

METODI I REŠENJA NEKIH NOVIH AKTUELNIH PROBLEMA
U NELINEARNOJ MEHANICI
- Doktorska disertacija -

Mr. ČULAFIĆ D. ZORAN. dipl.maš.ing.

621.4:539.317(272.3)



М₀₂ IV 460

инв. бр. 9448

S A D R Ź A J

	strana
PREDGOVOR	4
GLAVA I. NEOPHODNI IZVODI IZ MEHANIKE KONTINUMA I EFEKTIVNE MATEMATIČKE METODE	6
1. ELEMENTI TEORIJE NAPONA I DEFORMACIJA	7
1.1. TEORIJA NAPONA	7
1.1.1. Naponsko stanje u tački	7
1.1.2. Diferencijalne jednačine ravnoteže	8
1.1.3. Razlaganje tenzora napona	9
1.1.4. Glavne površi i glavni naponi	10
1.1.5. Intenzitet napona	11
1.1.6. Geometrijsko predstavljanje naponskog stanja	12
1.2. TEORIJA DEFORMACIJA	13
1.2.1. Stanje deformacije u tački	13
1.2.2. Uslovi slaganja deformacija	14
1.2.3. Razlaganje tenzora deformacije	14
1.2.4. Glavne ose i glavne deformacije	15
1.2.5. Intenzitet deformacije	16
1.2.6. Geometrijsko predstavljanje deformacionog stanja	17
1.2.7. Konačne deformacije i brzina deformacije	18
1.3. HUKOV ZAKON I USLOVI POJAVE PLASTIČNIH DEFORMACIJA	20
1.3.1. Veza između napona i deformacija elastičnog tijela	20
1.3.2. Uslovi pojave plastičnih deformacija	21
2. METODE REŠAVANJA STATIČKIH I DINAMIČKIH PROBLEMA	24
2.1. TEORIJE PLASTIČNOSTI	24
2.1.1. Osnovi teorije plastičnosti	24
2.1.2. Teorija priraštaja deformacija	29
2.1.3. Teorija malih elasto-plastičnih deformacija	32
2.1.4. Teorija tečenja plastičnog materijala po površima	36
2.2. EFEKTIVNE METODE U TEORIJAMA PLASTIČNOSTI	49
2.2.1. Metod "elastičnih rešenja" u teoriji malih elasto-plastičnih deformacija	49
2.2.2. Metod pješćane analogije i metod karakteristika u teoriji tečenja plastičnog materijala po površima	52
2.3. TEORIJE VISKO-ELASTIČNOSTI	60
2.3.1. Reološke osobine materijala	62
2.3.2. Osnovni linearno visko-elastični modeli	66
2.3.3. Bolcmanova teorija nasledne visko-elastičnosti	69
2.3.4. Teorija linearne visko-elastičnosti	72
2.3.5. Teorija linearne termo-visko-elastičnosti	78
2.3.6. Teorija nelinearne visko-elastičnosti	79
2.4. EFEKTIVNE METODE U TEORIJAMA VISKO-ELASTIČNOSTI	83
2.4.1. Operatorski metod. Volterin princip	83
2.4.2. Laplas-Karsonov metod integralnih transformacija	84

Odbornjen

	strana
2.4.3. Iljušinov metod aproksimacija	85
2.4.4. Metod usrednjavanja	90
GLAVA II. POSTAVKE I REŠENJA GRANIČNIH PROBLEMA OBRADJE METALA PRITISKOM I VISKO-ELASTIČNO DEFORMISANJE ŠUPLJEG CILINDRA	93
1. PROBLEMI HLADNOG PRESOVANJA I VALJANJA TANKOG METALNOG SLOJA	94
1.1. KRATAK PRIKAZ TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA PLASTIČ- NOG MATERIJALA PO POVRŠIMA	94
1.2. STATIČKI PROBLEMI PRESOVANJA	95
1.2.1. Presovanje tankog sloja plastičnog materi- jala oblika elipse	95
1.2.2. Koncentrična kružna rebra u procesima tečenja plastičnog materijala po površima	99
1.3. DINAMIČKI PROBLEMI PRESOVANJA	105
1.3.1. Udar tereta u kružni disk	105
1.3.2. Tečenje materijala oblika kružnog prstena	110
1.4. METOD I TAČNA REŠENJA PROBLEMA TEČENJA TANKOG SLOJA METALA	112
1.4.1. Uopštenje metode karakteristika	113
1.4.2. Tačna rešenja nekih problema	119
1.5. HLADNO VALJANJE LIMA	123
1.5.1. Uvodjenje bicilindričnog sistema koordinata	123
1.5.2. Definisane problema i konstrukcija koordinatne mreže	131
1.5.3. Postavka polaznih jednačina	133
1.5.4. Odredjivanje polja napona	136
1.5.5. Odredjivanje polja brzina	138
2. PROBLEM DINAMIČKOG OPTEREĆENJA VISKO-ELASTIČNOG ŠUPLJEG CILINDRA PRI NEHOMOGENOM TEMPERATURNOM POLJU	140
2.1. POSTAVKA PROBLEMA	140
2.2. KRATAK PRIKAZ PROBLEMA	141
2.3. METOD REŠAVANJA	143
2.3.1. Svodjenje polaznog problema na dinamički problem	143
2.3.2. Rešavanje odgovarajućeg dinamičkog problema	152
2.4. SLUČAJ HOMOGENOG JEZGRA RELAKSACIJE	155
2.5. OPŠTI SLUČAJ	159
GLAVA III. POSTAVKE I REŠENJA PROBLEMA ELEKTROPLASTIČNOSTI	160
1. ELEKTRO-TERMO-PLASTIČNI EFEKAT	161
1.1. POJAM	161
1.2. JEDNAČINA PROSTIRANJA TOPLOTE	161
1.3. POJAM ELEKTRIČNOG BIPOLA. DŽULOVA TOPLOTA	163

