko glavnih napona i zapisani u tenzorskim oznakama sljedećim relacijama [55, 9, 5]

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \\ I_3 &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{kl} + \frac{1}{6} \sigma_{ii}^3 - \frac{1}{2} \sigma_{ii} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

S obzirom da se glavni naponi odredjuju samo sa naponskim stanjem u tački ali ne zavise od sistema koordinata to od njega ne zavise ni koeficijenti jednačine (1.2.5) pa se nazivaju: I_1 - prvom, I_2 - drugom i I_3 - trećom invarijantom tenzora napona. Iz (1.2.3) i (1.26), se dobijaju invarijante devijatora napona:

$$I_{1s} = 0$$

$$I_{2s} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (1.2.7)$$

$$I_{3s} = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$$

1.2.3. Intenzitet napona

Intenzivnost devijatora napona se definiše jednačinom:

$$S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.2.8)$$

Radi primjene u inženjerskoj praksi definišu se sljedeće veličine proporcionalne intenzivnosti devijatora napona [15, 16, 52]:

a) Intenzivnost normalnih napona ili intenzitet napona

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}} S \quad (1.2.9)$$

Za slučaj jednoosnog zatezanja i glavnih napona ($\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$) na osnovu (1.2.9)

$$\sigma_u = \sigma_{11} \quad (1.2.10)$$

b) Intenzitet tangenčnih napona

$$\tau_u = \frac{\sqrt{2}}{2} S \quad (1.2.11)$$

Za slučaj čistog smicanja ($\sigma_{11} = \tau_{11}, \sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = -\tau_{11}$) na osnovu (1.2.11) važi:

$$\tau_u = \tau_{11} \quad (1.2.12)$$

Iz (1.2.10) i (1.2.12) se vidi da su koeficijenti proporcionalnosti izabrani tako da se u najjednostavnijim slučajevima naprezanja (jednoosno zatezanje i smicanje) odgovarajući intenziteti napona poklapaju sa vrijednostima normalnog odnosno tangenčnog napona. Na osnovu (1.2.9) i (1.2.11) se dobija veza:

$$\sigma_u = \sqrt{3} \tau_u \quad (1.2.13)$$

1.2.4. Bivektorni zapis naponskog stanja

Za zapis karakterističnih veličina u mehanici se obično koriste tenzorske oznake (na primjer, $\sigma_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$). Međutim, moguće je sveukupnost parova $\alpha, \beta = 11, 12, 13, \dots, 33$ označiti jednim indeksom α koji u ovom slučaju ima prefiks bivektorni. Ovo dozvoljava da se predstavi tenzor $\sigma_{\alpha\beta}$, u vidu

šestodimenzionog vektora σ_α s komponentama: ($\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \sigma_3 \equiv \sigma_{33}, \sigma_4 \equiv \sigma_{12}/\sqrt{2}, \sigma_5 \equiv \sigma_{23}/\sqrt{2}, \sigma_6 \equiv \sigma_{31}/\sqrt{2}$) koji se naziva bivektorom $\vec{\sigma}$, tj. vektorom višedimenzionog prostora [20,23].

Bivektorni prostor je Euklidovski: u njemu je moguće odrediti dužinu σ bivektora $\vec{\sigma}$ jednačinom:

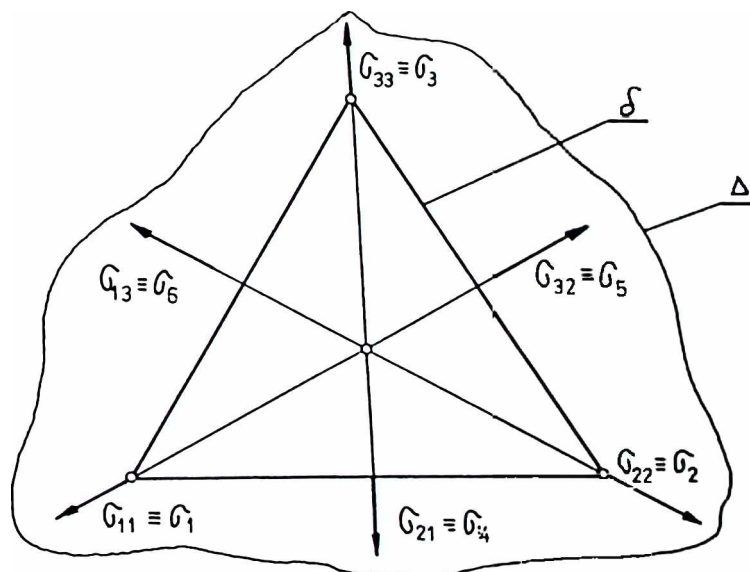
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sigma_{ij}^2} = \sqrt{\sigma_\alpha^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2} \quad (1.2.14)$$

U šestodimenzionom bivektornom prostoru $\vec{\sigma}$ devijatorski bivektor \vec{S} čini petodimenzioni potprostor. Ovo je uslovljeno činjenicom što prema (1.2.3) suma dijagonalnih elemenata devijatora napona je jednaka nuli:

$$S_{kk} = \sigma_{kk} - \delta_{kk} \cdot p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - 3p = 0 \quad (1.2.15)$$

To znači, da se devijator napona razmatran kao bivektor $\vec{S} = (S_1 \equiv S_{11}, S_2 \equiv S_{22}, S_3 \equiv S_{33}, S_4 \equiv S_{12}/\sqrt{2}, S_5 \equiv S_{23}/\sqrt{2}, S_6 \equiv S_{31}/\sqrt{2})$ za koji važi uslov (1.2.15), može grafički predstaviti u vidu hiperpovršine δ u prostoru Δ (sl.1.1.1.):

$$\sigma_1/3p + \sigma_2/3p + \sigma_3/3p = 1 \quad (1.2.16)$$



Sl.1.1.1. Bivektorni potprostor devijatora napona \vec{S} kao hiperpovršina δ u bivektornom prostoru Δ napona $\vec{\sigma}$.

Ovakvu geometrijsku interpretaciju u Euklidovom bivektornom prostoru moguće je uopštiti na druga mehanička tenzorna (bivektorna) polja kao tenzor

deformacije, tenzor brzine deformacije itd. i njihove devijatore.

Time je omogućeno uprošćenje operacija sa indeksiranim veličinama tj. operacija sumiranja na računaru po parovima indeksa α, β zamjenjuje se sumiranjem po jednom indeksu. Vraćajući se iz bivektornog u tenzorski prostor moguće je prenijeti dužinu bivektora kao normu matrice. Informacija o normi matrice je veoma važna pri analizi konvergencije vektorskih procedura.

Dužine bivektora napona $\vec{\sigma}$ i bivektora devijatora napona \vec{S} su međusobno povezane iz (1.2.14) i (1.2.3) slijedi:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}} = \sqrt{S^2 + 9p^2} \quad (1.2.17)$$

gdje je S određeno sa (1.2.8) a p sa (1.2.1)

1.2.5. Diferencijalne jednačine ravnoteže

U mehanici kontinuuma se široko koriste dva poznata principa D'alamberta: suma sila koje djeluju na tijelo, uključujući i silu inercije je jednaka nuli; suma momenata koji djeluju na tijelo je jednaka nuli [20, 22, 23].

Zapisujući te principe matematički dobijaju se jednačine mehanike u obliku

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \partial_j \sigma_{ij} \quad (1.2.18)$$

gdje se po ponavljajućem indeksu j vrši sumiranje, i simetrije tenzora napona:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.2.19)$$

Pri statičkim problemima sile inercije se zanemaruju $\partial / \partial t = 0$ te jednačina (1.2.18) poprima oblik:

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (1.2.20)$$

Jednačina (1.2.20) označava da je tenzorna divergencija napona jednaka 0.

1.3. ELEMENTI TEORIJE DEFORMACIJA

1.3.1. Deformacija, brzina deformacije

Za komponente vektora pomjeranja u_i ili brzine v_i moguće je obrazovati polje gradijenta $\partial_i u_j$ ili $\partial_i v_j$ sukcesivno gdje $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$ kao i ranije označava operaciju diferenciranja. Ovi gradijenti obrazuju nesimetrične tenzore drugog reda - tenzore gradijenata pomjeranja ili deformacija.

Svaki nesimetrični tenzor X_{ij} moguće je na jedinstven način predstaviti u vidu sume dva tenzora od kojih je jedan, označimo ga sa S_{ij} simetričan: $S_{ij} = S_{ji}$ a drugi A_{ij} - je kosi vektor: $A_{ij} = -A_{ji}$, tj. za bilo koji tenzor X_{ij} moguće je naći takve tenzore S_{ij} i A_{ij} da [41] :

$$\begin{aligned} X_{ij} &= S_{ij} + A_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \\ X_{ji} &= S_{ij} - A_{ij} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Iz gornjih jednačina slijede izrazi za simetrični i kosi tenzor.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= (X_{ij} + X_{ji}) / 2 \\ A_{ij} &= (X_{ij} - X_{ji}) / 2 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Ako se primijeni postupak (1.3.2) na tenzore gradijenata pomjeranja i brzina dobijaju se sljedeći simetrični tenzori:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (\partial_i u_j + \partial_j u_i) / 2 \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= (\partial_i v_j + \partial_j v_i) / 2 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

pri čemu je očigledno na osnovu (1.1.3):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \partial \epsilon_{ij} / \partial t \quad (1.3.4)$$

Tenzor ϵ_{ij} se naziva tenzorom deformacije a tenzor $\dot{\epsilon}_{ij}$ - tenzorom brzine deformacije. Analogno, kosi djelovi razmatranih tenzora gradijenata će biti [20] :

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= (\partial_i u_j - \partial_j u_i) / 2 \\ \dot{\omega}_{ij} &= (\partial_i v_j - \partial_j v_i) / 2 \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Uzevši u obzir činjenicu da je rotor vektora pomjeranja \vec{u} određen sa:

$$\text{rot } \vec{u} = \Omega_1 \vec{i}_1 + \Omega_2 \vec{i}_2 + \Omega_3 \vec{i}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (1.3.6)$$

Komponente tenzora ω_{ij} će biti: $\omega_{11} = 0$; $\omega_{22} = 0$; $\omega_{33} = 0$; $\omega_{12} = \Omega_3/2$; $\omega_{23} = \Omega_1/2$; $\omega_{31} = \Omega_2/2$. Njihov fizički smisao je u opisivanju rotacije elemenata tijela.

Vezu između simetrične i kose komponente tenzora gradijenata pomjeranja prvi je ustanovio Čezaro [114], pošavši od izraza za deformaciju:

$$\begin{aligned} \epsilon_{jk} &= (\partial_j u_k + \partial_k u_j)/2 \\ \epsilon_{ik} &= (\partial_i u_k + \partial_k u_i)/2 \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

i primijenivši operaciju diferenciranja ∂_i i ∂_j na jednačine (1.3.7) sukcesivno:

$$\partial_i \epsilon_{jk} - \partial_j \epsilon_{ik} = \partial_k \omega_{ij} \quad (1.3.8)$$

Ova relacija se može napisati za $k = 1, 2, 3$ pri čemu se dobija:

$$\begin{aligned} \partial_1 \omega_{ij} &= \partial_i \epsilon_{j1} - \partial_j \epsilon_{i1} \\ \partial_2 \omega_{ij} &= \partial_i \epsilon_{j2} - \partial_j \epsilon_{i2} \\ \partial_3 \omega_{ij} &= \partial_i \epsilon_{j3} - \partial_j \epsilon_{i3} \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Pomnoživši relacije (1.3.9) sa diferencijalima koordinata dx_1, dx_2, dx_3 sukcesivno dobija se diferencijal:

$$d\omega_{ij} = \partial_1 \omega_{ij} dx_1 + \partial_2 \omega_{ij} dx_2 + \partial_3 \omega_{ij} dx_3 = \vec{\phi}(\epsilon_{ij}) \cdot \vec{dx} \quad (1.3.10)$$

gdje je $\vec{\phi}(\epsilon_{ij})$ neka funkcija deformacija.

Integracijom po proizvoljnom putu koji spaja tekuću tačku prostora (x_1, x_2, x_3) sa fiksiranom tačkom (x_{10}, x_{20}, x_{30}) dobija se:

$$\omega_{ij} = \int_{(x_{10}, x_{20}, x_{30})}^{(x_1, x_2, x_3)} d\omega_{ij} \quad (1.3.11)$$

To znači da se po zadanom polju deformacije ϵ_{ij} može doći do polja rotora ω_{ij} i analogno po $\dot{\epsilon}_{ij}$ do $\dot{\omega}_{ij}$. Na osnovu (1.3.1) postaju poznata polja građena:

$$\begin{aligned}\partial_i u_j &= \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \\ \partial_i v_j &= \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}\end{aligned}\quad (1.3.12)$$

a odavde koristeći se procedurom integracije i sama polja:

$$\begin{aligned}u_k &= u_k^{(0)} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\partial_i u_j) dx_k \\ v_k &= v_k^{(0)} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\partial_i v_j) dx_k\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

To znači da se pomoću malih deformacija može u potpunosti opisati polje pomjeranja \vec{u} i brzina \vec{v} ako se iskoristi procedura Čezaro. U inženjerskim zadacima sa velikim deformacijama konačno stanje [20,52] deformisanog tijela određuje se pomoću etapnog prelaza od početnog stanja ka konačnom pri čemu svaka etapa odgovara malim deformacijama. Ove deformacije su posebno pogodne pri proračunima primjenom računara.

Široku primjenu su dobile i logaritamske deformacije predložene Henkijem [20, 67, 54, 55]:

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \int_{l_0}^l d(\ln l/l_0) = \ln(l/l_0) \quad (1.3.14)$$

gdje su l i l_0 - dimenzije posle i do deformacije. Predložene su takodje i mjere velike deformacije [20, 5, 7, 15]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.3.15)$$

1.3.2. Razlaganje tenzora deformacije (brzine deformacije)

Deformaciono stanje tijela koje se karakteriše tenzorom deformacije (1.3.3) može se predstaviti u vidu sume dva deformaciona stanja. Prvo deformaciono stanje je predstavljeno sfernim tenzorom [77,80]:

$$(\epsilon \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{vmatrix} \quad (1.3.16)$$

gdje je ϵ srednja deformacija kao mjera promjene zapremine definisana izrazom:

$$\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = \epsilon_{ii}/3 \quad (1.3.17)$$

Tenzor drugog deformacionog stanja je devijator deformacije, čije komponente u tenzornom zapisu su date formulom:

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon \quad (1.3.18)$$

To znači da važi relacija:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (1.3.19)$$

gdje se po ponovljenom indeksu k vrši sumiranje.

Posebno veliki značaj u teoriji plastičnosti (i uopšte u teoriji kretanja bilo kog kontinijuma) ima devijator deformacije, koji pokazuje koliko se ispitivano deformaciono stanje razlikuje od svestrane ravnomjerne deformacije.

Analogno (1.3.18) može se standardno odrediti i pojam devijatora brzine deformacije:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\epsilon} \quad (1.3.20)$$

Često se u teoriji pretpostavlja da je plastično tekuće tijelo nestišljivo. U tom slučaju važe sljedeće relacije [58, 59, 60] :

$$\begin{aligned} \epsilon_{kk} &= \text{div } \vec{u} = \partial_k u_k = 0 \\ \dot{\epsilon}_{kk} &= \text{div } \vec{v} = \partial_k v_k = 0 \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

gdje se po ponavljajućim indeksima vrši sumiranje. Na osnovu relacija (1.3.18) i (1.3.20) važe sljedeće identičnosti:

$$e_{ij} = \epsilon_{ij}; \quad \dot{e}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.3.22)$$

Na taj način, tenzori deformacije i njihovih brzina za nestišljivo plastično tekuće tijelo su istovremeno i devijatori.

1.3.3. Glavne ose, glavne deformacije (brzine deformacije), invarijante

U svakoj tački tijela [20, 21, 22, 23] postoje tri međusobno normalna pravca koji se nazivaju glavnim osama deformacije i koji imaju svojstvo da vlakna usmjerena u njihovom pravcu su izložena samo izduženju tj. ugaone deformacije u pravcu glavnih osa deformacije su jednake nuli. Linearne deformacije u pravcu ovih osa se nazivaju glavnim linearnim deformacijama, a njihove vrijednosti su jednake korijenima jednačine III stepena [52, 53, 54] :

$$\epsilon^3 - I_{1\epsilon} \epsilon^2 - I_{2\epsilon} \epsilon - I_{3\epsilon} = 0 \quad (1.3.23)$$

pri čemu su korijeni ove jednačine u tenzorskim oznakama dati sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} I_{1\epsilon} &= \epsilon_{ii} \\ I_{2\epsilon} &= - (\epsilon_{ii}^2 - \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) / 2 \\ I_{3\epsilon} &= 1/3 \epsilon_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{kl} + 1/6 \epsilon_{ii}^3 - 1/2 \epsilon_{ii} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

S obzirom da vrijednosti glavnih deformacija ne zavise od izbora koordinatnog sistema, od njega ne zavise ni koeficijenti jednačine (1.3.23) pa se zato i nazivaju: $I_{1\epsilon}$ - prvom, $I_{2\epsilon}$ - drugom, i $I_{3\epsilon}$ - trećom invarijantom tenzora deformacije. Iz (1.3.18) dobijaju se invarijante devijatora deformacije:

$$\begin{aligned} I_{1e} &= 0 \\ I_{2e} &= \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \\ I_{3e} &= \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{kl} \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

1.3.4. Intenzitet deformacije (brzine deformacije)

Intenzivnosti devijatora deformacije i devijatora brzine deformacije se definišu sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{e_{ij} e_{ij}} \\ \dot{e} &= \sqrt{\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}} \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

pri čemu je očigledno $\dot{e} \neq \partial e / \partial t$.

Relacije (1.3.26) i analogna relacija za intenzivnost devijatora napona (1.2.8) definišu matematičke norme odgovarajućih tenzora. U inženjerskoj praksi radi

lakše primjene definišu se sljedeće veličine proporcionalne intenzivnosti devijatora deformacija [9, 15, 16] :

a) Intenzivnost linijskih deformacija ili intenzivnost deformacija

$$\epsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}} e \quad (1.3.27)$$

Za slučaj jednoosnog istezanja ($\epsilon_{11} \neq 0$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\epsilon_{11}/2$) će biti:

$$\epsilon_u = \epsilon_1 \quad (1.3.28)$$

b) Intenzivnost ugaonih deformacija

$$\gamma_u = \sqrt{2} \cdot e \quad (1.3.29)$$

Za slučaj čistog smicanja ($\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma_1$, $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$) će biti:

$$\gamma_u = \gamma_1 \quad (1.3.30)$$

Iz (1.3.27) i (1.3.30) slijedi jednačina veze:

$$\epsilon_u = \gamma_u / \sqrt{3} \quad (1.3.31)$$

Po analogiji sa intenzitetom deformacije može se odrediti i intenzitet brzine deformacije:

$$\dot{\epsilon}_u = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e} \quad (1.3.32)$$

1.4. USLOVI POJAVE PLASTIČNIH DEFORMACIJA

Kod aksijalnog naprezanja ili kod čistog smicanja, plastične deformacije nastaju kada normalni, odnosno tangencijalni naponi dostignu vrijednost napona tečenja σ_s odnosno τ_s , pri odgovarajućim ispitivanjima. Kod složenog naponskog stanja postoji beskonačno veliki broj kombinacija napona za koje se javlja plastično stanje. U sistemu koordinata glavnih normalnih napona $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sveukupnost kombinacija napona koje odgovaraju prelazu metala u plastično stanje obrazuje površinu plastičnosti:

$$f_T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.4.1)$$

Površina plastičnosti se dobija na osnovu eksperimentalno provjerenih hipoteza, čija matematička formulacija se naziva uslovom plastičnosti. Kako se prelaz deformabilnog tijela u plastično stanje vrši nezavisno od veličine srednjeg normalnog napona ili hidrostatičkog pritiska površina plastičnosti (1.4.1) treba da zadovoljava uslov [61,52]:

$$f_T(\sigma_1 + d\sigma, \sigma_2 + d\sigma, \sigma_3 + d\sigma) = 0 \quad (1.4.2)$$

Iz uslova diferencijabilnosti (1.4.2) se dobija:

$$f_T(\sigma_1 + d\sigma, \sigma_2 + d\sigma, \sigma_3 + d\sigma) - f_T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(\frac{\partial f_T}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_3} \right) d\sigma \quad (1.4.3)$$

Prelazeći na granične vrijednosti slijedi:

$$\frac{\partial f_T}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_3} = 0 \quad (1.4.4)$$

Diferenciranjem jednačine (1.4.1) dobija se diferencijalna jednačina površine plastičnosti u opštem vidu:

$$\frac{\partial f_T}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial f_T}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 = 0 \quad (1.4.5)$$

Upoređivanjem koeficijenata uz parcijalne izvode u jednačinama (1.4.4) i (1.4.5) dobijaju se jednačine karakteristika:

$$d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3 \quad (1.4.6)$$

Integracijom slijedi:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sigma_1 + c_1 \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + c_2 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Za slučaj izotropnosti sve tri glavne ose napona su ravnopravne i zato površina plastičnosti ima osu simetrije. Za osu simetrije je $c_1 = c_2 = 0$ te je:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (1.4.8)$$

Dakle, osa je prava jednako nagnuta ka svim trima osama i koja prolazi kroz koordinatni početak. S obzirom da se karakteristike površine plastičnosti nalaze na jednakim rastojanjima od ose simetrije to one prolaze kroz kružnicu čija ravan je normalna na osu simetrije i određena je sistemom jednačina (Košijev problem):

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 0 \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 &= r^2\end{aligned}\quad (1.4.9)$$

Prva jednačina predstavlja ravan koja prolazi kroz koordinatni početak, a druga sferu sa centrom u koordinatnom početku. Tražena kružnica je njihov presjek dok je veličina radijusa fizička karakteristika metala. Elementarnim operacijama iz (1.4.7) i (1.4.9) se dobija:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 3r^2 \quad (1.4.10)$$

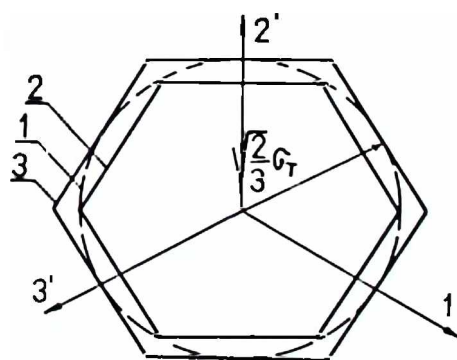
Jednačina (1.4.10) predstavlja cilindar jednako nagnut prema svim trim koordinatnim osama čija veličina radijusa r može biti nadjena iz eksperimenta na istezanje ($\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s \quad (1.4.11)$$

Sada će površina plastičnosti imati oblik:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (1.4.12)$$

Uslov (1.4.12) je predložio Mises a matematički izrazio Huber razmatrajući potencijalnu energiju deformacije tijela. Grafički se interpretira krivom 1 (sl.1.4.1) i najčešće naziva Huber-Mizesovim uslovom plastičnosti.



Sl.1.4.1. Krive uslova plastičnosti:
1. Huber-Mizes; 2. Treska-Sen-Venan;
3. Išliński-Hil.

Iz (1.2.9) i (1.4.12) slijedi za ovaj uslov plastičnosti:

$$\sigma_u = \sigma_s \quad (1.4.13)$$

Dobijena kružnica se može aproksimirati mnogouglaonikom. Mnogouglaonik mora imati paran broj strana jer se ne uzima u obzir efekat Baušingera [22,23]. Usljed izotropnosti simetričan je u odnosu na tri ose. Dakle, broj strana mnogouglaonika mora biti djeljiv sa šest. Geometrijski je jasno da, ako se kružnica aproksimira sa šestouglaonikom dobija se šestostrana prizma upisana u cilindar koja odgovara uslovu konstantnosti najvećeg tangencijalnog napona [34,52]. Ovaj uslov plastičnosti se najčešće naziva Treska - Sen-Venanov, grafički se interpretira krivom 2 (sl.1.4.1) a matematički opisuje relacijama ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq \sigma_s \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq \sigma_s \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_s \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Može se zapisati i u obliku:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_s \quad (1.4.15)$$

pa se naziva i uslovom najvećeg tangencijalnog napona.

Za slučaj aproksimiranja kružnice sa opisanim šestouglaonikom (kriva 3 na sl.1.4.1) dobija se uslov najvećeg devijatora napona koji su predložili A.J. Išlinski [104] i R.Hil [77]:

$$\max \{ \sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_1 \} = \frac{2}{3} \sigma_s \quad (1.4.16)$$

Odnosi medju granicama tečenja τ_s i σ_s za slučajeve čistog smicanja ($\sigma_1 = -\sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$) i zatezanja ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) prema navedenim uslovima plastičnosti su:

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s \quad (\text{uslov Huber-Mizesa}) \\ \tau_s &= \frac{1}{2} \sigma_s \quad (\text{uslov Treska-Sen-Venana}) \\ \tau_s &= \frac{2}{3} \sigma_s \quad (\text{uslov najvećeg devijatora napona}). \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

1.5. JEDNAČINE STANJA PLASTIČNO DEFORMISANOG TIJELA

Ove jednačine vežu napone i deformacije plastično deformisanog tijela [20, 52,53] i mogu se podijeliti na dvije grupe: jednačine stanja koje vežu sferne i devijatorske komponente napona i deformacija.

Veza izmedju dilatacije ϵ (1.3.17), hidrostatičkog pritiska p (1.2.1) i temperature T data je formulom [20] :

$$p = K \epsilon - \beta K (T - T_0) \quad (1.5.1)$$

gdje je β - zapreminski modul temperaturnog širenja (veličina $\beta/3 \equiv \alpha$ se naziva linijskim modulom temperaturnog širenja) a K - zapreminski modul stišljivosti. Kako su ϵ i β "male" veličine a komponente pritiska u (1.5.1) konačne to slijedi da je K "veliko", te zato ovakav proizvod "male" i "velike" veličine predstavlja računarsku poteškoću pri realizaciji problema u čijoj osnovi je pretpostavka nestišljivosti.

Druga grupa jednačine stanja može biti različita, zavisno od predloženog modela.

1.5.1. Male elasto-plastične deformacije

Po teoriji malih elasto-plastičnih deformacija uspostavljaju se funkcionalne zavisnosti izmedju napona i deformacija po analogiji sa generalisanim zakonom linearne elastičnosti [20,21]. Teoriju je postavio Henki [29] a poseban doprinos njenom razvoju i primjeni je dao A.A.Iljušin.

Primjena ove teorije je ograničena teoremom A.A.Iljušina o prostom opterećenju (komponente devijatora napona rastu proporcionalno nekom parametru), prema kojoj u slučaju homogenog naponskog stanja opterećivanje tijela će biti prosto kada spoljašnje sile rastu proporcionalno jednom za sve sile zajedničkom parametru. Problem kako u procesu opterećivanja treba da rastu spoljašnje sile da bi za opšti slučaj nehomogenog naponskog stanja opterećivanje u svim tačkama tijela bilo prosto nije riješen. Postoji samo specijalno rješenje [21] . Da bi u svim tačkama nestišljivog tijela opte-

rećenog spoljnim silama koje rastu proporcionalno nekom parametru, opterećenje bilo prosto dovoljno je da zavisnost intenziteta napona od inteziteta deformacija bude stepena funkcija oblika:

$$\sigma_u = C \cdot \epsilon_u^n \quad (1.5.2)$$

gdje su C i n proizvoljne konstante.

Uporedo sa ovom teoremom A.A.Iljušin [21] uvodi pojam aktivne i pasivne deformacije. Kod složenog naponskog stanja deformacija je aktivna ako intenzitet napona σ_u (1.2.9) za datu tačku u datom trenutku ima vrijednost koja premašuje sve prethodne vrijednosti. U protivnom deformacija je pasivna. Pri prostom opterećenju i aktivnom procesu deformacije važe dvije osnovne postavke koje su utvrdjene eksperimentalno [55]:

- a) Pravci glavnih linearnih deformacija poklapaju se sa pravcima glavnih normalnih napona;
- b) Morov dijagram deformacija u svakom trenutku je geometrijski sličan Morovom dijagramu napona.

Na osnovu ovih postavki i analogije sa linearno elastičnim područjem može se ustanoviti da je funkcionalna zavisnost napona od deformacija i u području malih elasto-plastičnih deformacija linearna. Njen matematički zapis je dat relacijom [112]:

$$\frac{S_{ij}}{S} = \frac{e_{ij}}{e} \quad (1.5.3)$$

Ova jednačina u suštini predstavlja prenos poznatih relacija teorije elastičnosti koje vežu napone i deformacije u obliku:

$$S_{ij} = 2G' e_{ij} \quad (1.5.4)$$

gdje je:

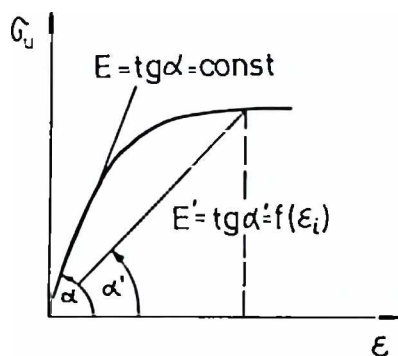
$$2G' = S/e \quad (1.5.5)$$

i igra ulogu modula smicanja plastično deformisanog materijala. Uzevši u obzir relacije (1.2.9) i (1.3.27) relacija (1.5.4) se može zapisati u inženjerskoj primjeni više korišćenom obliku:

$$S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\epsilon_u} e_{ij} \quad (1.5.6)$$



U cilju uočavanja razlike izmedju fundamentalnih obrazaca po teoriji linearne elastičnosti (relacija analogna 1.5.4. gdje je G' zamijenjeno sa G - modul elastičnog smicanja) i po teoriji malih elasto-plastičnih deformacija (1.5.5) može se posmatrati dijagram dobijen linijskim istežanjem epruveta $\sigma_1 = f(\epsilon_1)$. Na osnovu (1.2.10) i (1.3.28) ova zavisnost je identična zavisnosti $\sigma_u = f(\epsilon_u)$ (sl. 1.5.1).



Sl.1.5.1 Modul elastičnosti i modul plastičnosti

Modul plastičnosti E' se mijenja od tačke do tačke kao funkcija intenziteta deformacije. Iskoristivši poznatu relaciju veze modula [15,67]:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.5.7)$$

kao i činjenicu da je koeficijent Puasona za plastično područje $\nu \approx 0,5$ dobija se:

$$G' = E'/3 \quad (1.5.8)$$

To znači da koeficijent proporcionalnosti devijatora tenzora napona i devijatora tenzora deformacija kod linearne elastičnosti je konstantna veličina, dok po teoriji malih elasto-plastičnih deformacija ova veličina zavisi od deformacije i mijenja se od tačke do tačke tijela.

1.5.2. Teorija plastičnog tečenja

Karakteristike naponskog i deformacionog stanja su medjusobno povezane funkcijama (fizičkim jednačinama) koje su eksperimentalno određene. Veza napona σ_{ij} i brzina deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}$ u opštem vidu ima oblik:

$$\sigma_{ij} = f(\dot{\epsilon}_{ij}) \quad (1.5.9)$$

Funkcija treba da obezbijedi da se kao rezultat dejstva nad komponentama simetričnog tenzora drugog reda $\dot{\epsilon}_{ij}$ dobiju komponente simetričnog tenzora drugog reda σ_{ij} . Formula (1.5.9) se može predložiti u vidu konvergentnog beskonačnog reda [33]:

$$\sigma_{ij} = a_0 \cdot \delta_{ij} + a_1 \cdot \dot{\epsilon}_{ij} + a_2 \cdot \dot{\epsilon}_{ik} \cdot \dot{\epsilon}_{kj} + a_3 \cdot \dot{\epsilon}_{ik} \cdot \dot{\epsilon}_{kl} \cdot \dot{\epsilon}_{lj} + \dots \quad (1.5.10)$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, - skalarni koeficijenti; δ_{ij} - komponente jediničnog tenzora. Elementarnim tenzorskim operacijama se može dokazati da su sve komponente i suma u cjelini relacije (1.5.10) simetrični tenzori drugog reda. Ovaj uslov je ispunjen za slučaj izotropnog materijala. Za veliku većinu tehnoloških zadataka moguće je prihvatiti hipotezu o izotropnosti, na bilo kom nivou dimenzije deformišuće elementarne zapremine [80]. Iz ove hipoteze se elementarno može izvesti važna hipoteza o koaksijalnosti tenzora napona σ_{ij} i brzina deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Uslov izotropnosti i koaksijalnosti zadovoljava i funkcija nastala iz (1.5.10) ograničavanjem na prva tri člana:

$$\sigma_{ij} = a_0 \delta_{ij} + a_1 \dot{\epsilon}_{ij} + a_2 \dot{\epsilon}_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} \quad (1.5.11)$$

Pretpostavka o proporcionalnosti napona $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ i brzina deformacije $\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}$ nije održiva. Naime za nestišljivi materijal iz (1.3.21) slijedi da glavne brzine relativnog izduženja su obavezno različitih znakova, a materijal može biti opterećen samo na istezanje ili samo na pritisak tj. proporcionalnost odsustvuje.

Za razliku od ove pretpostavke opiti pokazuju [25, 29, 34, 15] da postoji proporcionalnost komponentata devijatora napona i brzine deformacije - ova hipoteza u teoriji plastičnosti nosi naziv teorija plastičnog tečenja.

Matematički zapis uslova proporcionalnosti ima oblik:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{\delta} \delta_{ij} = \lambda (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{\delta} \delta_{ij}) \quad (1.5.12)$$

Veličina λ može biti izražena preko poznatih invarijanti:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \lambda^2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{3}{2} \lambda \dot{\epsilon}_u \quad (1.5.13)$$

Iz (1.5.13) slijedi:

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \quad (1.5.14)$$

Jednačine (1.5.12) obezbjeđuju pet jednačina veze jer je prema (1.2.3) suma dijagonalnih komponenta devijatora ravna 0. Takođe u (1.5.12) je uvedena još jedna nepoznata veličina λ . Medjutim, jednačina veze, za granični zadatak teorije plastičnosti je potrebno šest. Dakle, jednačine (1.5.12) treba dopuniti sa još dvije relacije eksperimentalno određene. Prva relacija veže prve invarijante tenzora napona i brzina deformacija:

$$\sigma = \sigma(\dot{\epsilon}) \quad (1.5.15)$$

Druga jednačina je veza izmedju intenzivnosti napona i intenzivnosti brzina deformacije:

$$\sigma_u = \sigma_u(\dot{\epsilon}_u) \quad (1.5.16)$$

Eksperimentalne funkcije (1.5.15) i (1.5.16) se mogu odrediti relativno jednostavno iz prostih opita (istezanje, pritisak, uvijanje itd.) koristeći hipotezu jedinstvene krive tj. činjenicu da funkcije koje vežu invarijantne karakteristike naponskog i deformacionog stanja ne zavise od njihovog vida.

Zamjenom (1.5.13) - (1.5.16) u (1.5.12) se dobija:

$$\sigma_{ij} = [\sigma(\dot{\epsilon}) - 2\sigma_u(\dot{\epsilon}_u) \dot{\epsilon} / 3 \dot{\epsilon}_u] \delta_{ij} + [2\sigma_u(\dot{\epsilon}_u) / 3 \dot{\epsilon}_u] \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.5.17)$$

Upoređujući relacije (1.5.11) i (1.5.17) nije teško pokazati da ako se skalarne funkcije a_0 , a_1 i a_2 prihvate u obliku:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sigma(\dot{\epsilon}) - 2\sigma_u(\dot{\epsilon}_u) \dot{\epsilon} / 3 \dot{\epsilon}_u \\ a_1 &= 2\sigma_u(\dot{\epsilon}_u) / 3 \dot{\epsilon}_u; \quad a_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

to je i (1.5.17) izotropna tenzorska funkcija.

U principu moguća je i druga formulacija fizičkih jednačina veze naponskog i deformacionog stanja koja se zasniva na drugim hipotezama, bolje usaglašenim sa eksperimentom.

1.6. JEDNAČINA TOPLOPROVODNOSTI

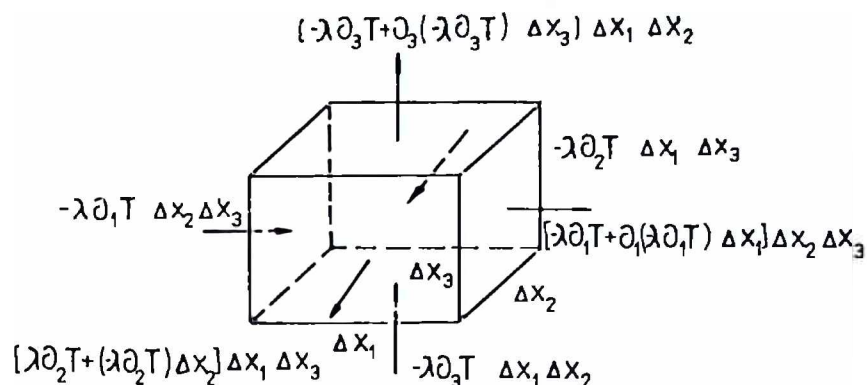
U zapremini deformisanog metala, u opštem slučaju postoji nestacionarno temperaturno polje $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ koje ima velikog uticaja na tečenje metala i njegovo naponsko stanje, pa se naziva termomehantičkom promjenljivom. Da bi ova promjenljiva bila određena neophodno je po analogiji sa zakonom održanja mehaničke energije definisati zakon održanja toplotne energije prema kojem: toplota nastala u jedinici vremena pri deformaciji neke materijalne čestice Q_1 , djelimično (Q_2) se odvodi na račun toploprovodnosti u susjedne zapremine tijela, a preostali dio (Q_3) ide na povišenje njegove temperature, tj. važi jednačina:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (1.6.1)$$

Plastična deformacija je uvijek praćena nepovratnim izdvajanjem toplote koja može usloviti, u zavisnosti od veličine deformacije i svojstava materijala, povećanje temperature od nekoliko desetina ili čak stotina $^{\circ}\text{C}$. Kalorimetrijski opiti su pokazali da čak više od 90% mehaničkog rada utrošenog pri plastičnoj deformaciji prelazi u toplotu. Relativno mali dio se transformiše u elastičnu energiju deformacije kristalne rešetke [125,115,33]. U praktičnim zadacima teorije plastičnosti, plastične deformacije nastale u tijelu su veoma velike u odnosu na elastične. To uslovljava da se u procesu tečenja zanemaruje elastični dio deformacije, a samim tim i odgovarajući toplotni efekti tj. smatra se da cjelokupni mehanički rad plastične deformacije prelazi u toplotu.

Gornje praktično označava da je snaga toplotnog efekta na račun plastične deformacije (disipacija energije) elementarnog paralelopipeda stranica $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ (sl.1.6.1) data izrazom:

$$Q_1 = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (1.6.2)$$



Sl.1.6.1. Protok toplote kroz elementarni paralelopiped

Prema Furijeovom zakonu [20] količina toplote koja prolazi na račun toploprovodnosti kroz jediničnu površinu normalnu koordinatnoj osi i u jedinici vremena je:

$$q_i = -\lambda \partial_i T \quad (1.6.3)$$

gdje je λ - koeficijent toploprovodnosti, $\partial_i T$ - gradijent temperature u odgovarajućem koordinatnom pravcu.

Toplotni protok se može razviti u red Tejlora u kojem se odbacuju beskonačno male veličine reda većeg od Δx_i (sl.1.6.1). Ako se uzme u obzir toploprovodnost kroz sve grane paralelopipeda dobija se relacija za Q_2 koja figuriše kao komponenta u (1.6.1):

$$Q_2 = - [\partial_1(\lambda \partial_1 T) + \partial_2(\lambda \partial_2 T) + \partial_3(\lambda \partial_3 T)] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.6.4)$$

Potrebno je još odrediti poslednju komponentu energetskog bilansa Q_3 . U tom cilju se definiše količina toplote koju je potrebno utrošiti da bi se zagrijala jedinica mase metala:

$$q = \int_0^T c dT \quad (1.6.5)$$

gdje je c - koeficijent toplote koji je u opštem slučaju funkcija temperature. Brzina zagrijavanja jedinice mase će biti:

$$dq/dt = [d/dT \left(\int_0^T c dT \right)] \frac{dT}{dt} = c \frac{dT}{dt} \quad (1.6.6)$$

To znači da će toplota koja se troši u jedinici vremena na povećanje temperature materijalnog paralelopipeda biti:

$$Q_3 = c(dT/dt)\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (1.6.7)$$

gdje je ρ - gustina.

Iz jednačina (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4) i (1.6.7) se dobija diferencijalna jednačina toploprovodnosti, zapisana za proizvoljnu tačku deformisanog tijela u proizvoljnom trenutku vremena:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \partial_1(\lambda \partial_1 T) + \partial_2(\lambda \partial_2 T) + \partial_3(\lambda \partial_3 T) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.6.8)$$

Disipativna funkcija $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ može biti izražena preko invarijanti korišćenjem relacija (1.5.12) i (1.5.13):

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (s_{ij} + \sigma \delta_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon} \delta_{ij}) = \sigma_u \dot{\epsilon}_u + 3\sigma \dot{\epsilon} \quad (1.6.9)$$

Za nestišljivi materijal (1.6.9) poprima oblik:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_u \dot{\epsilon}_u \quad (1.6.10)$$

Karakteristike materijala λ i c se često prihvataju kao konstante te u tom slučaju (1.6.8) poprima oblik:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.6.11)$$

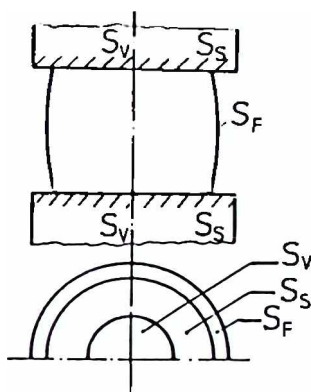
gdje je $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ - diferencijalni operator Laplasa.

Temperatura čestice $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ je složena funkcija jer se koordinate čestice u vremenu mijenjaju po nekom zakonu $x_i = x_i(t)$ te je izvod po vremenu substitucionalan:

$$dT/dt = \partial_t T + v_1 \partial_1 T + v_2 \partial_2 T + v_3 \partial_3 T \quad (1.6.12)$$

1.7. POČETNI I GRANIČNI USLOVI ZA JEDNAČINE TEORIJE PLASTIČNOSTI

Uslovi na granici plastično deformisanog tijela su formalizovani fizički uslovi ili njihov matematički model, kao bitna pretpostavka mogućnosti rješenja razmatranog problema. U cilju vizuelne interpretacije graničnih hipoteza može se razmatrati jednostavan slučaj sabijanja cilindra (sl.1.7.1) koji u nekom trenutku t zauzima zapreminu V i ograničen je sa površinom S , koja se sastoji iz dva dijela: kontaktne površine sa krutim alatom (S_v i S_s) i površine slobodne od dejstva alata. Kretanje alata je poznato i dato funkcijom $v_A = v_A(x_1, x_2, x_3, t)$.



Sl.1.7.1. Interpretacija graničnih površi pri deformaciji cilindra

Kao što je poznato u nekim uslovima [20,33,11,12], na dijelu kontaktne površine dolazi do lijepljenja deformisanog metala na površinu alata S_v . Tada će na ovoj površini brzina kretanja čestice deformisanog metala biti jednaka brzini alata. Uslov se može matematički zapisati u obliku:

$$\forall M \in S_v \quad v_i = v_A \quad (1.7.1)$$

Na kontaktnoj površini može također doći do klizanja metala po površini alata. Ova površina je označena sa S_s i na njoj su normalne komponente brzine alata i deformisanog metala jednake. Normalna komponenta brzine alata se može odrediti izrazom $v_{AN} = v_A \vec{n}$, gdje je \vec{n} – vektor normale na površini alata. U tangencijalnom pravcu komponente brzine alata i metala se razlikuju i definišu vektor $\vec{v}_s = \vec{v}_{AT} - \vec{v}_T$. Na površini klizanja S_s na deformisani metal, djeluje napon trenja $\vec{\tau}$ čiji pravac se poklapa sa \vec{v}_s .

Modul ovog vektora zavisi od uslova na površini S_s , normalnog napona p , brzine klizanja v_s itd. Zavisnost τ i p je u obradi deformisanjem složena, nelinearna. U opštem slučaju moguće je postaviti zavisnost $\tau = \tau(p, v_s)$, pri čemu važi $\partial \tau / \partial v_s \gg 0$. To znači da se granični uslovi za slučaj trenja klizanja mogu formulisati u obliku:

$$\forall M \in S_s \quad \vec{v}_N = \vec{v}_{AN}; \quad \vec{\tau} = \tau(p, v_s) \vec{i} \quad (1.7.2)$$

Na slobodnoj površini S_F može se smatrati da je u opštem slučaju zadan vektor površinskog napona $\vec{f}_A(x_i, t)$. U najvećem broju u praksi prisutnih slučajeva je $\vec{f}_A = 0$, tj. površina S_F je slobodna od opterećenja. Izdvajanjem beskonačno malog tetraedra oko tačke površine S_F moguće je doći do relacije koja definiše ograničenje za komponente tenzora napona deformisanog metala oko slobodne površine [15, 29, 34]:

$$\forall M \in S_F \quad f_i = \sigma_{ij} n_j = f_{Ai} \quad (1.7.3)$$

Važno je razmotriti temperaturne uslove na granici deformisanog tijela koji u formalizovanom vidu definišu medjudejstvo obradka i okolne sredine.

Najprostiji uslov je kada se na dijelu površine tijela S_1 zadaje temperatura u obliku:

$$\forall M \in S_1 \quad T = T_z \quad (1.7.4)$$

gdje je T_z - zadana funkcija položaja tačke M na površini S_1 i vremena t .

Druga mogućnost je da se na nekoj površini tijela S_2 zada toplotni protok q_z kao funkcija položaja tačke M na S_2 i vremena t . Granični uslov se tada može zapisati u obliku:

$$\forall M \in S_2 \quad \lambda \partial T / \partial n = \pm q_z \quad (1.7.5)$$

Granični uslov se može zadati na površini tijela S_3 u obliku:

$$\forall M \in S_3 \quad \lambda \partial T / \partial n = \alpha (T_z - T) \quad (1.7.6)$$

gdje je α - koeficijent razmjene toplote koji je funkcija koordinata tačke na površini S_3 i vremena t ; T_z - temperatura okruženja.

Na površini kontakta alata i deformisanog tijela $S_4 = S_v \cup S_s$ moguće je zadati granične temperaturne uslove uz pretpostavku jednakosti temperatura alata i obradka. Osim toga saglasno zakonu o održanju toplotne energije specifični toplotni protoci su vezani jednačinom toplotnog balansa tj. toplota trenja se odvodi na alat i deformisano tijelo. Ovaj uslov ima sljedeću matematičku interpretaciju:

$$\forall M \in S_4 \quad T_A = T_T \quad (1.7.7)$$

$$\tau v_s = \lambda_T \frac{\partial T_T}{\partial n_T} - \lambda_A \frac{\partial T_A}{\partial n_A}$$

gdje se indeksi A i T odnose na alat i deformisano tijelo.

Osim graničnih, važno je definisati i početne uslove [20] pod kojima se podrazumijevaju značenja traženih promjenljivih u svakoj tački M deformisanog tijela u početnom trenutku $t=0$:

$$x_i|_{t=0} = x_{i0}; \quad v_i|_{t=0} = v_{i0}; \quad T|_{t=0} = T_0(x_{i0}) \quad (1.7.8)$$

Početni uslovi se odredjuju na osnovu fizičkih pretpostavki u početku deformacije što može biti složen zadatak ako tijelo ne miruje ili nema konstantnu temperaturu ili gustinu.

Model graničnih uslova može biti usavršavan i na razne načine zapisan pri čemu isti treba da obezbijedi mogućnost kao i jedinstvenost rešenja razmatranog problema.

1.8. TIPIČNA UPROŠĆENJA JEDNAČINA TEORIJE PLASTIČNOSTI

Pri analitičkom rešavanju zadatka obrade metala deformisanjem nailazi se na velike poteškoće pa je opravdana primjene uprošćenja koja ne bi bila protivrečna fizici konkretnog izučavanja plastičnog tečenja, a olakšala bi rešavanje. Navode se karakteristična, najčešće korišćena [12, 20, 21, 15, 29, 33, 34]:

1. Uprošćenja vezana sa smanjenjem broja nezavisno promjenljivih:

- a) stacionarno kretanje ($\partial/\partial t=0$). Takvo je npr. kretanje metala u žarištu deformacije pri valjanju i vučenju;
- b) ravansko deformaciono stanje ($\partial/\partial t=0$, $v_z=0$) kao npr. proces valjanja dovoljno široke trake;

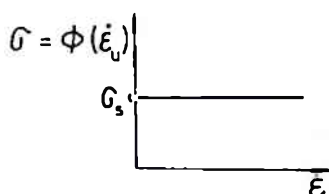
- c) ravansko naponsko stanje ($\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$, a ostale σ_{ij} ne zavise od z). Na primjer, ravanski se može tretirati naponsko stanje u velikom dijelu žarišta deformacije pri deformisanju lima;
- d) osnosimetrično naponsko-deformaciono stanje ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$). Takvo je npr. naponsko-deformaciono stanje u žarištu deformacije pri vučenju i presovanju šipkastih materijala, pri sabijanju i kovanju cilindričnih uzoraka itd.;
- e) potencijalno kretanje ($\vec{u} = \text{grad}\varphi$). U ovom slučaju pri rešavanju ravnih problema moguće je primjena metoda teorije funkcija kompleksne promenljive [21];

2. Uprošćava se reološki model deformišuće sredine:

- a) materijal se smatra nestišljivim ($\text{div } \vec{v} = 0$), tj. materijal je kompaktna a gustina konstantna;
- b) zanemaruju se elastične deformacije. Pri velikim deformacijama koje su prisutne u OMD $\epsilon_{ij}^e \ll \epsilon_{ij}^p$ tj. može se prihvatiti da je $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^p$;
- c) pretpostavlja se idealna plastičnost. Pri postojanju krutih zona sredina se naziva krutoplastičnom sredinom Sen-Venana. Fizičke jednačine datog modela imaju oblik:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.8.1)$$

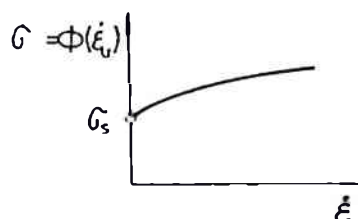
$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} 0 & \sigma_u^2 < \sigma_s^2 = \text{const.} \\ \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_u}{\sigma_u} \sigma_{ij} & \sigma_u^2 = \sigma_s^2 \end{cases} \quad (1.8.2)$$



Sl.1.8.1. Model krutoplastične sredine

Može se takodje razmatrati i model krutoviskoznoplastične sredine za koju će biti:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} 0 & \sigma_u^2 < \sigma_s^2 = \text{const.} \\ \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_u}{\sigma_u} \sigma_{ij} & \sigma_u^2 > \sigma_s^2 \end{cases} \quad (1.8.3)$$



SI.1.8.2. Model krutoviskoznoplastične sredine

gdje je $\sigma_u = \Phi(\dot{\epsilon}_u)$ pri čemu je: $\Phi(\dot{\epsilon}_u) > \sigma_s$ i $\Phi'(\dot{\epsilon}_u) > 0$ za $\dot{\epsilon}_u > 0$.

Pri razmatranju neizotermalnih zadataka će biti $\sigma_u = \Phi(\dot{\epsilon}_u, T)$, a ako osim toga postoji i očvršćavanje sredine to se pretpostavlja $\sigma_u = \Phi(\dot{\epsilon}_u, T, \epsilon_u)$.

Ako se pretpostavi da krute zone odsustvuju, jednačine (1.8.2) i (1.8.3) dobijaju uprošćeni oblik:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}_u}{2\sigma_s} \sigma_{ij}, \quad \sigma_u^2 \equiv \sigma_s^2 \quad (1.8.2)'$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}_u}{2\sigma_u(\dot{\epsilon}_u)} \sigma_{ij}, \quad \sigma_u^2 \equiv \Phi^2(\dot{\epsilon}_u) > \sigma_s^2 \quad (1.8.3)'$$

Mogući su i drugi vidovi uprošćenja svojstava deformišuće sredine [20,21,77]. Ovakve pretpostavke su u velikom broju slučajeva opravdane jer se dobijaju jednostavni uslovi plastičnosti. Moguća je razrada matematičke teorije za konkretne zadatke a rezultati su zadovoljavajući;

- d) pretpostavka o izotermičnosti procesa ($T(x_i, t) = \text{const.}$). U ovom slučaju broj nepoznatih funkcija, koje određuju fizičko-mehaničko stanje se smanjuje za jedinicu – iz sistema jednačina se isključuje jednačina toplotevodnosti.
- e) procesi OMD su često dovoljno spori da se mogu isključiti zapreminske sile kao što su težina i inercijalna sila. Ako je tečenje dovoljno lagano i bez zapreminskih sila diferencijalne jednačine kretanja se uprošćavaju i nazivaju diferencijalnim jednačinama ravnoteže. Opravdanost ove hipoteze treba pažljivo izučiti u svakom konkretnom slučaju.

3. linearizacija jednačina i graničnih uslova. Nelinijnost je uzrok značajnih poteškoća u matematičkim metodama ispitivanja i rešavanja zadataka. Zato se nelinejske jednačine linearizuju, na primjer, linijska teorija beskonačno

malih deformacija ($|\partial_j u_i| \ll \delta \ll 1$). Ako je tangencijalni napon τ_{xy} kod ravnog problema blizak naponu tečenja τ_s nelinejski uslov plastičnosti se približno može zamijeniti linijskim $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$ [77,80]. Linearizuju se i uprošćavaju i granični uslovi. Na primjer, pri razmatranju malih deformacija granični uslovi se često razmatraju na površini Σ_0 nedeformisanog tijela. Time je omogućeno da se u prvom približenju može odrediti deformisana granica Σ . Smatra se takodje da je napon trenja jednak na cijeloj kontaktnoj površini sabijenog plastičnog sloja [21].

4. U nekim slučajevima rješenje zadatka OMD je jednostavnije ako se dekarove koordinate zamijene krivolinijskim sistemom koordinata.
5. Prekidi napona i brzina. Uslov o neprekidnosti rešenja zadatka u deformacionoj oblasti V može biti neprimenljiv za mnoge zadatke. Takva potreba dovodi do odsustva rješenja, koje se može obezbijediti pretpostavkom parcijalne neprekidnosti traženih funkcija. Prekidna rješenja se često mogu iskoristiti za uprošćenje zadatka i kada neprekidna rješenja postoje.

Razlikuju se površi slabog i jakog prekida. Na površima slabog prekida tražene funkcije su neprekidne a prekide imaju samo njihovi izvodi (na primjer, granica razdvajanja elastične ili krute oblasti s jedne strane i plastične s druge strane). Pri prolazu kroz oblast jakog prekida, prekid imaju samo tražene funkcije.

Prekidi napona ne mijenjaju oblik jednačina održanja mehaničke energije. Ako je Σ_p površina prekida brzina, to se u jednačini zakona održanja mehaničke energije javlja dopunska komponenta koja održava snagu na površi prekida N_c [29]:

$$N_c = \iint_{\Sigma_p} \tau_v \Delta v_\tau d\Sigma_p \quad (1.8.4)$$

gdje su: $\Delta v_\tau = |\vec{v}_\tau - \vec{v}_\tau^+|$ - veličina prekida tangencijalne komponente brzine, τ_v - projekcija tangencijalne komponente vektora napona na pravac $\Delta \vec{v}_\tau$.

2. INŽENJERSKO-MATEMATIČKE METODE PRIMIJENJENE TEORIJE PLASTIČNOSTI

Razvojem tehnologije obrade metala deformisanjem javljaju se složeni problemi vezani za odredjivanje sila, potrošnju energije, izbor optimalnih tehnoloških parametara deformacije itd. Na njih je moguće odgovoriti samo na naučnoj osnovi, koristeći različite metode ispitivanja procesa OMD. Sve metode ispitivanja procesa OMD mogu se razdijeliti na tri klase: analitičke, eksperimentalne i eksperimentalno-analitičke.

Analitičke metode su zasnovane na zamjeni ispitivanog realnog fizičkog objekta matematičkim modelom, ponašanje kojeg s dovoljnom tačnošću odražava ponašanje samog fizičkog objekta. Pri analitičkim ispitivanjima je neophodno realni materijal i realni proces zamijeniti njihovim modelima, pri čemu se pod modelom procesa podrazumijeva uprošćena predstava o njemu koja dozvoljava da se proces matematički opiše (odjeljak 1.8.; glava 1.) Za ovakav pristup karakteristične su dvije vrste grešaka i to one vezane sa netačnošću opisivanja svojstava tijela i greške vezane s netačnošću opisivanja procesa. To uslovljava da je za verifikaciju analitičkog rešenja neophodna eksperimentalna provjera.

Eksperimentalne metode su vezane za ispitivanje realnih materijala u realnim procesima. Vrlo često radi uštede u materijalu i kalupima ispitivanja se provode na geometrijski sličnim pripremcima smanjenih dimenzija. Objedinjavanje eksperimenata i teorijske analize omogućilo je da se razviju eksperimentalno-analitičke metode koje predstavljaju uspješan aparat ispitivanja i najsloženijih procesa OMD.

Dalje se daje kratki prikaz raznih, najčešće korišćenih metoda u OMD i izučava mogućnost analitičkog rešavanja razmatranog problema.

2.1. ANALITIČKE METODE

2.1.1. Inženjerska metoda

Teorijske osnove ove metode postavili su još E.Zibel i S.N.Gupkin [12,67], a konačno ga razradili E.P.Unksov [65] i M.V.Storožev, E.A.Popov [55, 56]. Metoda je zasnovana na zajedničkom rešavanju jednačina ravnoteže i uslova plastičnosti. Često se koristi linearizacija uslova plastičnosti i pretpostavlja se naponsko-deformaciono stanje ravanskim. Ovo omogućava da se odrede približne vrijednosti za sile i deformacije, a takodje i provede analiza prostijih zadataka plastične deformacije.

2.1.2. Metoda karakteristika (linija klizanja)

Pod linijama klizanja se podrazumijevaju linije maksimalnih tangencijalnih napona duž kojih odsustvuju deformacije izduženja. Te linije se poklapaju sa karakteristikama diferencijalnih jednačina ravanskog zadatka teorije idealne plastičnosti. Veliki doprinos razvoju ove metode su dali: L.Prandtl, A.A.Iljušin, S.G.Mihlin, R.Hil, V.V.Sokolovski, A.D.Tomlenov i drugi [21,54, 61, 67, 69].

Naponi ravanskog zadatka teorije plastičnosti su dati izrazom:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \sigma_{yy} &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

gdje su: k - maksimalna vrijednost tangencijalnih napona; θ - ugao nagiba linije klizanja prema osi x . Primjenom (2.1.1) je moguće dobiti integrale diferencijalnih jednačina ravnoteže:

$$\begin{aligned}\sigma - 2k\theta &= \xi(\beta) \\ \sigma + 2k\theta &= \eta(\alpha)\end{aligned}\quad (2.1.2)$$

gdje su $\xi(\beta)$ i $\eta(\alpha)$ - proizvoljne funkcije duž linija α i β sukcesivno. Iz jednačina (2.1.2) se vidi da je jedan od glavnih problema u metodi linija klizanja način postavljanja linija klizanja poslije čega se naponsko sta-

nje relativno lako nalazi. Za postavljanje linija klizanja se koriste sljedeće metode [54, 55, 67]:

- a) Kada je to moguće postavlja se polje linija klizanja bez rješenja jednačina na bazi analize uslova zadatka i korišćenja geometrijskih svojstava linija klizanja. U nekim prostijim slučajevima na ovaj način je moguće elementarnim putem dobiti zatvoreno analitičko rješenje;
- b) Koristeći teoriju linija klizanja moguće je dobiti polje linija klizanja grafičkim metodama;
- c) Nekada je korisno odrediti polje linija klizanja po koordinatama čvornih tačaka odredjenih analitički. Primjena ove metode je ograničena neophodnim pretpostavkama o idealnom kruto-plastičnom materijalu i ravansko-deformacionim uslovima deformisanja.

2.1.3. Energetske metode

Ove metode omogućavaju da se tačno ili približno odrede naponsko-deformaciona stanja, izbjegavajući kao i u slučaju primjene metode linija klizanja integraljenje diferencijalnih jednačina teorije plastičnosti. To se postiže korišćenjem ekstremalnih i varijacionih principa zasnovanih na zakonu održanja energije. Treba istaći da varijacione metode omogućavaju da se riješe vrlo složeni zadaci obrade deformisanjem u njihovoj opštoj postavci. Niže se razmatraju ekstremalni i varijacioni principi u duhu njihove primjene na realne, kontaktne zadatke plastičnosti.

2.1.3.1. Ekstremalni principi za kruto-plastično tijelo

Fundamentalne postavke ovih metoda su postavili R.Hil, I.M.Kačanov, P.G. Prager [67,29,34], a veliki doprinos njihovoj razradi i primjeni u praktičnim zadacima obrade deformisanjem su dali A.A.Markov, I.J.Tarkovski, Z.Zibel, L.G.Stepanski i dr. [57,58,59]. Primjena idealizirane šeme kruto-plastičnog materijala vezana je sa poteškoćama u smislu uporedjenja rješenja sa rješenjem istog zadatka, ali za slučaj elasto-plastičnog ponašanja

materijala. Ipak, koncepcija kruto-plastičnog tijela je omogućila da se dodje do niza novih rješenja veoma dobro potvrđenih opitom i da se pravilnije formulišu mnogi zadaci teorije plastičnosti.

Osnovne energetske jednačine: Razmatra se tijelo zapremine V , ograničeno površinom $S=S_F+S_V+S_S$. Prema (odjeljku 1.7; glava 1): S_F, S_V, S_S se odnose na djelove površine sa zadanom silom, brzinom i mješovitim graničnim uslovima, sukcesivno. Polje napona tijela σ_{ij} zadovoljava diferencijalne jednačine ravnoteže (1.2.20) unutar tijela, a uravnotežava se sa površinskim naponima x_{ni} . Polju brzina tijela v_i odgovaraju komponente brzine deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}$ (1.3.3). Uvedena polja σ_{ij} i brzina v_i nemaju drugih ograničenja i u principu nijesu međusobno povezana. Radi jednostavnosti uzima se da zapreminske sile odsustvuju. Tada za svaku neprekidnu sredinu važi sljedeća osnovna jednačina:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S x_{ni} v_i dS \quad (2.1.3)$$

Jednačina (2.1.3) se može lako dokazati ako se zamijeni jednačina (1.7.3) u njen desni integral:

$$\int_S x_{ni} v_i dS = \int_S \sigma_{ij} v_i n_j dS \quad (2.1.4)$$

pa se zatim iskoristi transformacija površinskog u zapreminski integral po formuli Ostrogradskog - Gausa:

$$\int_S \sigma_{ij} v_i n_j dS = \int_V v_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2.1.5)$$

Prvi integral u (2.1.5) jednak nuli na osnovu diferencijalnih jednačina ravnoteže (1.2.20) te se time i dobija (2.1.3).

U cilju uspješne primjene u praktičnim zadacima, jednačinu (2.1.3) je potrebno uopštiti za slučaj tijela koje ima krute (nedeformisane) oblasti i za slučaj prekidnih polja brzina i napona. Prvo uopštenje se postiže tako što se razmatra tijelo koje sadrži deformisane (sa zapreminom V_D i površinom S_D)

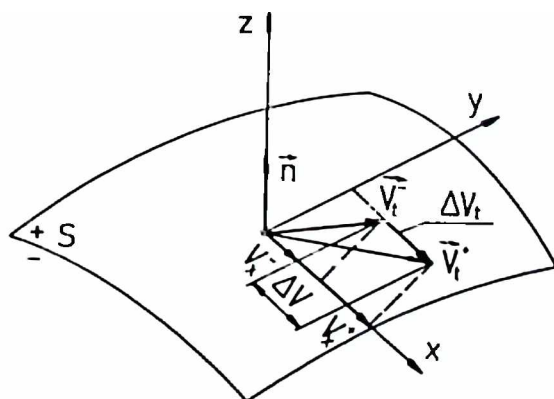
i krute (sa zapreminom V_k i površinom S_k) oblasti medjusobno razdijeljene površinom Σ , na kojoj su brzine i naponi neprekidni, pa se dobija prema (2.1.4):

$$\begin{aligned} \int_{V_D} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int_{S_D} x_{ni} v_i dS + \int_{\Sigma} x_{ni} v_i dS \\ 0 &= \int_{S_D} x_{ni} v_i dS - \int_{\Sigma} x_{ni} v_i dS \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Sabiranjem jednačina u (2.1.6) dobija se (2.1.3) što znači da osnovne energetske jednačine važe za tijelo u cjelini, uključujući i krute zone.

Za slučaj prekida napona, neka sa jedne strane prekida djeluju površinske sile x_{ni} , a sa druge $-x_{ni}$. Tada će se pri slaganju jednačine za odvojene djelove tijela integrali na površini prekida medjusobno anulirati, što znači da prekidi napona ne utiču na oblik osnovne energetske jednačine.

Prekid brzine je moguć samo kod komponente brzine koja leži u tangentnoj ravni površine prekida, inače bi došlo do narušenja kontinuiteta. U proizvoljnoj tački površine prekida S_p (sl.2.1.1) postavlja se lokalni koordinatni sistem x, y, z . Neka su \vec{v}_t^+ i \vec{v}_t^- tangentne komponente brzine sa pozitivne i negativne strane površine S_p . Neka je $\Delta \vec{v} = \vec{v}_t^+ - \vec{v}_t^-$ vektor relativne brzine duž kojeg je usmjerena osa x .



Sl.2.1.1. Površina prekida brzine

Površinu prekida treba razmotriti kao granični slučaj tankog sloja sa kontinualnom, no veoma oštrom izmjenom brzine po debljini. Oštra izmjena brzine je karakteristična za komponentu v_x dok komponente v_y i v_z su skoro

konstante po debljini sloja. To znači da pri graničnom slučaju kada debljina sloja teži 0 smičuća komponenta brzine deformacije $\dot{\epsilon}_{xz} \rightarrow \alpha$. Neka je τ tangencijalna komponenta napona na površini prekida S_p u pravcu ose x i neka element površine dS_p razdvaja dvije oblasti sa zapreminom V_s' i V_s'' . Tada će odgovarajuće snage napona za oblasti V_s' i V_s'' imati oblik:

$$\begin{aligned} & (\sigma_n v_n + \tau_y v_y + \tau v^-) dS_p \\ & - (\sigma_n v_n + \tau_y v_y + \tau v^+) dS_p \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

gdje su: $\tau_y, v_y, \sigma_n, v_n$ - odgovarajuće naponske i brzinske komponente u pravcu y i n . Sada će suma snage napona za element površine biti:

$$dN_p = \tau |\Delta v_p| dS_p \quad (2.1.8)$$

pri čemu je sa $|\Delta v_p| = v_x^+ - v_x^-$ označen skok brzina. Ukupna snaga na svim površinama prekida će biti:

$$N_p = \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau |\Delta v_p| dS \quad (2.1.9)$$

Snagu prekida brzina treba uključiti u osnovnu energetska jednačinu (2.1.3) tako da se dobija najopštija energetska jednačina koja važi za svaku neprekidnu sredinu koja se nalazi u ravnoteži [29]:

$$\int_S x_{ni} v_i dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau |\Delta v_p| dS \quad (2.1.10)$$

Lijeva strana jednačine (2.1.10) označava snagu površinskih sila, a desna strana ukupnu snagu disipacije. Ako se uzme u obzir činjenica da je površina prekida ujedno i površina maksimalnog tangencijalnog napona (površina klizanja) kao i podjela površine $S = S_F + S_v + S_s$, jednačina (2.1.10) dobija oblik:

$$\begin{aligned} & \int_{S_F} x_{ni}^* v_i dS + \int_{S_v} x_{ni} v_i^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(n)} v_{ni}^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(\tau)*} v_{\tau i} dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \\ & + \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau |\Delta v_p| dS \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

gdje su sa (*) označene zadane funkcije. Na površini kontakta u zoni klizanja S_s vektori sile i brzine su predstavljeni u vidu sume normalnih i tangencijalnih komponentata:

$$x_{ni} = x_{ni}^{(r)} + x_{ni}^{(n)} \quad (2.1.12)$$

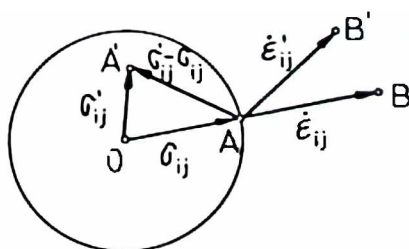
$$v_i = v_{\tau i} + v_{ni}$$

Jednačina (2.1.11) je osnovna energetska jednačina za kruto-plastično tijelo.

Kinematska teorema: Neka su $\sigma_{ij}, v_i, \dot{\epsilon}_{ij}$ - stvarna polja napona, brzine pomjeranja i brzine deformacija. Uporedo sa stvarnim razmatra se kinematski moguće polje brzina v_i' koje zadovoljava uslov nestišljivosti $\text{div } \vec{v}' = 0$, a na površini tijela kinematske (1.7.1) i mješovite (1.7.2) granične uslove. Kinematski moguće brzine deformacije su prema (1.3.3): $\dot{\epsilon}_{ij}' = (\nabla_i v_j' + \nabla_j v_i')$. Njima prema (1.5.12) odgovaraju naponi σ_{ij}' koji u opštem slučaju ne zadovoljavaju jednačine ravnoteže. Za raspored stvarnih napona σ_{ij} i kinematski mogućeg polja brzina v_i' osnovna energetska jednačina (2.1.10) može biti napisana u obliku:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}' dV + \sum_{p=1}^n \tau_p \int_{S_p'} \Delta v_p' dS' - \int_S x_{ni} v_i' dS = 0 \quad (2.1.13)$$

gdje je S_p' - kinematski moguća površina prekida brzina.



Sl.2.1.2. Analiza pri izvodjenju kinematske i statičke teoreme

U devetodimenzionom prostoru napona i brzine deformacije [3] ugao između napona i brzine deformacije je jednak nuli a njihov proizvod za kruto-plastično tijelo će biti:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \tau_s \dot{\gamma}_u \quad (2.1.14)$$

Ugao između vektora σ_{ij} i $\dot{\epsilon}_{ij}$ u opštem slučaju nije nula pa slijedi:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < \tau_s \dot{\gamma}_u \quad (2.1.15)$$

Iz (2.1.10) i (2.1.13) se dobija:

$$N \leq N_v \quad (2.1.16)$$

gdje snaga N_v može imati različite vrijednosti za razna kinematski moguća polja brzina, a snaga N je definisana izrazom:

$$\begin{aligned} N &= \tau_s \int_V \dot{\gamma}_u dV + \sum_{p=1}^n \tau_s \int_{S_p} \Delta v_p dS - \int_{S_F} x_{ni}^* v_i dS - \int_{S_s} x_{ni}^{(\tau)*} v_{\tau i} dS = \\ &= \int_{S_v} x_{ni} v_i^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(n)*} v_{ni} dS \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

i naziva se potpunom snagom stvarnih površinskih napona x_{ni} i $x_{ni}^{(n)}$ na zadanim brzinama tj. na S_v : $v_i^l = v_i^*$ i na S_s : $v_{ni}^l = v_{ni}^*$. Ti naponi – površinski naponi x_{ni} na S_v i normalni površinski naponi $x_{ni}^{(n)}$ na S_s su nepoznati i nužno ih je naći u toku rešavanja zadatka plastičnosti. Kinematska teorema (2.1.16) ustanovljava gornju ocjenu snage: potpuna snaga dostiže apsolutni minimum za stvarno polje brzine.

Statička teorema: Neka su kao i u prethodnom slučaju σ_{ij} , v_i , $\dot{\epsilon}_{ij}$ – stvarna polja koja karakterišu naponsko-deformaciono stanje krutoplastičnog tijela. Razmatra se statički moguće polje napona σ_{ij}^l koje zadovoljava unutar tijela diferencijalne jednačine ravnoteže, a na površini S_F i S_s – statičke i mješovite granične uslove za napone:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma_{ij}^l &= 0, \quad x \in V \\ x_{ni}^l &= \sigma_{ij}^l n_j = x_{ni}^*, \quad x \in S_F \\ x_{ni}^{(\tau)l} &= x_{ni}^{(\tau)*}, \quad x \in S_s \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Statički mogući naponi zadovoljavaju jednačinu (2.1.10):

$$\int_V \sigma_{ij}^i \dot{\epsilon}_{ij} dV + \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau^i \Delta v_p dS = \int_S x_{ni}^i v_i dS \quad (2.1.19)$$

Uzimajući u obzir da je zbog konveksnosti površine opterećenja (sl.2.1.2):

$$(\sigma_{ij}^i - \sigma_{ij}) v_{ij} \leq 0 \quad (2.1.20)$$

i oduzimajući (2.1.19) od (2.1.10) dobija se uz uslov $\tau^i < \tau_s$:

$$\int_{S_v} x_{ni} v_i^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(n)} v_{ni}^* dS \geq \int_{S_v} x_{ni}^i v_i^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(n)i} v_{ni}^* dS \quad (2.1.21)$$

$$\text{ili} \quad N \geq N_F \quad (2.1.22)$$

Statička teorema utvrđuje da je snaga stvarnih površinskih sila na zadanim brzinama veća od snage površinskih sila koje odgovaraju drugom statički mogućem polju napona.

2.1.3.1.1. Energetske metode zasnovane na ekstremalnim principima

Za mnoge operacije obrade metala opterećenje koje izaziva potrebnu deformaciju je teško odrediti, tako da je svrsishodno razmatrati približne metode ocjene. Pomoću, u prethodnom poglavlju razradjenih ekstremalnih principa, moguće je ustanoviti gornju i donju ocjenu.

Donja procjena radnog pritiska i deformacione sile određuje se po statički mogućem polju linija klizanja koje zadovoljava diferencijalne jednačine ravnoteže, jednačine funkcionalnih zavisnosti napona i brzina deformacije i granične uslove za napone, ali ne zadovoljava kinematske uslove. Gornja procjena radnog pritiska i deformacione sile određuje se po kinematski mogućem polju linija klizanja koje zadovoljava uslove kontinuiteta i granične uslove za projekcije brzina pomjeranja, ali ne zadovoljava uslove ravnoteže. Pošto je razlika vrijednosti dobijenih po metodi gornje i donje procjene relativno mala, a gornju ocjenu je jednostavnije dobiti, to se rješavanje nekih

problema u tehničkoj praksi može ograničiti na vrijednosti dobijene metodom gornje procjene [80, 135] kada osnovna energetska jednačina prema (2.1.17) ima oblik:

$$\begin{aligned} & \int_V \dot{\gamma}_u dV + \sum_{p=1}^n \tau_s \int_{S_p} \Delta v_p dS - \int_{S_F} x_{ni}^* v_i dS - \int_{S_s} x_{ni}^{(1)*} v_{\tau i} dS = \\ & = \int_{S_v} x_{ni} v_i^* dS + \int_{S_s} x_{ni}^{(n)} v_{ni}^* dS \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Zbog složenosti vezanih za računanje snage unutrašnjih sila ide se na uprošćavanje relacije (2.1.23). U ekstremalnim principima ta ideja je djelimično realizovana zamjenom snage vezane za neravnomjernost deformacije snagom utrošenom na smičućim površinama. U ovoj modifikaciji za ravan-ski deformacioni slučaj se može poći korak dalje [80] i pretpostaviti da je deformaciona oblast razbijena na trouglove u kojima deformacija odsustvuje, a izmjena oblika se ostvaruje relativnim smicanjem ovih blokova. Ako se još uzme u obzir činjenica da se najčešće dio konture S_F ne mijenja, osnovna nejednačina (2.1.17) dobija oblik:

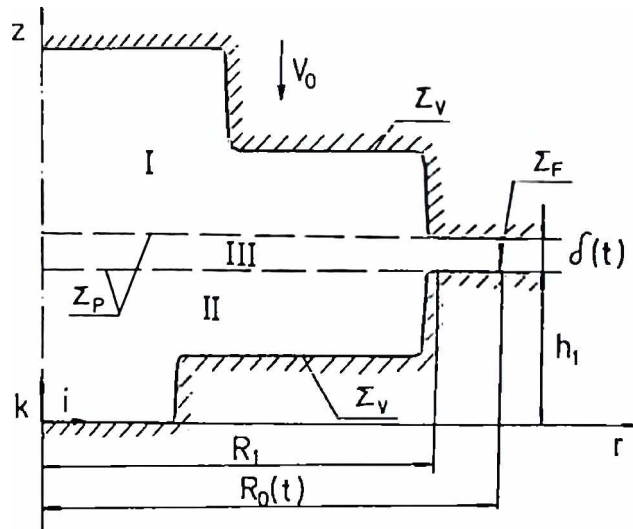
$$\int_{S_v} x_{ni} v_{io} dS \leq \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau_s |\Delta v_p^*| dS \quad (2.1.24)$$

gdje su u S_p uključene i kontaktne površine. Jednačina (2.1.24) je osnovna energetska nejednačina za ravni deformacioni slučaj modifikovane metode gornje procjene. Konstrukcija statičkih i kinematskih polja za deformacione procese sa složenom geometrijom je vrlo otežana. Takođe, problemi se javljaju ako treba uključiti očvršćavanje metala ili pak, lokalno ocijeniti raspored napona i deformacija po deformisanom uzorku.

2.1.3.1.2. Primjer jednostavne primjene energetske metode pri zapreminskom deformisanju

Kao što je istaknuto u (2.1.3.1.1) primjena ove metode je najčešće ograničena na konačni stadijum procesa, pri čemu se pretpostavlja da je deformišući materijal potpuno popunio šupljinu kalupa. U tom cilju se može postaviti kinematski moguće polje brzina $\dot{v}(r,t)$ na sljedeći način (sl.2.1.3):

u podoblasti I se pretpostavlja da je $v = -v_0(t)k$ ($|k|=1$); u podoblasti II se prihvata $\vec{v}=0$; u podoblasti III se brzina bira tako da zadovoljava uslov nestišljivosti. Pri tome se granica podoblasti III sastoji iz linije prekida tangencijalnih brzina Σ_P i od slobodnog od opterećenja kraja Σ_F .



Sl.2.1.3. Kinematski moguća šema završne faze kovanja

Jednačina nestišljivosti (1.3.21) u cilindričnom sistemu koordinata je:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.1.25)$$

ili za osnosimetrični slučaj:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.1.26)$$

Neophodno je priključiti još i dva granična uslova koja slijede iz neprekidnosti normalnih brzina na površinama prekida unutar deformisanog materijala:

$$v_z(z = h_1 + \delta) = -v_0; \quad v_z(z = h_1) = 0 \quad (2.1.27)$$

Rješenje jednačine (2.1.25) će biti traženo uz pretpostavku:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = c(t) = \text{const} \quad (2.1.28)$$

odakle se uz uzimanje u obzir drugog graničnog uslova iz (2.1.26) dobija:

$$v_z(z) = c(z - h_1) \quad (2.1.29)$$

Preostali granični uslov iz (2.1.27) se može iskoristiti za određivanje konstante $c(t)$:

$$c(t) = -v_o / \delta < 0 \quad (2.1.30)$$

Sada je moguće integraliti (2.1.26) uz uzimanje u obzir uslova $v_r(r=0)=0$:

$$v_r(r, t) = -\frac{cr}{2} \quad (2.1.31)$$

Na osnovu (2.1.31) i uslova nestišljivosti mogu se odrediti komponente brzine deformacije, a potom prema (1.3.32) i intenzivnost brzine deformacije:

$$\dot{\epsilon}_u = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} + c^2 \right)} = -c > 0 \quad (2.1.32)$$

dok će intenzivnost tangencijalnih brzina deformacije biti:

$$\dot{\gamma}_u = -\sqrt{3} c \quad (2.1.33)$$

Saglasno energetske metode (2.1.16) moguće je naći snagu N_v koja odgovara postavljenom, kinematski mogućem polju brzina za model krutoplastičnog tijela:

$$N_v = \int_V \tau_s \dot{\gamma}_u^* dV + \sum_{p=1}^n \int_{S_p} \tau_s \dot{\gamma}_p^* dS = \tau_s \int_0^{R_o} \int_{h_1}^{h_1+\delta} 2r dr \int_{h_1}^{h_1+\delta} dz + \\ + 2 \tau_s \int_0^{R_o} \left(-\frac{cr}{2}\right) 2r dr = -\frac{\tau_s c R_o^2}{3} [3\sqrt{3}\delta(t) + 2R_o(t)] \quad (2.1.34)$$

Snaga površinskih sila na zadanim brzinama će prema (2.1.17) biti:

$$N = \int_{S_v} x_{ni} v_{io} dS = \int_{S_v} p(-v_o \vec{k}) dS = -v_o P \quad (2.1.35)$$

gdje je P - potrebna sila procesa.

Izjednačavanjem (2.1.34) i (2.1.35) prema uslovu energetske metode dobija se:

$$P = \frac{\tau_s c R_o^2}{3v_o} [3\sqrt{3}\delta + 2R_o] \quad (2.1.36)$$

ili poslije uzimanja u obzir (2.1.30):

$$P = - \frac{\tau_s \pi R_o^2}{3\delta} [3\sqrt{3}\delta + 2R_o] \quad (2.1.37)$$

Dobijeno rješenje (2.1.37) se može poboljšati ako se uzme u obzir viskozno-st materijala ili njegovo očvršćavanje. Na primjer, pri razmatranju procesa u toplom stanju često se razmatra model viskoplastičnosti tijela. Ako se ograničimo slučajem linijske viskoplastičnosti:

$$\tau_s(\dot{\gamma}_u) = \tau_s + \mu \dot{\gamma}_u / \sqrt{3} \quad (2.1.38)$$

analogno se dobija:

$$P = - \frac{(\tau_s + \frac{\mu v_o}{\delta}) \pi R_o^2}{3\delta} [3\sqrt{3}\delta + 2R_o] \quad (2.1.39)$$

2.1.3.2. Varijacione metode

Teorijske osnove varijacionih metoda su razradili A.A.Iljušin, L.M.Kačanov, I.J.Tarnovski, A.A.Pozdeev, O.A.Ganago, V.Džonson, X.Kudo i dr. [21, 22, 29, 58, 77, 80]. Varijacione metode su zasnovane na iskorišćenju zakona o održanju energije, te su po svojoj prirodi energetske. Ipak, one se odlikuju većim mogućnostima. One omogućavaju da se relativno prostim sredstvima dobiju približne, gornje ocjene deformacionih sila i radnih pritisaka. Posebno je važno što je pomoću ovih metoda u principu moguće utvrditi raspored napona i deformacija po cijeloj zapremini tijela, kao i oblik tijela nakon završenog procesa sa uticajem neravnomjernosti deformacije. Daskora glavna poteškoca pri primjeni ovih metoda je bio složeni matematički mehanizam, ali je ovaj problem u velikoj mjeri riješen primjenom računara.

2.1.3.2.1. Princip minimuma potpune energije deformacije

Tijelu koje se nalazi u ravnoteži pod dejstvom zadanih sila i pomjeranja saopštavaju se beskonačno mala i neprekidna pomjeranja δu_i , usaglašena sa graničnim uslovima (kinematski moguća pomjeranja). Varijaciona metoda se sada može formulisati [29] : suma radova svih spoljnih i unutrašnjih sila na mogućim pomjeranjima oko stanja ravnoteže je jednaka nuli. Matematički zapis ima oblik:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_S x_{ni} \delta u_i dS = 0 \quad (2.1.40)$$

gdje su x_{ni} - komponente spoljnih sila koje djeluju na površini tijela S .

U uslovima razvijenih plastičnih deformacija elastične deformacije se mogu zanemariti. To znači da prvi integral jednačine (2.1.40) predstavlja priraštaj rada koji se troši isključivo na promjenu oblika, ili priraštaj rada plastične deformacije. U tom slučaju za proračun priraštaja deformacija koriste se jednačine Levi-Mizesa (1.5.12). Zamjenom ovih jednačina u prvi integral (2.1.40) uz korišćenje izraza za intenzivnost napona σ_u (1.2.9) može se dobiti da varijacija rada unutrašnjih sila ima oblik.

$$\delta A_u = \delta \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_u \delta \epsilon_u dV = \int_V \tau_u \delta \gamma_u dV \quad (2.1.41)$$

Za slučaj kruto-plastičnog tijela slijedi prema Huber-Mizesovom uslovu plastičnosti (1.4.13) da se (2.1.41) može napisati u obliku:

$$\delta A_u = \sigma_s \int_V \delta \epsilon_u dV = \tau_s \int_V \delta \gamma_u dV \quad (2.1.42)$$

Kako u fazi plastičnog tečenja za nestišljivu sredinu varijacija napona ne proizvodi rad na stvarnim pomjeranjima to izraz za varijaciju rada spoljnih sila može biti zapisan u obliku:

$$\delta A_s = \int_S x_{ni} \delta u_i dS = \delta \int_S x_{ni} u_i dS \quad (2.1.43)$$

Uvrštavanjem (2.1.43) i (2.1.42) u (2.1.40) dobija se:

$$\delta \left[\tau_s \int_V \gamma_u dV - \int_S x_{ni} u_i dS \right] = 0 \quad (2.1.44)$$

Varijacija potpune energije deformacije (veličina u uglastoj zagradi) je jednaka nuli. Gornja jednačina je osnovna varijaciona jednačina primijenjena na proces plastične deformacije i može biti formulisana i na sljedeći način [29]: stvarni oblik ravnoteže tijela razlikuje se od svih mogućih oblika time što potpunoj energiji deformacije saopštava minimalnu vrijednost.

Jednačina (2.1.44) se može dalje prilagoditi za neposrednu primjenu. Naime, uzimajući u obzir činjenicu da je varijacija normalnih pomjeranja kinematski

nemoguća [58], to se varijacija rada spoljnih sila sastoji isključivo iz varijacije rada sila kontaktnog trenja:

$$\delta A_s = -\delta A_{tr} \quad (2.1.45)$$

Rad spoljnih sila se može izraziti u obliku:

$$A_{tr} = \xi \tau_s \int_S (u_i u_i)^{1/2} dS \quad (2.1.46)$$

gdje je $\xi (0 \leq \xi \leq 1)$ kontaktna funkcija koja zavisi od kontaktnih uslova i odnosa dimenzija zone deformacije. Ova veličina je složena funkcija niza mehaničkih, fizičkih i hemijskih faktora, a moguće je odrediti isključivo eksperimentalnim putem. Iz (2.1.44) i (2.1.46) slijedi

$$\int_V \delta \gamma_u dV + \xi \int_S \delta (u_i u_i)^{1/2} dS = 0 \quad (2.1.47)$$

Prema Tarnovskom [58] princip varijacije izražen jednačinom (2.1.47) može se formulisati stavom da suma varijacija unutrašnjih i spoljašnjih otpora deformaciji mora biti jednaka nuli.

2.1.3.2.2. Pravi varijacioni metod

Ideja ovog metoda je zasnovana na principu minimuma potpune energije deformacije i na primjeni varijacionog metoda Rica [72,73,128] . Metod se može razdijeliti na nekoliko faza:

a) Izbor prikladnih funkcija.

Prije svega potrebno je izabrati prikladne funkcije koje opisuju pomjeranje. One mogu biti izabrane za cijelo deformisano tijelo ili pak, za odvojene njegove djelove za slučaj deformacije tijela složene konfiguracije. Treba voditi računa da izabrane funkcije nijesu prekidne na granicama susjednih djelova deformišućeg tijela. Prema Ricu opšti oblik približne funkcije pomjeranja će imati oblik:

$$u_{kn} = a_1 \varphi_1(x, y, z) + a_2 \varphi_2(x, y, z) + \dots + a_n \varphi_n(x, y, z) \quad (2.1.48)$$

gdje su: k – bilo koja od koordinata x, y, z ; n – broj članova reda; a_i – neodređeni parametri; $\varphi_i(x, y, z)$ su prikladne funkcije koje moraju biti odabrane tako da aproksimirajuću funkciju na najbolji način približe stvarnoj. Radi toga se pri njihovom izboru široko koriste rezultati eksperimenta. Takodje treba težiti da $\varphi_i(x, y, z)$ sadrže što je moguće manje varijacionih parametara.

Dakle, rješenje će biti i teorijsko i približno. Teorijsko, zbog zasnovanosti na principu minimuma potpune energije deformacije, a približno zbog iskorišćenja u cilju uprošćenja matematičkog aparata približnog metoda Rica.

b) Računanje intenzivnosti deformacije smicanja γ_u :

Prema obrascima (1.3.3) na osnovu zadanih komponenata pomjeranja mogu se naći komponente deformacije. Pomoću (1.3.29) nalazi se γ_u kao funkcija koordinata i parametara a_i . Za neke posebne slučajeve, vrlo česte pri praktičnim zadacima (na primjer, male deformacije, ravansko deformaciono stanje itd.) γ_u dobija uprošćen oblik što olakšava dalji račun.

c) Integraljenje izraza za rad deformacije unutrašnjih sila:

Ovdje treba sračunati varijaciju zapreminskog integrala $\delta \int_V \gamma_u dV$ koji ulazi u varijacionu jednačinu (2.1.47). Integraljenje je najčešće otežano, pa treba koristiti numeričke metode, a u nekim slučajevima približno integraljenje se može izvršiti korišćenjem teoreme o srednjoj vrijednosti integrala, prema kojoj:

$$\int_V \gamma_u dV \approx \frac{1}{\gamma_c} \int_V \gamma_u^2 dV \quad (2.1.49)$$

pri čemu je γ_c neka srednja vrijednost γ_u koju je moguće naći kada se γ_u mijenja bez naglih skokova. U nekim slučajevima takodje, uprošćenje se postiže ako se prvo izvrši variranje, odnosno diferenciranje pa zatim integraljenje. Poslije integraljenja i diferenciranja po parametrima dobijaju se izrazi koji zavise od oblika tijela Φ , uslova trenja μ , parametara a_i (zavise od Φ i μ):

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_V \gamma_u dV = G_i(\Phi, \mu) \quad (2.1.50)$$

d) Integraljenje rada spoljnih sila:

Transformacijama analogno u c) se dobija

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_S (u_i u_i)^{1/2} dS = R_i(\Phi, \mu) \quad (2.1.51)$$

e) Odredjivanje parametara a_i :

Postavljaju se (2.1.50) i (2.1.51) u (2.1.47) koji predstavlja minimum potpune energije deformacije

$$\tau_s G_i(\Phi, \mu) + \xi \tau_s R_i(\Phi, \mu) = 0 \quad (2.1.52)$$

Rješavanjem n ovakvih jednačina u odnosu na n parametara a_i nalaze se vrijednosti tih parametara:

$$a_i = \psi_i(\Phi, \mu) \quad (2.1.53)$$

Dakle, parametri su izraženi u obliku funkcija oblika deformišućeg tijela i trenja.

f) Računanje pomjeranja i deformacija:

Zamjenom parametara (2.1.53) u (2.1.48) nalaze se komponente pomjeranja

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(\phi, \mu, x, y, z) \\ u_y &= u_y(\phi, \mu, x, y, z) \\ u_z &= u_z(\phi, \mu, x, y, z) \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

Komponente deformacije se mogu naći iz relacija (1.3.3).

g) Odredjivanje potpune sile deformisanja:

U velikom broju slučajeva u obradi metala deformisanjem, potpunu silu je moguće dobiti korišćenjem zakona o održanju energije. Na primjer, potpuna energija sabijanja tijela za malu veličinu dh se sastoji iz rada unutrašnjih i spoljnih otpora (način njihovog dobijanja je već opisan), pa se sila odredjuje obrascem:

$$F = \tau_s \int_V \frac{1}{dh} dV + \xi \tau_s \int_S \frac{1}{dh} (u_i u_i)^{1/2} dS \quad (2.1.55)$$

2.1.3.2.3. Metod konačnih elemenata (MKE)

Osnovni princip na kome se zasniva MKE sastoji se u podjeli razmatranog tijela na konačan broj elemenata, tako da se analizom pojedinih elemenata, uz pretpostavku o njihovoj međusobnoj povezanosti analizira cjelina. Ovakav, u suštini induktivni pristup je od posebnog značaja kod problema čija se opšta rješenja ne mogu dobiti u zatvorenom obliku.