	strana
2. TEMPERATURNO POLJE PRI TOPLOM IZVLAČENJU TANKIH ŽICA	169
2.1. POSTAVKA PROBLEMA	164
2.2. PROFIL TEMPERATURE	165
2.3. ODREDJIVANJE ZAVISNOSTI $\bar{T}=\bar{T}(z,t)$	167
3. ODREDJIVANJE PROFILA TEMPERATURE KOD TOPLO VALJANOG LIMA	168
3.1. POSTAVKA PROBLEMA	168
2.2. PROFIL TEMPERATURE	169
OPŠTI ZAKLJUČAK	172
LITERATURA	175

P R E D G O V O R

U savremenoj metalnoj industriji obrada metala pritiskom zauzima vidno mjesto u odnosu na ostale tehnološke grane. Tome u prilog ide činjenica da je više od 90% svih metalnih produkata (polufabrikata ili gotovih proizvoda) moralo proći kroz ovu vrstu obrade. U vezi s tim od posebnog značaja i interesa je dalje istraživanje tehnoloških procesa, kao što su presovanje, kovanje, valjanje, izvlačenje itd. s ciljem njihove optimizacije, kako u pogledu naponskog stanja tako i u pogledu deformacija odnosno kinematike samih procesa.

Iz skupa procesa plastičnog deformisanja metala može se izdvojiti klasa koja se karakteriše jednim opštim svojstvom, a to je da se tečenje metala vrši u obliku tankog sloja koji se nalazi između radnih površi čije kretnje definiše karakter i geometriju tečenja. Procesi te vrste su dovoljno rasprostranjeni u tehnologiji: štampanje i presovanje tankozidnih elemenata konstrukcija, valjanje limova itd. Pri relativno opštim pretpostavkama pokazalo se mogućim formirati teoriju i predložiti efektivne metode za rešavanje naznačene klase problema.

S druge strane, u poslednje vrijeme, mnogi proizvodi se izrađuju od nemetalnih (polimernih) materijala pa se, u vezi s tim, posebno intenzivno razvija naučna disciplina mehanika polimera. Formiranje efektivnih metoda za proračun konstrukcija od polimernih materijala je jedan od njenih najvažnijih zadataka.

Savremeni problemi vezani za transport goriva u tečnom i gasovitom stanju, sagorijevanje čvrstih goriva, transport cijevi od polimernog materijala i sl. učinili su da mehanika polimera bude predmet interesovanja velikog broja istraživača, posebno u inostranstvu.

Ovim aktuelnim problemima nelinearne mehanike je posvećena ova disertacija.

U vezi s predhodnim, cilj istraživanja, u okviru disertacionog rada, je bio da se dobiju rešenja za niz novih problema iz naznačenih oblasti i da se pri tome ili predlože nove metode rešavanja, ili dalje razviju postojeće ili pak samo primijene već poznate efektivne metode.

Disertacija se sastoji od predgovora, tri glave, opšteg zaključka i spiska literature.

U prvoj glavi su dati osnovni (neophodni) pojmovi iz mehanike kontinuuma, korektne postavke graničnih problema teorije plastičnog tečenja i

termo-visko-elastičnosti u slučajevima statičkog i dinamičkog opterećenja i pregled efektivnih metoda rešavanja.

Drugu glavu disertacije sačinjavaju rešenja novih problema hladnog presovanja i valjanja tankog metalnog sloja. Istraženi su: problem presovanja sloja oblika elipse. problem dobijanja koncentričnih kružnih rebara. udar tereta u kružni disk i prster. i problem valjanja lima. Uopšten je efektivni metod karakteristika. Predložen je metod rešavanja problema dinamičkog opterećenja šupljeg cilindra od linearno visko-elastičnog materijala, obloženog sa elastičnom ljuskom. uz prisustvo nehomogenog i nestacionarnog temperaturnog polja.

U poslednjoj. trećoj. glavi su date postavke i rešenja problema odredjivanja polja i profila temperature kod izvlačenja tankih žica i valjanja limova za slučaj prisutnosti elektro-termo plastičnog efekta.

Na kraju je dat opšti zaključak u kojem su sintetizovani dobiveni rezultati i dati odredjeni komentari.

U disertaciji su formule i slike označavane sa tri cifre. Pri tome, prva cifra predstavlja broj glave. druga broj odeljka u glavi, a treća mesto formule ili slike u odeljku. Korišćena i citirana literatura navedena je na kraju. i to za prvu glavu posebno. a za drugu i treću zajedno. Pozivanje na literaturu se vrši brojem u uglastoj zagradi.

Oznake nijesu posebno navodjene, već je u tekstu svuda naglašavano šta odgovarajuća oznaka znači.