Ovom metodom se kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamjenjuje sa diskretnim sistemom sa konačnim brojem stepeni slobode i analizira metodama diskretne analize. Ovo praktično znači da se MKE može shvatiti i kao način formiranja sistema algebarskih jednačina pomoću kojeg se aproksimira odredjeni konturni zadatak. Pošto taj način nije jedinstven, to ni formulacija MKE nije jedinstvena. U daljem radu, s obzirom na prirodu razmatranih problema posebno je interesantna varijaciona formulacija [93, 89, 78, 98].

2.2. EKSPERIMENTALNO-ANALITIČKE METODE

Analitičkim metodama nije moguće uzeti u obzir uticaj mnogobrojnih faktora, koji odredjuju proticanje realnih procesa obrade metala deformisanjem, jer se razmatraju veoma uprošćeni modeli procesa i deformišuće sredine. S druge strane, usavršavanjem tehnike mjerenja i statističke obrade podataka [2,19,68,62,119] omogućilo je da se znatno podigne nivo tačnosti eksperimentalnog odredjivanja, prije svega, pomjeranja i deformacija. Posljednje je uslovalo sve veće objedinjavanje eksperimentalnih ispitivanja i teorijskih analiza.

Eksperimentalno-analitičke metode karakteriše jedna ideja: na osnovu eksperimentalnih ispitivanja dobiti funkcije koje opisuju pomjeranje čestica deformacionog tijela. Zatim, koristeći Košijeve jednačine, sračunati deformacije i pomoću jednačina veze izmedju napona i deformacija odrediti naponsko stanje, silu, napone u alatu itd.

Metod otpora materijala plastičnoj deformaciji

Teorijske osnove ovog metoda razradio je G.A.Smirnov-Aljajev [52]. Ideja metoda je zasnovana na pretpostavci da se glavne ose deformacije i glavne ose napona poklapaju, tj. da su tenzori deformacija i napona koaksijalni. Eksperimentalno je ustanovljeno da je za male deformacije ova pretpostavka praktično uvijek ispunjena, a za velike samo u slučaju monotone deformacije. Na osnovu, eksperimentalne analize krivljenja koordinatne mreže dobijaju se funkcije koje opisuju matematiku procesa, a takodje odredjuje se funkcija otpora deformacije σ_s a zatim pomoću jednačina plastičnosti (1.5.12) nalaze se naponi σ_{ij} , opterećenje alata itd. Ovom metodom riješen je niz problema u OMD [68, 52].

Vizioplastični metod

Ovaj metod su predložili E.Tomsen, K.Jang i Š.Kobajaši [76]. Ovdje se eksperimentalno nalazi vektorsko polje brzina čestica u žarištu deformacije. To se može ostvariti, na primjer, pomoću koordinatne mreže koja se nanosi

na meridijalnoj ravni obrasca, nakon čega se isti postupno deformiše. Polje brzina se određuje formulom:

$$\vec{v} \sim \Delta \vec{u} / \Delta t \quad (2.2.1)$$

gdje su: $\Delta \vec{u}$ - pomjeranja čvornih tačaka mreže; Δt - vrijeme deformisanja. Dalji tok primjene ove metode obuhvata matematičku obradu dobijenih čvornih brzina, tj. dobijanje zavisnosti koje za ravanski slučaj imaju oblik:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y) \\ v_y &= v_y(x, y) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Zatim se primjenom (1.3.3) nalaze komponente brzine deformacije. U cilju određivanja naponske slike tijela koristi se relacija (1.5.12) koja obezbeđuje devijatorske komponente. Autori predlažu da se za određivanje normalnog napona koristi neka od diferencijalnih jednačina ravnoteže. Više je osnovana [80] postavka o određivanju σ preko minimizacije funkcionala koji izražava kvadrat odstupanja od identičnosti, za diferencijalne jednačine ravnoteže. Glavni nedostatak ove metode je u potrebi za visokom tačnošću relacija (2.2.2), s obzirom da se iste dva puta diferenciraju pri traženju brzina deformacije i srednjih normalnih napona, te bi zato u cilju usavršavanja metode trebalo usmjeriti ispitivanja u smislu razvoja postupaka mjerenja napona deformisanog tijela i to, prije svega, sfernog dijela tenzora napona.

Metod Muarovih pravih

Specifičnost ovog metoda je način određivanja komponenta brzine. Suština metoda je da se pri preklapanju dvije koordinatne mreže obrazuju kvazi-interferentne prave koje karakterišu odstupanje upoređivanih linija. To znači da je za razliku od diskretne vrijednosti vizioplastičnog metoda, ovdje dobijena kontinualna eksperimentalna informacija.

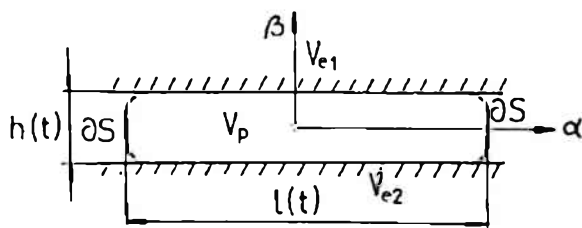
Kod metode Muarovih pravih na površinu uzorka se nanosi etalon rešetke. Zatim se vrši etapno deformisanje. Poslije svake etape, radna rešetka se fotografiše kroz etalonsku. Na fotografiji se fiksira slika Muarovih pravih pomoću koje je s dovoljnom tačnošću moguće odrediti polje brzina. I pored tehničkih poteškoća ovom metodom su riješeni mnogi složeni problemi u obradi deformisanjem [58,68] .

3. PRILOZI PRIMJENE TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA METALA U OBRADI DEFORMISANJEM

U ovoj glavi se razmatraju neke nove mogućnosti primjene teorije tečenja tankog sloja na procese obrade deformisanjem. Data su odgovarajuća naposko-kinematska rešenja za relativno tanke elemente: sa radijalnim rebrima, elemente sa promenljivom debljinom kao i elemente sa promenljivom debljinom i radijalnim rebrima. Primjena drugih analitičkih metoda (glava 2) za rešavanje ovakvih problema koje karakteriše narušena osnosimetričnost je veoma otežana, što je predstavljalo dodatni motiv za ova istraživanja. Na osnovu prethodnih rešenja predložen je i pristup izučavanja posebne klase problema zapreminskog deformisanja koji predstavljaju osnovni objekt našeg interesovanja.

3.1. OSNOVNE POSTAVKE TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA METALA

Teorija tečenja tankog sloja plastičnog materijala koju je predložio A.A.Iljušin [25,26] je jedna posebna varijanta teorije viskozno-plastičnog tečenja koja se uspješno primjenjuje za proračun procesa obrade deformisanjem. Na osnovu ispitivanja klasičnog problema Prandtla (s.3.1.1) A.A.Iljušin je postavio niz fizičkih hipoteza. Pomoću njih je izgradio približni matematički model koji uspješno opisuje u prvom približenju nestacionarno zapreminsko plastično tečenje u tankom sloju ($h \ll l$).



Sl.3.1.1. Tanki sloj metala

Razmatrane probleme karakteriše visoki kontakti napon, a takodje i efekat proklizavanja plastičnog materijala V_p u odnosu na površi ∂V_1 radnih tijela V_1 . U suštini predlaže se model hidrodinamičke tečnosti čija svojstva se određuju veličinom osrednjenog po debljini sloja kontaktnog napona p i brzinama u, v u ravni tečenja:

$$\frac{\partial p}{A \partial \alpha} = - \frac{1}{h} \left(T_1 \frac{u-u_1}{\Delta V_1} + T_2 \frac{u-u_2}{\Delta V_2} \right) \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial p}{B \partial \beta} = - \frac{1}{h} \left(T_1 \frac{v-v_1}{\Delta V_1} + T_2 \frac{v-v_2}{\Delta V_2} \right) \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (hBu) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (hAv) = 0 \quad (3.1.3)$$

$$p|_{\partial s_1} = p_G(\bar{\mu}), \quad \vec{v}_n = \vec{V} \cdot \vec{n}|_{\partial s_2} = 0 \quad (3.1.4)$$

gdje su: $A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ - koeficijenti prve kvadratne forme osnovne površi zadane linijama glavne krivine α, β ; $h = h(\alpha, \beta, t)$ - debljina sloja; $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$ - kontura projekcije oblasti tečenja V_p na osnovnu površ; $\vec{V}_i = \{u_i, v_i\}$ - projekcije brzina kretanja prve i druge radne površi na tangentnu ravan; μ_i - koeficijent trenja; $T_i = \tau_s F_i(p/\tau_s, \Delta V_i, \mu_i)$ - tangencijalni kontaktni napon trenja; $\Delta V_i = \sqrt{(u-u_i)^2 + (v-v_i)^2}$; $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s = \sigma_s(\lambda, \dot{\epsilon}_u)$ - eksperimentalna funkcija koja karakteriše zavisnost intenzivnosti napona σ_s od stepena deformacije $\lambda(\alpha, \beta, t) = \ln(h_0/h)$ i intenzivnosti brzine deformacije $\dot{\epsilon}_u$ definisane relacijom:

$$\dot{\epsilon}_u = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda}{A \partial \alpha} + v \frac{\partial \lambda}{B \partial \beta} \quad (3.1.5)$$

Za ispitivanje problema postavljenog jednačinama (3.1.1) - (3.1.4) razrađene su analitičke metode: metoda analogije s pješčanim nasipom [26], varijaciona metoda [31], metoda karakteristika primijenjena na dati sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina sa parcijalnim izvodima prvog reda [30, 104], metoda transformacija Ležandra [136] i dr.

Ovdje će detaljnije biti izloženi metoda pješčane analogije i metoda karakteristika, jer će ove metode biti iskorišćene za rešavanje konkretnih problema. U daljem radu biće zanemareno kretanje radnih površi u odnosu na materijal ($\vec{V}_i=0$), a takodje deformaciono i brzinsko očvršćavanje ($\sigma = \sigma_s = \text{const}$). Na kontaktnim površinama se može postaviti:

$$T_1 = T_2 = \tau(p) = \begin{cases} \mu p & p \leq \tau_s / \mu \quad (\text{oblast Kulonovog trenja}) \\ \tau_s & p \geq \tau_s / \mu \quad (\text{oblast Prandtlvog trenja}) \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Tada se jednačine (3.1.1) i (3.1.2) mogu napisati u obliku:

$$\frac{\partial p}{A \partial \alpha} = - \frac{2\tau(p)}{h} \cos \theta, \quad \frac{\partial p}{B \partial \beta} = - \frac{2\tau(p)}{h} \sin \theta \quad (3.1.7)$$

gdje je θ - ugao između vektora brzine kretanja materijalnog sloja po osnovnoj fizičkoj površini i koordinatne linije α :

$$\cos \theta = \frac{u}{|\vec{V}|}, \quad \sin \theta = \frac{v}{|\vec{V}|} \quad (3.1.8)$$

Kvadriranjem jednačina (3.1.7), a zatim njihovim sumiranjem se dobija nelinearna diferencijalna jednačina za određivanje kontaktnog pritiska:

$$\left(\frac{\partial p}{A \partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{B \partial \beta}\right)^2 = \frac{4\tau^2(p)}{h^2} \quad (3.1.9)$$

Kada je kontaktni napon u sloju određen, brzine tečenja u i v se mogu odrediti iz jednačine nestišljivosti (3.1.3) i jednačine:

$$u \frac{\partial p}{B \partial \beta} = v \frac{\partial p}{A \partial \alpha} \quad (3.1.10)$$

Iz jednačina (3.1.7) se vidi da vektor brzine tečenja \vec{V} ima pravac suprotan vektoru (grad p) tj. usmjeren je po linijama ortogonalnim na linije $p=\text{const}$. Pokazuje se opravdanim uvođenje monotone, rastuće funkcije $P(p)$ koja se naziva uopšteni pritisak:

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{2\tau(p)} \quad (3.1.11)$$

koja je u potpunosti određena kada je poznat zakon kontaktnog trenja $T=\tau(p)$. Ako se prihvati takav zakon u obliku (3.1.6), dobija se:

$$P(p) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \ln \frac{p}{p_0} & \sqrt{\frac{s}{3\mu}} \geq p \geq p_0 \equiv \mu s \\ \frac{1}{2\mu} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3\mu}} - 1\right) + \frac{p}{2\tau_s} & p \geq \mu s, \sqrt{3\mu} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Ako je na čitavoj kontaktnoj površini $\tau(p) = \tau_s$, dobija se:

$$P(p) = \frac{p}{2\tau_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.1.13)$$

tj. $P(p)$ - linijska funkcija od p .

Jednačina (3.1.7) se može napisati u ekvivalentnom obliku:

$$h \operatorname{grad} p = - \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad (3.1.14)$$

otkuda je:

$$\left(\frac{\partial p}{A \partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{B \partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{h^2} \quad (3.1.15)$$

Granični uslovi (3.1.4) mogu imati oblik:

a) Dio granice ∂s_2 na kojem nema pomjeranja u pravcu normale

$$v_n = \vec{V} \cdot \vec{n}|_{\partial s_2} = 0 \quad (3.1.16)$$

gdje je \vec{n} - normala na konturu ∂s_2 . Ili prema (3.1.14)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ na } \partial s_2 \quad (3.1.17)$$

b) Dio granice $\partial s'_1 \subset \partial s_1$ na kojem nema opterećenja tj. $p = \sigma_s$ ili:

$$p = 0 \text{ na } \partial s'_1 \quad (3.1.18)$$

c) Dio granice $\partial s''_1 \subset \partial s_1$ predstavljen žljebom na radnoj površini, tako da u njega može slobodno da utiče metal; ako širina žljeba ne prelazi debljinu sloja h , može se postaviti $p = 2\sigma_s$, ili:

$$p = \int_{\sigma_s}^{2\sigma_s} \frac{dp}{2\tau(p)} = \text{const na } \partial s''_1 \quad (3.1.19)$$

Ako je u prethodnom slučaju uticanje metala u žljeb otežano, pritisak p je poznata funkcija dužine luka \bar{u} konture $\partial s'''_1$ i tada prema (3.1.11) će biti:

$$p = p(\bar{u}) \text{ na } \partial s'''_1 \quad (3.1.20)$$

Jednačina (3.1.14) i uslovi tipa (3.1.16) - (3.1.20) ukazuju na postojanje analogije medju grafikom uopštenog pritiska P u oblasti tečenja i grafikom pješčanog nasipa. Naime, ako se na površinu ograničenu konturom ∂s nasipa homogeni pijesak s koeficijentom trenja f , obrazuje se nasip određenog oblika s visinom z koja se računa u tački (α, β) po normalu na osnovnu površinu. Jednačina za određivanje $z = z(\alpha, \beta)$ ima oblik:

$$\left(\frac{\partial z}{A \partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{B \partial \beta}\right)^2 = f^2 \quad (3.1.21)$$

Pri odgovarajućem izboru dimenzija pregrada na granici ∂s moguće je sa

tačnošću do razmjernog množitelja odrediti uopšteni pritisak P u oblasti tečenja. Upoređivanjem (3.1.15) i (3.1.21) se dobija:

$$P = \frac{z}{fh} \quad (3.1.22)$$

tj. visina graničnih pregrada pješčanog nasipa treba da je odabrana tako da je:

$$z = fhP \quad \text{na} \quad \partial s \quad (3.1.23)$$

gdje se P određuje prema (3.1.16)–(3.1.20).

Na taj način formula (3.1.22) omogućava da se nadje uopšteni pritisak deformišućeg sloja na osnovu eksperimenta s pješčanim nasipom. Poslije toga na osnovu međusobne jednoznačnosti funkcija $P = P(p)$ po formuli (3.1.11) može se naći stvarni kontaktni napon sloja radne organe mašine. Nivoske linije $p = \text{const}$ određene iz pješčane analogije (poklapaju se sa linijama $z = \text{const}$) mogu se projektovati na osnovnu radnu površinu, a zatim postavljajući na njih ortogonalne trajektorije dobijaju se linije toka. Poslije toga moguće je naći raspored brzina tečenja u sloju. To znači da je metod analogije s pješčanim nasipom u suštini grafoanalitički metod.

Dalje se izlaže metoda karakteristika. Ovdje treba istaći da za razmatrani problem oblast Kulonovog trenja čini u odnosu na površinu kontakta njen neznatni dio. Zato se može postaviti $T_1 = T_2 = \tau_s$, na cijeloj kontaktnoj površini. To znači da se razmatra problem tečenja tankog sloja postavljen jednačinama (3.1.3) i (3.1.7) sa graničnim uslovom na konturi ∂s :

$$p(\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), t) = p_G(\bar{u}) \quad (3.1.24)$$

Kao što slijedi iz (3.1.7) nivoske linije $p = \text{const}$ su ortogonalne na linije toka i važi:

$$\frac{A d\alpha}{ds} = -\frac{u}{V} \quad \frac{B d\beta}{ds} = -\frac{v}{V} \quad (3.1.25)$$

gdje je ds – element dužine luka linije toka. Ovo omogućava da se predje od sistema (3.1.7) i (3.1.3) na ekvivalentni sistem od dvije skalarne jednačine u odnosu na $p(\alpha, \beta)$ i modul vektora V :

$$\text{grad}^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2} \quad (3.1.26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (hBV \cos \gamma)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (hAV \sin \gamma)}{\partial \beta} = 0 \quad (3.1.27)$$

gdje su: $\vec{V} = -V(\cos \gamma \vec{i} + \sin \gamma \vec{j})$, a $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$ - ugao između linije točka u razmatranoj tački oblasti tečenja i ose α .

Rešavanje se počinje od jednačine (3.1.9) u odnosu na p :

$$F(\alpha, \beta, p, m, n) = \left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0 \quad (3.1.28)$$

gdje su: $\Omega = \frac{2\tau_s}{h} > 0$, $m = \frac{\partial p}{\partial \alpha}$, $n = \frac{\partial p}{\partial \beta}$

Karakteristični sistem za (3.1.28) ima oblik:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{A^2} \frac{m}{\Omega}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{B^2} \frac{n}{\Omega}, \quad \frac{dp}{ds} = \Omega \quad (3.1.29)$$

$$\frac{dm}{ds} = \frac{m^2}{\Omega A^3} A_\alpha + \frac{n^2}{\Omega B^3} B_\alpha + \Omega_\alpha, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{m^2}{\Omega A^3} A_\beta + \frac{n^2}{\Omega B^3} B_\beta + \Omega_\beta$$

gdje se pod s podrazumijeva dužina luka duž karakteristika $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, a donji indeks označava odgovarajući izvod. Problem (3.1.29) je problem Košijevskog tipa sa odgovarajućim graničnim uslovima na konturi ∂s oblasti tečenja:

$$\alpha = \alpha(\bar{u}), \quad \beta = \beta(\bar{u}), \quad p = p(\bar{u}), \quad m = m(\bar{u}), \quad n = n(\bar{u}) \quad (3.1.30)$$

gdje se $m(\bar{u})$ i $n(\bar{u})$ biraju jednoznačno da bi bili zadovoljeni sljedeći uslovi u regularnim tačkama konture oblasti s :

$$\begin{aligned} \frac{dp_G}{d\bar{u}} &= m \frac{d\alpha}{d\bar{u}} + n \frac{d\beta}{d\bar{u}} \\ F[\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), p_G(\bar{u}), m, n] &= 0 \\ \Delta &= F_{m\beta\bar{u}} - F_{n\alpha\bar{u}} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Tada, na osnovu lokalne teoreme o postojanju i jedinstvenosti desnih strana u jednačinama (3.1.29) [30] se može zaključiti da rješenje problema (3.1.26), (3.1.3) u okolini glatkih tačaka konture oblasti se poklapa sa rešenjem zadatka tipa Koši (3.1.29).

Uzimajući u obzir da se karakteristike sistema (3.1.29) poklapaju sa linijama toka, sistem (3.1.29) se može napisati u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \gamma}{A}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\sin \gamma}{B}, \quad \frac{dp}{ds} = \Omega \quad (3.1.32)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \gamma + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \gamma \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos \gamma - B_\alpha \sin \gamma)$$

Korišćenje uslova $dp/ds = \Omega > 0$, omogućava da se sistem (3.1.32) napiše u, za rešavanje pogodnijem vidu:

$$\frac{d\alpha}{dp} = \frac{\cos \gamma}{A\Omega}, \quad \frac{d\beta}{dp} = \frac{\sin \gamma}{B\Omega}, \quad \frac{ds}{dp} = \frac{1}{\Omega} \quad (3.1.33)$$

$$\frac{d\gamma}{dp} = \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \gamma + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \gamma \right) + \frac{1}{AB\Omega} (A_\beta \cos \gamma - B_\alpha \sin \gamma)$$

Za odredjivanje $\gamma(\bar{u})$ služi uslov koji slijedi iz (3.1.31):

$$\frac{dp_G}{d\bar{u}} = -\Omega \cos \omega(\bar{u}) \quad (3.1.34)$$

gdje je $(dp_G/d\bar{u})^2 < \Omega^2$. Ovdje je $\omega(\bar{u}) = \angle(\vec{V}_t^0, \vec{\tau}^0)$ - ugao između pravca linije toka \vec{V}_t^0 i pozitivnog pravca tangente $\vec{\tau}^0$ u razmatranoj tački konture, a $\gamma(\bar{u}) = \pi + [\angle(\alpha, \vec{\tau}^0) - \omega(\bar{u})]$. Rešavanjem sistema (3.1.33) određuje se mnogolistna površina (α, β, p) pomoću koje je moguće, na osnovu principa jedinstvenog pritiska, ostvariti pokrivanje oblasti djelovima karakterističnih krivih. Ove krive polaze od granice oblasti tečenja do rebra, tj. linije sastavljene iz tačaka presjeka bar dvije karakteristične krive. Za rešavanje problema tipa (3.1.32) u literaturi su poznate kako tačne, tako i približne metode (na primjer, metod Runge-Kuta).

Jednačina (3.1.27) duž poznate karakteristike (3.1.33) se može zapisati u obliku:

$$\frac{dW}{ds} = -W\Psi - \bar{\omega} \quad (3.1.35)$$

gdje su:

$$W(s) = h(\alpha(s), \beta(s)) \cdot V(s) \quad \bar{\omega}(s) = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\Psi = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(B \cos \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(A \sin \gamma)}{\partial \beta} \right] \quad (3.1.36)$$

Odgovarajućim transformacijama [30, 104] Ψ se može dobiti u obliku:

$$\Psi(s) = -\frac{1}{R(s)} + \frac{1}{R_\beta} \cos \gamma + \frac{1}{R_\alpha} \sin \gamma \quad (3.1.37)$$

gdje su $R_\alpha = \left(\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^{-1}$, $R_\beta = \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^{-1}$ - tangencijalni radijusi krivine α i β na osnovnoj površini, a $1/R(s)$ - tangencijalna (geodezijska) krivina nivoske linije $p(\alpha, \beta) = \text{const}$. Smatrajući $\Psi = \Psi(s)$ poznatom funkcijom može se integraliti jednačina (3.1.35):

$$W(s) = h(s) \quad V(s) = A J_1(s) - J_2(s) \quad (3.1.38)$$

gdje su:

$$J_1(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s \Psi(s') ds'\right),$$

$$J_2(s) = \int_{s_0}^s \omega(s'') \exp\left(-\int_{s''}^s \Psi(s') ds'\right) ds''$$

a za odredjivanje konstante integraljenja A koristi se uslov grananja tečenja $w(s=s_{\text{rebra}})=0$ u nepoznatim, no u toku rešavanja sistema (3.1.33), odredjenim tačkama rebra.

3.1.1. Presovanje kružnog diska konstantne debljine

Za ovakav slučaj deformisanja jednačine (3.1.7) i (3.1.3) teorije tečenja tankog sloja će imati oblik ($u=u(r,t)$, $v=0$, $p=p(r,t)$, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, $A=1$, $B=r$):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2 \tau_s}{h(t)} \quad (3.1.39)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (3.1.40)$$

gdje su veličine p i $P(p)$ vezane medjusobno relacijom (3.1.13):

$$P(p) = \frac{p}{2 \tau_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.1.41)$$

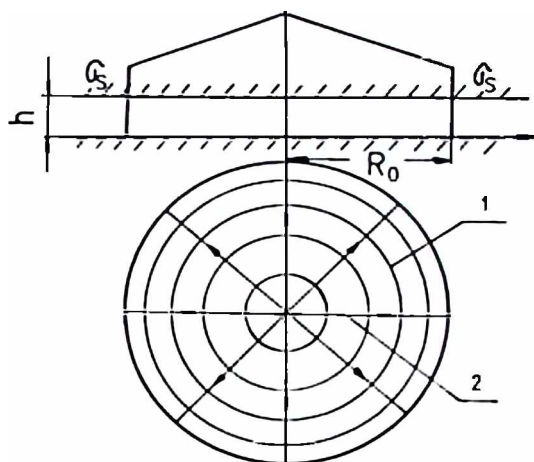
Za slučaj slobodnog tečenja granični uslovi će imati oblik:

$$p(r = R(t), t) = \sigma_s \quad (3.1.42)$$

Rješenje ovog zadatka (sl.3.1.2) se sada može relativno lako odrediti:

$$u(r, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{r}{2} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{r}{2} \quad (3.1.43)$$

$$p(r, t) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h(t)} (R(t) - r) \quad (3.1.44)$$



Sl.3.1.2 - Presovanje kružnog diska konstantne debljine
1 - linije konstantnog pritiska,
2 - linije toka

Linije toka su u ovom slučaju radijusi koji polaze od centra kruga, a linije konstantnog pritiska su koncentrični krugovi (sl.3.1.2). Sila potrebna za dobijanje diska debljine $h = h(t)$ i radijusa $R=R(t)$ će biti:

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} p(r, t) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r p dr = \pi R^2 \sigma_s \left[1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h} \right] \quad (3.1.45)$$

Saglasno analogiji s pješčanim nasipom ako se na kružnu ploču radijusa R bez graničnih pregrada:

$$z_G = z(r=R) = fh P(p) \Big|_{p=\sigma_s} = fh \left(\frac{p}{2\tau_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Big|_{p=\sigma_s} = 0 \quad (3.1.46)$$

nasipa homogeni pijesak s koeficijentom trenja f , dobijena zapremina V nasipa uz odgovarajuću razmjenu daje potrebnu silu presovanja Q . I zaista, iskoristivši (3.1.23) i (3.1.41) dobija se:

$$V = \int_0^R r z(r) dr = \int_0^R r fh \left(\frac{p}{2\tau_s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dr = \frac{fh}{2\tau_s} (Q - \pi R^2 \sigma_s) \quad (3.1.47)$$

te će sila presovanja biti:

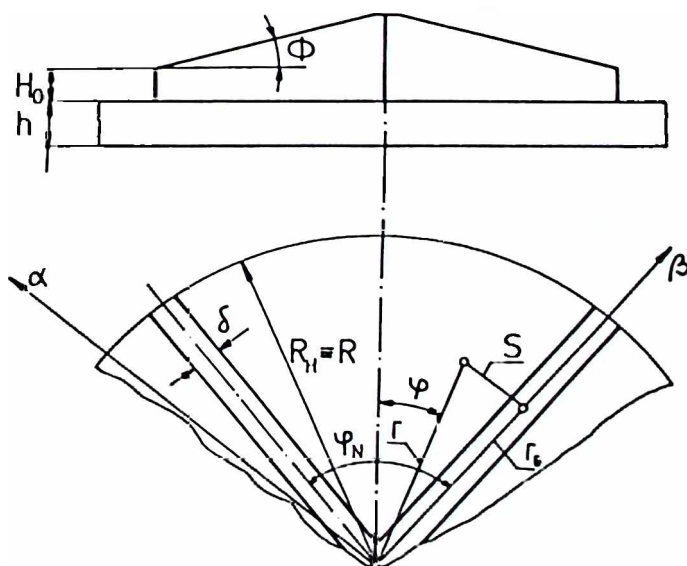
$$Q = \frac{V 2 \tau_s}{f h} + \pi R^2 \sigma_s \quad (3.1.48)$$

3.1.2. Presovanje kružnog diska konstantne debljine sa radijalnim rebrima

U fabričkim uslovima se vrlo često susrijeće tip uzorka čiju geometriju karakteriše znatno veći prečnik od visine, a koji je uz to ojačan simetrično postavljenim radijalnim rebrima koja mogu biti promjenljive visine. Za ovakve komade je proračun naponsko-kinematskih parametara standardnim inženjerskim analitičkim metodama veoma otežan. Ovdje je napravljen pokušaj prilagođavanja teorije tečenja tankog sloja na radijalno ojačan kružni disk kao modelskog predstavnika pomenute klase uzoraka. Nastojala se ostvariti sprega dva kriterijuma: korektnost i jednostavnost tješenja. Presjek rebra odpreskaje najčešće takav da se ona blago konično sužavaju ali se za sada ograničavamo usrednjavanjem širine rebra, tj. razmatra se $\delta = \delta_0 = \text{const.}$ (sl.3.1.3). Neka je N -broj simetrično postavljenih žljebova kalupa i tada će ugao zahvata sektora između susjednih žljebova biti:

$$\varphi_N = \frac{2\pi}{N}, \quad N = 3, 4, 5 \quad (3.1.49)$$

Radi jednostavnosti razmatra se slučaj jednostrane ožljebljenosti. Neophodne geometrijske veličine su označene na (sl.3.1.3).



Sl.3.1.3. Sektor ožljebljenog diska

Proces se modelira tako što se smatra da u početku dolazi do sabijanja diska dok se ne dostigne odgovarajući radijus $R=R_H$ (I faza). Pri daljoj deformaciji radijus R_H se ne mijenja, već se na račun smanjenja visine $h=h(t)$ vrši popunjavanje žljebova. Slobodno popunjavanje žljeba (II faza) se vrši sve dok metal ne dotakne njegovu gornju granicu. Nakon toga nastupa potpuno popunjavanje žljebova (III faza) koje se vrši postupno od kraja diska ka njegovom centru. Konačna faza procesa (IV faza) se karakteriše istiskivanjem metala u centralni magazin i očigledno može se modelirati kao proces sabijanja kružnog diska sa tečenjem ka centru kruga.

Rješenje faze I se poklapa sa rješenjem zadatka (3.1.1). Prelaz od faze I ka fazi II se modelski karakteriše naglom promjenom linija toka u sektorijskoj oblasti. To znači da u momentu t_1 (kraj I faze) pritisak $p(r, t_1)$ i sila deformacije $Q(t_1)$ trpe skok:

$$\begin{aligned}\Delta p(r, t_1) &= p(r, t_1+0) - p(r, t_1-0) \\ \Delta Q(t_1) &= Q(t_1+0) - Q(t_1-0)\end{aligned}\tag{3.1.50}$$

gdje su: $p(r, t_1-0)$ i $Q(t_1-0)$ dati relacijama (3.1.44) i (3.1.45).

I tako za odredjivanje u, v i p u oblasti $s(r, \varphi) = \{ (r, \varphi) \mid 0 < r < R_H, -\varphi_N/2 < \varphi < \varphi_N/2 \}$ u trenutku t_1+0 na raspolaganju su jednačine (3.1.7) i (3.1.3), a takodje i granični uslovi (sl.3.1.4):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\partial s_2} = 0, \quad p \Big|_{\partial s_1} = 2\sigma_s \tag{3.1.51}$$

Prvi granični uslov je uzrokovan nemogućnošću kretanja metala u pravcu normale, a drugi se može prihvatiti [26] za žljebove za koje je širina δ reda veličine h . Dio granice ∂s_1 je linija konstantnog pritiska, te će prema jednačinama tečenja u tankom sloju (3.1.7) linije toka biti ortogonalne na ∂s_1 . S druge strane poznato je da pri $h=\text{const}$ linije toka će biti prave. Iz simetrije oblasti $S(r, \varphi)$ i graničnih uslova na ∂s_1 slijedi da će radijus $\varphi = 0$ biti linija grananja tečenja.

$$Q_N(t_1+0) = 2 \int_0^R \int_0^{\varphi_N/2} p(r, \varphi) r dr d\varphi = 2 \int_0^R \int_0^{\varphi_N/2} \left[2\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} r \sin\left(\frac{\varphi_N}{2} - \varphi\right) \right] r dr d\varphi =$$

$$= \sigma_s \varphi_N R^2 \left[1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h\varphi_N} \left(1 - \cos \frac{\varphi_N}{2}\right) \right] \quad (3.1.58)$$

Sumarna sila presovanja će biti:

$$Q(t_1+0) = N Q_N(t_1+0) = 2\pi \sigma_s R^2 \left[1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h\varphi_N} \left(1 - \cos \frac{\varphi_N}{2}\right) \right] \quad (3.1.59)$$

Skok sile između faza I i II na osnovu (3.1.45) i (3.1.59) je određen relacijom:

$$\Delta Q_{I-II} = \pi R^2 \sigma_s \left[1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h} A \right] \quad (3.1.60)$$

gdje je:

$$A = \frac{4}{\varphi_N} \left(1 - \cos \frac{\varphi_N}{2}\right) - 1 \quad (3.1.61)$$

i zavisi od broja žljebova.

Neka je t_2 - trenutak završetka faze II ili moment kada je metal dodirnuo vrh žljeba. U razmatranom slučaju kada je udubljenje duž žljeba definisano zakonom (sl.3.1.3):

$$H(r_G) = H_0 + (R - r_G) \operatorname{tg} \phi \quad (3.1.62)$$

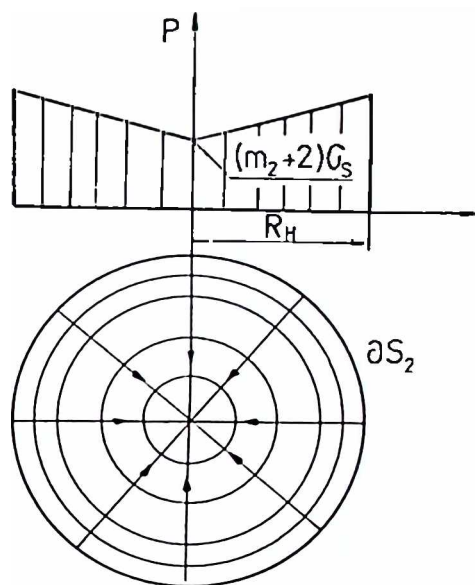
može se prihvatiti da pri $N \geq 3$ popunjavanje žljeba će se vršiti od periferije ka centru diska (faza III). Neka je u trenutku t ($t_2 < t < t_3$) popunjen žljeb na dijelu $r_G^* < r_G < R$ (sl.3.1.5). U tom slučaju će se sila tečenja u podblasti $\{(s, r_G) | 0 < r_G < r_G^*\}$ poklapati sa rješenjem u fazi II, a u preostalom dijelu ($r_G^* < r_G < R$) linije tečenja se zrakasto prostiru iz tačke ($r_G = r_G^*, s = 0$); linije konstantnog pritiska će biti date sistemom koncentričnih kružnica sa centrom u toj tački.

Saglasno [26] može se prihvatiti da je srednji pritisak metala rebra na dno žljeba $m_1 \sigma_s$ gdje je m_1 - karakteristika geometrije žljeba i stepena njegove popunjenosti, te će biti na popunjenom dijelu granice:

$$p(r_G^* < r_G < R, s = 0) = (2 + m_1) \sigma_s \quad (3.1.63)$$

Analogno (3.1.53) i (3.1.55) rješenje će imati oblik:

Konačno, poslednju IV fazu procesa (istiskivanje u centralni magacin) karakteriše centralno tečenje metala ($r_G^* \equiv 0$). Linije toka su zraci koji polaze iz centra kruga a linije konstantnog pritiska koncentrične kružnice (sl. 3.1.6)



Sl.3.1.6. Slika tečenja na kraju deformisanja

Rješenje će imati oblik:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (r-R)$$

$$p(r, \varphi) = (2 + m_2) \sigma_s + \frac{2r}{h} s \quad (3.1.70)$$

Na kraju može se dobiti i potrebna sila deformisanja:

$$Q_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) r dr d\varphi = 2\pi R^2 \sigma_s \left[\frac{2+m_2}{2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h} \right] \quad (3.1.71)$$

Treba istaći da se dijagram kontaktnih napona i potrebna sila u fazama III i IV mogu uspješno interpretirati primjenom metode pješčane analogije. Kao što se vidi iz prethodnog dijela ovog paragrafa problem rješavanja zadatka presovanja razmatrane klase uzoraka sa rebrima svodi se na odredjivanje graničnih uslova na konturi, a potom se rešava po teoriji tečenja tankog sloja metala. Ovakav pristup omogućava da se izborom odgovarajućih graničnih uslova uzme u obzir koničnost žljeba, tj. kontaktno trenje na njegovim zidovima:

$$p(r_G, t) = \begin{cases} 2\sigma_s + \frac{2H^*(r_G, t)}{h(t)} \tau_s, & \text{djelimično popunjeni žljeb} \\ 2\sigma_s + \frac{2H(r_G, t)}{h(t)} \tau_s + m_1 \sigma_s, & \text{popunjeni žljeb} \end{cases} \quad (3.1.72)$$

gdje su $H(r_G)$ - visina udubljenja žljeba, $H^*(r_G)$ - tekuća visina metala u žljebu. Na taj način, određivanje naponsko-kinematskih faktora se svodi na rešavanje jednačina tečenja u tankom sloju razmatrane oblasti sa graničnim uslovima (3.1.72) koji se uspješno rešava metodom karakteristika [104] .

3.1.3. Presovanje kružnog diska promjenljive debljine

Razmatra se osnosimetrično tečenje ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) u oblasti ($0 < r < R(t)$), tankog sloja promjenljive debljine $h=h(r, t)$ ($h \ll R$). Jednačine (3.1.7) i (3.1.3) uz granični uslov [26] će za ovaj problem imati oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= - \frac{2\tau_s}{h(r, t)} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{h(r, t)} \frac{dh}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.73)$$

$$p(r=R(t), t) = k\sigma_s$$

gdje je k konstanta zavisna od uslova na granici. Visina $h=h(r, t)$ je određena oblikom radnih površina ($h(r, t_0)$) i brzinom njihovog primicanja (v_0):

$$h(r, t) = h(r, t_0) - v_0 t \quad (3.1.74)$$

Pretpostavlja se da u uslovima potpunog kontakta sa radnim površinama teče kružni sloj sa zadanim početnim geometrijskim karakteristikama: $0 < r < R(t_0) \equiv R_0$, $h=h(r, t_0)$. Rešenje zadatka (3.1.73) će imati oblik:

$$u(r, t) = - \frac{1}{r} \int_0^r \frac{r}{h(r, t)} \frac{dh}{dt} dr \quad (3.1.75)$$

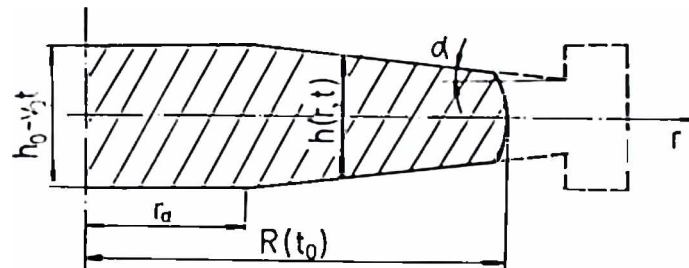
$$p(r, t) = k\sigma_s + \int_r^{R(t)} \frac{2\tau_s}{h(r, t)} dr \quad (3.1.76)$$

gdje je $R=R(t)$ - tekući radijus koji ograničava oblast tečenja i određuje se rešavanjem diferencijalnog problema:

$$\frac{dR}{dt} \equiv u(R(t), t) = - \frac{1}{R} \int_0^R \frac{r}{h(r, t)} \frac{dh}{dt} dr$$

$$R(t=t_0) = R_0 \quad (3.1.77)$$

Konkretna računanja će biti sprovedena za slučaj uzorka konusnog oblika (sl.3.1.7).



Sl.3.1.7. Konusni odpresak

Promenljiva visina uzorka je definisana relacijom:

$$h(r, t_0) = \begin{cases} h_0 = \text{const} & 0 \leq r < r_a \\ h_0 - 2(r - r_a) \tan \alpha & r_a \leq r < R(t_0) \end{cases} \quad (3.1.78)$$

pri čemu se pretpostavlja da je $R_0 > r_a$.

Uzimajući u obzir drugu jednačinu sistema (3.1.73) i relaciju (3.1.74) za brzinu tečenja $u(r, t)$ se može postaviti:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{h_0 - v_0 t - 2(r - r_a) \tan \alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial r} u \right) = 0, \quad r_a < r < R(t) \quad (3.1.79)$$

Na osnovu (3.1.78) iz (3.1.79) se dobija:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \phi(r, t) u = \frac{v_0}{h_0 - v_0 t - 2(r - r_a) \tan \alpha} \quad (3.1.80)$$

gdje je:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} - \frac{2 \tan \alpha}{h_0 - v_0 t - 2(r - r_a) \tan \alpha} \quad (3.1.81)$$

Relacija (3.1.80) je linijska nehomogena diferencijalna jednačina prvog reda. Njeno rješenje se može dobiti metodom varijacije konstanti:

$$u(r, t) = \frac{v_o r}{2} \frac{1}{h_o - v_o t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{c_o(t)}{r[h_o - v_o t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha]} \quad (3.1.82)$$

U drugom dijelu oblasti tečenja na osnovu (3.1.73) i (3.1.78) će biti:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{v_o}{h_o - v_o t} = 0 \quad (3.1.83)$$

Rješenje ove diferencijalne jednačine je:

$$u(r, t) = \frac{r}{2} \frac{v_o}{h_o - v_o t}, \quad 0 < r < r_a \quad (3.1.84)$$

Tada će rješenje (3.1.82), nakon odredjivanja $c_o(t)=0$ iz uslova neprekidnosti $u(r, t)$ pri $r=r_a$, poprimiti oblik:

$$u(r, t) = \frac{v_o r}{2} \frac{1}{h_o - v_o t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha}, \quad r_a < r < R(t) \quad (3.1.85)$$

Polje pritisaka prema (3.1.76) će biti:

$$p(r, t) = \begin{cases} k_o - \frac{\tau_s}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_o - v_o t - 2(R - r_a) \operatorname{tg} \alpha}{h_o - v_o t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha}, & r_a < r < R(t) \\ k_o - \frac{\tau_s}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_o - v_o t - 2(R - r_a) \operatorname{tg} \alpha}{h_o - v_o t} + \frac{2\tau_s}{h_o - v_o t} (r_a - r), & 0 < r < r_a \end{cases} \quad (3.1.86)$$

Potrebna sila se može naći integracijom pritisaka po površini dejstva:

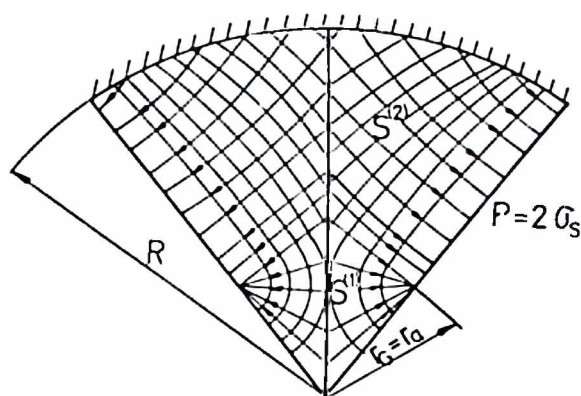
$$Q(t) = 2 \pi \left[\int_0^{r_a} p(r, t) r dr + \int_{r_a}^{R(t)} p(r, t) r dr \right] \quad (3.1.87)$$

gdje se u izraz (3.1.87) uključuju relacije (3.1.86).

3.1.4. Presovanje kružnog diska promjenljive debljine sa radijalnim rebrima

Razmatra se problem analogan izloženom u (3.1.3) uz dopunu radijalnih rebara postavljenih na dijelu ($r_a < r < R$) prema (sl.3.1.7). Zadatak se rješava uz pretpostavku da je popunjena cjelokupna zapremina medju kalupima osim žljebova, tj. posmatra se trenutak narušavanja simetričnosti procesa.

U tom slučaju u podoblasti $s^{(1)}$ smještenoj ka centru kružnog diska linije toka će biti predstavljene (sa izuzetkom malog dijela), zrakastim pravima koje konvergiraju ka tački ($r_G = r_a$, $s=0$), a nivoske linije konstantnog pritiska koncentričnim krugovima (sl.3.1.8). U podoblasti $s^{(2)}$ linije toka kao što je poznato će biti ortogonalne na ožljebljeni dio konture ($r_a < r_G < R$) za koji važi granični uslov $p = 2\sigma_s = \text{const.}$



Sl.3.1.8. Slika tečenja u fazi popunjavanja rebara

Zbog svojstava jednačina tečenja u tankom sloju pri promjenljivoj debljini $h=h(r)$ [25,26] linije toka se iskrivljuju u stranu smanjenja debljine sloja i zato nijesu u opštem slučaju prave linije. Mogu se odrediti rješavanjem karakterističnog sistema jednačina (3.1.29) a zatim rješavanjem integrala (3.1.38) duž sada poznatih karakteristika. Rješavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina (3.1.29) pri datim $h(r,t)$ i $s(r,t)$ sa odgovarajućim graničnim uslovima se vrši numerički (na primjer, metodom Runge-Kuta). Posebno interesantna je završna faza deformisanja koju karakteriše centralno isticanje metala. Slika tečenja je analogna prikazanoj na (sl.3.1.6) i ova faza je proračunska sa aspekta ocjene potrebne sile procesa. Potrebno je odrediti kontakti pritisak $p(r,t)$ a takodje i brzinu tečenja $u(r,t)$ koji zadovoljavaju sljedeće jednačine:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\sigma_s}{h(r,t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (3.1.88)$$

$$p(r=0, t) = (2+m) \sigma_s$$

gdje m - karakteriše oblik i širinu magacina u centru otkovka.

Brzina $u(r, t)$ se nalazi po formuli (3.1.82) gdje se $c_0(t)$ određuje iz uslova $u(r=R(t), t)=0$:

$$c_0(t) = - R^2 v_0 / 2 \quad (3.1.89)$$

ili:

$$u(r, t) = \frac{v_0}{2(h_0 - v_0 t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha)} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \quad (3.1.90)$$

Pritisak $p(r, t)$ će imati oblik:

$$p(r, t) = \begin{cases} (2+m) \sigma_s + \frac{2 \tau_s}{h_0 - v_0 t} r & 0 < r < r_a \\ (2+m) \sigma_s + \frac{2 \tau_s}{h_0 - v_0 t} r_a - \frac{\tau_s}{\operatorname{tg} \alpha} \ln \frac{h_0 - v_0 t - 2(r - r_a) \operatorname{tg} \alpha}{h_0 - v_0 t}; & r_a < r < R \end{cases} \quad (3.1.91)$$

Sada se potrebna sila može odrediti elementarnim integraljenjem:

$$Q(t) = 2 \int_0^R p(r, t) r dr \quad (3.1.92)$$

u koji se zamjenjuju izrazi (3.1.91) po oblastima integraljenja sukcesivno.

Na osnovu izvršene analize može se doći i do određenih preporuka o izboru oblika rebra odpreska. Naime, kao što je pokazano u (3.1.2) u trenutku narušavanja simetričnosti procesa naglo se mijenja slika tečenja. U tom trenutku je važno spriječiti vitoperenje djelića metala koji teče pod rebro. To praktično znači da je potrebno obezbijediti da sumarni protok metala na jedinicu dužine dr_G sa obje strane žljeba bude proporcionalan širini žljeba $\delta(r_G)$ (sl.3.1.4). Matematički se ovo izražava uslovom [27]:

$$s_p(r_G) / \delta(r_G) = \psi = \text{const} \quad (3.1.93)$$

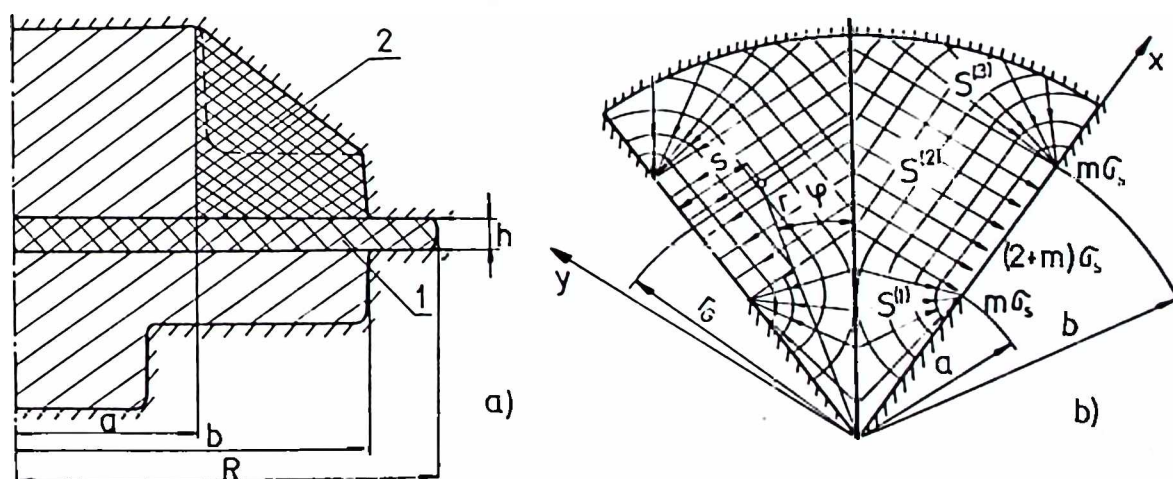
gdje je $s_p(r_G)$ za slučaj konstantne debljine prema (3.1.54) dato relacijom:

$$s_p(r_r) = \begin{cases} r_G \operatorname{tg} \varphi_N / 2 & 0 < r_G < R \cos \varphi_N / 2 \\ \sqrt{R^2 - r_G^2} & R \cos \varphi_N / 2 < r_G < R \end{cases} \quad (3.1.94)$$

Za razmatrani problem uslov (3.1.93) praktično znači preporuku da se širina žljeba $\delta(r_G)$ izabere kao linijska funkcija od r_G koja se blago širi od centra ka periferiji otkovka.

3.1.5. Presovanje radijalno ojačanih uzoraka

Posebno važno je razmotriti mogućnost primjene teorije tečenja metala u tankom sloju za slučajeve zapreminskog oblikovanja uzoraka relativno složene geometrije (osnosimetričnih sa radijalnim rebrima) (sl.3.1.9-a), čije proučavanje standardnim inženjerskim metodama je veoma otežano. Pristup je zasnovan na postavci da je u završnim fazama deformisanja proces moguće modelirati kao tečenje osnovnog tankog sloja metala (1-na sl.3.1.9a) uzimajući u obzir uticaj, u poslednjoj fazi popunjenih djelova tijela, (radijalnih rebara(2-sl.3.1.9a) preko graničnih uslova. Ostali dio metala se u razmatranoj završnoj fazi procesa smatra krutim.



Sl.3.1.9. a) Radijalni presjek uzorka - 1.osnovni tanki sloj; 2.dio metala koji teče u rebro; b) slika tečenja u završnoj fazi procesa.

Linije toka srednjeg dijela $s^{(2)} \{a < r < b\}$ su normalne na konturu jer je na njoj pritisak konstantan. Širina h je takodje konstantna pa su linije to-

ka prave. Sada granični uslov [26] može biti postavljen u obliku:

$$p(a < r < b) = (2 + m)\sigma_s \quad (3.1.95)$$

gdje je m - empirijska karakteristika zavisna od dimenzija žljeba i odpreska. Na graničnim djelovima radijalnog presjeka linije toka su zrakaste u cilju obezbedjenja popunjavanja žljeba (sl.3.1.9b) a linije konstantnog pritiska su koncentrični krugovi. Na osnovu uslova nestišljivosti (3.1.3) i jednačina (3.1.32) može se dobiti raspored brzina i napona:

$$u(s, r_G) = - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (s - s_p) \quad (3.1.96)$$

$$p(s, r_G) = (2 + m) \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} s \quad (3.1.97)$$

gdje je s_p - dužina linije toka od tačke zrakanja do presjeka sa rebrom rasticanja odnosno konturom. Radni pritisci će sada po oblastima (sl.3.1.9b) imati oblik u x-y sistemu:

$$s^{(1)}: p_1(x, y) = (2+m)\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \quad (3.1.98)$$

$$s^{(2)}: p_2(x, y) = (2+m)\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} y \quad (3.1.99)$$

$$s^{(3)}: p_3(x, y) = (2+m)\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \quad (3.1.100)$$

Sile presovanja se mogu izračunati prema izrazima:

$$s^{(1)}: P_1 = \int_0^a dx \int_0^{x \operatorname{tg} \varphi_N / 2} p_1(x, y) dy \quad (3.1.101)$$

$$s^{(2)}: P_2 = \int_a^b dx \int_0^{x \operatorname{tg} \varphi_N / 2} p_2(x, y) dy \quad (3.1.102)$$

$$P_2 = \int_a^{R \cos \varphi_N / 2} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \varphi_N / 2} p_2(x, y) dy + \int_{R \cos \varphi_N / 2}^b dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} p_2(x, y) dy \quad (3.1.103)$$

$$s^{(3)}: P_3 = \int_b^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} p_3(x, y) dy \quad (3.1.104)$$

$$P_3 = \int_b^{R \cos \varphi_N / 2} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \varphi_N / 2} p_3(x, y) dy + \int_{R \cos \varphi_N / 2}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} p_3(x, y) dy \quad (3.1.105)$$

Izrazi (3.1.102) i (3.1.104) se odnose na slučaj razmatranja jedne oblasti presovanja a (3.1.103) i (3.1.105) na slučaj kada je oblast presovanja $s^{(2)}$ odnosno $s^{(3)}$ neophodno razbiti na dvije podoblasti. Nakon popunjavanja žljebova dolazi do završnog istiskivanja metala u vijenac kada se praktično proces može modelirati sa sbijanjem tankog sloja, tj. analogno (3.1.1).

4. MODELIRANJE PROCESA OMD NA OSNOVU VARIJACIONOG PRINCIPA, PRIMJENOM MKE

Teorija plastičnosti treba da odgovori na dva osnovna zadatka: da postavi odgovarajuće jednačine i da ih riješi i time postavi naponsko - deformaciona polja uzorka pri njegovoj plastičnoj deformaciji. U cilju ispunjenja drugog osnovnog zadatka problem rješavanja sistema jednačina teorije plastičnosti može biti predstavljen kao problem ispitivanja na ekstremum odgovarajućeg funkcionala. Ispitivanje na ekstremum se najčešće vrši metodom Rica [72, 73] ili u vezi sa sve većom primjenom kompjuterske tehnike metodom konačnih elemenata (MKE). Ova glava sadrži najčešće korišćene varijacione postavke graničnog zadatka teorije plastičnosti, njihovu kritičku analizu i originalnu diskretnu formalizaciju na osnovu metode konačnog elementa. Korišćen je četvorougao izoparametrijski konačni element. Na osnovu najnovijih saznanja o suštini plastičnog procesa data je varijaciona postavka za realno plastično deformabilno tijelo.

4.1. DIFERENCIJALNA I VARIJACIONA POSTAVKA PROBLEMA TEORIJE TEČENJA KRUTO-PLASTIČNOG TIJELA

Da bi zadatak teorije plastičnosti bio riješen potrebno je postaviti sistem jednačina ovog problema. To su jednačine već pomenute u glavi 1: jednačine statičke ravnoteže (1.2.20), jednačine teorije plastičnosti (1.5.13), jednačine koje odredjuju devijator napona (1.2.3), sferni napon (1.2.1) i tenzor brzine deformacije (1.3.3):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= 0 & i, j &= 1, 2, 3 \\
 S_{ij} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} ; & \sigma_u &= \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^2} ; \quad \dot{\epsilon}_u = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^2} ; i, j=1, 2, 3 \\
 \sigma_{ij} &= s_{ij} + p \delta_{ij} & i, j &= 1, 2, 3 \\
 p &= \sigma_{kk} / 3 & k &= 1, 2, 3 \\
 \dot{\epsilon}_{ij} &= (\partial_i v_j + \partial_j v_i) / 2 & i, j &= 1, 2, 3
 \end{aligned}
 \tag{4.1.1}$$

Relacije (4.1.1) definišu sistem od 24 jednačine sa 24 nepoznate veličine: šest napona σ_{ij} , šest devijatora napona S_{ij} , šest komponenti brzine de-

formacije $\dot{\epsilon}_{ij}$, 3 brzine deformisanja, sferni napon p , intenzivnost napona σ_u i intenzivnost brzine deformacije $\dot{\epsilon}_u$. Ovom sistemu jednačina treba dodati granične uslove koji kompletiraju jednačine plastičnog tečenja:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= F_i \quad \text{na} \quad S_F; \quad v_N = v_{AN} \quad \text{i} \quad \tau = \tau(p, v_s) \quad \text{na} \quad S_s; \\ v_i &= W_i \quad \text{na} \quad S_v; \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

gdje su: F_i i W_i zadana sila, odnosno brzina na površinama S_F i S_v ; v_{AN} i $\tau(p, v_s)$ brzina alata u pravcu normale i zakon trenja (gl.1, odjeljak 1.7).

Sistem jednačina (4.1.1) eksplicitno ne sadrži uslov nestišljivosti (1.3.21) kao ni relaciju koja veže dijagonalne članove devijatora napona (1.2.15). Medjutim, ovi uslovi proističu iz istaknutog sistema kao posledica. Naime, iz treće jednačine (4.1.1) slijedi: $\sigma_{kk} = S_{kk} + 3p = S_{kk} + \sigma_{kk}$, odakle je $S_{kk} = 0$. Iz druge jednačine (4.1.1) će biti: $\dot{\epsilon}_{kk} = 3\dot{\epsilon}_u / 2\sigma_u S_{kk} = 0$. Iskorišćujući dobijeno, peti sistem jednačina (4.1.1) daje $\dot{\epsilon}_{kk} = \partial_k v_k = \text{div } v = 0$ tj. uslov nestišljivosti. To znači da postavka sistema jednačina plastičnog tečenja u obliku (4.1.1) nije jedinstvena. U njoj, na primjer, jednačina koja definiše sferni napon može biti zamijenjena uslovom nestišljivosti. Tada se veza $p = \sigma_{kk} / 3$ dobija kao posledica. U ovom nešto izmijenjenom obliku se sistem (4.1.1) češće definiše jer je pretpostavka o nestišljivosti bliža prirodi plastično deformisanog tijela i lakše se eksperimentalno kontroliše.

U daljem radu se izlaže postavka zadatka o plastičnom tečenju varijacionim metodom slijedeći ideju Lagranža koja se široko koristi pri rešavanju veoma različitih problema [128]. Neka je $L = L(\dot{\epsilon}_{ij})$ neka u principu nepoznata funkcija od brzine deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}$ koja je određena u sistemu jednačina (4.1.1). Razmatra se funkcional dejstva:

$$D = \int_V L(\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_S F_k v_k dS \quad (4.1.3)$$

u kojem je $F_k(s)$ - neka u principu poznata veličina, polje napona koji djeluju na granici tijela S . Potrebno je naći takvo polje $v_i(x_1, x_2, x_3)$ koje

obezbjedjuje ekstremum funkcionala dejstva D pri dopunskom uslovu nestišljivosti tijela. Po Lagranžu[128] moguće je preći s problema određivanja uslovnog ekstremuma funkcionala dejstva D ka problemu određivanja bezuslovnog ekstremuma drugog nešto složenijeg funkcionala koji se često naziva uopštenim funkcionalom Lagranža. Lagranž je pokazao da postoji jedinstvena funkcija $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3, t)$ koja se naziva konstantom Lagranža, takva da zadatak o uslovnom ekstremumu D pri uslovu nestišljivosti je ekvivalentan zadatku o bezuslovnom ekstremumu uopštenog funkcionala ϕ_1 datog izrazom:

$$\phi_1 = D + \int_V \lambda(x_1, x_2, x_3, t) \dot{\epsilon}_{kk} dV \quad (4.1.4)$$

Dakle, ovdje je princip Lagranža, primijenjen na zadatke plastičnog tečenja u potpunosti sa pozicije matematike. Cilj je da se pri njegovoj realizaciji dobiju sve jednačine zadatka o plastičnom tečenju kao ekvivalent zadatka o minimumu funkcionala ϕ_1 , što otvara put ka metodi konačnog elementa i numeričkoj realizaciji problema.

Varirajući funkcional ϕ_1 po brzinama tečenja v_i treba imati na umu očiglednu relaciju:

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij} = \delta \left(\frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \right) = \frac{1}{2} (\partial_i (\delta v_j) + \partial_j (\delta v_i)) \quad (4.1.5)$$

Varijacija će na osnovu (4.1.3) i (4.1.4) imati oblik:

$$\delta \phi_1 = \int_V \delta \{ L(\dot{\epsilon}_{ij}) + \lambda(x_1, x_2, x_3, t) \dot{\epsilon}_{kk} \} dV - \int_S F_k \delta v_k dS \quad (4.1.6)$$

Ako se uzme u obzir relacija $\delta \dot{\epsilon}_{kk} = \delta_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij}$ gdje je δ_{ij} - simbol Kroneckera i (4.1.5) iz (4.1.6) se dobija:

$$\delta \phi_1 = \int_V \left\{ \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{ij}} + \lambda \delta_{ij} \right\} \frac{1}{2} (\partial_i \delta v_j + \partial_j \delta v_i) dV - \int_S F_k \delta v_k dS \quad (4.1.7)$$

U (4.1.7) se označava: $A_{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{ij}} + \lambda \delta_{ij}$. Takođe, dodaju se i oduzimaju odgovarajući članovi da bi se oformio izvod proizvoda te varijacija funkcionala poprima oblik:

$$\delta\phi_1 = \frac{1}{2} \int_V \partial_i (A_{ij} \delta v_j) dV + \frac{1}{2} \int_V \partial_j (A_{ij} \delta v_i) dV - \frac{1}{2} \int_V \partial_i A_{ij} \delta v_j dV - \\ - \frac{1}{2} \int_V \partial_j A_{ij} \delta v_i dV - \int_S F_k \delta v_k dS \quad (4.1.8)$$

Zamjenom indeksa i grupisanjem analognih članova se dobija:

$$\delta\phi_1 = \int_V \partial_k \left[\frac{1}{2} (A_{kl} + A_{lk}) \delta v_l \right] dV - \int_V \partial_k \left[\frac{1}{2} (A_{kl} + A_{lk}) \right] \delta v_l dV - \\ - \int_S F_k \delta v_k dS \quad (4.1.9)$$

Prvi član formule (4.1.9) je zapreminski integral od divergencije vektora dobijenog množenjem varijacije brzine δv_l i simetričnog tenzora:

$$\sigma_{kl} \equiv \frac{1}{2} (A_{kl} + A_{lk}) \quad (4.1.10)$$

Iskoristivši smjenu za A_{ki} dobija se iz (4.1.10):

$$\sigma_{kl} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{kl}} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{lk}} \right] + \lambda \delta_{kl} \quad (4.1.11)$$

U jednačinu (4.1.11) dovoljno je uvesti veličinu devijatora:

$$S_{kl} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{kl}} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}_{lk}} \right] \quad (4.1.12)$$

da bi se na osnovu dobijene relacije:

$$\sigma_{kl} = S_{kl} + \lambda \delta_{kl} \quad (4.1.13)$$

i analogije sa (1.2.3) pod veličinom λ prepoznao sferni napon p :

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, t) \equiv p \equiv \sigma \quad (4.1.14)$$

Izskoristivši relacije (4.1.13) i (4.1.14) varijacija funkcionala (4.1.9) može biti zapisana:

$$\delta\phi_1 = \int_V \partial_k (\sigma_{kl} \delta v_l) dV - \int_V \partial_k \sigma_{kl} \delta v_l dV - \int_S F_k \delta v_k dS \quad (4.1.15)$$

Prvi zapreminski integral u (4.1.15) se može transformisati u površinski prema teoremi Gausa [129]:

$$\int_V \partial_k (\sigma_{kl} \delta v_l) dV = \int_S n_k \sigma_{kl} \delta v_l dS \quad (4.1.16)$$

Izraz (4.1.15) uzimajući u obzir (4.1.16) dobija oblik:

$$\delta\phi_1 = \int_S (n_k \sigma_{kl} - F_l) \delta v_l dS - \int_V \partial_k \sigma_{kl} \delta v_l dV \quad (4.1.17)$$

Površinski integral u (4.1.17) se može rastaviti:

$$\begin{aligned} \int_S (n_k \sigma_{kl} - F_l) \delta v_l dS &= \int_{S_F} (n_k \sigma_{kl} - F_l) \delta v_l dS + \int_{S_v} (n_k \sigma_{kl} - F_l) \delta v_l dS + \\ &+ \int_{S_s} (n_k \sigma_{kl} - F_l) \delta v_l dS \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Integral po površini S_F je jednak nuli na osnovu uslova na granici definisanog relacijom (4.1.2). Drugi integral takodje isčezava na osnovu uslova da je v_l zadana brzina, te njena varijacija $\delta v_l = 0$. Treći integral iz (4.1.18) je ravan nuli na osnovu graničnih postavki iz prethodna dva slučaja. Zapreminski integral u (4.1.17) je jednak nuli na osnovu uslova statičke ravnoteže definisanog prvom jednačinom sistema (4.1.1).

Da bi odredili funkcional ϕ_1 (4.1.4) potrebno je naći nepoznatu funkciju L . U tom cilju može se transformisati veza napona i brzine deformacije iz (4.1.1):

$$S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u \dot{\epsilon}_{ij}}{\dot{\epsilon}_u} = \frac{\delta(\sigma_u \dot{\epsilon}_u)}{\delta \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (4.1.19)$$

Upoređenjem (4.1.12) i (4.1.19) je jasno:

$$L \equiv \sigma_u \dot{\epsilon}_u \quad (4.1.20)$$

Konačno, funkcional ϕ_1 dobija oblik:

$$\phi_1 = \int_V \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_{kk} dV - \int_S F_k v_k dS \quad (4.1.21)$$

a minimizacija njegovog dejstva je zadatak analogan rješenju sistema jednačina teorije plastičnosti (4.1.1).

4.2. PENALNI VARIJACIONI METOD

Penalni varijacioni metod su predložili Li i Kobajaši [130,89,93,96] s ciljem povećanja konvergencije računarskih procedura pri istovremenom automatskom ispunjenju hipoteze o nestišljivosti deformisanog metala. Ideja metoda se najbolje može uočiti ako se razmatranje počne od varijacionog principa Lagranža. Po Lagranžu, u cilju definisanja plastičnog tečenja metala koji se deformiše neophodno je naći takvo polje brzina $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ koje minimizira nelinejski funkcional (4.1.21). No, moguć je i drugi, sa gledišta numeričke realizacije, povoljniji postupak: umjesto funkcionala ϕ_1 može se razmatrati drugi funkcional:

$$\phi_2 = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \frac{\zeta}{2} \int_V (\dot{\epsilon}_{kk})^2 dV - \int_S F_k v_k dS \quad (4.2.1)$$

u kojem je u odnosu na (4.1.21) izmijenjen srednji član. Ovaj član sadrži veliki pozitivni parametar ζ koji automatski obezbedjuje izjednačavanje veličine $\dot{\epsilon}_{kk}^2$ sa nulom (ili u krajnjem slučaju veličinama $\dot{\epsilon}_{kk}^2$ i $|\dot{\epsilon}_{kk}|$ daje minimalnu vrijednost). Bilo kakvo narušavanje uslova $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ povlači za sobom posledice nastale zbog dodatnog člana sa velikim ζ kao "kazne" za narušavanje nestišljivosti. Ovaj metod se zato u literaturi srijeće pod nazivom: "penalty method" ili metod "štrafa".

Često se koristi penalni metod u nešto izmijenjenom obliku [78,93] i tada nosi naziv modifikovani penalni varijacioni metod.

Suština ovog metoda je u sljedećem: nestišljivost je sadržana u potrebi zadovoljenja uslova $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ po cijelom deformacionom tijelu. Pri korišćenju metoda konačnih elemenata ovaj uslov je teško formalizovati, te je umjesto lokalnog rješenja bolje ići u početku na usrednjenje po određenoj zapremini ΔV , okolini tačke (x_1, x_2, x_3) , radi čega se umjesto $\dot{\epsilon}_{kk}^2$ razmatra usrednjena veličina:

$$\langle \dot{\epsilon}_{kk}^2 \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(x_1, x_2, x_3)} \dot{\epsilon}_{kk}^2 dV \quad (4.2.2)$$

Kod realizacije MKE, zapremina ΔV može biti jednaka samom konačnom elementu. U tom slučaju umjesto ϕ_2 (4.2.1) može se koristiti sljedeći funkcional:

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \int_V \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV + \frac{\zeta}{2} \int_V \langle \dot{\epsilon}_{kk}^2 \rangle dV - \int_S F_k v_k dS = \int_V \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV + \\ & + \frac{\zeta}{2\Delta V} \int_V dV \int_{\Delta V(x_1, x_2, x_3)} \dot{\epsilon}_{kk}^2 dV_1 - \int_S F_k v_k dS \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Sa gledišta numeričke realizacije, funkcionali penalnog varijacionog metoda (4.2.1) i (4.2.3) su bez sumnje pogodni, no potrebno je razmotriti i njihovu fizičku sutšinu. Ako se u izlaganju materije podje korak naprijed, može se istaći [72,73] da je krajnji rezultat diskretizacije bilo funkcionala ϕ_2 bilo ϕ_3 , po metodu konačnih elemenata, matrična jednačina tipa:

$$\hat{A} \vec{X} = \vec{b} \quad (4.2.4)$$

gdje su: \hat{A} - matrica krutosti sistema; \vec{b} - slobodni vektor i \vec{X} - traženi vektor (u razmatranom slučaju to je vektor priraštaja brzine deformisanja). Matrica \hat{A} i vektor \vec{b} se mogu predstaviti u vidu suma:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{P} + \zeta \hat{Q} \\ \vec{b} &= \vec{p} + \zeta \vec{q} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

gdje su: \hat{P} i \vec{p} komponente \hat{A} i \vec{b} sukcesivno, nastale diskretizacijom funkcionala ϕ_2 ili ϕ_3 i koje nijesu vezane sa penalnom konstantom ζ .

Zamjenom (4.2.5) u (4.2.4) dobija se:

$$(\hat{P} + \zeta \hat{Q}) \vec{X} = \vec{p} + \zeta \vec{q} \quad (4.2.6)$$

Rješavanjem matrične jednačine (4.2.6) slijedi

$$\vec{X} = (\hat{Q} + \frac{1}{\zeta} \hat{P})^{-1} (\vec{q} + \frac{1}{\zeta} \vec{p}) \quad (4.2.7)$$

Relacija (4.2.7) se može modifikovati na oblik:

$$\vec{X} = (1 + \frac{1}{\zeta} \hat{Q}^{-1} \hat{P})^{-1} \hat{Q}^{-1} (\vec{q} + \frac{1}{\zeta} \vec{p}) \quad (4.2.8)$$

Ako se prvi činilac matrične jednačine (4.2.8) razloži u red, dobija se:

$$\vec{x} = \left[1 - \frac{1}{\zeta} \hat{Q}^{-1} \hat{P} + \frac{1}{\zeta^2} (\hat{Q}^{-1} \hat{P})^2 - \frac{1}{\zeta^3} (\hat{Q}^{-1} \hat{P})^3 + \dots \right] \hat{Q}^{-1} \left(\vec{q} + \frac{1}{\zeta} \vec{p} \right) \quad (4.2.9)$$

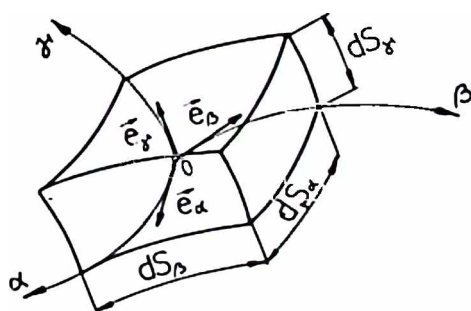
Matrična jednačina (4.2.9) pri $\zeta \rightarrow \infty$ poprima oblik:

$$\vec{x} = \hat{Q}^{-1} \vec{q} \quad (4.2.10)$$

To znači da se suštinska svojstva plastičnosti izražena kroz matricu \hat{P} i vektor \vec{p} kao komponente \hat{A} i \vec{b} , malo uzimaju u obzir.

4.3. VARIJACIONA POSTAVKA PROBLEMA PLASTIČNOG TEČENJA POMOĆU KRIVOLINIJSKIH ORTOGONALNIH KOORDINATA

Pri rješavanju mnogih zadataka plastičnog tečenja [104, 87, 88], pogodno je iskoristiti kao globalne koordinate sistema triortogonalne koordinate Lamé. Specijalni slučajevi ovih koordinata su cilindrične, sferične, parabolične i druge koordinate i primjenjuju se pri izučavanju deformisanja tijela čiji oblik je različit od kubnog i sličnih oblika za koje je najprirodnija primjena pravouglanih koordinata. Opšti izgled krivolinijskog ortogonalnog sistema koordinata sa bazom jediničnih vektora je dat na sl. 4.3.1.:



Sl. 4.3.1. Krivolinijske, ortogonalne koordinate (α, β, γ)

Diferencijali dužine luka duž osa α, β, γ , su dati relacijama:

$$dS_\alpha = H_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha ; \quad dS_\beta = H_\beta(\alpha, \beta, \gamma) d\beta ; \quad dS_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma \quad (4.3.1)$$

gdje su: $H_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$, $H_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$, $H_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ - koeficijenti Lamé. Diferencijal dužine luka u ovom sistemu je zadan diferencijalnom formom (po Pitagori):

$$(dS)^2 = (dS_\alpha)^2 + (dS_\beta)^2 + (dS_\gamma)^2 = H_\alpha^2 d\alpha^2 + H_\beta^2 d\beta^2 + H_\gamma^2 d\gamma^2 \quad (4.3.2)$$

Pri deformisanju osnosimetričnih tijela prirodno je koristiti cilindrične koordinate (r, z, θ) . U tim koordinatama će diferencijal dužine luka imati oblik:

$$dS^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2 \quad (4.3.3)$$

gdje je $H_r \equiv 1$; $H_\theta \equiv r$; $H_z \equiv 1$.

U ovim koordinatama proizvoljni vektor \vec{v} se razlaže po ortima $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma)$ lokalnog sistema koordinata (α, β, γ) (sl.4.3.1) na način:

$$\vec{v} = v_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\alpha + v_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\beta + v_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\gamma \quad (4.3.4)$$

Za specijalni slučaj cilindričnih koordinata će biti:

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z + v_\theta \vec{e}_\theta \quad (4.3.5)$$

Ako se \vec{v} shvati kao vektor brzine to razlaganje (4.3.5) predstavlja tečenje metala kao superpoziciju tri tečenja duž radijusa r , duž ose z i rotaciju duž θ . Za proizvoljne ortogonalne koordinate (α, β, γ) brzina deformacije se određuje jednačinama:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} v_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} v_\gamma \\ \dot{\epsilon}_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} v_\gamma + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} v_\alpha \\ \dot{\epsilon}_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\gamma H_\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} v_\alpha + \frac{1}{H_\gamma H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} v_\beta \\ \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_\beta}{H_\beta} \right) \right) \\ \dot{\epsilon}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H_\beta}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_\beta}{H_\beta} \right) + \frac{H_\gamma}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_\gamma}{H_\gamma} \right) \right) \\ \dot{\epsilon}_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_\gamma}{H_\gamma} \right) + \frac{H_\alpha}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_\alpha}{H_\alpha} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

U cilindričnim koordinatama: $H_\alpha = 1$, $H_\beta = 1$, $H_\gamma = r$, u zadacima gdje se ne uzima u obzir rotacija ($v_\theta \equiv 0$, $\partial/\partial\theta \equiv 0$) formula (4.3.6) daje sljedeće izraze za brzinu deformacije:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \dot{\epsilon}_{\theta z} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\theta r} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Brzina izmjene zapremine će biti jednaka:

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{zz} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.3.8)$$

Komponente tenzora napona u ortogonalnim koordinatama se određuju po ravnima (dS_α , dS_β , dS_γ) lokalno i obrazuju tenzor:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_{\beta\beta} & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & \sigma_{\gamma\gamma} \end{vmatrix} = \sigma_{ij} \quad i, j = \alpha, \beta, \gamma \quad (4.3.9)$$

Diferencijalne jednačine ravnoteže u ovom sistemu koordinata se dobijaju iz razmatranja ravnoteže diferencijalno malog paralelopipeda dS_α dS_β dS_γ [104, 129]. U cilindričnim koordinatama za slučaj ne uzimanja u obzir rotacije ove jednačine se svode na dvije [77, 125]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} + p_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

gdje su: p_r i p_z - komponente vektora spoljnih sila \vec{P} .

Komponente devijatora napona $S_{\alpha\beta}$ u ortogonalnim koordinatama određuju se saglasno (1.2.3) po jednačini:

$$S_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} / 3 \quad (4.3.11)$$

Takodje, analogno (1.2.8) se određuje intenzivnost devijatora napona:

$$S = \sqrt{S_{\alpha\beta}^2} \quad (4.3.12)$$

I jednačine plastičnog tečenja (1.5.12) u ortogonalnim koordinatama se ne razlikuju u tenzornom zapisu od analognih za dekartove koordinate, mada je njihov fizički smisao nešto drugačiji - kruto su vezane sa lokalnim osama koordinata (α, β, γ) predstavljenim na (sl.4.3.1). Na taj način se dobija da izvodjenja u ovim koordinatama ponavljaju analogna izvodjenja sa tenzorima u dekartovim koordinatama, sa isključenjem relacija koje povezuju komponente brzine tečenja i brzine deformacije (4.3.6). Navedeno omogućava da se teorija razvijena u dekartovim koordinatama lako prilagodjava i koristi u krivolinijskim ortogonalnim koordinatama.

4.4. VARIJACIONA POSTAVKA PLASTIČNOG TEČENJA ZA REALNO DEFORMABILNO TIJELO

Sa pozicija klasične teorije plastična deformacija je neprekidan proces. No, u posljednje vrijeme na osnovu eksperimentalnih ispitivanja akustičke emisije za vrijeme plastične deformacije [131] postalo je očigledno da se proces plastične deformacije ne odvija neprekidno, nego malim kvantima. Pri tome se informacije lokalizuju u odvojenim oblastima tijela koje se nazivaju žarištima plastične deformacije i traju konačno vrijeme [132] . Ovo je neophodno uzeti u obzir pri formiranju uslova (lagranžiana) u funkcionalu disipacije energije plastične deformacije. Lagranžiane treba predstaviti u vidu sume po odvojenim oblastima tijela pri čemu treba obuhvatiti i efekt brzog prigušenja u vremenu [129]. To znači, u cilju pravilnog modeliranja eksperimentalnih rezultata potrebno je ostvariti vezu efekta Markova koji se manifestuje prigušenjem informacija u žarištima plastične deformacije sa efektom prostorne organizacije procesa plastične deformacije.

Rezultat eksperimentalnih informacija i gornjih zapažanja je sljedeći oblik funkcionala:

$$\Phi_4 = \int_{V_t} \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV - \int_{S_t} F_\alpha v_\alpha dS_t + \frac{1}{2} \int_{V_t} dV \int_{-\infty}^t d\xi K(t-\xi) \frac{1}{\Delta V_\xi \Delta V_\xi} \dot{\epsilon}_{kk}^2(\xi) dV_\xi \quad (4.4.1)$$

gdje: t označava tekući moment vremena, a ξ tekuće vrijeme u prošlosti koje pripada intervalu prigušenja. Jezgro $K(t-\xi)$ je sa jedne strane Lagranžov parametar penalnog metoda, modifikovanog usrednjenjem i po zapremini i po vremenu, a s druge strane jezgro teorije viskozno-elastičnih relaksacija procesa plastičnog tečenja, te može imati oblik [20] :

$$K(t-\xi) = \sum_{(i=1,2,\dots)} \Omega_i \exp(-(t-\xi)/T_i) \quad (4.4.2)$$

gdje su: Ω_i - konstante a T_i - vremena relaksacije.

Pri sporim procesima plastičnog oblikovanja (sabijanju, kovanju, itd.) integrali po vremenu ξ u lagranžianu funkcionala (4.4.1) se odredjuju metodom "zamrzavanja". Uzima se u obzir da imaju jedinstvenu formu:

$$\int_{-\alpha}^t e^{-(t-\xi)/T} F(\xi) d\xi \quad (4.4.3)$$

gdje se pod $F(\xi)$ podrazumijevaju različite funkcije koje ulaze u strukturu podintegralne funkcije. $F(\xi)$ se mogu razložiti u red Tejlora:

$$F(\xi) = F(t + (\xi - t)) = F(t) + F'(t)(\xi - t)/1! + F''(t)(\xi - t)^2/2! + \dots \quad (4.4.4)$$

Postavljanjem (4.4.4) u (4.4.3), a zatim parcijalnim integraljenjem dobija se:

$$\int_{-\alpha}^t e^{-(t-\xi)/T} F(\xi) d\xi = T F(t) - T^2 F'(t) + T^3/2 F''(t) - \dots \quad (4.4.5)$$

Uz ograničenje prvim članom formula (4.4.5) poprima oblik:

$$\int_{-\alpha}^t e^{-(t-\xi)/T} F(\xi) d\xi = T F(t) \quad (4.4.6)$$

Uzimajući u obzir (4.4.2) i (4.4.6) funkcional Φ_4 (4.4.1) postaje:

$$\Phi_4 = \int_{V_t} \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV - \int_{S_t} F_\alpha v_\alpha dS + \frac{1}{2} \int_{V_t} dV (\sum_i T_i \Omega_i) \frac{1}{\Delta V_t} \int_{\Delta V_t} \dot{\epsilon}_{kk}^2(t) dV_t \quad (4.4.7)$$

Iz analogije sa (4.2.3) se može odrediti:

$$\zeta \equiv T \Omega ; \quad \zeta_i \equiv T_i \Omega_i \quad (4.4.8)$$

Tada se lagranžian (4.4.7) poklapa sa lagranžijanom penalnog modificiranog metoda. Ako se uzme da je:

$$\zeta = \sum_i \zeta_i \quad (4.4.9)$$

iz (4.4.8) i (4.4.9) se dobija:

$$T \equiv \sum_i T_i (\Omega_i / \Omega) \quad (4.4.10)$$

gdje je T srednje vrijeme funkcionisanja žarišta plastične deformacije dobijeno osrednjavanjem sa težinskim faktorima jednakim odnosu konstante Ω_i za pojedina žarišta i konstante Ω za sistem u cjelini.

Sada funkcional (4.4.7) dobija oblik:

$$\Phi_4 = \int_{V_t} \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV - \int_{V_t} F_\alpha v_\alpha dV + \frac{1}{2} \int_{V_t} dV T \Omega \frac{1}{\Delta V_t} \int_{\Delta V_t} \dot{\epsilon}_{kk}^2(t) dV_t \quad (4.4.11)$$

pri čemu se ovdje javljaju dvije konstante koje je potrebno eksperimentalno obezbijediti: vrijeme relaksacije T i konstanta Ω .

Zapis (4.4.11) omogućava da se utvrdi fizički smisao lagranžiana, metoda modificiranih penalnih funkcija, koji se najčešće tumači [93,94] velikom pozitivnom konstantom. Znajući da funkcional (4.4.11) ima dimenziju snage moguće je utvrditi da konstantu Ω treba tretirati kao pritisak ili pak gustinu energije vezanu sa žarištima plastične deformacije. U tom kontekstu u metod modificiranih penalnih funkcija su uvedeni relaksacija koja traje neko srednje vrijeme T rasporedjeno po spektru $(T_i, i=1,2,\dots)$ i žarišta plastične deformacije sa odredjenom gustinom energije ili pritiskom Ω .

To znači da ζ nije proizvoljna velika konstanta već je proizvod: $\zeta = T \Omega$ iz eksperimentalnih konstanti, koje se mogu mjeriti.

Ako se u (4.4.5) sačuvaju dva člana, tada (4.4.6) dobija oblik:

$$\int_{-\infty}^t e^{-(t-\xi)/T} F(\xi) d\xi = TF(t) - T^2 F_t'(t) \quad (4.4.12)$$

dok se za eksponencijalno jezgro dobija sljedeći red:

$$\int_{-\infty}^t K(t-\xi) F(\xi) d\xi = \xi F(t) - \xi_1 F_t'(t) \quad (4.4.13)$$

za koji su karakteristične dvije konstante:

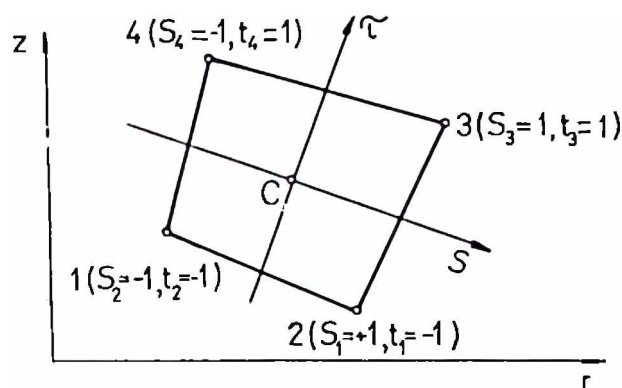
$$\zeta \equiv \Omega T = \sum_i \Omega_i T_i, \quad \zeta_1 \equiv \Omega T^2 = \sum_i T_i^2 \Omega_i \quad (4.4.14)$$

Druga konstanta označava statističko odstupanje dužine trajanja različitih izazvanih kretanja i zato je vezana sa vremenom T^2 .

4.5. KINEMATSKO-TEMPERATURNNA DISKRETIZACIJA PLASTIČNOG TEČENJA U OKVIRU DVODIMENZIONALNOG MKE

U prethodnom dijelu ove glave problem plastičnog tečenja je postavljen u varijacionom obliku predvidjenom za rešavanje metodom konačnih elemenata. Formalizacija varijacionog zadatka počinje sa pokrivanjem oblasti $V(x_1, x_2, x_3, t)$ ograničene granicom $s(x_1, x_2, x_3, t)$ sistemom konačnih elemenata koji se defor-

mišu sa vremenom. U ovom radu se koriste četvorougaoni izoparametarski elementi, kruto vezani za tijelo V.



Sl.4.5.1. Četvorougaoni izoparametarski element

Četvorougaoni element (sl.4.5.1) ima četiri tjemena, numerisana redom 1,2,3,4 sa koordinatama: $r_1(t), z_1(t), \dots, r_4(t), z_4(t)$. Centar težine elementa leži u tački c s koordinatama:

$$r_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha}(t); \quad z_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha}(t) \quad (4.5.1)$$

Da bi se odredila zakonitost izmjene fizičkih veličina u granicama odvojenih elemenata sa svakim elementom (bilo unutrašnjim ili graničnim) kruto se veže sistem lokalnih koordinata (s, τ) implicitno odredjen formulama: $r=r(s, \tau)$ i $z=z(s, \tau)$ gdje su:

$$r(s, \tau) = \sum_{\alpha=1}^4 q_{\alpha} r_{\alpha}(t); \quad z(s, \tau) = \sum_{\alpha=1}^4 q_{\alpha} z_{\alpha}(t) \quad (4.5.2)$$

pri čemu je q_{α} definisano izrazom:

$$q_{\alpha} = q_{\alpha}(s, \tau) = (1+s_{\alpha} s)(1+\tau_{\alpha} \tau)/4 \quad (4.5.3)$$

sa sljedećim vrijednostima konstanti:

$$\begin{array}{cccc} s_1 = -1 & s_2 = 1 & s_3 = 1 & s_4 = -1 \\ \tau_1 = -1 & \tau_2 = -1 & \tau_3 = 1 & \tau_4 = 1 \end{array} \quad (4.5.4)$$

Iz formula (4.5.2) i (4.5.3) slijedi da će pri $s = \tau = 0$ biti:

$$r(s=0, \tau=0) = r_c(t); \quad z(s=0, \tau=0) = z_c(t) \quad (4.5.5)$$

odakle slijedi zaključak da se koordinatni početak lokalnih koordinata nalazi u težištu četvorougaoanog elementa. Tačke 1,2,3,4 koje definišu tjemena četvorougaoanog elementa imaju sljedeće lokalne koordinate: tačka 1 ($s=-1, \tau=-1$); 2 ($s=1, \tau=-1$); 3 ($s=1, \tau=1$); 4 ($s=-1, \tau=1$) prema (sl.4.5.1).

Kao posljedica deformacija i time izazvanih pomjeranja koordinate svih čvorova se u toku vremena mijenjaju. Zato su koordinate čvorova elementa 1234 neke funkcije vremena t . Njihovi izvodi po vremenu definišu brzine tečenja:

$$v_r = \frac{\partial r(s, \tau, t)}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z(s, \tau, t)}{\partial t} \quad (4.5.6)$$

koje imaju oblik recimo za tačku 1:

$$v_{r_1} = \frac{\partial r_1(t)}{\partial t}; \quad v_{z_1} = \frac{\partial z_1(t)}{\partial t} \quad (4.5.7)$$

Integraljenjem diferencijalnih jednačina (4.5.7) dobijaju se formule za nalaženje položaja čvorova u sljedećem momentu vremena po poznatim koordinatama u prethodnom trenutku vremena:

$$r_\alpha(t+\Delta t) = r_\alpha(t) + \int_t^{t+\Delta t} v_{r_\alpha}(t) dt \quad (4.5.8)$$

$$z_\alpha(t+\Delta t) = z_\alpha(t) + \int_t^{t+\Delta t} v_{z_\alpha}(t) dt$$

pri $\alpha = 1, 2, 3, 4$ uz poznate brzine v_{r_α} i v_{z_α} .

Jednostavna rješenja (4.5.8), sa greškom proporcionalnom Δt^2 mogu biti u cilju povećanja tačnosti zamijenjene formulama Runge-Kuta kod kojih se tražene koordinate $r_\alpha(t+\Delta t)$ i $z_\alpha(t+\Delta t)$ definišu kao parabole po Δt sa greškom proporcionalnom Δt^3 i u diskretnom obliku formulišu jednačinama:

$$r_\alpha(t+\Delta t/2) = r_\alpha(t) + v_{r_\alpha}(t) \Delta t/2$$

$$z_\alpha(t+\Delta t/2) = z_\alpha(t) + v_{z_\alpha}(t) \Delta t/2 \quad (4.5.9)$$

$$r_\alpha(t+\Delta t) = r_\alpha(t) + v_{r_\alpha}(t+\Delta t/2) \Delta t$$

$$z_\alpha(t+\Delta t) = z_\alpha(t) + v_{z_\alpha}(t+\Delta t/2) \Delta t$$

koje omogućavaju da se odredi položaj mreže elemenata nakon vremenskog intervala Δt . Zajedno sa kretanjem tijela kreće se i toplota. U cilju uzimanja u obzir ovih efekata jednačina toploprovodnosti se transformiše na taj način što se uvodi smjena $c \rho = C$ (glava 1, odjeljak 1.6) i potpuni izvod razbija na komponente. Relacija (1.6.11) dobija oblik:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda \nabla T - C T \vec{v}) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.5.10)$$

Ako se jednačina podijeli sa C , uvede u razmatranje koeficijent temperaturoprovodnosti $\chi = \lambda / C$ i izvrši zamjena $Q = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / C$ dobija se relacija:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T - \nabla T \vec{v} + Q \quad (4.5.11)$$

Jednačina (4.5.11) je faktički jednačina toploprovodnosti, ali u obliku (4.5.11) može se nazivati jednačinom temperaturoprovodnosti.

Upoređenjem jednačina (4.5.6) i (4.5.11) može se uočiti njihova analogija: jednačina (4.5.6) pri integraljenju daje položaj mreže čvorova izdvojenih u tijelu, a jednačina (4.5.11) analogno tome omogućava praćenje polja temperature. Potrebno je samo ocijeniti desni član jednačine (4.5.11) koji se može označiti sa Ω :

$$\Omega = \chi \nabla^2 T - \nabla T \vec{v} + Q \quad (4.5.12)$$

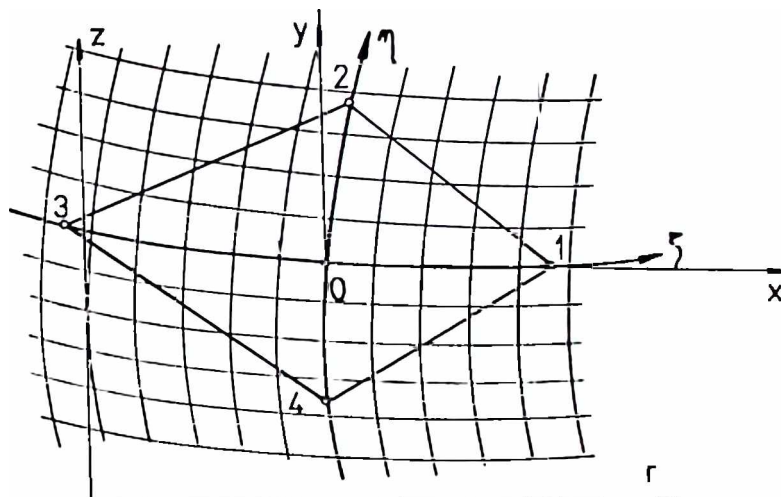
pri čemu jednačina temperaturoprovodnosti dobija jednostavan oblik:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Omega \quad (4.5.13)$$

Treba imati na umu da (4.5.6) i (4.5.11) definišu sistem od $3N$ jednačina (N -broj čvorova diskretizovane oblasti) sa $3N$ nepoznatih veličina: v_r, v_z i T . Da bi se pripremili za proračun po formulama MKE potrebno je zapisati veličinu Ω kao funkciju čvornih promenljivih: koordinata čvorova (r, z) , brzina kretanja čvorova (v_r, v_z) i temperatura u čvorovima T . U tom cilju nužno je odrediti $\nabla^2 T$ i ∇T .

Posmatra se čvor mreže (neka je označen 0) i njegovo blisko okruženje – čvorovi 1,2,3,4 koji zajedno obrazuju još jedan element – rombični element

koji okružuje čvor 0. (sl.4.5.2). Kroz tri tačke ovog elementa (2,0,4) ili (3,0,1) moguće je postaviti samo jednu parabolu. Dvije takve parabole obrazuju lokalni krivolinijski sistem koordinata (ξ , η) i parametrizira se okolina posmatranog čvora 0 ($\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$), ako se zajedno sa ovim parabolama postave dvije familije ekvidistantnih parabola koje pokrivaju rombični element.



Sl.4.5.2. Rombični element za zadatak prenosa temperature

Globalne koordinate problema su (r, z). U okolini posmatranog čvora 0 postavljene su koordinate $x \equiv r - r_0$, $y \equiv z - z_0$ i u tim koordinatama se mogu izraziti tražene parabole, koristeći polinome Lagranža. Da bi po Lagranžu [74,83] proveli parabole $x(y)$ i $y(x)$ kroz tačke u prvom slučaju (x_3, y_3), ($x_0=0, y_0=0$), (x_1, y_1) i tačke (x_2, y_2), ($x_0=0, y_0=0$), (x_4, y_4) u drugom slučaju, dovoljno je definisati tročlane polinome oblika:

$$\begin{aligned} x &= x_2 L_2(y) + x_0 L_0(y) + x_4 L_4(y) \\ y &= y_3 L_3(x) + y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} L_2(y) &= \frac{(y-y_0)(y-y_4)}{(y_2-y_0)(y_2-y_4)}; \quad L_0(y) = \frac{(y-y_2)(y-y_4)}{(y_0-y_2)(y_0-y_4)}; \quad L_4(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_4-y_0)(y_4-y_2)} \\ L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)}; \quad L_0(x) = \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_0-x_3)(x_0-x_1)}; \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

pri čemu npr. $L_2(y)$ poprima vrijednost 0 u "ludjim" tačkama 0 i 4, a vrijednost 1 u svojoj tački 2.

Treba uzeti u obzir i veličine $\xi \neq 0$ i $\eta \neq 0$ za slučaj kada se tačka (x, y) ne poklapa sa čvorovima 01234, pa se relacije (4.5.14) mogu zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} x &= \xi + x_2 \frac{(y-y_0)(y-y_4)}{(y_2-y_0)(y_2-y_4)} + x_4 \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_4-y_0)(y_4-y_2)} \\ y &= \eta + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

te će lokalne koordinate za čvorove 01234 imati vrijednost:

$$\text{Za tačku 0: } \xi_0 = 0 \quad (4.5.17)$$

$$\eta_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Za tačku 1: } \xi_1 &= x_1 - x_2 \frac{(y_1-y_0)(y_1-y_4)}{(y_2-y_0)(y_2-y_4)} - x_4 \frac{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}{(y_4-y_0)(y_4-y_2)} \\ \eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Za tačku 2: } \xi_2 &= 0 \\ \eta_2 &= y_2 - y_3 \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)} - y_1 \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Za tačku 3: } \xi_3 &= x_3 - x_2 \frac{(y_3-y_0)(y_3-y_4)}{(y_2-y_0)(y_2-y_4)} - x_4 \frac{(y_3-y_0)(y_3-y_2)}{(y_4-y_0)(y_4-y_2)} \\ \eta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Za tačku 4: } \xi_4 &= 0 \\ \eta_4 &= y_4 - y_3 \frac{(x_4-x_0)(x_4-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)} - y_1 \frac{(x_4-x_0)(x_4-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

Za prelaz u rombične koordinate koriste se formule (4.5.16) koje u skraćenom obliku mogu biti zapisane:

$$\xi = x - \pi_1(y); \quad \eta = y - \pi_2(x) \quad (4.5.22)$$

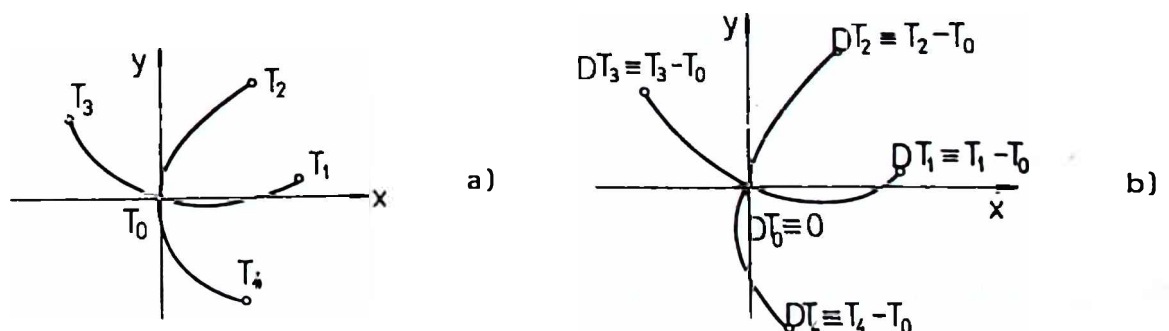
gdje su $\pi_1(y)$ i $\pi_2(x)$ polinomi desne strane jednačina (4.5.16). Tada će izvodi imati oblik:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial \xi} - \pi_2'(x) \frac{\partial T}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - 2\pi_2'(x) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + \pi_2'^2(x) \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \pi_2''(x) \frac{\partial T}{\partial \eta} \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} - \pi_1'(y) \frac{\partial T}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2\pi_1'(y) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + \pi_1'^2(y) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \pi_1''(y) \frac{\partial T}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

pri čemu će u tački 0 biti:

$$\begin{aligned}
\pi_1(y_0) &= 0 \\
\pi_1'(y_0) &= x_2 \frac{y_0 - y_4}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_4)} + x_4 \frac{y_0 - y_2}{(y_4 - y_0)(y_4 - y_2)} \\
\pi_1''(y_0) &= \frac{2x_2}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_4)} + \frac{2x_4}{(y_4 - y_0)(y_4 - y_2)} \\
\pi_2(x_0) &= 0 \\
\pi_2'(x_0) &= y_3 \frac{x_0 - x_1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)} + y_1 \frac{x_0 - x_3}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_3)} \\
\pi_2''(x_0) &= \frac{2y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)} + \frac{2y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_3)}
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

Da bi odredili relacije (4.5.23) potrebno je još naći izvode od T po koordinatama ξ i η preko vrijednosti temperatura u čvorovima 0,1,2,3,4. U tom cilju korisno je posmatrati u čvorovima rombičnog elementa umjesto temperatura, temperaturne razlike u odnosu na traženu tačku (sl.4.5.3).



Sl.4.5.3. Zadavanje u čvorovima rombičnih elemenata: a) temperatura, b) temperaturnih razlika.

Za temperaturne razlike se po Lagranžu može napisati:

$$DT(\xi, \eta) = DT_1 \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_3)} + DT_3 \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)}{(\xi_3 - \xi_0)(\xi_3 - \xi_1)} +$$

$$+ DT_2 \frac{(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_4)}{(\eta_2 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_4)} + DT_4 \frac{(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_2)}{(\eta_4 - \eta_0)(\eta_4 - \eta_2)} \quad (4.5.25)$$

gdje su $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_4, \eta_4$ određeni relacijama (4.5.17)-(4.5.2

Uzimajući u obzir (4.5.17) relacija (4.5.25) dobija oblik:

$$DT = DT_1 \frac{\xi(\xi - \xi_3)}{\xi_1(\xi_1 - \xi_3)} + DT_3 \frac{\xi(\xi - \xi_1)}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)} + DT_2 \frac{\eta(\eta - \eta_4)}{\eta_2(\eta_2 - \eta_4)} + DT_4 \frac{\eta(\eta - \eta_2)}{\eta_4(\eta_4 - \eta_2)} \quad (4.5.26)$$

Iz (4.5.26) i (4.5.23) slijedi sljedeća aproksimacija gradijenata temperatur

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{DT_1(2\xi - \xi_3)}{\xi_1(\xi_1 - \xi_3)} + \frac{DT_3(2\xi - \xi_1)}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)} - \Pi_2'(x) \left[\frac{DT_2(2\eta - \eta_4)}{\eta_2(\eta_2 - \eta_4)} + \frac{DT_4(2\eta - \eta_2)}{\eta_4(\eta_4 - \eta_2)} \right] \quad (4.5.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{DT_2(2\eta - \eta_4)}{\eta_2(\eta_2 - \eta_4)} + \frac{DT_4(2\eta - \eta_2)}{\eta_4(\eta_4 - \eta_2)} - \Pi_1'(y) \left[\frac{DT_1(2\xi - \xi_3)}{\xi_1(\xi_1 - \xi_3)} + \frac{DT_3(2\xi - \xi_1)}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)} \right]$$

Za ravanski slučaj operator Laplasa će imati oblik za tačku 0:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 DT}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 DT}{\partial y^2} = 2 \left[1 + \Pi_1'^2(y_0) \right] \left[\frac{DT_1}{\xi_1(\xi_1 - \xi_3)} + \frac{DT_3}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)} \right] +$$

$$+ 2 \left[1 + \Pi_2'^2(x_0) \right] \left[\frac{DT_2}{\eta_2(\eta_2 - \eta_4)} + \frac{DT_4}{\eta_4(\eta_4 - \eta_2)} \right] + \Pi_1''(y_0) \left[\frac{\xi_3 DT_1}{\xi_1(\xi_1 - \xi_3)} + \right. \quad (4.5.28)$$

$$\left. + \frac{\xi_1 DT_3}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)} \right] + \Pi_2''(x_0) \left[\frac{\eta_4 DT_2}{\eta_2(\eta_2 - \eta_4)} + \frac{\eta_2 DT_4}{\eta_4(\eta_4 - \eta_2)} \right]$$

Na osnovu gornjih rezultata moguće je definisati algoritam nalaženja veliči Ω (4.5.12) za čvor 0, rombičnog elementa 0,1,2,3,4. Relativna brzina u jednačini (4.5.12) je očigledno jednaka nuli. Formule (4.5.17) - (4.5.2

odredjuju veličine $\xi_1(t)$, $\xi_3(t)$, $\eta_2(t)$ i $\eta_4(t)$, a formule (4.5.24) veličine: $\Pi_1(y_0(t))$, $\Pi_1'(y_0(t))$, $\Pi_1''(y_0(t))$, $\Pi_2(x_0(t))$, $\Pi_2'(x_0(t))$, $\Pi_2''(x_0(t))$.

Laplasijan temperature se može odrediti iz (4.5.28) i uz poznato Q u (4.5.11) moguće je odrediti $\Omega(t)$. Po metodi Ojlera temperaturno polje se odredjuje formulom:

$$T_\alpha(t + \Delta t) = T_\alpha(t) + \Omega(t) \Delta t \quad (4.5.29)$$

Radi uvećanja tačnosti algoritam prenosa koordinata potrebno je kombinovati sa prenosom temperatura u okviru numeričkog postupka metoda Runge-Kuta:

$$\begin{aligned} T_\alpha(t + \Delta t/2) &= T_\alpha(t) + \Omega_\alpha(t) \Delta t/2 \\ T_\alpha(t + \Delta t) &= T_\alpha(t) + \Omega_\alpha(t + \Delta t/2) \Delta t \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

4.6. NAPONSKO-DEFORMACIONA DISKRETIZACIJA PLASTIČNOG TEČENJA U OKVIRU DVODIMENZIONALNOG MKE

Ako je $\Psi(s, \tau)$ proizvoljna funkcija zadana unutar četvorougaoznog konačnog elementa, tada njen zapis preko svojih vrijednosti u čvorovima četvorougaoznog elementa 1, 2, 3, 4 prema (4.5.2) ima oblik:

$$\Psi(s, \tau) = \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_\alpha q_\alpha(s, \tau) \quad (4.6.1)$$

gdje su: Ψ_α za $\alpha = 1, 2, 3, 4$ - vrijednosti funkcije Ψ u čvorovima a q_α - standardne funkcije definisane sa (4.5.3). Pri numeričkoj realizaciji pogodno je relaciju (4.6.1) zapisati u obliku:

$$\Psi(s, \tau) = \{q_1(s, \tau), q_2(s, \tau), q_3(s, \tau), q_4(s, \tau)\} \{\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \Psi_4\}^{-1} \quad (4.6.2)$$

gdje matrica-vrsta sadrži vrijednosti funkcije oblika:

$$q(s, \tau) = [q_1(s, \tau), q_2(s, \tau), q_3(s, \tau), q_4(s, \tau)] \quad (4.6.3)$$

a matrica - kolona sadrži vrijednosti samo ekstrapolirajuće funkcije:

$$\Psi = \{\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4\}^{-1} \quad (4.6.4)$$

Ako je $\vec{v}(s, \tau)$ vektor brzine kretanja unutar konačnog elementa tada se njegov zapis preko vrijednosti u čvorovima 1,2,3,4 četvorougaoanog elementa dobija primjenom (4.6.1) za svaku komponentu toga vektora, što u razvijenoj formi ima oblik:

$$\begin{aligned} v_r(s, \tau) &= q_1(s, \tau) v_{1r} + q_2(s, \tau) v_{2r} + q_3(s, \tau) v_{3r} + q_4(s, \tau) v_{4r} \\ v_z(s, \tau) &= q_1(s, \tau) v_{1z} + q_2(s, \tau) v_{2z} + q_3(s, \tau) v_{3z} + q_4(s, \tau) v_{4z} \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Pri numeričkoj realizaciji pogodan je vektorski oblik organizacije podataka te vektor brzina posmatranog konačnog elementa se zapisuje u obliku:

$$v' = \{v_{r1} \quad v_{z1} \quad v_{r2} \quad v_{z2} \quad v_{r3} \quad v_{z3} \quad v_{r4} \quad v_{z4}\}^{-1} = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7 \quad v_8\} \quad (4.6.6)$$

pri čemu je očigledno da se vrijednost

$$v(s, \tau) = \begin{bmatrix} v_r(s, \tau) \\ v_z(s, \tau) \end{bmatrix} \quad (4.6.7)$$

dobija iz (4.6.5) a može biti zapisana:

$$v(s, \tau) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 \end{bmatrix} v' \quad (4.6.8)$$

Matrica vrijednosti q se može označiti:

$$N(s, \tau) = N_{i\alpha} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.6.9)$$

i tada formula (4.6.8) kao osnovna formula za zapis vektorskog polja $v(s, \tau)$ unutar konačnog elementa postaje:

$$v(s, \tau) = N(s, \tau) \dot{v}(s, \tau) \quad (4.6.10)$$

ili preko komponenata:

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^8 N_{i\alpha} v_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.6.11)$$

Sljedeći korak je određivanje grdijenata ekstrapolirajuće funkcije (4.6.1):

$$\nabla \Psi = \left(\frac{\partial \Psi(s, \tau)}{\partial r} \quad \frac{\partial \Psi(s, \tau)}{\partial z} \right) \quad (4.6.12)$$

Izvodi iz (4.6.12) mogu biti predstavljeni u obliku [129] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

U izrazima (4.6.13) je neophodno odrediti $\partial s / \partial r$, $\partial s / \partial z$, $\partial \tau / \partial r$ i $\partial \tau / \partial z$.

U tom cilju se diferenciraju početne jednačine (4.5.2). Diferenciranjem prve jednačine iz (4.5.2) po r se dobija:

$$1 = \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha}(t) \partial q_{\alpha}(s, \tau) / \partial r \quad (4.6.14)$$

Zamjenom $q_{\alpha}(s, \tau)$ iz (4.5.3) u (4.6.14) dobija se jednakost:

$$1 = \frac{\partial s}{\partial r} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) / 4 + \frac{\partial \tau}{\partial r} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s) / 4 \quad (4.6.15)$$

Relacija (4.6.15) može biti zapisana u obliku:

$$M_1(t) \frac{\partial s}{\partial r} + M_2(s) \frac{\partial \tau}{\partial r} = 1 \quad (4.6.16)$$

gdje su:

$$M_1(t) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau), \quad M_2(s) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s) \quad (4.6.17)$$

Diferenciranjem druge jednačine iz (4.5.2) po r se dobija:

$$0 = \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} \partial q_{\alpha}(s, \tau) / \partial r \quad (4.6.18)$$

Iz (4.6.18) i (4.5.3) nastaje jednakost:

$$0 = \frac{\partial s}{\partial r} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) + \frac{\partial \tau}{\partial r} \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s) \quad (4.6.19)$$

koja se može zapisati u obliku:

$$M_3(\tau) \frac{\partial s}{\partial r} + M_4(s) \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0 \quad (4.6.20)$$

gdje su:

$$M_3(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau); \quad M_4(s) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s) \quad (4.6.21)$$

Rješavanjem jednačina (4.6.16) i (4.6.20) po $\partial s / \partial r$ i $\partial \tau / \partial r$ se dobija:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = M_4(\tau) / \Delta(s, \tau); \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = - M_3(\tau) / \Delta(s, \tau) \quad (4.6.22)$$

gdje je:

$$\Delta = M_1(\tau) M_4(s) - M_2(s) M_3(\tau) \quad (4.6.23)$$

Zamjenom (4.6.17) i (4.6.21) u (4.6.23) slijedi:

$$\Delta = \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} (1 + \tau_{\alpha} \tau) (1 + s_{\alpha} s) (r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}) \quad (4.6.24)$$

Veličina $\Delta(s, \tau)$ je izračunata u Prilogu 2 i jednaka je:

$$\begin{aligned} \Delta(s, \tau) = 1/8 [(r_1 - r_3)(z_2 - z_4) - (r_2 - r_4)(z_1 - z_3) + (r_3 - r_4)(z_1 - z_2) - \\ - (r_1 - r_2)(z_3 - z_4)] s + [(r_2 - r_3)(z_1 - z_4) - (r_1 - r_4)(z_2 - z_3)] t \end{aligned} \quad (4.6.25)$$

Sada formule (4.6.22) mogu biti iskorišćene u (4.6.13) za nalaženje komponente $\partial \Psi / \partial r$. Analogno, diferenciranjem relacija (4.5.2) po z dobija se:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}(s, \tau)}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} M_1(\tau) + \frac{\partial \tau}{\partial z} M_2(s) \\ 1 &= \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}(s, \tau)}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} M_3(\tau) + \frac{\partial \tau}{\partial z} M_4(s) \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

Rješenja jednačina (4.6.26) su:

$$\partial s / \partial z = - M_2(s) / \Delta(s, \tau); \quad \partial \tau / \partial z = M_1(\tau) / \Delta(s, \tau) \quad (4.6.27)$$

Formule (4.6.27) mogu biti iskorišćene u (4.6.13) za nalaženje komponente $\partial \Psi / \partial z$.

I tako gradijent proizvoljne funkcije $\Psi(r, z)$ se izražava u tačkama (s, τ) unutar četvorougaoznog konačnog elementa preko vrijednosti ove funkcije u čvorovima po formulama:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial r} &= (M_4(s) \frac{\partial \Psi}{\partial s} - M_3(\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}) / \Delta(s, \tau) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= (-M_2(s) \frac{\partial \Psi}{\partial s} + M_1(\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}) / \Delta(s, \tau)\end{aligned}\quad (4.6.28)$$

Prema (4.6.1) biće:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial s} &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)\end{aligned}\quad (4.6.29)$$

Iz (4.6.28) i (4.6.29) slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial r} &= 1/4 \Delta(s, \tau) \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} [M_4(s) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) - M_3(\tau) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)] \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 1/4 \Delta(s, \tau) \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} [-M_2(s) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) - M_1(\tau) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)]\end{aligned}\quad (4.6.30)$$

Ovim formulama se rešava problem određivanja gradijenta proizvoljne funkcije $\Psi(r, z)$ prema njenim vrijednostima u čvorovima. Ovaj postupak se može primijeniti za dobijanje komponenta brzine deformacije (1.3.3) koje imaju oblik:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} \quad (4.6.31)$$

One se i izražavaju preko gradijenata $\partial v_r / \partial r$, $\partial v_z / \partial z$, $\partial v_z / \partial r$, $\partial v_r / \partial z$ čije računanje se može obaviti prema formulama (4.6.30) primijenjenim za polja v_r i v_z .

Za komponentu $\dot{\epsilon}_{rr}$ će biti:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{4\Delta(s, \tau)} \sum_{\alpha=1}^4 v_{r\alpha} [M_4(s) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) - M_3(\tau) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)] \quad (4.6.3)$$

Koristeći (4.6.21) dobija se:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 (1 + s_{\beta} s) (1 + \tau_{\alpha} \tau) s_{\alpha} \tau_{\beta} (v_{r\alpha} z_{\beta} - v_{r\beta} z_{\alpha}) \quad (4.6.33)$$

Suma je izračunata u Prilogu 3 te će konačni izraz imati oblik:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{1}{8\Delta} \{ & [v_{r1}(z_2 - z_4) + v_{r2}(z_3 - z_1) + v_{r3}(z_4 - z_2) + v_{r4}(z_1 - z_3)] + \\ & + [v_{r1}(z_4 - z_3) + v_{r2}(z_3 - z_4) + v_{r3}(z_1 - z_2) + v_{r4}(z_2 - z_1)] s + [v_{r1}(z_3 - z_2) + \\ & + v_{r2}(z_1 - z_4) + v_{r3}(z_4 - z_1) + v_{r4}(z_2 - z_3)] \tau \} \end{aligned} \quad (4.6.34)$$

Za komponentu ϵ_{rz} će biti:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta(s, \tau)} \sum_{\alpha=1}^4 \{ & v_{\alpha} [-M_2(s) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) + M_1(\tau) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)] + \\ & + v_{z\alpha} [M_4(\tau) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) - M_3(s) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)] \} \end{aligned} \quad (4.6.35)$$

Ako se izvrše zamjene prema formulama (4.6.17) i (4.6.21), a zatim izračuna suma (Prilozi 3 i 4) dobija se:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{8\sqrt{2}\Delta(s, \tau)} \{ & [v_{z1}(r_4 - r_2) + v_{z2}(r_1 - r_3) + v_{z3}(r_2 - r_4) + v_{z4}(r_3 - r_1)] + \\ & + [v_{r1}(z_2 - z_1) + v_{r2}(z_3 - z_1) + v_{r3}(z_4 - z_2) + v_{r4}(z_1 - z_3)] + [v_{z1}(r_3 - r_4) + \\ & + v_{z2}(r_4 - r_3) + v_{z3}(r_2 - r_1) + v_{z4}(r_1 - r_2)] s + [v_{r1}(z_4 - z_3) + v_{r2}(z_3 - z_4) + \\ & + v_{r3}(z_1 - z_2) + v_{r4}(z_2 - z_1)] s + [v_{z1}(r_2 - r_3) + v_{z2}(r_4 - r_1) + v_{z3}(r_1 - r_4) + v_{z4}(r_2 - r_3)] \tau \\ & + [v_{r1}(z_3 - z_2) + v_{r2}(z_1 - z_4) + v_{r3}(z_4 - z_1) + v_{r4}(z_2 - z_3)] \tau \} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Za komponentu brzine deformacije $\dot{\epsilon}_{zz}$ se dobija izraz:

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{1}{4\Delta(s, \tau)} = \frac{1}{4\Delta(s, \tau)} \sum_{\alpha=1}^4 v_{z\alpha} [-M_2(s) s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) + M_1(\tau) \tau_{\alpha} (1 + s_{\alpha} s)] \quad (4.6.3)$$

Zamjenom relacija (4.6.17) u (4.6.37) se dobija suma. Sumiranje je izvršeno u Prilogu 4 i dobijen je rezultat:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{1}{8\Delta(s, \tau)} \{ & [v_{z1}(r_4 - r_2) + v_{z2}(r_1 - r_3) + v_{z3}(r_2 - r_4) + v_{z4}(r_3 - r_1)] + \\ & + [v_{z1}(r_3 - r_4) + v_{z2}(r_4 - r_3) + v_{z3}(r_2 - r_1) + v_{z4}(r_1 - r_2)] s + [v_{z1}(r_2 - r_3) + \\ & + v_{z2}(r_4 - r_1) + v_{z3}(r_1 - r_4) + v_{z4}(r_3 - r_2)] \tau \} \end{aligned} \quad (4.6.38)$$

Veličina $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$ se direktno određuje prema relaciji (4.6.31). Na taj način postupno je određen tenzor brzine deformacije kao funkcija od lokalnih koordinata (s, τ) za proizvoljnu tačku deformisanog tijela u proizvoljnom trenutku t .

Pri numeričkoj realizaciji pogodno je organizovati komponente tenzora brzine deformacije u vidu bivektora:

$$\vec{\dot{\epsilon}}(s, \tau, t) = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r(s, \tau, t) = \dot{\epsilon}_{rr}(s, \tau, t) \\ \dot{\epsilon}_z(s, \tau, t) = \dot{\epsilon}_{zz}(s, \tau, t) \\ \dot{\epsilon}_\theta(s, \tau, t) = \dot{\epsilon}_{\theta\theta}(s, \tau, t) \\ \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{rz}(s, \tau, t) \end{bmatrix} \quad (4.6.39)$$

U bivektoru (4.6.39) komponente $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_z$ i $\dot{\epsilon}_\theta$ su uključene sa težišnim faktorom 1, a komponenta $\dot{\epsilon}_{rz}$ sa faktorom $\sqrt{2}$ da bi intenzivnost devijatora brzine deformacije (1.3.26) bilo moguće odrediti kao Pitagorinu intenzivnost bivektora:

$$\dot{\epsilon} = |\vec{\dot{\epsilon}}(s, \tau, t)| = \sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + (\sqrt{2} \dot{\epsilon}_{rz})^2} \quad (4.6.40)$$

Postavljajući komponente brzine deformacije izražene relacijama (4.6.34), (4.6.36), (4.6.38) u formulu (4.6.39) moguće je izraziti bivektor brzine deformacije kao funkciju od koordinata i vrijednosti brzina $v_r(r, z)$ i $v_z(r, z)$ u čvorovima mreže KE što je bio cilj:

$$\dot{\epsilon}_i = B_{i\alpha} v_\alpha \quad (4.6.41)$$

gdje je za matricu $B_{i\alpha}$ dobijena formula:

$$[B_{i\alpha}] = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_2 & 0 & y_3 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_4 \\ G_1 & 0 & G_2 & 0 & G_3 & 0 & G_4 & 0 \\ \frac{x_1}{\sqrt{2}} & \frac{y_1}{\sqrt{2}} & \frac{x_2}{\sqrt{2}} & \frac{y_2}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{y_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_4}{\sqrt{2}} & \frac{y_4}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \quad (4.6.42)$$

Koeficijenti matrice su dati jednačinama:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{8\Delta} \begin{vmatrix} (r_4 - r_2) + (r_3 - r_4)s + (r_2 - r_3)\tau \\ (r_1 - r_3) + (r_4 - r_3)s + (r_4 - r_1)\tau \\ (r_2 - r_4) + (r_2 - r_1)s + (r_1 - r_4)\tau \\ (r_3 - r_1) + (r_1 - r_2)s + (r_3 - r_2)\tau \end{vmatrix} \quad (4.6.43)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{8\Delta} \begin{vmatrix} (z_2 - z_4) + (z_4 - z_3)s + (z_3 - z_2)\tau \\ (z_3 - z_1) + (z_3 - z_4)s + (z_1 - z_4)\tau \\ (z_4 - z_2) + (z_1 - z_2)s + (z_4 - z_1)\tau \\ (z_1 - z_3) + (z_2 - z_1)s + (z_2 - z_3)\tau \end{vmatrix} \quad (4.6.44)$$

$$\{G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4\}^{-1} = \frac{1}{r} \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}^{-1} \quad (4.6.45)$$

Jakobijan Δ je određen izrazom (4.6.25). Intenzivnost brzine deformacije se prema (1.3.27) može izraziti korišćenjem (4.6.41) u obliku:

$$\dot{\epsilon}_u = \sqrt{\frac{2}{3}} B_{i\alpha} v_\alpha B_{i\beta} v_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} k_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \quad (4.6.46)$$

gdje je sa $k_{\alpha\beta}$ obilježen matrični proizvod:

$$k_{\alpha\beta} = B_{i\alpha} B_{i\beta} \quad (4.6.47)$$

Zapreminska brzina deformacije je određena matričnim proizvodom:

$$\dot{\epsilon} = C \dot{\epsilon}_i \quad (4.6.48)$$

gdje je: $C = \{ 1, 1, 1, 0. \}$

na osnovu (4.6.41) se dobija:

$$\dot{\epsilon} = Q_{\alpha} v_{\alpha} \quad (4.6.49)$$

gdje je Q_{α} definisano sa:

$$Q_{\alpha} = C_i B_{i\alpha} \quad (4.6.50)$$

Komponente devijatora napona prema (1.5.12) i (4.6.41) se računaju izrazom:

$$s_i = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\epsilon_u} \dot{\epsilon}_i \quad (4.6.51)$$

gdje će bivektorni zapis za osnosimetrični slučaj biti analogan (4.6.39) i imati oblik:

$$\{ \vec{s}_i \}^T = \{ s_r, s_z, s_{\theta}, \sqrt{2} s_{rz} \} \quad (4.6.52)$$

4.7. ANALIZA KONVERGENCIJE RAZMATRANOG FIZIČKI NELINEARNOG PROBLEMA

U odjeljcima 5 i 6 analizirana je situacija unutar odvojenog konačnog elementa. Prelazeći na zapis varijacionog principa na tijelo u cjelini potrebno je organizovati i usaglasiti numeraciju elemenata i čvorova. Ovo je neophodno jer se razmatrani funkcionali ϕ sastoje od integrala po cijeloj zapremini tijela i oni se pri numeričkoj formalizaciji u zadatku traženja minimuma pretvaraju u sume po elementima koji obrazuju to tijelo.

Neka su svi konačni elementi koji čine tijelo zapremine V numerisani indeksom $m = 1, 2, \dots, M$, gdje je M - broj poslednjeg elementa. Tada će $\phi^m(w)$ označavati funkcional sračunat za neki konačni element sa brojem m . Dejstvo za tijelo u cjelini će biti jednako sumi dejstva odvojenih elemenata:

$$\phi = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(w) \quad (4.7.1)$$

gdje je sa w označen skup promjenljivih unutar elementa jednak:

$$w = \sum_{(\alpha)} N_{\alpha} w_{m\alpha} \quad (4.7.2)$$

pri čemu $w_{m,\alpha}$ označavaju vrijednosti w u čvorovima $\alpha = 1, 2, 3, 4$ a N_α je funkcija oblika. U opštem slučaju sumiranje po α se može vršiti u drugim granicama zavisno do broja čvorova koje sadrži element:

Prva etapa računanja je postavljanje (4.7.2) u jednačinu (4.7.1) i tako dobijanje funkcionala kao funkcije od vrijednosti w u čvorovima:

$$\phi = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(w_{m,\alpha}) \quad (4.7.3)$$

Pri numeričkoj realizaciji često se vrši vektorizacija dvodimenzionalne matrice $w_{m,\alpha}$ uvođenjem jednog vektornog indeksa $i=1, 2, \dots, pM$, gdje p označava broj nepoznatih u čvoru, poslije čega funkcional (4.7.3) je moguće zapisati u vidu sume:

$$\phi = \sum_{i=1}^{pM} \phi(w_i) \quad (4.7.4)$$

Funkcional (4.7.4) treba minimizirati tj. realne vrijednosti argumenata w_i treba da se potčinjavaju uslovu stacionarnosti funkcionala:

$$F_i(w_i) \equiv \frac{\partial \phi(w_i)}{\partial w_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, pM \quad (4.7.5)$$

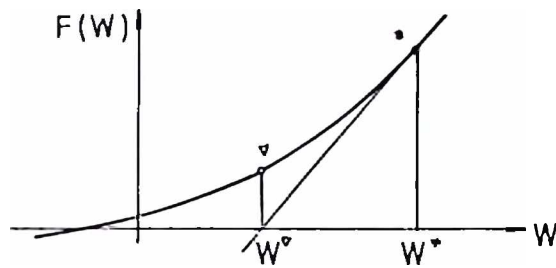
Ovi uslovi zajedno obrazuju sistem nelinearnih algebarskih jednačina za pM nepoznatih vrijednosti argumenata stanja u M čvorova. Poslije rešenja sistema (4.7.5) sve veličine zadatka se izražavaju preko nadjenih čvornih vrijednosti pomoću interpolacionih formula dobijenih za proizvoljnu tačku tijela i proizvoljni moment vremena.

Sistem jednačina (4.7.5) je nelinearan. Za rješenje sistema nelinearnih algebarskih jednačina postoji više metoda [133, 124], a vrlo često se koristi iteracioni metod Njutn-Rafsona. Za slučaj jedne promjenljive:

$$F(w) = 0 \quad (4.7.6)$$

Sljedeći položaj približnog korijena dobija se iz prethodnog prema (slici 4.7.1):

$$F^* + \left(\frac{\partial F}{\partial w} \right)^* (w^y - w^*) \approx 0 \quad (4.7.7)$$



SI.4.7.1. Jednodimenzionalni metod Njutn-Rafson

Za slučaj dvije promjenljive:

$$F_1(w_1, w_2) = 0, \quad F_2(w_1, w_2) = 0 \quad (4.7.8)$$

jednačine analogne (4.7.7) će biti:

$$F_1^* + \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_1}\right)^* (w_1^v - w_1^*) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial w_2}\right)^* (w_2^v - w_2^*) = 0 \quad (4.7.9)$$

$$F_2^* + \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_1}\right)^* (w_1^v - w_1^*) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial w_2}\right)^* (w_2^v - w_2^*) = 0$$

U ovim linearizovanim jednačinama dvije su nepoznate veličine: Δw_1^v i Δw_2^v za popravku približnih vrijednosti w_1^* i w_2^* :

$$\Delta w_1^v = w_1^v - w_1^*, \quad \Delta w_2^v = w_2^v - w_2^* \quad (4.7.10)$$

gdje je w^* - stara, w^v - nova tačnija vrijednost korijena. Iz jednačina (4.7.9) se dobija:

$$\Delta w_1^v = A/C, \quad \Delta w_2^v = B/C \quad (4.7.11)$$

gdje su:

$$A = \begin{vmatrix} F_1^* & (\partial F_1 / \partial w_2)^* \\ F_2^* & (\partial F_2 / \partial w_2)^* \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} (\partial F_1 / \partial w_1)^* & F_1^* \\ (\partial F_2 / \partial w_1)^* & F_2^* \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} (\partial F_1 / \partial w_1)^* & (\partial F_1 / \partial w_2)^* \\ (\partial F_2 / \partial w_1)^* & (\partial F_2 / \partial w_2)^* \end{vmatrix} \quad (4.7.12)$$

To znači da su popravke (4.7.11) izražene preko poznatih veličina: F_1 i

F_2 i njihovih parcijalnih izvoda u tački * (pri staroj vrijednosti korijena). Postavljajući nadjene (4.7.11) u (4.7.10) dobija se nova tačnija vrijednost korijena w' preko vrijednosti u tački *:

$$w_1' = w_1^* + \Delta w_1', \quad w_2' = w_2^* + \Delta w_2' \quad (4.7.13)$$

Analogno ovom, za sistem od pM jednačina (4.7.4), metod Njutn-Rafsona daje sistem algebarskih jednačina iteracione procedure:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial w_i}\right)_{n-1} + \sum_{j=1}^{pM} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_j}\right)_{n-1} \Delta w_j = 0 \quad (4.7.14)$$

Sistem (4.7.14) se računa nekim numeričkim postupkom (na primjer, postupkom Gausa), a zatim se koristi Δw_j za popravke približnih vrijednosti. Najčešće se zapisuje u obliku sa izdvojenim slobodnim članovima:

$$\sum_{j=1}^{pM} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_j}\right)_{n-1} \Delta w_j = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_i}\right)_{n-1} \quad (4.7.15)$$

a nove vrijednosti računaju iz starih pomoću formula:

$$w_{k(n)} = w_{k(n-1)} + \Delta w_{k(n)} \quad (4.7.16)$$

Za upravljanje procesima u kojima je konvergencija otežana moguće je uvesti u formulu (4.7.16) parametar η ($0 < \eta < 1$) koji poboljšava konvergenciju, pri čemu (4.7.16) dobija oblik:

$$w_{k(n)} = w_{k(n-1)} + \eta \Delta w_{k(n)} \quad (4.7.17)$$

U cilju obezbjedjenja konvergencije i samim tim dobijanja rješenja u toku iterativnog procesa, rješenje se mora kontrolisati u svakoj iteraciji do zadovoljenja kriterijuma konvergencije. Novo rješenje se može kontrolisati sa koeficijentom η , te treba obezbijediti optimalnu vrijednost η sa ciljem da se obezbijedi brza konvergencija i redukuje kompjutersko vrijeme. Kao kriterijum konvergencije se često koristi odnos $|\Delta w|_{(n)} / |w|_{(n-1)}$ gdje je vektor norme definisan sa sljedećom relacijom:

$$|w| = \sqrt{\sum_{i=1}^M w_i^2} \quad (4.7.18)$$

Kriterijum zahtijeva da je greška u (n) - toj iteraciji manja nego u prethodnoj (n-1) iteraciji. Takodje, treba istaći da zavisno od brzine konvergencije popravka $\Delta w \rightarrow 0$, te lijeva strana jednačine (4.7.15) se postupno približava nuli. To dovodi do zaključka da se kao kriterijum konvergencije procesa Njutn-Rafsona može definisati i veličina:

$$|g| = \sqrt{\sum_{i=1}^M (\partial \phi / \partial w_i)^2} \quad (4.7.19)$$

pri čemu njena nova vrijednost mora biti manja od vrijednosti u prethodnoj iteraciji. Uspješno se može koristiti i kombinacija oba kriterijuma konvergencije. Za slučaj kada novo rješenje ne zadovoljava gornje kriterijume, izlaz treba potražiti u poboljšanju inicijalne pretpostavke ili korišćenju drugih iterativnih metoda.

4.8. DISKRETNNA FORMALIZACIJA FUNKCIONALA

Da bi se numerički riješio problem plastičnosti, potrebno je predloženi funkcional diskretno formulisati. U tom cilju razmatrani funkcionali ϕ_1 (4.1.22), ϕ_2 (4.2.1), ϕ_3 (4.2.3) mogu biti zapisani u obliku suma:

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^M [\Pi_1^{(m)} + \lambda^{(m)} \Pi_v^{(m)} - \Pi_F^{(m)}] \quad (4.8.1)$$

$$\phi_2 = \sum_{m=1}^M [\Pi_1^{(m)} + \Pi_3^{(m)} - \Pi_F^{(m)}] \quad (4.8.2)$$

$$\phi_3 = \sum_{m=1}^M [\Pi_1^{(m)} + \frac{\zeta}{2V^{(m)}} (\Pi_v^{(m)})^2 - \Pi_F^{(m)}] \quad (4.8.3)$$

gdje su:

$$\Pi_1^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV \quad (4.8.4)$$

$$\Pi_2^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \lambda \dot{\epsilon} dV = \lambda^{(m)} \Pi_V^{(m)} \quad (4.8.5)$$

$$\Pi_V^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \dot{\epsilon} dV \quad (4.8.6)$$

$$\Pi_3^{(m)} = \int_{V^{(m)}} (\zeta/2) \dot{\epsilon}^2 dV \quad (4.8.7)$$

$$\Pi_F^{(m)} = \int_{S^{(m)}} Fv dS \quad (4.8.8)$$

odvojene komponente razmatranih funkcionala, napisane za svaku zapreminu $V^{(m)}$ konačnih elemenata $m=1,2,\dots,M$, na koje je razloženo tijelo:

$V = \sum_{m=1}^M V^{(m)}$. $S^{(m)}$ označava površinu na koju djeluju površinske sile.

Ako se prihvati da su za funkcional Φ_1 nezavisne varijable priraštaji čvornih brzina Δv_α i srednji napon $\lambda^{(m)}$ tada na osnovu (4.7.15) slijedi sistem jednačina iteracionog procesa Njutn-Rafsona:

$$\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} [\Pi_1^{(m)} - \Pi_F^{(m)}] \right\} & \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \Pi_V^{(m)} \right\} \\ \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial v_\beta} \Pi_V^{(m)} \right\} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta v_\beta \\ \lambda^{(m)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial v_\alpha} [\Pi_1^{(m)} - \Pi_F^{(m)}] \right\} \\ - \sum_{m=1}^M \Pi_V^{(m)} \end{vmatrix} \quad (4.8.9)$$

Matrica ovog sistema je trakasta i simetrična. Za iterativno rješenje jednačine neophodna je inicijalna pretpostavka brzinskog polja $v_\alpha(0)$ na početku prve iteracije. Za funkcional Φ_2 (4.8.2), za veličine Δv_α kao tražene promenljive, jednačine (4.7.15) daju sljedeći sistem običnih algebarskih jednačina iteracionog procesa Njutn-Rafsona:

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} (\Pi_1^{(m)} + \Pi_3^{(m)} - \Pi_F^{(m)}) \right\} \Delta v_\beta^{(n)} = - \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (\Pi_1^{(m)} + \Pi_3^{(m)} - \Pi_F^{(m)}) \right\} \quad (4.8.10)$$

Ovakav sistem jednačina se programira u slučaju kada je teorija tečenja zasnovana na funkcionalu metoda penalnih funkcija (4.8.2).

Kada se koristi funkcional Φ_3 (4.8.3) za popravke brzine metoda Njutn-Rafsona slijedi sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} [\Pi_1^{(m)} + \frac{\zeta}{2V^{(m)}} (\Pi_v^{(m)})^2 - \Pi_F^{(m)}] \right\} \Delta v_{\beta(n)}^{(n-1)} = \\ = - \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial v_\alpha} [\Pi_1^{(m)} + \frac{\zeta}{2V^{(m)}} (\Pi_v^{(m)})^2 - \Pi_F^{(m)}] \right\} \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

U formulama (4.8.9), (4.8.10) i (4.8.11) figurišu izvodi integrala Π datih formulama (4.8.4) - (4.8.8) koje treba sračunati

Izvod $\Pi_1^{(m)}$ dat relacijom (4.8.4) će za slučaj na koraku fiksirane geometrije i temperature imati oblik:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(m)}}{\partial v_\alpha} = \int_{V^{(m)}} \left(\frac{\partial \sigma_u(\epsilon_u, \dot{\epsilon}_u, T)}{\partial \dot{\epsilon}_u} \frac{\partial \dot{\epsilon}_u}{\partial v_\alpha} \dot{\epsilon}_u + \sigma_u \frac{\partial \dot{\epsilon}_u}{\partial v_\alpha} \right) dV \quad (4.8.12)$$

Na osnovu relacije (4.6.46) će biti:

$$\frac{\partial \dot{\epsilon}_u}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left[\sqrt{\frac{2}{3} k_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta} \right] = \frac{2/3 k_{\alpha\beta} v_\beta}{\dot{\epsilon}_u} \quad (4.8.13)$$

Zamjenom (4.8.13) u (4.8.12) dobija se:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(m)}}{\partial v_\alpha} = \int_{V^{(m)}} \frac{2}{3} k_{\alpha\beta} v_\beta \left[\frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} + \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \right] dV \quad (4.8.14)$$

Relacija (4.8.14) može biti napisana u obliku:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(m)}}{\partial v_\alpha} = \int_{V^{(m)}} \frac{2}{3} k_{\alpha\beta} v_\beta / \dot{\epsilon}_u \left[\sigma_u + \frac{\partial \sigma_u}{\partial \ln \dot{\epsilon}_u} \right] dV \quad (4.8.15)$$

Zanemarujući spori rast napona po logaritmu brzine deformacije dobija se:

$$\frac{\partial \Pi_1^{(m)}}{\partial v_\alpha} = \int_{V^{(m)}} \frac{2}{3} k_{\alpha\beta} v_\beta \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} dV \quad (4.8.16)$$

Drugi izvod integrala $\Pi_1^{(m)}$ na osnovu (4.8.14) uz korišćenje relacije (4.6.46) će biti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = & \int_V (m)^9 \frac{4}{9} k_{\alpha\beta} k_{\gamma\delta} v_\gamma v_\beta \left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_u} \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u^2} + \frac{1}{\dot{\epsilon}_u^2} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} - \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u^3} \right) dV + \\ & + \int_V (m)^3 \frac{2}{3} k_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} + \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \right) dV \end{aligned} \quad (4.8.17)$$

Da bi se ocijenio član u zagradi prvog integrala, isti se pomnoži i podijeli sa $\dot{\epsilon}_u^3$, a potom odvojeno posmatra:

$$A = \dot{\epsilon}_u^3 \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}_u} \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u^2} + \frac{1}{\dot{\epsilon}_u^2} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} - \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u^3} \right] = \dot{\epsilon}_u^2 \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u^2} + \dot{\epsilon}_u \frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} - \sigma_u \quad (4.8.18)$$

Uvodjenjem smjene $\dot{\epsilon}_u = e^x$, $x = \ln \dot{\epsilon}_u$ mogu se izraziti komponente izraza A

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u} &= \frac{\partial \sigma_u}{\partial e^x} = e^{-x} \frac{\partial \sigma_u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \dot{\epsilon}_u^2} &= \frac{\partial}{\partial e^x} \left(e^{-x} \frac{\partial \sigma_u}{\partial x} \right) = -e^{-2x} \frac{\partial \sigma_u}{\partial x} + e^{-2x} \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.8.19)$$

Zamjenom (4.8.19) u (4.8.18) uz korišćenje smjene dobija se:

$$A = -\sigma_u + \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial (\ln \dot{\epsilon}_u)^2} \quad (4.8.20)$$

Drugi član u izrazu za A je očigledno mali pa se može zanemariti. Član u zagradi drugog integrala je ocijenjen u (4.8.15) te sada (4.8.17) dobija konačan oblik:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = \int_V (m)^3 \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \left[k_{\alpha\beta} - \frac{2/3}{\dot{\epsilon}_u^2} (k_{\alpha\beta} k_{\gamma\delta} v_\gamma v_\beta) \right] dV \quad (4.8.21)$$

Iz (4.8.5), na osnovu (4.6.49) slijedi:

$$\frac{\partial \Pi_2^{(m)}}{\partial \lambda} = \Pi_v^{(m)} = \int_V (m) Q_\alpha v_\alpha dV \quad (4.8.22)$$

Poslije toga, iz (4.8.22) će biti:

$$\frac{\partial^2 \Pi_2(m)}{\partial \lambda \partial v_\alpha} = \frac{\partial \Pi_v(m)}{\partial v_\alpha} = \int_{V(m)} Q_\alpha dV \quad (4.8.23)$$

Iz (4.8.6) slijedi da je:

$$\frac{\partial^2 \Pi_v(m)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = 0 \quad (4.8.24)$$

jer je funkcional (4.8.6) linijski po v_α , te je njegov drugi izvod nula.

Iz (4.8.7) na osnovu (4.6.49) slijedi:

$$\frac{\partial \Pi_3(m)}{\partial v_\alpha} = \int_{V(m)} Q_\alpha Q_\gamma v_\gamma dV \quad (4.8.25)$$

na osnovu čega je:

$$\frac{\partial^2 \Pi_3(m)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = \int_{V(m)} Q_\alpha Q_\gamma dV \quad (4.8.26)$$

Za krutu oblast gdje je $\dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0$, pri čemu je $\dot{\epsilon}_0$ - kriterijum krutosti umjesto (4.8.16) i (4.8.21) može se prihvatiti ocjena:

$$\frac{\partial \Pi_1(m)}{\partial v_\alpha} = \int_{V(m)} \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_0} k_{\alpha\gamma} v_\gamma dV \quad (4.8.27)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1(m)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = \int_{V(m)} \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_0} k_{\alpha\beta} dV \quad (4.8.28)$$

5. TEORIJA PLASTIČNOG TEČENJA ZASNOVANA NA METODI MALOG PARAMETRA I NJENA NUMERIČKA REALIZACIJA

U ovoj glavi je izložen predlog novog rješenja procesa OMD na osnovu varijacionog principa, primjenom MKE. Osnovna ideja je bila da u OMD treba slijediti za prirodnim tokom procesa, tj. treba poći od opterećenja koje zadaje mašina, pratiti njegov uticaj na granični sloj, a potom proučiti uticaj na dubinu deformisanog metala. Ovakav pristup zadavanja opterećenja, za razliku od zadavanja pomjeranja pritiskivača prese u odredjenim jednakim kvantima, uzima u obzir prirodni korak deformisanja.

Izložena je osnovna postavka teorije koja uključuje razlaganje naponskog stanja na sferni i devijatorni dio i korišćenje numeričkih postupaka konačnih razlika i konačnih elemenata. Glava sadrži takodje iscrpnu analizu graničnih slojeva i to, kako kontaktnih, tako i na slobodnoj površini. Na osnovu ove analize dat je predlog redukcije stepena slobode diskretizovanog tijela. Za konkretan slučaj presovanja izložen je postupak odredjivanja naponskog, temperaturnog, brzinskog i deformacionog polja. U diskretnoj postavci korišteni su rezultati prethodne glave. U Prilogu 6 je dat blok dijagram za numeričku realizaciju predloženog postupka i blok dijagram funkcijskog koraka kao centralnog dijela numeričke procedure.

5.1. OSNOVNE HIPOTEZE TEORIJE

Ova teorija je zasnovana na mogućnosti predstavljanja sfernih i devijatorskih napona koji nastaju u deformisanom tijelu u vidu stepenih redova po malom parametru $\omega = \tau_s / K$ gdje su: K - modul stišljivosti materijala, τ_s - napon tečenja pri smicanju. U početnom približenju rješenje se dobija rešavanjem jednačina matematičke fizike i to: a) numeričkim rješenjem tečenja u pograničnom sloju; b) numeričkim rješenjem na osnovu metoda konačnih razlika polja srednjih normalnih napona nastalih unutar deformisanog tijela dejstvom sile prese; c) toplotno - deformacionim proračunom polja temperature T i granica te

čenja $\tau_s(T)$, na osnovu toplote zagrijavanja i toplote prelaska mehaničke energije u toplotnu, uz korišćenje numeričkog metoda konačnih razlika. U sljedećem približenju koje utičnjava početno, problem se rješava metodom konačnih elemenata na osnovu procedure minimizacije funkcionala:

$$\Phi = \int_V \left(\int_0^{\dot{\epsilon}_u} \sigma_u(p, T, \dot{\epsilon}_u) d\dot{\epsilon}_u \right) dV - \int_S F_\alpha v_\alpha dS + \int_V p \dot{\epsilon} dV \quad (5.1.1)$$

gdje su polja temperature T , intenzivnost napona $\sigma_u(p, T, \dot{\epsilon}_u)$, površinska sila F_α i sferni pritisak p , veličine dobijene dovoljno tačno iz prvih približenja zadatka. To znači da je funkcional Φ djelimično linearizovan a djelimično je preko prvog integrala u (5.1.1) zadržao nelinearnost karakterističnu za funkcionalne plastičnog tečenja. Odatle slijedi da se pri rješavanju zadatka metodom konačnih elemenata koriste sve tipske procedure ovog metoda - dobijanje matrice krutosti, a zatim kontrola konvergencije procesa.

Varijacija funkcionala (5.1.1) po polju brzina plastičnog tečenja je data izrazom:

$$\delta\Phi = \delta \left(\int_V \left(\int_0^{\dot{\epsilon}_u} \sigma_u d\dot{\epsilon}_u \right) dV \right) - \delta \left(\int_S F_\alpha v_\alpha dS \right) + \delta \left(\int_V p \dot{\epsilon} dV \right) = \delta A + \delta B + \delta C \quad (5.1.2)$$

Formula (5.1.2) je predstavljena u vidu sume zapreminske disipacije (δA), disipacije energije kao posledice dejstva spoljnih sila na granici kontakta deformisanog tijela i kalupa (δB) i disipacije energije na račun sfernih pritisa-
ka (δC). Prva komponenta varijacije će imati oblik:

$$\delta A = \int_V \delta \left(\int_0^{\dot{\epsilon}_u} \sigma_u d\dot{\epsilon}_u \right) dV = \int_V \sigma_u \delta \dot{\epsilon}_u dV \quad (5.1.3)$$

gdje je na osnovu (1.3.32):

$$\delta \dot{\epsilon}_u = \frac{2}{3} \frac{\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\dot{\epsilon}_u} \delta \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \quad (5.1.4)$$

Zamjenom varijacije $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$ izraz (5.1.4) dobija oblik:

$$\delta \dot{\epsilon}_u = \frac{1}{3} \frac{\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\dot{\epsilon}_u} (\partial_\alpha (\delta v_\beta) + \partial_\beta (\delta v_\alpha)) - \frac{2}{9} \frac{\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\dot{\epsilon}_u} \delta_{\alpha\beta} (\partial_\gamma (\delta v_\gamma)) \quad (5.1.5)$$

Drugi član u izrazu (5.1.5) sadrži simbol Kronekera, koji je različit od nule samo za slučaj $\alpha = \beta$. Medjutim, u tom slučaju je $\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = 0$, pa je ovaj član relacije (5.1.7) uvijek jednak nuli, te će biti:

$$\delta \dot{\epsilon}_u = \frac{1}{3} \frac{\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\dot{\epsilon}_u} (\partial_\alpha (\delta v_\beta) + \partial_\beta (\delta v_\alpha)) \quad (5.1.6)$$

Na osnovu (5.1.6) i (1.5.12) slijedi:

$$\sigma_u \delta \epsilon_u = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} (\partial_\alpha (\delta v_\beta) + \partial_\beta (\delta v_\alpha)) \quad (5.1.7)$$

Konačno, na osnovu (5.1.3) i (5.1.7) dobija se izraz za zapreminsku disipaciju:

$$\delta A = \frac{1}{2} \int_V S_{\alpha\beta} [\partial_\alpha (\delta v_\beta) + \partial_\beta (\delta v_\alpha)] dV \quad (5.1.8)$$

Prva komponenta izraza (5.1.8) može biti napisana u obliku:

$$\int_V S_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta v_\beta) dV = \int_V \partial_\alpha (S_{\alpha\beta} \delta v_\beta) dV - \int_V \delta v_\beta \partial_\alpha (S_{\alpha\beta}) dV \quad (5.1.9)$$

Prvi integral (5.1.9) se može po Gausu transformisati u površinski, te je:

$$\int_V S_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta v_\beta) dV = \int_S n_\alpha S_{\alpha\beta} \delta v_\beta dS - \int_V \delta v_\beta \partial_\alpha (S_{\alpha\beta}) dV \quad (5.1.10)$$

Analogno se dobija izraz za drugu komponentu integrala (5.1.8):

$$\int_V S_{\alpha\beta} \partial_\beta (\delta v_\alpha) dV = \int_S n_\alpha S_{\beta\alpha} \delta v_\beta dS - \int_V \delta v_\beta \partial_\alpha (S_{\beta\alpha}) dV \quad (5.1.11)$$

Zbog jednakosti $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$, izrazi (5.1.10) i (5.1.11) su identični, te je varijacija zapreminske disipacije jednaka:

$$\delta A = \int_S n_\alpha S_{\alpha\beta} \delta v_\beta dS - \int_V \delta v_\beta \partial_\alpha (S_{\alpha\beta}) dV \quad (5.1.12)$$

Varijacija disipacije površinskih sila δB je:

$$\delta B = - \int_S F_\beta \delta v_\beta dS \quad (5.1.13)$$

Varijacija energije na račun rada sfernog napona koji je zadana veličina ima oblik:

$$\delta C = \int_V p \delta \xi \, dV \quad (5.1.14)$$

Iskoristivši (1.3.3) izraz (5.1.14) dobija oblik:

$$\delta C = \int_V p \partial_Y (\delta v_Y) \, dV \quad (5.1.15)$$

Ova formula se transformiše:

$$\delta C = \int_V \partial_Y (p \delta v_Y) \, dV - \int_V \delta v_Y \partial_Y p \, dV \quad (5.1.16)$$

Zamjenom indeksa α zatim korišćenjem formule Gausa za transformaciju zapreminskog u površinski integral, za prvi integral (5.1.16) dobija se:

$$\delta C = \int_S n_\beta p \delta v_\beta \, dS - \int_V \delta v_\beta \partial_\beta (p) \, dV \quad (5.1.17)$$

Disipacija za cijelo tijelo na osnovu izraza (5.1.12), (5.1.13) i (5.1.17) postaje:

$$\delta \phi = \int_S [n_\alpha S_{\alpha\beta} \delta v_\beta - F_\beta \delta v_\beta + n_\beta p \delta v_\beta] \, dS + \int_V [-\delta v_\beta \partial_\alpha (S_{\alpha\beta}) - \delta v_\beta \partial_\beta (p)] \, dV \quad (5.1.18)$$

Minimizacijom funkcionala se dobija:

$$\delta \phi = \int_S [n_\alpha S_{\alpha\beta} - F_\beta + n_\beta p] \delta v_\beta \, dS - \int_V [\partial_\alpha (S_{\alpha\beta} + p \delta_{\alpha\beta})] \delta v_\beta \, dV = 0 \quad (5.1.19)$$

Iz prvog člana jednačine (5.1.19) slijedi:

$$F_\beta = n_\alpha S_{\alpha\beta} + n_\beta p = n_\alpha (S_{\alpha\beta} + p \delta_{\alpha\beta}) \quad (5.1.20)$$

Na osnovu (1.2.3) izraz (5.1.20) dobija oblik:

$$F_\beta = n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \quad (5.1.21)$$

Izjednačavajući drugi član jednačine (5.1.19) sa nulom dobija se:

$$\partial_\alpha (\sigma_{\alpha\beta}) = 0 \quad (5.1.22)$$

Na taj način zadatak na minimizaciju funkcionala ϕ je analogan zadatku matematičke fizike sa jednačinama ravnoteže (5.1.22) i graničnim uslovima (5.1.21). Kao rezultat rješenja ovog zadatka, bilo kao zadatka matematičke fizike ili kao varijacionog zadatka nalaze se polja deformacija i napona.

Iz jednačine (5.1.22) se dobija jednačina:

$$\partial_{\alpha} S_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} p \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.1.23)$$

koja se transformiše na oblik:

$$\partial_{\alpha} S_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} p = 0 \quad (5.1.24)$$

Parcijalnim diferenciranjem se dobija:

$$\partial_{\alpha} \partial_{\beta} S_{\alpha\beta} + \Delta p = 0 \quad (5.1.25)$$

gdje je $\Delta = \nabla^2 = \nabla \nabla$ - operator Laplasa.

Devijatorski napon $S_{\alpha\beta}$ i pritisak p se mogu izraziti u obliku:

$$S_{\alpha\beta} = \tau_s \bar{S}_{\alpha\beta} \quad (5.1.26)$$

$$p = K \bar{p} \quad (5.1.27)$$

gdje su: τ_s - napon tečenja u hladnom stanju; K - modul stižljivosti;

$\bar{S}_{\alpha\beta}$, \bar{p} - bezdimenzioni faktori. Zamjenom (5.1.26) i (5.1.27) u (5.1.25) dobija se:

$$\partial_{\alpha} \partial_{\beta} (\tau_s \bar{S}_{\alpha\beta}) + \Delta (K \bar{p}) = 0 \quad (5.1.28)$$

Kako su τ_s i K konstante, (5.1.28) može biti napisano u obliku:

$$\omega \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta} + \Delta \bar{p} = 0 \quad (5.1.29)$$

gdje je: $\omega = \tau_s / K$ s obzirom na prirodu τ_s i K , mala veličina.

Razlažući u stepeni red veličine $\bar{S}_{\alpha\beta}$ i \bar{p} po malom parametru ω , dobija se:

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} + \omega \bar{p}^{(1)} + \omega^2 \bar{p}^{(2)} + \dots \quad (5.1.30)$$

$$\bar{S}_{\alpha\beta} = \bar{S}_{\alpha\beta}^{(0)} + \omega \bar{S}_{\alpha\beta}^{(1)} + \omega^2 \bar{S}_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots \quad (5.1.31)$$

Postavljanjem izraza (5.1.30) i (5.1.31) u (5.1.29) a zatim sabiranjem članova sa jednakim stepenima po ω biće:

$$\Delta \bar{p}^{(0)} + \omega (\Delta \bar{p}^{(1)} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta}^{(0)}) + \omega^2 (\Delta \bar{p}^{(2)} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta}^{(1)}) + \dots = 0 \quad (5.1.32)$$

ili:

$$\Delta \bar{p}^{(0)} = 0; \quad \Delta \bar{p}^{(1)} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta}^{(0)} = 0; \quad \Delta \bar{p}^{(2)} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta}^{(1)} = 0; \dots \quad (5.1.33)$$

Na taj način za $\bar{p}^{(0)}$ je dobijena jednačina $\Delta \bar{p}^{(0)} = 0$. Na osnovu (5.1.27) biće $\Delta p^{(0)} = 0$, iz čega slijedi mogućnost određivanja $p^{(0)}$ kao funkcionala od graničnih vrijednosti. To dozvoljava da se ovdje predloži metod rješenja plastičnog tečenja zasnovan na metodama konačnih razlika i konačnih elemenata:

- u početku se rješava zadatak $\Delta p^{(0)} = 0$ pri graničnim uslovima za polje pritiska $p^{(0)}$. Određuje se $p^{(0)}$, a takodje i sistem sila $F_{\alpha}^{(0)}$ na površini deformisanog tijela;
- postavljajući nadjene $F_{\alpha}^{(0)}$ i $p^{(0)}$ u (5.1.1) minimizira se funkcional što daje smičuća polja: $v_{\alpha}^{(0)}$, $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(0)}$ i $S_{\alpha\beta}^{(0)}$;
- na osnovu jednačine $\Delta \bar{p}^{(1)} = - \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{S}_{\alpha\beta}^{(0)}$ pri odgovarajućim graničnim uslovima utvrđuje se popravka za pritiske $p^{(1)}$ i sistem površinskih sila $F_{\alpha}^{(1)}$ i po tim podacima utičnjava polje pritiska i sila, koristeći približenja: $p = p^{(0)} + \omega p^{(1)}$, $F = F^{(0)} + \omega F^{(1)}$;
- postavljanjem nadjene p i F u (5.1.1) dobija se funkcional iz koga se minimizacijom nalaze smičuća polja: $v_{\alpha} = v_{\alpha}^{(0)} + \omega v_{\alpha}^{(1)}$,
 $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(0)} + \omega \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(1)}$, $S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(0)} + \omega S_{\alpha\beta}^{(1)}$;
- ponavlja se iteracija predhodna dva dejstva i tako postiže rješenje problema plastičnog tečenja.

U ovakvoj konstrukciji metoda polje pritiska p može se naći raznim numeričkim postupcima [133] koji se koriste pri rješavanju jednačina eliptičnog tipa (5.1.33). Često se, na primjer, koristi postupak dobijanja pritiska na nepokretnoj mreži metodom konačnih razlika. Ista mreža može biti iskorišćena pri rješavanju termodinamičkog zadatka o određivanju polja temperature T i intenzivnosti napona $\sigma_u = \sigma_u(T)$. Problem minimizacije funkcionala (5.1.1) svaki put se rješava metodom konačnih elemenata kako je to razmatrano u (Glavi 4). Smičuća polja ovdje nastaju kao rezultat prirodnog dejstva sile prese na deformisani uzorak. Kako je parametar iteracionog procesa mali, treba očekivati brzu konvergenciju procesa i minimum iteracija.

Ovakav postupak omogućava da se statički neodređeni problem proračuna plastičnog tečenja svede na niz statički određenih problema: svaki put se

u početku određuje polje pritisaka na granici, zatim se vrši proračun na nepokretnoj mreži, a potom utvrđuje samo tečenje, njegova brzina, brzina deformacije i smičući naponi. To omogućava da se na sljedećoj etapi tačnije dobije polje pritisaka p prema jednačini (5.1.25). Ova jednačina [134], uz uzimanje u obzir dinamičkih članova ima oblik:

$$\partial_{\alpha} \partial_{\beta} S_{\alpha\beta} + \Delta p = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5.1.34)$$

gdje je:

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\tau_s / \rho} \quad / \quad (\sqrt{\tau_s / K}) = C_0 / \sqrt{\omega} \quad (5.1.35)$$

a $C_0 = \sqrt{\tau_s / \rho} \approx 100 \text{ m/s}$ [134] brzina sporih plastičnih talasa.

To znači da se u dinamici problem određivanja pritisaka svodi na rješavanje sljedeće jednačine:

$$\Delta p = \omega \left(\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \partial_{\alpha} \partial_{\beta} S_{\alpha\beta} \right) \quad (5.1.36)$$

Ova jednačina može biti iskorišćena kod rješavanja geofizičkih problema koje karakterišu ogromne dimenzije razmatranih objekata i dejstvujućih energija.

U ovom slučaju treba operator Laplasa zamijeniti sa operatorom oblika:

$$\square = \Delta - \omega (1/C_0^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.1.37)$$

Kod rješavanja zadataka obrade metala deformisanjem jednačine (5.1.25) i (5.1.34) su praktično identične, jer vrijeme dejstva radi kašnjenja talasa u pripremku zbog malih dimenzija istog s jedne strane, a velikih brzina zvuka s druge strane, je zanemarljivo. Brzina širenja talasa je tako velika da se talasi pritiska nastali dejstvom prese ustanovljavaju trenutno. Sa pozicije tehnologa je očigledno daleko veći uticaj termičkih napona, što je ranije razmatrano. To znači, da je sa pozicije fizike procesa predloženi algoritam korektan.

5.2. MODELIRANJE POGRANIČNIH SLOJEVA

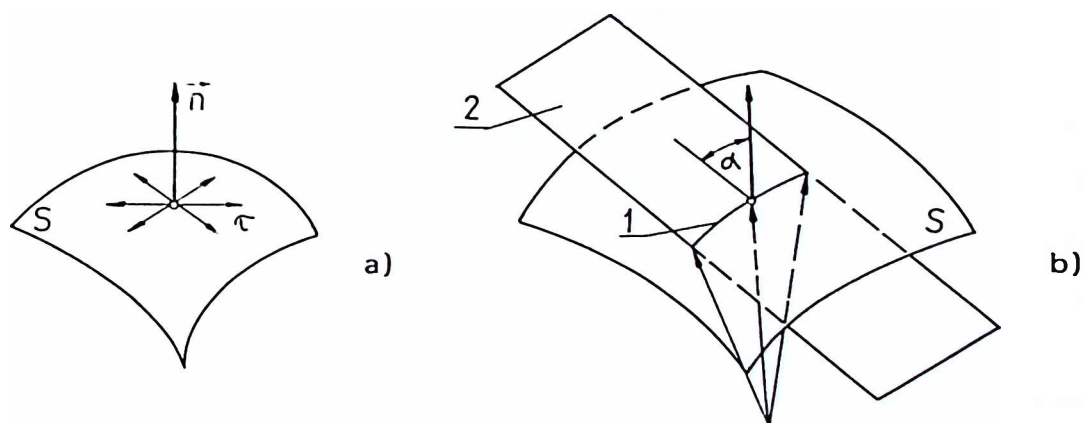
Razmatrani konačni elementi (Glava 4, odjeljak 5) su pogodni za opisivanje realnih elemenata tijela koji leže u njegovoj unutrašnjosti, ali na samoj granici oni mogu biti nepogodni. Ovo je dovelo do potrebe da se elementi na granici posebno izuče i to, kako elementi na kontaktu kalupa i deformacionog komada, tako i elementi na slobodnoj površini.

5.2.1. Kinematsko-temperaturna ekstrapolacija slobodne površine

Posmatra se slobodna površina tijela koje plastično teče, sa normalom \vec{n} i tangentnim vektorom $\vec{\tau}$ (sl.5.2.1a). Iz diferencijalne geometrije [129] je poznato da pri presijecanju neke površine ravnima koje prolaze kroz razmatranu tačku površine, pod uglom α ka normali linija presjeka ima krivinu:

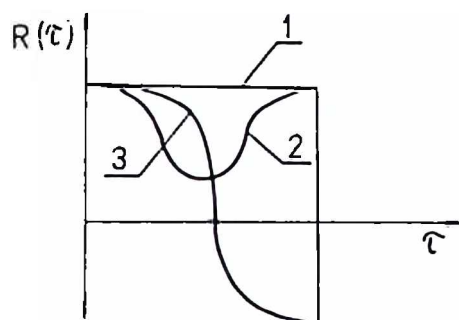
$$\chi = \chi_N / |\cos \alpha| \quad (5.2.1)$$

koja je izražena preko krivine normalnog presjeka (teorema Mene)(sl.5.2.1b).



Sl.5.2.1. a) Slobodna površina deformacionog tijela;
b) Teorema Mene, 1-kriva presjeka; 2-sekuća ravan.

Na (sl.5.2.2) su data tri primjera presjeka Mene: presjeci sfere, elipsoida i sedlaste površi u zavisnosti od položaja tangentnog vektora. Iz ovog primjera je očigledno da postoje površi dva tipa: tipa sfere i elipsoida, gdje je radijus krivine nezavisno od položaja tangentnog vektora stalno pozitivan, i tipa sedlaste površi, gdje je radijus krivine zavisno od položaja tangentnog vektora različitog znaka.



Sl.5.2.2. Zavisnost krivine presjeka Mene od pravca tangente:
1-sfere; 2-elipsoida; 3-sedlaste površi.

Gaus je prvi dokazao da površina S ima u krajnjoj liniji dvije krivine: minimalnu i maksimalnu, i da su odgovarajući pravci τ_1 i τ_2 međusobno ortogonalni, a od krivina χ_1 i χ_2 moguće je obrazovati sumarnu krivinu [129] :

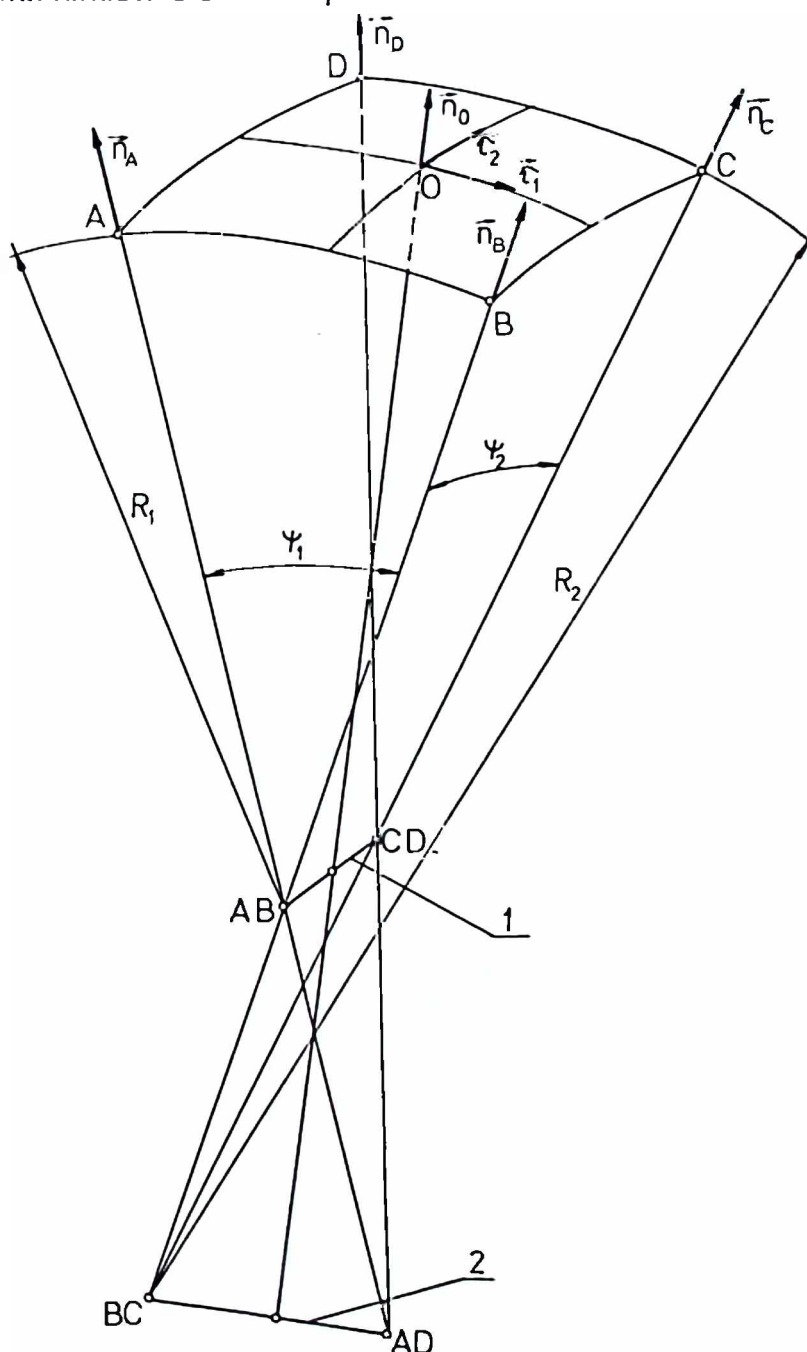
$$\chi = \chi_1 + \chi_2 \quad (5.2.2)$$

Krivina χ i odgovarajući radijus krivine $R = 1/\chi$ se mijenjaju pri deformisanju uzorka i mogu se iskoristiti pri definisanju slobodne površine plastično-tekuće površine. Ovi osnovni pojmovi su neophodni za definisanje novih fokalnih koordinata čije uvođenje je uslovljeno načinom deformisanja slobodne površine. Na (sl.5.2.3) je uočen element slobodne površine S i postavljeno je njegovo polje normala: $\vec{n}_o, \vec{n}_A, \vec{n}_B, \vec{n}_C, \vec{n}_D$. Na osnovu polja normala moguće je naći fokalne krive $AB-CD$ i $BC-AD$ koje se aproksimiraju dužima za posmatrani element. Takodje, može se postaviti formula za zapis normale \vec{n} u proizvoljnoj tački posmatranog elementa na površini S , kao rezultat linijske interpolacije vektora \vec{n} na osnovu njene vrijednosti u čvorovima:

$$\vec{n}(u_1, u_2) = \sum_{\alpha=A, B, C, D} q_{\alpha}(u_1, u_2) \vec{n}_{\alpha} \quad (5.2.3)$$

gdje su u_1 i u_2 lokalne koordinate proizvoljne tačke posmatranog elementa površi S koja je odredjena ortima $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ glavnih pravaca, a q_{α} su interpolacione funkcije (4.5.3) koje su i ranije korišćene u interpolacionim formulama ravanskih konačnih elemenata.

Korišćenjem poznatog aparata iz teorije površina, ovdje su dakle, uvedene za razmatrani problem prirodne koordinate, nazvane fokalnim, koje se u suštini reprezentuju fokalnim površima S_x , ekvidistantnim slobodnoj površi S . U daljem radu se razvija teorija pogransloja slobodnih površina zasnovana na dvije široko korišćene hipoteze: hipotezi o nestišljivosti izraženoj u vidu uslova da je divergencija polja brzina tečenja jednaka nuli ($\text{div } \vec{v} = 0$) i hipotezi o izobaričnosti slobodne površine S .



SI.5.2.3. Fokalne krive elementa površine: 1-prva fokalna kriva; 2-druga fokalna kriva.

Ako je granica S zapisana izrazom $\vec{r}_s = \vec{R}(u_1, u_2)$ i ako je sa (5.2.3) dato polje normala preko čvornih normala elementa, tada se prostorna koordinacija u u okolini površi S , koja se ovdje naziva fokalnim sistemom koordinata ($u_1, u_2, u_3 \equiv x$), uvodi formulom:

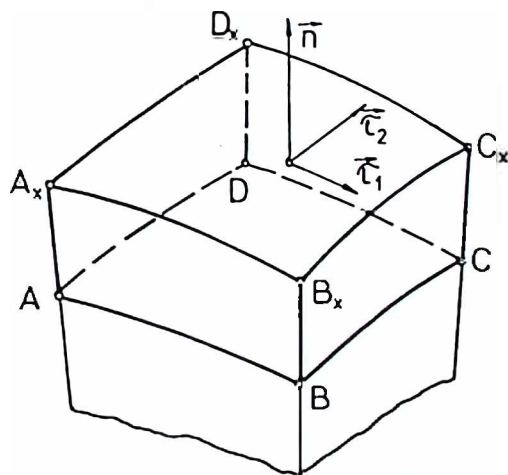
$$\vec{r} = \vec{R}(u_1, u_2) + u_3 \vec{n}(u_1, u_2) \quad (5.2.4)$$

Orti ovog sistema ($\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$) očigledno su triortogonalni. To znači, da se može prihvatiti da je i sistem krivolinijskih koordinata (u_1, u_2, u_3) triortogonalan, te se pri zapisu uslova nestišljivosti može koristiti teorija globalnih triortogonalnih koordinata (Glava 4, odjeljak 3). Jednostavnije je prići problemu u duhu klasične inženjerske mehanike gdje jednačina $\text{div } \vec{v} = 0$ u integralnom zapisu označava da isčezava protok vektora \vec{v} kroz granicu razmatranog elementa [129]:

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right) = 0 \quad (5.2.5)$$

gdje je prema (sl.5.2.3): $V \equiv (0 < u_3 < t, -R_1 \psi_1 / 2 < u_1 < R_1 \psi_1 / 2, -R_2 \psi_2 / 2 < u_2 < R_2 \psi_2 / 2)$, a t - debljina prigraničnog sloja.

I tako, oslanjajući se na fokalnu koordinaciju (5.2.4) i (sl.5.2.4) može se odrediti protok materijala kroz prigranični element $ABCD_{x \ x} B_x C_x D_x$.



Sl.5.2.4. Pogраниčni element

Rebra $A_x B_x$ i $C_x D_x$ imaju elementarnu dužinu $(R_1 + x) \psi_1$ a rebra $A_x D_x$ i $B_x C_x$ dužinu $(R_2 + x) \psi_2$ tako da je površina grane $A_x B_x C_x D_x$ jednaka:

$$S_x = (R_1 + x)(R_2 + x) \psi_1 \psi_2 \quad (5.2.6)$$

Odredjujući protok materijala iz konačnog elementa u pravcu \vec{n} dobija se:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(R_1 + x)(R_2 + x) \psi_1 \psi_2 v(x) - R_1 R_2 \psi_1 \psi_2 v(0)}{R_1 R_2 \psi_1 \psi_2 x} \right] \quad (5.2.7)$$

Rješavanjem (5.2.7) na osnovu uslova (5.2.5) dobija se:

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{R} v(x=0) = 0 \quad (5.2.8)$$

gdje je: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

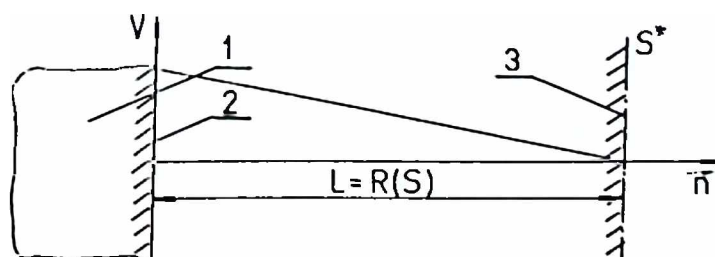
Iz gornjeg slijedi da se granični uslov na slobodnoj površi S sa normalom \vec{n} može postaviti u vidu relacije nestišljivosti:

$$\left. \frac{dv_n(s)}{dn} \right|_{n=0} + \frac{1}{R(s)} v_0(s) = 0 \quad (5.2.9)$$

i uslova izobarnosti:

$$p|_S = P(s) = \text{const} \quad (5.2.10)$$

No, uslov (5.2.9) dovodi i do vrlo bitnog zaključka o mogućnosti ekstrapolacije granice. Naime, metod konačnih elemenata je zasnovan na teoriji interpolacije skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja između čvorova mreže konačnih elemenata. Za razliku od takvog postupka, formula (5.2.9) omogućava ekstrapolaciju polja brzina \vec{v} (to je osnovno traženo polje) na spoljne prostranstvo koje okružuje tijelo (sl.5.2.5)



Sl.5.2.5. Ekstrapolacija brzine na granicu nepokretnosti:
1-plastično tijelo; 2-realna granica; 3-mehanička,
ekstrapolirana granica nekretanja.

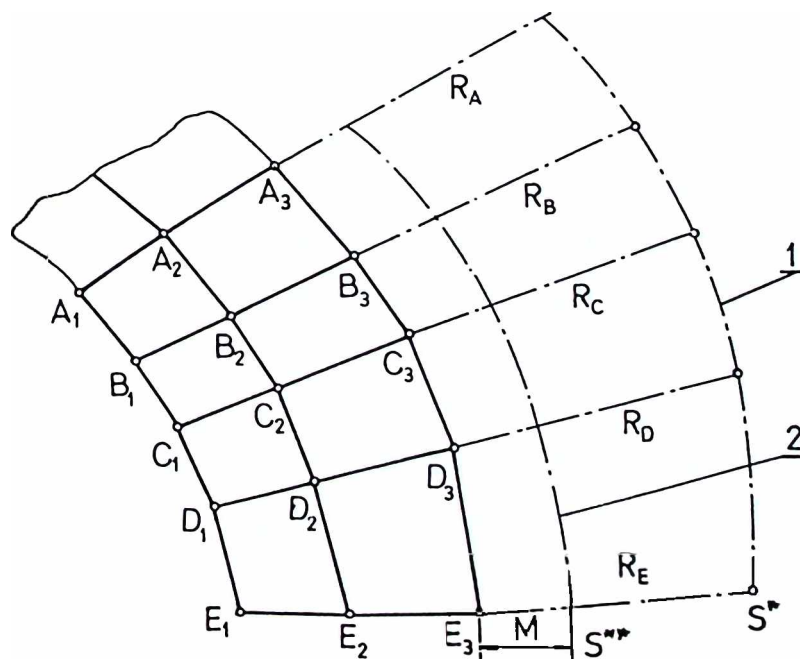
Polje brzina u pravcu normale \vec{n} (u_1, u_2) na spoljnu površinu se linijski ekstrapolira formulom:

$$v_n(n, s) = v_0(s) (1 - n/L(s)) \quad (5.2.11)$$

gdje je $L(s)$ neka veličina zavisna od površine S , ali nezavisna od odsječka u pravcu normale n . Zamjenom u jednačinu (5.2.9) se dobija:

$$\frac{-v_0(s)}{L} + \frac{v_0(s)}{R} = 0 \quad (5.2.12)$$

Dakle, pri proizvoljnom $v_0(s) \neq 0$ pri $L = R(s)$ granični uslov (5.2.9) će biti zadovoljen. To znači (sl.5.2.5) da nezavisno od traženog polja $v_0(s)$ na slobodnoj površini s na rastojanju $L=R(s)$ po normali postoji površina S^* koja se naziva mehaničkom ekstrapoliranom granicom nekretanja plastično tekućeg tijela, na kojoj je brzina tečenja jednaka nuli. Na (sl.5.2.6) je takođe prikazano svojstvo ekstrapolacije brzine na granicu nekretanja S^* pri dvodimenzionalnom tečenju (ravanskom ili osnosimetričnom):



Sl.5.2.6. Ekstrapolacija granica:
1-mehanička ekstrapolirana granica S^* ($v_n = 0$);
2-toplotna ekstrapolirana granica S^{**} ($\Delta T = 0$).

Analogno sa pojmom mehaničke, uvodi se i toplotna ekstrapolirana granica, čime se potpuno definišu uslovi na slobodnoj granici. Naime, pri formulaciji toplotnih graničnih uslova obično se izjednačavaju toplotni protoci na granici tijela i to: konvektivni gubitak toplote i razmjena toplote izražena Furi-jevim zakonom, te se dobija:

$$\left. \frac{dT}{dn} \right|_{n=0} + \frac{\alpha}{\lambda} (T - T_0)_0 = 0 \quad (5.2.13)$$

što je relacija analogna (5.2.9). Može se primijeniti linijska interpolacija slično (5.2.11):

$$\Delta T(n, s) = T(s) - T_0 = \Delta T_0(s) (1 - n/M) \quad (5.2.14)$$

gdje je M konstanta. Relacija (5.2.14) zadovoljava granični uslov (5.2.13) pri uslovu $M = \lambda/\alpha$ gdje su λ - koeficijent toploprovodnosti a α - koeficijent razmjene toplote. Ovaj uslov označava da ekstrapolacija granice (5.2.14) pomjera granicu toplotnog polja iz tijela, obično zagrijanog više od okruženja, na konstantno rastojanje M koje zavisi od fizičkih karakteristika sredine, ali ne od oblika granice.

Obije ekstrapolirane granice - mehanička S^* i toplotna S^{**} su prikazane na jednoj slici (5.2.6) da bi se moglo jasno uočiti da primjenom metoda ekstrapolacije slobodnih granica je moguće za realno deformaciono tijelo definisati dvije "košulje". To je prva adijabatska "košulja" koja izoluje tijelo od okolnog prostranstva tako da svako kretanje toplote koje nastaje zbog razlika u temperaturama, na toplotnoj ekstrapoliranoj granici tijela S^{**} izčezava kao prirodna posledica nestajanja razlike u temperaturama. I analogno, druga je mehanička "košulja" na kojoj prestaje svako kretanje tijela ($v_n^* = 0, v_t^* = 0$) označena sa (*) i koja može biti prihvaćena kao apsolutno kruta, kao idealni kalup. Matematički korektna formalizacija predloženog može biti razmotrena na primjeru slobodne granice osnosimetričnog tijela (sl.5.2.7).