GLAVA I: NEOPHODNI IZVODI IZ MEHANIKE KONTINUMA I EFEKTIVNE MATEMATIČKE METODE

Ovdje su izloženi osnovni elementi iz teorije napona i teorije malih i konačnih deformacija. Prikazane su, u kratkom obliku, i neke efektivne matematičke metode za rješavanje problema nelinearne mehanike deformabilnog tvrdog dijela.

1. ELEMENTI TEORIJE NAPONA I DEFORMACIJA

1.1. TEORIJA NAPONA

1.1.1. Naponsko stanje u tački

Znamo ([1], [2]) da je sa devet komponenta napona za tri uzajamno normalne ravni, koje prolaze kroz razmatranu tačku 0 (sl.1.1.1.), u potpunosti određeno naponsko stanje u tački. tj. znajući njihove vrijednosti, možemo izračunati ukupni napon za proizvodnu ravan ABC koja prolazi kroz tačku 0.

Pomenutih devet komponenta napona obrazuju tenzor napona ($\tilde{\sigma}$)

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

gdje su:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - normalne komponente napona

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ - tangentne komponente napona

x,y,z - ose pravouglog Dekartovog sistema koordinata.

Tenzor napona ($\tilde{\sigma}$) je simetričan jer, na osnovu stava o konjugovanosti tangentnih napona, važi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Projekcije X_v , Y_v i Z_v , na koordinatne ose x,y i z, ukupnog napona p_v (sl. 1.1.2) za kosu ravan ABC su određene relacijama:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n, \\ Y_v &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n, \\ Z_v &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n, \end{aligned} \quad \dots (1.1.1)$$

gdje su: l, m, n - kosinusi pravaca normale v ravni ABC.

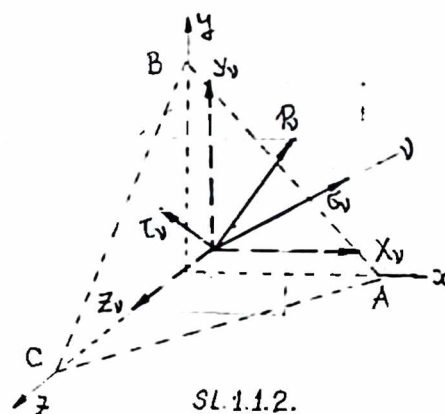
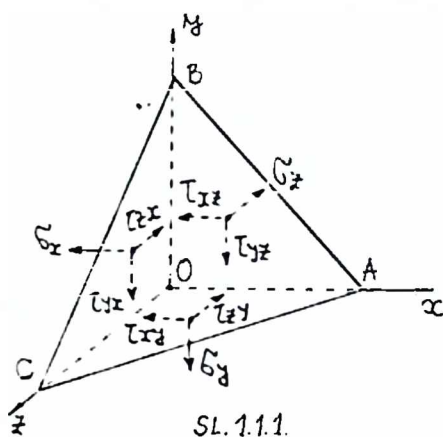
Ukupni (p_v), normalni (σ_v) i tangentni (τ_v) napon se zatim, na osnovu poznatih projekcija ukupnog napona, određuju iz:

$$\begin{aligned} p_v &= \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}, \\ \sigma_v &= X_v \cdot l + Y_v \cdot m + Z_v \cdot n, \\ \tau_v &= \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}. \end{aligned}$$

U daljem tekstu ćemo, u cilju sažetijeg pisanja, koristiti i tenzorske oznake, prema kojima se Dekartove koordinate x, y i z označavaju sa x_i , pri čemu indeks i dobija vrijednosti 1, 2 i 3. Normalne komponente napona označavaćemo sa σ_{11} , σ_{22} i σ_{33} , tangente sa σ_{12} , σ_{23} i σ_{31} , a tenzor napona sa $\tilde{\sigma} (\sigma_{ij})$ $i, j=1, 2, 3$. Ako sa n_i označimo ranije uvedene oznake ℓ, m i n , onda relacija (1.1.1) ima oblik

$$X_{vi} = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad \dots\dots (1.1.2)$$

pri čemu se sabiranje vrši po ponovljenom indeksu u monočlanu. Indeks koji se ponavlja naziva se nijemi indeks, a indeks koji se ne ponavlja je slobodan.



1.1.2. Diferencijalne jednačine ravnoteže

Ako se iz opterećenog tijela izdvoji mali element oblika paralelopipeda, sa stranicama koje su paralelne koordinatnim osama x, y, z i koje imaju dužine dx, dy i dz , na njegovim stranama će se pojaviti naponi kao uticaj odbaćenog dijela. Označavajući sa X, Y i Z , zapreminske sile, jednačine ravnoteže (bez inercijalnih članova) su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad \dots\dots (1.1.3)$$

ili u skraćenom obliku

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0. \quad \dots\dots (1.1.4)$$

1.1.3. Razlaganje tenzora napona

Opšti slučaj naponskog stanja možemo predstaviti u obliku zbira dva naponska stanja (Sl. 1.1.3). Tenzor napona prvog naponskog stanja (Sl.1.1.3.b) naziva se sfernim tenzorom sa komponentama $\delta_{ij} \cdot \bar{\sigma}$, tj.