Neka su zadane koordinate tačaka (r_0, z_0) , (r_1, z_1) i (r_2, z_2) koje leže na slobodnoj površini u čvorovima mreže konačnih elemenata. Oblik slobodne površine može biti predstavljen parabolom u $r - z$ i $z - r$ sistemu:

Po teoremi Mene, krivina drugog glavnog presjeka ravni normalnog na ravan (rz) sa tragom CO (sl.5.2.7), gdje je O razmatrana tačka, a C njen centar krivine, određena je formulom:

$$x_2 = x \cos \alpha = \frac{1}{r_o} \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \quad (5.2.21)$$

Tada iz (5.2.20) i (5.2.21) slijedi:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{2A}{(1+B^2)^{3/2}} + \frac{1}{r_o (1+B^2)^{1/2}} \quad (5.2.22)$$

To znači da radijus krivine $R = 1/x$ se određuje koordinatama tačaka 0,1,2 odnosno vrijednostima konstanti (a,b) i (A,B). Tačka O sa koordinatama (r_o, z_o) po samom obliku zadavanja leži na parabolama (5.2.15) i (5.2.16). Iz uslova pripadanja tačaka 1 i 2 parabolama dobijaju se jednačine:

$$\begin{aligned} (z_1 - z_o) &= b(r_1 - r_o) + a (r_1 - r_o)^2 \\ (z_2 - z_o) &= b(r_2 - r_o) + a (r_2 - r_o)^2 \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

ili:

$$\begin{aligned} (r_1 - r_o) &= B(z_1 - z_o) + A (z_1 - z_o)^2 \\ (r_2 - r_o) &= B(z_2 - z_o) + A (z_2 - z_o)^2 \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

odakle se za konstante (a,b) ili (A,B) dobija:

$$a = \frac{(z_2 - z_o)(r_1 - r_o) - (z_1 - z_o)(r_2 - r_o)}{(r_1 - r_o)(r_2 - r_o)(r_2 - r_1)}; \quad b = \frac{(z_1 - z_o)(r_2 - r_o)^2 - (z_2 - z_o)(r_1 - r_o)^2}{(r_1 - r_o)(r_2 - r_o)(r_2 - r_1)} \quad (5.2.25)$$

ili:

$$A = \frac{(r_2 - r_o)(z_1 - z_o) - (r_1 - r_o)(z_2 - z_o)}{(z_1 - z_o)(z_2 - z_o)(z_2 - z_1)}; \quad B = \frac{(r_1 - r_o)(z_2 - z_o)^2 - (r_2 - r_o)(z_1 - z_o)^2}{(z_1 - z_o)(z_2 - z_o)(z_2 - z_1)} \quad (5.2.26)$$

Formule (5.2.22) i (5.2.26) određuju distancu ekstrapolacije granice tijela od tačke 0 na spoljnu oblast i očigledno ovakav opšti postupak dovodi do formiranja ekstrapolirane granice nekretanja S^* iz odvojenih tačaka. Iz gore istaknutog slijedi veoma bitna posledica: brzina tačaka na slobodnoj po-

vršini deformisanog tijela nije nezavisna. Ona se može izraziti kao funkcija brzina susjednih unutrašnjih tačaka. Ovo je novi kvalitet u odnosu na uobičajeni pristup [72, 73, 78, 79] ravnopravnog tretiranja unutrašnjih i graničnih slobodnih tačaka. Kada se zna da je broj tačaka na slobodnoj površini pri razmatranju raznih procesa deformisanja po pravilu veliki, istaknuti postupak omogućava znatno smanjenje dimenzija matrice krutosti i samim tim povećanje tačnosti i brzine proračuna koja je velikim dijelom zavisna od, u iteracionim procesima često ponavljano, postupka rješavanja linearizovanog sistema jednačina.

5.2.2. Predstavljanje uslova na kontaktu

Pri matematičkom opisivanju procesa OMD prisutan je i jedan principijelan problem, za čije rješenje nije razradjen univerzalan, fizički korektan pristup. To je problem formulacije graničnih jednačina teorije OMD, iz kojih proističu traženi granični uslovi neophodni za rješavanje sistema jednačina TOMD (teorije obrade metala deformisanjem).

Kao što je poznato proces deformacije početne fizičke zapremine ostvaruje se dejstvom termonaponskog polja što je praćeno visokim pritiscima na kontaktnim površinama deformacionog tijela. Baš na tim površinama i neophodno je formulisati granične jednačine, koje fizički korektno odražavaju mehanizam kontaktnog međjudejstva razmatrane deformacione zapremine V_M i spoljnog tijela. Kao rezultat integracija graničnih jednačina pojavljuju se granični naponski uslovi, tj. biće poznat vektor napona na granici deformacione zapremine. To znači, uzimajući u obzir osnovne jednačine mehanike plastično deformisanog tijela, dobijen je drugi osnovni problem TOMD, tj. za razliku od tradicionalnog pristupa kada se na kontaktnim površinama zadaje normalna brzina pomjeranja kalupa, zadavaće se sila presovanja.

5.2.2.1. O graničnim jednačinama TOMD

Granične jednačine TOMD biće postavljene na osnovu poznatih eksperimentalno – teorijskih ispitivanja provedenih sa ciljem utvrđivanja zakona trenja na kontaktnim površinama [33,65] , a takodje na osnovu teorije tečenja u tankom sloju plastičnog materijala (TTTSPM) prema A.A.Iljušinu [25,26] . Kao što je poznato prvo je radovima L.Prandtla bilo predloženo postojanje ravnih struktura tekućeg materijala i na osnovu Kulonovog zakona trenja dobijena naponska slika tečenja ravnog sloja. Zatim su, u radovima Nadaia razmotrene jednačine tečenja u ravnom sloju pod uticajem sila i napona Prandtla i dobijena su polja brzina i trajektorije tečenja Prandtl-Nadai. U radovima A.A.Iljušina [25,26] na osnovu rješenja Prandtl-Nadai, razradjena je teorija pješčane analogije koja je zatim razvijena na plastično tečenje neravnih slojeva (Glava 3). Pomoću nje su riješeni mnogi inženjerski problemi koji su i eksperimentalno potvrđjeni u radovima P.M.Ogibalova i I.A. Kijka [38]. Razmatra se deformaciono tijelo čija tekuća konfiguracija je poznata $\vec{v}_M(\vec{x}, t)$. Zadana je takodje kontaktna površina $S_k(t)$ kao i opšta sila prese: $\vec{F}(t) = -F(t)\vec{k}_3$ u pravcu presovanja. Deformisanje se ostvaruje presovanjem sile preko površine $S_k(t)$ [33]. Uvodi se pojam pogransloja nepoznate debljine $H(\vec{\xi}, t)$ duž poznate kontaktne površine. Ponašanje materijala pogransloja (uključuje kako mazivo tako i deformisani metal) opisuje se jednačinama TTTSPM:

$$\text{grad } p(\vec{\xi}, t) = - \frac{2 \tau(p)}{H} \frac{\vec{v}}{v} \quad (5.2.27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div}(H\vec{v}) = 0 \quad (5.2.28)$$

$$p|_{\partial S_k(t)} = \bar{\sigma}_s \quad (5.2.29)$$

gdje je:

$$\tau(p) = K_{II} [1 - \exp(-1,25p/\bar{\sigma}_s)] \bar{\tau}_s \quad (5.2.30)$$

zakon graničnog trenja po A.N.Levanovu. Ovdje je K_{II} - konstanta jednaka odnosu graničnog napona trenja τ^{\max} i $\bar{\tau}_s$; $\bar{\tau}_s = 0,58 \bar{\sigma}_s$ - otpor na smicanje pogransloja. Koeficijent K_{II} se određuje prema tablici datoj u [43] .

Dalje se traži rješenje za $p(\vec{\xi}, t)$ na kontaktnoj površini:

$$\text{Igrad } p = \frac{2\tau(p)}{H}, \quad p|_{s_k(t)} = \bar{\sigma}_s \quad (5.2.31)$$

smatrajući pri tome poznatim $H = H(t)$.

Za rješavanje zadataka tipa (5.2.31) razradjeni su razni metodi [30,31].

Ovakav zadatak se posebno uprošćava pri izučavanju osnosimetričnog tečenja ($s_k(t)$ je rotaciona površina), kada se integraljenje diferencijalnih jednačina zadatka (5.2.31) svodi na integraljenje duž pravca površine kontakta $s_k(t)$. Smatrajući dalje poznatim zavisnosti:

$$p = p(\vec{\xi}, t), \quad \tau = \tau(\vec{\xi}, t) \quad (5.2.32)$$

na kontaktnoj površini $s_k(t)$, može se postaviti jednačina za određivanje $H=H(t)$ na osnovu zadane veličine $F(t)$. Neka je $\vec{n}(\vec{\xi}, t)$ – normala na površinu $s_k(t)$ a k_3 – pravac sile koja djeluje na kalup. Tada će biti:

$$F(t) = \int_{S_k(t)} [p(nk_3) + (-\tau \frac{v}{v})k_3] dS = \Phi(\bar{\tau}_s, R, L, H(t)) \quad (5.2.33)$$

gdje je $\Phi(\bar{\tau}_s, R, L, H(t))$ – poznata zavisnost koja uključuje geometrijske karakteristike pogransloja (L, H, R) na kontaktnoj površini $s_k(t)$, a takodje veličinu otpora deformaciji pogransloja $\bar{\tau}_s$. Iz relacije (5.2.33) se može odrediti $H(t)$.

Treba istaći da u svakoj fazi procesa kovanja prvo se razmatra tečenje u pogransloju, koje je izazvano zbližavanjem njegovih ograničavajućih površina. U rezultatu se dobija vektor napona na kontaktnoj površini $s_k(t)$, a zatim prelazi na rešavanje osnovnog zadatka za deformisano tijelo.

5.2.2.2. Primjena graničnih jednačina na procese OMD

Kao primjer razmatra se slobodno sabijanje cilindričnog tijela pomoću ravnih površi. U tom slučaju je: $s_k(t) = \{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R(t), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$. Zbog osnosimetričnosti zadatka će biti:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{2 \tau(p)}{H} = - \frac{2 \tau_0 (1 - \exp(-p/p_0))}{H} \quad (5.2.34)$$

$$p|_{r=R(t)} = \sigma_s^M = \sqrt{3} \tau_0$$

gdje su:

$$\tau_0 = k_{\Pi} \bar{\tau}_s, \quad p_0 = 1,38 \bar{\tau}_s \quad (5.2.35)$$

pri čemu: "M" označava deformisano tijelo. Integracijom (5.2.34) se dobija:

$$\ln [\exp(1,25 k_{\Pi}) - 1] - \ln [\exp(p/p_0) - 1] = - \frac{2(\tau_0/p_0)}{H} (R-r) \quad (5.2.36)$$

ili:

$$\exp(p/p_0) = \Pi_1 \exp \left(\frac{2(\tau_0/p_0)}{H} (R-r) \right) + 1 \quad (5.2.37)$$

gdje je $\Pi_1 = \exp(1,25 k_{\Pi}) - 1$.

Iz (5.2.37) se dobija izraz za p:

$$\frac{p}{p_0} = \ln \left[1 + \Pi_1 \exp \left(\frac{2(\tau_0/p_0)}{H} (R-r) \right) \right] \quad (5.2.38)$$

Zanemarivanjem prve komponente pod logaritmom se dobija:

$$p(r,t) = p_0 \left[\ln \Pi_1 + \frac{2(\tau_0/p_0)}{H} (R-r) \right] \quad (5.2.39)$$

Jednačina za H(t) slijedi iz uslova:

$$F(t) = 2\pi \int_0^{R(t)} p(r,t) r dr = 2\pi p_0 R^2 \left[\frac{\ln \Pi_1}{2} + \frac{(\tau_0/p_0)}{3} \frac{R}{H} \right] \quad (5.2.40)$$

i ima oblik:

$$H(t) = \frac{(\tau_0/p_0) R(t)}{3} \frac{1}{F(t)/(2\pi p_0 R^2(t)) - \ln \Pi_1/2} \quad (5.2.41)$$

Dalje se razmatra problem rješavanja graničnih jednačina za osnosimetrično tijelo složene konfiguracije. Neka je ξ - parametar koji karakteriše dužinu luka duž kontaktne površi kalupa i priprema koji se računa od tačke presjeka površi kalupa sa osom simetrije. Pretpostavlja se da se u razmatranoj

fazi procesa kovanja kontaktna površina (po svojoj prirodi rotaciona površina) karakteriše izmjenom ξ u intervalu:

$$\xi_p(t) < \xi < \xi_k(t) \quad (5.2.42)$$

Granična jednačina (5.2.31) u odnosu na kontaktni napon $p(\xi, t)$ će u tom slučaju imati oblik:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{2\tau(p)}{H} \equiv \frac{2\tau_o [1 - \exp(-p/p_o)]}{H} \quad (5.2.43)$$

gdje prema A.N. Levanovu, analogno (5.2.35) će biti:

$$p_o = 1,38 \bar{\tau}_s, \quad \tau_o = k_{\Pi} \bar{\tau}_s \quad (5.2.44)$$

Rješavanjem (5.2.43) se dobija:

$$\ln(e^{p/p_o} - 1) - \ln(e^{p_1/p_o} - 1) = \frac{2(\tau_o/p_o)}{H} (\xi - \xi_p) \quad (5.2.45)$$

gdje se $p_1 \equiv p(\xi_p, t)$ smatra poznatim.

Analogno integraljenjem (5.2.43) sa drugog kraja kontaktne površine dobija se:

$$\ln(e^{p_2/p_o} - 1) - \ln(e^{p/p_o} - 1) = - \frac{2(\tau_o/p_o)}{H} (\xi_k - \xi) \quad (5.2.46)$$

Iz relacije (5.2.45) slijedi:

$$e^{p/p_o} = 1 + \Pi_1 \exp \left(\frac{2(\tau_o/p_o)}{H} (\xi - \xi_p) \right) = 1 + \Pi_1 \exp \left(\frac{2f}{H} (\xi - \xi_p) \right) \quad (5.2.47)$$

gdje su:

$$\Pi_1 = e^{p_1/p_o} - 1, \quad f = \tau_o/p_o \quad (5.2.48)$$

Za slučaj slobodne granice kontaktne površi (odsustvuju protivpritisci na konturi oblasti $s_k(t)$) granični uslov će imati oblik:

$$p_1 = p_2 = k_{\Pi} \bar{\tau}_s \sqrt{3} = k_{\Pi} \bar{\sigma}_s \quad (5.2.49)$$

Iz (5.2.47) se konačno dobija:

$$p = p_0 \ln [1 + \Pi_1 \exp(\frac{2f}{H}(\xi - \xi_p))] , \quad \xi_p < \xi < \xi^* \quad (5.2.50)$$

gdje ξ^* karakteriše položaj neutralnog presjeka. Analogno iz (5.2.46) se dobija:

$$p = p_0 \ln [1 + \Pi_2 \exp(\frac{2f}{H}(\xi_k - \xi))] , \quad \xi^* < \xi < \xi_k \quad (5.2.51)$$

gdje je:

$$\Pi_2 = e^{p_2/p_0} - 1 \quad (5.2.52)$$

Prema (5.2.43) korišćenjem (5.2.50) i (5.2.51) dobijaju se izrazi za tangencijalne napone s jedne i s druge strane neutralnog presjeka:

$$\tau = \tau_0 \frac{\Pi_1 \exp(\frac{2f}{H}(\xi - \xi_p))}{1 + \Pi_1 \exp(\frac{2f}{H}(\xi - \xi_p))} , \quad \xi_p < \xi < \xi^* \quad (5.2.53)$$

$$\tau = \tau_0 \frac{\Pi_2 \exp(\frac{2f}{H}(\xi_k - \xi))}{1 + \Pi_2 \exp(\frac{2f}{H}(\xi_k - \xi))} , \quad \xi^* < \xi < \xi_k \quad (5.2.54)$$

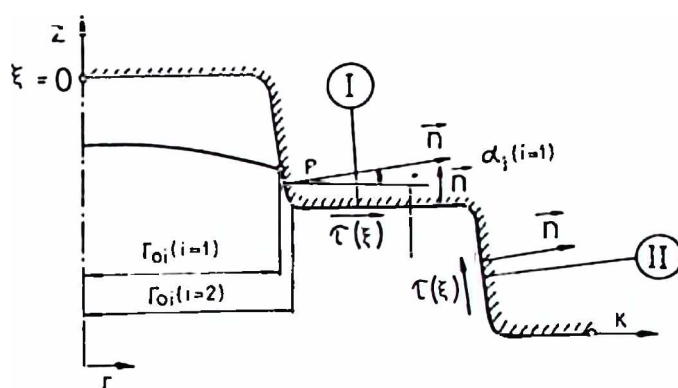
Dalje će biti pretpostavljeno da je $p_1 = p_2 = k_{II} \bar{\sigma}_s$. Tada se iz uslova neprekidnosti $p(\xi, t)$ pri $\xi = \xi^*$ prema (5.2.50) i (5.2.51) dobija:

$$\xi^* = \frac{1}{2} (\xi_p + \xi_k) \quad (5.2.55)$$

Razmatra se proizvoljni (ali zadani) položaj kontaktne površi $s_k(t)$ (sl.5.2.8)

$$s_k(t) = \sum_{i=1}^n s_{ki}(t) \quad (5.2.56)$$

koja se sastoji iz "n" elemenata $s_{ki}(t)$ u obliku konusnih površina pri čemu je $n = n_1 + n_2$, gdje je n_k ($k=1,2$) - broj elemenata razbijanja lijevo i desno od neutralnog presjeka $\xi = \xi^*$.



SI.5.2.8. Kontaktna površ deformacionog tijela

Smatra se da osim graničnih i ugaonih tačaka kontaktne površine u njenom razbijanju na elemente (5.2.56) učestvuje takodje i tačka $\xi = \xi^*$. Neka je $\vec{n} = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i]$ – spoljna normala na kontaktnu površinu deformacionog tijela. Sila presovanja koja pripada elementu $s_{ki}(t)$ lijevo od neutralnog presjeka će biti:

$$P_i^I = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} 2 \pi [\sin \alpha_i p(\xi) + \cos \alpha_i \tau(\xi)] [r_{oi} + (\xi - \xi_i) \sin \alpha_i] d\xi \quad (5.2.57)$$

Zanemarujući komponentu "1" u izrazima (5.2.53) i (5.2.50) (što je fizički opravdano) dobija se:

$$p(\xi) = p_o \ln [1 + \pi_i \exp(\frac{2f}{H}(\xi - \xi_p))] \approx p_o \ln \pi_i + \frac{2fp_o}{H}(\xi - \xi_p), \quad \xi_p < \xi < \xi^* \quad (5.2.58)$$

$$\tau(\xi) = \tau_o, \quad \xi_p < \xi < \xi^* \quad (5.2.59)$$

Postavljajući (5.2.59) i (5.2.58) u izraz (5.2.57) dobija se:

$$P_i^I = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} 2 \pi \{ p_o \sin \alpha_i [(\ln \pi_i - \frac{2f}{H} \xi_p) + \frac{2f}{H} \xi] + \cos \alpha_i \tau_o \} [(r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) + \xi \sin \alpha_i] d\xi \quad (5.2.60)$$

Rješavanjem relacija (5.2.60) se svodi na oblik :

$$P_i^I = A I_i + \frac{1}{H} B I_i \quad (5.2.61)$$

gdje su:

$$A I_i = 2 \pi [(p_o \sin \alpha_i \ln \Pi_1 + \cos \alpha_i \tau_o) [(r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) (\xi_{i+1} - \xi_i) + \sin \alpha_i \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2)] , \quad (5.2.62)$$

$$B I_i = 2 \pi [2 f p_o [-\sin \alpha_i \xi_p (r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) (\xi_{i+1} - \xi_i) + \sin \alpha_i (r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) \cdot \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2) - \sin \alpha_i \xi_p \sin \alpha_i \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2) + \sin^2 \alpha_i \frac{1}{3} (\xi_{i+1}^3 - \xi_i^3)] \quad (5.2.63)$$

Tada će sumarna sila koja pripada dijelu I površine $s_k(t)$ ($\xi_p < \xi < \xi^*$) biti:

$$P^I \equiv P I = A I + \frac{1}{H} B I \quad (5.2.64)$$

gdje su:

$$A I = \sum_{i=1}^{n_1} A I_i \quad B I = \sum_{i=1}^{n_1} B I_i \quad (5.2.65)$$

n_1 - broj elemenata razbijanja dijela I kontaktne površine $s_k(t)$.

Analogno (5.2.58) i (5.2.59) izrazi za normalne i tangencijalne napone na dijelu kontaktne površine će biti:

$$p = p_o \ln [1 + \Pi_2 \exp \left(\frac{2f}{H} (\xi_k - \xi) \right)] \approx p_o \ln \Pi_2 + \frac{2f p_o}{H} (\xi_k - \xi), \quad \xi^* < \xi < \xi_k \quad (5.2.66)$$

$$\tau = \tau_o, \quad \xi^* < \xi < \xi_k \quad (5.2.67)$$

Sila presovanja koja pripada elementu desno od neutralnog presjeka će biti:

$$\begin{aligned} P_i^{II} &= \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} 2 \pi [\sin \alpha_i p(\xi) - \cos \alpha_i \tau(\xi)] [r_{oi} + (\xi - \xi_i) \sin \alpha_i] d\xi = \\ &= 2 \pi \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left\{ \sin \alpha_i \left(p_o \ln \Pi_2 + \frac{2f p_o}{H} (\xi_k - \xi) \right) - \cos \alpha_i \tau_o \right\} - \sin \alpha_i \frac{2f}{H} \xi [(r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) + \xi \sin \alpha_i] d\xi \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

Rješavanjem relacija (5.2.68) se svodi na oblik:

$$P_i^{II} = A II_i + \frac{1}{H} B II_i \quad (5.2.69)$$

gdje su:

$$AII_i = 2\pi (\sin \alpha_i p_o \ln \frac{r_{oi}}{2} - \cos \alpha_i \tau_o) [(r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i)(\xi_{i+1} - \xi_i) + \sin \alpha_i \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2)], \quad (5.2.70)$$

$$BII_i = 2\pi 2fp_o [\sin \alpha_i \xi_k (r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i)(\xi_{i+1} - \xi_i) - \sin \alpha_i (r_{oi} - \xi_i \sin \alpha_i) \cdot \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2) + \sin \alpha_i \xi_k \sin \alpha_i \frac{1}{2} (\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2) - \sin^2 \alpha_i \frac{1}{3} (\xi_{i+1}^3 - \xi_i^3)] \quad (5.2.71)$$

Tada će sumarna sila na dijelu II kontaktne površine $s_k(t)$ ($\xi^* < \xi < \xi_k$) biti:

$$P^{II} \equiv PII = AII + \frac{1}{H} BII \quad (5.2.72)$$

gdje su:

$$AII = \sum_{i=n_1+1}^{n=n_1+n_2} AII_i, \quad BII = \sum_{i=n_1+1}^{n=n_1+n_2} BII_i \quad (5.2.73)$$

n_2 - broj elemenata razbijanja dijela II kontaktne površine $s_k(t)$.

Konačno, iz relacije (5.2.64) i (5.2.72) se dobija izraz za debljinu pograničnog sloja:

$$H = \frac{BI + BII}{P - (AI + AII)} \quad (5.2.74)$$

gdje je $P = PI + PII$.

Na taj način je izložen algoritam realizacije rješenja graničnih jednačina za osnosimetrične procese zapreminskog kovanja, prema kojem, pomoću nadjene iz (5.2.74) vrijednosti $H = H(t)$ se određuju na osnovu relacija: (5.2.50), (5.2.51), (5.2.53) i (5.2.54) vrijednosti komponenata vektora napona na poznatoj granici kontakta $s_k(t)$.

5.2.3. Redukcija stepena slobode graničnih elemenata

Značajan problem pri rješavanju zadataka metodom konačnih elemenata je i kako obezbijediti poštovanje uslova na granici, tj. kako ostvariti da pojedine tačke na granici, koje samim svojim položajem imaju određenu brzinu (ili pak komponentu brzine), u rezultatu rešavanja sistema jednačina poprime ovu una-

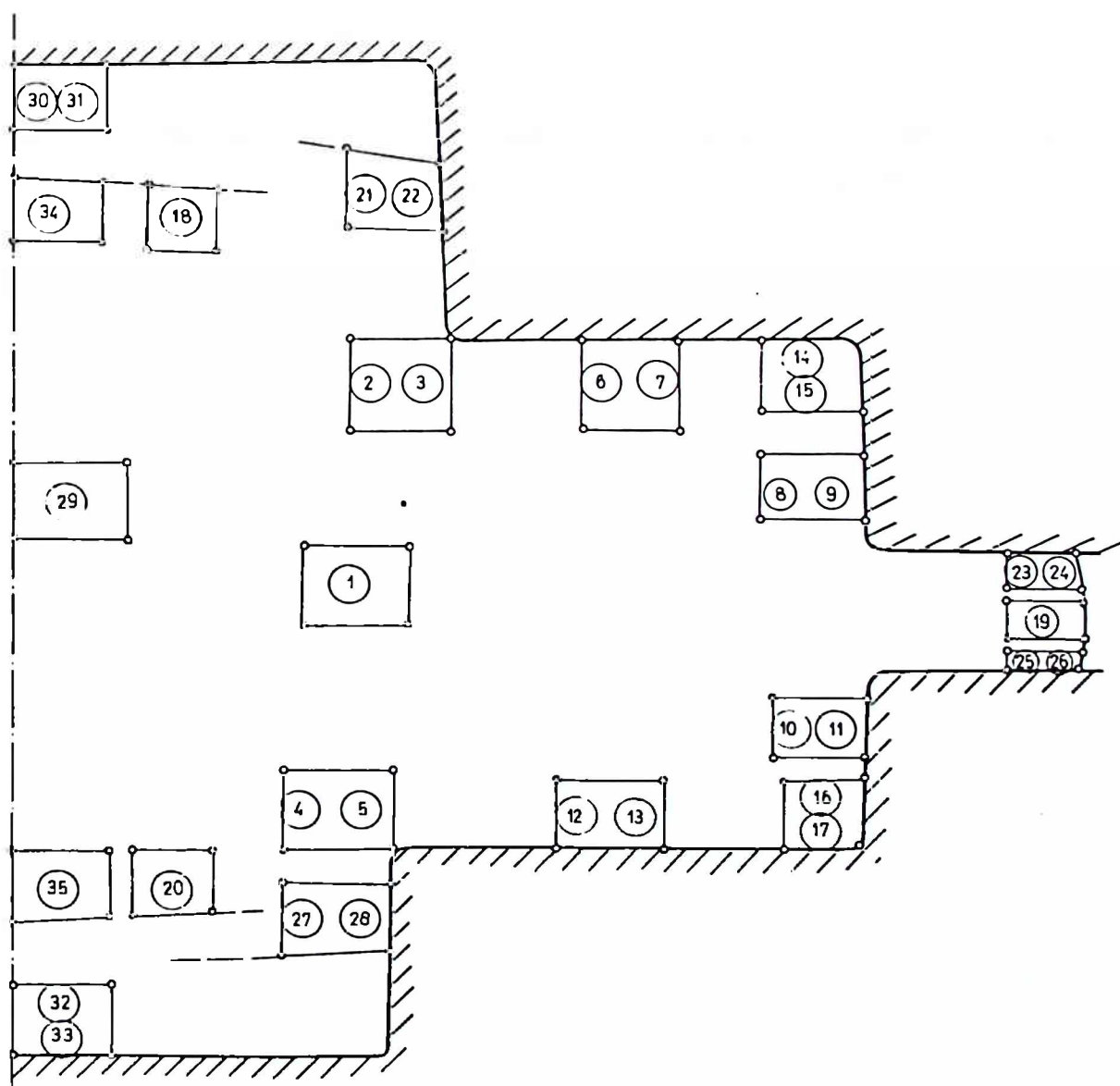
prijed zadatu vrijednost. Za rješenje ovog problema [83, 93] predlažu se razne metode. Koristi se, na primjer, popunjavanje nulama odgovarajuće vrste i kolone matrice krutosti pri čemu se vrsta pomnožena sa zadatom vrijednošću prenosi na drugu stranu matrične jednačine. Takođe, koristi se množenje ili pak sabiranje unaprijed odredjenih članova matrične jednačine sa velikim brojevima. To praktično znači da se diskretizacija razmatranog osnosimetričnog tijela vrši tako što se iz svakog čvora odvede po dva stepena slobode, formira se matrica krutosti, a zatim naknadnom modifikacijom obezbjeđuje poštovanje graničnih uslova. Ovakva intervencija, istina obezbjeđuje dobijanje zadatih vrijednosti, ali zato utiče na rezultat drugih unaprijed nedefinisanih brzina. Ona traži svoje opravdanje u činjenici da se razmatra relativno veliki sistem jednačina i da teorijski nekorektne izmjene na određenoj vrsti i koloni ne utiču bitno na rezultat. Pri tome se ne uzima u obzir nestabilnost sistema jednačina, karakteristična za nelinearne probleme, koja prema numeričkim eksperimentima autora dovodi do značajnih grešaka.

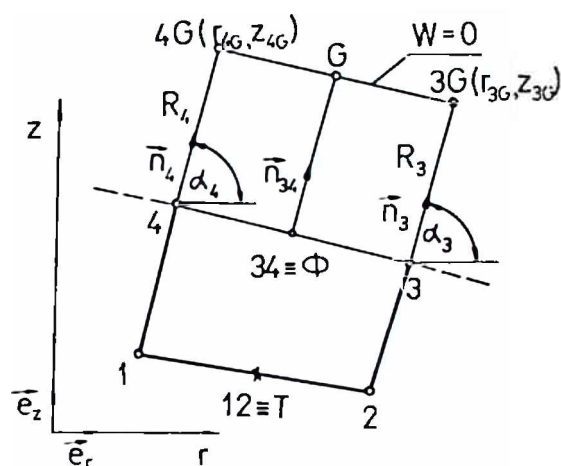
Ovdje se predlaže drugi pristup. Numerička procedura je organizovana tako da se iz čvorova diskretizovanog osnosimetričnog tijela ne odvede po dva, već stvarni broj stepeni slobode. Pri tome se koriste činjenice da tačke na kontaktu imaju pravac kretanja tangentan na kalup; kontaktne tačke na gornjem kalupu imaju vertikalnu komponentu brzine određenu brzinom alata; tačke na slobodnoj površini tijela nemaju stepene slobode, jer su oni izraženi preko unutrašnjih tačaka tijela (odjeljak 5.2.1).

Prednost ovakvog postupka je što je znatno smanjena dimenzija matrice krutosti. S obzirom na često ponavljanje iteracione procedure, relativno veliki broj graničnih tačaka i nelinearnost problema postiže se ušteda kompjuterskog vremena i poboljšava tačnost rješavanja sistema jednačina. S druge strane, nema naknadnog modificiranja matrice krutosti tijela što obezbjeđuje potpunu teorijsku dosljednost.

Neposredna realizacija predloženog postupka, u cilju obezbjeđenja jednobraznosti, obuhvata nalaženje matrice krutosti pojedinih elemenata tijela razma-

trajući ih sa maksimalnim brojem stepeni slobode. Tako dobijene matrice se redukuju na stvarni broj stepeni slobode, a potom postavljaju u matricu krutosti tijela. Trenutni predmet našeg interesovanja su redukcione matrice koje se razlikuju zavisno do tipa posmatranog elementa. Za razmatrano osnosimetrično tijelo uočeno je 35 po broju i rasporedu stepeni slobode, različitih elemenata (sl.5.2.9). Kao karakteristični primjer posmatra se element na slobodnoj površini označen sa brojem 18 za čiju analizu nužna geometrijska interpretacija je data na (sl.5.2.10).





Sl.5.2.10. Geometrija elementa na slobodnoj granici

Granica može biti predstavljena pomoću radijus vektora graničnih tačaka 3 i 4: $\vec{\rho}_{3G}$ i \vec{n}_{4G} . Tada se ekstrapolirana granica na kojoj brzina poprima vrijednost: $w=0$ (sl.5.2.10) može definisati sa:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_{3G} &= \vec{\rho}_3 + \vec{n}_3 R_3 \\ \vec{\rho}_{4G} &= \vec{\rho}_4 + \vec{n}_4 R_4\end{aligned}\quad (5.2.75)$$

gdje su R_3 i R_4 - poluprečnici krivine slobodne površine u tačkama 3 i 4. Razlaganjem se iz (5.2.75) dobija:

$$\begin{aligned}r_{3G} &= r_3 + R_3 \cos \alpha_3 \\ z_{3G} &= z_3 + R_3 \sin \alpha_3 \\ r_{4G} &= r_4 + R_4 \cos \alpha_4 \\ z_{4G} &= z_4 + R_4 \sin \alpha_4\end{aligned}\quad (5.2.76)$$

Analogno, tačka T na liniji 1-2 može biti određena:

$$\vec{\rho}_{12} = \vec{\rho}_T = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2) \quad (5.2.77)$$

ili preko projekcija:

$$\begin{aligned}r_T &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \\ z_T &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\end{aligned}\quad (5.2.78)$$

Polje normala na granici je zadano jednačinom:

$$\vec{n} = \vec{e}_r \cos \alpha + \vec{e}_z \sin \alpha \quad (5.2.79)$$

pri čemu je ugao α promjenljiv duž granice. Tada će normala u srednjoj tački granice ϕ biti:

$$\vec{n}_\phi = \vec{n}_{34} = \vec{e}_r \cos \alpha_{34} + \vec{e}_z \sin \alpha_{34} = \vec{e}_r \cos \alpha_\phi + \vec{e}_z \sin \alpha_\phi \quad (5.2.80)$$

gdje je $\alpha_\phi = \alpha_{34} = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$.

Polje brzina elementa 1234 je zadano u obliku:

$$\vec{w} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_z = w(\vec{e}_r \cos \alpha + \vec{e}_z \sin \alpha) \quad (5.2.81)$$

gdje su u, v, w – intenzivnosti komponenata i samog vektora brzine sukcesivno, a α ugao koji zaklapa brzina sa r osom.

Projektovanjem ovog polja na srednju normalu se dobija:

$$c \equiv \vec{w} \cdot \vec{n}_\phi = w \cos (\alpha - \alpha_\phi) \quad (5.2.82)$$

Razlaganjem po malom uglu slijedi:

$$c = w \left(1 - \frac{(\alpha - \alpha_\phi)^2}{2} + \dots \right) \quad (5.2.83)$$

Razlika medju veličinama c i w pripada malim veličinama drugog reda i može se zanemariti:

$$c \equiv w \quad (5.2.84)$$

U teoriji je pokazano da se veličine c i w na granici linijski ekstrapoliraju na nulu:

$$w_{3G} = 0, \quad w_{4G} = 0 \quad (5.2.85)$$

Takodje, brzina u tački T je data.

Na taj način problem linijske ekstrapolacije brzine c može biti riješen postavljanjem interpolacione ravni (r, z, c) kroz tačke 3G, 4G i T uz korišćenje relacije (5.2.84):

$$\begin{vmatrix} r & z & w & 1 \\ r_{4G} & z_{4G} & 0 & 1 \\ r_{3G} & z_{3G} & 0 & 1 \\ r_T & z_T & w_T & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{4G} & 0 & 1 \\ z_{3G} & 0 & 1 \\ z_T & w_T & 1 \end{vmatrix} r + \begin{vmatrix} 0 & r_{4G} & 1 \\ 0 & r_{3G} & 1 \\ w_T & r_T & 1 \end{vmatrix} z + \quad (5.2.86)$$

$$+ \begin{vmatrix} r_{4G} & z_{4G} & 1 \\ r_{3G} & z_{3G} & 1 \\ r_T & z_T & 1 \end{vmatrix} w - \begin{vmatrix} r_{4G} & z_{4G} & 0 \\ r_{3G} & z_{3G} & 0 \\ r_T & z_T & w_T \end{vmatrix} = 0$$

Sredjivanjem jednačine (5.2.86) se dobija:

$$w(r, z) = \frac{(z_{3G} - z_{4G})r + (r_{4G} - r_{3G})z + (z_{4G}r_{3G} - r_{4G}z_{3G})}{(r_{3G} - r_T)(z_{4G} - z_T) - (r_{4G} - r_T)(z_{3G} - z_T)} w_T \quad (5.2.87)$$

Jednačina (5.2.87) može biti zapisana u obliku:

$$w = w_T G(r, z) \quad (5.2.88)$$

gdje je:

$$G(r, z) = \frac{(z_{3G} - z_{4G})r + (r_{4G} - r_{3G})z + (z_{4G}r_{3G} - r_{4G}z_{3G})}{(r_{3G} - r_T)(z_{4G} - z_T) - (r_{4G} - r_T)(z_{3G} - z_T)} \quad (5.2.89)$$

Projektovanjem jednačine (5.2.88) na ose se dobija:

$$\begin{aligned} u &= w \cos \alpha = G(r, z) w_T \cos \alpha \\ v &= w \sin \alpha = G(r, z) w_T \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.2.90)$$

Razmatra se veličina:

$$w_T \cos \alpha = \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \cos \alpha \quad (5.2.91)$$

Ovu veličinu treba razložiti u red na liniji 1-2. U tom cilju se koriste trigonometrijske smjene:

$$\cos \alpha = \cos (\beta + (\alpha - \beta)) = \cos \beta \cos (\alpha - \beta) - \sin \beta \sin (\alpha - \beta) \quad (5.2.92)$$

Kada su uglovi α i β bliski, u linijskom približenju će biti:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \approx 1 \quad (5.2.93)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) - \frac{(\alpha - \beta)^3}{6} \approx \alpha - \beta$$

Zamjenom (5.2.93) u (5.2.92) se dobija:

$$\cos \alpha \approx \cos \beta - (\alpha - \beta) \sin \beta \quad (5.2.94)$$

Ako se zamijeni sukcesivno β sa uglovima α_1 i α_2 koji karakterišu tačke 1 i 2 dobija se:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_1 - (\alpha - \alpha_1) \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha &= \cos \alpha_2 - (\alpha - \alpha_2) \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (5.2.95)$$

Zamjenom (5.2.95), relacija (5.2.91) poprima oblik:

$$w_T \cos \alpha = \frac{1}{2} (w_1 \cos \alpha_1 - w_1 \sin \alpha_1 (\alpha - \alpha_1) + w_2 \cos \alpha_2 - w_2 \sin \alpha_2 (\alpha - \alpha_2)) \quad (5.2.96)$$

Prema (5.2.90) relacija (5.2.96) može biti zapisana u obliku:

$$w_T \cos \alpha = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) - \frac{1}{2} v_1 (\alpha - \alpha_1) - \frac{1}{2} v_2 (\alpha - \alpha_2) \quad (5.2.97)$$

te će konačni oblik relacije (5.2.90) biti:

$$u = G w_T \cos \alpha = G u_{12} - G/2 [v_1 (\alpha - \alpha_1) + v_2 (\alpha - \alpha_2)] \quad (5.2.98)$$

i analogno:

$$v = G w_T \sin \alpha = G v_{12} - G/2 [u_1 (\alpha - \alpha_1) + u_2 (\alpha - \alpha_2)] \quad (5.2.99)$$

Zadržavanjem glavnih članova razlaganja dobijaju se sljedeća pravila ekstrapolacije:

$$\begin{aligned} u &\equiv u(r, z) = G(r, z) u_{12} \\ v &\equiv v(r, z) = G(r, z) v_{12} \end{aligned} \quad (5.2.100)$$

U graničnim tačkama 3 i 4 razmatranog elementa će biti:

$$G(r_3, z_3) \equiv G_3, \quad G(r_4, z_4) \equiv G_4 \quad (5.2.101)$$

i brzine na granici će biti određene relacijama:

$$\begin{aligned}
 u_3 &= G_3 u_{12} = G_3/2(u_1 + u_2) = A(u_1 + u_2) \\
 v_3 &= G_3 v_{12} = G_3/2(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) \\
 u_4 &= G_4 u_{12} = G_4/2(u_1 + u_2) = B(u_1 + u_2) \\
 v_4 &= G_4 v_{12} = G_4/2(v_1 + v_2) = B(v_1 + v_2)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.1o2}$$

gdje je označeno:

$$A \equiv G_3/2, \quad B \equiv G_4/2 \tag{5.2.1o3}$$

To znači da će funkcional disipacije energije za razmatrani element zavisiti ne od osam, već od četiri promjenljive:

$$\Phi \equiv \Phi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3(u_1, u_2), v_3(v_1, v_2), u_4(u_1, u_2), v_4(v_1, v_2)) \tag{5.2.1o4}$$

Redukciju treba izvršiti iz prostora sa osam stepeni slobode u prostor sa četiri stepena slobode. Redukuje se prvo, prvi izvod funkcionala Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_\alpha} = \frac{\partial v_\beta}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial v_\beta} = R_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial v_\beta} \tag{5.2.1o5}$$

gdje su: w_α - stepeni slobode u redukovanom prostoru: $\alpha = 1, \dots, 4$

v_β - stepeni slobode u potpunom prostoru: $\beta = 1, \dots, 8$

Na osnovu relacija (5.2.1o4) i (5.2.1o2) će biti:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{du_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial u_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_4} \frac{\partial u_4}{\partial u_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + A \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} + B \frac{\partial \Phi}{\partial u_4} \\
 \frac{d\Phi}{dv_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \frac{\partial v_3}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + A \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} + B \frac{\partial \Phi}{\partial v_4} \\
 \frac{d\Phi}{du_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial u_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_4} \frac{\partial u_4}{\partial u_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + A \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} + B \frac{\partial \Phi}{\partial u_4} \\
 \frac{d\Phi}{dv_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \frac{\partial v_3}{\partial v_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + A \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} + B \frac{\partial \Phi}{\partial v_4}
 \end{aligned}
 \tag{5.2.1o6}$$

Relacija (5.2.106) se može zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\phi}{du_1} \\ \frac{d\phi}{dv_1} \\ \frac{d\phi}{du_2} \\ \frac{d\phi}{dv_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \partial\phi/\partial u_1 \\ \partial\phi/\partial v_1 \\ \partial\phi/\partial u_2 \\ \partial\phi/\partial v_2 \\ \partial\phi/\partial u_3 \\ \partial\phi/\partial v_3 \\ \partial\phi/\partial u_4 \\ \partial\phi/\partial v_4 \end{vmatrix} \quad (5.2.107)$$

čime je definisana matrica redukcije $R_{\alpha \beta}$, kojom se vrši redukcija slobodnih članova matrične jednačine elementa. Za druge izvode relacija redukcije ima oblik:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_k \partial w_l} = \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_l} \right) = \frac{\partial v_\alpha}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_l} \right) \quad (5.2.108)$$

Zamjenom (5.2.105) u (5.2.108) se dobija:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_k \partial w_l} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial w_l} \right) \quad (5.2.109)$$

Uzimajući u obzir uslov da je veza linijska, tj. $\partial v_\beta / \partial w_l = \text{const}$ dobija se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_k \partial w_l} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_\beta} \right) \frac{\partial v_\beta}{\partial w_l} \quad (5.2.110)$$

gdje za razmatrani primjer: $k=1, \dots, 4$; $l=1, \dots, 4$; $\alpha=1, \dots, 8$; $\beta=1, \dots, 8$.

Analogno (5.2.105) relacija (5.2.110) može biti zapisana u skraćenoj formi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_k \partial w_l} = R_{k\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} (R_{l\beta})^T \quad (5.2.111)$$

Jednačina (5.2.111) definiše način redukcije matrice krutosti elementa iz potpunog u redukovani prostor. Sličan postupak je urađen i za ostale uočene elemente deformacionog tijela. Definisana je dimenzija redukovanog prostora, veze izmedju stepeni slobode potpunog i redukovanog prostora, a potom je odredjivana matrica redukcije. Rezultati su dati u Prilogu 5.

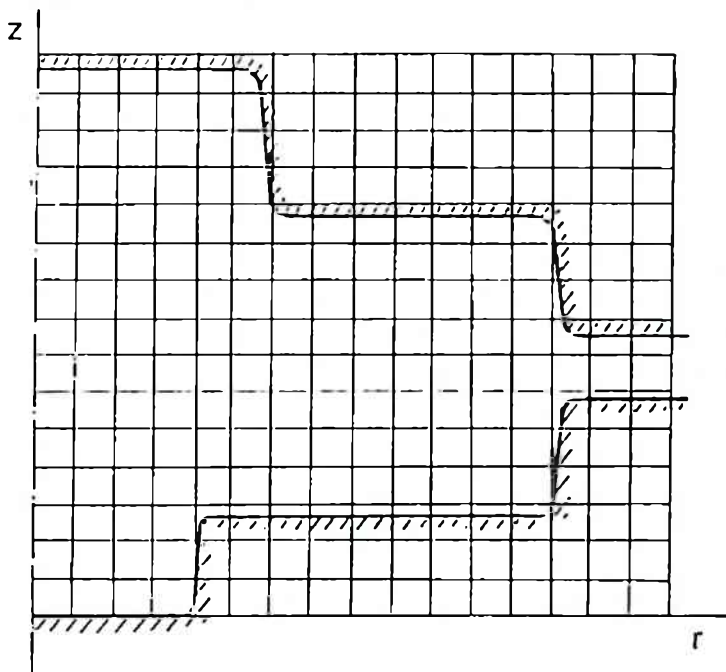
5.3. ODREDJIVANJE SFERNIH NAPONA I POČETNIH BRZINA ZA PLASTIČNO DEFORMISANO TIJELO

Saglasno izloženom (odjeljak 5.1) za određivanje sfernih napona, u prvom približenju, za neko tijelo zapremine V i površine S koristi se jednačina Laplasa. Ovaj uslov će za osnosimetrično tijelo zadano u koordinatnom sistemu r - z imati oblik:

$$\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5.3.1)$$

sa graničnim uslovima: $p(r, z)|_S = p(s)$

gdje je $p(s)$ funkcija zadana na granici S .

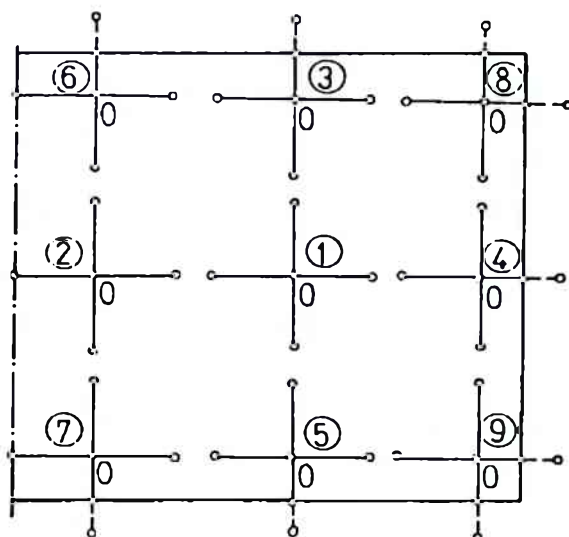


Sl.5.3.1. Osnosimetrično tijelo sa nepokretnom mrežom

Radijalni presjek tijela je pokriven nepokretnom mrežom, pri čemu u principu granica presjeka prolazi mimo čvorova mreže. Oblasti S pripada i osa tijela sa koordinatom $r=0$. Iz (5.3.1) je očigledno da pri uslovu $r \rightarrow 0$ treba da je ispunjen uslov regularnosti:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{za} \quad r = 0 \quad (5.3.2)$$

Na (sl.5.3.2) su prikazani mogući slučajevi razmještaja čvorova koji se daju uočiti unutar presjeka tijela, kao i na njegovoj granici:

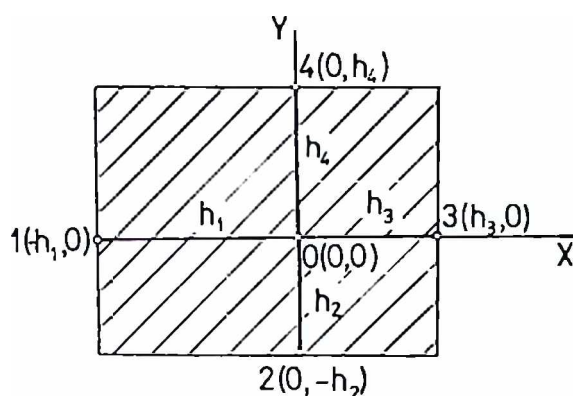


Sl.5.3.2. Mogući razmještaji čvorova tijela u odnosu na čvor 0.

- čvor 0 mreže (r, z) zajedno sa svojim susjednim čvorovima leži unutar oblasti V (sl.5.3.2 - 1).;
- čvor 0 mreže (r, z) leži na osi $r=0$, ili oko ose na rastojanju koraka mreže. Vrijednosti pritiska u ovim tačkama su jednake (sl.5.3.2 - 2);
- čvor 0 mreže (r, z) se nalazi u blizini granice i to tako da je jedan njegov neposredni susjed smješten na granici na rastojanju manjem od koraka mreže (sl.5.3.2 - 3, 4, 5);
- čvor 0 mreže (r, z) se nalazi na rastojanju koraka mreže od ose, a njegovi neposredni susjedi bilo sa gornje ili sa donje strane se nalaze na granici na rastojanju manjem od koraka mreže (sl.5.3.2 - 6, 7);
- čvor 0 mreže (r, z) se nalazi blizu granice i dva njegova neposredna susjeda leže na rastojanjima manjim od koraka mreže (sl.5.3.2 - 8, 9).

U daljem radu diferencijalna jednačina Laplasa biće rešavana po metodu konačnih razlika, pri čemu se razmatraju istaknuti različiti slučajevi. Radi opštosti prilaza razmatra se "krst" sa različitim vrijednostima koraka: h_1 , h_2 , h_3 i h_4 (sl.5.3.3.). U cilju pojednostavljenja problema u početku se razmatra ravanski slučaj deformisanja sa koordinatnim sistemom (x, y) .

Na ovakvoj mreži se može po Lagranžu postaviti interpolacioni polinom, pomoću kojeg se sferni napon $p(x, y)$ u proizvoljnoj tački (x, y) okoline tačke 0, može izraziti preko vrijednosti ove funkcije p_0, p_1, p_2, p_3 i p_4 u čvorovima 0, 1, 2, 3, 4:



Sl.5.3.3. Opšti slučaj razmještaja susjeda 1,2,3,4 čvora 0 na razmatranoj mreži i pravougaonoj okolini $(h_1+h_3) \times (h_2+h_4)$

$$p(x,y) = -p_0 \left[\frac{(x+h_1)(x-h_3)}{h_1 h_3} + \frac{(y-h_4)(y+h_2)}{h_4 h_2} \right] + p_1 \frac{x(x-h_3)}{h_1(h_1+h_3)} +$$

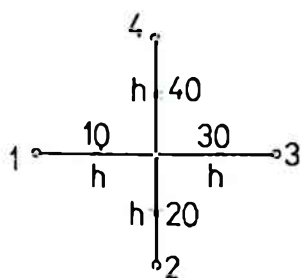
$$+ p_2 \frac{(y-h_4)y}{h_2(h_2+h_4)} + p_3 \frac{x(x+h_1)}{h_3(h_1+h_3)} + p_4 \frac{y(y+h_2)}{h_4(h_4+h_2)} \quad (5.3.3)$$

Diferenciranjem se iz (5.3.3) može dobiti sljedeći izraz za Laplasijan:

$$\Delta p(x,y) = -p_0 \left[\frac{2}{h_1 h_3} + \frac{2}{h_4 h_2} \right] + p_1 \frac{2}{h_1(h_1+h_3)} + p_2 \frac{2}{h_2(h_2+h_4)} +$$

$$+ p_3 \frac{2}{h_3(h_1+h_3)} + p_4 \frac{2}{h_4(h_4+h_2)} \quad (5.3.4)$$

Iz (5.3.4) se vidi da je izraz za Laplasijan u pravougaonoj okolini čvora 0, pri aproksimaciji funkcije $p(x,y)$ polinom Lagranža (5.3.3), konstanta. Formula za Laplasijan, za slučaj ravnomjerne mreže, može biti dobijena saglasno (sl.5.3.4)



Sl.5.3.4. Odredjivanje Δp za slučaj ravnomjerne mreže.

Parcijalni izvodi će biti:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{10} = \frac{p_0 - p_1}{h_0}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{30} = \frac{p_3 - p_0}{h}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{20} = \frac{p_0 - p_2}{h}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{40} = \frac{p_4 - p_0}{h}$$

(5.3.5)

Tada će u centralnoj tački biti:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{30} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{10} \right] = \frac{p_3 - p_1}{2h}$$

(5.3.6)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{20} + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{40} \right] = \frac{p_4 - p_2}{2h}$$

Drugi izvodi će biti:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{30} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{10} \right] = \frac{p_1 - 2p_0 + p_3}{h^2}$$

(5.3.7)

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{40} - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{20} \right] = \frac{p_4 - 2p_0 + p_2}{h^2}$$

Na osnovu (5.3.7) može se napisati izraz za Laplasijan:

$$\Delta p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4p_0}{h^2}$$

(5.3.8)

Relaciju (5.3.8) je moguće dobiti iz (5.3.4) uz uslov $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$. Za osnosimetrični slučaj deformisanja prema (5.3.1) koristeći prvu iz relacija (5.3.6) i relacije (5.3.7) dobija se Laplasijan u obliku:

$$\Delta p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4p_0}{h^2} + \frac{1}{2hr} (p_3 - p_1)$$

(5.3.9)

To znači da će sferni napon u tački 0 kvadratne mreže koja sa svojim susjedima pripada oblasti V (sl.5.3.2 - 1) biti:

$$p_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} + \frac{h}{8r} (p_3 - p_1)$$

(5.3.10)

Za tačke na osi, uzimajući u obzir uslov (5.3.2), može se dobiti:

$$p_1 = p_0 = \frac{2}{7} p_2 + \frac{3}{7} p_3 + \frac{2}{7} p_4$$

(5.3.11)

Ako se uzme u obzir odstupanje od h jednog kraka krsta nepokretne mreže, mogu se dobiti izrazi za sferni napon za slučajeve 3, 4 i 5 (sl.5.3.2) sukcesivno:

$$p_o = \left[\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2hr} \right) p_1 + \frac{2}{h(h+h_4)} p_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2hr} \right) p_3 + \frac{2p_4}{h_4(h_4+h)} \right] / \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{hh_4} \right) \quad (5.3.12)$$

$$p_o = \left[\left(\frac{2}{h(h+h_3)} - \frac{h_3}{rh(h+h_3)} \right) p_1 + \frac{1}{h^2} p_2 + \left(\frac{2}{h_3(h_3+h)} + \frac{h}{rh_3(h_3+h)} \right) p_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{h^2} p_4 \right] / \left(\frac{2+h-h_3}{rhh_3} + \frac{2}{h^2} \right) \quad (5.3.13)$$

$$p_o = \left[\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2hr} \right) p_1 + \frac{2}{(h_2+h)h_2} p_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2hr} \right) p_3 + \frac{2}{h(h+h_2)} p_4 \right] / \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{hh_2} \right) \quad (5.3.14)$$

Za istovremene osne i granične tačke 6 i 7 (sl.5.3.2) će biti:

$$p_o = \left[\frac{2}{h(h+h_4)} p_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2hr} \right) p_3 + \frac{2}{h_4(h+h_4)} p_4 \right] / \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h_4h} + \frac{1}{2hr} \right) \quad (5.3.15)$$

$$p_o = \left[\frac{2}{h_2(h_2+h)} p_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2hr} \right) p_3 + \frac{2}{h(h+h_2)} p_4 \right] / \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h_2h} + \frac{1}{2hr} \right) \quad (5.3.16)$$

Konačno, izrazi za sferni napon za tačku 0, čija dva kraka odgovarajućeg "krsta" su manja od koraka mreže imajuće oblik (sl.5.3.2 - 8, 9):

$$p_o = \left[\left(\frac{2}{h(h+h_3)} - \frac{h_3}{rh(h+h_3)} \right) p_1 + \frac{2}{(h+h_4)h} p_2 + \left(\frac{2}{h_3(h_3+h)} + \frac{h}{r(h+h_3)h_3} \right) p_3 + \right. \\ \left. + \frac{2}{h_4(h_4+h)} p_4 \right] / \left(\frac{2}{hh_3} + \frac{2}{hh_4} + \frac{h-h_3}{rhh_3} \right) \quad (5.3.17)$$

$$p_o = \left[\left(\frac{2}{h(h+h_3)} - \frac{h_3}{rh(h+h_3)} \right) p_1 + \frac{2}{(h_2+h)h_2} p_2 + \left(\frac{2}{h_3(h_3+h)} + \frac{h}{r(h+h_3)h_3} \right) p_3 + \right. \\ \left. + \frac{2}{h(h+h_2)} p_4 \right] / \left(\frac{2}{h_3h} + \frac{2}{h_2h} + \frac{h-h_3}{rhh_3} \right) \quad (5.3.18)$$

Radi brže konvergencije ispitivanog procesa vrlo je važno odabrati polje brzina što bliže stvarnom. Smatrajući tijelo vrlo viskoznom tečnošću iz jednačina Navie-Stoksa se može dobiti zavisnost:

$$\vec{v} = -A \text{ grad } p \quad (5.3.19)$$

gdje je A - konstanta koja se može odrediti iz graničnih uslova. Da bi se odredile vrijednosti komponenata brzine neophodno je odrediti grad p . U tom cilju koristi se relacija (5.3.3), iz koje slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 &= -\frac{h_1-h_3}{h_1 h_3} p_0 - \frac{h_3}{h_1(h_1+h_3)} p_1 + \frac{h_1}{h_3(h_1+h_3)} p_3 \\ \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 &= -\frac{h_4}{h_2(h_2+h_4)} p_2 + \frac{h_2}{h_4(h_4+h_2)} p_4 - \frac{h_2-h_4}{h_4 h_2} p_0 \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Za slučajeve razmatrane na (sl.5.3.2) dobijaju se sljedeći izrazi:

$$1 : \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_3-p_1}{2h}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_4-p_2}{2h} \quad (5.3.21)$$

$$2 : \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_4-p_2}{2h} \quad (5.3.22)$$

$$3 : \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_3-p_1}{2h}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{h}{h_4(h_4+h)} p_4 - \frac{h_4}{h(h+h_4)} p_2 - \frac{h-h_4}{hh_4} p_0 \quad (5.3.23)$$

$$4 : \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{h-h_3}{hh_3} p_0 - \frac{h_3}{h(h+h_3)} p_1 + \frac{h}{h_3(h+h_3)} p_3; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_4-p_2}{2h} \quad (5.3.24)$$

$$5 : \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_3-p_1}{2h}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{h}{h_2(h_2+h)} p_2 + \frac{h_2}{h(h+h_2)} p_4 - \frac{h_2-h}{h_2 h} p_0 \quad (5.3.25)$$

$$6 : \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{h_4}{h(h+h_4)} p_2 + \frac{h}{h_4(h+h_4)} p_4 - \frac{h-h_4}{hh_4} p_0 \quad (5.3.26)$$

$$7 : \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{h}{h_2(h_2+h)} p_2 + \frac{h_2}{h(h+h_2)} p_4 - \frac{h_2-h}{h_2 h} p_0 \quad (5.3.27)$$

$$\begin{aligned} 8 : \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{h-h_3}{hh_3} p_0 - \frac{h_3}{h(h+h_3)} p_1 + \frac{h}{h_3(h+h_3)} p_3; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{h_4}{h(h+h_4)} p_2 + \frac{h}{h_4(h+h_4)} p_4 - \frac{h-h_4}{hh_4} p_0 \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

$$\begin{aligned} 9 : \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{h-h_3}{hh_3} p_0 - \frac{h_3}{h(h+h_3)} p_1 + \frac{h}{h_3(h+h_3)} p_3; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{h}{h_2(h_2+h)} p_2 + \frac{h_2}{h(h+h_2)} p_4 - \frac{h_2-h}{hh_2} p_0 \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

To znači da pri rješavanju zadatka postavljenog jednačinama (5.3.1) i (5.3.2) postupka se na sljedeći način:

- na mreži (i,j) zadaje se prvobitno približenje polju sfernih napona $p(i,j)$;
- po formulama (5.3.10) za unutrašnje tačke, (5.3.11) za tačke na osi, (5.3.12) - (5.3.18) za tačke na granici, računaju se sljedeća približenja u stvarnom polju sfernih napona;
- u cilju kontrole konvergencije potrebno je obrazovati razlike između vrijednosti u uzastopnim iteracijama u svakoj tački i prekratiti postupak za slučaj konvergencije procesa;
- zatim se u cilju određivanja polja brzina određuje polje gradijenata pritiska (5.3.21) - (5.3.29) i normira se po poznatoj brzini kalupa.

Analogno temperaturi i polje sfernih napona se može tretirati kao dinamičko, tj. može se posmatrati jednačina:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p \quad (5.3.30)$$

gdje pri $t \rightarrow \infty$ i $\Delta p \rightarrow 0$. To znači da polje pritiska može biti dobijeno iz jednačine $\Delta p = 0$ ili se pak može posmatrati kao granica kojoj teži rješenje jednačine (5.3.30). Iz (5.3.1) i (5.3.30) slijedi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5.3.31)$$

Diskretizacija (5.3.31) na osnovu metoda konačnih razlika za tačke unutar tijela daje:

$$\frac{p_o^* - p_o}{\tau} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{h^2} + \frac{1}{2rh}(p_3 - p_1) - \frac{4p_o}{h^2} \quad (5.3.32)$$

gdje su: τ - konstanta relaksacije, p_o^* - sferni napon u sljedećoj iteraciji.

Na osnovu (5.3.32) se može odrediti p u (n+1) iteraciji:

$$p_o^{(n+1)} = \left(1 - \frac{4\tau}{h^2}\right) p_o^{(n)} + \frac{\tau}{h^2} (p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + p_3^{(n)} + p_4^{(n)}) + \frac{\tau}{2rh} (p_3^{(n)} - p_1^{(n)}) \quad (5.3.33)$$

Ako se definiše $\alpha = \tau/h^2$ - konstanta relaksacije ($\alpha < 1$) izraz (5.3.33) se može zapisati u rekurzivnom obliku:

$$p_{i,j}^{(n+1)} = (1 - 4\alpha) p_{i,j}^{(n)} + \alpha (p_{i-1,j}^{(n)} + p_{i,j-1}^{(n)} + p_{i+1,j}^{(n)} + p_{i,j+1}^{(n)}) + \frac{\tau}{2rh} (p_{i+1,j}^{(n)} - p_{i-1,j}^{(n)}) \quad (5.3.34)$$

Za tačke na osi $r=0$ i susjedne sa osom $r=h$ iz (5.3.32) se dobija:

$$p_o^* = (1 - 4\frac{\tau}{h^2} + \frac{\tau}{h^2} - \frac{\tau}{2h^2}) p_o + \frac{\tau}{h^2} (p_2 + p_4) + \frac{3\tau}{2h^2} p_3 \quad (5.3.35)$$

te će rekurzivna formula analogno (5.3.34) imati oblik:

$$p_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \frac{7}{2}\alpha) p_{i,j}^{(n)} + \alpha (p_{i,j-1}^{(n)} + p_{i,j+1}^{(n)}) + \frac{3}{2}\alpha p_{i+1,j}^{(n)} \quad (5.3.36)$$

5.4. ODREDJIVANJE TEMPERATURNOG POLJA DEFORMISANOG TIJELA

Postavka zadatka za odredjivanje temperaturnog polja je slična zadatku za odredjivanje polja sfernih napona. Diferencijalna jednačina za odredjivanje temperature je po formi analogna jednačini za pritisak. Jednačina toploprovodnosti prilagodjena za neposrednu primjenu saglasno (4.5.13) može biti zapisana u obliku:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + q \quad (5.4.1)$$

gdje su: t' - realno vrijeme, $t = \lambda / ct'$ - bezdimenziono vrijeme, $q = Q / \lambda$ - odnos rada plastične deformacije i koeficijenta toploprovodnosti.

Može se iskoristiti numerički postupak odredjivanja polja temperatura

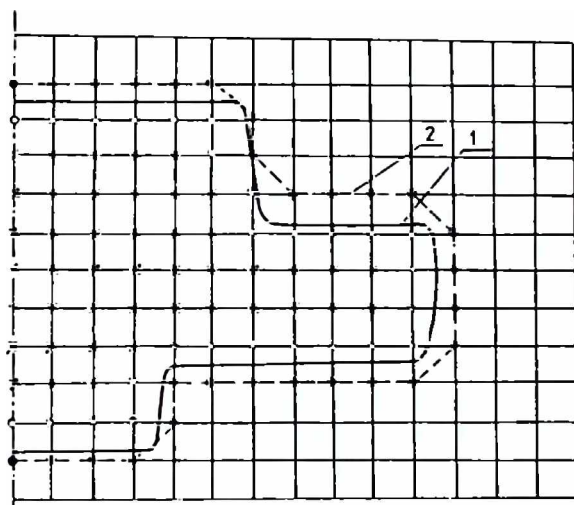
$T_{ij}(t' + \Delta t')$ prema početnom polju temperature $T_{ij}(t')$ i medjupolju $T_{ij}(t' + \Delta t'/2)$, analogno (4.5.30). Prema (5.3.9), zapis (5.4.1), pomoću metode konačnih razlika za tačke unutar tijela (sl.5.3.2 - 1) će imati oblik:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_o}{h^2} + \frac{1}{2hr} (T_3 - T_1) + q \quad (5.4.2)$$

Za unutrašnje tačke na osi i na rastojanju koraka od ose (sl.5.3.2 - 2) će biti:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o = \frac{T_2 + T_3 + T_4 - 3T_o}{h^2} + \frac{1}{2hr}(T_3 - T_o) + q \quad (5.4.3)$$

Korišćenjem odgovarajućih izraza za pritiske i relacije (5.4.1) mogu biti zapisane analogne relacije za granične tačke označene na (sl.5.3.2) kodovima 3 - 9. U ovim relacijama su očigledno neodredjene tačke na granici. U cilju jasnog definisanja problema tačke unutar tijela su označene x, tačke na granici čija susjedna tačka ne pripada tijelu su označene sa 0, dok ● su označene tačke van tijela u kojima je potrebno odrediti temperature T_o , s obzirom da one ulaze u sastav jednačina toploprovodnosti (s.5.4.1)



Sl.5.4.1. Temperaturna analiza: 1 - granica tijela; 2 - granica ekstrapolirane temperature; x - tačke unutar tijela; o - granične tačke; ● - ekstrapolirane tačke.

Najprostije je pretpostaviti da je $T_o = T_o$ što odgovara pretpostavci o isčezavanju na granici gradijenta temperature, a time toplotnog odvoda kroz prigraničnu oblast. Prihvatljivost ovakve pretpostavke zavisi od razmatranog problema. Ona očigledno ne može važiti za slučaj zagrijavanja priprema u peći, jer je u tom slučaju $T_o > T_o$ i toplota dopijeva u tijelo kroz prigraničnu oblast.

U cilju strožijeg odredjivanja temperature T_o može se koristiti postupak ekstrapolacije temperature na granici, i to, kako za slučaj zagrijavanja

hladnog priprema u peći, tako i deformisanja priprema na presi. Na (sl.5.4.2-a) je prikazana situacija pri zagrijavanju hladnog priprema toplim gasom T_G u okolini nekog para tačka o - ●. Protok toplote gasa u pripremak će biti:

$$J = \alpha (T_G - T_p(o)) \quad (5.4.4)$$

Isti protok kroz pripremak će biti:

$$J = -\lambda_p \frac{dT_p(x)}{dx} \quad (5.4.5)$$

gdje su T_G - temperatura gasa; T_p - temperatura priprema.

Izjednačavanjem (5.4.4) i (5.4.5) se dobija diferencijalna jednačina:

$$-\lambda_p \frac{dT_p(x)}{dx} = \alpha (T_G - T_p(o)) \quad (5.4.6)$$

Pretpostavlja se linijski karakter $T_p(x)$ (sl.5.4.2-a):

$$T_p(x) = A + Bx \quad (5.4.7)$$

Pri graničnom uslovu $T_p(o) = A$ će biti:

$$T_p(x) = T_p(o) - \frac{\alpha}{\lambda_p} (T_G - T_p(o)) x \quad (5.4.8)$$

gdje je λ_p - toploprovodnost priprema.

Za slučaj $T_p(x) = T_G$ će biti:

$$t = \lambda_p / \alpha \quad (5.4.9)$$

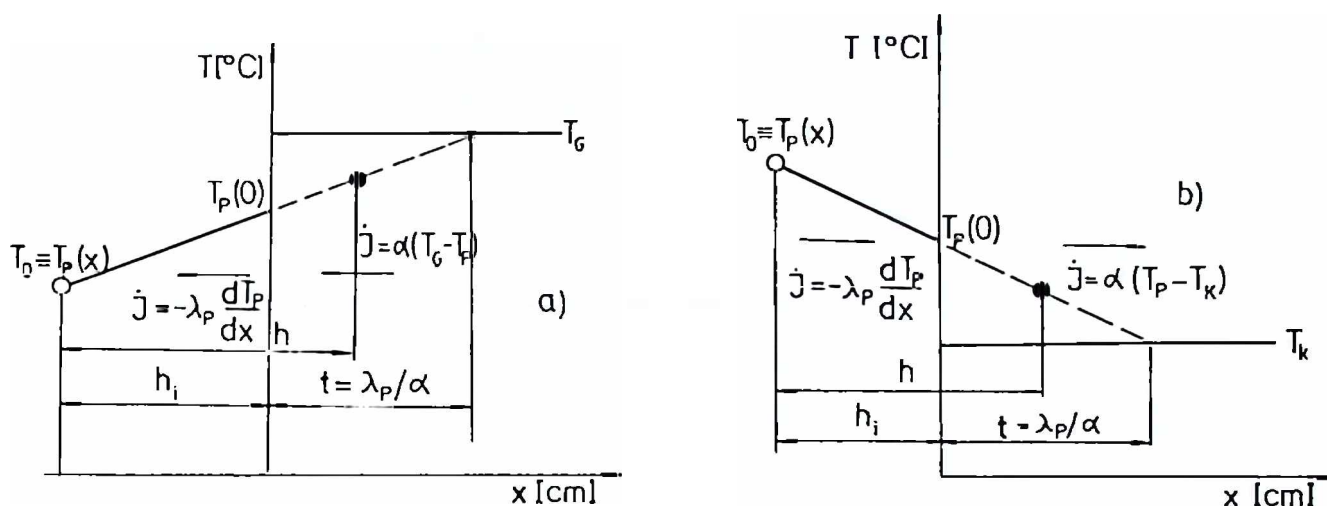
što odgovara tački ekstrapolacije.

Sa (sl.5.4.2-a) se može postaviti proporcija iz koje slijedi:

$$T_{\bullet} = T_p + \frac{h}{t+h_i} (T_G - T_p) \quad (5.4.10)$$

To znači da se na nepokretnoj mreži dopunjenoj ekstrapoliranim tačkama može ostvariti proračun procesa zagrijavanja u početku hladnog priprema.

Time je omogućeno nalaženje početnog rasporeda temperatura po tijelu pripremka, što je vrlo važno zbog teškoće njegovog eksperimentalnog identifikovanja.



Sl.5.4.2. Toplotna situacija na granici:

- a) zagrijavanje priprema u peći;
- b) deformisanje zagrijanog priprema na presi.

Poslije početka procesa deformisanja u tijelu priprema intenzivno se izdva-
ja toplota na račun rada plastične deformacije. Ovo uslovljava jaku izmjenu
početnog rasporeda temperatura. Polje temperature deformisanog priprema
ima posebno veliki uticaj na intenzivnost napona. Za razliku od prethodnog
slučaja zagrijavanja nedeformisanog priprema ovdje će biti $q \neq 0$. Što se tiče
graničnog uslova, grubo se može pretpostaviti da je pripremak okružen adi-
jabatskom "košuljom" tj. $T_{\bullet} = T_o$. Ova analiza je uobičajena za teoriju u kojoj
se ispituje karakter izmjene temperature pri toploj obradi deformisanjem[155].
Ovaj uslov je dovoljan da se toplotni zadatak postavi kao korektni zadatak
matematičke fizike koji se rješava na nepokretnoj mreži.

Pri strožijem pristupu neophodno je uzeti u obzir gubljenje toplote priprema
na račun odavanja kalupu pri poznatom koeficijentu α . Ovdje je kalup hla-
dniji od priprema koji se obično grije do veće temperature, a i zagrijava na
račun plastične deformacije te je $T_k < T_{\bullet}$ (sl.5.4.2 - b). U drugome je situa-
cija slična onoj izloženoj na (sl.5.4.2 - a), te se može dobiti relacija analogna

(5.4.10) u obliku:

$$T_{\bullet} = T_p - \frac{h}{t+h_i}(T_p - T_k) \quad (5.4.11)$$

To znači da je određivanje temperaturnog polja moguće izvršiti u dvije faze:

- odredi se početno temperaturno polje priprema koji se zagrijava u peći. Za unutrašnje tačke se koriste formule (5.4.2) i (5.4.3), a za tačke na granici formula (5.4.2) u kojoj se tačke koje izlaze za granicom tijela određuju formulom (5.4.10). Uzima se $q=0$;
- određuje se polje temperature deformisanog priprema pri čemu se za unutrašnje tačke koriste formule (5.4.2) i (5.4.3), a za tačke na granici formula (5.4.2) u kojoj se tačke koje se nalaze iza granice tijela određuju formulom (5.4.11). Rad deformacije je $q \neq 0$.



6. EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA

Eksperimentalna istraživanja se odnose na osnosimetrične uzorke (sl.6.1.2) koji se dobijaju presovanjem u otvorenim kalupima i tokom cijelog rada, stani su predmet našeg interesovanja. Korišćenjem modernog višefaktornog matematičkog plana eksperimenta, izučavan je uticaj karakterističnih geometrijskih odnosa kalupa, prečnika priprema i količine metala u vijencu na definisane izlazne veličine procesa. Takođe, na osnovu izloženih teorijskih postavki (glava 2) uz primjenu računara određena je zona intenzivnog tečenja u fazi dopresovanja.

6.1. USLOVI I PLAN IZVODJENJA EKSPERIMENTA

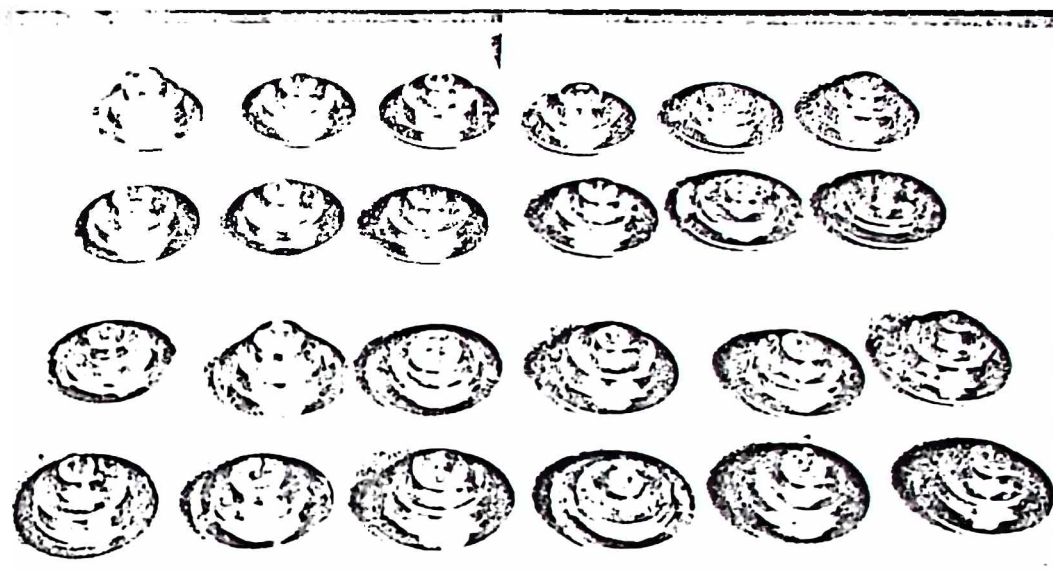
Kao eksperimentalni materijal korišćeno je olovo. Materijal se prvo topio, a zatim je liven u kalupu i istosmjerno istiskivan sa ciljem dobijanja različitih prečnika epruveta. Tako dobijene epruvete su na testeri rezane na određene veličine a potom tačno obradljivane na strugu. Nakon toga, pripremi su presovani u otvorenim kalupima. Proces je diskretno praćen, prekidanjem i mjerenjem geometrije postupno deformisanih uzoraka. Ovaj postupak je ponovljen za sve slučajeve geometrijskih kombinacija gornjeg kalupa, različite prečnike priprema i različite količine materijala u vijencu i obezbjeđivao je informacije o karakteru tečenja eksperimentalnog materijala u diskretno uočenim trenucima procesa. Na (sl.6.1.1) je prikazana jedna serija deformisanih uzoraka. U Prilogu 7 su date fotografije opreme, alata za livenje, istiskivanje i presovanje u otvorenim kalupima kao i dobijenih uzoraka.

Kao nezavisno promjenljivi parametri su definisani (sl.6.1.2):

- a/b - odnos radijusa izraženog dijela šupljine kalupa i njegovog osnovnog radijusa;
- i/b - odnos visine izraženog dijela šupljine kalupa i njegovog osnovnog radijusa;
- j/b - odnos osnovnih, visine i radijusa kalupa;

D_o/b - odnos prečnika priprema i osnovnog radijusa kalupa;

x - odnos zapremine metala u vijencu i pripadnom cilindru na osnovnom krugu.



Sl.6.1.1. Izgled deformisanih uzoraka

U tabeli 6.1.1. su date vrijednosti nezavisno promjenljivih parametara, koje definišu ispitivani petodimenzioni hiperprostor. Donji kalup je imao srednje vrijednosti odgovarajućih geometrijskih odnosa i tokom ispitivanja se nije mijenjao.

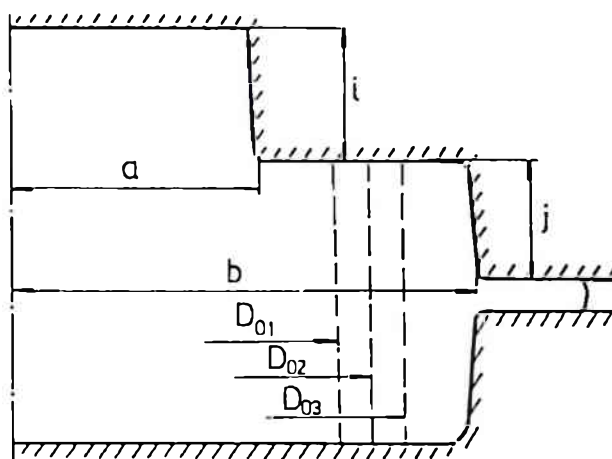
Tabela 6.1.1. Vrijednosti parametara presovanja

Parametar	Gornji nivo	Donji nivo	Srednji nivo
a/b	0,6	0,4	0,49
j/b	0,7	0,3	0,46
i/b	0,6	0,4	0,49
D_o/b	1,8	1,5	1,65
x	1	0,3	0,55

Preliminarnim eksperimentima je utvrđeno da se zavisno promjenljive veličine (izlazi eksperimenta) mogu prikazati u stepenom obliku:

$$F_j = p_o \prod_{i=1}^n (f_i)^{p_i} \quad (6.1.1)$$

gdje su: F_j - razmatrana izlazna veličina eksperimenta definisana u vidu stepene funkcije uticajnih nezavisno promjenljivih veličina; f_i - više definisana, nezavisno promjenljiva veličina; n - broj nezavisno promjenljivih veličina čiji uticaj se izučava (maksimalno je razmatrano 5).



Sl.6.1.2. Šematski prikaz kalupa

Za slučaj razmatranja uticaja tri nezavisno promjenljive veličine, relacija (6.1.1) će imati oblik:

$$F_j = p_0 f_1^{p_1} f_2^{p_2} f_3^{p_3} \quad (6.1.2)$$

Ako se uzme u obzir efekat medjudejstva faktora jednačina (6.1.2) poprima formu:

$$F_j = p_0 f_1^{p_1+p_{13} \ln f_3} f_2^{p_2+p_{12} \ln f_1} f_3^{p_3+p_{23} \ln f_2} f_1^{p_{123} \ln f_2 \ln f_3} \quad (6.1.3)$$

Relacija (6.1.3) omogućava da se sagleda uticaj ne samo pojedinačnih faktora na izlaznu veličinu nego i uticaj njihove sprege sa drugim faktorima.

Proračun koeficijenata modelskih funkcija pojednostavljuje se kodiranjem novih nezavisno promjenljivih veličina (faktora) x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 na tri nivoa (+1, 0, -1) pomoću jednačina transformacije:

$$x_i = 1+2 \frac{\ln f_i - \ln f_{i \max}}{\ln f_{i \max} - \ln f_{i \min}} \quad (6.1.4)$$

Potpuna ortogonalna matrica $N=2^n$ plana, višefaktornog eksperimenta do $n=5$, ima oblik prikazan tabelom 6.1.2.

Tabela 6.1.2. Potpuna ortogonalna plan-matrica dvonivovskog faktornog eksperimenta

Broj eksperimenta $N=2^n$	Kodirane vrijednosti faktora					Odziv F_{ji}
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	-1	-1	-1	-1	F_{j1}
2	+1	-1	-1	-1	-1	F_{j2}
3	-1	+1	-1	-1	-1	F_{j3}
4	+1	+1	-1	-1	-1	F_{j4}
5	-1	-1	+1	-1	-1	F_{j5}
6	+1	-1	+1	-1	-1	F_{j6}
7	-1	+1	+1	-1	-1	F_{j7}
8	+1	+1	+1	-1	-1	F_{j8}
9	-1	-1	-1	+1	-1	F_{j9}
10	+1	-1	-1	+1	-1	F_{j10}
11	-1	+1	-1	+1	-1	F_{j11}
12	+1	+1	-1	+1	-1	F_{j12}
13	-1	-1	+1	+1	-1	F_{j13}
14	+1	-1	+1	+1	-1	F_{j14}
15	-1	+1	+1	+1	-1	F_{j15}
16	+1	+1	+1	+1	-1	F_{j16}
17	-1	-1	-1	-1	+1	F_{j17}
18	+1	-1	-1	-1	+1	F_{j18}
19	-1	+1	-1	-1	+1	F_{j19}
20	+1	+1	-1	-1	+1	F_{j20}
21	-1	-1	+1	-1	+1	F_{j21}
22	+1	-1	+1	-1	+1	F_{j22}
23	-1	+1	+1	-1	+1	F_{j23}
24	+1	+1	+1	-1	+1	F_{j24}
25	-1	-1	-1	+1	+1	F_{j25}
26	+1	-1	-1	+1	+1	F_{j26}
27	-1	+1	-1	+1	+1	F_{j27}
28	+1	+1	-1	+1	+1	F_{j28}
29	-1	-1	+1	+1	+1	F_{j29}
30	+1	-1	+1	+1	+1	F_{j30}
31	-1	+1	+1	+1	+1	F_{j31}
32	+1	+1	+1	+1	+1	F_{j32}

U plan-matrici su linijama ograničene matrice koje pripadaju dvofaktornom, trofaktornom, četvorofaktornom i petofaktornom eksperimentu respektivno. Ako je u toku eksperimenta potrebno proširiti eksperimente, uzimanjem u obzir više faktora, prethodni čine dio nove matrice. Odziv F_{ji} predstavlja eksperimentalne vrijednosti dobijene pri određenoj kombinaciji faktora iz ove plan-matrice.

U Prilogu 8 je dat niz programa primjenom kojih je vršena na računaru matematička obrada eksperimentalnih rezultata. Uradjeni su programi za dvofaktorni (sa i bez medjuzavisnosti), trofaktorni (sa i bez medjuzavisnosti), četvorofaktorni i petofaktorni plan eksperimenta.

6.2. POVEZANOST SILE I GEOMETRIJE VIJENCA KOD PRESOVANJA

Istaknuta diskretizacija procesa presovanja u otvorenim kalupima omogućava da se za sve slučajeve presovanja mogu izmjeriti tri vrijednosti: F, h, s (sila presovanja, visina vijenca i širina vijenca) po fazama deformisanja. U cilju dalje analize procesa veoma je bitno na osnovu diskretnih dobiti kontinualne zavisnosti mjerenih veličina.

Na osnovu preliminarne istraživanja pretpostavljene su hiperbolične zavisnosti sile presovanja i visine vijenca $F=F(h)$ kao i otpora vijenca (odnos širine i visine vijenca) i njegove visine $z=z(h)$. Sa visokim stepenom korelacije ($\rho > 0,985$) dobijene su zavisnosti:

$$F = a_1 h^{-b_1}, \quad z = a_2 h^{-b_2} \quad (6.2.1)$$

gdje su: a_1, b_1, a_2 i b_2 – pozitivne konstante.

Posebno je važna i zavisnost $F=F(z)$ koja daje oblik proporcionalnosti sile i otpora vijenca. Ova zavisnost, takodje sa visokim stepenom korelacije, ima oblik:

$$F = a_3 z^{b_3} \quad (6.2.2)$$

gdje su: a_3 i b_3 - pozitivne konstante.

Na osnovu teorijskih postavki o metodi najmanjih kvadrata napravljen je program kojim se obrađuju eksperimentalne informacije za slučaj pretpostavljenih oblika zavisnosti (Prilog 9). Za svaki slučaj presovanja utvrđene su vrijednosti konstanti a_1 , b_1 . Ustanovljavanje ovih zavisnosti za pojedine slučajeve presovanja omogućava da se u bilo kom trenutku istog utvrdi povezanost sile i geometrije vijenca, tj. veličine: F , h , s i z .

Na osnovu druge jednačine u (6.2.1) može se definisati gradijentna veličina ds/dh koja definiše intenzitet priraštaja širine vijenca sa visinom:

$$ds/dh = a_2(1-b_2)h^{-b_2} \quad (6.2.3)$$

Na analogan način, korišćenjem prve jednačine u (6.2.1) može se odrediti intenzitet priraštaja sile sa promjenom visine:

$$dF/dh = -a_1b_1h^{-1-b_1} \quad (6.2.4)$$

Odredjivanje gradijentnih veličina saglasno (6.2.3) i (6.2.4) omogućava da se analizira uticaj geometrije kalupa i karakteristika priprema na ove veličine.

6.3. UTICAJ PARAMETARA NA MINIMALNU SILU PRESOVANJA

Kao posebno karakteristična veličina pri presovanju je razmatrana sila u trenutku popunjavanja kalupa, tj. neophodna minimalna sila procesa. Ova sila je ocijenjena učestalom diskretizacijom u okolini momenta popunjavanja kalupa, s obzirom da trenutak popunjavanja nije posebno istaknut na dijagramu zavisnosti sile od hoda.

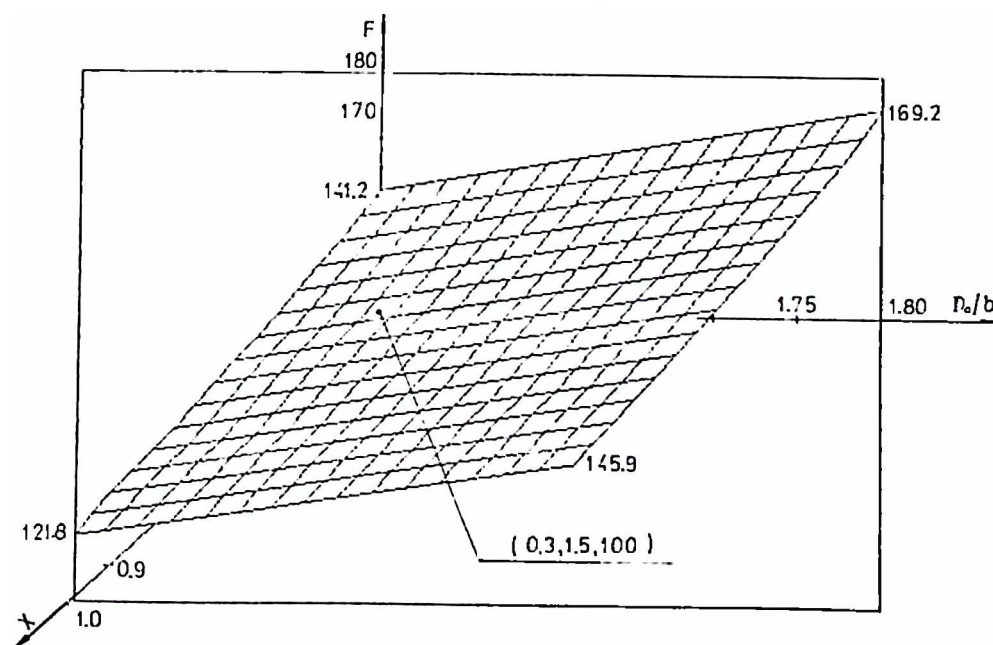
Istraživanje je vršeno tako što je prvo ispitivan uticaj po dva ili tri parametra procesa, pri čemu su ponavljanja vršena u centralnim tačkama plana.

Ovo je omogućavalo da se detaljno ispita uticaj pojedinih faktora preko stepenog modela kao i stepenog modela sa medjuzavisnostima. Takodje, djelovi ovako uradjenih eksperimenata, zahvaljujući pozitivnim kompozicionim svojstvima matematičkog plana eksperimenta, su se skladno uklapali u "piramidu" potpunog petofaktornog plana.

Za krajnji rezultat istaknutog pristupa dobijena je relacija koja daje uticaj parametara procesa na minimalnu silu presovanja izraženu u kN:

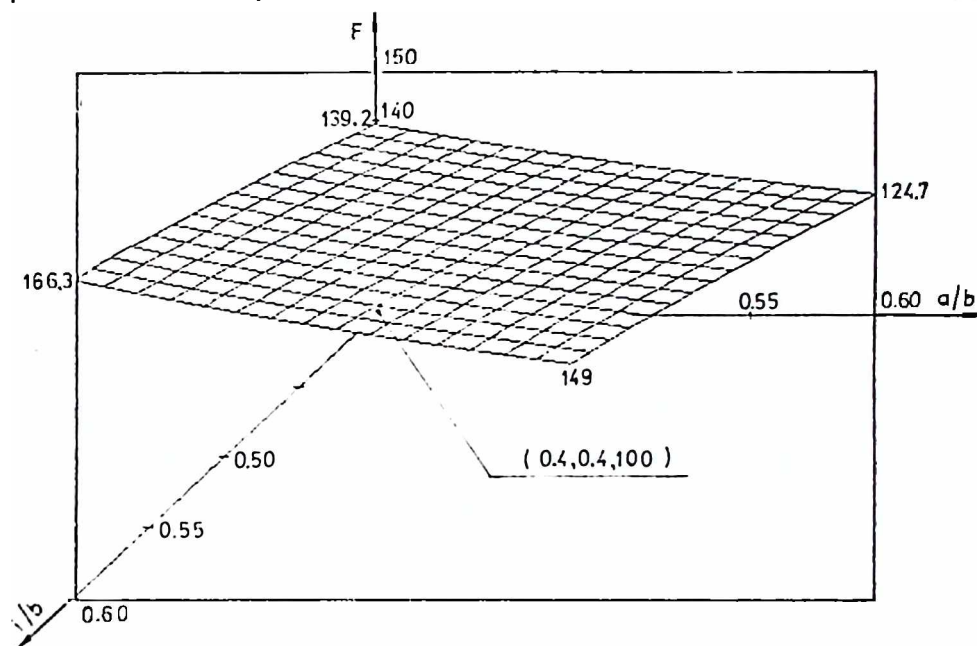
$$F = 102,458 x^{-0,123} (D_o/b)^{0,993} (i/b)^{0,439} (a/b)^{-0,271} (j/b)^{0,142} \quad (6.3.1)$$

Relacija (6.3.1) ukazuje da je uticaj odnosa D_o/b , i/b i j/b upravan i različit po intenzitetu a uticaj x i a/b obrnut, na silu presovanja. Karakter i intenzitet uticajnosti se najbolje mogu sagledati preko grafičke interpretacije koja može uključiti najviše dva faktora. Posebno je karakteristično sagledati uticaj odnosa prečnika priprema i širine kalupa (D_o/b) i viška metala (x) na silu presovanja. Ovakva zavisnost je data na sl.6.3.1. za srednje vrijednosti (tabela 6.1.1) ostalih parametara procesa.