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{Bmatrix} = \delta_{ij} \cdot \bar{\sigma}.$$

gdje su: δ_{ij} - Kronekerov delta simbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i=j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases},$$

$\bar{\sigma}$ - srednji normalni napon

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad \dots (1.1.5)$$

Tenzor napona drugog naponskog stanja (Sl. 1.1.3.c) naziva se devijator napona (\bar{S}) sa komponentama

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \bar{\sigma}, \quad \dots (1.1.6)$$

odnosno:

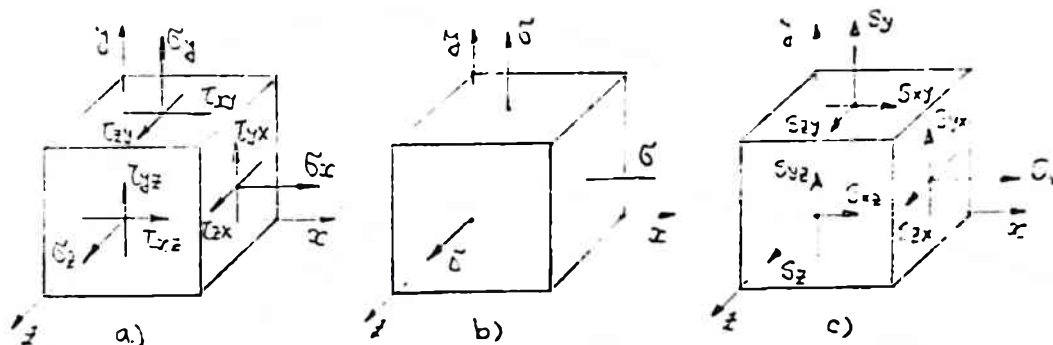
$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x - \bar{\sigma}; & S_{xy} &= \tau_{xy}; \\ S_y &= \sigma_y - \bar{\sigma}; & S_{yz} &= \tau_{yz}; \\ S_z &= \sigma_z - \bar{\sigma}; & S_{zx} &= \tau_{zx}; \end{aligned} \quad \dots (1.1.7)$$

Na osnovu relacija (1.1.5) i (1.1.6), odnosno (1.1.7) slijedi

$$S_{ii} = S_x + S_y + S_z = 0. \quad \dots (1.1.8)$$

U oblasti elastičnosti zapreminska deformacija je upravo proporcionalna zbiru normalnih napona [1]. Kasnije će biti pokazano da se ova konstatacija može proširiti i na oblast preko granice elastičnosti. Na osnovu predhodno rečenog i na osnovu relacije (1.1.8) slijedi da je kod drugog naponskog stanja (Sl. 1.1.3.c) promjena zapremine elementa jednaka nuli, a mijenja se samo oblik elementa. Očigledno je da se kod prvog naponskog stanja (Sl.1.1.3.b) mijenja samo zapremina elementa dok oblik elementa ostaje nepromijenjen.

Eksperimentalno je utvrđeno da se pri jednolikom zatezanju ili pritisku elementa sa svih strana on plastično ne deformiše. To znači da se u plastičnom području materijal može smatrati nestišljivim, odnosno da su plastične deformacije posledica promjene oblika elementa, tj. postojanja devijatora napona. U tome leži, i fizička, opravdanost razlaganja ukupnog tenzora napona na sferni tenzor i devijator.



SL.113.

1.1.4. Glavne površi i glavni naponi

U svakoj tački tijela postoje tri uzajamno normalne površi, za koje su tangentni naponi jednaki nuli. Te površi se nazivaju glavnim površima, a naponi na njima glavnim (normalnim) naponima. Vrijednosti glavnih napona jednake su vrijednostima korijena jednačine trećeg stepena [4]

$$\sigma^3 - I_{1\sigma} \sigma^2 - I_{2\sigma} \sigma - I_{3\sigma} = 0, \quad \dots (1.1.9)$$

gdje su: $I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

$$I_{2\sigma} = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \quad \dots (1.1.10)$$

$$I_{3\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

ili u tenzorskim oznakama

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_{ii}, \\ I_{2\sigma} &= -\frac{1}{2} [\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}], \\ I_{3\sigma} &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{kl} + \frac{1}{6} \sigma_{ii}^3 - \frac{1}{2} \sigma_{ii} \sigma_{ij} \sigma_{ij}. \end{aligned} \quad \dots (1.1.11)$$

Može se dokazati da su sva tri korijena ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) jednačine (1.1.9) realna. Pošto glavni naponi ne zavise od izbora koordinatnog sistema, od njega ne zavise ni koeficijenti jednačine (1.1.9), pa se nazivaju: $I_{1\sigma}$ - prvom, $I_{2\sigma}$ - drugom i $I_{3\sigma}$ - trećom invarijantom tenzora napona.

Iz (1.1.10) se lako dobijaju relacije kojima se invarijante tenzora napona izražavaju preko glavnih napona

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_{2\sigma} &= -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1, \\ I_{3\sigma} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad \dots (1.1.12)$$

Iz (1.1.10) se, postavljanjem komponentata sfernog tenzora i devijatora napona umjesto komponentata tenzora napona, mogu naći invarijante sfernog tenzora i devijatora napona. Na primjer invarijante devijatora napona su:

$$I_{1S} = 0, \\ I_{2S} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \dots (1.1.13)$$

$$I_{3S} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix},$$

odnosno: $I_{1S} = S_{ii} = 0.$
 $I_{2S} = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}, \dots (1.1.14)$
 $I_{3S} = \frac{1}{3} S_{ij} \cdot S_{jk} \cdot S_{ki}.$