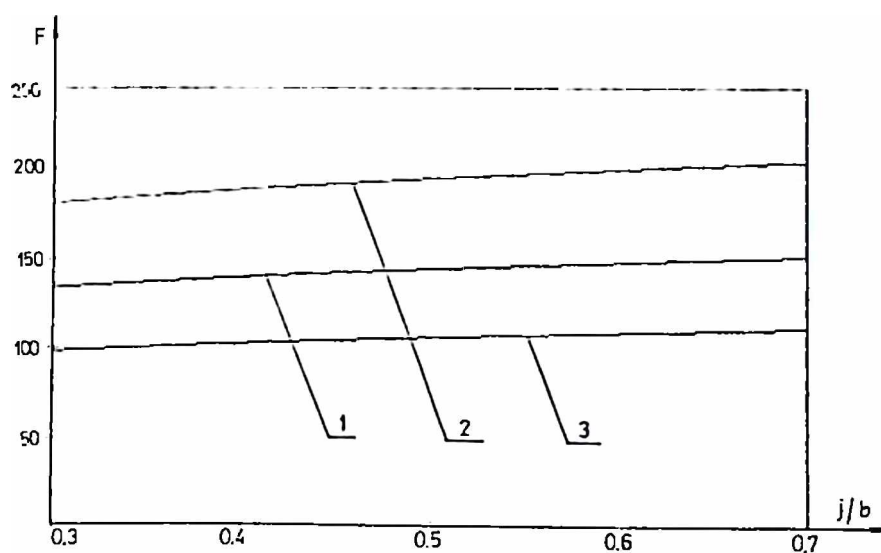
Sl.6.3.1. Zavisnost sile presovanja od: D_o/b i x pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.

Na sl.6.3.2. je data grafička interpretacija uticaja izraženog dijela šupljine gornjeg kalupa (i/b i a/b) pri srednjim vrijednostima ostalih parametara.



Sl.6.3.2. Zavisnost sile presovanja od i/b i a/b pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.

Uticaj odnosa osnovnih dimenzija gornjeg kalupa se može sagledati sa slike 6.3.3. gdje je određena oblast varijacije sile presovanja preko usvajanja maksimalnih, odnosno minimalnih, po uticajnosti, vrijednosti parametara procesa.



Sl.6.3.3. Zavisnost sile presovanja od j/b :
1-srednja sila; 2-maksimalna sila; 3-minimalna sila.

Karakteristični izlazi na računar (listinzi) su dati u Prilogu 10, a programi za dvodimenzionalnu i trodimenzionalnu grafičku interpretaciju (programi su napisani na turbopaskalu) dati su u Prilogu 11.

6.4. ANALIZA OTPORA VIJENCA

Kao mjera sile neophodne za deformaciju, veoma je pogodna bezdimenzionalna veličina otpora vijenca z koja je po definiciji odnos širine i visine vijenca [147] i koja je stepenom zavisnošću (6.2.2) vezana sa silom.

Najekonomičniji je takav proces presovanja kod kojeg u momentu popunjavanja šupljine kalupa metalom, visina odpreska je jednaka njegovoj konačnoj visini, tj. isključuje se faza završnog istiskivanja metala u vijenac. Ipak, takav proces je u praksi teško ostvarljiv zbog kolebanja zapremine pripremk i dimenzija šupljine kalupa. Zato je potrebno izabrati takve dimenzije mosta koje bi obezbjedjivale neophodan otpor vijenca za popunjavanje šupljine kalupa, bez pojave velikih sila na posljednjem stadijumu presovanja. U literaturi preporučene vrijednosti otpora vijenca [147,148,149,150,151,154] su najčešće dobijene jednofaktornim eksperimentom te daju grubu ocjenu ove veličine na osnovu vrijednosti malog broja parametara. Izostaju rezultati gdje se kompleksno uzima u obzir geometrija kalupa kao i veličina samog pripremk.

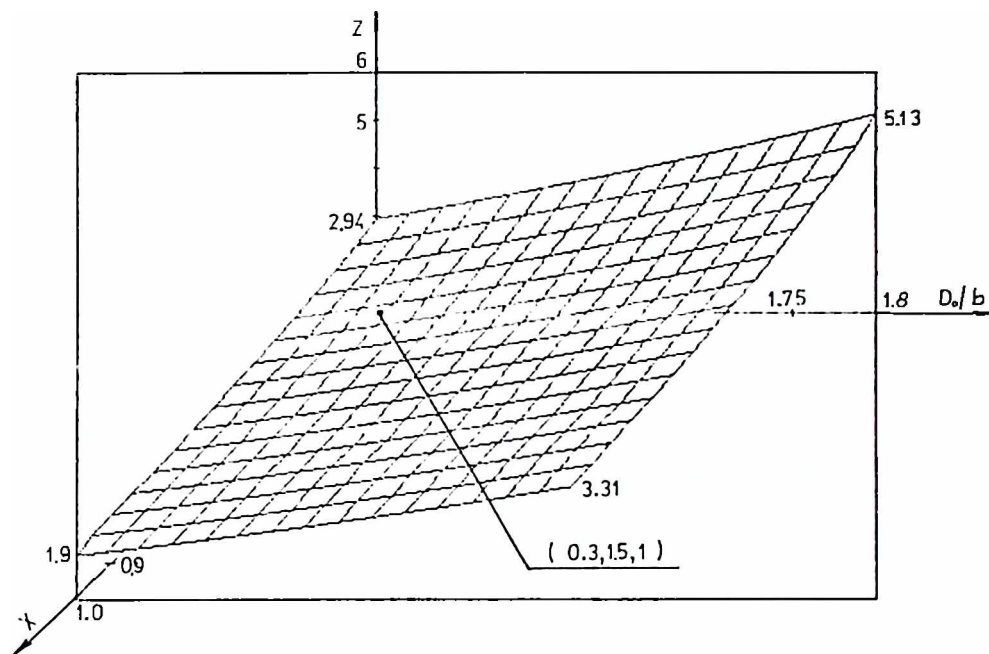
Zahvaljujući precizno izvršenim mjerenjima koje je omogućila diskretizacija razmatranog procesa (odjeljak 6.2) ocijenjena je vrijednost otpora vijenca u momentu popunjavanja kalupa. Eksperiment je vršen postupno, prvo na nižim nivoima, gdje je dobijena zavisnost otpora vijenca od manjeg broja parametara, preko stepenog modela i stepenog modela sa medjuzavisnostima. Potom su djelovi ovih eksperimenata preslikani u tjemena petodimenzionog hiperprostora i matematičkom obradom na računar je dobijena relacija:

$$z = 1,423 \cdot x^{-0,364} (D_0/b)^{3,052} (i/b)^{1,21} (a/b)^{-0,297} (j/b)^{0,389} \quad (6.4.1)$$

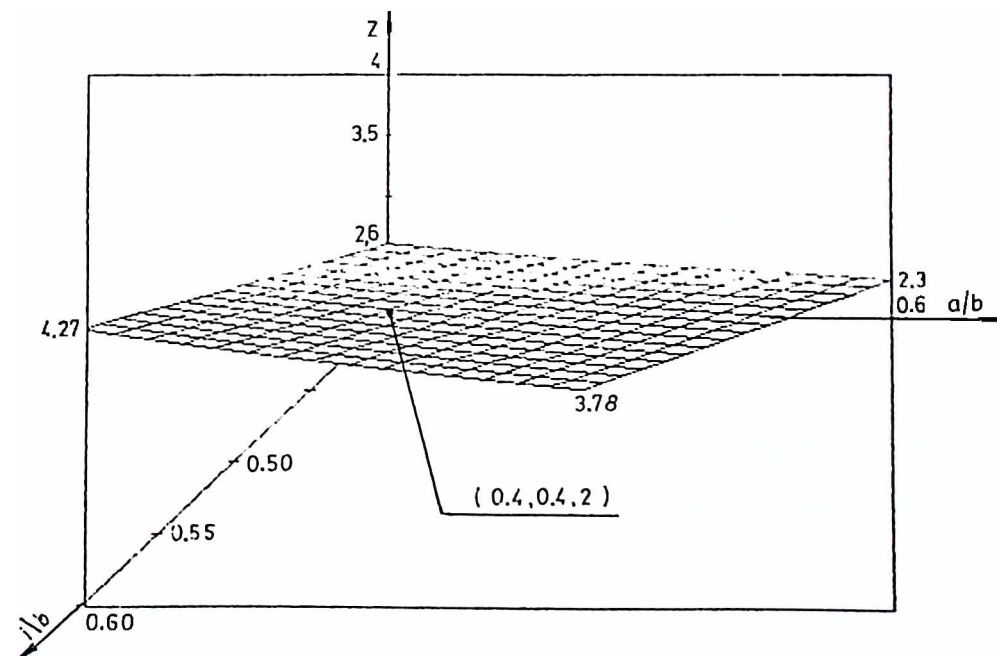
Očigledno, parametri procesa kod otpora vijenca imaju u odnosu na silu presovanja analogan, ali znatno intenzivniji uticaj, što omogućava da se

i mala izmjena parametara presovanja uzme u obzir pri analizi neophodnog otpora koji je potrebno ostvariti da bi došlo do popunjavanja kalupa.

Grafička interpretacija zavisnosti otpora vijenca z od karakteristika priprema i osnovne dimenzije kalupa za srednje vrijednosti ostalih parametara procesa je data na (sl.6.4.1).



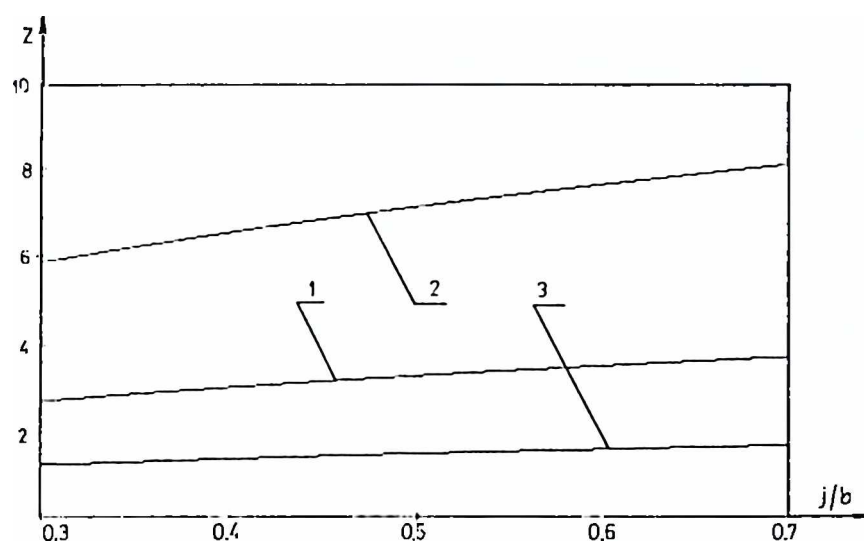
Sl.6.4.1. Zavisnost otpora vijenca od D_0/b i x pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.



Sl.6.4.2. Zavisnost otpora vijenca od i/b i a/b pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.

Na sl.6.4.2. je interpretirana zavisnost otpora vijenca od dimenzija izraženog dijela šupljine gornjeg kalupa tretiranih u razmjeri sa osnovnom dimenzijom kalupa.

Uticaj odnosa osnovnih dimenzija gornjeg kalupa je prikazan na sl.6.4.3, na kojoj je krivima 2 i 3 omedjena oblast varijacije otpora vijenca.



Sl.6.4.3. Zavisnost otpora vijenca od j/b : 1-srednji otpor vijenca; 2-maksimalni otpor vijenca; 3-minimalni otpor vijenca.

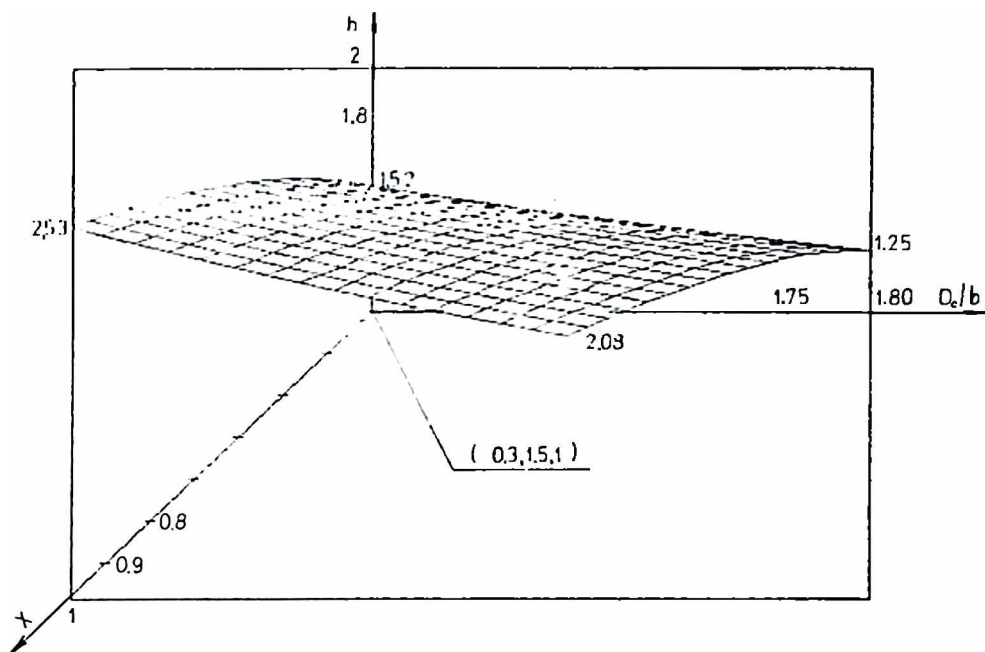
Na analogan način analiziran je i uticaj parametara presovanja na komponente otpora vijenca, tj. visinu i širinu vijenca. Dobijene su relacije:

$$h = 4,16 \times 0,424 (D_o/b)^{-1,064} (a/b)^{0,305} (j/b)^{-0,193} \quad (6.4.2)$$

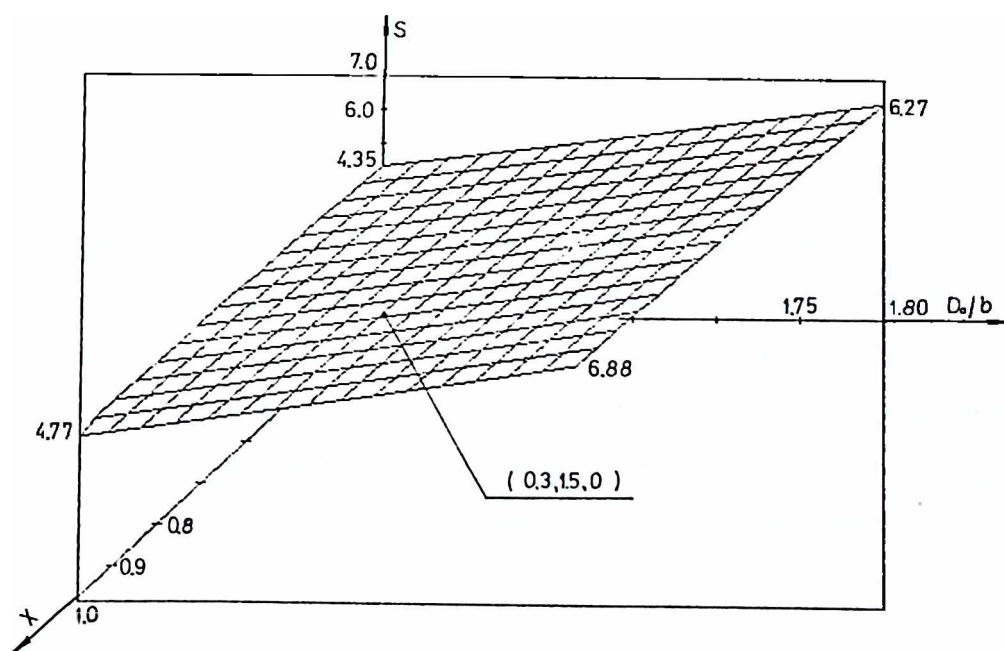
$$s = 5,592 \times 0,06 (D_o/b)^{1,988} (i/b)^{1,139} (j/b)^{0,196} \quad (6.4.3)$$

U analizi raspodjele uticaja parametara presovanja na komponente otpora vijenca karakteristično je da odnos i/b nije uticajan na visinu vijenca, a odnos a/b na njegovu širinu. Višak metala x ima znatno veći uticaj na visinu nego na širinu vijenca, dok je uticaj D_o/b obrnut. Uticaj j/b je ravnomjerno rasporedjen na obje komponente otpora vijenca. Karakter uticajnosti parametara presovanja na h i s je obrnut, sa izuzetkom viška metala x .

Na sl.6.4.4. i sl.6.4.5. je grafički interpretirana zavisnost visine vijenca h , odnosno širine vijenca s od relativnih karakteristika priprema pri srednjim vrijednostima ostalih parametara presovanja.



Sl.6.4.4. Zavisnost visine vijenca od D_0/b i x pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.



Sl.6.4.5. Zavisnost širine vijenca od D_0/b i x pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara.

6.5. OCJENA POPUNJENOSTI KALUPA PREKO GRADIJENATA SILE PRESOVANJA I ŠIRINE VIJENCA

Na dijagramu zavisnosti sile od hoda presovanja ne može se uočiti tačka popunjavanja kalupa, tj. ne može se utvrditi pri kontinualnom presovanju karakteristična sila (visina vijenca) od koje počinje faza dopresovanja. U tom cilju su na osnovu diskretizacije procesa (odjeljak 6.2) određene: intenzitet rasta širine vijenca sa visinom ds/dh (6.2.3) i intenzitet rasta sile sa visinom dF/dh (6.2.4). Ove veličine je moguće odrediti na osnovu relacija (6.2.1) koje su dobijene metodom najmanjih kvadrata iz eksperimentalno utvrđenih diskretnih vrijednosti. Veličine ds/dh i dF/dh su ocijenjene u trenutku popunjavanja kalupa za sve kombinacije parametara presovanja saglasno punom petofaktornom ortogonalnom planu eksperimenta.

Matematičkom obradom rezultata dobijene su relacije za apsolutne vrijednosti:

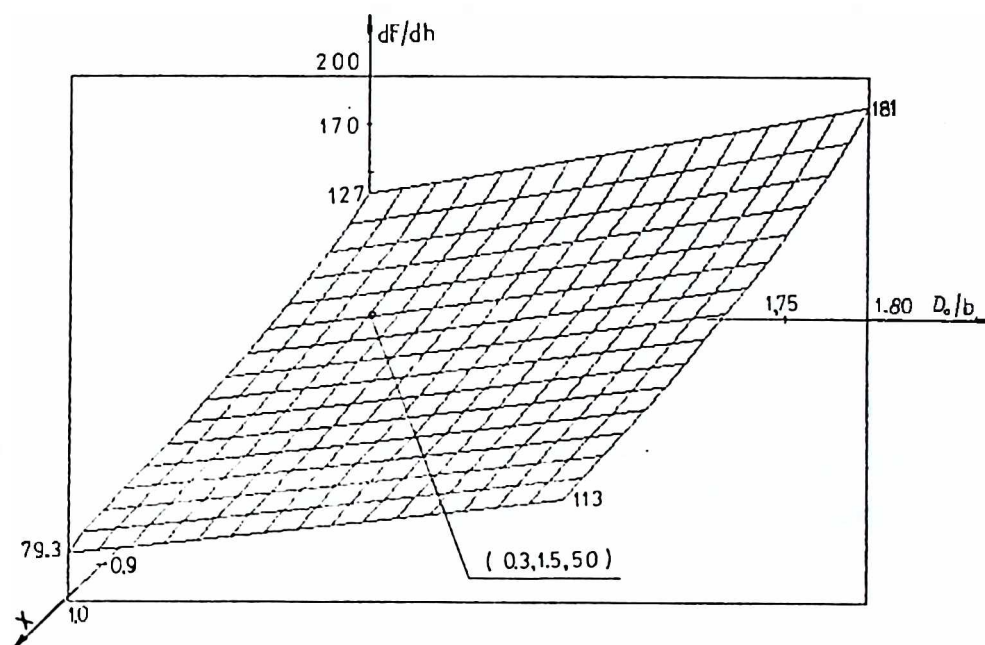
$$\frac{ds}{dh} = 2,431 \times^{-0,331} (D_o/b)^{1,931} (i/b)^{0,632} (a/b)^{-0,581} (j/b)^{0,254} \quad (6.5.1)$$

$$\frac{dF}{dh} = 35,943 \times^{-0,391} (D_o/b)^{1,95} \quad (6.5.2)$$

Očigledno, na intenzitet promjene širine presovanja sa visinom (6.5.1) utiču i geometrijski parametri i karakteristike priprema, dok na intenzitet promjene sile sa visinom (6.5.2) ne utiču geometrijski parametri posamtra- ni u definisanom opsegu varijacije. U slučaju da je utvrđen zakon promje- ne širine vijenca sa njegovom visinom u hiperprostoru određenom varijaci- jom parametra presovanja, tada se uz poznati zakon promjene otpora vije- nca sa visinom (6.2.1) može odrediti visina vijenca u trenutku popunjava- nja preko relacije:

$$h = \left[\frac{ds/dh}{a_2(1-b_2)} \right]^{-1/b_2} \quad (6.5.3)$$

Analogno, ali jednostavnije je utvrditi vrijednost intenziteta promjene sile sa promjenom visine na početku faze dopresovanja koja je za razmatrane intervale varijacije parametara presovanja data relacijom (6.5.2) i grafički prikazana na sl.6.5.1.



Sl.6.5.1. Zavisnost veličine dF/dh u trenutku popunjenosti kalupa od x i D_0/b .

Iz (6.5.2) i prve jednačine u (6.2.1) može biti određeno:

$$h = \left(\frac{dF/dh}{-a_1 b_1} \right)^{\frac{1}{1+b_1}} \quad (6.5.4)$$

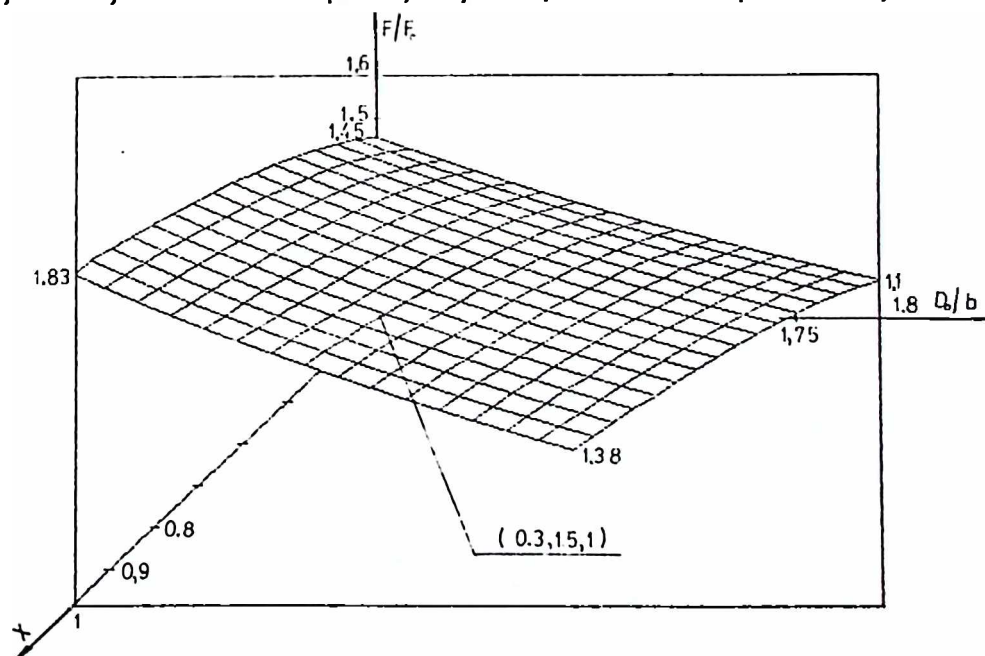
Relacije (6.5.3) i (6.5.4) definišu nov, uslovno nazvan gradijentni, pristup u određivanju popunjenosti kalupa i početka faze dopresovanja.

6.6. OCJENA INTENZIVNOSTI RASTA SILE DOPRESOVANJA

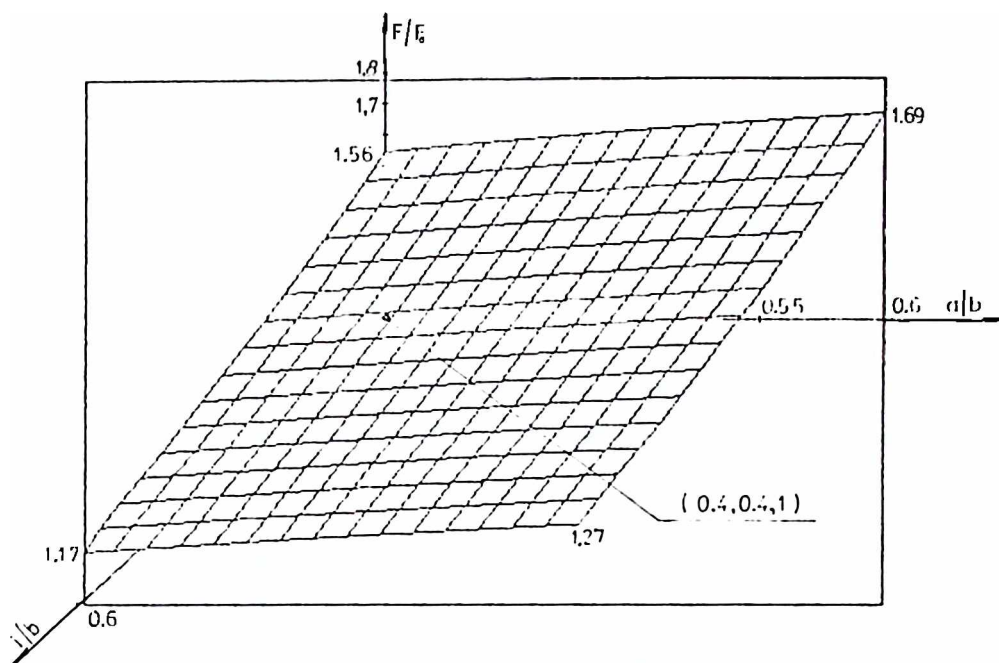
Pri dopresovanju kada je šupljina kalupa već popunjena, vijenac smeta istiskivanju metala iz šupljine što znatno povećava silu na posljednjem stadijumu presovanja. Intenzivan rast sile sa smanjenjem visine vijenca h i povećanjem širine vijenca s je uslovljen prije svega rastom sile trenja i specifičnog pritiska vijenca i ima bitan uticaj na vrijeme eksploatacije kalupa. Zato je i važno razmotriti uticaj parametara presovanja na intenzitet rasta sile. Definisana je veličina F/F_0 gdje su: F - trenutna sila procesa u fazi dopresovanja, F_0 - sila u trenutku popunjavanja kalupa. Ova veličina je ocijenjena preko relacije (6.2.2) pri konstantnoj vrijednosti otpora vijenca ($z=6$). Postupno je analiziran uticaj manjeg broja parametara da bi ovi rezultati bili iskorišćeni u punom petofaktornom planu pomoću kojeg je dobijena relacija:

$$F/F_0 = 1,916 \times 0,193 (D_0/b)^{-1,526} (i/b)^{-0,708} (a/b)^{0,19} (j/b)^{-0,258} \quad (6.6.1)$$

Na (sl.6.6.1) je prikazana zavisnost ove veličine od karakteristika priprema a na (sl.6.6.2) od geometrije izraženog dijela šupljine kalupa, pri srednjim vrijednostima nepromjenljivih parametara presovanja.

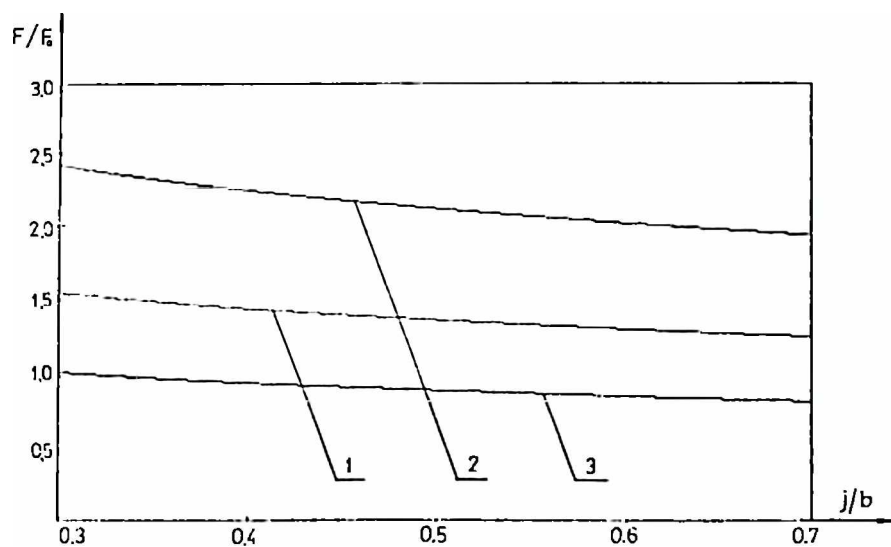


Sl.6.6.1. Zavisnost intenziteta rasta sile dopresovanja od relativnih karakteristika priprema pri srednjim vrijednostima konstantnih pa-



Sl.6.6.2. Zavisnost intenziteta rasta sile dopresovanja od relativne geometrije izraženog dijela šupljine kalupa pri srednjim vrijednostima konstantnih parametara procesa.

Na (sl.6.6.3) je data zavisnost intenziteta rasta sile dopresovanja od odnosa osnovnih dimenzija kalupa (j/b) pri srednjim vrijednostima ostalih parametara procesa.



Sl.6.6.3 Intenzitet rasta sile dopresovanja od odnosa j/b :
1-srednji; 2-maksimalni; 3-minimalni.

Na sl.(6.6.3) je krivima 2 i 3 omeđena oblast varijacije intenziteta sile dopresovanja koja je funkcija parametara presovanja. Analogni rezultati su dobijeni i pri drugim vrijednostima otpora vijenca u fazi dopresovanja.

6.7. ANALIZA UTICAJA PRIPREMKA I GEOMETRIJSKIH ODNOSA NA KARAKTERISTIČNE VELIČINE PRI PRESOVANJU

Već istaknuta parcijalna organizacija eksperimenta omogućava detaljnije ispitivanje uticaja pojedinih parametara na izlazne veličine procesa, koje uključuje i efekte medjudejstva faktora. Tako, na primjer, moguće je odvojeno posmatrati uticaj parametara koji karakterišu pripremak pri raznim nivoima geometrijskih odnosa koji karakterišu kalup. Relacije su po svojoj suštini analogne a, na primjer, za srednje vrijednosti geometrijskih odnosa (tabela 6.1.1) dobijeno je:

$$F = 73,56 x^{-0,141} (D_o/b)^{1,127} \quad (6.7.1)$$

$$z = 0,592 x^{-0,382} (D_o/b)^{2,755} \quad (6.7.2)$$

$$F/F_o = 4,887 x^{0,175} (D_o/b)^{-1,905} \quad (6.7.3)$$

Očigledno, medjudejstvo ovih faktora se ne pokazuje uticajnim na karakteristične veličine procesa pri čemu su slični rezultati dobijeni za razne nivoe geometrijskih odnosa.

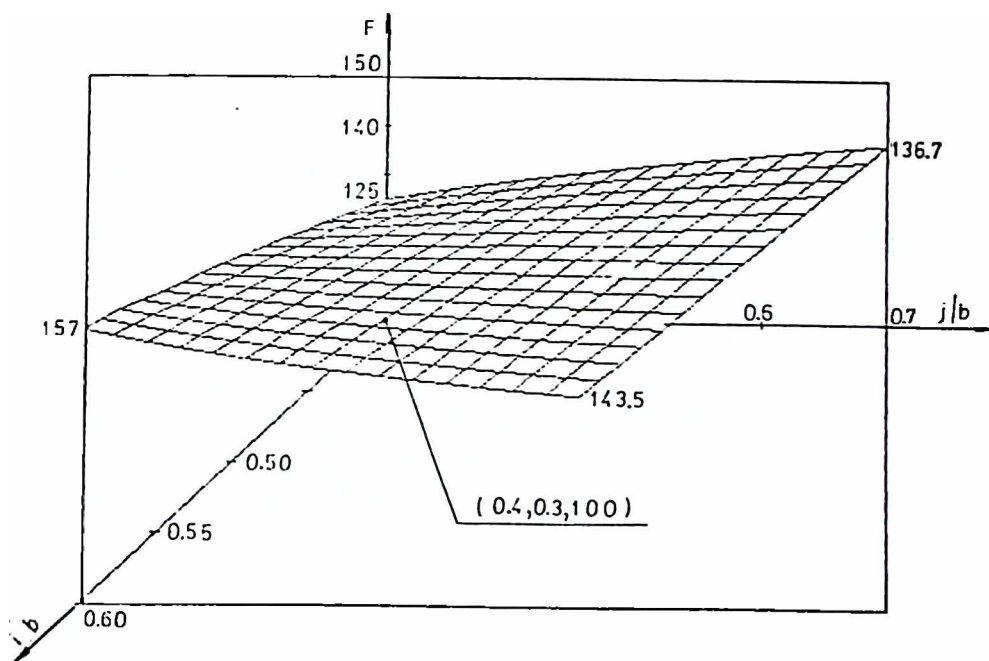
Pri analizi uticaja geometrijskih odnosa za slučaj konstantnih karakteristika priprema prisutni su efekti medjudejstva ovih faktora na izlazne veličine procesa. Tako, na primjer, za srednje vrijednosti x i D_o/b obradom na računaru dobijeno je:

$$F = 109,13 (i/b)^{-0,067-0,525 \ln j/b} (a/b)^{-0,282} (j/b)^{-0,375} \quad (6.7.4)$$

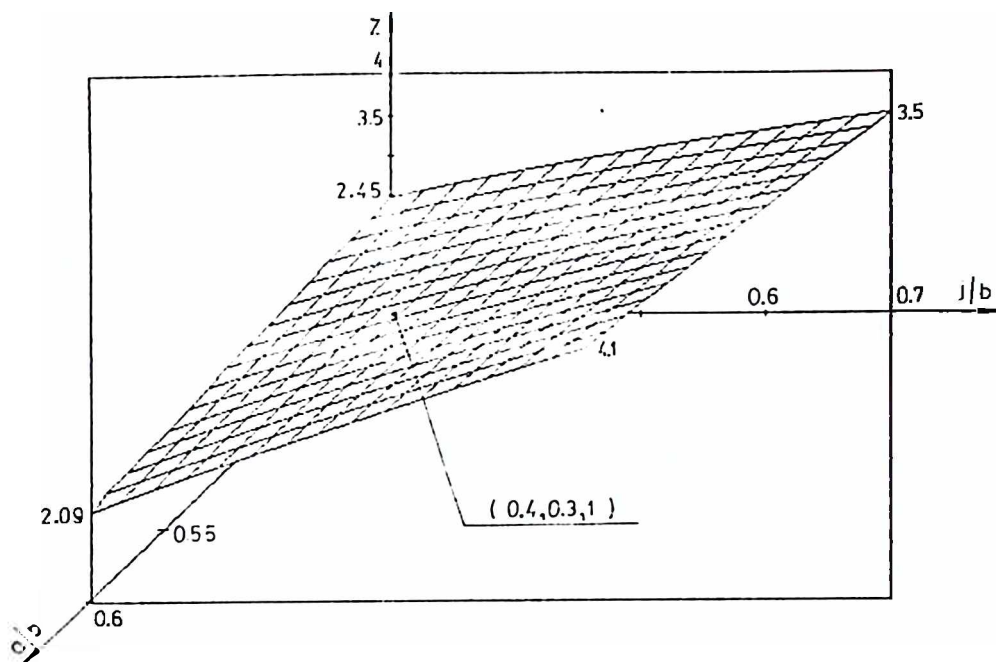
$$z = 21,337 (i/b)^{1,381} (a/b)^{0,738} (j/b)^{1,283+0,946 \ln a/b} \quad (6.7.5)$$

$$F/F_0 = 2,236 (i/b)^{0,276+0,802 \ln j/b} (a/b)^{0,493} (j/b)^{0,35} \quad (6.7.6)$$

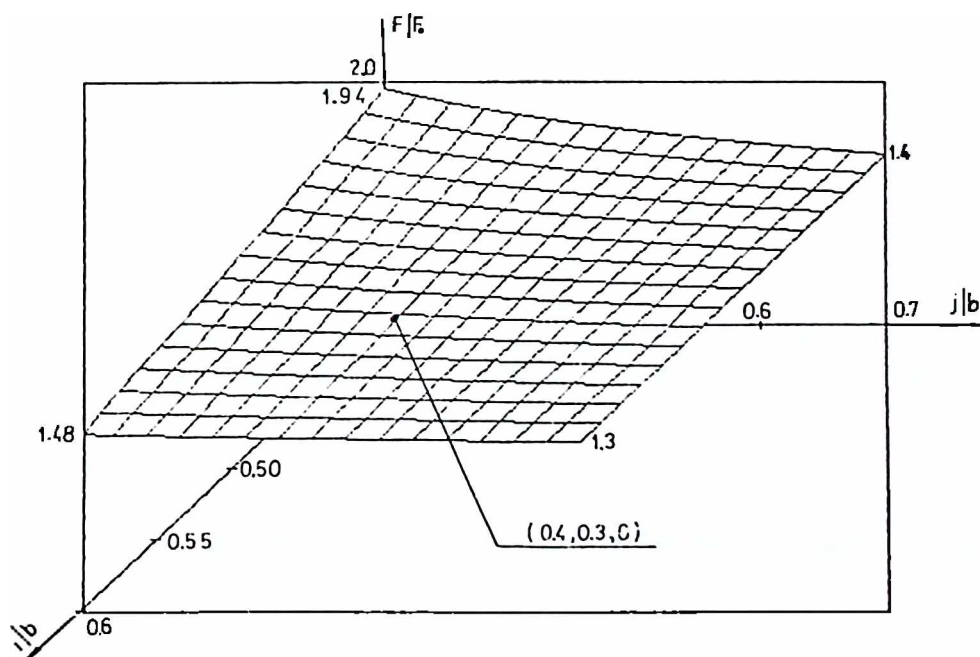
To znači da je na silu procesa kao i intenzitet rasta sile uticajan efekat medjudejstva geometrijskih odnosa i/b i j/b , a na otpor vijenca sprega faktora j/b i a/b . Ovakav model koji uključuje i medjudejstvo faktora omogućava dublje sagledavanje izučavanih procesa kao i vjerniji prikaz izlazne veličine. Na (sl.6.7.1 - 6.7.3) su date površi odziva u funkciji od spregnutih parametara za slučaj konstantne i srednje vrijednosti trećeg parametra.



Sl.6.7.1. Zavisnost minimalne sile presovanja od geometrijskih odnosa i/b i j/b ($a/b = 0,49$).



SI.6.7.2. Zavisnost otpora vijenca od geometrijskih odnosa j/b i a/b ($i/b=0,49$).



SI.6.7.3. Zavisnost intenziteta rasta sile presovanja od geometrijskih odnosa i/b i j/b ($a/b=0,49$).

Analiza uticaja geometrijskih odnosa na vrijednost otpora vijenca koja je vršena sa više prekidanja procesa u fazi dopresovanja dala je relaciju:

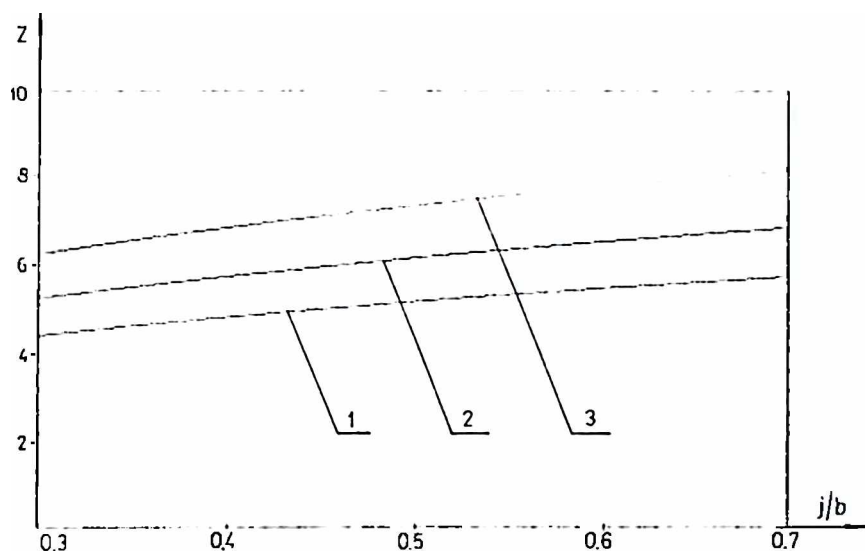
$$z = C_m (j/b)^D \quad (6.7.7)$$

gdje su:

C_m - konstanta zavisna od faze dopresovanja i početnog priprema;

D - konstanta zavisna od priprema.

Na primjer, za slučaj srednjih vrijednosti parametara priprema: $D=0,32$; $C_1 (F=200 \text{ kN})=6,41$; $C_2 (F=225 \text{ kN})=7,67$; $C_3 (F=250 \text{ kN})=9,17$. Grafički prikaz ovih krivih je dat na sl.6.7.4.



Sl.6.7.4. Zavisnost otpora vijenca od odnosa osnovnih dimenzija kalupa u fazi dopresovanja za slučaj srednjih vrijednosti parametara priprema: 1 - $F = 200 \text{ kN}$; 2 - $F = 225 \text{ kN}$; 3 - $F = 250 \text{ kN}$.

6.8. UTICAJ GEOMETRIJE ZA SLUČAJ IZRAŽENE ŠUPLJINE OBA KALUPA

Predhodna ispitivanja se odnose na slučajeve presovanja kada se geometrija gornjeg kalupa mijenja prema višefaktornom ortogonalnom planu, a donji kalup je blago udubljen (sl.6.1.2). Izvršena su eksperimentalna istraživanja i za slučaj kada i donji kalup ima izraženu šuplinu opisanu srednjim

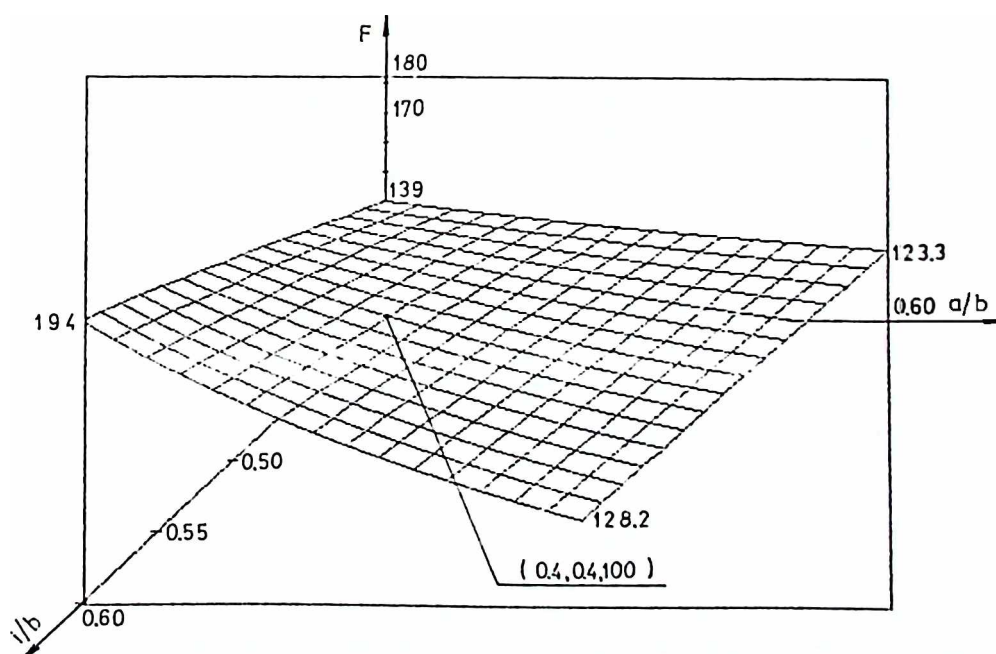
vrijednostima geometrijskih odnosa (prema sl.6.9.1) a geometrija gornjeg kalupa se varira analogno ranijem. Ispitivanja su izvršena za razne prečnike priprema i dobijeni su mnogobrojni odzivi procesa. Analogno (6.7.4-6.7.6) karakteristične veličine presovanja pri srednjim vrijednostima parametara priprema imaju oblik:

$$F = 58,703 (i/b)^{-0,825-1,801 \ln a/b} (j/b)^{0,21} (a/b)^{-1,943} \quad (6.8.1)$$

$$z = 0,694 (i/b)^{-1,657-4 \ln a/b} (j/b)^{0,323} (a/b)^{-4,158} \quad (6.8.2)$$

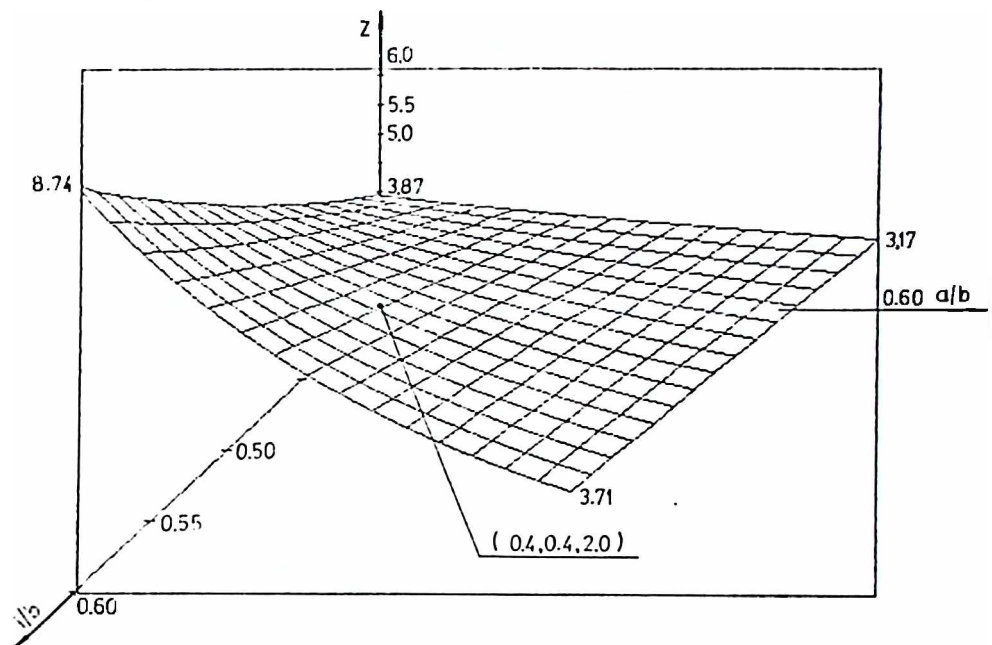
$$F/F_0 = 2,822 (i/b)^{0,79+2,018 \ln a/b} (j/b)^{-0,236} (a/b)^{2,125} \quad (6.8.3)$$

Relacije (6.8.1 – 6.8.3) daju zavisnost minimalne sile presovanja, otpora vijenca i intenziteta rasta sile, posmatranih u momentu popunjavanja gornjeg kalupa od njegovih karakterističnih geometrijskih odnosa. Opšta im je specifičnost zavisnost od uzajamnog uticaja geometrijskih odnosa koji karakterišu izraženi dio šupljine kalupa. Ova zavisnost je kod sile i otpora vijenca po karakteru analogna ali je intenzitet uticaja nezavisno promjenljivih kod otpora vijenca veći što potvrđuje hipotezu o osjetljivosti otpora vijenca i na relativno malu promjenu parametara presovanja.

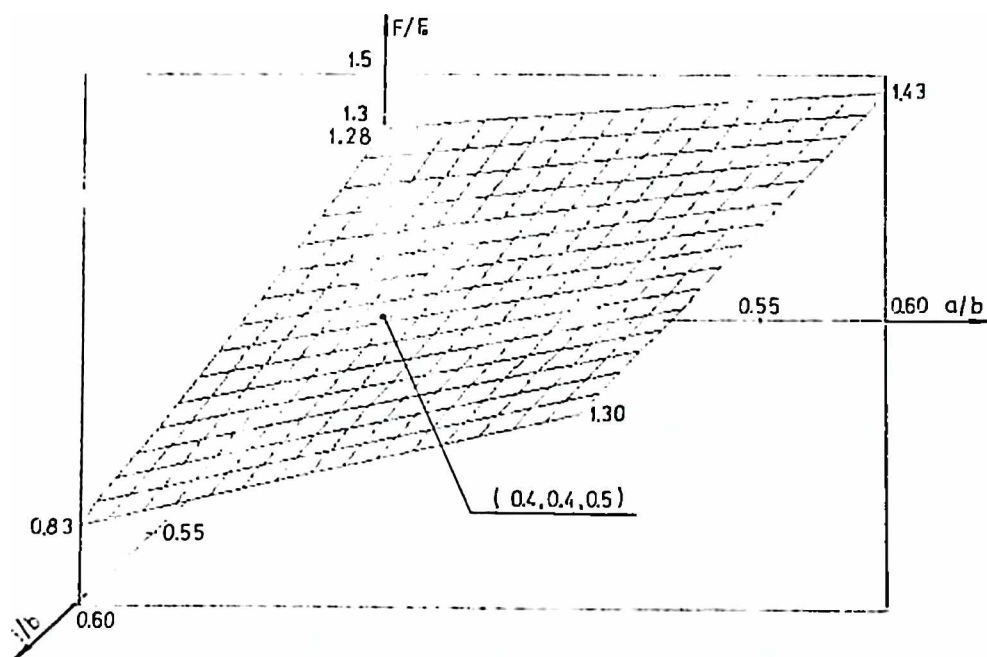


Sl.6.8.1. Zavisnost sile popunjavanja gornjeg kalupa od izraženog dijela njegove šupljine ($j/b=0,46$)

Uticaj geometrijskih odnosa na intenzitet rasta sile (pri otporu vijenca $z=6$) je po svom karakteru obrnut u odnosu na silu i otpor vijenca. Grafička interpretacija istaknutih veličina, od geometrijskih odnosa koji karakterišu šupljinu gornjeg kalupa, za slučaj srednje vrijednosti odnosa osnovnih dimenzija kalupa je data na (sl.6.8.1 - 6.8.3).



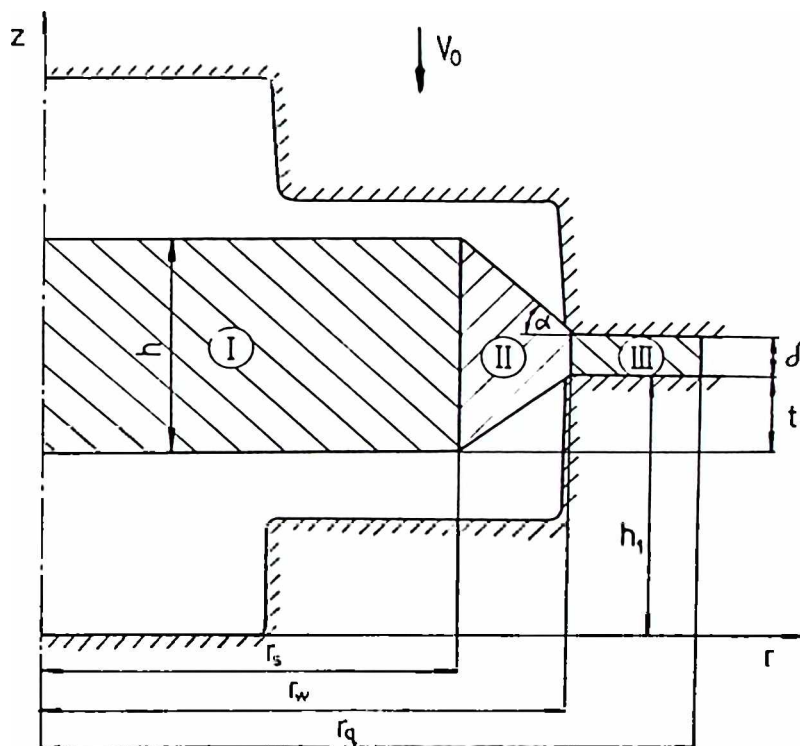
Sl.6.8.2. Zavisnost otpora vijenca u trenutku popunjavanja gornjeg kalupa od izraženog dijela njegove šupljine ($j/b=0,46$).



Sl.6.8.3. Zavisnost intenziteta rasta sile pri $z=6$ od izraženog dijela šupljine gornjeg kalupa ($j/b=0,46$).

6.9. ISTRAŽIVANJE GEOMETRIJE ZONE INTENZIVNOG TEČENJA U FAZI DOPRESOVANJA

Još je M.V.Storožev [39,55] razmatrajući deformaciju metala u fazi dopresovanja utvrdio da plastična deformacija ne zahvata cijelu zapreminu metala. Smatrajući proces tečenja u vijenac analognim procesu istiskivanja, on je pretpostavio da će plastičnom deformacijom biti zahvaćena nevelika zapremina metala oblika ovala sa obje strane površi razdvajanja. Prethodnu pretpostavku je potvrdio i S.I.Gupkin [12] koristeći optički metod analize napona a takodje i metod nanošenja mreže na eksperimentalne obrasce.



Sl.6.9.1. Aproksimacija zone intenzivnog tečenja u fazi dopresovanja.

Analogne rezultate je dobio veći broj autora i na kraju je L.A.Šofman [69, 71] koristeći metod linija klizanja teoretski pokazao da plastična deformacija pri dopresovanju zahvata ograničenu zonu u okolini zone razdvajanja dok ostala masa metala ostaje kruta tj. plastično se ne deformiše. Razmatrana karakteristika naponsko-deformacionog stanja metala pri dopresovanju odgo-

vara kruto-plastičnoj šemi i olakšava odredjivanje deformacione sile na koju je u ovoj fazi smanjen uticaj oblika odpreska.

Kako je istaknuto, eksperimenti pokazuju da žarište plastične deformacije u periodu dopresovanja ima blago ovalni oblik. U matematičkoj analizi bez suštinske pogreške se ovakva zona deformacije može aproksimirati sa modelom koji u radijalnom presjeku čine dva pravougaonika i prelazni trapez (sl.6.9.1).

Ako se koriste rezultati energetskog pristupa (glava 2, odjeljak 2.1.3), postave granični uslovi za slučaj prihvaćenog oblika žarišta deformacije i pretpostavi linijski raspored brzine v_z po zoni moguće je izvršiti sljedeću analizu po zonama deformisanog metala:

I - Granični uslovi za brzinu v_z su (sl.6.9.1):

$$\begin{aligned} z = h_1 + t + \delta \quad v_z &= -v_o \\ z = h_1 - t, \quad v_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

Na osnovu graničnih uslova (6.9.1) i linijskog rasporeda v_z važi:

$$v_z = -\frac{v_o}{h}(z + t - h_1) \quad (6.9.2)$$

Korišćenjem uslova nestišljivosti (1.3.21) koji u razmatranim koordinatama, ima oblik (4.3.8) slijedi:

$$v_r = \frac{v_o}{2h} r \quad (6.9.3)$$

Sada će prema (4.3.7) brzine deformacije imati oblik:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{v_o}{2h}, & \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{v_o}{2h}, & \dot{\epsilon}_z &= -\frac{v_o}{h} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= 0, & \dot{\gamma}_{\theta z} &= 0, & \dot{\gamma}_{zr} &= 0 \end{aligned} \quad (6.9.4)$$

Konačno, intenzitet brzine deformacije će za zonu I biti:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{h} v_o \quad (6.9.5)$$

II - Granični uslovi za ovu zonu su:

$$\begin{aligned} z &= h_1 + \delta + (r_w - r) \operatorname{tg} \alpha, & v_z &= -v_o \\ z &= h_1 - (r_w - r) \operatorname{tg} \alpha, & v_z &= 0 \\ r &= r_s, & v_r &= \frac{v_o}{2h} r_s \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

Analogno prethodnom, brzine v_z i v_r će imati oblik:

$$v_z = \frac{-v_o [z - h_1 + (r_w - r) \operatorname{tg} \alpha]}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.9.7)$$

$$v_r = v_o \frac{r_s^2}{2hr} + \frac{v_o}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{r_s}{r} - 1 \right) + v_o \frac{\delta + 2r_w \operatorname{tg} \alpha}{4r \operatorname{tg}^2 \alpha} \ln \frac{\delta + 2(r_w - r_s) \operatorname{tg} \alpha}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.9.8)$$

Komponente brzine deformacije različite od nule su:

$$\dot{\epsilon}_r = -v_o \frac{r_s^2}{2hr^2} - v_o \frac{r_s}{2 \operatorname{tg} \alpha r^2} + v_o \frac{\delta + 2r_w \operatorname{tg} \alpha}{4r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{2 \operatorname{tg} \alpha r}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} - \ln \frac{\delta + 2(r_w - r_s) \operatorname{tg} \alpha}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \right] \quad (6.9.9)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = v_o \frac{r_s^2}{2hr^2} + \frac{v_o}{2 \operatorname{tg} \alpha r} \left(\frac{r_s}{r} - 1 \right) + v_o \frac{\delta + 2r_w \operatorname{tg} \alpha}{4r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \ln \frac{\delta + 2(r_w - r_s) \operatorname{tg} \alpha}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.9.10)$$

$$\dot{\epsilon}_z = - \frac{v_o}{\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.9.11)$$

$$\dot{\gamma}_{zr} = v_o \operatorname{tg} \alpha \frac{\delta + 2h_1 - 2z}{[\delta + 2(r_w - r) \operatorname{tg} \alpha]^2} \quad (6.9.12)$$

III – Granični uslovi za treću zonu se mogu definisati relacijama:

$$\begin{aligned} v_z &= -v_o, & z &= h_1 + \delta \\ v_z &= 0, & z &= h_1 \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

Potom se za brzine v_z i v_r dobijaju izrazi:

$$v_z = -\frac{v_o}{\delta} (z - h_1) \quad (6.9.14)$$

$$v_r = v_o \phi \frac{r_w}{r} + \frac{v_o}{2\delta r} (r^2 - r_w^2) \quad (6.9.15)$$

gdje je:

$$\phi = \frac{r_s^2}{2hr_w} + \frac{\delta + 2r_w \operatorname{tg} \alpha}{4\operatorname{tg} \alpha r_w} \ln \frac{(\delta + 2r_w \operatorname{tg} \alpha - 2r_s \operatorname{tg} \alpha)}{\delta} + \frac{1}{2\operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{r_s}{r_w} - 1 \right) \quad (6.9.16)$$

Konačno su komponente brzine deformacije različite od nule:

$$\dot{\epsilon}_r = -v_o \phi \frac{r_w}{r^2} + \frac{v_o}{2\delta} \left(1 + \frac{r_w^2}{r^2} \right) \quad (6.9.17)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = v_o \phi \frac{r_w}{r^2} + \frac{v_o}{2\delta r^2} (r^2 - r_w^2) \quad (6.9.18)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{v_o}{\delta} \quad (6.9.19)$$

Prema izloženim teoretskim postavkama sljedeća faza primjene energetske metode obuhvata istraživanje dva vida energije:

a) Zapreminske disipacije

$$N'_1 = 2 \pi \dot{\gamma}_1 \tau_{s1} \int_0^{r_s} r dr \int_{h_1-t}^{h_1-t+h} dz \quad (6.9.20)$$

$$N''_1 = 2 \pi \tau_{s2} \left(\int_{r_s}^{r_w} r dr \int_{h_1 - (r_w - r) \operatorname{tg} \alpha}^{h_1} \dot{\gamma}_2(r, z) dz + \int_{r_s}^{r_w} r dr \int_{h_1}^{h_1 + \delta} \dot{\gamma}_2(r, z) dz + \right.$$

$$+ \int_{r_s}^{r_w} r dr \int_{h_1 + \delta}^{h_1 + \delta + (r_w - r) \operatorname{tg} \alpha} \dot{\gamma}_2(r, z) dz \quad (6.9.21)$$

$$N_1''' = 2 \pi \tau_{s3} \int_{r_w}^{r_q} r \dot{\gamma}_3(r) dr \int_{h_1}^{h_1 + \delta} dz \quad (6.9.22)$$

b) Disipacije na prekidima brzina

$$N_2^I = \frac{2 \pi \tau_{s1} v_o}{h_o} \int_0^{r_s} r^2 dr \quad (6.9.23)$$

$$N_2^{II} = 2 \pi \tau_{s2} \left(\int_{r_s}^{r_w} r (v_{r2} - v_o \operatorname{tg} \alpha) dr + \int_{r_s}^{r_w} r v_{r2} dr \right) \quad (6.9.24)$$

$$N_2^{III} = 2 \pi \alpha_k \tau_{s3} \int_{r_w}^{r_q} r v_{r3} dr \quad (6.9.25)$$

gdje je α_k - koeficijent zavisan od geometrije i trenja u vijencu [58] .

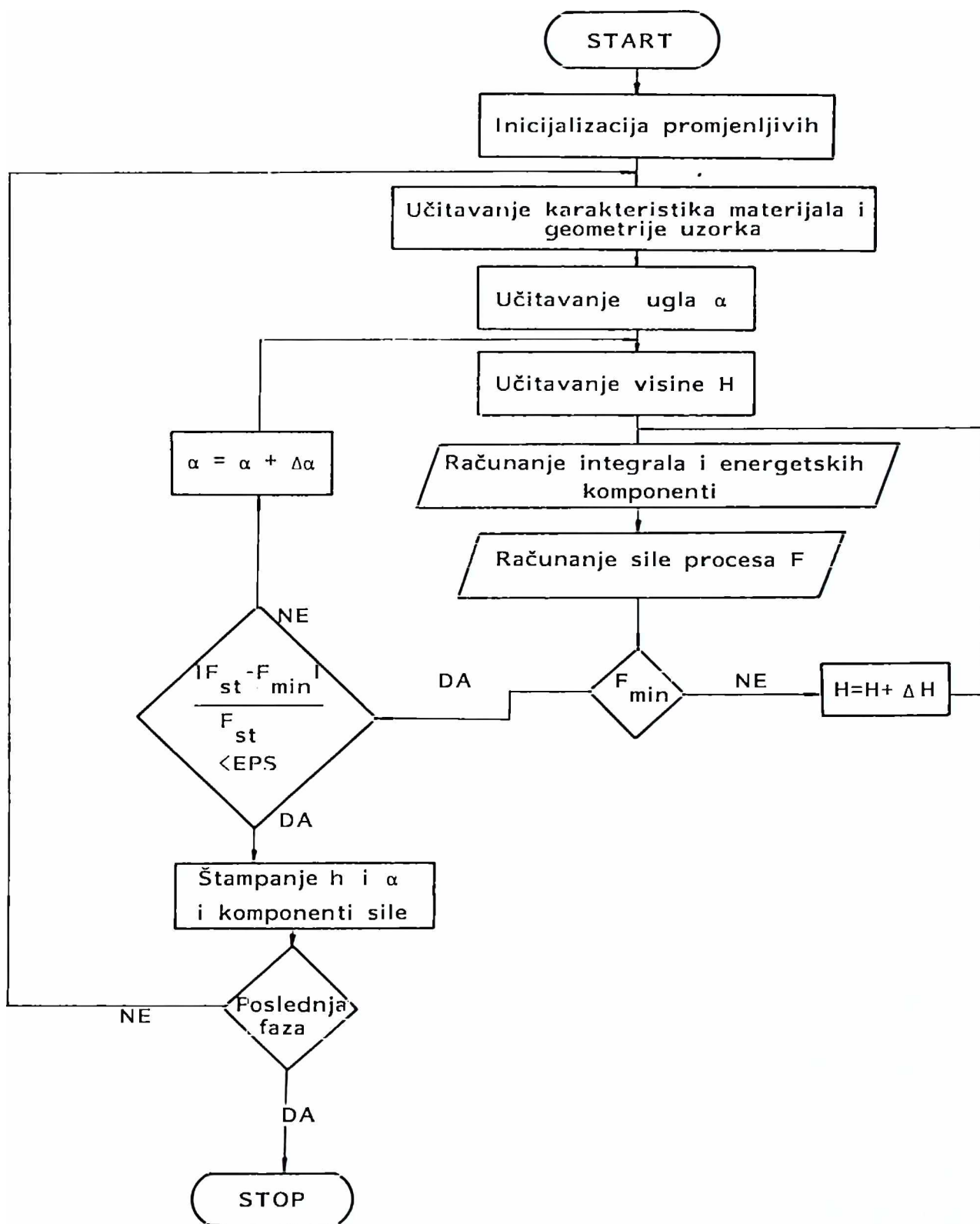
Konačno, neophodna sila se može definisati izrazom:

$$F = \frac{1}{v_o} \left(\sum_{i=1}^3 N_1^i + \sum_{i=1}^3 N_2^i \right) \quad (6.9.26)$$

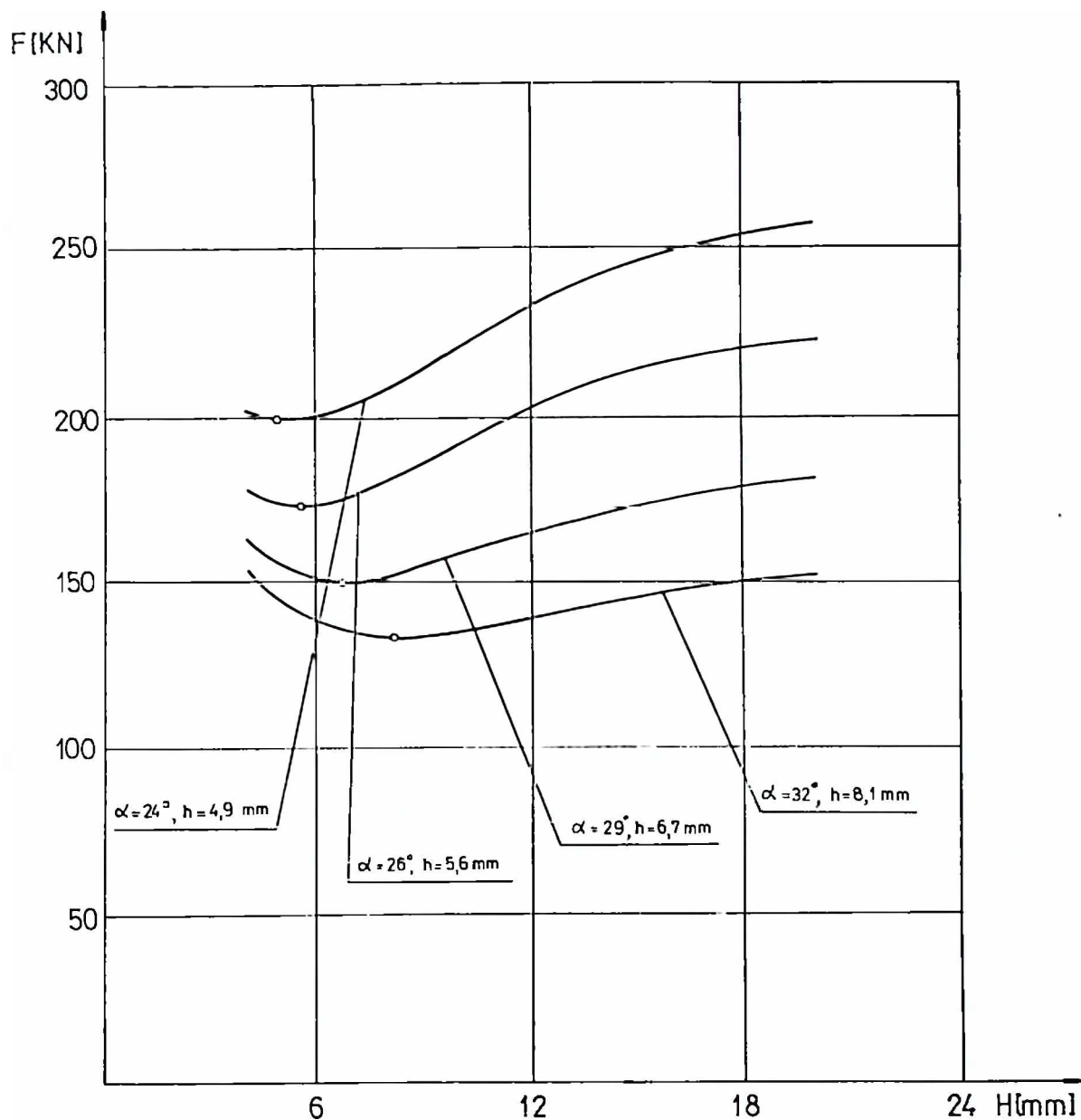
Izradjen je paket programa pod nazivom "Žarište" (dat je u Prilogu 12).

Paket ima 11 potprograma pri čemu zbog specifičnosti problematike nijesu korišćeni standardni programi. Istaknuti integrali se rješavaju metodom Gaus-Ležendra sa duplom preciznošću (double precision). Ovom metodom se sa visokom tačnošću rješavaju kako jednostruki, tako i dvostruki integrali kod kojih se promjenljive veličine javljaju i u granicama integrala.

Potom je vršeno sumiranje komponenata energije, a zatim korišćenjem eksperimentalnih informacija o sili i geometriji vijenca presovanja, iterativno približavanje ka optimalnom modelu žarišta deformacije. Taj model je funkcija visine h i ugla α . Blok dijagram je prikazan na slici (6.9.2):



Sl.6.9.2. Blok dijagram programa za određivanje geometrije žarišta deformacije.



Sl.6.9.3. Geometrija žarišta deformacije po fazama dopresovanja.

Rezultujući podaci za 4 faze presovanja, dobijeni pomoću paketa programa, su prikazani na sl.6.9.3. Funkcija zavisnosti sile F od geometrije žarišta deformacije, tj. visine h i ugla α je mnogoznačna pri određenoj geometriji vijenca. Stvarni ugao je minimalni, tj. biće određen krivom koja tangira pravu $F=F_{ek}$. Tačka minimuma ove krive određuje i visinu žarišta.

Na taj način je moguće doći do uredjenog para (h, α) koji određuje zonu intenzivnog tečenja metala. Na (sl.6.9.3) je postupno praćena izmjena žarišta deformacije po fazama deformisanja. Obradom na računaru dobijenih vrijednosti slijedi da se sa visokim koeficijentom korelacije ($\rho > 0,99$) može prihvatiti hiperbolična zavisnost relativne geometrije žarišta od otpora vijenca:

$$\begin{aligned} h/b &= m_1 z^{-n_1} \\ \alpha / \alpha_o &= m_2 z^{-n_2} \end{aligned} \quad (6.9.27)$$

gdje su: b - osnovna širina kalupa, α_o - ugao nagiba kalupa, z - otpor vijenca, m_1, n_1, m_2, n_2 - pozitivne konstante.

Relacije (6.9.27) pokazuju da se u fazi dopresovanja geometrijske karakteristike žarišta deformacije smanjuju po hiperboličnom zakonu.

Na osnovu istaknutog se može zaključiti da napravljeni program obezbjeđuje da se u bilo kom trenutku dopresovanja na osnovu informacija o procesu (sili presovanja i dimenzijama vijenca) kao i opštih informacija o kalupu i materijalu koji se deformiše može odrediti oblast metala koja intenzivno teče. Ostali dio metala se može prihvatiti krutim u toku razmatrane faze dopresovanja.

Literaturne informacije o dimenzijama [147, 149, 150, 151] oblasti intenzivnog tečenja se najčešće odnose na početak faze dopresovanja (dobijeni rezultati se slažu). Međutim, kako se presovanje obično vrši na određenu visinu vijenca, to se ovim postupkom obezbedjuje određivanje dimenzija žarišta u bilo kom trenutku nakon popunjavanja kalupa. S druge strane relacije tipa (6.9.27) omogućavaju da se u potrebnom momentu dopresovanja odrede dimenzije žarišta deformacije a zatim i sama sila procesa.

U cilju eksperimentalne verifikacije istaknutih postavki analizirana je faza dopresovanja, za razne slučajeve presovanja (sl.6.9.1), zavisne od geometrije gornjeg kalupa koja je varirana prema planu eksperimenta (tabela 6.1.1 - veličine: a/b , i/b i j/b). U svim slučajevima je uočavan trenutak popunjavanja kalupa a potom je učestalom diskretizacijom praćena postupna izmjena geometrije vijenca sa silom deformisanja. Ove veličine su, prema istaknutom spregnutom postupku, bile neophodna eksperimentalna informacija za određivanje geometrije zone intenzivnog tečenja. Računarskom obradom (Prilog 9) dobijenih vrijednosti (h, α) iz svih razmatranih slučajeva i faza deformisanja dobijene su relacije tipa (6.9.27) sa vrijednostima konstanti: $m_1=1,13$; $n_1= - 0,76$; $m_2=0,67$; $n_2= - 0,44$.

Nadjene relacije omogućavaju da se odredi zona intenzivnog tečenja za pojedine slučajeve presovanja a samim tim i modelira sila presovanja u fazi dopresovanja. Ovu silu je moguće odrediti i primjenom približnog energetskog metoda (glava 2, odjeljak 2.1.3) koji prema očekivanju daje uvećane vrijednosti.

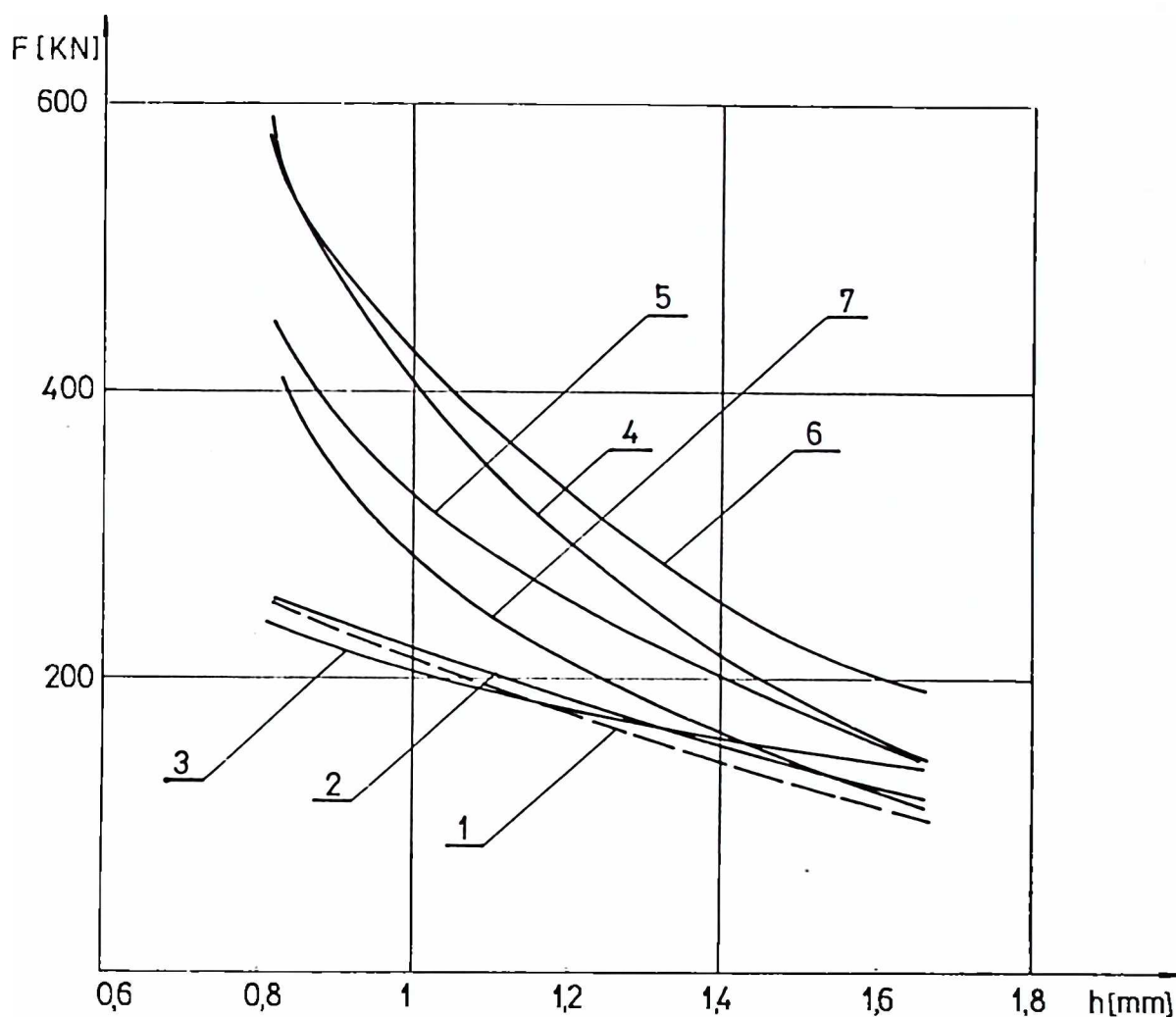
Sila dopresovanja je modelirana i primjenom u literaturi najčešće preporučenih obrazaca koji su dati u Prilogu 1. Obrasci su zasnovani na različitim teorijskim postavkama pri čemu su u cilju pojednostavljenja finalnih izraza korišćene odgovarajuće aproksimacije.

I tako, sila presovanja u fazi dopresovanja za sve uzorke sukcesivno je modelirana na sljedeće načine:

- primjenom spregnutog postupka,
- primjenom obrasca Storoževa (1.2),
- primjenom obrasca Fostera (1.3),
- primjenom obrasca Semenova (1.4),
- primjenom principa "gornjeg ormara" (1.8),
- primjenom približnog varijacionog pristupa (1.10).

Rezultati su, za razne slučajeve presovanja, po svojoj suštini analogni pa je na (sl.6.9.4) data grafička interpretacija sile dopresovanja prema ista-

knutnim postupcima, (srednje vrijednosti variranih geometrijskih odnosa) iz čega se može analizirati uspješnost modeliranja sile za razmatranu klasu zapreminskog deformisanja.



SI.6.9.4. Modeliranje sile presovanja u fazi dopresovanja:

- 1 - eksperimentalna kriva;
- 2 - spregnuti postupak;
- 3 - obrazac Fosterera;
- 4 - obrazac Semenova;
- 5 - obrazac Storoževa;
- 6 - princip "gornjeg ormara";
- 7 - približni varijacioni pristup.

Očigledno, najveći dio obrazaca vrlo grubo aproksimira silu, jer odstupanja prelaze 100 % (obrasci: Storoževa, Semenova, prema principu "gornjeg ormar", prema približnom varijacionom pristupu). Modeliranje primjenom ovih obrazaca je najuspješnije u početku a zatim odstupanje prvo blago a potom intenzivno raste.

Prema obrascu Fosterera u momentu popunjavanja kalupa dobijena je uvećana vrijednost za silu (40 %) da bi na kraju razmatranog intervala bila umanjena (6 %). To znači da se na ovaj način mijenja karakter aproksimacije u odnosu na eksperimentalno utvrđene vrijednosti.

Primjenom spregnutog postupka kod kojeg je, za razmatranu klasu uzoraka, prethodno utvrđena zavisnost promjene zone intenzivnog tečenja od otpora vijenca se relativno uspješno modelira sila dopresovanja. Ovdje su korišćenjem energetskog pristupa za usvojenu aproksimaciju žarišta deformacije dobijene nešto uvećane vrijednosti (10 %).

Z A K L J U Č A K

U okviru obrade deformisanjem se svojom složenošću posebno/izdvaja zapreminsko deformisanje, što je, prije svega, uslovljeno činjenicom da je pri ovom vidu prerade materijala osobito teško pomiriti dva kriterijuma: korektnost (teorijsku dosljednost) i jednostavnost rješenja. I pored napora velikog broja istraživača može se reći da ne postoje definitivno prihvaćen metod niti pak definitivna rješenja, koja ne podliježu doradi, čak i najjednostavnijih postupaka u obradi zapreminskim oblikovanjem. Istaknuta svojstva su posebno naglašena kod presovanja kao najčešće korišćenog postupka.

To znači, da je područje ispitivanja termo-mehaničkih parametara pri presovanju veoma aktuelno i nedovoljno istraženo. Složenost problematike je uslovila neophodnost korišćenja sva tri moguća, medjusobno povezana pristupa: teorijskog, eksperimentalnog i numeričkog. Posebno je aktuelna primjena na, u praksi veoma često korišćenu, klasu osnosimetričnih ili radijalno ojačanih osnosimetričnih uzoraka.

Istraživanja su vodjena u sljedećim pravcima:

- I. Analize i originalne primjene, za razmatranu klasu problema posebno pogodnih, metoda primijenjene teorije plastičnosti.
- II. Kritičkog sagledavanja postojećih numeričkih rješenja (metod konačnog elementa) i predlaganja originalnog numeričkog pristupa i originalnih poboljšanja numeričke procedure.
- III. Eksperimentalnih istraživanja sa ciljem dobijanja relacija veze izlaznih i uticajnih veličina razmatranog procesa na osnovama modernog više-faktornog plana eksperimenta, podržanog računarom.

Navode se osnovni, po definisanim pravcima, dostignuti rezultati.

1. - Detaljno je analizirana i prikazana mogućnost primjene malih deformacija pri plastičnom deformisanju tijela. To znači, da je u inženjerskim zadacima sa velikim deformacijama konačno stanje deformisanog tijela moguće odrediti pomoću etapnog prelaza od početnog stanja ka konačnom, pri čemu svaka etapa odgovara malim deformacijama, što je posebno pogodno pri proračunima primjenom računara.
- Medju metodama primijenjene teorije plastičnosti iscrpno je analizirana energetska metoda. Za razliku od klasičnog pristupa ovdje je energetska metoda postavljena na temelju tri moguća oblika graničnih uslova što osigurava teorijsku dosljednost u aplikaciji ove, za razmatranu klasu problema, veoma povoljne metode.
- Dat je primjer ovako postavljene primjene energetske metode za slučaj presovanja u otvorenim kalupima preko modeliranja zone intenzivnog tečenja u vidu cilindra čija visina je jednaka visini vijenca. U rezultatu je dobijena sila presovanja krutoplastičnog tijela, a dato je rješenje za linijski viskoznooplastično tijelo, što bolje odgovara uslovima tople prerade.
- Na bazi tačne postavke o obliku zone intenzivnog tečenja koju je postavio M.V.Storožev, eksperimentalno verifikovao S.I.Gupkin i teorijski dokazao preko linija klizanja L.A.Šofman dato je, primjenom energetske metode, rješenje problema određivanja geometrije zone intenzivnog tečenja u fazi dopresovanja. Složen oblik zone kao i, u cilju tačnosti, neophodna eksperimentalna komponenta pri rješavanju su uslovili da je ovdje rješenje dostignuto primjenom sva tri pristupa: teorijskog, numeričkog i eksperimentalnog. Postignuti rezultati omogućavaju da se dodje do vrijednosti sile dopresovanja na osnovu poznate geometrije zone intenzivnog tečenja.

U okviru istraživanja primjene metoda primijenjene teorije plastičnosti na razmatrane probleme presovanja ističu se rezultati primjene teorije tečenja tankog sloja plastičnog materijala u postavci A.A.Iljušina. Dodatni motiv ovih istraživanja su teškoće rješavanja izučavane klase problema drugim metodama teorije plastičnosti.

- Razmatran je problem presovanja tankog, radijalno ojačanog, kružnog otpreska konstantne debljine. Proces je modeliran sa četiri faze u kojima je izučavano tečenje metala. Oslanjanjem na postavke teorije tečenja tankog sloja metala, uz uzimanje u obzir uticaja žljeba na osnovni tanki sloj, dobijena je naponsko-kinematska slika tečenja metala u sektoru otpreska za pojedine faze presovanja. Integracijom po površini metala koji teče dobijaju se i potrebne sile presovanja.
- Izučavan je i slučaj presovanja kružnog otpreska promjenljive debljine za koji su dobijena opšta rješenja polja napona i brzina. Posebno je riješen specijalan slučaj konusnog otpreska za koji je dobijeno da se polje brzina može predstaviti sa linijskom nehomogenom diferencijalnom jednačinom prvog reda koja je riješena metodom varijacije konstanti za date granične uslove. Dobijena su takodje polja pritisaka po segmentima otpreska čijom integracijom po površini dejstva se nalazi potrebna sila.
- Rješavan je u praksi veoma čest slučaj kružnog otpreska promjenljive debljine koji je ojačan radijalnim rebrima. Analizirana je slika tečenja u fazi popunjavanja rebara. Detaljno je razmatrana završna faza presovanja za koju su dobijena naponsko-kinematska rješenja po sektorima deformisanog otpreska, kao i potrebna sila presovanja. Uradjena je i analiza sa ciljem dobijanja preporuka o obliku žljeba. Dobijeno je da širinu žljeba treba birati kao linijsku funkciju radijusa koja se blago širi od centra ka periferiji.
- Uradjen je i pokušaj primjene teorije tečenja tankog sloja metala na zapreminsko deformisanje presovanjem u završnoj fazi procesa. Ova-

kav oblik deformisanja je tretiran kao tečenje tankog sloja debljine ravne visini vijenca sa uslovima na granici odredjenim karakteristikama žljeba. Dobijeno je polje napona koje zavisi od spoljnog radijusa i visine vijenca, a takodje od položaja i oblika žljeba. Na osnovu ustanovljenog polja, napona nadjena je integracijom potrebna sila presovanja.

- II. Veoma akutelni problem numeričkog modeliranja, na osnovama teorije plastičnosti, procesa zapreminskog deformisanja se karakteriše velikim teškoćama u realizaciji uslovljenim geometrijskom i fizičkom nelinearnošću. Svaki doprinos u ovom pravcu je važan s obzirom na nepostojanje univerzalno uspješnog pristupa pri rješavanju istaknute problematike a takodje uzevši u obzir činjenicu posebno velikog značaja tzv. numeričkog eksperimenta. Navode se dostignuti rezultati:
- Dokazana je identičnost diferencijalne i varijacione postavke problema teorije tečenja za krutoplastično tijelo. Slijedeći ideju Lagranža dobijen je funkcional, minimizacija čijeg dejstva je zadatak analogan rješavanju sistema jednačina teorije plastičnosti.
 - Pokazano je da veoma često korišćeni penalni i modifikovani penalni metod zasnovani na dostizanju uslova nestišljivosti preko velike pozitivne konstante, malo uzimaju u obzir suštinska svojstva plastičnosti. Ovo može usloviti neregularnosti pri rješavanju linearizovanog sistema jednačina diskretizovanog tijela.
 - Data je varijaciona postavka plastičnog tečenja za realno deformaciono tijelo sa pozicije, u poslednje vrijeme nepobitno potvrđene, kvantne prirode procesa plastične deformacije. To je uključilo ostvarivanje veze efekta Markova, koji se manifestuje prigušenjem informacije u žarištima plastične deformacije, sa efektom prostorne organizacije procesa plastične deformacije. Pokazano je da penalna konstanta nije proizvoljno velika već je proizvod iz eksperimentalnih konstanti koje se mogu mjeriti.

- Izvršena je temperaturna diskretizacija koja uključuje formiranje rombičnih elemenata na mreži diskretizovanog tijela kao i korišćenje polinoma Lagranža.
- Postupno i detaljno je izvršena naponsko-deformaciona diskretizacija plastičnog tečenja u okviru dvodimenzionog metoda konačnih elemenata. Postupak je sproveden sredstvima klasičnog diferencijalnog računa a rezultati su prikazani u, za računarsku realizaciju, posebno pogodnom matričnom obliku.
- Uradjeno je detaljno i teorijski korektno diferenciranje komponenti diskretizovanih funkcionala kao neophodna faza neposredne realizacije primjene metode konačnog elementa.

Dalje je izložen predlog novog rješenja procesa obrade metala deformisanjem zasnovan na varijacionom principu i primjeni metode konačnih elemenata koji uključuje i više predloga poboljšanja numeričke realizacije.

- Ovaj pristup je zasnovan na mogućnosti predstavljanja sfernih i devijatorskih napona koji nastaju u deformisanom tijelu u vidu stepenih redova po malom parametru koji je definisan kao količnik napona tečenja pri smicanju i modula stišljivosti materijala. U početnom približenju rješenje se dobija rješavanjem jednačina matematičke fizike i to:
 - a) numeričkim rješenjem tečenja u graničnom sloju;
 - b) numeričkim rješenjem, na osnovu metoda konačnih razlika, polja srednjih normalnih napona nastalih unutar deformisanog tijela dejstvom sile prese;
 - c) toplotno deformacionim proračunom polja temperature i granica tečenja na osnovu toplote zagrijavanja i toplote prelaska mehaničke energije u toplotnu, uz korišćenje numeričkog postupka konačnih razlika.

U sljedećem približenju, koje utičnjava početno, problem se rješava metodom konačnih elemenata na osnovu procedure minimizacije funkcionala disipacije energije plastične deformacije u kojem je poznato polje srednjih napona.

- Pokazano je da brzina i temperatura tačaka na slobodnoj površini deformacionog tijela nijesu nezavisne. One se mogu izraziti kao funkcije susjednih unutrašnjih tačaka tijela što je novi kvalitet u odnosu na uobičajeni pristup ravnopravnog tretiranja unutrašnjih i graničnih slobodnih tačaka. Kako je broj tačaka diskretizovanog tijela na slobodnoj površini pri razmatranju procesa presovanja kao i drugih postupaka u obradi deformisanjem po pravilu velik, istaknuti postupak omogućava znatno smanjenje dimenzije matrice krutosti i samim tim, povećanje tačnosti i brzine proračuna koja je velikim dijelom zavisna od, u iteracionim procesima često ponavljanog, postupka rješavanja linearizovanog sistema jednačina.

- Postavljene su granične jednačine teorije obrade metala deformisanjem na kontaktnim površinama razmatranog osnosimetričnog tijela koje se deformiše presovanjem u otvorenom kalupu, na osnovu:

- a) poznatih eksperimentalno-teorijskih ispitivanja A.N.Levanova provedenih sa ciljem utvrđivanja zakona trenja na kontaktnim površinama;
- b) teorije tečenja u tankom sloju plastičnog materijala u postavci A.A.Iljušina.

Ovim je omogućeno da se u numeričkoj realizaciji procesa obrade deformisanjem može poći od opterećenja koje zadaje mašina, pratiti njegov uticaj na granični sloj, a potom proučiti uticaj na dubinu deformisanog metala. Takav pristup zadavanja opterećenja za razliku od zadavanja pomjeranja pritiskivača prese u odredjenim jednakim kvantima uzima u obzir prirodni korak deformisanja.

- Predložen je novi pristup organizacije matrice krutosti u koju se sada iz čvorova razmatranog osnosimetričnog tijela ne odvođe po dva, već stvarni broj stepeni slobode. Pri tome se koriste istaknute specifičnosti tačaka na slobodnoj površini i kontaktnom dijelu granice. Prednost ovog postupka je, ne samo u smanjenju dimenzija matrice krutosti, već

je izbjegnuta faza njenog naknadnog modificiranja i mnoge netačnosti u vezi s tim. Neposredna realizacija je obezbijedjena preko matrica redukcije koje su definisane za različite elemente diskretizovanog tijela.

- Detaljno je izložen postupak odredjivanja sfernih napona, početnih brzina i temperatura za diskretne tačke plastično deformisanog tijela pomoću metode konačnih razlika, gdje je posebno analizirana specifičnost graničnih tačaka.
- Dat je globalni blok-dijagram za numeričku realizaciju predloženog postupka i blok-dijagram funkcijskog koraka kao centralnog dijela numeričke procedure.