1.1.5. Intenzitet napona

Pod intenzitetom napona podrazumijeva se veličina koja je proporcionalna kvadratnom korijenu iz druge invarijante devijatora napona. U zavisnosti od koeficijenta proporcionalnosti razlikuju se:

a) Intenzitet normalnih napona ili, često, samo intenzivnost napona (σ_u)

$$\sigma_u = \sqrt{3I_{2S}}. \dots (1.1.15)$$

b) Intenzitet tangentnih napona (τ_u)

$$\tau_u = \sqrt{I_{2S}}. \dots (1.1.16)$$

Na osnovu (1.1.15) i (1.1.16) slijedi

$$\sigma_u = \sqrt{3} \cdot \tau_u \dots (1.1.17)$$

Intenzitet napona izražen preko, komponentnih napona, preko glavnih napona i u skraćenoj oznaci je:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \dots (1.1.18)$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \dots (1.1.19)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij}}. \dots (1.1.20)$$

Za specijalan slučaj jednoosnog zatezanja ($\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), na osnovu (1.1.19), važi

$$\sigma_u = \sigma_0. \dots (1.1.21)$$

U slučaju čistog smicanja ($\sigma_1 = \tau_0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_0$), na osnovu (1.1.19), je

$$\sigma_u = \sqrt{3} \cdot \tau_0. \dots (1.1.22)$$

odnosno

$$\tau_u = \tau_o.$$

..... (1.1.23)

imajući u vidu (1.2.17).

Iz relacija (1.1.21), (1.1.22) i (1.1.23) se vidi da je intenzitet napona definisan tako da se u najjednostavnijim slučajevima naprezanja (jednoliko zatezanje i smicanje) njegove vrijednosti poklapaju sa vrijednostima normalnog i tangenta napona.

Jedna od interpretacija uvedenog pojma intenziteta napona [3], [4], jeste da je intenzitet napona proporcionalan takozvanom oktaedarskom tangenta naponu (τ_{ok}), tj. tangenta naponu na oktaedarskoj ravni (ravan koja zaklapa isti ugao prema trima glavnim osama, Sl.1.1.4)

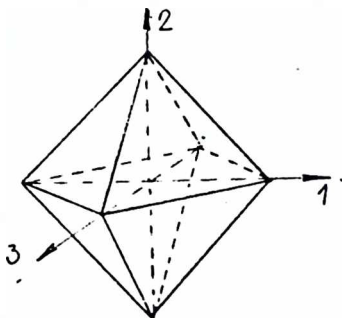
$$\sigma_u = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{ok}$$

..... (1.1.24)

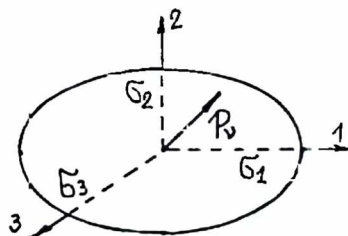
U tom slučaju, pokazano je [5], da je pravac tangenta napona na oktaedarskim ravnima određen trećom invarijantom devijatora napona, dok su normalni naponi na ovim ravnima (σ_{ok}) isti i jednaki srednjem normalnom naponu $\bar{\sigma}$.

1.1.6. Geometrijsko predstavljanje naponskog stanja

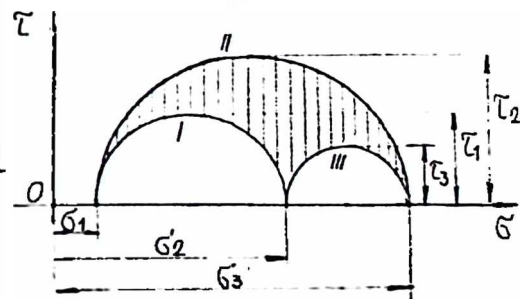
Naponsko stanje u tački tijela, geometrijski gledano, može se predstaviti tzv. elipsoidom napona (Sl. 1.1.5), čije poluose imaju vrijednost glavnih napona. U specijalnom slučaju svestranog jednolikog zatezanja ili pritiska, elipsoid napona se transformiše u sferu, pa se zato i tenzor takvog naponskog stanja naziva sfernim (Sl. 1.1.3b).



SL.1.1.4.



SL.1.1.5.



SL.1.1.6.

Preglednu predstavu o naponima daje i tzv. Morov dijagram napona (Sl. 1.1.6). On se sastoji iz tri polukružnice prečnika jednakih razlikama glavnih napona. Pokazano je [6], da koordinate tačaka u šrafiranoj oblasti predstavljaju normalne i tangenta napone u proizvoljno orijentisanim presjecima koji prolaze kroz posmatranu tačku, a da koordinate tačaka na kružnicama I, II i III određuju normalne i tangenta napone za skup različito orijentisanih presjeka

I, II i III (Sl. 1.1.7) [4]. Za presjeka I, II i III se, iz Morovog dijagrama, mogu naći i ekstremne vrijednosti tangenčnih napona

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \dots (1.1.25)$$

Tangenčni naponi koji imaju ekstremne vrijednosti nazivaju se glavnim tangenčnim naponima. Presjeci u kojima se pojavljuju glavni tangenčni naponi zaklapaju uglove od 45° sa presjecima u kojima se pojavljuju glavni normalni naponi. Pošto smo ranije usvojili da je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, na osnovu relacije (1.1.25), se dobija

$$\tau_{\max} = |\tau_2| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \dots (1.1.26)$$

U slučaju jednolikog zatezanja ili pritiska, kružnice iz Morovog dijagrama se transformišu u jednu tačku na osi σ . To znači da su kod takvog naponskog stanja tangenčni naponi jednaki nuli. Pošto je, kao što je ranije rečeno, obrazovanje plastičnih deformacija vezano za postojanje tangenčnih napona, znači da se pri jednolikom svestranom pritisku ili zatezanju plastične deformacije ne pojavljuju.

1.2. TEORIJA DEFORMACIJA

1.2.1. Stanje deformacije u tački

Predpostavimo da se neka tačka M opterećenog tijela, kao rezultat njegovog deformisanja, pomjerila u novi položaj. Sa u_x , u_y i u_z označimo projekcije ukupnog pomjeranja na ose Dekartovog koordinatnog sistema. U slučaju, kada su deformacije male (analiza ovog pitanja je data npr. u [7]), veze između deformacija i pomjeranja imaju oblik [3]

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \dots (1.1.27)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

gdje su: ϵ_x, ϵ_y i ϵ_z - linijske deformacije (dilatacije)
 γ_{xy}, γ_{yz} i γ_{zx} - ugaone deformacije.

U kursevima teorije elastičnosti [4] se dokazuje, da se pri rotaciji koordinatnih osa komponente deformacija mijenjaju analogno promjeni komponenta napona u razmatranoj tački. Upoređivanjem odgovarajućih relacija za komponente napona i komponente deformacija može se zaključiti da se iz prvih druge mogu dobiti formalnom zamjenom napona σ i τ sa deformacijama ϵ i $\gamma/2$ uz zadržavanje odgovarajućih indeksa.

Šest komponenta deformacije: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yz}}{2}$ i $\frac{\gamma_{zx}}{2}$ obrazuju tenzor deformacije $\tilde{\epsilon}$

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

U tenzorskim oznakama komponente tenzora $\tilde{\epsilon}$ ćemo označavati sa ϵ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), pri čemu je npr. $\epsilon_{22} = \epsilon_y$, $\epsilon_{32} = \frac{\gamma_{zy}}{2}$..., pa relacija (1.1.27) ima oblik

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad \dots (1.1.28)$$

1.2.2. Uslovi slaganja deformacija

Iz (1.1.27) se vidi da se šest komponenta tenzora deformacija izražavaju preko parcijalnih izvoda tri komponente pomjeranja po koordinatama x, y, z . Prema tome, one nijesu nezavisne funkcije tih koordinata, već između njih postoje zavisnosti, koje se nazivaju uslovima slaganja deformacija. Da bi predhodno rečeno bilo jasnije, može se deformabilno tijelo zamisliti kao skup elementarnih paralelopipeda koji se deformišu kada se i tijelo deformiše. Ako bi deformacije bile nezavisne, onda bi se svaki paralelopiped deformisao na svoj način, što bi značilo da se u tijelu, poslije njegovog deformisanja nalazi veliki broj šupljina.

Uslovi slaganja deformacija se dobijaju, iz (1.1.27), eliminacijom pomjeranja [2]. Oni su

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \dots (1.1.29) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

ili u tenzorskim oznakama

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \epsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}. \quad \dots (1.1.30)$$

1.2.3. Razlaganje tenzora deformacije

Analogno opštem slučaju naponskog stanja, opšti slučaj deformacionog stanja, koje se karakteriše tenzorom deformacija ($\tilde{\epsilon}$), možemo predstaviti u obliku zbira dva deformaciona stanja. Tenzor deformacije prvog deformacionog stanja je sferni tenzor sa komponentama

$$\delta_{ij} \cdot \xi = \begin{Bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{Bmatrix},$$

gdje je ξ - srednja deformacija

$$\xi = \frac{1}{3} (\xi_x + \xi_y + \xi_z) = \frac{1}{3} \xi_{ii}. \quad \dots (1.1.31)$$

Tenzor drugog deformacionog stanja je devijator deformacije ($\tilde{\Xi}$) sa komponentama (Ξ_{ij})

$$\Xi_{ij} = \xi_{ij} - \delta_{ij} \xi, \quad \dots (1.1.32)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Xi_x &= \xi_x - \xi, \quad \Xi_{xy} = \gamma_{xy}/2, \\ \Xi_y &= \xi_y - \xi, \quad \Xi_{yz} = \gamma_{yz}/2, \\ \Xi_z &= \xi_z - \xi, \quad \Xi_{zx} = \gamma_{zx}/2. \end{aligned} \quad \dots (1.1.33)$$

Na osnovu relacija (1.1.31) i (1.1.32), odnosno (1.1.33), slijedi

$$\Xi_{ii} = \Xi_x + \Xi_y + \Xi_z = 0, \quad \dots (1.1.34)$$

što znači da je promjena zapremine kod ovog drugog deformacionog stanja jednaka nuli.

Na taj način se kod prvog deformacionog stanja mijenja zapremina (oblik ostaje isti), kod drugog oblik, dok se kod polaznog deformacionog stanja mijenjaju i zapremina i oblik.