III. Eksperimentalna istraživanja se odnose na osnosimetrično presovanje u otvorenim kalupima. U cilju obrade eksperimentalnih podataka izradjeni su sljedeći programi:

- a) niz programa primjenom kojih je vršena obrada eksperimentalnih rezultata i kod kojih je korišćena činjenica da su ulazni parametri procesa varirani prema višefaktornom ortogonalnom planu. Uradjeni su programi za dvofaktorni (sa i bez medjuzavisnosti), trofaktorni (sa i bez medjuzavisnosti), četvorofaktorni i petofaktorni plan;
- b) niz programa za obradu eksperimentalnih vrijednosti zasnovanih na metodi najmanjih kvadrata pomoću kojih je utvrđivan oblik zavisnosti ulaznih i izlaznih veličina procesa (hiperbolični, stepeni, eksponencijalni, logaritamski);
- c) niz programa za dvodimenzionalno i trodimenzionalno crtanje koji uključuje dvodimenzionalno crtanje jedne ili istovremno više krivih, kao i trodimenzionalnu grafičku interpretaciju sa jednom ili dvije izolinije;

d) paket od 11 potprograma za nalaženje zone intenzivnog tečenja u fazi dopresovanja.

Navode se osnovni rezultati:

- Pokazano je da su sila i otpor vijenca kod presovanja u otvorenim kalupima vezani hiperboličnom zavisnošću sa visinom, iz čega slijedi da je njihova medjusobna veza stepena. Nalaženje ovakvih zavisnosti je omogućilo da se odrede i gradijentne veličine priraštaja širine vijenca, odnosno sile sa visinom u razmatranom trenutku procesa.
- Utvrđeno je da se minimalna sila procesa može prikazati u vidu stepene funkcije parametara presovanja pri čemu je uticaj osnovne visine kalupa, visine izraženog dijela šupljine gornjeg kalupa i prečnika pripremljenka, posmatranih relativno u odnosu na osnovni prečnik, upravljan a uticaj relativne širine izraženog dijela gornjeg kalupa i viška metala obrnut na silu presovanja.
- Dokazano je da je uticaj parametara presovanja na otpor vijenca, u momentu popunjavanja kalupa, analogan po karakteru ali naglašeniji po intenzitetu u odnosu na silu. Pri ispitivanju raspodjele uticaja parametara presovanja na komponente otpora vijenca utvrđeno je da na visinu vijenca nije uticajna relativna visina, a na širinu relativna širina izraženog dijela šupljine gornjeg kalupa. Višak metala ima znatno veći uticaj na visinu nego na širinu vijenca, dok je uticaj prečnika obrnut. Uticaj odnosa osnovnih dimenzija kalupa je ravnomjerno raspoređen na obje komponente. Karakter uticajnosti parametara presovanja je obrnut, sa izuzetkom viška metala.
- Pokazano je da se trenutak popunjenosti kalupa može odrediti preko gradijentnih veličina priraštaja širine vijenca, odnosno sile presovanja sa visinom vijenca. Utvrđeno je da je ds/dh funkcija svih razmatranih parametara presovanja a dF/dh , funkcija karakteristika pripremljenka.

- Utvrđeno je da je uticaj parametara presovanja na intenzitet rasta sile u fazi dopresovanja, po karakteru, obrnut uticaju na minimalnu silu presovanja.
- Analizom na nižim nivoima višefaktornih ortogonalnih planova je nađeno da medjudejstvo relativnih parametara priprema, razmatrano pri konstantnoj geometriji kalupa, ne utiče na karakteristične izlazne veličine presovanja. Suprotan je slučaj kada se razmatra uticaj geometrije pri konstantnim parametrima priprema. Ovdje je dobijeno da na minimalnu silu presovanja i intenzitet rasta sile u fazi dopresovanja je uticajno medjudejstvo relativne visine izraženog dijela šupljine i odnosa osnovnih dimenzija kalupa, a na otpor vijenca u momentu popunjavanja kalupa medjudejstvo relativne širine izraženog dijela kalupa i odnosa njegovih osnovnih dimenzija.
- Nađeno je da u fazi dopresovanja na otpor vijenca preko stepenog modela, od geometrijskih odnosa, utiče samo odnos osnovnih dimenzija kalupa. Sa rastom sile dopresovanja uticaj ovog odnosa opada.
- Utvrđeno je da za slučaj presovanja, gdje oba kalupa imaju izraženi dio šupljine, na karakteristične veličine presovanja utiče medjudejstvo relativnih geometrijskih odnosa izraženog dijela šupljine.
- Riješen je problem odredjivanja zone intenzivnog tečenja pri dopresovanju pomoću napravljenog programa i eksperimentalnih informacija o sili i geometriji vijenca pri presovanju. Pokazano je da se geometrijske karakteristike ove zone u fazi dopresovanja smanjuju po hiperboličnom zakonu.
- Dokazano je da se primjenom spregnutog postupka koji podrazumijeva prethodno odredjivanje zone intenzivnog tečenja može uspješno modelirati sila dopresovanja. Pri korišćenju obrazaca koji su zasnovani na raznim teorijskim postavkama i odgovarajućim aproksimacijama javljaju se relativno velika (sa fazom dopresovanja rastuća) ili pak, po karakteru različita odstupanja.

Na kraju, može se naglasiti da su ova istraživanja imala za cilj da daju doprinos izučavanju procesa zapreminskog deformisanja na širokom frontu teorijskog, numeričkog i eksperimentalnog pristupa. To znači da se postignuti rezultati mogu prihvatiti samo kao etape u budućim istraživanjima. Navode se osnovni pravci daljih izučavanja koji se, kao i svaki originalni intelektualni napor, ne mogu prihvatiti kao definitivni, već naprotiv, zavisno od dobijenih rezultata "u hodu" djelimično ili potpuno izmjenljivi:

1. Dalje ispitivanje mogućnosti primjene teorije tečenja tankog sloja na probleme zapreminskog deformisanja uz stalnu spregu sa numeričkom i eksperimentalnom podrškom. Numerička komponenta istraživanja omogućava relativno jednostavno rješavanje i glomaznih, teorijskih izraza, a eksperimentalna kontrolu dobijenih rješenja.
2. Rad na paketu programa kojim bi se neposredno realizovale predložene teorijske postavke, što s obzirom na nemogućnost korišćenja tipskih programa, zahtijeva timski rad istraživača različitog profila.
3. Usložnjavanje geometrije kalupa (prije svega pravljenjem žljebova) i eksperimentalno izučavanje presovanja za slučaj uvećanog broja ulaznih parametara.
4. Istraživanje fenomena akustične emisije uz saradnju sa Baumanskim institutom (Moskva), radi eksperimentalne verifikacije penalne konstante, kao i naponsko-deformacionog stanja po deformisanom uzorku.

L I T E R A T U R A

1. ALJUŠIN JU.A., ŠULGA S.A.,
Isledovanje procesa osadki cilindričeskikh i kalcevih zagatovok,
Rostov, 1985.g.
2. ALJUŠIN JU.A., OSTRINOV V.P.,
Rasčot formoizmenija pri osadke nizkih cilindričeskikh zagatovok,
Rostselmaš, Rostov, 1985.g.
3. ARKULIS G.E., DOROGOBID V.G.,
Teorija plastičnosti, Metalurgija, Moskva, 1987.g.
4. BATURIN A.I.,
Kompleksnoe modelnoe isledovanje kinematiki tečenija žaropročnih
materialov pri otkritoj šampovke osesimetričnih pokovok, KŠP, No 8,
1983.g.
5. BEZUHOV N.I.,
Osnovi teoriji uprugosti, plastičnosti i polzučesti, Visšaja škola,
Moskva, 1968.g.
6. BOGATOV A.A., MIŽIRICNIJ O.I., SMIRNOV S.V.,
Resurs plastičnosti metala pri obrabotke davleniem, Metallurgija,
Moskva, 1984.g.
7. BRIDŽMEN P.V.,
Isledovanje bolših plastičeskikh deformacij i razriva, IL, Moskva,
1955.g.
8. BROVMAN M.JA., BELKIN L.M.,
Asimetrija plastičeskova tečenija metalov pri osadke s simetričnimi
krajevimi uslovijami, Izvestija AN SSSR, No 1, 1986.g.
9. GROMOV N.P.,
Teorija obrabotki metalov davlenijem, Metallurgija, Moskva,
1978.g.
10. GOTLIB B.M., DOBIČIN I.A. i dr.,
Matematičeskoe modelirovanije i optimizacija procesov plastiče-
skovo deformirovanija materialov na asnove rešenija svjazanoj
zadači termoplastičnosti, UNCAN SSSR, Sverdlovsk, 1986.g.
11. GRUDEV A.P., ZILBERG JU.V., TILIK V.T.,
Trenie i smazka pri OMD, Spravočnik, Metallurgija, Moskva, 1982.g.

12. GUBKIN S.I.,
Plastičeskaja deformacija metalov I-III t., Metalurgizdat,
Moskva, 1960.g.
13. GUBKIN S.I.,
Teorija OMD, Metalurgizdat, Moskva, 1977. g.
14. DEL G.D.,
Opredelenie naprjaženij v plastičeskoj oblasti po raspredeleniju
tvjordosti, Mašinostrojenije, Moskva, 1971.g.
15. DŽONSON V., KUDO H.,
Mehanika procesa vidavlivanija metala, Metalurgija, Moskva, 1965.g.
16. ŽURAVLEV A.Z.,
Osnovi teorii šampovki v zakritih šampah, Mašinostrojenije,
Moskva, 1973.g.
17. ZAJKOV M.A.,
Režimi deformacii i usilija pri gorjačej prokatke, Metalurgizdat,
Sverdlovsk, 1960.g.
18. ZOLOTUHIN N.M.,
O podobii procesov gorjačevo deformirovanija metalov KŠP,
No 3, 1960.g.
19. ZJUŽIN V.A., TRETJAKOV A.V.,
Teorija prokatki, Spravočnik, Metalurgija, Moskva, 1982.g.
20. ILJUŠIN A.A.,
Mehanika splošnoj sredi, MGU, Moskva, 1978.g.
21. ILJUŠIN A.A.,
Plastičnost, GITTL, Moskva, 1948.g.
22. ILJUŠIN A.A.,
Plastičnost. Osnovi matematičkoj teoriji, ANSSSR, Moskva, 1963.g.
23. ILJUŠIN A.A., LENSKIJ V.S.,
Saprativljennie materialov, GIFML, Moskva, 1959.g.
24. ILJUŠIN A.A.,
Deformacija vjazkoplastičeskovo tela, Učonie zapiski MGU, 1940.g.
25. ILJUŠIN A.A.,
Voprosi teorii tečenija plastičeskovo vešestva po poverhnostjami,
PMM, T.XVIII, 1954.g.

26. ILJUŠIN A.A.,
Polnaja plastičnost v procesah tečenja meždu žostkimi pover-
hnostjami, analogija s peščanoj nasipju i nekotorie priloženija,
PMM, T.XIX, 1955. g.
27. ILJUŠIN A.A.,
Nekotorije voprosi teoriji plastičeskovo tečenja, Izv.ANSSSR,
N 2, 1958.g.
28. ILJUŠIN A.A.,
Modelirovanije gorjačih i skorastnih procesov OMD.PMM, No 4, 1952.g.
29. KAČANOV L.M.,
Osnovi teoriji plastičnosti, Nauka, Moskva, 1969.g.
30. KADIMOV V.A.,
Ob odnom efektivnom metode isledovanija tečenja v tonkom sloje,
Izv.AN Azerb.SSSR, No 4, 1982.g.
31. KIJKO I.A.,
Teorija plastičeskova tečenja, MGU, Moskva, 1978.g.
32. Kovka i objomnaja šampovka stalji, Spravočnik, Mašinostrojenje,
Moskva, 1967.g.
33. KOLMOGOROV V.L.,
Mehanika obrabotki metalov davlenijem, Metalurgija, Moskva, 1986.g.
34. MALININ N.N.,
Prikladnaja teorija plastičnosti i polzučesti, Mašinostrojenje,
Moskva, 1968.g.
35. MIHLIN S.G.,
Varijacionie metodi v matematičeskoj fizike, Moskva, 1957.g.
36. NADAI A.,
Plastičnost i razrušenje tvjordih tel, IL, Moskva, 1954.g.
37. NJAŠIN JU.I., SKOROHODOV A.N., ANANEV I.N.,
Varijacionij metod rasčota temperaturnih polje v procesah OMD,
Izv.vuzov SSSR, Černaja metalurgija, No 9, 1973.g.
38. OGIBALOV P.M., KIJKO I.A.,
Zadači plastičeskikh tečenij, Inžinernij žurnal, No 3, 1961.g.
39. Osnovi teoriji OMD (pod red.Storoževa M.V.) Mašgiz, Moskva, 1959.g.
40. OHRIMENKO JA.M., TJURIN V.A.,
Neravnomjernost deformaciji pri kovke, Mašinost., Moskva, 1969.g.

41. POBEDRA B.E.,
Lekciji po tenzornomu analizu, MGU, Moskva, 1974.g.
42. RENNE I.P.,
Teoretičeskie osnovi eksperimentalnih metodov isledovanija
deformaciji metodom setok v procesih OMD, TPI, Tula, 1979.g.
43. LEVANOV A.N., KOLMOGOROV V.L., BURKIN S.P., KARTAK B.R.,
AŠPUR JU.V., SPASKIJ JU.I.,
Kontaktnoe trenije v procesah OMD, Metalurgija, Moskva, 1976.
44. ISAČENKOV E.I.,
Kontaktnoe trenije i smazka pri OMD, Mašinostrojenje, Moskva, 1978.
45. POBEDRA B.E.,
Čislenie metodi v teoriji uprugosti i plastičnosti, MGU, 1981.g.
46. POLUHIN P.I., GUN G.JA., GALKIN A.M.,
Soprotivlenije plastičeskoj deformaciji metalov i splavov, Spravočnik,
Metalurgija, Moskva, 1983.g.
47. PRAGER V.,
Vedenije v mehaniku splošnih sred., IL, Moskva, 1963.g.
48. POZDEJEV A.L., NJAŠIN JU.I., TRUSOV P.V.,
Bolšie uprugoplastičeskie deformaciji: teorija algoritmi, priloženija,
Nauka, Moskva, 1986.g.
49. SVIRID G.P.,
Čislenoe isledovanie osesimetričnih vjazkoplastičeskih tečenij metodom
konečnih elementov, DAN BSSR, XVII, N 9, 1973.g.
50. SEGAL V.M.,
Tehnologičeskie zadači teoriji plastičnosti, Nauka i tehnika Minsk, 1977.
51. SEDOV Li.I.,
Mehanika splošnoj sredi, Nauka, Moskva, 1970.g.
52. SMIRNOV-ALJAJEV G.A.,
Soprotivlenije materialov plastičeskomu deformirovaniju, Mašinostrojenije, Leningrad, 1978. g.
53. STEPANSKIJ L.G.,
Rasčoti procesov OMD, Mašinostrojenje, Moskva, 1979.g.
54. SOKOLOVSKIJ V.V.,
Teorija plastičnosti, Visšaja škola, Moskva, 1969.g.
55. STOROŽEV M.V., POPOV E.A.,
Teorija OMD, Mašinostrojenje, Moskva, 1971.g.

56. TARNOVSKIJ I.JA., LEVANOV A.N., POKSEVATKIN M.I.,
Kontaktne napraženja pri plastičskoj deformaciji, Metalurgija, Moskva, 1969.g.
57. TARNOVSKIJ I.JA., POZDEJEV A.A.,
Po povodu energetičeskikh principov rasčeta v teorii OMD, KŠP, No 6, 1970.g.
58. TARNOVSKIJ I.JA., POZDEJEV A.A., GANAGO O.A.,
Deformaciji i usilija pri OMD, Mašgiz, Moskva, 1959.g.
59. MAKUŠEK E.M., MAKUŠEVIČ A.S., SEVERDENKO V.P., SEGAL V.M.,
Teoretičeskie osnovi kovki i gorjačej objomnoj šampovki, Nauka i tehnika, Minsk, 1968.g.
60. Teorija OMD (pod red. Tarnovskovo I.JA.), Metalurgija, Moskva, 1963.
61. TOMLENOV A.D.,
Teorija Plastičeskova deformirovanija metalov, Metalurgija, Moskva, 1972.
62. TRETJAKOV A.V., ZJUZHIN V.I.,
Mehaničeskie svojstva metalov i splavov pri obrabotke davlenijem, Spravočnik, Metalurgija, Moskva, 1973.g.
63. TRETJAKOV A.V., PROFIMOV G.K., ZJUZHIN V.N.,
Mehaničeskie svojstva metalov i splavov pri obrabotke davlenijem, Metalurgija, Moskva, 1964.g.
64. TEREBUŠKO O.I.,
Osnovi teoriji uprugosti i plastičnosti, Nauka, Moskva, 1984.g.
65. UNKSOV E.P.,
Inžinernije metodi rasčeta usilij pri OMD, Mašgiz, Moskva, 1955.g.
66. UNKSOV E.P.,
Metodi modelirovanija procesov OMD, KŠP, No 4, 1975.g.
67. HIL R.,
Matematičeskaja teorija plastičnosti, GITTL, Moskva, 1956.g.
68. ČIČENOV N.A., KUDRIN A.B., POLUHIN P.I.,
Metodi isledovanija procesov OMD, Metalurgija, Moskva, 1977.g.
69. ŠOFMAN L.L.,
Približonije rešenija nekatorih trjohmernih zadač OMD, KŠP, No 4, 1966.
70. Metali, Metod ispitanija na osadku, GOST 8817-73, 1973.g.
71. ŠOFMAN L.A.,
Teorija i rasčoti procesov holodnoj šampovki, Mašinostrojenije, Moskva, 1964.g.

72. ZEINKIEWICZ O.C.,
The finite element method in engineering science, Megrawhill,
London, 1971.g.
73. KLAUS-JURGEN BATHE, Finite element procedures in engineering
analysis, New Jersey, 1982.g.
74. GALLAGHER R.H.,
Finite element analysis-fundamentals, Prentice-hall, Englewood
Cliffs, New Jersey, 1975.g.
75. SEGERLIND L.J.,
Applied Finite Element analysis, John Wiley and sons, Inc. New York
/London/Sydney/Toronto/, 1976.g.
76. THOMSEN E.G., YANG C.T., KOBAYASHI S.,
Mechanics of plastic deformation in metal processing, The Macmillan
company, New York, 1969.g.
77. HILL R.,
The Mathematical Theory of plasticity, Oxford at the Clarendon
press, 1950.g.
78. PITTMAN J.F., WOOD R.D., ALEXANDER J.M., ZIENKIEWICZ O.C.,
Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Swansea, 1982.g.
79. ZIENKIEWICZ O.C., MORGAN K.,
Finite Element and Approximation, University of Wales, Swansea, 1983.g.
80. JONSON W., MELLOR P.B.,
Engineering Plasticity, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1979.g.
81. BACKOFEN W.A.,
Deformation Processing, Addison-wesley publishing company, Ontario,
1977.g.
82. NORRIE D.H., VRIES G.,
An Introduction to Finite Element Analysis, Academic Press New-York-
San Francisco-London, 1978.g.
83. CHEUNG Y.K., YEO M.F.,
A Practical Introduction to Finite Element Analysis, Pitman Publishing
Limited, 1979.g.
84. VUJOVIĆ V., SHABAIK A.H.,
A New Workability Criterion for Ductile Metals, Journal of Engineering
Materials and Technology, 1986.g.

85. PRACIK M.,
Analiza stanów naprężenia i odkształcenia w prawkach poddanych odkształceniom plastycznym w procesie sprężania, Zeszyty naukowe politechniki świątokrzyskiej, Mechanika 37.
86. SZYNDLER R., KLIMKIEWICZ B.,
Wpływ niejednorodności plastyczne materiały na kinematykę procesu sprężania, Zeszyty naukowe politechniki świątokrzyskiej, Mechanika 37.
87. HWANGT S.M., KOBAYASHI S.,
Preform Design in Disk Forging, Int. J. Mach. Tool Des. and Res., Vol. 26, No 3, 1986.g.
88. DADRAS P., BURTE P.R.,
Nonisothermal Axisymmetric Forging, Trans. ASME: J. Eng. Ind. T. 108, No 4, 1986.g.
89. MAHREHOLTZ O.,
Different Finite Element Approaches to Large Plastic Deformations, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, Vol 33, 1982.
90. HARTLEY P., STURGESS C.E.N., ROWE G.W.,
Friction in finite element analysis of metalforming processes, Int. J. Mech. Sci., Vol. 21, No 5, 1979.
91. OH I., LAHOTI G.D., ALTAN T.,
Alpid-A general purpose FEM program for metal forming, SME Manuf. Eng. Trans., Vol. 9, 1981.g.
92. PRICE J.W.H., ALEXANDER J.M.,
Specimen geometries predicted by computer model of high deformation forging, Int. J. Mech. Sci., Vol. 21, No 7, 1979.g.
93. KOBAYASHI SH.,
Metalworking process modelling and finite element method, SME Manuf. Eng. Trans., Vol. 9, 1981.g.
94. WANG Z.R., LI S.D., LIN L.J.,
On the division of stress states on the yield Locus and correspondence between the regions on the yield Locus and the size variation workpieces during metal forming, SME Manuf. Eng. Trans., Vol. 9, 1981.g.
95. SHAH S.N., LEE C.H., KOBAYASHI S.,
Compression of tall circular solid cylinders between parallel flat dies, Proc. Int. Conf. Prod. Eng., Tokyo, 1974.g.
96. MAHREHOLTZ O., DUNG N.L.,
On finite element methods in metal forming, steel research, Vol. 57, No 3, 1986.g.

97. DEVAUX J., GELIN J.C., OUDIN J., RAVALARD Y.,
Theoretical analysis and experimental applications of barreling and
folding in cylinder upsetting tests, Int. J. Mech.Sci., Vol.26.
N 11/12, 1984.g.
98. SCHREURS P.J.G., VELOPAUS F.E., BREKELMANS W.A.M.,
Simulation of forming processes, using the arbitrary Eulerian-
Lagrangian formulation, Computer methods in applied mechanics
and engineering, Vol. 58, No 1, 1986. g.
99. MONAGHAN J.M., D'REILLY M.,
Factors influencing fill out of a closed die during cold forging, Int.
J.Mach.Tool.Des.and Res., Vol.26, No 4, 1986.g.
100. CLIFT S.E., HARTLEY P., STURGESS C.E.N., ROWE G.W.,
Fracture initiation in plane strain forging, Proc, 25 th Int.Mach.
Tool Des.and Res. Conf., Birmingham, 1985.g.
101. BANERJEE J.K., CARDENAS G.,
Numerical analysis of the barreling of solid cylinders under axisymmetric
compression, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.
107, 1985.g.
102. BANERJEE J.K.,
Barreling of solid cylinders under axial compression, Journal of
Engineering Materials and Technology, Vol.107,1985.g.
103. MISHRA R.K.,
Theoretical and experimental studies of on axisimmetric compound
flow problem, Proc.Jut.Conf.Prod.Eng., New Dehli, Vol.1.1977.g.
104. ČULAFIĆ Z.,
Teorija i rješenja problema tečenja metala, NIO "Univerzitetaska riječ",
Titograd, 1985.g.
105. FEDOTOV V.P.TRUBIN V.N. i dr.,
Opređenje naprjaženava sastajanja po deformirovanamu pri kovke,
"OMD", N 13, Sverdlovsk, 1986.g.
106. UNKSOV E.P. i dr.,
Teorija plastičkih deformacij metalov, Mašinstrojenje, Moskva, 1983.g.
107. EVSTRATOV V.A.,
Teorija OMD, HGU, Harkov, 1981.g.
108. MASOLOV P.P., MJASNIKOV V.P.,
Mehanika žostkoplastičeskih sred.Nauka, Moskva, 1981.g.
109. LUBARDA V.,
Variational formulation in the analysis of finite elastic-plastic defor-
mation, Teorijska i primijenjena mehanika, N 11, 1985.g.

110. AVITZUR B.,
Limit Analysis of Disk and Strip Forging, Int.l.Machine Tool
design and Research, N 9, 1969.g.
111. OGIBALOV P.M.,
Teorija plastičeskikh deformacij pri visokih temperaturah tjela,
Vesnik MGU, N 12, 1950.g.
112. ILJUŠIN A.A., OGIBALOV P.M.,
O plastičeskikh deformacijah v plastičeskoj trube pod vozdejsvijem
impulsov temperaturi i visokih davlenij, Izvestija AN SSSR, N 12,
1958.g.
113. ILJUŠIN A.A., OGIBALOV P.M.,
Uprugo-plastičeskie deformacii polih cilindrov, Izd-vo MU, Moskva, 1960.g.
114. NOWACKI W.,
Teoria sprężystości, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa,
1970.g.
115. ALJUŠUN JU.A.,
Energetičeskie harakteristiki deformirovanova sastajaniya, Obrabotka
metalov davlenijem, N 13, Sverdlovsk, 1986.g.
116. KARPOV S.V.,
Variant primeneniya konečnih elementov dlja rasčota naprjažona-
deformirovanova sastajaniya na osnove funkcionala principa virtualnih
peremeščenij i naprjaženij, Obrabotka metalov davlenijem, N 13, Sverdlo-
vsk, 1986.g.
117. LOGINOV JU.N.,
Formoizmenenije poristova cilindra pri osadke, Obrabotka metalov
davlenijem, N 13, Sverdlovsk, 1986.g.
118. MIHAJLOV A.V.,
Zamena funkcionala virtualnih skorastjej i napraženij posledavatelnostju
kvadratičnih funkcionalov, Obrabotka metalov davlenijem, N 13, Sverdlo-
vsk, 1986.g.
119. RENE I.P., ŠMELEV V.E.,
Odnaz iz vazmožnih postanovok rešenija MKE osesimetričnoj zadači OMD,
Obrabotka metalov davlenijem, N 13, Sverdlovsk, 1986.g.
120. PERETJATKO V.N., MITROFAKOV A.N.,
Rasčot teplovih procesov pri šampovke metodom konačnih elementov,
Obrabotka metalov davlenijem, N 13, Sverdlovsk, 1986.g.
121. BAAKAŠVILI V.S.,
Mehaničeskoje povedenije materijalov pri plastičeskoj deformacii,
Tbilisi, 1986.g.

122. BAKLI D.,
Poverhnostnije javlenija pri adgeziji i frikcionom vzaimodejstviji,
Mašinostrojenije, Moskva, 1986.g.
123. LANDAY L.D., LIFŠIC E.M.,
Teorija uprugosti, Teoretičeskaja fizika tom VII, Nauka, Moskva, 1987.g.
124. BERTOLINO M.,
Numerička analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1981.g.
125. MUSAFIJA B.,
Primijenjena teorija plastičnosti I i II dio, Sarajevo, 1973.g.
126. DEMIDOVIC B.P., MARON I.A., ŠUVALOVA E.A.,
Čislenije metodi analiza, Fiz-mat.literatura, Moskva, 1962.g.
127. TIHONOV A.N., SAMARSKIJ A.A.,
Uravnenija matematičeskoj fiziki, Nauka, Moskva, 1968.g.
128. SHECHTER R.S.,
The variational method in engineering, Mc Graw-Hill Book Company,
New-York, 1967.g.
129. KORN G., KORN T.,
Matemactical handbook, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1968.g.
130. LEE C.H., KOBAYASHI S.,
New solutions to rigid-plastic deformation problems using a matrix
method, Trans.ASME, I. of Engng. for Ind, Vol. 95 1973.g.
131. OGIBALOV P.M. i dr.,
Očagi plastičeskoj deformaciji, osnovnoj objekt mehaniki realnih tel,
Mehanika kompozitnih materialov, N 1, 1988. g.
132. OGIBALOV P.M. i dr.,
Nelokalnaja teorija strukturirovanih kompozitnih materijalov, Mehanika
kompozitnih materialov, N 3, 1984.g.
133. BAHVALOV N.S., ZIDKOV N.P., KOBELKOV G.M.,
Čislenie metodi, Nauka, Moskva, 1987.g.
134. OGIBALOV P.M. i dr.,
Dinamičeskaja kalibrovka disipaciji v kompozitnih nelokalnih sredah,
Mehanika kompozitnih materialov, N 2, 1985.g.
135. ARTJUNOV JU.S., GONOR A.L.,
Osaživaniye pokovok proizvoljnoj formi v plane, Izv. AN SSSR, N 1, 1963.g.

136. VUKČEVIĆ M., DOMAZETOVIĆ V.,
Prilog ispitivanju koeficijenta trenja pri toplom sabijanju cilindričnih
uzoraka od Al-legure, SPSJ, Opatija, 1987.g.
137. VUKČEVIĆ M.M.,
Rasčot procesov objomnoj šampovki v uslovijah narušenoj simetriji,
VINITI, Moskva, 1988.g.
138. LENIK K., VUKČEVIĆ M.,
Zatsowanie metod numerycznych do oceny wplywu srodkow smornych
na przebieg procesu wytłaczania, Metallurgy and foundry practice,
Bulletin 110, Cracow, 1987.g.
139. HARTMANN K., LEZKI E., SCHAFER W.,
Statistische Versuchsplanung und-auswertung in der stoffwirtschaft,
Leipzig, 1974.g.
140. STANIĆ J.,
Metod inčenjerskih mjerenja (uvod u matematičku obradu eksperimenta),
Mašinski fakultet, Beograd, 1975.g.
141. STANIĆ J.,
Matematičke osnove tehnoekonomske optimizacije obradnih procesa,
Mašinski fakultet, Beograd, 1976.g.
142. STANIĆ J., KALAJDŽIĆ M., KOVAČEVIĆ R.,
Mjerna tehnika u tehnologiji obrade metala rezanjem, Gradjevinska
knjiga, Beogrd, 1983.g.
143. VUKČEVIĆ M.,
Istraživanje postupka redukcije stepena slobode diskretizovanog
tijela pri numeričkoj simulaciji procesa kovanja, JUPITER, Cavtat, 1989.g.
144. VUKČEVIĆ M., LENIK K.,
Okreslenie wielkosci w procesach kucia uzebrowanych odkuwek, Proce
Wydziału Mechanicznego, Lublin, 1988.g.
145. KACEV P.G.,
Statističeskie metodi isledovanija režuševo instrumenta, Mašinostroje-
nije, Moskva, 1974.g.
146. VINOGRADOV I.M., (glavni redaktor),
Matematičeskaja enciklopedija (tom 1-5), Sovjetskaja enciklopedija,
Moskva, 1977.g.
147. TELERIN G.P., POLUHIN I.P.,
Osnovi optimizacii i avtomatizacii projektirovanija tehnologičeskih
procesov gorjačej objomnoj šampovki, Mašinostrojenije, Moskva, 1979.g.

148. THOMAS A., BANNISTER I.,
The accuracy of forging load estimation in drap forging, Proc.17 th
Int.Mach.and Tool Des.and Res. conf.Birmingham 1976.g., Birmingham.
149. DEAN T.a.,
Load and "rise", their dependence of flash geometry and machine
characteristics in drop forging, Proc.17 th Int.Mach.Tool Des.and
Res.Conf., Birmingham 1976.g., Birmingham.
150. BALOGUN S.A.,
Determination of deformation forces in cavity press forging, Metals
Technol., 1974.g., N 8.
151. STEPANSKIJ L.G., PETROV A.I., JAHNIS M.A.,
Rasčoti formoizmenenija pri oblojnoj šampovke kruglih v plane pokovok .
152. GRINBERG I.M., RENNE I.P.,
Rasčot udelnovo usilija deformirovanija pri gorjačej šampovke osesime-
tričnih pokovok. KŠP, N 8, 1983.g.
153. CRAMPHORN A.S., BRAMLEY A.N.,
Computer aided forging design with UBET, Pros.18 th Int. Mach.Tool
Des.and Res.Conf., London, 1977.g.
154. ALIEV Č.A.; TETERIN G.P., KAFAROV R.N.,
Opredelenije stepeni složnosti pokovok s primenenijem avtomatizirovanih
metodov klasifikaciji s samoobučenijem, KŠP, N 6, 1985.g.
155. A.HENZEL, T.ŠPITEL i dr.,
Optimizacija rashoda energii v procesah deformacii, Moskva, Metalurgija,
1985.g.
156. WASHIZU K.,
Variotional methods in elasticity and plasticity, Pergman press, Tokyo,
1982.g.



U N I V E R Z I T E T " V E L J K O V L A H O V I Ć "

MAŠINSKI FAKULTET TITOGRAĐ

MR MILAN VUKČEVIĆ,

PRILOG ISTRAŽIVANJU TERMO-MEHANIČKIH PARAMETARA PRI
OBRADI PRESOVANJEM

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

P R I L O Ž I

TITOGRAĐ, 1989. GODINA

16-528593
621.7:530.374(02.3)

Muz IV 3361 perlog

inv. ep. 8953

S A D R Ź A J

Strana

PRILOG	1.	Literaturni pregled	1
PRILOG	2.	$\Delta(s, \tau)$ (4.6.25)	14
PRILOG	3.	$\dot{\epsilon}_{rr}$ (4.6.33)	19
PRILOG	4.	$\dot{\epsilon}_{zz}$ (4.6.38)	24.
PRILOG	5.	Matrice redukcije elemenata diskretizovanog tijela...	29
PRILOG	6.	Blok dijagrami	37
PRILOG	7.	Eksperimentalne fotografije	40
PRILOG	8.	Programi za analizu eksperimentalnih rezultata	46
PRILOG	9.	Programi za metod najmanjih kvadrata	75
PRILOG	10.	Izlazi sa računara	80
PRILOG	11.	Programi za 2D i 3D grafiku	104
PRILOG	12.	Programi za odredjivanje žarišta deformacije	121

P R I L O G 1.

LITERATURNI PREGLED

L I T E R A T U R N I P R E G L E D

Procesi obrade deformisanjem su obično praćeni velikim plastičnim deformacijama, složenom geometrijom izradka kao i efektima trenja na površima dodira alata i uzorka koji se deformiše. Ovo uslovljava da se egzaktna rješenja, u matematički zatvorenom obliku, dobijaju samo za specijalne slučajeve deformisanja. Većina takvih rješenja je dobijena uz mnoge pretpostavke koje modeliraju stvarne uslove, što limitira njihovo korišćenje u praktičnim primjenama.

Složenosti su posebno izražene kod procesa zapreminskog oblikovanja gdje određivanje sile deformisanja kao i rasporeda napona i deformacija po uzorku predstavljaju ekstremno teške zadatke. Ističu se neki dostignuti rezultati na bazi primjene metoda teorije plastičnosti, numeričkog modeliranja i izvršenih eksperimenata koji su posebno aplicirani na razmatrane procese presovanja.

Inženjerski metod

Prema M.V.Storoževu [55, 59, 106] sila u završnoj fazi zapreminskog deformisanja u otvorenim kalupima može se odrediti kao suma:

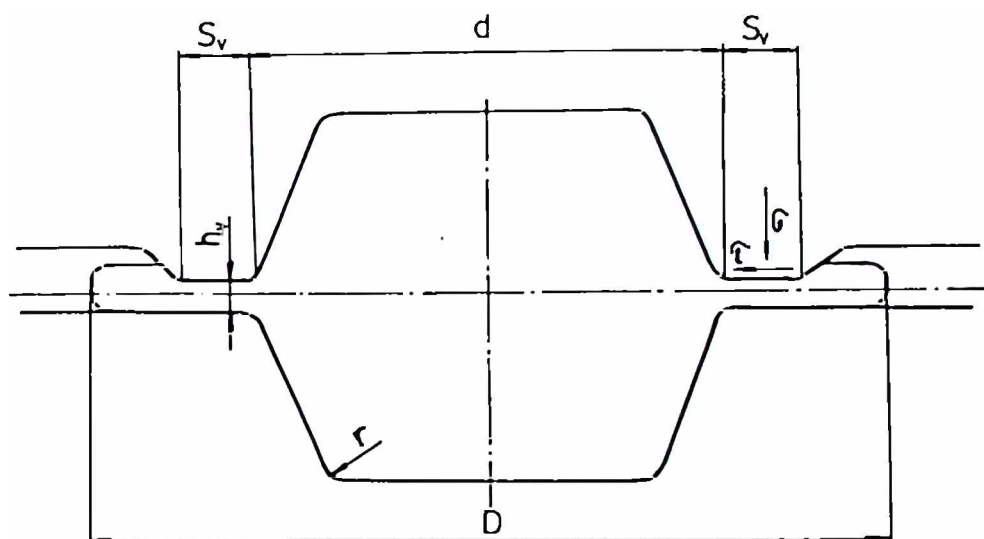
$$F = F_v + F_k \quad (1.1)$$

gdje su:

- F_v - sila neophodna za deformaciju metala u vijencu,
 F_k - sila neophodna za deformaciju u kalupu.

Sila F_v je dobijena pod određenim pretpostavkama (sl.1.1):

- deformacija vijenca se posmatra kao slobodno sabijanje,
- tangentialni naponi u vijencu su konstantni i linijski vezani sa naponom tečenja,
- kao granični, koristi se uslov prstenastog okruženja vijenca sa metalom u magacinu,
- za određivanje sile koristi se teorema Guldena,
- u cilju uprošćenja završnog izraza koristi se uslov $d \gg s$.



Sl.1.1.1. Šematski prikaz izgleda otvorenog kalupa za zapreminsko oblikovanje.

Sila F_k se takođe dobija uz odgovarajuća uprošćenja fizičkog modela:

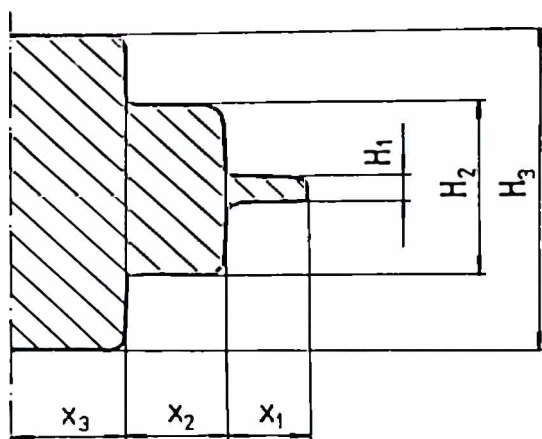
- uzima se u obzir ovalni oblik zone intenzivnog tečenja,
- na osnovu analize metodom linija klizanja normalni naponi se aproksimiraju logaritamskom zavisnošću sa bezdimenzionom veličinom odnosa pripadnog radijusa i visine vijenca,
- odnos h_v/d se smatra malom veličinom,
- uzima se u obzir uticaj metala u vijencu na deformisanje metala u kalupu.

Konačni izraz za silu ima oblik:

$$F = \sigma_s \left\{ \left(1,5 + \mu \frac{s_v}{h_v} \right) A_v + \left(\frac{2\mu s_v}{h_v} - 0,375 + 1,25 \ln \frac{d}{h_v} \right) A_k \right\} \quad (1.2)$$

gdje su: A_k , A_v - površine projekcije uzorka odnosno mosta vijenca na ravan razdvajanja.

Prema Fosteru [148, 150] silu deformisanja je moguće naći ako se kontaktne naponi modeliraju prema Kulonovom zakonu a potom se postupnom integracijom po djelovima otkovka (sl.1.2) dolazi do rješenja.



Sl.1.2. Osnosimetrični uzorak

Za prvi dio uzorka (vijencac) sila se nalazi prema obrascu:

$$F_1 = 2\pi \sigma_s \left(Dx_1 + \mu \frac{Dx_1^2}{H_1} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{2\mu x_1^3}{3H_1} \right) \quad (1.3)$$

gdje su:

- D - radijus deformisanog komada sa vijencem,
- μ - koeficijent trenja,
- σ_s - napon tečenja.

Za drugi dio odpreska (definisan sa x_2 i H_2) sila se računa po izrazu (1.3) u kojem je D zamijenjeno sa $(D-H_1)$, x_1 sa x_2 i H_1 sa H_2 . Analogno je i za treći dio.

Dean je predložio [148, 149] da se u završnoj fazi presovanja zona intenzivnog tečenja modelira sa diskom čija debljina je određena debljinom vijenca, te je nakon odredjenih aproksimacija dobio izraz za silu:

$$F = \pi R_t^2 \sigma_s \left\{ \left(\frac{h}{\sqrt{2\mu R_t}} \right)^2 \left[\frac{2\mu R_s}{h+1} \exp(2\mu s/h) - \frac{2\mu R_t}{h-1} \right] + \left(\frac{R_s}{R_t} \right)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mu + 2\sqrt{3} \frac{R_s}{9h} \right] \right\} \quad (1.4)$$

gdje su:

- R_t - radijus uzorka sa vijencem,
- R_s - radijus do kojeg metal teče,
- R_c - radijus uzorka bez vijenca,
- h, s - visina i širina vijenca.

Radijus R_s se računa po obrascu:

$$R_s = R_t - \frac{h}{2\mu} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \mu \right) \quad (1.5)$$

E.I.Semenov [106] je analizom uticajnih faktora presovanja preko niza aproksimacija dobio izraz za silu u obliku:

$$F = \sigma_s \left\{ \left(2 + \frac{s}{2h} \right) A_v' + \left[2,5 + \frac{s}{h} + 0,185 \left(\frac{d}{h} - 2 \right) \right] A_k' \right\} \quad (1.6)$$

gdje su:

d - prečnik osnosimetričnog uzorka;

A_v', A_k' - površine horizontalnih projekcija uzorka i vijenca sukcesivno određene formulama:

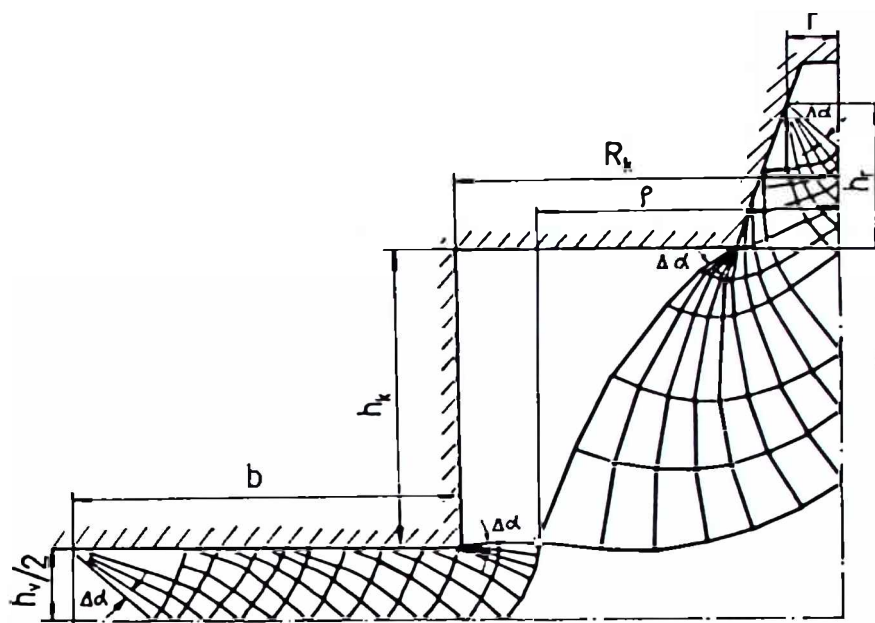
$$A_v' = (\pi/4) [(d+2s)^2 - (d-2h)^2]; \quad A_k' = (\pi/4) (d-2h)^2 \quad (1.7)$$

Ukupna sila na kraju deformisanja može se odrediti i korišćenjem principa "gornjeg ormara" [106]. Po tom principu, a za slučaj korišćenja energetskog uslova plastičnosti, dobija se izraz za ukupnu silu presovanja na kraju procesa po obrascu:

$$F = \sigma_s \pi \left[\frac{(d+2s)^2}{4} + \frac{d^3}{\sqrt{3} 12h} + \frac{2}{3} \mu \frac{(d+2s)^3 - d^3}{8h} \right] \quad (1.8)$$

Metod linija klizanja

Primjenom metode linija klizanja mogu da se odrede naponi, a zatim i neophodna sila za deformisanje materijala. Šema krutih i plastičnih zona u fazi tečenja metala [69,71] za slučaj trenja klizanja na kontaktnim površinama je data na (sl.1.3). Posmatran je slučaj presovanja u otvorenim kalupima sa izraženim dijelom šupljine gornjeg kalupa. Pri postavljanju mreže linija klizanja i određivanju krutoplastičnih granica, u razmatranom slučaju, nije neophodno uzimati u obzir oblik djelova kalupa koji ne dolaze u kontakt sa plastičnim zonama deformisanog tijela, a takodje ni granične uslove na tim djelovima. Analogno se može postaviti polje linija klizanja i odrediti položaj linije podjele tečenja metala pri bilo kojim drugim graničnim uslovima.



SI.1.1.3. Polje linija klizanja i granice plastičnog tečenja pri presovanju sa vijencem i izraženim dijelom šupljine gornjeg kalupa.

Grafičku konstrukciju treba ponavljati pri razmatranju svake etape presovanja. Zato je korisno predstaviti konačne rezultate teoretske analize u vidu približnih analitičkih izraza. Približna formula za određivanje tačke dijeljenja metala ima oblik [71]:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{r} = \frac{R_k + 2r}{2r} + \frac{2\mu_v b}{h_v} - \left(1 + \frac{h_v}{4r} + \frac{h_k}{7,5r} + \frac{2\mu_r h_r}{r}\right) \frac{h_v}{2r} \quad (1.9)$$

gdje su:

- ρ - radijus uslovne cilindrične površi koja dijeli tečenje metala,
- R_k - radijus šupljine kalupa,
- b, h_v - širina i debljina vijenca,
- r, h_r - radijus otvora i dubina tečenja metala u otvoru,
- μ_v, μ_r - koeficijenti trenja na površinama vijenca i otvora.

Energetski metod

U analizi naponskog režima pri presovanju u otvorenim kalupima može se koristiti i varijacioni metod koji je po svojoj prirodi energetski [56, 106, 125, 107]. Ovdje se koristi uslov lokalizacije zone plastične deformacije u završnoj fazi presovanja a zatim modelira radijalno pomjeranje čestica metala preko funkcije od r i z koordinate. Nepoznati koeficijent ove funkcije se često određuje

iz uslova konstantnosti zapremina a pomjeranje u z pravcu iz uslova nestišljivosti. Nadjena pomjeranja omogućavaju definisanje deformacija.

Sama sila procesa se nalazi iz uslova [58] da je suma varijacija unutrašnjih i spoljašnjih otpora deformacije jednaka nuli što je vezano sa glomaznim računanjima. Zato su predložene računске aproksimacije primjenom kojih se dobija približna formula:

$$F = 11 R_v^2 \sigma_s \left[1 + 0,17 \frac{R_v}{h_v} - 0,013 \left(\frac{R_v}{h_v} \right)^{1,5} \left(\frac{R_k}{R_v} \right)^{3,5} \right] \quad (1.10)$$

gdje su:

R_v, R_k - radijus vijenca i kalupa sukcesivno,
 h_v - visina vijenca.

Primjena teorije tečenja tankog sloja metala

Teorija tečenja tankog sloja plastičnog materijala koju je predložio A.A.Iljušin [25,26] je posebna varijanta teorije viskoplastičnog tečenja koja se uspješno primjenjuje za proračun procesa obrade deformisanjem. Na osnovu ispitivanja klasičnog problema Prandtla, A.A.Iljušin je postavio niz fizičkih hipoteza. Pomoću njih je izradio približni matematički model koji uspješno opisuje u prvom približenju nestacionarno zapreminsko plastično tečenje u tankom sloju. Posebno su značajne primjene na ožljebljene elemente s obzirom da je proračun ovakvih elemenata drugim metodama teorije plastičnosti veoma otežan.

Sila presovanja kvadratne ploče [26,38] omedjene žljebom se može odrediti obrascem:

$$F_1 = a^2 \sigma_s \left(2 + \frac{a}{3\sqrt{3}h} \right) \quad (1.11)$$

gdje su: a, h - osnovna dimenzija i visina ploče sukcesivno.

Za analogan slučaj kružne ploče je dobijeno:

$$F_2 = 211 R^2 \sigma_s \left(1 + \frac{R}{3\sqrt{3}h} \right) \quad (1.12)$$

gdje su: R, h - radijus i visina ploče.

Sila presovanja kružne ploče višestruko ožljebljene kružnim žljebovima se može odrediti obrascem [104]:

$$F_3 = 2 \pi t \sigma_s \left[\frac{2n^2 - n + 1}{2} + (3n^2 - 2n + 3) \frac{t}{24h} \right] \quad (1.13)$$

gdje su:

t – rastojanje izmedju žljebova,

n – broj žljebova.

Primjenom ove teorije može se dobiti naponska slika i u diskretnim trenucima procesa deformisanja pri čemu se rješenje znatno uprošćava korišćenjem pješćane analogije [25, 26, 27] .

Empirijski obrasci

Pored obrazaca koji su dobijeni korišćenjem metoda primijenjene teorije plastičnosti, za izračunavanje sile presovanja u otvorenim kalupima, u literaturi postoji niz obrazaca dobijenih statističkom obradom eksperimentalnih rezultata ili kombinovanjem analitičkih i eksperimentalnih metoda. I pored toga, što su ovi obrasci predloženi kao univerzalni zbog specifičnih uslova u kojima se dobijaju treba ih tek uz provjeru koristiti. [107, 147, 148, 149, 150] :

– Prosti empirijski obrazac:

$$F = c \sigma_s A \quad (1.14)$$

gdje su:

A – projekcija otkovka sa vijencem na ravan razdvajanja,

c – parametar koji uzima u obzir složenost otkovka (poprima vrijednost 2 – 12) .

– Obrazac Rebeljskog:

$$F = 6,284(1 - 0,0254 D)(1,1 + 0,787/D)^2 \sigma_s D^2 \quad (1.15)$$

gdje je: D – prečnik otkovka sa vijencem.

Ostali uticaji su uzeti u obzir empirijski preko koeficijenata.

- Obrazac Neurbergera:

$$F = 0,635 (37 + 87 A/d) A_t \quad (1.16)$$

gdje su:

A, A_t - površine otkovka bez vijenca i sa vijencem sukcesivno,
 d - prečnik otkovka bez vijenca.

- Obrazac Baloguna:

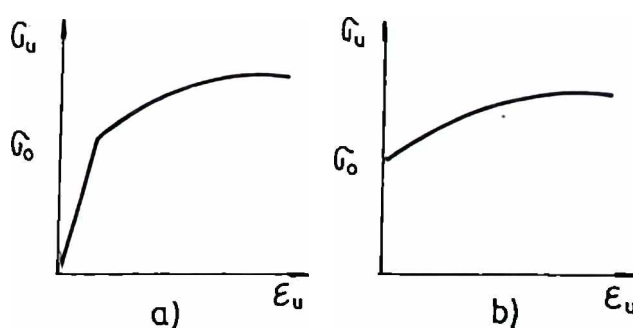
$$F = 10,55 A + 122,9 W - 0,09 T + 15,86 z - 27,36 c + 63,05 \quad (1.17)$$

gdje su:

c - parametar koji uzima u obzir složenost odpreska,
 T - temperatura odpreska,
 W - težina komada,
 z - odnos širine i visine vijenca.

Primjena metode konačnih elemenata na procese obrade deformisanjem

U vezi sa sve većim razvojem kompjuterske tehnike veoma je aktuelan problem numeričkog modeliranja procesa obrade deformisanjem koje se najčešće vrši na osnovu metode konačnih elemenata. Sam pristup je određen usvojenim modelom materijala koji se deformiše (sl.1.4).



Sl.1.4. Aproximacioni oblici naponsko-deformacione krive:
 a) elasto-plastični;
 b) kruto-plastični.

Za elastično-plastični model, metod konačnog elementa je primarno formulisan na bazi pretpostavke o lokalnoj plastičnosti inicijalno elastičnog materijala. Na ovaj način je metod konačnog elementa koji se primjenjuje na linearno

elastične probleme modifikovan za rješavanje elastično-plastičnih problema sa malim deformacijama [72,73,75,79]. Kod elastično-plastičnih problema sa velikim deformacijama, kinematska nelinearnost može biti razmatrana dopunski u toku samog procesa deformisanja. Rješenje ovakvih problema je razvijeno na bazi inkrementalne procedure pri čemu se utvrđuje granica prelaza između elastičnog i plastičnog materijala [74,79,89,98,109].

Za većinu procesa obrade deformisanjem koji su praćeni velikim deformacijama elastični dio je vrlo mali u odnosu na plastičnu. To uslovljava da je opravdano koristiti kruto-plastični model (sl.1.4b) i time zanemariti elastični dio u matematičkoj formulaciji. Ovakav kruto-plastični pristup će dalje biti posebno razmotren zbog sve veće njegove primjene, uslovljene jednostavnom formulacijom i ekonomijom kompjuterskog vremena [78,90,91,92,93,94,96,116,130].

Posmatra se tijelo zapremine V i površine S koja se sastoji iz površina S_p i S_v . Naponi p_i djeluju na površini S_p a brzina v na površini S_v , dok zapreminske sile odsustvuju. Naponi σ_{ij} i brzine v_{ij} zadovoljavaju sljedeće relacije:

- jednačine ravnoteže koje za slučaj odsustva zapreminskih sila mogu biti tenzorski zapisane u sljedećem obliku:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.18)$$

Ova relacija označava izvod komponentnih napona σ_{ij} po promjenljivim koordinatama x_j .

- formule veze brzina i brzina deformacije koje na analogan način mogu biti zapisane:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.19)$$

- uslov nestišljivosti

$$\dot{\epsilon}_v = v_{i,i} = 0 \quad (1.20)$$

- relacije veze napona i brzine deformacije saglasno teoriji plastičnog tečenja:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\dot{\epsilon}_u} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.21)$$

gdje je: s_{ij} - devijator napona, a σ_u i $\dot{\epsilon}_u$ su intenzivnost napona i intenzivnost brzine deformacije respektivno, koje u tenzorskom zapisu imaju oblik:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij} \quad (1.22)$$

- granične uslove:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= p_i \quad \text{na } S_p \\ v_i &= V_i \quad \text{na } S_v \end{aligned} \quad (1.23)$$

gdje je: \vec{n} - jedinična spoljna normala na odgovarajuću površinu.

Neka je \vec{v}_i^* brzina koja zadovoljava uslov nestišljivosti (1.20) i granične uslove (1.23). Ako je σ_{ij} polje napona koje je u ravnoteži sa površinskim naprezanjima (pretpostavlja se da nema zapreminskih sila) iz relacija (1.18) i (1.23) slijedi:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_{S_p} p_i v_i^* dS + \int_{S_v} (\sigma_{ij} n_j) V_i dS \quad (1.24)$$

Jednačina (1.24) se naziva jednačinom virtualnog rada [35,106,156] i lako se može dokazati objedinjavanjem površinskih integrala a zatim transformacijom u zapreminski integral. Polje brzina \vec{v}^* i komponente brzine deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ su vezane preko relacija (1.19).

Uslovi konveksnosti površi plastičnosti i normalnosti vektora priraštaja plastične deformacije prema gore korišćenim oznakama daju sljedeću nejednakost:

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq 0 \quad (1.25)$$

gdje su σ_{ij}^* naponske komponente dobijene pomoću dopuštenog polja brzina \vec{v}^* na osnovu veza napon-brzina deformacije (1.21).

Kako je zapreminska brzina deformacije ($\dot{\epsilon}_v^* = 0$) odredjena na osnovu dozvoljenog brzinskog polja, tenzor proizvoda napona i brzine deformacije je ekvivalentan proizvodu intenzivnosti napona i intenzivnosti brzine deformacije:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_u \dot{\epsilon}_u \quad (1.26)$$

Iz relacija (1.24 - 1.26) slijedi:

$$\int_V \sigma_u^* \dot{\epsilon}_u^* dV - \int_{S_p} p_i v_i^* dS > \int_{S_v} (\sigma_{ij} n_j) v_i dS \quad (1.27)$$

gdje je znak jednakosti samo kada je $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$ tj. kada naponske komponente odgovaraju stvarnim. Funkcional je definisan relacijom:

$$\Phi = \int_V \sigma_u^* \dot{\epsilon}_u^* dV - \int_{S_F} p_i v_i^* dS \quad (1.28)$$

i koristi se za formulaciju konačnim elementima.

Rezultat (1.28) se često naziva varijacioni princip Markova [93,96,106,130, 156] : Od svih kinematski mogućih polja brzina tačno rješenje obezbeđuje apsolutni minimum funkcionala Φ .

Dakle, problem se razmatra kao i kod klasičnog metoda gornje procjene ali se dobijaju sasvim različiti rezultati. Kod metoda gornje procjene dozvoljeno brzinsko polje mora biti pripremljeno (najčešće se verifikuje eksperimentalno) kako bi rješenje bilo u matematički zatvorenoj formi. Takodje, ovom metodom se ne uzima u obzir očvršćavanje metala niti se dobija detaljna informacija o rasporedu napona i deformacija.

Kod metoda konačnih elemenata brzine u čvornim tačkama se pretpostavljaju pa se zatim direktno dobijaju tačne vrijednosti. Uzima se u obzir očvršćavanje i uticaj trenja i dobija distribucija karakterističnih veličina po uzorku.

Uslov nestišljivosti (1.20) koji mora zadovoljiti brzinsko polje može biti obezbijedjen uvođenjem Lagranževog multiplikatora ili penalne funkcije u funkcional Φ (1.28) [78,91,93,96,130] . Neka je u proizvoljno brzinsko polje koje zadovoljava granične uslove ali ne zadovoljava uslov nestišljivosti. Sada će modifikovani funkcional za slučaj korišćenja metoda Lagranževog multiplikatora imati oblik:

$$\Phi_1 = \int_V \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_p} p_i u_i dS \quad (1.29)$$

gdje je λ Lagranžev multiplikator.

Analogni funkcional za slučaj korišćenja penalne funkcije će biti:

$$\Phi_2 = \int_V \sigma_u \dot{\epsilon}_u dV + \int_V \frac{\xi}{2} \dot{\epsilon}_u^2 dV - \int_{S_p} p_i u_i dS \quad (1.30)$$

gdje je: ξ - velika pozitivna konstanta.

Fizički, članovi jednačina (1.29) i (1.30) predstavljaju energiju deformacije, dilatacije i ulaznu energiju respektivno. Može se pokazati [106] da za slučaj kada brzinsko polje odgovara stvarnom, vrijednost Lagranževog multiplikatora je ekvivalentna vrijednosti srednjeg napona:

$$\lambda = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (1.31)$$

Iz komparacije izraza (1.24) i (1.25) slijedi da će u slučaju kada je brzina u , dobijena iz uslova minimuma Φ_2 , identična brzini dobijenoj iz uslova stacionarnosti Φ_1 važiti relacija:

$$\xi \dot{\epsilon}_v = \lambda \quad (1.32)$$

Primjena funkcionala Φ_1 i Φ_2 ima određene prednosti i nedostatke. Za Lagranžev metod dopunska nepoznata λ , za slučaj kada je diskretizacija izvršena sa velikim brojem elemenata može dovesti do znatnog uvećanja matrice krutosti a samim tim i kompjuterskog vremena potrebnog za rješavanje linearizovanog sistema jednačina. Kod metode korišćenja penalne funkcije nema dopunske nepoznate, ali se problemi javljaju kada je loša inicijalna pretpostavka jer se u tom slučaju mogu dobiti suviše velike vrijednosti $\xi \dot{\epsilon}_v$.

Često se koristi penalni metod u nešto izmijenjenom obliku [78,93] i tada se najčešće naziva modifikovani penalni varijacioni metod. Suština ovog metoda sadržana je u činjenici da je uslov nestišljivosti po cijelom deformacionom tijelu teško formalizovati radi čega se koristi usrednjenje $\dot{\epsilon}_{kk}^2$ po određenoj zapremini:

$$(\dot{\epsilon}_{kk}^2)_{sr} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \dot{\epsilon}_{kk}^2 dV \quad (1.33)$$

Uslov minimuma funkcionala Φ_1 (1.29) ili Φ_2 (1.30) dovodi do nelinearnog sistema jednačina koji se najčešće rješava iterativnom tehnikom [117,126,128,133].

Vrlo često se koristi Njutn-Rapsonov iterativni metod zbog svoje jednostavnosti i kvadratne konvergencije. Krajnji rezultat diskretizacije je jednačina tipa:

$$\hat{A} \vec{x} = \vec{b} \quad (1.34)$$

gdje su: \hat{A} – matrica krutosti sistema, \vec{b} – slobodni vektor i \vec{x} – traženi vektor (u razmatranom slučaju to je vektor priraštaja brzina deformisanja).

Pri rješavanju konkretnih problema neophodno je uzeti u obzir činjenicu da pojedine granične tačke samim svojim položajem imaju određenu brzinu (komponenta vektora \vec{x}). Uključivanje ovakvih graničnih uslova u jednačinu (1.34) može se vršiti na više načina [83,93] što će biti analizirano za slučaj kada matrica krutosti ima dimenzije $N \times N$ a komponenta vektora \vec{x} iznosi $x_n = \alpha$:

- isključi se n -ta kolona i vrsta iz matrice krutosti i time ista redukuje na veličinu $(N-1) \times (N-1)$. Istovremeno se od slobodnog vektora desne strane jednačine (1.34) oduzima n -ta kolona matrice krutosti pomnožena sa traženom vrijednošću α .
- n -ta kolona i vrsta matrice krutosti se popune nulama osim njihovog presjeka gdje se postavlja 1. Desna strana jednačine se modifikuje tako što se umjesto b_n postavi α i od nje se oduzima n -ta kolona matrice krutosti u kojoj je član a_{nn} zamijenjen 0 i koja je pomnožena sa traženom vrijednošću α .
- član a_{nn} matrice krutosti se pomnoži sa velikim pozitivnim brojem (npr. 10^{12}). Istovremeno se u slobodnom vektoru izvrši zamjena b_n sa $\alpha a_{nn} 10^{12}$.
- članu a_{nn} matrice krutosti se doda veliki pozitivni broj (npr. 10^{50}). Od slobodnog vektora na desnoj strani jednačine (1.34) se oduzme n -ta kolona matrice krutosti pomnožena sa traženom vrijednošću α .

Ovakve intervencije obezbeđuju da se dobije unaprijed zadata vrijednost komponente vektora \vec{x} ($x_n = \alpha$) ali zato utiču na vrijednosti drugih unaprijed nedefinisanih komponenta rezultujućeg vektora.

P R I L O G 2.

$$\begin{aligned}
\Delta(s, \tau) &= M_1(\tau) M_4(s) - M_2(s) M_3(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^4 z_{\beta} \tau_{\beta} (1 + s_{\beta} s) - \\
&- \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^4 r_{\beta} \tau_{\beta} (1 + s_{\beta} s) \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 z_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) = \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 [r_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau) \cdot \\
&\cdot z_{\beta} \tau_{\beta} (1 + s_{\beta} s) - r_{\beta} \tau_{\beta} (1 + s_{\beta} s) z_{\alpha} s_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha} \tau)] = \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} (1 + \tau_{\alpha} \tau) \cdot \\
&\cdot (1 + s_{\beta} s) [r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}] = \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} [r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}] + \\
&+ \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} [r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}] \tau_{\alpha} \tau + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} [r_{\alpha} z_{\beta} - \\
&- r_{\beta} z_{\alpha}] s_{\beta} s + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} [r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}] \tau_{\alpha} s_{\beta} \tau s = \\
&= \frac{1}{8} \{ [(r_1 - r_3)(z_2 - z_4) - (r_2 - r_4)(z_1 - z_3)] + [(r_3 - r_4)(z_1 - z_2) - \\
&- (r_1 - r_2)(z_3 - z_4)] s + [(r_2 - r_3)(z_1 - z_4) - (r_1 - r_4)(z_2 - z_3)] \tau \}
\end{aligned}$$

N°1	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\tau} [r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha}] \tau_{\alpha\beta}^s$			
$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4
1	$s_1^2 \tau_1^2 (r_1 z_1 - r_1 z_1) = 0$	$s_1 s_2 \tau_1 \tau_2 (r_1 z_2 - r_2 z_1)$	$s_1 s_3 \tau_1 \tau_3 (r_1 z_3 - r_3 z_1)$	$s_1 s_4 \tau_1 \tau_4 (r_1 z_4 - r_4 z_1)$
2	$s_2 s_1 \tau_1 \tau_2 (r_2 z_1 - r_1 z_2)$	$s_2 s_2 \tau_2 \tau_2 (r_2 z_2 - r_2 z_2) = 0$	$s_2 s_3 \tau_2 \tau_3 (r_2 z_3 - r_3 z_2)$	$s_2 s_4 \tau_2 \tau_4 (r_2 z_4 - r_4 z_2)$
3	$s_3 s_1 \tau_3 \tau_1 (r_3 z_1 - r_1 z_3)$	$s_3 s_2 \tau_3 \tau_2 (r_3 z_2 - r_2 z_3)$	$s_3 s_3 \tau_3 \tau_3 (r_3 z_3 - r_3 z_3) = 0$	$s_3 s_4 \tau_3 \tau_4 (r_3 z_4 - r_4 z_3)$
4	$s_4 s_1 \tau_4 \tau_1 (r_4 z_1 - r_1 z_4)$	$s_4 s_2 \tau_4 \tau_2 (r_4 z_2 - r_2 z_4)$	$s_4 s_3 \tau_4 \tau_3 (r_4 z_3 - r_3 z_4)$	$s_4 s_4 \tau_4 \tau_4 (r_4 z_4 - r_4 z_4) = 0$
Σ	0			

N ^o 2	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta}^{\tau} (r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha})$			
$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4
1	$s_1^{\tau} (r_1 z_1 - r_1 z_1) = 0$	$s_1^{\tau} (r_1 z_2 - r_2 z_1)$	$s_1^{\tau} (r_1 z_3 - r_3 z_1)$	$s_1^{\tau} (r_1 z_4 - r_4 z_1)$
2	$s_2^{\tau} (r_2 z_1 - r_1 z_2)$	$s_2^{\tau} (r_2 z_2 - r_2 z_2) = 0$	$s_2^{\tau} (r_2 z_3 - r_3 z_2)$	$s_2^{\tau} (r_2 z_4 - r_4 z_2)$
3	$s_3^{\tau} (r_3 z_1 - r_1 z_3)$	$s_3^{\tau} (r_3 z_2 - r_2 z_3)$	$s_3^{\tau} (r_3 z_3 - r_3 z_3) = 0$	$s_3^{\tau} (r_3 z_4 - r_4 z_3)$
4	$s_4^{\tau} (r_4 z_1 - r_1 z_4)$	$s_4^{\tau} (r_4 z_2 - r_2 z_4)$	$s_4^{\tau} (r_4 z_3 - r_3 z_4)$	$s_4^{\tau} (r_4 z_4 - r_4 z_4) = 0$
Σ	$2 [(r_1 - r_3)(z_2 - z_4) - (r_2 - r_4)(z_1 - z_3)]$			

N ^o 3	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta}^{\tau} (r_{\alpha} z_{\beta} - r_{\beta} z_{\alpha})^{\tau_{\alpha}}$			
$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4
1	$s_1^{\tau} (r_1 z_1 - r_1 z_1)^{\tau_1} = 0$	$s_1^{\tau} (r_2 z_1 - r_2 z_1)^{\tau_1}$	$s_1^{\tau} (r_1 z_3 - r_3 z_1)^{\tau_1}$	$s_1^{\tau} (r_1 z_4 - r_4 z_1)^{\tau_1}$
2	$s_2^{\tau} (r_2 z_1 - r_1 z_2)^{\tau_2}$	$s_2^{\tau} (r_2 z_2 - r_2 z_2)^{\tau_2} = 0$	$s_2^{\tau} (r_2 z_3 - r_3 z_2)^{\tau_2}$	$s_2^{\tau} (r_2 z_4 - r_4 z_2)^{\tau_2}$
3	$s_3^{\tau} (r_3 z_1 - r_1 z_3)^{\tau_3}$	$s_3^{\tau} (r_3 z_2 - r_2 z_3)^{\tau_3}$	$s_3^{\tau} (r_3 z_3 - r_3 z_3)^{\tau_3} = 0$	$s_3^{\tau} (r_3 z_4 - r_4 z_3)^{\tau_3}$
4	$s_4^{\tau} (r_4 z_1 - r_1 z_4)^{\tau_4}$	$s_4^{\tau} (r_4 z_2 - r_2 z_4)^{\tau_4}$	$s_4^{\tau} (r_4 z_3 - r_3 z_4)^{\tau_4}$	$s_4^{\tau} (r_4 z_4 - r_4 z_4)^{\tau_4} = 0$
Σ	$2 [(r_2 - r_3)(z_1 - z_4) - (r_1 - r_4)(z_2 - z_3)]$			



N^O_4	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta}^T (r_{\alpha}^z - r_{\beta}^z) s_{\alpha}^T s_{\beta}^T$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s_1^T (r_1^z - r_1^z) s_1 = 0$	$s_1^T (r_1^z - r_2^z) s_2$	$s_1^T (r_1^z - r_3^z) s_3$	$s_1^T (r_1^z - r_4^z) s_4$
2	$s_2^T (r_2^z - r_1^z) s_1$	$s_2^T (r_2^z - r_2^z) s_2 = 0$	$s_2^T (r_2^z - r_3^z) s_3$	$s_2^T (r_2^z - r_4^z) s_4$
3	$s_3^T (r_3^z - r_1^z) s_1$	$s_3^T (r_3^z - r_2^z) s_2$	$s_3^T (r_3^z - r_3^z) s_3 = 0$	$s_3^T (r_3^z - r_4^z) s_4$
4	$s_4^T (r_4^z - r_1^z) s_1$	$s_4^T (r_4^z - r_2^z) s_2$	$s_4^T (r_4^z - r_3^z) s_3$	$s_4^T (r_4^z - r_4^z) s_4 = 0$
Σ	$2 [(r_3 - r_4)(z_1 - z_2) - (r_1 r_2)(z_3 - z_4)]$			

P R I L O G 3.

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{4\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 v_r [M_4(s)(1+\tau_\alpha\tau)s_\alpha - M_3(\tau)(1+s_\alpha s)\tau_\alpha = \\
&= \frac{1}{4\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 v_{1\alpha} \left[\frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^4 z_\beta t_\beta (1+s_\beta s)(1+\tau_\alpha\tau)s_\alpha \right] - \\
&- \sum_{\beta=1}^4 v_{r\beta} \left[\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 z_\alpha s_\alpha (1+\tau_\alpha\tau)(1+s_\beta s)\tau_\beta \right] = \frac{1}{4\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \frac{1}{4} [v_{r\alpha} z_\beta \tau_\beta (1+ \\
&+ s_\beta s)(1+\tau_\alpha\tau)s_\alpha - v_{r\beta} z_\alpha s_\alpha \tau_\beta (1+\tau_\alpha\tau)(1+s_\beta s)] = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 (1 + \\
&+ s_\beta s)(1+\tau_\alpha\tau)s_\alpha \tau_\beta [v_{r\alpha} z_\beta - v_{r\beta} z_\alpha] = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_\alpha \tau_\beta (1+s_\beta s + \\
&+ \tau_\alpha\tau + \tau_\alpha s_\beta s\tau) [v_{r\alpha} z_\beta - v_{r\beta} z_\alpha] = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_\alpha \tau_\beta [v_{r\alpha} z_\beta - \\
&- v_{r\beta} z_\alpha] + \frac{s}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_\alpha \tau_\beta s_\beta [v_{1\alpha} z_\beta - v_{r\beta} z_\alpha] + \\
&+ \frac{t}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha [v_{r\alpha} z_\beta - v_{r\beta} z_\alpha] + \frac{s\tau}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_\alpha s_\beta \tau_\alpha \tau_\beta [v_{r\alpha} z_\beta - \\
&- v_{r\beta} z_\alpha] = \frac{1}{8\Delta} \{ [v_{r1}(z_2-z_4)+v_{r2}(z_3-z_1)+v_{r3}(z_4-z_2)+v_{r4}(z_1-z_3)] + \\
&+ [v_{r1}(z_4-z_3)+v_{r2}(z_3-z_4)+v_{r3}(z_1-z_2)+v_{r4}(z_2-z_1)] s + [v_{r1}(z_3-z_3) + \\
&+ v_{r2}(z_1-z_4)+v_{r3}(z_4-z_1)+v_{r4}(z_2-z_3)] \tau \}
\end{aligned}$$

$N^O 2$	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta}^{\tau\tau} [v_{\alpha\beta} z - v_{\beta\alpha} z]$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s_1^{\tau\tau} \tau_1 (v_{r1} z - v_{r1} z_1) = 0$	$s_1^{\tau\tau} \tau_2 (v_{r1} z_2 - v_{r2} z_1)$	$s_1^{\tau\tau} \tau_3 (v_{r1} z_3 - v_{r3} z_1)$	$s_1^{\tau\tau} \tau_4 (v_{r1} z_4 - v_{r4} z_1)$
2	$s_2^{\tau\tau} \tau_1 (v_{r2} z_1 - v_{r1} z_2)$	$s_2^{\tau\tau} \tau_2 (v_{r2} z_2 - v_{r2} z_2) = 0$	$s_2^{\tau\tau} \tau_3 (v_{r2} z_3 - v_{r3} z_2)$	$s_2^{\tau\tau} \tau_4 (v_{r2} z_4 - v_{r4} z_2)$
3	$s_3^{\tau\tau} \tau_1 (v_{r3} z_1 - v_{r1} z_3)$	$s_3^{\tau\tau} \tau_2 (v_{r3} z_2 - v_{r2} z_3)$	$s_3^{\tau\tau} \tau_3 (v_{r3} z_3 - v_{r3} z_3) = 0$	$s_3^{\tau\tau} \tau_4 (v_{r3} z_4 - v_{r4} z_3)$
4	$s_4^{\tau\tau} \tau_1 (v_{r4} z_1 - v_{r1} z_4)$	$s_4^{\tau\tau} \tau_2 (v_{r4} z_2 - v_{r2} z_4)$	$s_4^{\tau\tau} \tau_3 (v_{r4} z_3 - v_{r3} z_4)$	$s_4^{\tau\tau} \tau_4 (v_{r4} z_4 - v_{r4} z_4) = 0$
Σ	$2 [v_{r1} (z_3 - z_2) + v_{r2} (z_1 - z_4) + v_{r3} (z_4 - z_1) + v_{r4} (z_2 - z_3)]$			

N ⁰ 3	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\beta\alpha} s_{\tau\beta} [v_{\alpha\beta} z_{\beta} - v_{\tau\beta} z_{\alpha}]$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s_{11}^{\tau} (v_{r1} z_{11} - v_{r1} z_{11}) = 0$	$s_{12}^{\tau} (v_{r1} z_{22} - v_{r2} z_{21})$	$s_{13}^{\tau} (v_{r1} z_{33} - v_{r3} z_{31})$	$s_{14}^{\tau} (v_{r1} z_{44} - v_{r4} z_{41})$
2	$s_{21}^{\tau} (v_{r2} z_{11} - v_{r1} z_{12})$	$s_{22}^{\tau} (v_{r2} z_{22} - v_{r2} z_{22}) = 0$	$s_{23}^{\tau} (v_{r2} z_{33} - v_{r3} z_{32})$	$s_{24}^{\tau} (v_{r2} z_{44} - v_{r4} z_{42})$
3	$s_{31}^{\tau} (v_{r3} z_{11} - v_{r1} z_{13})$	$s_{32}^{\tau} (v_{r3} z_{22} - v_{r2} z_{23})$	$s_{33}^{\tau} (v_{r3} z_{33} - v_{r3} z_{33}) = 0$	$s_{34}^{\tau} (v_{r3} z_{44} - v_{r4} z_{43})$
4	$s_{41}^{\tau} (v_{r4} z_{11} - v_{r1} z_{14})$	$s_{42}^{\tau} (v_{r4} z_{22} - v_{r2} z_{24})$	$s_{43}^{\tau} (v_{r4} z_{33} - v_{r3} z_{34})$	$s_{44}^{\tau} (v_{r4} z_{44} - v_{r4} z_{44}) = 0$
Σ	$2 [v_{r1} (z_{44} - z_{33}) + v_{r2} (z_{33} - z_{44}) + v_{r3} (z_{11} - z_{22}) + v_{r4} (z_{22} - z_{11})]$			

N^O_4	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s^{\tau}_{\alpha\beta} (v_{r_{\alpha} z_{\beta}} - v_{r_{\beta} z_{\alpha}})$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s^{\tau}_1(v_{r_1 z_1} - v_{r_1 z_1}) = 0$	$s^{\tau}_1(v_{r_1 z_2} - v_{r_2 z_1})$	$s^{\tau}_1(v_{r_1 z_3} - v_{r_3 z_1})$	$s^{\tau}_1(v_{r_1 z_4} - v_{r_4 z_1})$
2	$s^{\tau}_2(v_{r_2 z_1} - v_{r_1 z_2})$	$s^{\tau}_2(v_{r_2 z_2} - v_{r_2 z_2}) = 0$	$s^{\tau}_2(v_{r_2 z_3} - v_{r_3 z_2})$	$s^{\tau}_2(v_{r_2 z_4} - v_{r_4 z_2})$
3	$s^{\tau}_3(v_{r_3 z_1} - v_{r_1 z_3})$	$s^{\tau}_3(v_{r_3 z_2} - v_{r_2 z_3})$	$s^{\tau}_3(v_{r_3 z_3} - v_{r_3 z_3}) = 0$	$s^{\tau}_3(v_{r_3 z_4} - v_{r_4 z_3})$
4	$s^{\tau}_4(v_{r_4 z_1} - v_{r_1 z_4})$	$s^{\tau}_4(v_{r_4 z_2} - v_{r_2 z_4})$	$s^{\tau}_4(v_{r_4 z_3} - v_{r_3 z_4})$	$s^{\tau}_4(v_{r_4 z_4} - v_{r_4 z_4}) = 0$
Σ	$2 [v_{r_1(z_2-z_4)} + v_{r_2(z_3-z_1)} + v_{r_3(z_4-z_2)} + v_{r_4(z_1-z_3)}]$			

P R I L O G 4.

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{1}{4\Delta(s,\tau)} \sum_{\alpha=1}^4 v_{z\alpha} \left[-M_2 s_{\alpha} (1+\tau_{\alpha}\tau) + M_1 \tau_{\alpha} (1+s_{\alpha}s) \right] = \\
&= \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 v_{z\alpha} s_{\alpha} (1+\tau_{\alpha}\tau) \sum_{\beta=1}^4 -r_{\beta} \tau_{\beta} (1+s_{\beta}s) + \sum_{\beta=1}^4 v_{z\beta} \tau_{\beta} (1+ \\
&+ s_{\beta}s) \sum_{\alpha=1}^4 r_{\alpha} s_{\alpha} (1+\tau_{\alpha}\tau) \Big] = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \tau_{\beta} s_{\alpha} (1+\tau_{\alpha}\tau) (1+s_{\beta}s) (-v_{z\beta} r_{\alpha} + \\
&+ v_{z\beta} r_{\alpha}) = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} (1+\tau_{\alpha}\tau + s_{\beta}s + \tau_{\alpha}s_{\beta}\tau s) (v_{z\beta} r_{\alpha} - \\
&- v_{z\alpha} r_{\beta}) = \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta}) + \\
&+ \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} \tau_{\alpha} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta}) \tau + \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} \tau_{\beta} s_{\beta} (v_{z\beta} r_{\alpha} - \\
&- v_{z\alpha} r_{\beta}) s + \frac{1}{16\Delta} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha} s_{\beta} \tau_{\alpha} \tau_{\beta} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta}) s \tau = \\
&= \frac{1}{8\Delta} \{ [v_{z1}(r_4-r_2) + v_{z2}(r_1-r_3) + v_{z3}(r_2-r_4) + v_{z4}(r_3-r_1)] + [v_{z1}(r_3-r_4) + \\
&+ v_{z2}(r_4-r_3) + v_{z3}(r_2-r_1) + v_{z4}(r_1-r_2)] s + [v_{z1}(r_2-r_3) + v_{z2}(r_4-r_1) + \\
&+ v_{z3}(r_1-r_4) + v_{z4}(r_3-r_2)] \tau \}
\end{aligned}$$

N^0_1	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta} s_{\tau\tau} (v_{\alpha\beta} r_{\alpha} - v_{\alpha\beta} r_{\beta})$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s_1 s_1 \tau_1 \tau_1 (v_{z1} r_1 - v_{z1} r_1) = 0$	$s_1 s_2 \tau_1 \tau_2 (v_{z2} r_1 - v_{z1} r_2)$	$s_1 s_3 \tau_1 \tau_3 (v_{z3} r_1 - v_{z1} r_3)$	$s_1 s_4 \tau_1 \tau_4 (v_{z4} r_1 - v_{z1} r_4)$
2	$s_2 s_1 \tau_1 \tau_1 (v_{z1} r_2 - v_{z2} r_1)$	$s_2 s_2 \tau_2 \tau_2 (v_{z2} r_2 - v_{z2} r_2) = 0$	$s_2 s_3 \tau_2 \tau_3 (v_{z3} r_2 - v_{z2} r_3)$	$s_2 s_4 \tau_2 \tau_4 (v_{z4} r_2 - v_{z2} r_4)$
3	$s_3 s_1 \tau_1 \tau_1 (v_{z1} r_3 - v_{z3} r_1)$	$s_3 s_2 \tau_2 \tau_3 (v_{z2} r_3 - v_{z3} r_2)$	$s_3 s_3 \tau_3 \tau_3 (v_{z3} r_3 - v_{z3} r_3) = 0$	$s_3 s_4 \tau_3 \tau_4 (v_{z4} r_3 - v_{z3} r_4)$
4	$s_4 s_1 \tau_1 \tau_1 (v_{z1} r_4 - v_{z4} r_1)$	$s_4 s_2 \tau_2 \tau_4 (v_{z2} r_4 - v_{z4} r_2)$	$s_4 s_3 \tau_3 \tau_4 (v_{z3} r_4 - v_{z4} r_3)$	$s_4 s_4 \tau_4 \tau_4 (v_{z4} r_4 - v_{z4} r_4) = 0$
Σ	0			

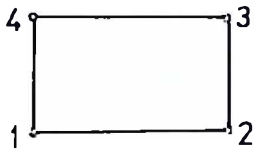
N^0_2	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s^{\tau}_{\alpha\beta} s^{\tau}_{\alpha\beta} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta})$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s^{\tau}_{11} s^{\tau}_{11} (v_{z1} r_1 - v_{z1} r_1) = 0$	$s^{\tau}_{12} s^{\tau}_{22} (v_{z2} r_1 - v_{z1} r_2)$	$s^{\tau}_{13} s^{\tau}_{33} (v_{z3} r_1 - v_{z1} r_3)$	$s^{\tau}_{14} s^{\tau}_{44} (v_{z4} r_1 - v_{z1} r_4)$
2	$s^{\tau}_{21} s^{\tau}_{11} (v_{z1} r_2 - v_{z2} r_1)$	$s^{\tau}_{22} s^{\tau}_{22} (v_{z2} r_2 - v_{z2} r_2) = 0$	$s^{\tau}_{23} s^{\tau}_{33} (v_{z3} r_2 - v_{z2} r_3)$	$s^{\tau}_{24} s^{\tau}_{44} (v_{z4} r_2 - v_{z2} r_4)$
3	$s^{\tau}_{31} s^{\tau}_{11} (v_{z1} r_3 - v_{z3} r_1)$	$s^{\tau}_{32} s^{\tau}_{22} (v_{z2} r_3 - v_{z3} r_2)$	$s^{\tau}_{33} s^{\tau}_{33} (v_{z3} r_3 - v_{z3} r_3) = 0$	$s^{\tau}_{34} s^{\tau}_{44} (v_{z4} r_3 - v_{z3} r_4)$
4	$s^{\tau}_{41} s^{\tau}_{11} (v_{z1} r_4 - v_{z4} r_1)$	$s^{\tau}_{42} s^{\tau}_{22} (v_{z2} r_4 - v_{z4} r_2)$	$s^{\tau}_{43} s^{\tau}_{33} (v_{z3} r_4 - v_{z4} r_3)$	$s^{\tau}_{44} s^{\tau}_{44} (v_{z4} r_4 - v_{z4} r_4) = 0$
Σ	$2 [v_{z1} (r_3 - r_4) + v_{z2} (r_4 - r_3) + v_{z3} (r_2 - r_1) + v_{z4} (r_1 - r_2)]$			

N°3	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s_{\alpha\beta}^{\tau\tau} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta})$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s_{11}^{\tau\tau} (v_{z1} r_1 - v_{z1} r_1) = 0$	$s_{12}^{\tau\tau} (v_{z2} r_1 - v_{z1} r_2)$	$s_{13}^{\tau\tau} (v_{z3} r_1 - v_{z1} r_3)$	$s_{14}^{\tau\tau} (v_{z4} r_1 - v_{z1} r_4)$
2	$s_{21}^{\tau\tau} (v_{z1} r_2 - v_{z2} r_1)$	$s_{22}^{\tau\tau} (v_{z2} r_2 - v_{z2} r_2) = 0$	$s_{23}^{\tau\tau} (v_{z3} r_2 - v_{z2} r_3)$	$s_{24}^{\tau\tau} (v_{z4} r_2 - v_{z2} r_4)$
3	$s_{31}^{\tau\tau} (v_{z1} r_3 - v_{z3} r_1)$	$s_{32}^{\tau\tau} (v_{z2} r_3 - v_{z3} r_2)$	$s_{33}^{\tau\tau} (v_{z3} r_3 - v_{z3} r_3) = 0$	$s_{34}^{\tau\tau} (v_{z4} r_3 - v_{z3} r_4)$
4	$s_{41}^{\tau\tau} (v_{z1} r_4 - v_{z4} r_1)$	$s_{42}^{\tau\tau} (v_{z2} r_4 - v_{z4} r_2)$	$s_{43}^{\tau\tau} (v_{z3} r_4 - v_{z4} r_3)$	$s_{44}^{\tau\tau} (v_{z4} r_4 - v_{z4} r_4) = 0$
Σ	$2 [v_{z1} (r_2 - r_3) + v_{z2} (r_4 - r_1) + v_{z3} (r_1 - r_4) + v_{z4} (r_3 - r_2)]$			

N^0_4	$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 s^{\tau}_{\alpha\beta} (v_{z\beta} r_{\alpha} - v_{z\alpha} r_{\beta})$			
$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	$s^{\tau}_{11}(v_{z1}r_1 - v_{z1}r_1) = 0$	$s^{\tau}_{12}(v_{z2}r_1 - v_{z1}r_2)$	$s^{\tau}_{13}(v_{z3}r_1 - v_{z1}r_3)$	$s^{\tau}_{14}(v_{z4}r_1 - v_{z1}r_4)$
2	$s^{\tau}_{21}(v_{z1}r_2 - v_{z2}r_1)$	$s^{\tau}_{22}(v_{z2}r_2 - v_{z2}r_2) = 0$	$s^{\tau}_{23}(v_{z3}r_2 - v_{z2}r_3)$	$s^{\tau}_{24}(v_{z4}r_2 - v_{z2}r_4)$
3	$s^{\tau}_{31}(v_{z1}r_3 - v_{z3}r_1)$	$s^{\tau}_{32}(v_{z2}r_3 - v_{z3}r_2)$	$s^{\tau}_{33}(v_{z3}r_3 - v_{z3}r_3) = 0$	$s^{\tau}_{34}(v_{z4}r_3 - v_{z3}r_4)$
4	$s^{\tau}_{41}(v_{z1}r_4 - v_{z4}r_1)$	$s^{\tau}_{42}(v_{z2}r_4 - v_{z4}r_2)$	$s^{\tau}_{43}(v_{z3}r_4 - v_{z4}r_3)$	$s^{\tau}_{44}(v_{z4}r_4 - v_{z4}r_4) = 0$
Σ	$2 [v_{z1}(r_4 - r_2) + v_{z2}(r_1 - r_3) + v_{z3}(r_2 - r_4) + v_{z4}(r_3 - r_1)]$			

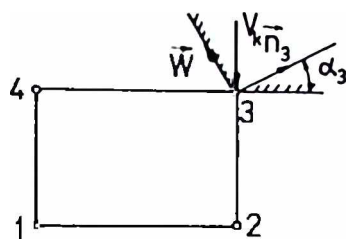
P R I L O G 5.