1.2.4. Glavne ose i glavne deformacije

U svakoj tački deformisanog tijela postoje tri uzajamno normalne ose, za koje su komponente ugaonih deformacija jednake nuli, pa se, prema tome, uglovi između tih osa, prilikom deformisanja tijela, ne mijenjaju. Te ose se nazivaju glavnim osama deformacije, i označavamo ih sa 1, 2 i 3. Linearne deformacije u pravcu glavnih osa nazivaju se glavnim linearnim deformacijama i označavamo ih sa ξ_1 , ξ_2 i ξ_3 . Vrijednosti glavnih linearnih deformacija jednake su vrijednostima korijena jednačine trećeg stepena [3].

$$\xi^3 - I_{1\xi} \cdot \xi^2 - I_{2\xi} \cdot \xi - I_{3\xi} = 0, \quad \dots (1.1.35)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} I_{1\xi} &= \xi_x + \xi_y + \xi_z, \\ I_{2\xi} &= -\xi_x \xi_y - \xi_y \xi_z - \xi_z \xi_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2, \end{aligned} \quad \dots (1.1.36)$$

$$I_{3\xi} = \begin{vmatrix} \xi_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \xi_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \xi_z \end{vmatrix} - \xi_x \xi_y \xi_z - \frac{1}{4} (\xi_x \gamma_{yz}^2 + \xi_y \gamma_{zx}^2 + \xi_z \gamma_{xy}^2),$$

$$\begin{aligned}
I_{1\varepsilon} &= \varepsilon_{ii}, \\
I_{2\varepsilon} &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ii}^2 - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}), \quad \dots\dots (1.1.37) \\
I_{3\varepsilon} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} + \frac{1}{6} \varepsilon_{ii}^3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}.
\end{aligned}$$

Pošto vrijednost glavnih deformacija ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, od njega ne zavise ni koeficijenti jednačine (1.1.35), pa se, zbog toga, i nazivaju: $I_{1\varepsilon}$ - prvom, $I_{2\varepsilon}$ - drugom i $I_{3\varepsilon}$ - trećom invarijantom tenzora deformacije.

Iz (1.1.36) se lako dobijaju relacije pomoću kojih se invarijante tenzora deformacije izražavaju preko glavnih linijskih deformacija:

$$\begin{aligned}
I_{1\varepsilon} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\
I_{2\varepsilon} &= -(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1), \quad \dots\dots (1.1.38) \\
I_{3\varepsilon} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Takodje se iz (1.1.36), postavljanjem komponenata sfernog tenzora ili devijatora deformacije, mogu naći invarijante sfernog tenzora i invarijante devijatora deformacije. Tako npr. invarijante devijatora deformacije imaju oblik:

$$\begin{aligned}
I_{1\vartheta} &= 0, \\
I_{2\vartheta} &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)], \\
I_{3\vartheta} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \dots\dots (1.1.39)
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
I_{1\vartheta} &= \vartheta_{ii} = 0, \\
I_{2\vartheta} &= \frac{1}{2} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}, \quad \dots\dots (1.1.40) \\
I_{3\vartheta} &= \frac{1}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{jk} \vartheta_{ki}.
\end{aligned}$$

1.2.5. Intenzitet deformacije

Po analogiji sa intenzitetom napona, pod intenzitetom deformacije podrazumijeva se veličina koja je proporcionalna kvadratnom korijenu iz druge invarijante devijatora deformacije. Zavisno od vrijednosti koeficijenta proporcionalnosti razlikuju se:

a) Intenzitet linijskih deformacija ili samo intenzitet deformacija

$$(\varepsilon_u) \quad \varepsilon_u = \sqrt{\frac{4}{3} I_{2\vartheta}}, \quad \dots\dots (1.1.41)$$

b) Intenzitet ugaonih deformacija (γ_u)

$$\gamma_u = \sqrt{4 I_{2\vartheta}} \quad \dots (1.1.42)$$

Na osnovu (1.1.41) i (1.1.42) slijedi

$$\varepsilon_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_u, \quad \dots (1.1.43)$$

Intenzitet deformacije izražen prekocomponentnih deformacija, preko glavnih deformacija u skraćenim oznakama je

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \dots (1.1.44)$$

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad \dots (1.1.45)$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} \quad \dots (1.1.46)$$

Za specijalni slučaj, jednoosnog zatezanja ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -(\varepsilon_0 - 3\varepsilon)/2$, prema (1.1.45), važi

$$\varepsilon_u = \varepsilon_0 - \varepsilon \quad \dots (1.1.47)$$

U slučaju čistog smicanja ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma_0$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) iz (1.1.44) se dobija

$$\varepsilon_u = \frac{\gamma_0}{3} \quad \dots (1.1.48)$$

Iz relacija (1.1.43) i (1.1.48) se vidi da se intenzitet ugaonih deformacija γ_u poklapa sa veličinom najveće ugaone deformacije pri čistom smicanju

$$\gamma_u = \gamma_0.$$



Analogno sa (1.1.44) i (1.1.46) intenzitet plastičnih deformacija (ε_u^p) se definiše sledećim relacijama:

$$\varepsilon_u^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2} [(\gamma_{xy}^p)^2 + (\gamma_{yz}^p)^2 + (\gamma_{zx}^p)^2]} \dots (1.1.49)$$

$$\varepsilon_u^p = \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij}^p \cdot \vartheta_{ij}^p} \quad \dots (1.1.50)$$