MATRICE REDUKCIJE ELEMENATA DISKRETIZOVANOG TIJELA



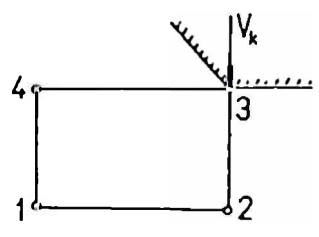
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$



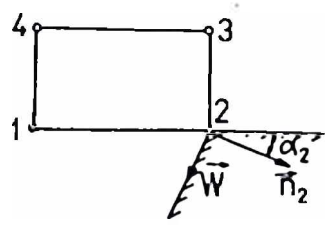
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_2, v_2, w, u_4, v_4, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_3 \cos \alpha_3 & -\sin^2 \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$



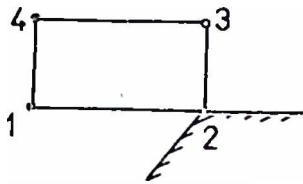
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_4, v_4, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$



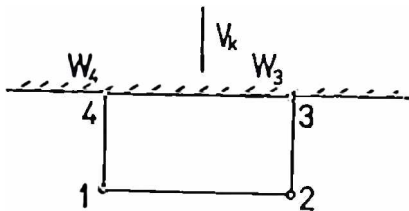
$$\phi = \phi(u_1, v_1, w, u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & -\cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$



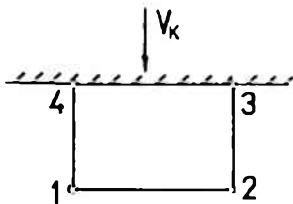
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$



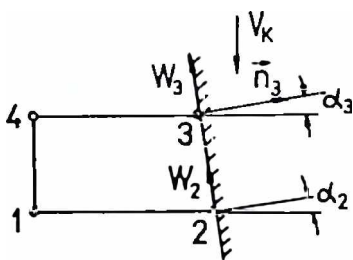
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_2, v_2, w_3, w_4, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (6)$$



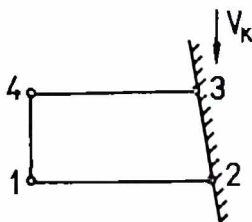
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_2, v_2, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (7)$$



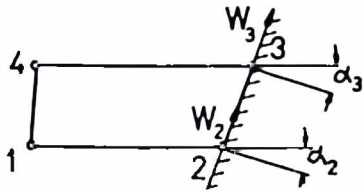
$$\phi = \phi(u_1, v_1, w_2, w_3, u_4, v_4, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$



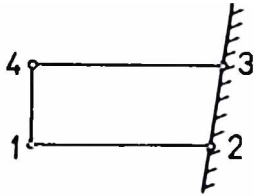
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_4, v_4, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$



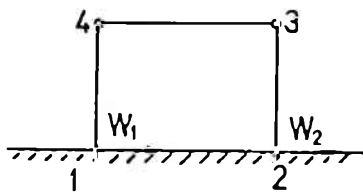
$$\phi = \phi(u_1, v_1, w_2, w_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (10)$$



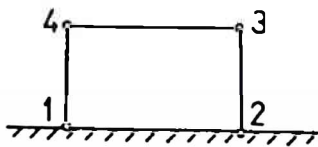
$$\phi = \phi(u_1, v_1, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (11)$$



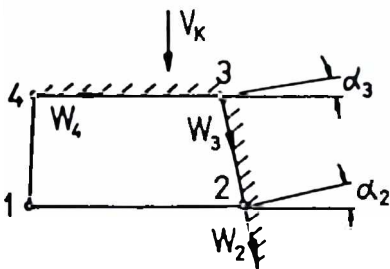
$$\phi = \phi(w_1, w_2, u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (12)$$



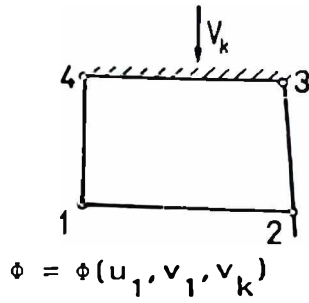
$$\phi = \phi(u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

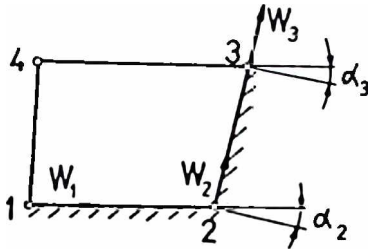


$$\phi = \phi(u_1, v_1, w_2, w_3, w_4, v_k)$$

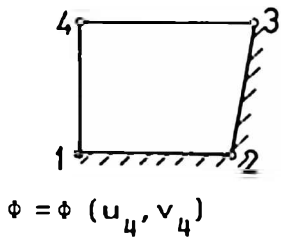
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 & -\cos\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_3 & -\cos\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_2 \cos\alpha_2 & -\sin^2\alpha_2 & -\sin\alpha_3 \cos\alpha_3 & -\sin^2\alpha_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (14)$$



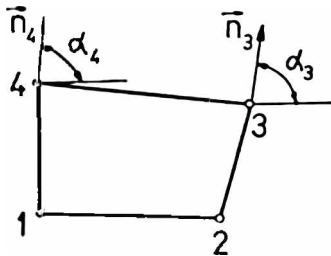
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (15)$$



$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16)$$

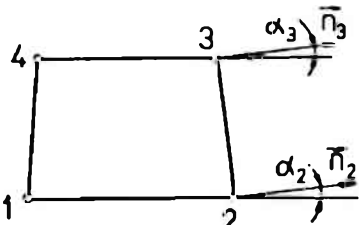


$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (17)$$



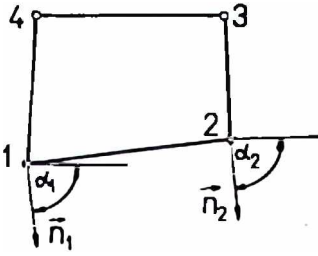
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & B \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$A = G_3/2; \quad B = G_4/2 \quad (5.2.89)$$



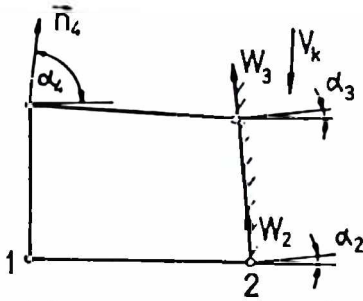
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & B & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & B & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$A = G_2/2; \quad B = G_3/2 \quad (5.2.89)$$



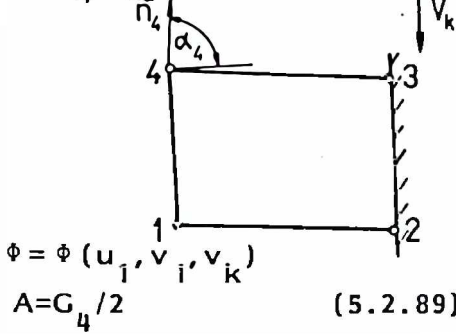
$$\phi = \phi(u_3, v_3, u_4, v_4)$$

$$A = G_1/2; \quad B = G_2/2 \quad (5.2.89)$$



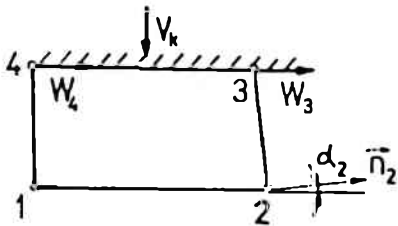
$$\phi = \phi(u_1, v_1, w_2, w_3, v_k)$$

$$A = G_4/2 \quad (5.2.89)$$



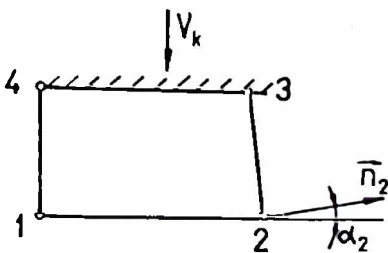
$$\phi = \phi(u_1, v_1, v_k)$$

$$A = G_4/2 \quad (5.2.89)$$



$$\phi = \phi(u_1, v_1, w_3, w_4, v_k)$$

$$A = G_2/2; \quad (5.2.89)$$



$$\phi = \phi(u_1, v_1, v_k)$$

$$A = G_2/2 \quad (5.2.89)$$

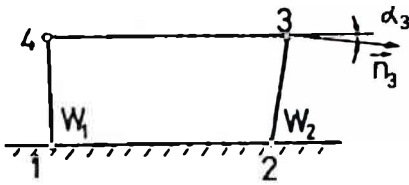
$$R = \begin{vmatrix} A & 0 & B & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & -A\sin\alpha & A\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & -A\sin\alpha\cos\alpha & -A\sin^2\alpha \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -A \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (23)$$

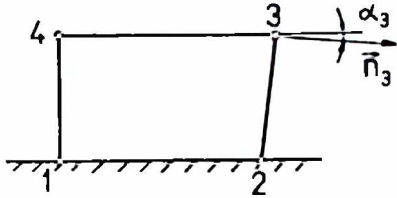
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (24)$$



$$\phi = \phi(w_1, w_2, u_4, v_4)$$

$$A = G_3/2 \quad (5.2.89)$$

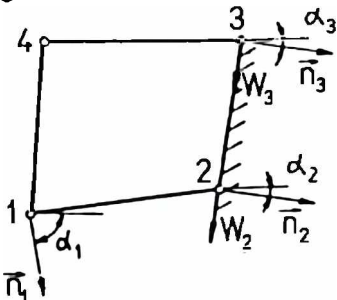
$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (25)$$



$$\phi = \phi(u_4, v_4)$$

$$A = G_3/2 \quad (5.2.89)$$

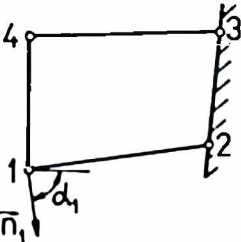
$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (26)$$



$$\phi = \phi(w_2, w_3, u_4, v_4)$$

$$A = G_1/2 \quad (5.2.89)$$

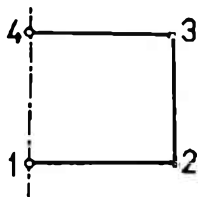
$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A\sin\alpha & -A\cos\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (27)$$



$$\phi = \phi(u_4, v_4)$$

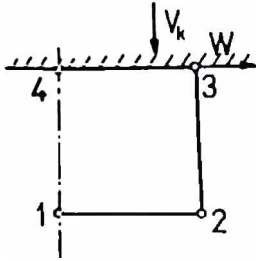
$$A = G_1/2 \quad (5.2.89)$$

$$R = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (28)$$



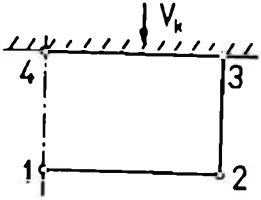
$$\phi = \phi(v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (29)$$



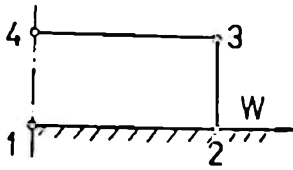
$$\phi = \phi(v_1, u_2, v_2, w, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (30)$$



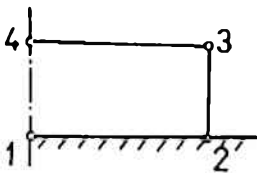
$$\phi = \phi(v_1, u_2, v_2, v_k)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (31)$$



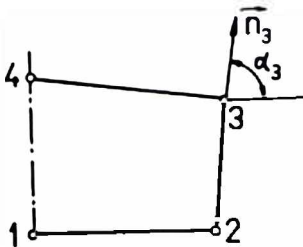
$$\phi = \phi(w, u_3, v_3, v_4)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (32)$$



$$\phi = \phi(u_3, v_3, v_4)$$

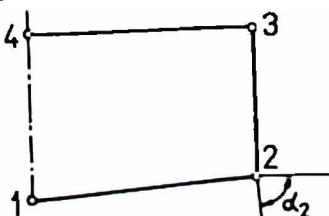
$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (33)$$



$$\phi = \phi(v_1, u_2, v_2) \quad (5.2.89)$$

$$A = G_3/2$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A & 0 & B \end{vmatrix} \quad (34)$$



$$\phi = \phi(u_3, v_3, v_4)$$

$$A = G_1/2; \quad B = G_7/2 \quad (5.2.89)$$

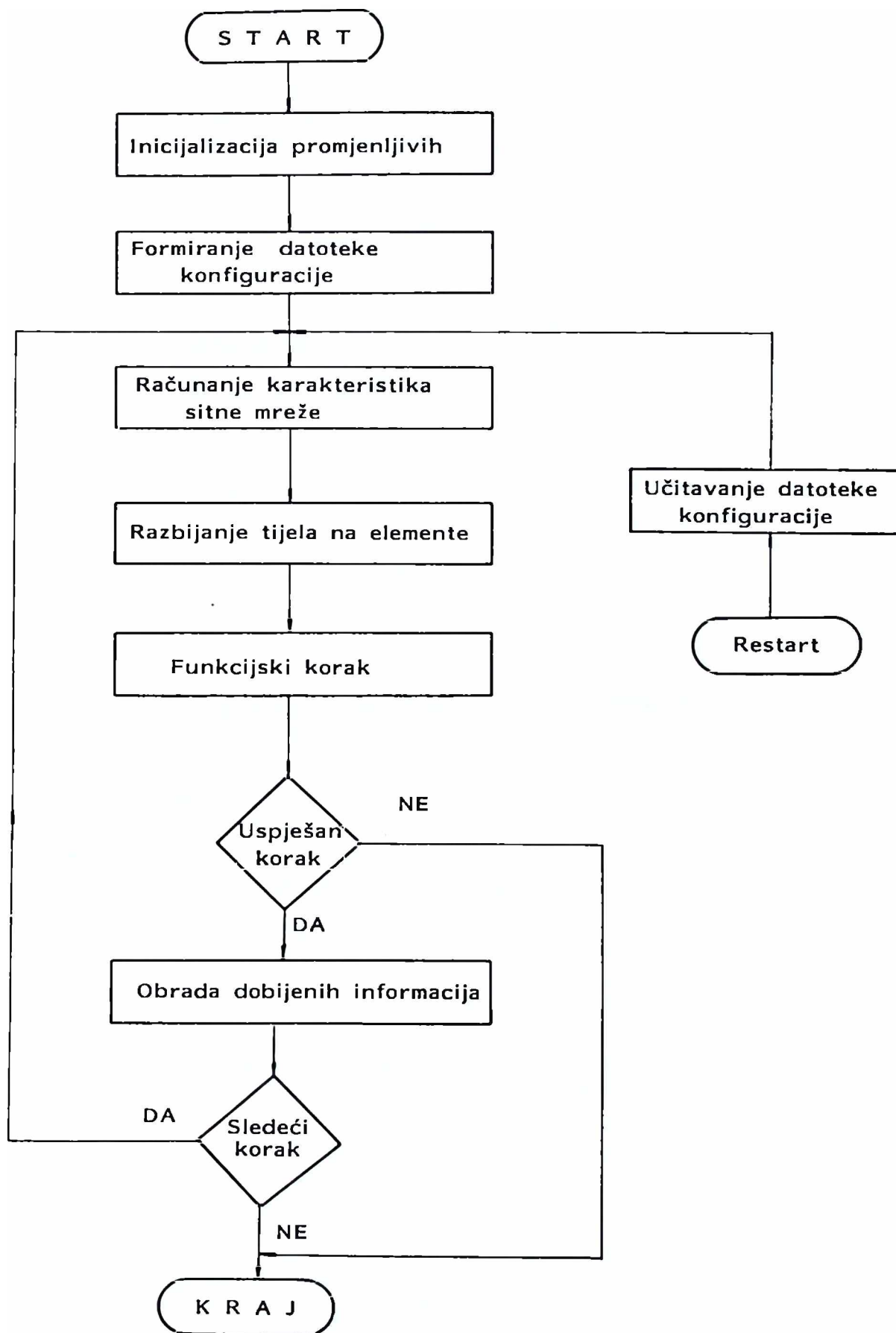
$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & B & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (35)$$

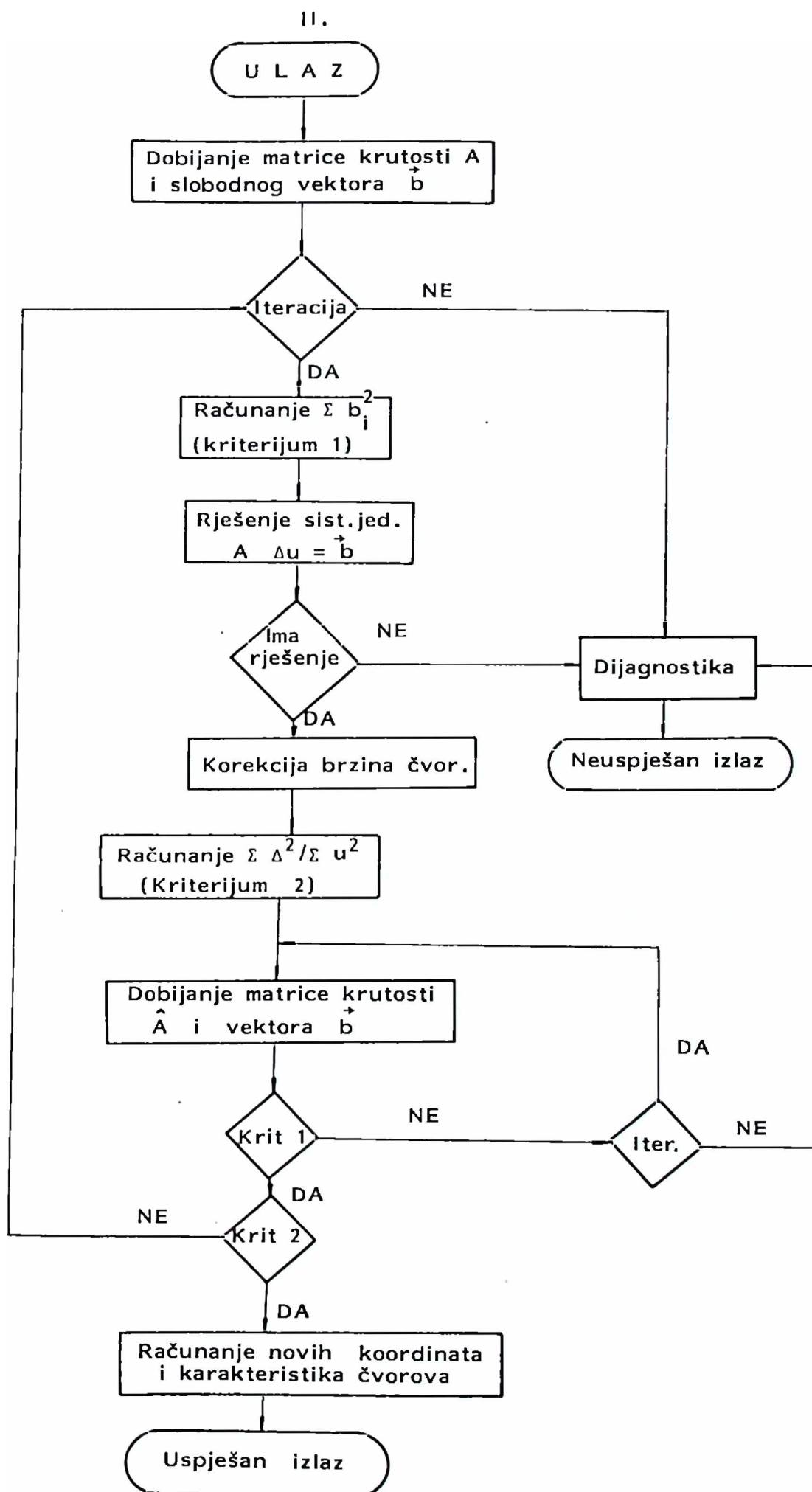
P R I L O G 6 .

- I. BLOK DIJAGRAM NUMERIČKE REALIZACIJE METODE
MALOG PARAMETRA
- II. BLOK DIJAGRAM FUNKCIJSKOG KORAKA KAO CENTRA-
LNOG DIJELA NUMERIČKE PROCEDURE



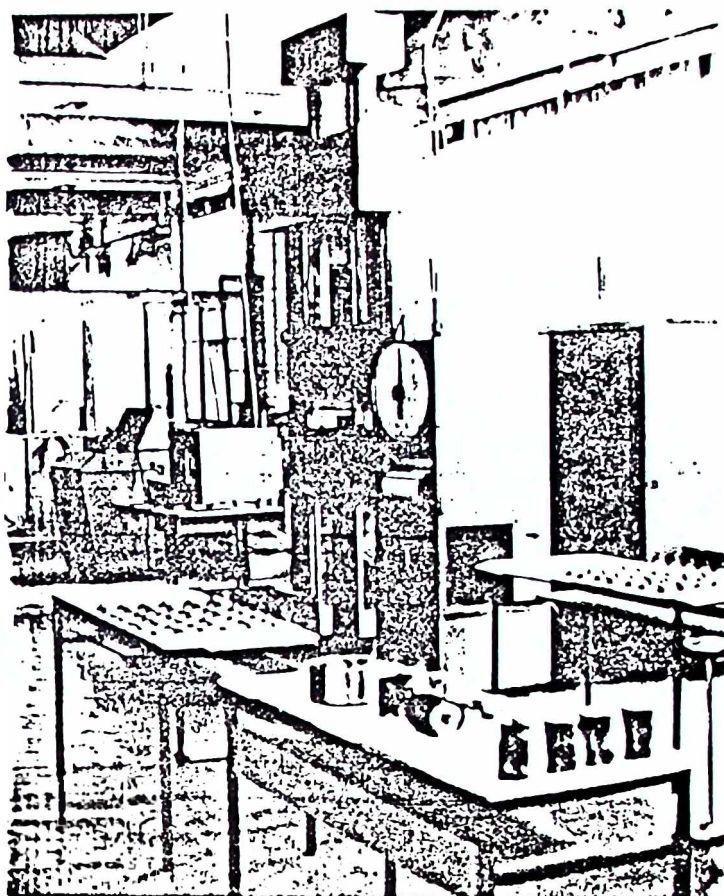
1.



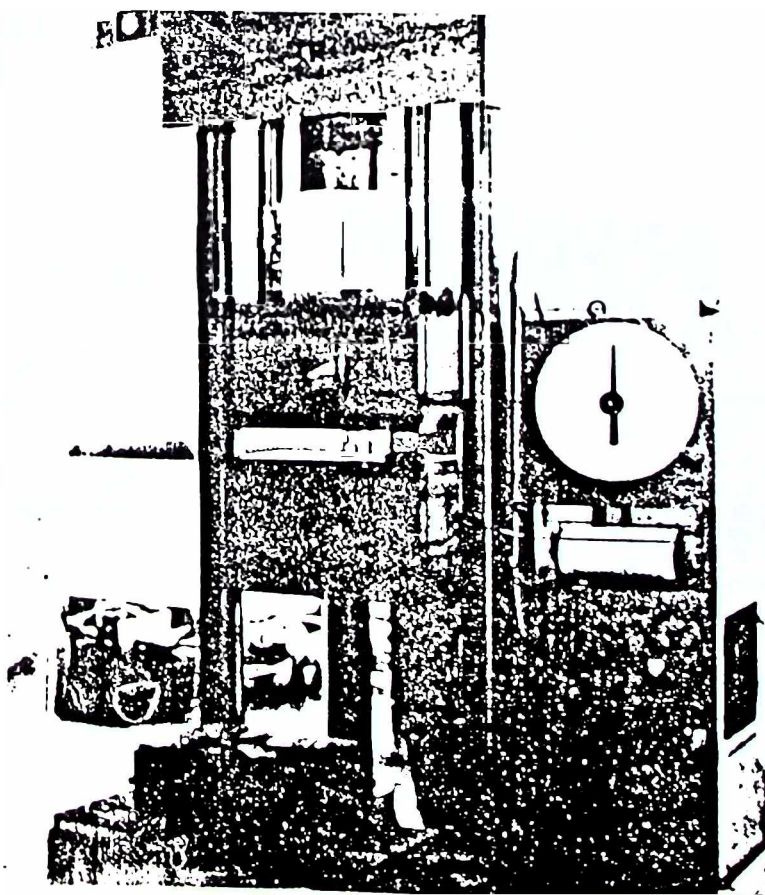


P R I L O G 7.

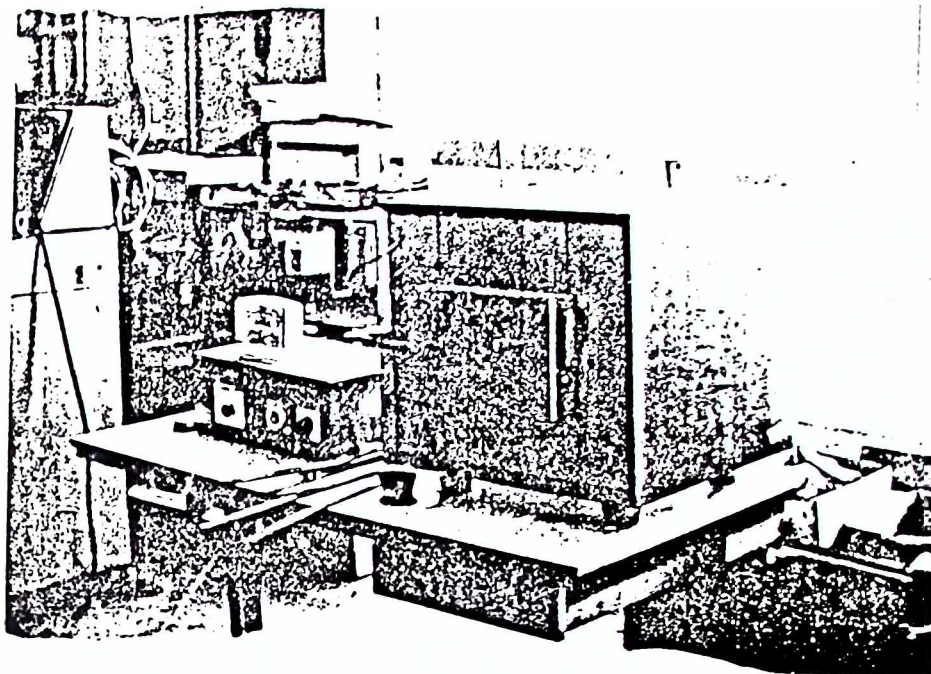
KARAKTERISTIČNE EKSPERIMENTALNE FOTOGRAFIJE



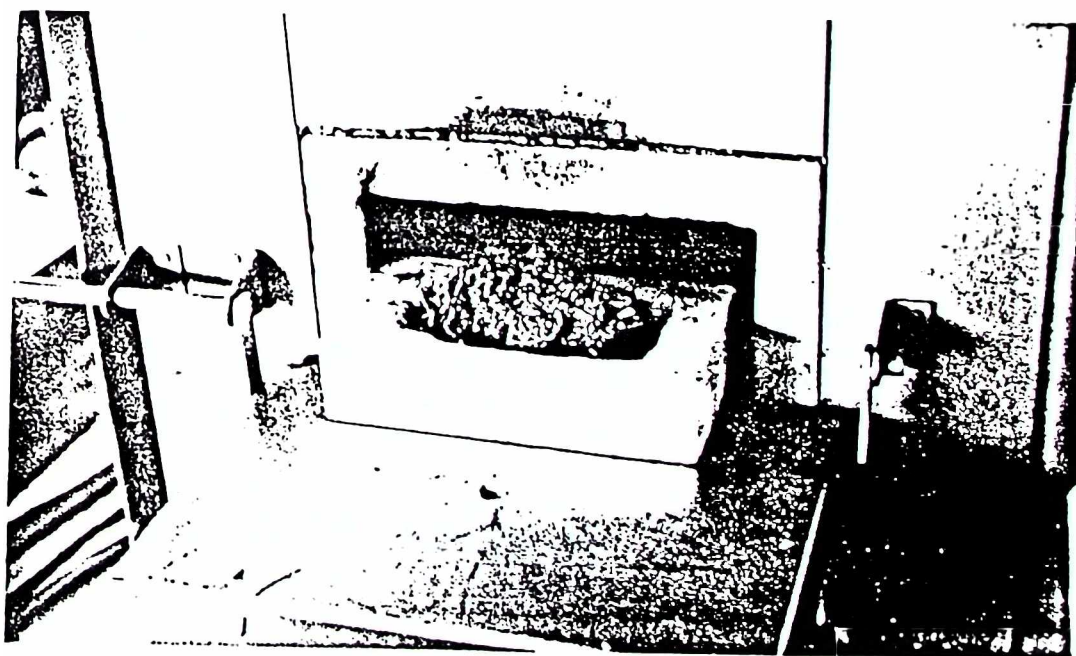
Sl.6.1. Izgled radnog mjesta.



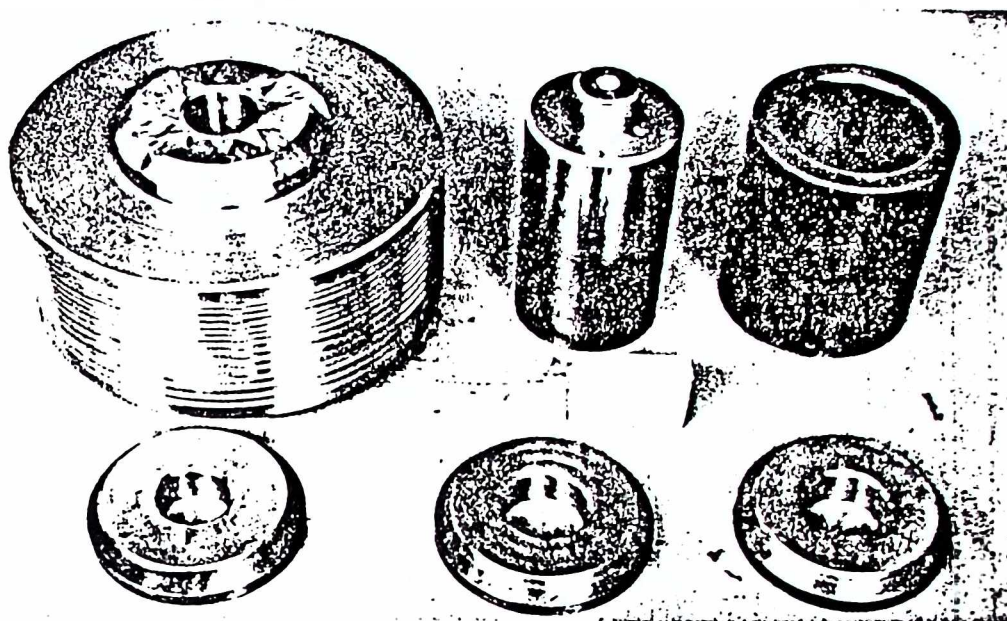
Sl.6.2. Hidraulična presa R-100 sovjetske proizvodnje na kojoj je vršeno istiskivanje i presovanje.



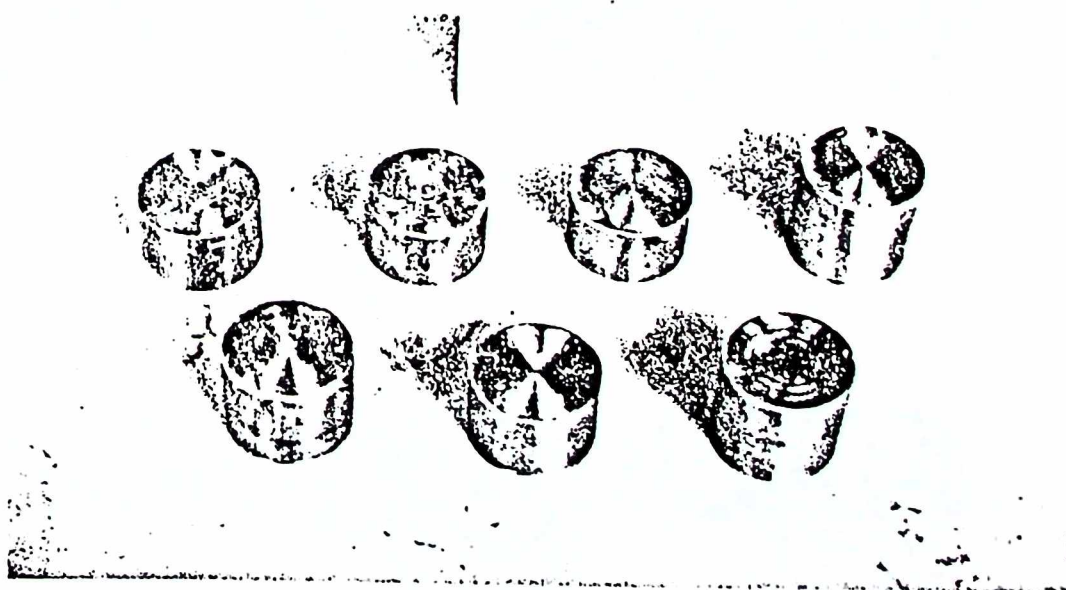
Sl.6.3. Peć za žarenje LP08 u kojoj je topljeno olovo.



Sl.6.4. Posuda od vidasila u kojoj je topljeno olovo.



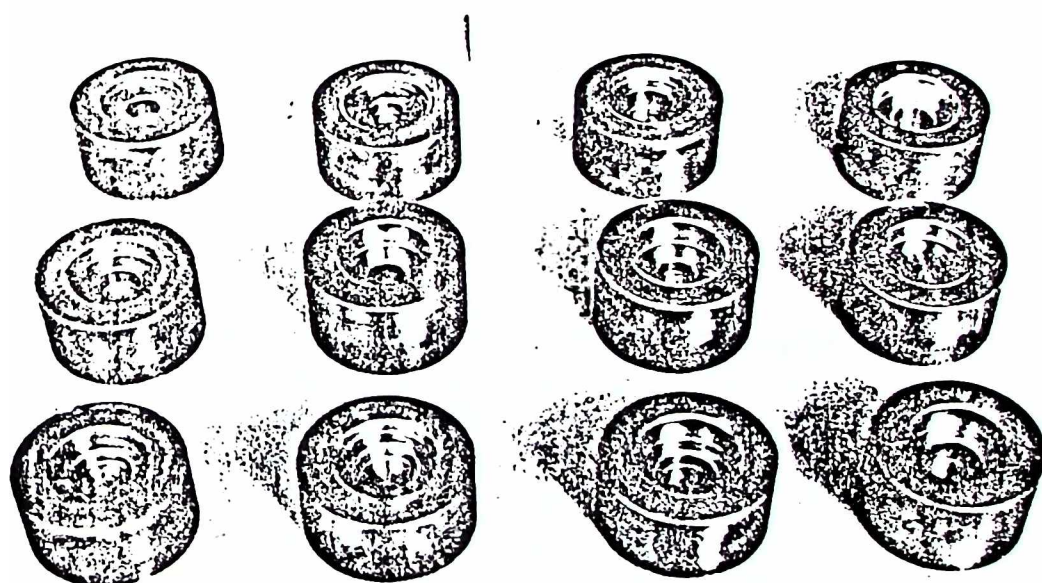
Sl.6.5. Alat za istiskivanje livenih komada.



Sl.6.6. Pripremci za presovanje u otvorenim kalupima.



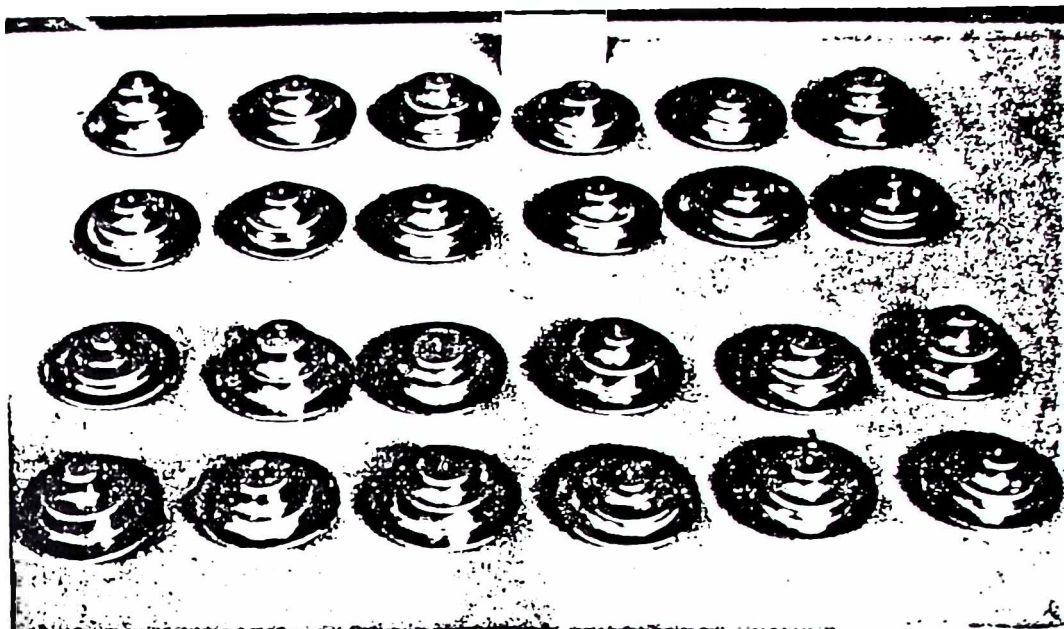
Sl.6.7. Alat za presovanje u otvorenim kalupima.



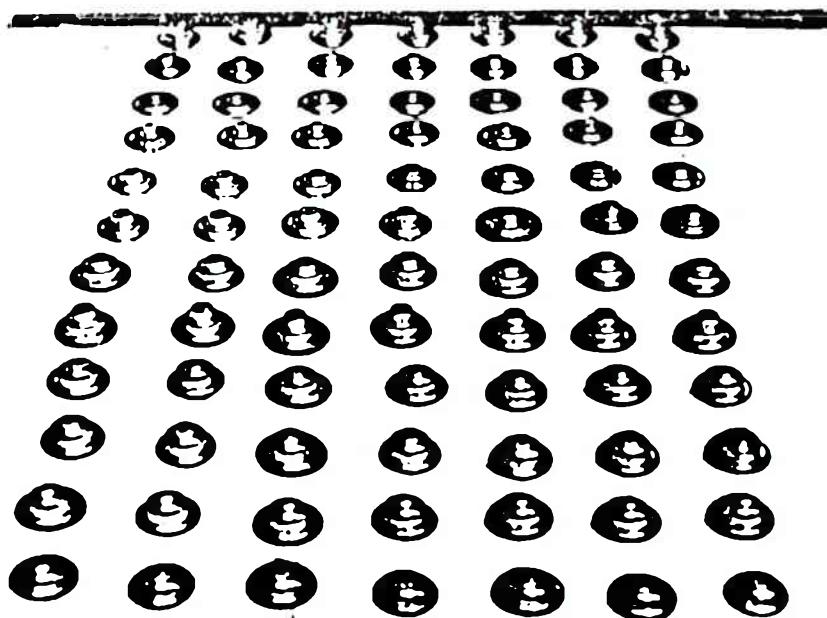
Sl.6.8. Komplet alata za presovanje u otvorenim kalupima



Sl.6.9. Alati za presovanje sa žljebovima.



Sl.6.10. Serija eksperimentalnih uzoraka.



Sl.6.11. Uzorci iz punog petofaktornog plana na kraju presovanja.

P R I L O G 8.

PROGRAMI ZA ANALIZU EKSPERIMENTALNIH REZULTATA
PRIMJENOM VIŠEFAKTORNIH ORTOGONALNIH PLANOVA ZA
SLUČAJ STEPENOG MODELA IZLAZNE FUNKCIJE:

- I - DVOFAKTORNI PLAN
- II - DVOFAKTORNI PLAN (ŠTAMPAČ)
- III - DVOFAKTORNI PLAN SA MEDJUZAVISNOSTIMA (ŠTAMPAČ)
- IV - TROFAKTORNI PLAN
- V - TROFAKTORNI PLAN (ŠTAMPAČ)
- VI - TROFAKTORNI PLAN SA MEDJUZAVISNOSTIMA
- VII - TROFAKTORNI PLAN SA MEDJUZAVISNSOTIMA (ŠTAMPAČ)
- VIII - ČETVOROFAKTORNI PLAN
- IX - ČETVOROFAKTORNI PLAN (ŠTAMPAČ)
- X - PETOFAKTORNI PLAN
- XI - PETOFAKTORNI PLAN (ŠTAMPAČ)


```

10 DIM Y(8),R(8),ITABL(8),F1(8),YK(8)
20 DIM V(3),S(3),X1(3),X2(3)
25 DIM YMIN(8),YMAX(8),RMAX(8),RMIN(8)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 2.8,1.4,0.7
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.44,0.22,0.11
150 FOR I=1 TO 8
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 41,53,64,80
200 DATA 63,62,62,74
210 FOR I=1 TO 8
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 33,13,31,11
250 DATA 22,22,22,22
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 8
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/8
350 A1=(-Y(1)+Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
380 YO=(Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/4
390 FOR I=5 TO 8
400 SE=SE+(Y(I)-YO)^2
410 NEXT I
420 SA0=8*AO^2
430 SA1=4*A1^2
440 SA2=4*A2^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 PRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN AO=0 :GOTO 520
510 PRINT "AO=";AO
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 :GOTO 540
530 PRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 :GOTO 580
550 PRINT "A2=";A2
580 PRINT
590 PRINT
600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+3)/(3*12)
610 GPOUZ=TFALF*SQR(DISP)
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
680 B0=AO+A1*C1+A2*C2
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM

```

```

720 C=EXP(B0)
730 PRINT "V(JJ)", "S(JJ)", "R(I)", "F1(I)"
740 FOR I=1 TO 8
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 F1(I)=C*V(KK)*B1*S(K)*B2
780 YN(I)=A0+A1*X1(KK)+A2*X2(K)
790 YMIN(I)=YN(I)-GF0UZ
800 YMAX(I)=YN(I)+GF0UZ
810 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
820 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
830 SR=SR+(Y(I)-YN(I))^2
840 PRINT V(KK), S(K), R(I), F1(I)
850 PRINT X1(KK), X2(KK), Y(I), YN(I)
860 PRINT "YMIN="; YMIN(I); "YMAX="; YMAX(I); "RMIN="; RMIN(I); "RMAX="; RMAX(I)
870 PRINT
880 NEXT I
890 SAD=(SR-SE)/2
900 FAD=SAD/(SE/3)
910 FTM=9.55
920 PRINT
930 IF FTM<FAD THEN PRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD="; FAD : GOTO 880
940 PRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD="; FAD; "<FTM="; FTM
950 PRINT
960 PRINT "C="; C, "B1="; B1, "B2="; B2
970 PRINT
980 PRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
990 PRINT "FM="; C; "xVxx"; B1; "xSxx"; B2
1000 PRINT
1010 PRINT "SAD="; SAD, "SR="; SR, "SE="; SE
1020 END

```

```

10 DIM Y(8),R(8),ITABL(8),FI(8),YN(8)
20 DIM V(3),S(3),X1(3),X2(3)
25 DIM YMIN(8),YMAX(8),RMAX(8),RMIN(8)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 2.8,1.4,0.7
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.44,0.22,0.11
150 FOR I=1 TO 8
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 41,53,64,80
200 DATA 63,62,62,74
210 FOR I=1 TO 8
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 33,13,31,11
250 DATA 22,22,22,22
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 8
320 SUMA=SUMA(Y(I))
330 NEXT I
340 A0=SUMA/8
350 A1=(-Y(1)+Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
380 Y0=(Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/4
390 FOR I=5 TO 8
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
410 NEXT I
420 SA0=8*A0^2
430 SA1=4*A1^2
440 SA2=4*A2^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 :GOTO 520
510 LPRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 :GOTO 540
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 :GOTO 580
550 LPRINT "A2=";A2
580 LPRINT
590 LPRINT
600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+3)/(3*12)
610 GFOUZ=TFALF*SQRT(DISP)
620 UPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/UPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2
690 B1=A1/UPOM
700 B2=A2/SPOM

```

```

720 C=EXP(C0)
730 LPRINT "C(J)", "S(J)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 3
750 KK=INT(1/TABL(I)*10)
760 K=INT(1/TABL(I))-KK*10)
770 F(I)=C*V(KK)*B1*S(K)*B2
800 YN(I)=A0+A1*X1(KK)+A2*X2(K)
805 YMIN(I)=YN(I)-GPOUZ
806 YMAX(I)=YN(I)+GPOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YN(I))*2
820 LPRINT "C(K),S(K),R(I),F(I)"
830 LPRINT "X1(K),X2(K),Y(I),YN(I)"
831 LPRINT "YMIN=";YMIN(I); "YMAX=";YMAX(I); "RMIN=";RMIN(I); "RMAX=";RMAX(I)
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/5
860 FAD=SAU/(SE/3)
865 FTM=9.55
866 LPRINT
870 IF FTM/FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880
875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD; "<FTM=";FTM
876 LPRINT
880 LPRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2
885 LPRINT
890 LPRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
900 LPRINT "FM=";C; "X1(K)" ;B1; "X2(K)" ;B2
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD=";SAD, "SR=";SR, "SE=";SE
940 END

```

```

10 DIM Y(8),R(8),ITABL(8),F1(8),YK(8)
20 DIM V(3),S(3),X1(3),X2(3)
25 DIM YMIN(8),YMAX(8),RMAX(8),RMINK(8)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 1.0,55.0,3
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 1.8,1.65,1.5
150 FOR I=1 TO 3
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 1.724,4.94,1.011,1.66
200 DATA 1.781,1.781,1.8,2.05
210 FOR I=1 TO 8
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 33,13,31,11
250 DATA 22,22,22,22
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 8
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/8
350 A1=(-Y(1)+Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
370 A12=(Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4))/4
380 Y0=(Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/4
390 FOR I=5 TO 8
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
410 NEXT I
420 SA0=8*AO^2
430 SA1=4*A1^2
440 SA2=4*A2^2
450 SA12=4*A12^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA12=SA12/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOJEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN AO=0 : GOTO 520
510 LPRINT "AO=";AO
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 LPRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA12 THEN A12=0 : GOTO 580
570 LPRINT "A12=";A12
580 LPRINT
590 LPRINT
600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+3)/(3*12)
610 GPOUZ=TFALF*SGR(DISP)
620 VFOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SFOM=.5*LOG(S(1)/S(3))

```

```

650 C1=1-(LOG(V(1))/VFOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SFOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A12*C1*C2
690 B1=(A1+A12*C2)/VFOM
700 B2=(A2+A12*C1)/SFOM
710 B12=A12/(VFOM*SFOM)
720 C=EXP(B0)
730 LPRINT "V(J)", "S(J)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 8
750 KK=INT(ITABL(I)/10)
760 K=INT(ITABL(I)-KK*10)
790 YK(I)=A0+A1*X1(KK)+A2*X2(K)+A12*X1(KK)*X2(K)
800 F(I)=EXP(YK(I))
805 YMIN(I)=YK(I)-GFOUZ
806 YMAX(I)=YK(I)+GFOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=(SR+(Y(I)-YK(I))^2)
820 LPRINT V(KK), S(K), R(I), F(I)
830 LPRINT X1(KK), X2(K), Y(I), YK(I)
831 LPRINT "YMIN=";YMIN(I); "YMAX=";YMAX(I); "RMIN=";RMIN(I); "RMAX=";RM
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/2
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=9.55
866 LPRINT
870 IF FTM<FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD; GOTO 880
875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD; "FTM=";FTM
876 LPRINT
880 LPRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2, "B12=";B12
885 LPRINT
890 LPRINT "STEFENA F-JA JE OBLIKA "
900 LPRINT "FM=";C; "V**";B1; "S**";B2; "+";B12; "LOG(V))"
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD=";SAD, "SR=";SR, "SE=";SE
940 END

```



```

10 DIM Y(12),R(12),ITABL(12),FIX(12),YM(12)
20 DIM U(3),S(3),T(3),X1(3),X2(3),X3(3)
25 DIM YMIN(12),YMAX(12),RMAX(12),RMIN(12)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ U(I)
50 NEXT I
60 DATA 186.92,120.15,77.24
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.36,0.18,0.091
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 2.56,1.6,1.0
150 FOR I=1 TO 12
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 250,240,767,710,640,600,1893,1800
200 DATA 700,680,700,680
210 FOR I=1 TO 12
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 333,133,313,113,331,131,311,111
250 DATA 222,222,222,222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=(FIX((LOG(U(I))-LOG(U(1)))/(LOG(U(1))-LOG(U(3)))*2+1))
280 X2(I)=(FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1))
290 X3(I)=(FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1))
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 12
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 A0=SUMA/12
350 A1=(-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
370 A3=(-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
380 Y0=(Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12))/4
390 FOR I=9 TO 12
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
410 NEXT I
420 SA0=12*A0^2
430 SA1=8*A1^2
440 SA2=8*A2^2
450 SA3=8*A3^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
500 FTK=10.13
510 PRINT "ZNACAJNOST KOEFICIJENATA"
520 IF FTK>FA0 THEN A0=0
530 PRINT "A0=";A0
540 IF FTK>FA1 THEN A1=0
550 PRINT "A1=";A1
560 IF FTK>FA2 THEN A2=0
570 PRINT "A2=";A2
580 IF FTK>FA3 THEN A3=0
590 PRINT "A3=";A3
600 PRINT
610 PRINT

```

```

600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+3)/(3*12)
610 GPOUZ=TFALF*SQR(DISP)
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
680 EO=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM
710 B3=A3/TPOM
720 C=EXP(EO)
730 PRINT "V(JJ)", "S(JJ)", "T(K)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 12
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( (ITABL(I)-JJ*100)/10 )
790 F(I)=C*V(JJ)*B1*S(J)*B2*T(K)*B3
800 Y(I)=A0+A1*X1(JJ)+A2*X2(J)+A3*X3(K)
805 YMIN(I)=Y(I)-GPOUZ
806 YMAX(I)=Y(I)+GPOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=(R(I)-Y(I))^2
820 PRINT V(JJ), S(JJ), T(K), R(I), F(I)
830 PRINT X1(JJ), X2(J), X3(K), Y(I), Y(I)
831 PRINT "YMIN="; YMIN(I); "YMAX="; YMAX(I); "RMIN="; RMIN(I); "RMAX="; RMA
835 PRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/5
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=9.01
866 PRINT
870 IF FTM/FAD THEN PRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD="; FAD :GOTO 880
875 PRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD="; FAD; "<FTM="; FTM
876 PRINT
880 PRINT "C="; C, "B1="; B1, "B2="; B2, "B3="; B3
885 PRINT
890 PRINT "STEPENA I IJA JE OBLIKA"
900 PRINT "FM="; C; "x1**"; B1; "x2**"; B2; "x3**"; B3
905 PRINT
910 PRINT "SAD="; SAD, "SR="; SR, "SE="; SE
940 END

```



```

10 DIM Y(12),R(12),ITABL(12),F1(12),YM(12)
20 DIM U(3),S(3),T(3),X1(3),X2(3),X3(3)
25 DIM YMIN(12),YMAX(12),RMAX(12),RMIN(12)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ U(I)
50 NEXT I
60 DATA 186.92,120.15,77.24
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.36,0.18,0.091
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 2.56,1.6,1.0
150 FOR I=1 TO 12
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 250,240,767,710,640,600,1893,1800
200 DATA 700,680,700,680
210 FOR I=1 TO 12
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 333,133,313,113,331,131,311,111
250 DATA 222,222,222,222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(U(I))-LOG(U(1)))/(LOG(U(1))-LOG(U(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 12
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 A0=SUMA/12
350 A1=(-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
370 A3=(-Y(1)-Y(2)-Y(3)+Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
380 Y0=(Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12))/4
390 FOR I=5 TO 12
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
410 NEXT I
420 SA0=12*A0^2
430 SA1=8*A1^2
440 SA2=8*A2^2
450 SA3=8*A3^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0
510 LPRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0
550 LPRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0
570 LPRINT "A3=";A3
580 LPRINT
590 LPRINT

```

```

600 TFALE=3.18
605 DISP=SE*(1+3)/(3*12)
610 GFOUZ=TFALE*SQR(DISP)
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM
710 B3=A3/TPOM
720 C=EXP(B0)
730 LPRINT "V(JJ)", "S(JJ)", "T(K)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 12
750 KK=INT(ITABL(I)/10)
760 K=INT(ITABL(I)-KK*10)
770 JJ=INT(ITABL(I)/100)
780 J=INT(ITABL(I)-JJ*100)/10)
790 F(I)=C*V(JJ)*B1*S(JJ)*B2*T(K)*B3
800 YMK(I)=A0+A1*X1(JJ)+A2*X2(JJ)+A3*X3(K)
805 YMIN(I)=YMK(I)-GFOUZ
806 YMAX(I)=YMK(I)+GFOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YMK(I))^2
820 LPRINT V(JJ), S(JJ), T(K), R(I), F(I)
830 LPRINT X1(JJ), X2(JJ), X3(K), Y(I), YMK(I)
831 LPRINT "YMIN="; YMIN(I); "YMAX="; YMAX(I); "RMIN="; RMIN(I); "RMAX="; RMAX(I)
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/5
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=9.01
866 LPRINT
870 IF FTM<FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD="; FAD : GOTO 880
875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD="; FAD; "<FTM="; FTM
876 LPRINT
880 LPRINT "C="; C, "B1="; B1, "B2="; B2, "B3="; B3
885 LPRINT
890 LPRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
900 LPRINT "FM="; C; "xVxx"; B1; "xSxx"; B2; "xTxx"; B3
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD="; SAD, "SR="; SR, "SE="; SE
940 END

```

```

10 DIM Y(12),R(12),ITABL(12),F1(12),YH(12),Y1(12),Y2(12)
20 DIM V(3),S(3),T(3),X1(3),X2(3),X3(3)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 440,440,420
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 20,10,5
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.37,0.22,0.13
150 FOR I=1 TO 12
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 12.5,9.38,24.04,16.67,18.75,13.13,27.08,20.83
200 DATA 14.58,13.58,15.58,14.58
210 FOR I=1 TO 12
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 333,133,313,113,331,131,311,111
250 DATA 222,222,222,222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 12
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/12
350 A1=(-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
370 A3=(-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
371 A12=(Y(1)-Y(2)-Y(3)+Y(4)+Y(5)-Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
372 A13=(Y(1)-Y(2)+Y(3)-Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
373 A23=(Y(1)+Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
374 A123=(-Y(1)+Y(2)+Y(3)-Y(4)+Y(5)-Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
380 Y0=(Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12))/4
390 FOR I=9 TO 12
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
410 NEXT I
420 SA0=12*AO^2
430 SA1=8*A1^2
440 SA2=8*A2^2
450 SA3=8*A3^2
451 SA12=8*A12^2
452 SA13=8*A13^2
453 SA23=8*A23^2
454 SA123=8*A123^2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
491 FA12=SA12/(SE/3)
492 FA13=SA13/(SE/3)
493 FA23=SA23/(SE/3)
494 FA123=SA123/(SE/3)
495 FTK=10.13

```

```

496 PRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA "
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 PRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 PRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 PRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 PRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA12 THEN A12=0 : GOTO 573
572 PRINT "A12=";A12
573 IF FTK>FA13 THEN A13=0 : GOTO 575
574 PRINT "A13=";A13
575 IF FTK>FA23 THEN A23=0 : GOTO 577
576 PRINT "A23=";A23
577 IF FTK>FA123 THEN A123=0 : GOTO 580
578 PRINT "A123=";A123
580 PRINT
585 PRINT A0,A1,A2,A3
586 PRINT A12,A13,A23,A123
590 PRINT
620 VPOM=.5*(LOG(V(1))/V(3))
630 SPOM=.5*(LOG(S(1))/S(3))
640 TPOM=.5*(LOG(T(1))/T(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A12*C1*C2+A13*C1*C3+A23*C2*C3+A123*C1*C2*
685 B1=(A1+A12*C2+A13*C3+A123*C2*C3)/VPOM
690 B2=(A2+A12*C1+A23*C3+A123*C1*C3)/SPOM
695 B3=(A3+A13*C1+A23*C2+A123*C1*C2)/TPOM
700 B12=(A12+A123*C3)/(VPOM*SPOM)
705 B23=(A23+A123*C1)/(SPOM*TPOM)
710 B13=(A13+A123*C2)/(VPOM*TPOM)
715 B123=A123/(VPOM*SPOM*TPOM)
720 C=EXP(B0)
730 PRINT "V(JJ)", "S(JJ)", "T(K)", "R(I)", "F1(I)"
740 FOR I=1 TO 12
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( ( ITABL(I)-JJ*100 )/10 )
800 Y1(I)=A0+A1*X1(JJ)+A2*X2(JJ)+A3*X3(K)+A12*X1(JJ)*X2(JJ)+A13*X1(JJ)*
801 Y2(I)=A23*X2(JJ)*X3(K)+A123*X2(JJ)*X3(K)
802 YK(I)=Y1(I)+Y2(I)
803 F1(I)=EXP(YK(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YK(I))^2
820 PRINT V(JJ), S(JJ), T(K), R(I), F1(I)
830 PRINT X1(JJ), X2(JJ), X3(K), Y(I), YK(I)
835 PRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/5
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=9.01
866 PRINT
870 IF FTM>FAD THEN PRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880
875 PRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD;"<FTM=";FTM
876 PRINT
879 PRINT "B0=";B0
880 PRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2, "B3=";B3
881 PRINT "B12=";B12, "B13=";B13, "B23=";B23, "B123=";B123
890 PRINT "STEPENA F-JA JE OBILIK"

```

```

900 PRINT "FM=";C;"*V**(";"R1;"+"R13;"*LOG(T)*S**("R2;"+"R12;"*LOG(
901 PRINT "T**("R3;"+"R23;"*LOG(S))*V**"R123;"*LOG(S)*LOG(T)"
905 PRINT
910 PRINT "SAD=";SAD,"SR=";SR,"SE=";SE
940 END

```

```

10 DIM Y(12),R(12),ITABL(12),F1(12),YMK(12),Y1(12),Y2(12)
20 DIM V(3),S(3),T(3),X1(3),X2(3),X3(3)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 460,440,420
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 20,10,5
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.37,0.22,0.13
150 FOR I=1 TO 12
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 12.5,9.33,26.04,16.67,13.75,13.13,27.08,20.83
200 DATA 14.58,13.58,15.58,14.58
210 FOR I=1 TO 12
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 333,133,313,113,331,131,311,111
250 DATA 222,222,222,222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 12
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/12
350 A1=(-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
360 A2=(-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
370 A3=(-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
380 A12=(Y(1)-Y(2)-Y(3)+Y(4)+Y(5)-Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
390 A13=(Y(1)-Y(2)+Y(3)-Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
400 A23=(Y(1)+Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8))/8
410 A123=(-Y(1)+Y(2)+Y(3)-Y(4)+Y(5)-Y(6)-Y(7)+Y(8))/8
420 Y0=(Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12))/4
430 FOR I=9 TO 12
440 SE=SE+(Y(I)-Y0)^2
450 NEXT I
460 SA0=12*AO^2
470 SA1=8*A1^2
480 SA2=8*A2^2
490 SA3=8*A3^2
500 SA12=8*A12^2
510 SA13=8*A13^2
520 SA23=8*A23^2
530 SA123=8*A123^2
540 FA0=SA0/(SE/3)
550 FA1=SA1/(SE/3)
560 FA2=SA2/(SE/3)
570 FA3=SA3/(SE/3)
580 FA12=SA12/(SE/3)
590 FA13=SA13/(SE/3)
600 FA23=SA23/(SE/3)
610 FA123=SA123/(SE/3)
620 FTK=10.13

```

```

496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 LPRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 LPRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 LPRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA12 THEN A12=0 : GOTO 573
572 LPRINT "A12=";A12
573 IF FTK>FA13 THEN A13=0 : GOTO 575
574 LPRINT "A13=";A13
575 IF FTK>FA23 THEN A23=0 : GOTO 577
576 LPRINT "A23=";A23
577 IF FTK>FA123 THEN A123=0 : GOTO 580
578 LPRINT "A123=";A123
580 LPRINT
585 LPRINT A0,A1,A2,A3
586 LPRINT A12,A13,A23,A123
590 LPRINT
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A12*C1*C2+A13*C1*C3+A23*C2*C3+A123*C1*C2*C3
685 B1=(A1+A12*C2+A13*C3+A123*C2*C3)/VPOM
690 B2=(A2+A12*C1+A23*C3+A123*C1*C3)/SPOM
695 B3=(A3+A13*C1+A23*C2+A123*C1*C2)/TPOM
700 B12=(A12+A123*C3)/(VPOM*SPOM)
705 B23=(A23+A123*C1)/(SPOM*TPOM)
710 B13=(A13+A123*C2)/(VPOM*TPOM)
715 B123=A123/(VPOM*SPOM*TPOM)
720 C=EXP(B0)
730 LPRINT "V(JJ)", "S(J)", "T(K)", "R(I)", "F1(I)"
740 FOR I=1 TO 12
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( ( ITABL(I)-JJ*100 )/10 )
800 Y1(I)=A0+A1*X1(JJ)+A2*X2(J)+A3*X3(K)+A12*X1(JJ)*X2(J)+A13*X1(JJ)*X3(K)
801 Y2(I)=A23*X2(J)*X3(K)+A123*X2(J)*X3(K)
802 YK(I)=Y1(I)+Y2(I)
803 F1(I)=EXP(YK(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YK(I))^2
820 LPRINT V(JJ),S(J),T(K),R(I),F1(I)
830 LPRINT X1(JJ),X2(J),X3(K),Y(I),YK(I)
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/5
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=9.01
866 LPRINT
870 IF FTM<FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880
875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD;"<FTM=";FTM
876 LPRINT
879 LPRINT "B0=";B0
880 LPRINT "C=";C,"B1=";B1,"B2=";B2,"B3=";B3
881 LPRINT "B12=";B12,"B13=";B13,"B23=";B23,"B123=";B123
885 LPRINT

```

```

890 LPRINT "STEPENA F-IA JE OBLIKA"
900 LPRINT "FM=";C;"*V**(";"B1;"+";B13;"*LOG(T))*S**(";B2;"+";B12;"*LOG
901 LPRINT "*T**(";"B3;"+";B23;"*LOG(S))*V**";B123;"*LOG(S)*LOG(T)"
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD=";SAD,"SR=";SR,"SE=";SE
940 END

```


VIII

```

10 DIM Y(20),R(20),ITABL(20),F1(20),YIN(20)
20 DIM V(3),S(3),T(3),P(3),X1(3),X2(3),X3(3),X4(3)
25 DIM YMIN(20),YMAX(20),RMAX(20),RMIN(20)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 0.5,0.49,0.4
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.7,0.46,0.3
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.5,0.49,0.4
142 FOR I=1 TO 3
144 READ P(I)
146 NEXT I
148 DATA 1.8,1.65,1.5
150 FOR I=1 TO 20
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 2.041,1.713,1.563,1.014,2.285,1.981,2.003,1.93
195 DATA 1.389,1.104,1.329,0.989,1.711,1.447,1.569,1.122
200 DATA 2.078,2.003,1.749,1.743
210 FOR I=1 TO 20
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 3333,1333,3133,1133,3313,1313,3113,1113
245 DATA 3331,1331,3131,1131,3311,1311,3111,1111
250 DATA 2222,2222,2222,2222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=(FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1))
280 X2(I)=(FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1))
290 X3(I)=(FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1))
295 X4(I)=(FIX((LOG(P(I))-LOG(P(1)))/(LOG(P(1))-LOG(P(3)))*2+1))
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 20
320 SUMA=(SUMA+Y(I))
330 NEXT I
340 AO=SUMA/20
350 PA1=-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8)
355 QA1=-Y(9)+Y(10)-Y(11)+Y(12)-Y(13)+Y(14)-Y(15)+Y(16)
357 A1=(PA1+QA1)/16
360 PA2=-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8)
365 QA2=-Y(9)-Y(10)+Y(11)+Y(12)-Y(13)-Y(14)+Y(15)+Y(16)
367 A2=(PA2+QA2)/16
370 PA3=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8)
372 QA3=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
374 A3=(PA3+QA3)/16
376 PA4=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
377 QA4=Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
378 A4=(PA4+QA4)/16
380 YO=(Y(17)+Y(18)+Y(19)+Y(20))/4
390 FOR I=17 TO 20
400 SE=SE+(Y(I)-YO)*2
410 NEXT I
420 SA0=20*AO*2
430 SA1=16*A1*2
440 SA2=16*A2*2
450 SA3=16*A3*2

```

```

455 SA4=1.5*AA02
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
492 FA4=SA4/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 PRINT "ZNAČA. NOST KOEF. ICL. IEN. A16"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 PRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 PRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 PRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 PRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA4 THEN A4=0 : GOTO 580
573 PRINT "A4=";A4
580 PRINT
590 PRINT
600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+4)/(4*20)
610 GPOUZ=TFALF*SQR(DISP)
620 VPOM=.5*LOG(U(1)/U(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
645 PPOM=.5*LOG(P(1)/P(3))
650 C1=1-(LOG(U(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
675 C4=1-(LOG(P(1))/PPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A4*C4
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM
710 B3=A3/TPOM
715 B4=A4/PPOM
720 C=EXP(B0)
730 PRINT "U(LL)", "S(LL)", "T(K)", "P(K)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 20
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( ITABL(I)-JJ*100 )
782 LL=INT( ITABL(I)/1000 )
784 L=INT( ITABL(I)-LL*1000 )
790 F(I)=C*(X1*LL+X2*B1+S(L)+X3*J+X4*B3+P(K)+B4
800 Y(I)=A0+A1*(X1(LL)+A2*(X2(L)+A3*(X3(J)+A4*(X4(K)
805 YMIN(I)=Y(I)-GPOUZ
806 YMAX(I)=Y(I)+GPOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-Y(I))^2
820 PRINT U(LL), S(LL), T(J), P(K), R(I), F(I)
830 PRINT X1(LL), X2(L), X3(J), X4(K), Y(I), Y(I)
831 PRINT "YMIN=";YMIN(I); "YMAX=";YMAX(I); "RMEN=";RMIN(I); "RMAX=";RMA
835 PRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/12
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=8.74
866 PRINT
870 IF FTM<FAD THEN PRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880

```

```
875 PRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD;"<FTM=";FTM
876 PRINT
879 PRINT "BO=";BO
880 PRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2, "B3=";B3, "B4=";B4
885 PRINT
890 PRINT "STEPENA F--JA JE OBLIKA "
900 PRINT "FM=";C;"X000";B1;"X500";B2;"X100";B3;"X200";B4
905 PRINT
910 PRINT "SAD=";SAD, "GR=";GR, "SE=";SE
940 END
```

IX

```

10 DIM Y(20),R(20),ITABL(20),F1(20),YM(20)
20 DIM V(3),S(3),T(3),P(3),X1(3),X2(3),X3(3),X4(3)
25 DIM YMIN(20),YMAX(20),RMAX(20),RMIN(20)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ V(I)
50 NEXT I
60 DATA 0.6,0.49,0.4
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.7,0.46,0.3
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.6,0.49,0.4
142 FOR I=1 TO 3
144 READ P(I)
146 NEXT I
148 DATA 1.8,1.65,1.5
150 FOR I=1 TO 20
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 2.041,1.713,1.563,1.014,2.285,1.981,2.003,1.93
195 DATA 1.389,1.104,1.329,0.989,1.711,1.447,1.569,1.122
200 DATA 2.078,2.003,1.749,1.743
210 FOR I=1 TO 20
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 3333,1333,3133,1133,3313,1313,3113,1113
245 DATA 3331,1331,3131,1131,3311,1311,3111,1111
250 DATA 2222,2222,2222,2222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(V(I))-LOG(V(1)))/(LOG(V(1))-LOG(V(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
295 X4(I)=FIX((LOG(P(I))-LOG(P(1)))/(LOG(P(1))-LOG(P(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 20
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/20
350 PA1=-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8)
355 QA1=-Y(9)+Y(10)-Y(11)+Y(12)-Y(13)+Y(14)-Y(15)+Y(16)
357 A1=(PA1+QA1)/16
360 PA2=-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8)
365 QA2=-Y(9)-Y(10)+Y(11)+Y(12)-Y(13)-Y(14)+Y(15)+Y(16)
367 A2=(PA2+QA2)/16
370 PA3=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8)
372 QA3=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
374 A3=(PA3+QA3)/16
376 PA4=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
377 QA4=Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
378 A4=(PA4+QA4)/16
380 YO=(Y(17)+Y(18)+Y(19)+Y(20))/4
390 FOR I=17 TO 20
400 SE=SE+(Y(I)-YO)^2
410 NEXT I
420 SA0=20*AO^2
430 SA1=16*A1^2
440 SA2=16*A2^2
450 SA3=16*A3^2

```

```

455 SA4=1.6*A4C2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
492 FA4=SA4/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 LPRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 LPRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 LPRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA4 THEN A4=0 : GOTO 580
573 LPRINT "A4=";A4
580 LPRINT
590 LPRINT
600 TFALF=3.18
605 DISF=SE*(1+4)/(4*20)
610 GFOUZ=TFALF*SQR(DISF)
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
645 PPOM=.5*LOG(P(1)/P(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
675 C4=1-(LOG(P(1))/PPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A4*C4
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM
710 B3=A3/TPOM
715 B4=A4/PPOM
720 C=EXP(B0)
730 LPRINT "V(LL)", "S(LL)", "T(K)", "P(K)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 20
750 KK=INT(ITABL(I)/10)
760 K=INT(ITABL(I)-KK*10)
770 JJ=INT(ITABL(I)/100)
780 J=INT(ITABL(I)-JJ*100)/10)
782 LL=INT(ITABL(I)/1000)
784 L=INT(ITABL(I)-LL*1000)/100)
790 F(I)=C*V(LL)*GB1*S(L)*GB2*P(J)*C13*P(K)*CB4
800 YM(I)=A0+A1*X1(LL)+A2*X2(L)+A3*X3(J)+A4*X4(K)
805 YMIN(I)=YM(I)-GFOUZ
806 YMAX(I)=YM(I)+GFOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YM(I))*C2
820 LPRINT "V(LL),S(LL),T(J),P(K),R(I),F(I)"
830 LPRINT "X1(LL),X2(L),X3(J),X4(K),Y(I),YM(I)"
831 LPRINT "YMIN=";YMIN(I); "YMAX=";YMAX(I); "RMIN=";RMIN(I); "RMAX=";RMA
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/12
860 FAD=SA0/(SE/3)
865 FTM=8.74
866 LPRINT
870 IF FTM<FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880

```

```

875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD;"(FTM=";FTM
876 LPRINT
879 LPRINT "BO=";BO
880 LPRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2, "B3=";B3, "B4=";B4
885 LPRINT
890 LPRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
900 LPRINT "FM=";C; "%000";B1; "%000";B2; "%000";B3; "%000";B4
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD=";SAD, "SR=";SR, "SE=";SE
940 END

```

X

```

10 DIM Y(36),R(36),ITABL(36),F1(36),YM(36)
20 DIM U(3),S(3),T(3),P(3),G(3),X1(3),X2(3),X3(3),X4(3),X5(3)
25 DIM YMIN(36),YMAX(36),RMAX(36),RMIN(36)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ U(I)
50 NEXT I
60 DATA 0.6,0.49,0.4
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.7,0.46,0.3
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.6,0.49,0.4
142 FOR I=1 TO 3
143 READ P(I)
144 NEXT I
145 DATA 1.8,1.65,1.5
146 FOR I=1 TO 3
147 READ G(I)
148 NEXT I
149 DATA 1.0,55,0.3
150 FOR I=1 TO 36
150 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 2.041,1.713,1.563,1.014,2.285,1.981,2.003,1.93
192 DATA 1.389,1.104,1.329,0.989,1.711,1.447,1.569,1.122
194 DATA 2.041,1.389,1.713,1.104,1.563,1.329,1.014,0.989
196 DATA 2.285,1.711,1.981,1.447,2.003,1.569,1.93,1.122
200 DATA 2.078,2.003,1.749,1.743
210 FOR I=1 TO 36
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 33333,13333,31333,11333,33133,13133,31133,11133
242 DATA 33313,13313,31313,11313,33113,13113,31113,11113
244 DATA 33331,13331,31331,11331,33131,13131,31131,11131
246 DATA 33311,13311,31311,11311,33111,13111,31111,11111
250 DATA 22222,22222,22222,22222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(U(I))-LOG(U(1)))/(LOG(U(1))-LOG(U(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
295 X4(I)=FIX((LOG(P(I))-LOG(P(1)))/(LOG(P(1))-LOG(P(3)))*2+1)
298 X5(I)=FIX((LOG(G(I))-LOG(G(1)))/(LOG(G(1))-LOG(G(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 36
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/36
350 PA1=-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8)
352 QA1=-Y(9)+Y(10)-Y(11)+Y(12)-Y(13)+Y(14)-Y(15)+Y(16)
354 RA1=-Y(17)+Y(18)-Y(19)+Y(20)-Y(21)+Y(22)-Y(23)+Y(24)
356 SA1=-Y(25)+Y(26)-Y(27)+Y(28)-Y(29)+Y(30)-Y(31)+Y(32)
357 A1=(PA1+QA1+RA1+SA1)/32
360 PA2=-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8)
362 QA2=-Y(9)-Y(10)+Y(11)+Y(12)-Y(13)-Y(14)+Y(15)+Y(16)
364 RA2=-Y(17)-Y(18)+Y(19)+Y(20)-Y(21)-Y(22)+Y(23)+Y(24)
366 SA2=-Y(25)-Y(26)+Y(27)+Y(28)-Y(29)-Y(30)+Y(31)+Y(32)
367 A2=(PA2+QA2+RA2+SA2)/32
370 PA3=-Y(1)+Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8)

```



```

371 QA3=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
372 RA3=-Y(17)-Y(18)-Y(19)-Y(20)+Y(21)+Y(22)+Y(23)+Y(24)
373 SA3=-Y(25)-Y(26)-Y(27)-Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
374 A3=(PA3+QA3+RA3+SA3)/32
375 PA4=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
376 QA4=Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
377 RA4=-Y(17)-Y(18)-Y(19)-Y(20)-Y(21)-Y(22)-Y(23)-Y(24)
378 SA4=Y(25)+Y(26)+Y(27)+Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
379 A4=(PA4+QA4+RA4+SA4)/32
382 PA5=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
383 QA5=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)-Y(13)-Y(14)-Y(15)-Y(16)
384 RA5=Y(17)+Y(18)+Y(19)+Y(20)+Y(21)+Y(22)+Y(23)+Y(24)
385 SA5=Y(25)+Y(26)+Y(27)+Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
386 A5=(PA5+QA5+RA5+SA5)/32
388 Y0=(Y(33)+Y(34)+Y(35)+Y(36))/4
390 FOR I=33 TO 36
400 SE=SE+(Y(I)-Y0)*C2
410 NEXT I
420 SA0=36*A0*C2
430 SA1=32*A1*C2
440 SA2=32*A2*C2
450 SA3=32*A3*C2
455 SA4=32*A4*C2
458 SA5=32*A5*C2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
492 FA4=SA4/(SE/3)
494 FA5=SA5/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 PRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 PRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 PRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 PRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 PRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA4 THEN A4=0 : GOTO 575
573 PRINT "A4=";A4
575 IF FTK>FA5 THEN A5=0 : GOTO 580
577 PRINT "A5=";A5
580 PRINT
590 PRINT
600 TFALF=3.18
605 DISP=SE*(1+5)/(5*36)
610 GPOUZ=TFALF*SQR(DISP)
620 VPOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SPOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TPOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
645 FPOM=.5*LOG(P(1)/P(3))
648 GPOM=.5*LOG(G(1)/G(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VPOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SPOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TPOM)
675 C4=1-(LOG(P(1))/FPOM)
678 C5=1-(LOG(G(1))/GPOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A4*C4+A5*C5
690 B1=A1/VPOM
700 B2=A2/SPOM

```



```

710 B3=A3/TPOM
715 B4=A4/PPOM
718 B5=A5/GPOM
720 C=EXP(B0)
730 PRINT "V(MM)", "S(M)", "T(L)", "P(J)", "G(K)", "R(I)", "F(I)"
740 FOR I=1 TO 34
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( ( ITABL(I)-JJ*100 )/10 )
782 LL=INT( ITABL(I)/1000 )
784 L=INT( ( ITABL(I)-LL*1000 )/100 )
786 MM=INT( ITABL(I)/10000 )
788 M=INT( ( ITABL(I)-MM*10000 )/1000 )
790 F1(I)=C*V(MM)*B1*S(M)*B2*T(L)*B3*P(J)*B4*G(K)*B5
800 YK(I)=A0+A1*X1(MM)+A2*X2(M)+A3*X3(L)+A4*X4(J)+A5*X5(K)
805 YMIN(I)=YK(I)-GFOUZ
806 YMAX(I)=YK(I)+GFOUZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YK(I))^2
820 PRINT V(MM), S(M), T(L), P(J), G(K), R(I), F(I)
830 PRINT X1(MM), X2(M), X3(L), X4(J), X5(K), Y(I), YK(I)
831 PRINT "YMIN="; YMIN(I); "YMAX="; YMAX(I); "RMIN="; RMIN(I); "RMAX="; RMA
835 PRINT
840 NEXT I
850 SAD=( SR-SE )/27
860 FAD=SAD/( SE/3 )
865 FTM=8.63
866 PRINT
870 IF FTM<FAD THEN PRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD="; FAD : GOTO 880
875 PRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD="; FAD; "<FTM="; FTM
876 PRINT
879 PRINT "B0="; B0
880 PRINT "C="; C, "B1="; B1, "B2="; B2, "B3="; B3, "B4="; B4, "B5="; B5
885 PRINT
890 PRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
900 PRINT "FM="; C, "XV**"; B1; "XS**"; B2; "XT**"; B3; "XF**"; B4; "XG**"; B5
905 PRINT
910 PRINT "SAD="; SAD, "SR="; SR, "SE="; SE
940 END

```

```

10 DIM Y(36),R(36),ITABL(36),F1(36),YM(36)
20 DIM U(3),S(3),T(3),P(3),G(3),X1(3),X2(3),X3(3),X4(3),X5(3)
25 DIM YMIN(36),YMAX(36),RMAX(36),RMIN(36)
30 FOR I=1 TO 3
40 READ U(I)
50 NEXT I
60 DATA 0.6,0.49,0.4
70 FOR I=1 TO 3
80 READ S(I)
90 NEXT I
100 DATA 0.7,0.46,0.3
110 FOR I=1 TO 3
120 READ T(I)
130 NEXT I
140 DATA 0.6,0.49,0.4
142 FOR I=1 TO 3
143 READ P(I)
144 NEXT I
145 DATA 1.8,1.65,1.5
146 FOR I=1 TO 3
147 READ G(I)
148 NEXT I
149 DATA 1.0,55,0.3
150 FOR I=1 TO 36
160 READ R(I)
170 Y(I)=LOG(R(I))
180 NEXT I
190 DATA 2.041,1.713,1.563,1.014,2.285,1.981,2.003,1.93
192 DATA 1.389,1.104,1.329,0.989,1.711,1.447,1.569,1.122
194 DATA 2.041,1.389,1.713,1.104,1.563,1.329,1.014,0.989
196 DATA 2.285,1.711,1.981,1.447,2.003,1.569,1.93,1.122
200 DATA 2.078,2.003,1.749,1.743
210 FOR I=1 TO 36
220 READ ITABL(I)
230 NEXT I
240 DATA 33333,13333,31333,11333,33133,13133,31133,11133
242 DATA 33313,13313,31313,11313,33113,13113,31113,11113
244 DATA 33331,13331,31331,11331,33131,13131,31131,11131
246 DATA 33311,13311,31311,11311,33111,13111,31111,11111
250 DATA 22222,22222,22222,22222
260 FOR I=1 TO 3
270 X1(I)=FIX((LOG(U(I))-LOG(U(1)))/(LOG(U(1))-LOG(U(3)))*2+1)
280 X2(I)=FIX((LOG(S(I))-LOG(S(1)))/(LOG(S(1))-LOG(S(3)))*2+1)
290 X3(I)=FIX((LOG(T(I))-LOG(T(1)))/(LOG(T(1))-LOG(T(3)))*2+1)
295 X4(I)=FIX((LOG(P(I))-LOG(P(1)))/(LOG(P(1))-LOG(P(3)))*2+1)
298 X5(I)=FIX((LOG(G(I))-LOG(G(1)))/(LOG(G(1))-LOG(G(3)))*2+1)
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO 36
320 SUMA=SUMA+Y(I)
330 NEXT I
340 AO=SUMA/36
350 PA1=-Y(1)+Y(2)-Y(3)+Y(4)-Y(5)+Y(6)-Y(7)+Y(8)
352 QA1=-Y(9)+Y(10)-Y(11)+Y(12)-Y(13)+Y(14)-Y(15)+Y(16)
354 RA1=-Y(17)+Y(18)-Y(19)+Y(20)-Y(21)+Y(22)-Y(23)+Y(24)
356 SA1=-Y(25)+Y(26)-Y(27)+Y(28)-Y(29)+Y(30)-Y(31)+Y(32)
357 A1=(PA1+QA1+RA1+SA1)/32
360 PA2=-Y(1)-Y(2)+Y(3)+Y(4)-Y(5)-Y(6)+Y(7)+Y(8)
362 QA2=-Y(9)-Y(10)+Y(11)+Y(12)-Y(13)-Y(14)+Y(15)+Y(16)
364 RA2=-Y(17)-Y(18)+Y(19)+Y(20)-Y(21)-Y(22)+Y(23)+Y(24)
366 SA2=-Y(25)-Y(26)+Y(27)+Y(28)-Y(29)-Y(30)+Y(31)+Y(32)
367 A2=(PA2+QA2+RA2+SA2)/32
370 PA3=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)+Y(5)+Y(6)+Y(7)+Y(8)

```

```

371 QA3=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
372 RA3=-Y(17)-Y(18)-Y(19)-Y(20)+Y(21)+Y(22)+Y(23)+Y(24)
373 SA3=-Y(25)-Y(26)-Y(27)-Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
374 A3=(PA3+QA3+RA3+SA3)/32
375 PA4=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
376 QA4=Y(9)+Y(10)+Y(11)+Y(12)+Y(13)+Y(14)+Y(15)+Y(16)
377 RA4=-Y(17)-Y(18)-Y(19)-Y(20)-Y(21)-Y(22)-Y(23)-Y(24)
378 SA4=Y(25)+Y(26)+Y(27)+Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
379 A4=(PA4+QA4+RA4+SA4)/32
382 PA5=-Y(1)-Y(2)-Y(3)-Y(4)-Y(5)-Y(6)-Y(7)-Y(8)
383 QA5=-Y(9)-Y(10)-Y(11)-Y(12)-Y(13)-Y(14)-Y(15)-Y(16)
384 RA5=Y(17)+Y(18)+Y(19)+Y(20)+Y(21)+Y(22)+Y(23)+Y(24)
385 SA5=Y(25)+Y(26)+Y(27)+Y(28)+Y(29)+Y(30)+Y(31)+Y(32)
386 A5=(PA5+QA5+RA5+SA5)/32
388 YO=(Y(33)+Y(34)+Y(35)+Y(36))/4
390 FOR I=33 TO 36
400 SE=SE+(Y(I)-YO)*2
410 NEXT I
420 SA0=35*A0*2
430 SA1=32*A1*2
440 SA2=32*A2*2
450 SA3=32*A3*2
455 SA4=32*A4*2
458 SA5=32*A5*2
460 FA0=SA0/(SE/3)
470 FA1=SA1/(SE/3)
480 FA2=SA2/(SE/3)
490 FA3=SA3/(SE/3)
492 FA4=SA4/(SE/3)
494 FA5=SA5/(SE/3)
495 FTK=10.13
496 LPRINT "ZNAČAJNOST KOEFICIJENATA"
500 IF FTK>FA0 THEN A0=0 : GOTO 520
510 LPRINT "A0=";A0
520 IF FTK>FA1 THEN A1=0 : GOTO 540
530 LPRINT "A1=";A1
540 IF FTK>FA2 THEN A2=0 : GOTO 560
550 LPRINT "A2=";A2
560 IF FTK>FA3 THEN A3=0 : GOTO 571
561 LPRINT "A3=";A3
571 IF FTK>FA4 THEN A4=0 : GOTO 575
573 LPRINT "A4=";A4
575 IF FTK>FA5 THEN A5=0 : GOTO 580
577 LPRINT "A5=";A5
580 LPRINT
590 LPRINT
600 TFALE=7.18
605 DISP=SEX(145)/(5*36)
610 GFOUZ=TFALE*SQR(DISP)
620 VFOM=.5*LOG(V(1)/V(3))
630 SFOM=.5*LOG(S(1)/S(3))
640 TFOM=.5*LOG(T(1)/T(3))
645 PFOM=.5*LOG(P(1)/P(3))
648 GFOM=.5*LOG(G(1)/G(3))
650 C1=1-(LOG(V(1))/VFOM)
660 C2=1-(LOG(S(1))/SFOM)
670 C3=1-(LOG(T(1))/TFOM)
675 C4=1-(LOG(P(1))/PFOM)
678 C5=1-(LOG(G(1))/GFOM)
680 B0=A0+A1*C1+A2*C2+A3*C3+A4*C4+A5*C5
690 B1=A1/VFOM
700 B2=A2/SFOM

```

```

710 B3=A3/TFOM
715 B4=A4/TFOM
718 B5=A5/GFOM
720 C=EXP(B0)
730 LPRINT "X(MM)", "S(M)", "T(L)", "P(J)", "G(K)", "R(I)", "F1(I)"
740 FOR I=1 TO 36
750 KK=INT( ITABL(I)/10 )
760 K=INT( ITABL(I)-KK*10 )
770 JJ=INT( ITABL(I)/100 )
780 J=INT( ITABL(I)-JJ*100)/10 )
782 LL=INT( ITABL(I)/1000 )
784 L=INT( ITABL(I)-LL*1000)/100 )
786 MM=INT( ITABL(I)/10000 )
788 M=INT( ITABL(I)-MM*10000)/1000 )
790 F1(I)=C*(X(MM)*B1+S(M)*B2+T(L)*B3+P(J)*B4+G(K)*B5
800 YK(I)=A0+A1*X1(MM)+A2*X2(M)+A3*X3(L)+A4*X4(J)+A5*X5(K)
805 YMIN(I)=YK(I)-GFOUTZ
806 YMAX(I)=YK(I)+GFOUTZ
807 RMIN(I)=EXP(YMIN(I))
808 RMAX(I)=EXP(YMAX(I))
810 SR=SR+(Y(I)-YK(I))^2
820 LPRINT "X(MM), S(M), T(L), P(J), G(K), R(I), F1(I)"
830 LPRINT "X1(MM), X2(M), X3(L), X4(J), X5(K), Y(I), YK(I)"
831 LPRINT "YMIN=";YMIN(I); "YMAX=";YMAX(I); "RMIN=";RMIN(I); "RMAX=";RMAX
835 LPRINT
840 NEXT I
850 SAD=(SR-SE)/27
860 FAD=SAD/(SE/3)
865 FTM=8.53
866 LPRINT
870 IF FTM<FAD THEN LPRINT "MODEL NIJE ADEKVATAN FAD=";FAD : GOTO 880
875 LPRINT "MODEL JE ADEKVATAN FAD=";FAD; "FTM=";FTM
876 LPRINT
879 LPRINT "B0=";B0
880 LPRINT "C=";C, "B1=";B1, "B2=";B2, "B3=";B3, "B4=";B4, "B5=";B5
885 LPRINT
890 LPRINT "STEPENA F-JA JE OBLIKA"
900 LPRINT "FM=";C; "X1=";B1; "X2=";B2; "X3=";B3; "X4=";B4; "X5=";B5
905 LPRINT
910 LPRINT "SAD=";SAD, "SR=";SR, "SE=";SE
940 END

```

P R I L O G 9.

PROGRAMI ZA OBRADU EKSPERIMENTALNIH PODATAKA
POMOĆU METODE NAJMANJIH KVADRATA:

- I - HIPERBOLIČNA ZAVISNOST
- II - STEPENA ZAVISNOST
- III - EKSPONENCIJALNA ZAVISNOST
- IV - LOGARITAMSKA ZAVISNOST



```

      PROGRAM EXPR
      DIMENSION Y(30),X(30)
      READ(S,*) Y0,N
      READ(S,*) (Y(I),I=1,N)
      READ(S,*) (X(I),I=1,N)
      U=0.
      V=0.
      E=0.
      F=0.
      T=0.
      DO 2 I=1,N
      U=U+ALOG(Y(I)-Y0)
      V=V+ALOG(X(I))
2     CONTINUE
      US=U/N
      VS=V/N
      DO 4 I=1,N
      E=E+(ALOG(Y(I)-Y0)-US)**2
      F=F+(ALOG(X(I))-VS)**2
      T=T+(ALOG(Y(I)-Y0)-US)*(ALOG(X(I))-VS)
4     CONTINUE
      SY=SQRT(E/(N-1))
      SX=SQRT(F/(N-1))
      WRITE (11,1010) SY
      WRITE (11,1011) SX
1010  FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA      SY= ',F10.4)
1011  FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA      SX= ',F10.4)
      RO=T/(SY*SX*(N-1))
      EN=RO*SY/SX
      CE=EXP(US-RO*(SY/SX)*VS)
      WRITE(11,1001) RO
1001  FORMAT(1X,'KOEFIcijENT KORELACIJE      RO= ',F8.5)
      WRITE(11,1002) Y0,CE,EN
1002  FORMAT(1X,'KRIVA IMA OBLIK : Y=',F10.5,'+',F10.5,'X**',F8.5)
      WRITE(11,1003)
1003  FORMAT(1X,'*****')
      WRITE(11,1004)
1004  FORMAT(1X,' YMOD      Y      ( )')
      YS=0.
      XS=0.
      DO 6 I=1,N
      YMOD=Y0 +CE*X(I)**EN
      YY=Y(I)
      XX=X(I)
      WRITE(11,1005) YMOD,YY,XX
      YS=YS+Y(I)
      XS=XS+X(I)
6     CONTINUE
      YS=YS/N
      XS=XS/N
      WRITE (11,1015) YS
      WRITE (11,1016) XS
1015  FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST      YSR=',F8.4)
1016  FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST      XSR=',F8.4)
1005  FORMAT(5F10.5)
      STOP
      END

```

```

PROGRAM EXPJ
DIMENSION Y(30),X(30)
  READ(5,*) Y0,N
  READ(5,*) (Y(I),I=1,N)
  READ(5,*) (X(I),I=1,N)
  U=0.
  V=0.
  E=0.
  F=0.
  T=0.
  DO 2 I=1,N
    U=U+ALOG(Y0-Y(I))
    V=V+ALOG(X(I))
2  CONTINUE
  US=U/N
  VS=V/N
  DO 4 I=1,N
    E=E+(ALOG(Y0-Y(I))-US)**2
    F=F+(ALOG(X(I))-VS)**2
    T=T+(ALOG(Y0-Y(I))-US)*(ALOG(X(I))-VS)
4  CONTINUE
  SY=SQRT(E/(N-1))
  SX=SQRT(F/(N-1))
  WRITE (11,1010) SY
  WRITE (11,1011) SX
1010 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DIFERZIJA SY= ',F10.4)
1011 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DIFERZIJA SX= ',F10.4)
  RO=T/(SY*SX*(N-1))
  EN=RO*SY/SX
  CE=EXP(US-RO*(SY/SX)*VS)
  WRITE(11,1001) RO
1001 FORMAT(1X,'KOEFIJICIENT KORELACIJE RO= ',F8.5)
  WRITE(11,1002) Y0,CL,EN
1002 FORMAT(1X,'KRIVA IMA OBLIK : Y= ',F12.5,'-',F12.5,'X**',F8.5)
  WRITE(11,1003)
1003 FORMAT(1X,'*****')
  WRITE(11,1004)
1004 FORMAT(1X,' YMOD      Y      X  ')
  YS=0.
  XS=0.
  DO 6 I=1,N
    YMOD=Y0 -CE*X(I)**EN
    YY=Y(I)
    XX=X(I)
    WRITE(11,1005) YMOD,YY,XX
    YS=YS+Y(I)
    XS=XS+X(I)
6  CONTINUE
  YS=YS/N
  XS=XS/N
  WRITE (11,1015) YS
  WRITE (11,1016) XS
1015 FORMAT (1X,' SREDNJA VRIJEDNOST YSR= ',F8.4)
1016 FORMAT (1X,' SREDNJA VRIJEDNOST XSR= ',F8.4)
1005 FORMAT(5F10.5)
  STOP
  END

```

III

```

PROGRAM EXPR
C  Y=CE*EXP(EN*X)
  DIMENSION Y(50),X(50)
    READ(5,*) N
    READ(5,*) (Y(I),I=1,N)
    READ(5,*) (X(I),I=1,N)
  U=0.
  V=0.
  E=0.
  F=0.
  T=0.
  DO 2 I=1,N
    U=U+ALOG(Y(I))
    V=V+X(I)
2  CONTINUE
  US=U/N
  VS=V/N
  DO 4 I=1,N
    E=E+(ALOG(Y(I))-US)**2
    F=F+(X(I)-VS)**2
    T=T+(ALOG(Y(I))-US)*(X(I)-VS)
4  CONTINUE
  SY=SQRT(E/(N-1))
  SX=SQRT(F/(N-1))
  WRITE (11,1010) SY
  WRITE (11,1011) SX
1010 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA SY= ',F10.4)
1011 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA SX= ',F10.4)
  RO=T/(SY*SX*(N-1))
  EN=RO*SY/SX
  CE=EXP(US-RO*(SY/SX)*VS)
  WRITE(11,1001) RO
1001 FORMAT(1X,'KOEFIcijENT KORELACIJE RO= ',F 8.5)
  WRITE(11,1002) CE,EN
1002 FORMAT(1X,'KRIVA IMA OBLIK : Y= ',F15.5,'*EXP(X* ',F15.8,')')
  WRITE(11,1003)
1003 FORMAT(1X,'*****')
  WRITE(11,1004)
1004 FORMAT(1X,' Y 100      Y      X ')
  YS=0.
  XS=0.
  DO 5 I=1,N
    YMOD=CE*EXP(X(I)*EN)
    YY=Y(I)
    XX=X(I)
    WRITE(11,1005) YMOD,YY,X
    YS=YS+Y(I)
    XS=XS+X(I)
5  CONTINUE
  YS=YS/N
  XS=XS/N
  WRITE (11,1015) YS
  WRITE (11,1016) XS
1015 FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST YSR= ',F3.4)
1016 FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST XSR= ',F3.4)
1005 FORMAT(3F10.5)
  STOP
  END

```



```

PROGRAM EXPR
  Y=CE+EN*ALOG(X)
  DIMENSION Y(50),X(50)
  READ(5,*) N
  READ(5,*) (Y(I),I=1,N)
  READ(5,*) (X(I),I=1,N)
  U=0.
  V=0.
  E=0.
  F=0.
  T=0.
  DO 2 I=1,N
    U=U+Y(I)
    V=V+ALOG(X(I))
2  CONTINUE
  US=U/N
  VS=V/N
  DO 4 I=1,N
    E=E+(Y(I)-US)**2
    F=F+(ALOG(X(I))-VS)**2
    T=T+(Y(I)-US)*(ALOG(X(I))-VS)
4  CONTINUE
  SY=SQRT(E/(N-1))
  SX=SQRT(F/(N-1))
  WRITE (11,1010) SY
  WRITE (11,1011) SX
1010 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA   SY= ',F10.4)
1011 FORMAT (1X,'EMPIRIJSKA DISPERZIJA   SX= ',F10.4)
  RO=T/(SY*SX*(N-1))
  EN=RO*SY/SX
  CE=US-RO*(SY/SX)*VS
  WRITE(11,1001) RO
1001 FORMAT(1X,'KOEFIJIENT KORELACIJE   RO= ',F10.5)
  WRITE(11,1002) CE,EN
1002 FORMAT(1X,'KRIVKA IMA OBLIK : Y= ',F10.5,'+',F10.5,'*LOG(X)')
  WRITE(11,1003)
1003 FORMAT(1X,'*****')
  WRITE(11,1004)
1004 FORMAT(1X,' YHOD      Y      X ')
  YS=0.
  XS=0.
  DO 6 I=1,N
    YMOD=CE+EN*ALOG(X(I))
    YY=Y(I)
    XX=X(I)
    WRITE(11,1005) YMOD,YY,XX
    YS=YS+Y(I)
    XS=XS+X(I)
6  CONTINUE
  YS=YS/N
  XS=XS/N
  WRITE (11,1015) YS
  WRITE (11,1016) XS
1015 FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST   YSD= ',F6.4)
1016 FORMAT (1X,'SREDNJA VRIJEDNOST   XSD= ',F6.4)
1005 FORMAT(3F10.5)
  STOP
  END

```

P R I L O G 10.

KARAKTERISTIČNI IZLAZI SA RAČUNARA (LISTINZI):

- I. (6.3.1)
- II. (6.4.1)
- III. (6.4.2)
- IV. (6.4.3)
- V. (6.5.1)
- VI. (6.5.2)
- VII. (6.6.1)
- VIII (6.7.1)
- IX. (6.7.2)
- X. (6.7.3)
- XI. (6.7.4)
- XII. (6.7.5)
- XIII. (6.7.6)
- XIV. (6.8.1)
- XV. (6.8.2)
- XVI. (6.8.3)

1.

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= 4.96646

A1=-.0742783

A2= .090543

A3= .0889225

A4=-.0550121

A5= .0603579

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	120	128.5
-1	-1	-1	-1	-1	4.78749	4.85593
1	1.5	.4	.4	.3	110	110.761
1	-1	-1	-1	-1	4.70048	4.70737
.3	1.8	.4	.4	.3	150	154.009
-1	1	-1	-1	-1	5.01064	5.03701
1	1.8	.4	.4	.3	135	132.749
1	1	-1	-1	-1	4.90528	4.88846
.3	1.5	.6	.4	.3	150	153.511
-1	-1	1	-1	-1	5.01064	5.03377
1	1.5	.6	.4	.3	130	132.319
1	-1	1	-1	-1	4.86753	4.88522
.3	1.8	.6	.4	.3	175	183.986
-1	1	1	-1	-1	5.16479	5.21486
1	1.8	.6	.4	.3	160	158.587
1	1	1	-1	-1	5.07517	5.0663
.3	1.5	.4	.6	.3	115	115.112
-1	-1	-1	1	-1	4.74493	4.7459
1	1.5	.4	.6	.3	105	99.2208
1	-1	-1	1	-1	4.65396	4.59735
.3	1.8	.4	.6	.3	140	137.964
-1	1	-1	1	-1	4.94164	4.92699
1	1.8	.4	.6	.3	130	118.918
1	1	-1	1	-1	4.86753	4.77843
.3	1.5	.6	.6	.3	140	137.517
-1	-1	1	1	-1	4.94164	4.92375
1	1.5	.6	.6	.3	110	118.533
1	-1	1	1	-1	4.70048	4.77519
.3	1.8	.6	.6	.3	180	164.817
-1	1	1	1	-1	5.19296	5.10484
1	1.8	.6	.6	.3	135.18	142.064
1	1	1	1	-1	4.90661	4.95628
.3	1.5	.4	.4	.7	145	144.987
-1	-1	-1	-1	1	4.97673	4.97664
1	1.5	.4	.4	.7	125	124.972
1	-1	-1	-1	1	4.82831	4.82809

.3	1.8	.4	.4	.7	170	173.77
-1	1	-1	-1	1	5.1358	5.15773
1	1.8	.4	.4	.7	140	149.781
1	1	-1	-1	1	4.94164	5.00917
.3	1.5	.6	.4	.7	185	173.207
-1	-1	1	-1	1	5.22036	5.15449
1	1.5	.6	.4	.7	160	149.296
1	-1	1	-1	1	5.07517	5.00593
.3	1.8	.6	.4	.7	215	207.592
-1	1	1	-1	1	5.37064	5.33558
1	1.8	.6	.4	.7	190	178.934
1	1	1	-1	1	5.24702	5.10702
.3	1.5	.4	.6	.7	140	129.881
-1	-1	-1	1	1	4.94164	4.86662
1	1.5	.4	.6	.7	110	111.951
1	-1	-1	1	1	4.70040	4.71806
.3	1.8	.4	.6	.7	150	155.665
-1	1	-1	1	1	5.01064	5.04771
1	1.8	.4	.6	.7	130	134.176
1	1	-1	1	1	4.86753	4.89915
.3	1.5	.6	.6	.7	150	155.161
-1	-1	1	1	1	5.01064	5.04447
1	1.5	.6	.6	.7	125	133.741
1	-1	1	1	1	4.82831	4.89591
.3	1.8	.6	.6	.7	175	185.964
-1	1	1	1	1	5.16479	5.22555
1	1.8	.6	.6	.7	161.34	160.292
1	1	1	1	1	5.08351	5.07699
.55	1.65	.49	.49	.46	155	144.12
0	0	0	0	0	5.04343	4.96646
.55	1.65	.49	.49	.46	142	144.12
0	0	0	0	0	4.95583	4.96646
.55	1.65	.49	.49	.46	140	144.12
0	0	0	0	0	4.94164	4.96646
.55	1.65	.49	.49	.46	145	144.12
0	0	0	0	0	4.97673	4.96646

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 1.35196 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 102.458 B1=-.123389 B2= .993223 B3= .43862 B4=-.271353 B5= .142472

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 102.458 *V**-.123389 *S** .993223 *I** .43862 *F**-.271353 *G** .142472

SAD= 2.74343F-03

SR= .0001602 SF= 1.00744E-03

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= 1.13202
 A1=-.21918
 A2= .278193
 A3= .245331
 A4=-.0601334
 A5= .164757

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	B(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	1.983	2.06071
-1	-1	-1	-1	-1	.684611	.72305
1	1.5	.4	.4	.3	1.284	1.32935
1	-1	-1	-1	-1	.24998	.284689
.3	1.8	.4	.4	.3	2.996	3.59461
-1	1	-1	-1	-1	1.09728	1.27944
1	1.8	.4	.4	.3	2.458	2.31886
1	1	-1	-1	-1	.899348	.841076
.3	1.5	.6	.4	.3	3.86	3.36595
-1	-1	1	-1	-1	1.35067	1.21371
1	1.5	.6	.4	.3	2.638	2.17135
1	-1	1	-1	-1	.970021	.775351
.3	1.8	.6	.4	.3	5.195	5.87143
-1	1	1	-1	-1	1.6477	1.7701
1	1.8	.6	.4	.3	3.544	3.78762
1	1	1	-1	-1	1.26526	1.33174
.3	1.5	.4	.6	.3	2.201	1.8272
-1	-1	-1	1	-1	.788912	.602783
1	1.5	.4	.6	.3	1.278	1.17871
1	-1	-1	1	-1	.245296	.164423
.3	1.8	.4	.6	.3	3.503	3.18729
-1	1	-1	1	-1	1.25362	1.15917
1	1.8	.4	.6	.3	2.769	2.0561
1	1	-1	1	-1	1.01849	.720809
.3	1.5	.6	.6	.3	1.704	2.98454
-1	-1	1	1	-1	.532979	1.09344
1	1.5	.6	.6	.3	1.311	1.92531
1	-1	1	1	-1	.27079	.655085
.3	1.8	.6	.6	.3	7.715	5.2061
-1	1	1	1	-1	2.04317	1.64983
1	1.8	.6	.6	.3	4.187	3.35842
1	1	1	1	-1	1.43198	1.21147
.3	1.5	.4	.4	.7	3.1	2.86499
-1	-1	-1	-1	1	1.1314	1.05256
1	1.5	.4	.4	.7	2.18	1.84818
1	-1	-1	-1	1	.779325	.614203

.3 -1	1.8 1	.4 -1	.4 -1	.7 1	4.646 1.53601	4.99756 1.60895
1 1	1.8 1	.4 -1	.4 -1	.7 1	2.785 1.02425	3.22389 1.17059
.3 -1	1.5 -1	.6 1	.4 -1	.7 1	5.326 1.6726	4.67966 1.54323
1 1	1.5 -1	.6 1	.4 -1	.7 1	3.639 1.29171	3.01882 1.10487
.3 -1	1.8 1	.6 1	.4 -1	.7 1	8.197 2.10377	8.163 2.09961
1 1	1.8 1	.6 1	.4 -1	.7 1	5.178 1.64442	5.2659 1.66125
.3 -1	1.5 -1	.4 -1	.6 1	.7 1	2.944 1.07977	2.54034 .932297
1 1	1.5 -1	.4 -1	.6 1	.7 1	1.612 .477476	1.63875 .493937
.3 -1	1.8 1	.4 -1	.6 1	.7 1	3.736 1.31802	4.43126 1.48868
1 1	1.8 1	.4 -1	.6 1	.7 1	2.404 .877134	2.85858 1.05032
.3 -1	1.5 -1	.6 1	.6 1	.7 1	4.843 1.57753	4.14938 1.42296
1 1	1.5 -1	.6 1	.6 1	.7 1	2.298 .832039	2.67674 .984598
.3 -1	1.8 1	.6 1	.6 1	.7 1	7.965 2.07506	7.238 1.97935
1 1	1.8 1	.6 1	.6 1	.7 1	4.962 1.60181	4.66919 1.54098
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	2.968 1.08789	3.14193 1.13202
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	2.708 .99621	3.14193 1.13202
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	2.704 .994732	3.14193 1.13202
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	2.463 .90138	3.14193 1.13202

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 7.96902 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 1.42277 B1=-.364095 B2= 3.05168 B3= 1.21012 B4=-.296614 B5= .3889

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 1.42277 *V**-.364095 *S** 3.05168 *T** 1.21012 *P**-.296614 *G** .3889

BAR= 4110455

SD= 1.01404 SC= 0.133044

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

$A0 = .574786$
 $A1 = .255433$
 $A2 = -.0969585$
 $A4 = .061841$
 $A5 = -.0816947$

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	1.728	1.54676
-1	-1	-1	-1	-1	.546965	.436165
1	1.5	.4	.4	.3	2.578	2.57805
1	-1	-1	-1	-1	.947014	.947032
.3	1.8	.4	.4	.3	1.555	1.27411
-1	1	-1	-1	-1	.441476	.242248
1	1.8	.4	.4	.3	2.114	2.1236
1	1	-1	-1	-1	.748582	.753115
.3	1.5	.6	.4	.3	1.483	1.54676
-1	-1	1	-1	-1	.394067	.436165
1	1.5	.6	.4	.3	2.165	2.57805
1	-1	1	-1	-1	.77242	.947032
.3	1.8	.6	.4	.3	1.303	1.27411
-1	1	1	-1	-1	.264669	.242248
1	1.8	.6	.4	.3	1.909	2.1236
1	1	1	-1	-1	.64658	.753115
.3	1.5	.4	.6	.3	1.389	1.75041
-1	-1	-1	1	-1	.328584	.559847
1	1.5	.4	.6	.3	2.406	2.91746
1	-1	-1	1	-1	.877966	1.07071
.3	1.8	.4	.6	.3	1.214	1.44185
-1	1	-1	1	-1	.193921	.36593
1	1.8	.4	.6	.3	2.794	2.40319
1	1	-1	1	-1	1.02747	.876797
.3	1.5	.6	.6	.3	2.56	1.75041
-1	-1	1	1	-1	.940007	.559847
1	1.5	.6	.6	.3	4.34	2.91746
1	-1	1	1	-1	1.46787	1.07071
.3	1.8	.6	.6	.3	1.011	1.44185
-1	1	1	1	-1	.0109398	.36593
1	1.8	.6	.6	.3	2.36	2.40319
1	1	1	1	-1	.858662	.876797
.3	1.5	.4	.4	.7	1.417	1.31361
-1	-1	-1	-1	1	.348542	.272776
1	1.5	.4	.4	.7	2.18	2.18943
1	-1	-1	-1	1	.779325	.783642

.3 -1	1.8 1	.4 -1	.4 -1	.7 1	1.132 .123986	1.08205 .0788589
1 1	1.8 1	.4 -1	.4 -1	.7 1	1.927 .655964	1.80349 .589725
.3 -1	1.5 -1	.6 1	.4 -1	.7 1	1.255 .227136	1.31361 .272776
1 1	1.5 -1	.6 1	.4 -1	.7 1	1.962 .673964	2.18943 .783642
.3 -1	1.8 1	.6 1	.4 -1	.7 1	1.037 .0363318	1.08205 .0788589
1 1	1.8 1	.6 1	.4 -1	.7 1	1.757 .563608	1.80349 .589725
.3 -1	1.5 -1	.4 -1	.6 1	.7 1	1.504 .408128	1.48655 .396458
1 1	1.5 -1	.4 -1	.6 1	.7 1	2.536 .930588	2.47768 .907324
.3 -1	1.8 1	.4 -1	.6 1	.7 1	1.328 .283674	1.22451 .202541
1 1	1.8 1	.4 -1	.6 1	.7 1	2.114 .748582	2.04093 .713407
.3 -1	1.5 -1	.6 1	.6 1	.7 1	1.3 .262364	1.48655 .396458
1 1	1.5 -1	.6 1	.6 1	.7 1	2.24 .806476	2.47768 .907324
.3 -1	1.8 1	.6 1	.6 1	.7 1	1.3 .262364	1.22451 .202541
1 1	1.8 1	.6 1	.6 1	.7 1	2.1 .741937	2.04093 .713407
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	1.722 .543486	1.77086 .574786
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	1.721 .542906	1.77086 .574786
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	1.918 .651283	1.77086 .574786
.55 0	1.65 0	.49 0	.49 0	.46 0	1.886 .634458	1.77086 .574786

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 8.1463 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 4.16043 B1= .424317 B2=-1.0636 B3= 0 B4= .305037 B5=-.192836

STEPENA F-JA JE DBLIKA

FM= 4.16043 *V** .424317 *S** -1.0636 *T** 0 *P** .305037 *G** -.192836

SAD= .0273627

SR= .74887

SE= .0100767

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= 1.7068

A1= .0362625

A2= .181254

A3= .230906

A5= .0830863

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	3.427	3.23908
-1	-1	-1	-1	-1	1.23169	1.17529
1	1.5	.4	.4	.3	3.309	3.48272
1	-1	-1	-1	-1	1.19665	1.24781
.3	1.8	.4	.4	.3	4.658	4.65432
-1	1	-1	-1	-1	1.53859	1.5378
1	1.8	.4	.4	.3	5.196	5.00442
1	1	-1	-1	-1	1.64789	1.61032
.3	1.5	.6	.4	.3	5.724	5.14024
-1	-1	1	-1	-1	1.74467	1.6371
1	1.5	.6	.4	.3	5.712	5.52689
1	-1	1	-1	-1	1.74257	1.70963
.3	1.8	.6	.4	.3	6.769	7.38616
-1	1	1	-1	-1	1.91235	1.99961
1	1.8	.6	.4	.3	6.766	7.94174
1	1	1	-1	-1	1.91191	2.07213
.3	1.5	.4	.6	.3	3.058	3.23908
-1	-1	-1	1	-1	1.11776	1.17529
1	1.5	.4	.6	.3	3.074	3.48272
1	-1	-1	1	-1	1.12298	1.24781
.3	1.8	.4	.6	.3	4.253	4.65432
-1	1	-1	1	-1	1.44762	1.5378
1	1.8	.4	.6	.3	7.74	5.00442
1	1	-1	1	-1	2.0464	1.61032
.3	1.5	.6	.6	.3	4.36	5.14024
-1	-1	1	1	-1	1.47247	1.6371
1	1.5	.6	.6	.3	5.69	5.52689
1	-1	1	1	-1	1.73871	1.70963
.3	1.8	.6	.6	.3	7.799	7.38616
-1	1	1	1	-1	2.054	1.99961
1	1.8	.6	.6	.3	9.88	7.94174
1	1	1	1	-1	2.29051	2.07213
.3	1.5	.4	.4	.7	4.393	3.82463
-1	-1	-1	-1	1	1.48001	1.34146
1	1.5	.4	.4	.7	4.752	4.11232
1	-1	-1	-1	1	1.55857	1.41399

.3	1.8	.4	.4	.7	5.259	5.49571
-1	1	-1	-1	1	1.65994	1.70397
1	1.8	.4	.4	.7	5.367	5.9091
1	1	-1	-1	1	1.68027	1.77649
.3	1.5	.6	.4	.7	6.685	6.06948
-1	-1	1	-1	1	1.89987	1.80327
1	1.5	.6	.4	.7	7.141	6.52602
1	-1	1	-1	1	1.96585	1.8758
.3	1.8	.6	.4	.7	8.5	8.7214
-1	1	1	-1	1	2.14007	2.16578
1	1.8	.6	.4	.7	9.097	9.37742
1	1	1	-1	1	2.20795	2.2383
.3	1.5	.4	.6	.7	4.427	3.82463
-1	-1	-1	1	1	1.48772	1.34146
1	1.5	.4	.6	.7	4.088	4.11232
1	-1	-1	1	1	1.40806	1.41399
.3	1.8	.4	.6	.7	4.962	5.49571
-1	1	-1	1	1	1.60181	1.70397
1	1.8	.4	.6	.7	5.082	5.9091
1	1	-1	1	1	1.6257	1.77649
.3	1.5	.6	.6	.7	6.296	6.06948
-1	-1	1	1	1	1.83991	1.80327
1	1.5	.6	.6	.7	5.148	6.52602
1	-1	1	1	1	1.63861	1.8758
.3	1.8	.6	.6	.7	10.355	8.7214
-1	1	1	1	1	2.33747	2.16578
1	1.8	.6	.6	.7	10.42	9.37742
1	1	1	1	1	2.34373	2.2383
.55	1.65	.49	.49	.46	5.111	5.56379
0	0	0	0	0	1.6314	1.7068
.55	1.65	.49	.49	.46	4.661	5.56379
0	0	0	0	0	1.53923	1.7068
.55	1.65	.49	.49	.46	5.186	5.56379
0	0	0	0	0	1.64596	1.7068
.55	1.65	.49	.49	.46	4.645	5.56379
0	0	0	0	0	1.53579	1.7068

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 6.7482 <FIM= 8.63

B0= 0

C= 5.59225 B1= .0602381 B2= 1.98829 B3= 1.13897 B4= 0 B5= .196121

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 5.59225 *V** .0602381 *S** 1.98829 *T** 1.13897 *P** 0 *G** .196121

SAD= .0232745

SR= .63876

SE= .010347

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

$A_0 = 1.8125$
 $A_1 = -.199412$
 $A_2 = .176055$
 $A_3 = .128226$
 $A_4 = -.117882$
 $A_5 = .107559$

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	4.67	5.57312
-1	-1	-1	-1	-1	1.54116	1.71796
1	1.5	.4	.4	.3	3.513	3.74017
1	-1	-1	-1	-1	1.25647	1.31913
.3	1.8	.4	.4	.3	6.42	7.92534
-1	1	-1	-1	-1	1.85942	2.07006
1	1.8	.4	.4	.3	6.3	5.31877
1	1	-1	-1	-1	1.84055	1.67124
.3	1.5	.6	.4	.3	7.777	7.20235
-1	-1	1	-1	-1	2.05117	1.97441
1	1.5	.6	.4	.3	5.66	4.83356
1	-1	1	-1	-1	1.73342	1.57558
.3	1.8	.6	.4	.3	7.912	10.2422
-1	1	1	-1	-1	2.06838	2.32652
1	1.8	.6	.4	.3	7.256	6.87363
1	1	1	-1	-1	1.98183	1.92769
.3	1.5	.4	.6	.3	5.977	4.40258
-1	-1	-1	1	-1	1.78792	1.40219
1	1.5	.4	.6	.3	3.68	2.95461
1	-1	-1	1	-1	1.30291	1.08337
.3	1.8	.4	.6	.3	7.304	6.26075
-1	1	-1	1	-1	1.98842	1.8343
1	1.8	.4	.6	.3	5.842	4.20165
1	1	-1	1	-1	1.76507	1.43548
.3	1.5	.6	.6	.3	4.74	5.68961
-1	-1	1	1	-1	1.55604	1.73864
1	1.5	.6	.6	.3	2.23	3.81835
1	-1	1	1	-1	.802002	1.33982
.3	1.8	.6	.6	.3	10.447	8.091
-1	1	1	1	-1	2.34631	2.09075
1	1.8	.6	.6	.3	5.86	5.42994
1	1	1	1	-1	1.76815	1.69193
.3	1.5	.4	.4	.7	6.804	6.91072
-1	-1	-1	-1	1	1.91751	1.93307
1	1.5	.4	.4	.7	4.98	4.63785
1	-1	-1	-1	1	1.60543	1.53425

.3	1.8	.4	.4	.7	8.953	9.82749
-1	1	-1	-1	1	2.19199	2.28518
1	1.8	.4	.4	.7	5.922	6.59532
1	1	-1	-1	1	1.77867	1.88636
.3	1.5	.6	.4	.7	10.305	8.93098
-1	-1	1	-1	1	2.33263	2.18953
1	1.5	.6	.4	.7	7.692	5.99366
1	-1	1	-1	1	2.04018	1.7907
.3	1.8	.6	.4	.7	15.266	12.7004
-1	1	1	-1	1	2.72563	2.54164
1	1.8	.6	.4	.7	10.297	8.52337
1	1	1	-1	1	2.33185	2.14281
.3	1.5	.4	.6	.7	6.665	5.45924
-1	-1	-1	1	1	1.89687	1.69731
1	1.5	.4	.6	.7	3.541	3.66374
1	-1	-1	1	1	1.26441	1.29849
.3	1.8	.4	.6	.7	5.488	7.76338
-1	1	-1	1	1	1.70256	2.04942
1	1.8	.4	.6	.7	5.049	5.21008
1	1	-1	1	1	1.61919	1.6506
.3	1.5	.6	.6	.7	9.61	7.05517
-1	-1	1	1	1	2.2628	1.95376
1	1.5	.6	.6	.7	3.328	4.73479
1	-1	1	1	1	1.20237	1.55494
.3	1.8	.6	.6	.7	10.298	10.0329
-1	1	1	1	1	2.33195	2.30587
1	1.8	.6	.6	.7	6.6	6.73317
1	1	1	1	1	1.88707	1.90705
.55	1.65	.49	.49	.46	5.167	6.17257
0	0	0	0	0	1.64229	1.8125
.55	1.65	.49	.49	.46	4.772	6.17257
0	0	0	0	0	1.56277	1.8125
.55	1.65	.49	.49	.46	4.71	6.17257
0	0	0	0	0	1.54969	1.8125
.55	1.65	.49	.49	.46	5.783	6.17257
0	0	0	0	0	1.75492	1.8125

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 6.5519 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 2.43147 B1=-.331256 B2= 1.93126 B3= .632488 B4=-.581468 B5= .253887

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 2.43147 *V**-.331256 *S** 1.93126 *T** .632488 *P**-.581468 *B** .253887

SAN= 4597172

SR= 1.80116 SF= 4727001

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= 4.78554

A1=-.235174

A2= .177766

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	130.18	126.842
-1	-1	-1	-1	-1	4.86892	4.84294
1	1.5	.4	.4	.3	79.58	79.2491
1	-1	-1	-1	-1	4.37676	4.3726
.3	1.8	.4	.4	.3	153.48	180.996
-1	1	-1	-1	-1	5.03357	5.19848
1	1.8	.4	.4	.3	134.76	113.084
1	1	-1	-1	-1	4.9035	4.72813
.3	1.5	.6	.4	.3	113.86	126.842
-1	-1	1	-1	-1	4.73497	4.84294
1	1.5	.6	.4	.3	99.17	79.2491
1	-1	1	-1	-1	4.59684	4.3726
.3	1.8	.6	.4	.3	147.96	180.996
-1	1	1	-1	-1	4.99694	5.19848
1	1.8	.6	.4	.3	117.196	113.084
1	1	1	-1	-1	4.76385	4.72813
.3	1.5	.4	.6	.3	156.7	126.842
-1	-1	-1	1	-1	5.05433	4.84294
1	1.5	.4	.6	.3	91.13	79.2491
1	-1	-1	1	-1	4.51229	4.3726
.3	1.8	.4	.6	.3	233.57	180.996
-1	1	-1	1	-1	5.45348	5.19848
1	1.8	.4	.6	.3	158.29	113.084
1	1	-1	1	-1	5.06443	4.72813
.3	1.5	.6	.6	.3	130.31	126.842
-1	-1	1	1	-1	4.86992	4.84294
1	1.5	.6	.6	.3	36.4	79.2491
1	-1	1	1	-1	3.59457	4.3726
.3	1.8	.6	.6	.3	210.29	180.996
-1	1	1	1	-1	5.34849	5.19848
1	1.8	.6	.6	.3	120.23	113.084
1	1	1	1	-1	4.78941	4.72813
.3	1.5	.4	.4	.7	127.5	126.842
-1	-1	-1	-1	1	4.84812	4.84294
1	1.5	.4	.4	.7	93.85	79.2491
1	-1	-1	-1	1	4.5417	4.3726

.3	1.8	.4	.4	.7	157.58	180.996
-1	1	-1	-1	1	5.05993	5.19848
1	1.8	.4	.4	.7	98.03	113.084
1	1	-1	-1	1	4.58527	4.72813
.3	1.5	.6	.4	.7	168.19	126.842
-1	-1	1	-1	1	5.1251	4.84294
1	1.5	.6	.4	.7	113	79.2491
1	-1	1	-1	1	4.72739	4.3726
.3	1.8	.6	.4	.7	201.67	180.996
-1	1	1	-1	1	5.30663	5.19848
1	1.8	.6	.4	.7	129.17	113.084
1	1	1	-1	1	4.86113	4.72813
.3	1.5	.4	.6	.7	100.07	126.842
-1	-1	-1	1	1	4.60587	4.84294
1	1.5	.4	.6	.7	65.31	79.2491
1	-1	-1	1	1	4.17915	4.3726
.3	1.8	.4	.6	.7	149.84	180.996
-1	1	-1	1	1	5.00957	5.19848
1	1.8	.4	.6	.7	104.24	113.084
1	1	-1	1	1	4.6467	4.72813
.3	1.5	.6	.6	.7	194.28	126.842
-1	-1	1	1	1	5.2693	4.84294
1	1.5	.6	.6	.7	60.64	79.2491
1	-1	1	1	1	4.10496	4.3726
.3	1.8	.6	.6	.7	153.25	180.996
-1	1	1	1	1	5.03207	5.19848
1	1.8	.6	.6	.7	126.94	113.084
1	1	1	1	1	4.84371	4.72813
.55	1.65	.49	.49	.46	100.89	120.543
0	0	0	0	0	4.61403	4.78554
.55	1.65	.49	.49	.46	99.21	120.543
0	0	0	0	0	4.59724	4.78554
.55	1.65	.49	.49	.46	95.67	120.543
0	0	0	0	0	4.56091	4.78554
.55	1.65	.49	.49	.46	121.3	120.543
0	0	0	0	0	4.79827	4.78554

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 6.09276 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 35.9427 B1=-.390663 B2= 1.95003 B3= 0 B4= 0 B5= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 35.9427 *V**-.390663 *S** 1.95003 *T** 0 *P** 0 *B** 0

SAD= .0686047

SR= 1.88611 SE= .0337801

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= .347327

A1= .116154

A2=-.139083

A3=-.143538

A4= .0384666

A5=-.109276

V(MM)	S(M)	T(L)	P(J)	G(K)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	.4	.4	.3	1.926	1.79428
-1	-1	-1	-1	-1	.655445	.584603
1	1.5	.4	.4	.3	2.164	2.2635
1	-1	-1	-1	-1	.771958	.816912
.3	1.8	.4	.4	.3	1.497	1.35858
-1	1	-1	-1	-1	.403463	.306437
1	1.8	.4	.4	.3	1.677	1.71386
1	1	-1	-1	-1	.517007	.538746
.3	1.5	.6	.4	.3	1.353	1.34653
-1	-1	1	-1	-1	.302324	.297527
1	1.5	.6	.4	.3	1.615	1.69865
1	-1	1	-1	-1	.479335	.529836
.3	1.8	.6	.4	.3	1.116	1.01955
-1	1	1	-1	-1	.109751	.0193605
1	1.8	.6	.4	.3	1.273	1.28617
1	1	1	-1	-1	.241376	.251669
.3	1.5	.4	.6	.3	1.886	1.93777
-1	-1	-1	1	-1	.634458	.661536
1	1.5	.4	.6	.3	2.294	2.44451
1	-1	-1	1	-1	.830297	.893845
.3	1.8	.4	.6	.3	1.406	1.46722
-1	1	-1	1	-1	.340749	.38337
1	1.8	.4	.6	.3	1.716	1.85091
1	1	-1	1	-1	.539996	.615679
.3	1.5	.6	.6	.3	1.645	1.45421
-1	-1	1	1	-1	.49774	.37446
1	1.5	.6	.6	.3	2.511	1.8345
1	-1	1	1	-1	.920681	.606769
.3	1.8	.6	.6	.3	.813	1.10108
-1	1	1	1	-1	-.207024	.0962937
1	1.8	.6	.6	.3	1.274	1.38903
1	1	1	1	-1	.242161	.328603
.3	1.5	.4	.4	.7	1.339	1.44203
-1	-1	-1	-1	1	.291923	.366051
1	1.5	.4	.4	.7	1.71	1.81913
1	-1	-1	-1	1	.536494	.59836

.3	1.8	.4	.4	.7	1.121	1.09186
-1	1	-1	-1	1	.114221	.0878847
1	1.8	.4	.4	.7	1.437	1.37739
1	1	-1	-1	1	.362558	.320194
.3	1.5	.6	.4	.7	1.026	1.08218
-1	-1	1	-1	1	.0256676	.0789749
1	1.5	.6	.4	.7	1.269	1.36518
1	-1	1	-1	1	.238229	.311284
.3	1.8	.6	.4	.7	.837	.819393
-1	1	1	-1	1	-.177931	-.199192
1	1.8	.6	.4	.7	1.045	1.03367
1	1	1	-1	1	.0440168	.0331173
.3	1.5	.4	.6	.7	1.457	1.55735
-1	-1	-1	1	1	.37638	.442984
1	1.5	.4	.6	.7	1.873	1.96461
1	-1	-1	1	1	.627541	.675293
.3	1.8	.4	.6	.7	1.354	1.17918
-1	1	-1	1	1	.303063	.164818
1	1.8	.4	.6	.7	1.686	1.48754
1	1	-1	1	1	.522359	.397127
.3	1.5	.6	.6	.7	1.195	1.16872
-1	-1	1	1	1	.178146	.155908
1	1.5	.6	.6	.7	1.477	1.47435
1	-1	1	1	1	.390013	.388217
.3	1.8	.6	.6	.7	.839	.88492
-1	1	1	1	1	-.175545	-.122258
1	1.8	.6	.6	.7	1.134	1.11633
1	1	1	1	1	.125751	.11005
.55	1.65	.49	.49	.46	1.411	1.40595
0	0	0	0	0	.344299	.347327
.55	1.65	.49	.49	.46	1.377	1.40595
0	0	0	0	0	.319907	.347327
.55	1.65	.49	.49	.46	1.373	1.40595
0	0	0	0	0	.316998	.347327
.55	1.65	.49	.49	.46	1.584	1.40595
0	0	0	0	0	.459953	.347327

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 2.59355 <FTM= 8.63

B0= 0

C= 1.9157 B1= .192952 B2=-1.52569 B3=-.708017 B4= .18974 B5=-.25794

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 1.9157 *V** .192952 *S** -1.52569 *T** -.708017 *P** .18974 *G** -.25794

SAD= 0118382

SR= 333325

SF= 0136974

VIII.

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= 4.94253

A1=-.0845815

A2= .102765

V(JJ)	S(J)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	135	137.599
-1	-1	4.90528	4.92434
YMIN= 4.84164 YMAX= 5.00705 RMIN= 126.676 RMAX= 149.463			

1	1.5	110	116.184
1	-1	4.70048	4.75518
YMIN= 4.67247 YMAX= 4.83788 RMIN= 106.962 RMAX= 126.202			

.3	1.8	160	168.995
-1	1	5.07517	5.12987
YMIN= 5.04717 YMAX= 5.21258 RMIN= 155.581 RMAX= 183.566			

1	1.8	140	142.695
1	1	4.94164	4.96071
YMIN= 4.878 YMAX= 5.04341 RMIN= 131.368 RMAX= 154.998			

.55	1.65	155	140.124
0	0	5.04343	4.94253
YMIN= 4.85982 YMAX= 5.02523 RMIN= 129.001 RMAX= 152.205			

.55	1.65	142	140.124
0	0	4.95583	4.94253
YMIN= 4.85982 YMAX= 5.02523 RMIN= 129.001 RMAX= 152.205			

.55	1.65	140	140.124
0	0	4.94164	4.94253
YMIN= 4.85982 YMAX= 5.02523 RMIN= 129.001 RMAX= 152.205			

.55	1.65	145	140.124
0	0	4.97673	4.94253
YMIN= 4.85982 YMAX= 5.02523 RMIN= 129.001 RMAX= 152.205			

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 2.99422 <FTM= 9.55

C= 73.5599 B1=-.140504 B2= 1.1273 B12= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 73.5599 *V**-.140504 *S** (1.1273 + 0 *LOG(V))

SAD= 6.07594E-03

SR= .0182395 SE= 6.08766E-03

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= 1.0736

A1=-.230002

A2= .251145

V(JJ)	S(J)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	2.894	2.86469
-1	-1	1.06264	1.05246
YMIN= .972463 YMAX= 1.13246 RMIN= 2.64445 RMAX= 3.10327			

1	1.5	1.967	1.80843
1	-1	.67651	.592457
YMIN= .51246 YMAX= .672454 RMIN= 1.66939 RMAX= 1.95904			

.3	1.8	5.149	4.7339
-1	1	1.6388	1.55475
YMIN= 1.47475 YMAX= 1.63475 RMIN= 4.36995 RMAX= 5.12816			

1	1.8	3.019	2.98842
1	1	1.10493	1.09475
YMIN= 1.01475 YMAX= 1.17474 RMIN= 2.75867 RMAX= 3.23731			

.55	1.65	2.968	2.9259
0	0	1.08789	1.0736
YMIN= .993606 YMAX= 1.1536 RMIN= 2.70096 RMAX= 3.16958			

.55	1.65	2.708	2.9259
0	0	.99621	1.0736
YMIN= .993606 YMAX= 1.1536 RMIN= 2.70096 RMAX= 3.16958			

.55	1.65	2.704	2.9259
0	0	.994732	1.0736
YMIN= .993606 YMAX= 1.1536 RMIN= 2.70096 RMAX= 3.16958			

.55	1.65	2.793	2.9259
0	0	1.02712	1.0736
YMIN= .993606 YMAX= 1.1536 RMIN= 2.70096 RMAX= 3.16958			

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 6.11446 <FTM= 9.55

C= .5918 B1=-.382071 B2= 2.75497 B12= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= .5918 *V**-.382071 *S** (2.75497 + 0 *LOG(V))

SAD= .0116084

SR= .0289124 SE= 5.69556E-03

X.

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= .53492

A1= .105718

A2=-.173648

V(JJ)	S(J)	R(I)	F1(I)
.3	1.5	1.842	1.82732
-1	-1	.610852	.602851
YMIN= .587211 YMAX= .61849 RMIN= 1.79896 RMAX= 1.85612			
1	1.5	2.259	2.25756
1	-1	.814922	.814286
YMIN= .798646 YMAX= .829925 RMIN= 2.22253 RMAX= 2.29315			
.3	1.8	1.292	1.29118
-1	1	.256191	.255555
YMIN= .239916 YMAX= .271194 RMIN= 1.27114 RMAX= 1.31153			
1	1.8	1.608	1.59519
1	1	.474991	.46699
YMIN= .451351 YMAX= .482629 RMIN= 1.57043 RMAX= 1.62033			
.55	1.65	1.686	1.70731
0	0	.522359	.53492
YMIN= .519281 YMAX= .550559 RMIN= 1.68082 RMAX= 1.73422			
.55	1.65	1.694	1.70731
0	0	.527093	.53492
YMIN= .519281 YMAX= .550559 RMIN= 1.68082 RMAX= 1.73422			
.55	1.65	1.72	1.70731
0	0	.542324	.53492
YMIN= .519281 YMAX= .550559 RMIN= 1.68082 RMAX= 1.73422			
.55	1.65	1.7	1.70731
0	0	.530628	.53492
YMIN= .519281 YMAX= .550559 RMIN= 1.68082 RMAX= 1.73422			

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 1.40214 <FTM= 9.55

C= 4.88729 B1= .175615 B2=-1.90485 B12= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 4.88729 *V** .175615 *S**(-1.90485 + 0 *LOG(V))

SAD= 1.01738E-04

SR= 4.21154E-04

SE= 2.17677E-04

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= 4.94137

A1= .069516

A2=-.0571391

A13=-.0451017

4.94137	.069516	-.0571391	0	
0	-.0451017	0	0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4	.4	.3	129.33	132.144
-1	-1	-1	4.86237	4.88389
.6	.4	.3	166	166.189
1	-1	-1	5.11199	5.11313
.4	.6	.3	117.67	117.874
-1	1	-1	4.76788	4.76962
.6	.6	.3	145	148.243
1	1	-1	4.97673	4.99885
.4	.4	.7	150	144.618
-1	-1	1	5.01064	4.9741
.6	.4	.7	166.67	151.855
1	-1	1	5.11602	5.02293
.4	.6	.7	141.67	129.001
-1	1	1	4.9535	4.85982
.6	.6	.7	140.58	135.456
1	1	1	4.94578	4.90865
.49	.49	.46	130	139.962
0	0	0	4.86753	4.94137
.49	.49	.46	128	139.962
0	0	0	4.85203	4.94137
.49	.49	.46	133	139.962
0	0	0	4.89035	4.94137
.49	.49	.46	140	139.962
0	0	0	4.94164	4.94137

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 4.25026 <FTM= 9.01

B0= 4.69254

C= 109.13

B1=-.0668731

B2=-.281845

B3=-.374708

B12= 0

B13=-.525126

B23= 0

B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

$$FM = 109.13 * V^{**}(-.0668731 + -.525126 * \log(T)) * S^{**}(-.281845 + 0 * \log(V)) * T^{**}(-.374708 + 0 * \log(S)) * V^{**} 0 * \log(S) * \log(T)$$

SAD= 6.51086E-03

SR= .0371499 SE= 4.59562E-03

XII.

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= 1.07338

A1= .280065

A3= .257734

A23= .0812272

1.07338 0	.280065 0	0 .0812272	.257734 0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4	.4	.3	2.093	1.85301
-1	-1	-1	.738598	.61681
.6	.4	.3	3.705	3.24443
1	-1	-1	1.30968	1.17694
.4	.6	.3	1.521	1.57516
-1	1	-1	.419368	.454356
.6	.6	.3	2.886	2.75795
1	1	-1	1.05987	1.01449
.4	.4	.7	3.399	2.63748
-1	-1	1	1.22348	.969824
.6	.4	.7	4.622	4.61797
1	-1	1	1.53083	1.52995
.4	.6	.7	2.877	3.10272
-1	1	1	1.05675	1.13228
.6	.6	.7	5.92	5.43255
1	1	1	1.77834	1.69241
.49 0	.49 0	.46 0	2.463 .90138	2.92526 1.07338
.49 0	.49 0	.46 0	2.731 1.00467	2.92526 1.07338
.49 0	.49 0	.46 0	2.37 .86289	2.92526 1.07338
.49 0	.49 0	.46 0	2.704 .994732	2.92526 1.07338

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 7.52918 <FTM= 9.01

B0= 3.06045

C= 21.3371 B1= 1.38145 B2= .737984 B3= 1.28321

B12= 0 B13= 0 B23= .945741 B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

$$FM = 21.3371 * V^{**} (1.38145 + 0 * \log(T)) * S^{**} (.737984 + 0 * \log(V)) * T^{**} (1.28321 + .945741 * \log(S)) * V^{**} 0 * \log(S) * \log(T)$$

SAD= .0366711

SR= .197967 SE= .0146116

ZNACAJNOST KOEFICIJENATA

A0= .429551
 A1=-.0708726
 A2= .0999561
 A3=-.0942347
 A13= .0688679

.429551 0	-.0708726 .0688679	.0999561 0	-.0942347 0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4	.4	.3	1.744	1.75693
-1	-1	-1	.556181	.56357
.6	.4	.3	1.267	1.32855
1	-1	-1	.236652	.284089
.4	.6	.3	1.996	2.14573
-1	1	-1	.691145	.763482
.6	.6	.3	1.571	1.62255
1	1	-1	.451712	.484001
.4	.4	.7	1.283	1.2679
-1	-1	1	.249201	.237365
.6	.4	.7	1.124	1.26283
1	-1	1	.116894	.233355
.4	.6	.7	1.413	1.54848
-1	1	1	.345715	.437277
.6	.6	.7	1.6	1.54229
1	1	1	.470004	.433267
.49 0	.49 0	.46 0	1.686 .522359	1.53657 .429551
.49 0	.49 0	.46 0	1.694 .527093	1.53657 .429551
.49 0	.49 0	.46 0	1.72 .542324	1.53657 .429551
.49 0	.49 0	.46 0	1.561 .445327	1.53657 .429551

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 6.07808 <FTM= 9.01

B0= .804813
 C= 2.23628 B1= .276108 B2= .493044 B3= .349723
 B12= 0 B13= .80184 B23= 0 B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 2.23628 *V**(.276108 + .80184 *LOG(T))*S**(.493044 + 0 *LOG(V))
 *T**(.349723 + 0 *LOG(S))*V** 0 *LOG(S)*LOG(T)

SAD= .0114882

SR= .0631111 SE= 5.67029E-03

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= 4.96685
 A1= .0933116
 A2= .0888874
 A3=-.13328
 A13=-.0739734

4.96685 0	.0933116 -.0739734	.0888874 0	-.13328 0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4	.3	.4	125	126.97
-1	-1	-1	4.82831	4.84395
.6	.3	.4	175	177.42
1	-1	-1	5.16479	5.17852
.4	.7	.4	155	151.673
-1	1	-1	5.04343	5.02173
.6	.7	.4	216.176	211.939
1	1	-1	5.37609	5.3563
.4	.3	.6	122.266	112.769
-1	-1	1	4.8062	4.72534
.6	.3	.6	112.691	117.216
1	-1	1	4.72465	4.76402
.4	.7	.6	125	134.709
-1	1	1	4.82831	4.90311
.6	.7	.6	146.528	140.021
1	1	1	4.98722	4.94179
.49	.46	.49	153.025	143.573
0	0	0	5.0306	4.96685
.49	.46	.49	143.421	143.573
0	0	0	4.96578	4.96685
.49	.46	.49	132.242	143.573
0	0	0	4.88463	4.96685
.49	.46	.49	142.896	143.573
0	0	0	4.96212	4.96685

MODEL JE ADEKVATAN FAD= .963881 <FTM= 9.01

B0= 4.07349
 C= 58.7614 B1=-.824005 B2= .209814 B3=-1.94169
 B12= 0 B13=-1.79982 B23= 0 B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 58.7614 *V**(-.824005 +-1.79982 *LOG(T))*S**(.209814 + 0 *LOG(V))
 *T**(-1.94169 + 0 *LOG(S))*V** 0 *LOG(S)*LOG(T)

SAD= 3.43789E-03 SR= .0278896 SE= .0107002

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= 1.49493
 A1= .242762
 A2= .136721
 A3=-.264187
 A13=-.164426

1.49493 0	.242762 -.164426	.136721 0	-.264187 0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4 -1	.3 -1	.4 -1	3.806 1.33658	3.37099 1.21521
.6 1	.3 -1	.4 -1	6.486 1.86965	7.61091 2.02958
.4 -1	.7 1	.4 -1	3.989 1.38354	4.4311 1.48865
.6 1	.7 1	.4 -1	11.932 2.47922	10.0044 2.30302
.4 -1	.3 -1	.6 1	2.859 1.05047	2.76125 1.01569
.6 1	.3 -1	.6 1	3.349 1.20866	3.22959 1.17236
.4 -1	.7 1	.6 1	3.563 1.2706	3.62961 1.28913
.6 1	.7 1	.6 1	4.161 1.42576	4.24524 1.4458
.49 0	.46 0	.49 0	5.06 1.62137	4.45902 1.49493
.49 0	.46 0	.49 0	4.024 1.39228	4.45902 1.49493
.49 0	.46 0	.49 0	4.13 1.41828	4.45902 1.49493
.49 0	.46 0	.49 0	4.405 1.48274	4.45902 1.49493

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 1.65264 <FTM= 9.01

B0=-.365616

C= .693769 B1=-1.6572 B2= .322721 B3=-4.15778
 B12= 0 B13=-4.00059 B23= 0 B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= .693769 *V**(-1.6572 +-4.00059 *LOG(T))*S**(.322721 + 0 *LOG(V))
 *T**(-4.15778 + 0 *LOG(S))*V** 0 *LOG(S)*LOG(T)

SAD= .0173472

SR= .118226 SE= .03149

XVI.

ZNACAJNOST KOJEFICIJENATA

A0= .169556
 A1=-.131761
 A2=-.100144
 A3= .138758
 A13= .0829511

.169556	-.131761	-.100144	.138758	
0	.0829511	0	0	
V(JJ)	S(J)	T(K)	R(I)	F1(I)
.4	.3	.4	1.508	1.41291
-1	-1	-1	.410784	.345655
.6	.3	.4	.967	.919644
1	-1	-1	-.0335568	-.0837691
.4	.7	.4	1.111	1.15646
-1	1	-1	.10526	.145367
.6	.7	.4	.734	.752724
1	1	-1	-.309246	-.284057
.4	.3	.6	1.531	1.57975
-1	-1	1	.425921	.457268
.6	.3	.6	1.385	1.43283
1	-1	1	.3257	.359648
.4	.7	.6	1.368	1.29302
-1	1	1	.31335	.25698
.6	.7	.6	1.244	1.17276
1	1	1	.218332	.15936
.49	.46	.49	1.07	1.18478
0	0	0	.0676585	.169556
.49	.46	.49	1.152	1.18478
0	0	0	.141499	.169556
.49	.46	.49	1.25	1.18478
0	0	0	.223144	.169556
.49	.46	.49	1.157	1.18478
0	0	0	.14583	.169556

MODEL JE ADEKVATAN FAD= 1.00665 <FTM= 9.01

B0= 1.03735
 C= 2.82173 B1= .790216 B2=-.236385 B3= 2.12458
 B12= 0 B13= 2.01825 B23= 0 B123= 0

STEPENA F-JA JE OBLIKA

FM= 2.82173 *V**(.790216 + 2.01825 *LOG(T))*S**(-.236385 + 0 *LOG(V))
 *T** (2.12458 + 0 *LOG(S))*V** 0 *LOG(S)*LOG(T)

SAD= 4.06024E-03

SR= .0324014 SE= .0121002

P R I L O G 11.

PROGRAMI ZA 2D i 3D GRAFIKU:

- I - 3D GRAFIKA SA DVIJE IZOPARAMETRIJSKE LINIJE
- II - 3D GRAFIKA SA JEDNOM IZOPARAMETRIJSKOM LINIJOM
- III - 2D GRAFIKA
- IV - 2D GRAFIKA SA ISTOVREMENIM CRTANJEM VIŠE KRIVIH

I

```

{$N+}
program d3n1(input,output);
uses graph;
var xp,xk,yp,yk,zp,zk:single;
    vx,vy,vz,pi,fi,ff,rr,ro:single;
    x,y,xx,yy,z,px,py,pz:single;
    i1,i2,i3,j1,kz,xii,yii,n,ny,nn,kox,koy:integer;
    s,od:char;
    lx,ly,lz,ls,xmn,ymn,x0,y0,xnad,ynad:integer;
var ycr:array[1..740]of integer;
    xl,yl,xls,yls:array[0..700]of integer;
function fnz:single;
begin
    fnz:=exp(ln(177.93)+0.99*ln(x)-0.56*ln(y))
end;
procedure okvir;
begin
    line(xmn,ymn,xnad,ymn);
    line(xmn,ymn,xnad,ynad);
    line(xmn,ymn,xmn,ynad);
    line(xnad,ymn,xnad,ynad)
end;
procedure ose;
begin
    line(x0,y0,x0,ymn-5);
    line(x0,y0,xnad+5,y0);
    i:=0;
    xii:=x0;
    yii:=y0;
    while (xii > xmn-5) and (yii < ynad+5) do
        begin
            i:=i+1;
            xii:=x0-round(i*sin(fi)/cos(fi));
            yii:=y0+i
        end;
    line(x0,y0,xii,yii)
end;
procedure igr;
begin
    i1:=detect;
    initgraph(i1,i2,'');
    if graphresult <> grok then halt(1)
end;
begin
    pi:=arctan(1.0)*4.0;
    xmn:=20;
    ymn:=10;
    x0:=200;
    y0:=150;
    xnad:=700;
    ynad:=315;
    ff:=48.0;
    s:='s';
    while s='s' do
        begin

```

```

fi:=ff*pi/180;
igr;
setcolor(1);
okvir;
ose;
readln(s);
closegraph;
if s='s' then begin
    write(xmn,' Xmn = ');
    readln(xmn);
    write(xnad,' Xnad = ');
    readln(xnad);
    writeln;
    write(ymn,' Ymn = ');
    readln(ymn);
    write(ynad,' Ynad = ');
    readln(ynad);
    writeln;
    write(x0,' X0 = ');
    readln(x0);
    write(y0,' Y0 = ');
    readln(y0);
    writeln;
    write(ff,' Fi = ');
    readln(ff)
end;

end;
for i:=xmn to xnad do ycr[i]:=1;
pi:=arctan(1.0)*4.0;
fi:=ff*pi/180;
write(' X > ');
readln(xp);
write(' X < ');
readln(xk);
writeln;
write(' Y > ');
readln(yp);
write(' Y < ');
readln(yk);
writeln;
write(' Z > ');
readln(zp);
write(' Z < ');
readln(zk);
writeln;writeln;
vx:=(xk-xp)/(ynad-y0);
vy:=(yk-yp)/(xnad-x0);
vz:=(zk-zp)/(y0-ymn);
write(' Gustina linija na X : ');
readln(n);
kox:=(ynad-y0) div n;
nn:=(ynad-y0) div kox;
write(' Gustina linija na Y : ');
readln(ny);
writeln;

```

```

write(nn,' Broj koraka : ');
readln(nn);
koy:=(xnad-x0) div ny;
writeln;writeln;
write(' Ugao rotacije : ');
readln(rr);
writeln;
if s<>'b' then
begin
write(' Da li skalirate ose [y/n] : ');
readln(od);
writeln;
if od='y' then
begin
write(' Vrednost podeoka na X : ');
readln(px);
write(' Vrednost podeoka na Y : ');
readln(py);
write(' Vrednost podeoka na Z : ');
readln(pz);
lx:=round(px/vx);
ly:=round(py/vy);
lz:=round(pz/vz);
end;
end;
ro:=rr*pi/180;
writeln;writeln;
igr;
if s<>'b' then ose;
if (s<>'b') and (od='y') then
begin
ls:=x0;
while ls<xnad+5 do
begin
if ls=x0 then line(ls,y0-2,ls,y0+2);
ls:=ls+ly;
end;
ls:=y0;
while ls<ynad+5 do
begin
if ls=y0 then line(x0-2,ls,x0+2,ls);
ls:=ls-lx;
end;
i:=0;
xii:=x0;
yii:=y0;
while (xii > xmn-5) and (yii < ynad+5) do
begin
if (xii <> y0) then line(xii-3,yii,xii+3,yii);
i:=i+lx;
xii:=x0-round(i*sin(fi)/cos(fi));
yii:=y0+i;
end;
end;
for l:=0 to nn do

```

```

begin
  i:=1*kox;
  for j:=0 to xnad-x0 do
    begin
      xx:=xp+i*vx;
      yy:=yp+j*vy;
      x:=xx*cos(ro)-yy*sin(ro);
      y:=xx*sin(ro)+yy*cos(ro);
      z:=fnz;
      kz:=round((z-zp)/vz);
      yii:=y0+i-kz;
      xii:=x0+j-round(i*sin(fi)/cos(fi));
      if (yii>ymn) and (yii<=ynad) and (xii>xmn) and (xii<xnad) then
        begin
          if ycr[xii]<>1 then
            begin
              setcolor(0);
              line(xii,yii,xii,ycr[xii]);
            end;
          setcolor(1);
          line(xii,yii,xii,yii);
          if ycr[xii]<>1 then
            line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
          ycr[xii]:=yii
        end
      else
        begin
          setcolor(0);
          if (xii>xmn) and (xii<xnad) then
            begin
              if yii<ymn then
                begin
                  line(xii,ymn,xii,ycr[xii]);
                  if ycr[xii]<>1 then
                    begin
                      setcolor(1);
                      line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
                    end;
                  ycr[xii]:=ymn
                end
              else
                begin
                  line(xii,ynad,xii,ycr[xii]);
                  if ycr[xii]<>1 then
                    begin
                      setcolor(1);
                      line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
                    end;
                  ycr[xii]:=ynad
                end;
            end;
          end;
        end;
      if xii<xmn then xii:=xmn;
      if yii<ymn then yii:=ymn;
      if xii>xnad then xii:=xnad;

```

```

if yii>ynad then yii:=ynad;
if j=(j div koy)*koy then begin
    xl[j]:=xii;
    yl[j]:=yii
end;
end;
for j:=0 to xnad-x0 do
begin
    if (j=(j div koy)*koy) and (i<>0) then begin
        setcolor(1); line (xls[j],yls[j],xl[j],yl[j]) end;
        xls[j]:=xl[j];
        yls[j]:=yl[j]
    end;
end;
setcolor(1);
okvir;
readln;
closegraph;
end.

```

II

```

{$N+}
program d3n1(input,output);
uses graph;
var xp,xk,yp,yk,zp,zk,px,pv,pz:single;
    vx,vy,vz,pi,fi,ff,rr,ro:single;
    x,y,xx,yy,z:single;
    i1,i2,i,j,l,kz,xii,yii,n,nn,kox,koy:integer;
    od,s:char;
    lx,ly,lz,ls,xmn,ymn,x0,y0,xnad,ynad:integer;
var ycr:array[1..740]of integer;
function fnz:single;
begin
    if (x<>0.0) or (y<>0.0) then
        fnz:=sin(sqrt(x*x+y*y))/sqrt(x*x+y*y)
    else
        fnz:=1
    end;
end;
procedure okvir;
begin
    line(xmn,ymn,xnad,ymn);
    line(xmn,ynad,xnad,ynad);
    line(xmn,ymn,xmn,ynad);
    line(xnad,ymn,xnad,ynad)
end;
procedure ose;
begin
    line(x0,y0,x0,ymn-5);
    line(x0,y0,xnad+5,y0);
    i:=0;
    xii:=x0;
    yii:=y0;
    while (xii > xmn-5) and (yii < xnad+5) do
        begin
            i:=i+1;
            xii:=x0-round(i*sin(fi)/cos(fi));
            yii:=y0+i;
        end;
        line(x0,y0,xii,yii)
    end;
end;
procedure igr;
begin
    i1:=detect;
    initgraph(i1,i2,'');
    if graphresult <> grok then halt(1)
end;
begin
    pi:=arctan(J.0)*4.0;
    xmn:=20;
    ymn:=10;
    x0:=160;
    y0:=120;
    xnad:=700;
    ynad:=315;
    ff:=48.0;
    s:='s';

```



```

while s='s' do
  begin
    fi:=ff*pi/180;
    igr:
    setcolor(1);
    okvir;
    ose;
    readln(s);
    closegraph;
    if s='s' then begin
      write(xmn,' Xmn = ');
      readln(xmn);
      write(xnad,' Xnad = ');
      readln(xnad);
      writeln;
      write(ymn,' Ymn = ');
      readln(ymn);
      write(ynad,' Ynad = ');
      readln(ynad);
      writeln;
      write(x0,' X0 = ');
      readln(x0);
      write(y0,' Y0 = ');
      readln(y0);
      writeln;
      write(ff,' Fi = ');
      readln(ff)
    end;
  end;
  for i:=xmn to xnad do ycr[i]:=-1;
  fi:=ff*pi/180;
  write(' X > ');
  readln(xp);
  write(' X < ');
  readln(xk);
  writeln;
  write(' Y > ');
  readln(yp);
  write(' Y < ');
  readln(yk);
  writeln;
  write(' Z > ');
  readln(zp);
  write(' Z < ');
  readln(zk);
  writeln;writeln;
  vx:=(xk-xp)/(ynad-y0);
  vy:=(yk-yp)/(xnad-x0);
  vz:=(zk-zp)/(y0-ymn);
  write(' Gustina linija : ');
  readln(n);
  kox:=(ynad-y0) div n;
  nn:=(ynad-y0) div kox;
  writeln;
  write(nn,' Broj koraka : ');

```

```

readln(nn);
koy:=(xnad-x0) div n;
writeln;writeln;
write(' Ugao rotacije : ');
readln(rr);
writeln;
if s<>'b' then
begin
write(' Da li skalirate ose [y/n] : ');
readln(od);
writeln;
if od='y' then
begin
write(' Vrednost podeoka na X : ');
readln(px);
write(' Vrednost podeoka na Y : ');
readln(py);
write(' Vrednost podeoka na Z : ');
readln(pz);
lx:=round(px/vx);
ly:=round(py/vy);
lz:=round(pz/vz);
end;
end;
ro:=rr*pi/180;
writeln;writeln;
igr;
if s <> 'b' then ose;
if (s <> 'b') and (od = 'y') then
begin
ls:=x0;
while ls<xnad+5 do
begin
if ls<>x0 then line(ls,y0-2,ls,y0+2);
ls:=ls+ly;
end;
ls:=y0;
while ls > ymn-5 do
begin
if ls<>y0 then line(x0-2,ls,x0+2,ls);
ls:=ls-lz;
end;
i:=0;
xii:=x0;
yii:=y0;
while (xii > xmn-5) and (yii < ynad+5) do
begin
if (xii <> y0) then line(xii-3,yii,xii+3,yii);
i:=i+lx;
xii:=x0-round(i*sin(fi)/cos(fi));
yii:=y0+i;
end;
end;
for l:=0 to nn do
begin

```

```

i:=1*kox;
for j:=0 to xnad-x0 do
begin
  xx:=xp+i*vx;
  yy:=yp+j*vy;
  x:=xx*cos(ro)-yy*sin(ro);
  y:=xx*sin(ro)+yy*cos(ro);
  z:=fnz;
  kz:=round((z-zp)/vz);
  yii:=y0+i-kz;
  xii:=x0+j-round(i*sin(fi)/cos(fi));
  if (yii>=ymn) and (yii<=ynad) and (xii>=xmn) and (xii<=xnad) then
    begin
      if ycr[xii] <> 1 then
        begin
          setcolor(0);
          line(xii,yii,xii,ycr[xii]);
          end;
          setcolor(1);
          line(xii,yii,xii,yii);
          if ycr[xii]<1 then
            line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
            ycr[xii]:=yii
          end
        else
          begin
            setcolor(0);
            if (xii>=xmn) and (xii<=xnad) then
              begin
                if xii<ymn then
                  begin
                    line(xii,ymn,xii,ycr[xii]);
                    if ycr[xii]<> 1 then
                      begin
                        setcolor(1);
                        line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
                      end;
                      ycr[xii]:=ymn
                    end
                  else
                    begin
                      line(xii,ynad,xii,ycr[xii]);
                      if ycr[xii]<>1 then
                        begin
                          setcolor(1);
                          line(xii,ycr[xii],xii,ycr[xii]);
                        end;
                          ycr[xii]:=ynad
                        end;
                      end;
                    end;
                  end;
                end;
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
setcolor(1);
okvir;

```

```
    readln;  
    closegraph;  
end.
```

III

```

{$N+}
program gr2d(input,output);
uses graph;
var xp,xk,yp,yk,vx,vy,x,y:single;
    lx,ly,ls,i,kj,jl:integer;
    i1,i2:integer;
    od,s:char;
    px,py:single;
    kx,ky:integer;
var xmn,ymn,xnad,ynad:integer;
const bf=5;pf=1;
function fny:single;
begin
    case jl of
        1: fny:=sin(x);
        2: fny:=x*x-2*x+3;
        3: fny:=cos(x-4);
        4: fny:=x*x*x-1;
        5: fny:=sqrt(x*x+1)
    end;
end;
procedure kvd;
begin
    line(xmn,ymn,xmn,ynad);
    line(xmn,ymn,xnad,ymn);
    line(xmn,ynad,xnad,ynad);
    line(xnad,ymn,xnad,ynad);
end;
procedure igr;
begin
    i1:=detect;
    initgraph(i1,i2,'');
    if graphresult<>grel then halt(0);
end;
begin
    s:= 's';
    xmn:=50;
    xnad:=700;
    ymn:=50;
    ynad:=300;
    write(' x > ');
    readln(xp);
    write(' x ');
    readln(xk);
    writeln;
    write(' y > ');
    readln(yp);
    write(' y < ');
    readln(yk);
    writeln;
    write(' Da li skalirate ose [y/n] ? ');
    readln(od);
    writeln;
    if od='y' then
        begin

```

```

        write(' Vrednost podeoka na X : ');
        readln(px);
        write(' Vrednost podeoka na Y : ');
        readln(py);
    end;
while s='s' do
    begin
        igr;
        setcolor(1);
        kvd;
        readln(s);
        if s='s' then begin
            closegraph;
            writeln;
            write(xmn,' Xmn = ');
            readln(xmn);
            write(xnad,' Xnad = ');
            readln(xnad);
            writeln;
            write(ymn,' Ymn = ');
            readln(ymn);
            write(ynad,' Ynad = ');
            readln(ynad);
        end;
    end;
closegraph;
igr;
kvd;
vx:=(xk-xp)/(xnad-xmn);
vy:=(yk-yp)/(ynad-ymn);
ly:=xmn-round(xp/vx);
if (ly > xmn) and (ly < xnad) then line(ly,ymn,ly,ynad);
lx:=ynad+round(yp/vy);
if (lx > ymn) and (lx < ynad) then line(xmn,lx,xnad,lx);
if od='y' then
    begin
        kx:=round(px/vx);
        ky:=round(py/vy);
        if (lx >= ymn) and (lx <= ynad) then
            begin
                ls:=ly;
                while ls<xnad do
                    begin
                        if ls>xmn then line(ls,lx-2,ls,lx+2);
                        ls:=ls+kx;
                    end;
                ls:=ly;
                while ls>xmn do
                    begin
                        if ls<xnad then line(ls,lx-2,ls,lx+2);
                        ls:=ls-kx;
                    end;
            end;
        if (ly>=xmn) and (ly<=xnad) then
            begin

```

```

ls:=lx;
while ls<ynad do
begin
  if ls>ymn then line(ly-2,ls,ly+2,ls);
  ls:=ls+ky;
end;
ls:=lx;
while ls>ymn do
begin
  if ls<ynad then line(ly-2,ls,ly+2,ls);
  ls:=ls-ky;
end;
end;
end;
for jl:=pf to bf do
begin
  for i:=1 to xnad-xmn do
  begin
    x:=xp+vx*i;
    y:=fny;
    kj:=ynad-round((y-yp)/vy);
    if (kj > ymn) and (kj < ynad) then
      line(xmn+i,kj,xmn+i,kj);
    end;
  end;
end;
readln;
closegraph;
end.

```

IV

```

{$n+}
program gr2d(input,output);
uses graph;
var xp,xk,yp,yk,vx,vy,x,y:single;
    lx,ly,ls,i,k,j,l:integer;
    i1,i2:integer;
    od,s:char;
    px,py:single;
    kx,ky:integer;
var xmn,ymn,xnad,ynad:integer;
const bf=3;pf=1;
function fny:single;
const z:array[1..bf]of single=(0.4,0.49,0.6);
begin
    fny:=exp(ln(177.93)+0.99*ln(z)-0.56*ln(z[lj1]));
end;
procedure kvd;
begin
    line(xmn,ymn,xmn,ynad);
    line(xmn,ymn,xnad,ymn);
    line(xmn,ynad,xnad,ynad);
    line(xnad,ymn,xnad,ynad);
end;
procedure igr;
begin
    i1:=detect;
    initgraph(i1,i2,'');
    if graphresult<>gok then halt(1);
end;
begin
    s:='s';
    xmn:=50;
    xnad:=700;
    ymn:=50;
    ynad:=300;
    write(' x > ');
    readln(xp);
    write(' x ');
    readln(xk);
    writeln;
    write(' y > ');
    readln(yp);
    write(' y ');
    readln(yk);
    writeln;
    write(' Da li skalirate ose [y/n] ? ');
    readln(od);
    writeln;
    if od='y' then
        begin
            write(' Vrednost podeoka na X : ');
            readln(px);
            write(' Vrednost podeoka na Y : ');
            readln(py);
        end;
end;

```



```

while s='s' do
  begin
    igr;
    setcolor(1);
    kvd;
    readln(s);
    if s='s' then begin
      closegraph;
      writeln;
      write(xmn, '  Xmn = ');
      readln(xmn);
      write(xnad, '  Xnad = ');
      readln(xnad);
      writeln;
      write(ymn, '  Ymn = ');
      readln(ymn);
      write(ynad, '  Ynad = ');
      readln(ynad);
    end;
  end;
closegraph;
igr;
kvd;
vx:=(xk-xp)/(xnad-xmn);
vy:=(yk-yp)/(ynad-ymn);
ly:=xmn+round(xp/vx);
if (ly > xmn) and (ly < xnad) then line(ly,ymn,ly,ynad);
lx:=ynad+round(yp/vy);
if (lx > ymn) and (lx < ynad) then line(xmn,lx,xnad,lx);
if od='y' then
  begin
    kx:=round(px/vx);
    ky:=round(py/vy);
    if (lx>=ymn) and (lx<=ynad) then
      begin
        ls:=ly;
        while ls<xnad do
          begin
            if ls>xmn then line(ls,lx-2,ls,lx+2);
            ls:=ls+kx;
          end;
        ls:=ly;
        while ls>xmn do
          begin
            if ls<xnad then line(ls,lx-2,ls,lx+2);
            ls:=ls-kx;
          end;
        end;
      if (ly>=xmn) and (ly<=xnad) then
        begin
          ls:=lx;
          while ls<ynad do
            begin
              if ls>ymn then line(ly-2,ls,ly+2,ls);
              ls:=ls+ky;
            end;
          end;
        end;
      if (ly>=ynad) and (ly<=ymn) then
        begin
          ls:=lx;
          while ls>ynad do
            begin
              if ls<ymn then line(ly-2,ls,ly+2,ls);
              ls:=ls-ky;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

        end;
        ls:=lx;
        while ls>ymn do
            begin
                if ls<ynad then line (ly-2,ls,ly+2,ls);
                ls:=ls-ky
            end;
        end;
    end;
end;
for jl:=pf to bf do
    begin
        for i:=1 to xnad-xmn do
            begin
                x:=xp+vx*i;
                y:=fny;
                kj:=ynad-round((y-yp)/vy);
                if (kj > ymn) and (kj < ynad ) then
                    line(xmn+i,kj,xmn+i,kj);
            end;
        end;
    end;
readln;
closegraph;
end.

```

P R I L O G 12.

PROGRAM ZA RAČUNANJE ZONE INTENZIVNOG TEČENJA
U FAZI DOPRESOVANJA KOD PRESOVANJA U OTVORENIM
KALUPIMA

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      WRITE(70,100)
100  FORMAT('          RACUNANJE ZONE DEFORMACIJE PRI PRESOVANJU U',/,
      &      '          OTVORENIM KALUPIMA')
      WRITE(70,*)
      WRITE(70,*)
      DE=1.30000
      RQ=26.13000
      WRITE(70,11)DE
11   FORMAT(' ', 'VISINA VIJENCA=' ,G15.6)
      WRITE(70,12)RQ
12   FORMAT(' ', 'PREČNIK VIJENCA=' ,G15.6)
      WRITE(70,*)
      WRITE(70,*)
      WRITE(70,15)
15   FORMAT(' ', 'UGAO ZONE',3X, 'VISINA ZONE',3X, 'SILA PRESOVANJA')
      DO 77 I=30,85,5
      DO 77 J=4,20,2
      ALF1=0.+I
      HH=0.+J
      SS=SUMA(ALF1,HH,DE,RQ)
      WRITE(70,20)ALF1,HH,SS
77   CONTINUE
20   FORMAT(G15.6,G15.6,G15.6)
      STOP
      END

```

C

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION SUMA(ALF1,HH,DE,RQ)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION TUP(9)
      TS1=0.025000/DSQRT(3.000)
      TS2=0.025000/DSQRT(3.000)
      TS3=0.025000/DSQRT(3.000)
      TR=0.16000
      RW=20.000
      AK=TR+(1.000/8.000)*((RQ-RW)/DE)*(1.000-TR)*DSQRT(TP)
      PI=4.0000*DATAN(1.0000)
      CALL INT21(ALF1,HH,S21,DE,RQ)
      CALL INT2A(ALF1,HH,S2A,DE,RQ)
      CALL INT2B(ALF1,HH,S2B,DE,RQ)
      CALL INT2C(ALF1,HH,S2C,DE,RQ)
      CALL INT23(ALF1,HH,S23,DE,RQ)
      CALL INT11(ALF1,HH,S11,DE,RQ)
      CALL INT1A(ALF1,HH,S1A,DE,RQ)
      CALL INT1B(ALF1,HH,S1B,DE,RQ)
      CALL INT13(ALF1,HH,S13,DE,RQ)
      TUP(1)=DSQRT(3.0000)*TS1*2.0000*PI*S21/HH
      TUP(2)=TS2*2.0000*PI*S2A
      TUP(3)=TS2*2.0000*PI*S2B
      TUP(4)=TS2*2.0000*PI*S2C
      TUP(5)=TS3*2.0000*PI*S23
      TUP(6)=TS1*2.0000*PI*S11/HH
      TUP(7)=TS2*2.0000*PI*S1A
      TUP(8)=TS2*2.0000*PI*S1B
      TUP(9)=TS3*AK*4.0000*PI*S13
      WRITE(70,150) (TUP(I),I=1,9)
150  FORMAT(9F8.3)
      SUMA=0.0000
      DO I=1,9
      SUMA=SUMA+TUP(I)
      END DO
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE INT21(ALF1,HH,S,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X1(100),W1(100),X2(100),W2(100)
RW=20.000

```

```

ALF=ALF1*3.1415000/180.000

```

```

TE=(HH-DE)/2.000

```

```

RS=RW-TE/DTAN(ALF)

```

```

A=0.0000

```

```

B=RS

```

```

N1=20

```

```

N2=20

```

```

CALL GAULEG(N1,X1,W1)

```

```

CALL GAULEG(N2,X2,W2)

```

```

S=0.0000

```

```

DO 10 K=1,N1

```

```

  S=S+W1(K)*FUN121((1.0000)/2.0000)*(X1(K)*(B-A)+B+A),N2,X2,W2,
  &ALF1,HH,DE,RQ)

```

```

CONTINUE

```

```

S=S*(B-A)/2.0000

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN121(X,N2,X2,W2,ALF1,HH,DE,RQ)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

DIMENSION X2(N2),W2(N2)

```

```

FUN121=0.0000

```

```

A1=H121(X,HH,DE,RQ)

```

```

B1=H221(X,HH,DE,RQ)

```

```

DO 10 K=1,N2

```

```

  FUN121=FUN121+W2(K)*G21(X,(1.0000/2.0000)*(X2(K)*(B1-A1)+B1+A1))

```

```

CONTINUE

```

```

FUN121=FUN121*FUN21(X)*(B1-A1)/2.0000

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H121(X,HH,DE,RQ)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

HH1=10.1000

```

```

TE=(HH-DE)/2.000

```

```

H121=HH1-TE

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H221(X,HH,DE,RQ)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

HH1=10.1000

```

```

TE=(HH-DE)/2.000

```

```

H221=HH1-TE+HH

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN21(X)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

FUN21=X

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G21(X,Y)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

G21=1.0000

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

SUBROUTINE INT2A(ALF1,HH,S,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X1(100),W1(100),X2(100),W2(100)
RW=20.000
ALF=ALF1*3.1415900/180.000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
A=RS
B=RW
N1=20
N2=20
CALL GAULEG(N1,X1,W1)
CALL GAULEG(N2,X2,W2)
S=0.0000
DO 10 K=1,N1
S=S+W1(K)*FUN12A((1.0000/2.0000)*(X1(K)*(B-A)+B+A),N2,X2,W2,
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
S=S*(B-A)/2.0000
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN12A(X,N2,X2,W2,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X2(N2),W2(N2)
FUN12A=0.0000
A1=H12A(X,ALF1,DE,RQ)
B1=H22A(X,DE,RQ)
DO 10 K=1,N2
FUN12A=FUN12A+W2(K)*G2A(X,(1.0000/2.0000)*(X2(K)*(B1-A1)+B1+A1),
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
FUN12A=FUN12A*FUN2A(X)*(B1-A1)/2.0000
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION H12A(X,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415900
H12A=HH1-(RW-X)/DTAN(ALF)
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION H22A(X,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.100
H22A=HH1
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN2A(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
FUN2A=X
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION G2A(X,Y,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
G2A=DSQRT(2.000/3.000)*DSQRT((G12A(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G22A(X,ALF1,HH,DE,RQ))**
&2.000+(G12A(X,ALF1,HH,DE,RQ)-G32A(X,ALF1,DE,RQ))**
&2.000+(G22A(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G32A(X,ALF1,DE,RQ))**2.000+3.000/2.000*G42A(X,Y,ALF1,DE,RQ)**2)

```

```
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION G12A(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
G121=-RS/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)-RS*RS/(2.000*HH*X*X)
G122=AA/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
G123=-AA/(2.000*DTAN(ALF)*X*(X-AA))
G12A=G121+G122+G123
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION G22A(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
G221=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)
G222=X-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
G223=AA*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
G22A=G221*(G222+G223)
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION G32A(X,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
G32A=-1.000/(DE+2.000*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION G42A(X,Y,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
G42A=DTAN(ALF)*(DE+2.000*HH1-2.000*Y)/
&(DE+2.000*(RW-X)*DTAN(ALF))/
&(DE+2.000*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE INT2B(ALF1,HH,S,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X1(100),W1(100),X2(100),W2(100)
RW=20.000
ALF=ALF1*3.1415000/180.000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
A=RS
B=RW
N1=20
N2=20
CALL GAULEG(N1,X1,W1)
CALL GAULEG(N2,X2,W2)
S=0.0000
DO 10 K=1,N1
S=S+W1(K)*FUN123((1.5000/2.0000)*(Y1(K)+C(R-A)+DTAN
```

```

10      &ALF1,HH,DE,RQ)
        CONTINUE
        S=S*(B-A)/2.0000
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN12B(X,N2,X2,W2,ALF1,HH,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        DIMENSION X2(N2),W2(N2)
        FUN12B=0.0000
        A1=H12B(X,DE,RQ)
        B1=H22B(X,DE,RQ)
        DO 10 K=1,N2
        FUN12B=FUN12B+W2(K)*G2B(X,(1.0000/2.0000)*(X2(K)*(B1-A1)+B1+A1),
10      &ALF1,HH,DE,RQ)
        CONTINUE
        FUN12B=FUN12B*FUN2B(X)*(B1-A1)/2.0000
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION H12B(X,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        HH1=10.1000
        H12B=HH1
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION H22B(X,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        HH1=10.1000
        H22B=HH1+DE
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN2B(X)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        FUN2B=X
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION G2B(X,Y,ALF1,HH,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        G2B=DSQRT(2.000/3.000)*DSQRT((G12B(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G22B(X,ALF1,HH,DE,RQ))*2.000+(G12B(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G32B(X,ALF1,DE,RQ))*2.000+
&(G22B(X,ALF1,HH,DE,RQ)-G32B(X,ALF1,DE,RQ))*2.000+3.000/2.000*
&G42B(X,Y,ALF1,DE,RQ))*2)
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION G12B(X,ALF1,HH,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        RW=20.000
        ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
        AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
        G121=-RS/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)-RS*RS/(2.000*HH*X*X)
        G122=AA/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
        G123=-AA/(2.000*DTAN(ALF)*X*(X-AA))
        G12B=G121+G122+G123
        RETURN
        END

        DOUBLE PRECISION FUNCTION G22B(X,ALF1,HH,DE,RQ)
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
        RW=20.000
        ALF=ALF1/180.0000*3.1415000

```



```

TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
G221=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*X*X)
G222=X-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
G223=AA*DLG((X-AA)/(RS-AA))
G22B=G221*(G222+G223)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G32B(X,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
G32B=-1.000/(DE+2.0000*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G42B(X,Y,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
G42B=DTAN(ALF)*(DE+2.000*HH1-2.0000*Y)/
&(DE+2.0000*(RW-X)*DTAN(ALF))/
&(DE+2.0000*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE INT2C(ALF1,HH,S,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X1(100),W1(100),X2(100),W2(100)
RW=20.000
ALF=ALF1*3.1415000/180.000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
A=RS
B=RW
N1=20
N2=20
CALL GAULEG(N1,X1,W1)
CALL GAULEG(N2,X2,W2)
S=0.0000
DO 10 K=1,N1
S=S+W1(K)*FUN12C((1.0000/2.0000)*(X1(K)*(B-A)+B+A),N2,X2,W2,
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
S=S*(B-A)/2.0000
RETURN
END

```

10

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN12C(X,N2,X2,W2,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X2(N2),W2(N2)
FUN12C=0.0000
A1=H12C(X,DE,RQ)
B1=H22C(X,ALF1,DE,RQ)
DO 10 K=1,N2
FUN12C=FUN12C+W2(K)*G2C(X,(1.0000/2.0000)*(X2(K)*(B1-A1)+B1+A1),
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
FUN12C=FUN12C*FUN2C(X)*(B1-A1)/2.0000
RETURN
END

```

0

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H12C(X,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.10DU
H12C=HH1+DE
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H22C(X,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.10DUU
RW=20.00DU
ALF=ALF1/180.00DUU*3.1415DUU
H22C=HH1+DE+(RW-X)/DTAN(ALF)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN2C(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
FUN2C=X
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G2C(X,Y,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
G2C=DSQRT(2.00U/3.00U)*DSQRT((G12C(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G22C(X,ALF1,HH,DE,RQ))**2.00U+(G12C(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G32C(X,ALF1,DE,RQ))**
&2.00U+(G22C(X,ALF1,HH,DE,RQ)-G32C(X,ALF1,DE,RQ))**2.00U+
&3.00U/2.00U*G42C(X,Y,ALF1,DE,RQ)**2)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G12C(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.00DU
ALF=ALF1/180.00DUU*3.1415DUU
AA=(DE+2.00DU*RW*DTAN(ALF))/(2.00DU*DTAN(ALF))
G121=-RS/(2.00DU*DTAN(ALF)*X*X)-RS*RS/(2.00DU*HH*X*X)
G122=AA/(2.00DU*DTAN(ALF)*X*X)*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
G123=-AA/(2.00DU*DTAN(ALF)*X*(X-AA))
G12C=G121+G122+G123
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G22C(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.00DU
ALF=ALF1/180.00DUU*3.1415DUU
TE=(HH-DE)/2.00DU
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
AA=(DE+2.00DU*RW*DTAN(ALF))/(2.00DU*DTAN(ALF))
G221=-1.00DU/(2.00DU*DTAN(ALF)*X*X)
G222=X-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
G223=AA*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
G22C=G221*(G222+G223)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G32C(X,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.00DU
ALF=ALF1/180.00DUU*3.1415DUU
G32C=-1.00DU/(DE+2.00DU*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G42C(X,Y,ALF1,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
G42C=DTAN(ALF)*(DE+2.000*HH1-2.0000*Y)/
&(DE+2.0000*(RW-X)*DTAN(ALF))/
&(DE+2.0000*(RW-X)*DTAN(ALF))
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE INT23(ALF1,HH,S,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X1(100),W1(100),X2(100),W2(100)
RW=20.000
A=RW
B=RQ
N1=20
N2=20
CALL GAULEG(N1,X1,W1)
CALL GAULEG(N2,X2,W2)
S=0.0000
DO 10 K=1,N1
S=S+W1(K)*FUN123((1.0000/2.0000)*(X1(K)*(B-A)+B+A),N2,X2,W2,
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
S=S*(B-A)/2.0000
RETURN
END

```

10

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN123(X,N2,X2,W2,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X2(N2),W2(N2)
FUN123=0.0000
A1=H123(X,DE,RQ)
B1=H223(X,DE,RQ)
DO 10 K=1,N2
FUN123=FUN123+W2(K)*G23(X,(1.0000/2.0000)*(X2(K)*(B1-A1)+B1+A1),
&ALF1,HH,DE,RQ)
CONTINUE
FUN123=FUN123*FUN23(X)*(B1-A1)/2.0000
RETURN
END

```

10

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H123(X,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
H123=HH1
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H223(X,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
HH1=10.1000
H223=HH1+DE
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN23(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
FUN23=X
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G23(X,Y,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
G23=DSQRT(2.000/3.000)*DSQRT((G123(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G223(X,ALF1,HH,DE,RQ))**2.000+(G123(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G323(X,DE,RQ))**2.000+(G223(X,ALF1,HH,DE,RQ)-
&G323(X,DE,RQ))**2.000+3.000/
&2.000*G423(X,Y,DE,RQ)**2)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G123(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
VR21=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*RW)
VR22=RW-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
VR23=AA*DLOG((RW-AA)/(RS-AA))
FI=VR21*(VR22+VR23)
G123=-FI*RW/(X*X)+(1.0000+RW*RW/(X*X))/(2.000*DE)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G223(X,ALF1,HH,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
RW=20.000
ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
VR21=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*RW)
VR22=RW-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
VR23=AA*DLOG((RW-AA)/(RS-AA))
FI=VR21*(VR22+VR23)
G223=FI*RW/(X*X)+(X*X-RW*RW)/(2.000*DE*X*X)
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G323(X,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
G323=-1.0000/DE
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G423(X,Y,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
G423=0.0000
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INT11(ALF1,HH,SS,DE,RQ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION X(100),W(100)
RW=20.000
ALF=ALF1*3.1415000/180.000
TE=(HH-DE)/2.000
RS=RW-TE/DTAN(ALF)
A=0.0000
B=RS
N=20
CALL GAULEG(N,X,W)

```

```

10      S=0.0000
        DO 10 K=1,N
          S=S+W(K)*FUN11((1.0000/2.0000)*(X(K)*(B-A)+B+A))
        CONTINUE
        SS=S*(B-A)/2.0000
        RETURN
      END

```

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN11(X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      FUN11=X*X
      RETURN
      END

```

C

```

      SUBROUTINE INT1A(ALF1,HH,SS,DE,RQ)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(100),W(100)
      RW=20.000
      ALF=ALF1*3.1415000/180.000
      TE=(HH-DE)/2.000
      RS=RW-TE/DTAN(ALF)
      A=RS
      B=RW
      N=20
      CALL GAULEG(N,X,W)
      S=0.0000
      DO 10 K=1,N
        S=S+W(K)*FUN1A((1.0000/2.0000)*(X(K)*(B-A)+B+A),ALF1,HH,DE,RQ)
      CONTINUE
      SS=S*(B-A)/2.0000
      RETURN
      END

```

10

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN1A(X,ALF1,HH,DE,RQ)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      RW=20.000
      ALF=ALF1/180.0000*3.1415000
      TE=(HH-DE)/2.000
      RS=RW-TE/DTAN(ALF)
      AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
      VR21=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*X)
      VR22=X-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
      VR23=AA*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
      VR2=VR21*(VR22+VR23)
      FUN1A=(VR2+DTAN(ALF))*X
      RETURN
      END

```

C

```

      SUBROUTINE INT1B(ALF1,HH,SS,DE,RQ)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(100),W(100)
      RW=20.000
      ALF=ALF1*3.1415000/180.000
      TE=(HH-DE)/2.000
      RS=RW-TE/DTAN(ALF)
      A=RS
      B=RW
      N=20
      CALL GAULEG(N,X,W)
      S=0.0000
      DO 10 K=1,N
        S=S+W(K)*FUN1A((1.0000/2.0000)*(X(K)*(B-A)+B+A),ALF1,HH,DE,RQ)

```

```

10  CONTINUE
    SS=S*(B-A)/2.0000
    RETURN
    END

    DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN1B(X,ALF1,HH,DE,RQ)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    RW=20.000
    ALF=ALF1/180.0000*3.1415900
    TE=(HH-DE)/2.000
    RS=RW-TE/DTAN(ALF)
    AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
    VR21=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*X)
    VR22=X-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
    VR23=AA*DLOG((X-AA)/(RS-AA))
    VR2=VR21*(VR22+VR23)
    FUN1B=VR2*X
    RETURN
    END

```

C

```

    SUBROUTINE INT13(ALF1,HH,SS,DE,RQ)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    DIMENSION X(100),W(100)
    RW=20.000
    A=RW
    B=RQ
    N=20
    CALL GAULEG(N,X,W)
    S=0.0000
    DO 10 K=1,N
10  S=S+W(K)*FUN13((1.0000/2.0000)*(X(K)*(B-A)+B+A),ALF1,HH,DE,RQ)
    CONTINUE
    SS=S*(B-A)/2.0000
    RETURN
    END

```

```

    DOUBLE PRECISION FUNCTION FUN13(X,ALF1,HH,DE,RQ)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    RW=20.000
    ALF=ALF1/180.0000*3.1415900
    TE=(HH-DE)/2.000
    RS=RW-TE/DTAN(ALF)
    AA=(DE+2.000*RW*DTAN(ALF))/(2.000*DTAN(ALF))
    VR21=-1.000/(2.000*DTAN(ALF)*RW)
    VR22=RW-RS-(RS*RS*DTAN(ALF))/HH
    VR23=AA*DLOG((RW-AA)/(RS-AA))
    FI=VR21*(VR22+VR23)
    FUN13=(FI*RW/X+(A*X-RW*RW)/(2.000*DE*X))*X
    RETURN
    END

```

PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: Milan Vukčević

Godina rođenja: 1954

E-mail: mianvu@ucg.ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore: Mašinski fakultet

Naslov doktorske disertacije:

PRILOG ISTRAŽIVANJU TERMO-MEHANIČKIH PARAMETARA PRI OBRADI
PRESOVANJEM

Prevod naslova na engleski jezik:

CONTRIBUTIONS TO THE RESEARCH OF THE THERMO-MECHANICAL PARAMETERS
IN METAL FORMING

Datum odbrane: 05.10.1989. godine

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci¹

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos
doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

¹ Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

**PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE
DIGITALNI ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE**

Prevod naslova disertacije na engleski jezik:

CONTRIBUTIONS TO THE RESEARCH OF THE THERMO-MECHANICAL
PARAMETERS IN METAL FORMING

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu):

Prof. dr Predrag Popović - Mašinski fakultet Niš - predsjednik

Prof. dr Igor A. Kijko - MGU Moskva

Prof. dr Vuko Domazetović - Mašinski fakultet UCG - mentor

Prof. dr Zoran Ćulafić - Mašinski fakultet UCG

Prof. dr Miodrag Perović - PMF UCG

Sažetak*

U doktorskom disertaciji je dat doprinos izučavanju procesa zapreminskog deformisanja korišćenjem teorijskog, numeričkog i eksperimentalnog pristupa. S teorijskog aspekta data su originalna rješenja na bazi korišćenja energetskog metoda i metoda teorije tečenja tankog sloja metala. Na bazi kritičkog sagledavanja postojećih numeričkih rješenja predložen je novi pristup i izložena poboljšanja numeričke procedure. Rad sadrži i obimna eksperimentalna istraživanja, bazirana na modernom višefaktornom planu eksperimenta. Rješenja kompleksne problematike su dobijena kroz sinergijsko dejstvo teorijske analize, eksperimentalnih istraživanja i numeričkih simulacija.

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

The doctoral dissertation contributes to the study of the mechanical forming process using theoretical, numerical and experimental approaches. From the theoretical aspect, original solutions based on the use of the energy method and the method of the theory of flow of a thin layer of metal are given. Based on a critical review of existing numerical solutions, a new approach is proposed and improvements of the numerical procedure are presented. The paper also contains extensive experimental research, based on a modern multifactoral experimental plan. Solutions to complex problems were obtained through the synergistic effect of theoretical analysis, experimental research and numerical simulations.

Ključne riječi:

Obrada deformisanjem, Teorija, Eksperiment, Simulacija.

Ključne riječi na engleskom jeziku:

Metal forming, Theory, Experiment, Simulation

Naučna oblast/uža naučna oblast:

Tehnologija/Obrada deformisanjem

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku:

Technology/Metal forming

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu.

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

PRILOG ISTRAŽIVANJU TERMO-MEHANIČKIH PARAMETARA PRI OBRADI PRESOVANJEM

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda



U Podgorici, 7.02.2022. godine

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)