I ovdje se, kao i ranije, pokazuje [3], [4] da je intenzitet deformacije (ε_u) proporcionalan tzv. oktaedarskoj ugaonoj deformaciji (γ_{ok})

$$\varepsilon_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{ok}, \quad \dots (1.1.51)$$

1.2.6. Geometrijsko predstavljanje deformacionog stanja

Daljim razvijanjem analogije izmedju naponskog i deformacionog stanja, može se zaključiti da se, geometrijskim putem, deformaciono stanje u tački tijelo može predstaviti, u prostoru elipsoidom deformacije a u ravni

kružnim dijagramom deformacije. Kod kružnog dijagrama deformacije na apscisi se nanosi linearna a na ordinati polovina ugaone deformacije. Iz njega slijedi da je jedna od glavnih linearnih deformacija najveća, a jedna najmanja od svih linearnih deformacija iz okoline razmatran tačke, kao i da se najveće ugaone deformacije pojavljuju u pravcima koji sa pravcima glavnih linearnih deformacijama zaklapaju ugao od 45° , a leže u glavnim presjecima. Te ekstremne ugaone deformacije nazivaju se glavnim ugaonim deformacijama i za njih važe relacije:

$$\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1, \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad \dots (1.1.52)$$

1.2.7. Konačne deformacije i brzina deformacije

U predhodnim izlaganjima predmet razmatranja su bile tzv. male deformacije koje su se karakterisale time da su linijske deformacije (izduženja) i ugaone deformacije (uglovi klizanja) bile izražene linearno preko prvih izvoda pomjeranja po koordinatama. Medjutim, nije teško pokazati [4] da takve, male, deformacije ne mogu karakterisati procese koji su praćeni znatnim relativnim pomjeranjem uočenih čestica (npr. tečenje plastičnog materijala). Ta pomjeranja mogu imati red veličine rastojanja između čestica, pa se deformacije koje karakterišu takva pomjeranja nazivaju konačnim (velikim) deformacijama.

Pošto veličine ϵ_{ij} , konačne deformacije, zavise, pored unutrašnje deformacije, i od prenosnog kretanja elementa kao krutog tijela, besmisleno je tražiti vezu između njih i napona koji su vezani samo sa unutrašnjim deformacijama.

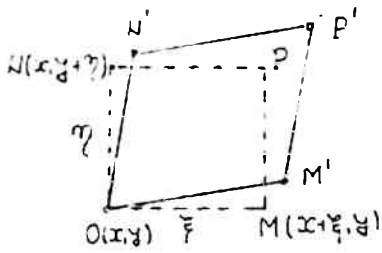
Zbog toga se, za odredjivanje deformacija koristi drugi prilaz (Ojlerov), koji je zasnovan na uvodjenju pojma tenzora brzine deformacije (\tilde{U}) i koji se koristi u hidrodinamici. Neka tačka O (Sl. 1.1.7) nije stalna fizička tačka (čestica), već nepokretna tačka prostora kroz koju prolaze razne fizičke tačke (čestice), i neka se u njoj u trenutku t , nalazi odredjena fizička tačka. Neka je OMPN (Sl. 1.1.7), odredjena, stalna elementarna zapremina prostora, koju, u trenutku t , zauzima neki odredjeni fizički element. Ako sa U_x , U_y i U_z označimo projekcije brzine fizičke tačke na pravce osa x, y, z , onda su projekcije brzine tačke M: $U_x(x+\xi, y)$, $U_y(x+\xi, y)$ i tačke N: $U_x(x, y+\eta)$ i $U_y(x, y+\eta)$. Za vrijeme dt ostvariće se beskonačno male deformacije čije su komponente:

$$d\epsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dt \quad \dots \text{relativno izduženje duži OM}$$

$$d\epsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} dt \quad \dots \text{relativno izduženje duži ON}$$

$$d\epsilon_{xy} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) dt \quad \dots \text{promjena ugla koji je prije deformisanja bio prav (90^\circ)}.$$

Označavajući projekcije brzine fizičke čestice sa U_i , izduženja stranica za interval vremena dt će biti



Sl. 1.1.7.

$$du_i = U_i dt, \quad \dots (1.1.53)$$

Beskonačno mali priraštaj deformacija, na osnovu (1.1.28), su:

$$d\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right] \dots (1.1.54)$$

Veličine $d\xi_{ij}$ obrazuju tenzor beskonačno malog priraštaja deformacije ($d\tilde{\xi}$). Analogno, kao kod malih deformacija, i ovdje kod priraštaja deformacije se mogu definisati intenzitet priraštaja deformacija ($d\tilde{\xi}_u$)* i intenzitet priraštaja plastičnih deformacija ($d\tilde{\xi}_u^p$)*. Te relacije, u skraćenim oznakama, imaju oblik

$$d\tilde{\xi}_u = \sqrt{\frac{2}{3} d\vartheta_{ij} d\vartheta_{ij}}, \quad \dots (1.1.55)$$

odnosno

$$d\tilde{\xi}_u^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\vartheta_{ij}^p d\vartheta_{ij}^p}, \quad \dots (1.1.56)$$

Dijeleći sa dt lijevu i desnu stranu znaka jednakosti u (1.1.54), dobijaju se brzine deformacije fizičkih elemenata u uočenoj tački prostora

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad \dots (1.1.57)$$

Veličine U_{ij} obrazuju tenzor brzine deformacije (\tilde{U}), i formalno se poklapaju sa veličinama ξ_{ij} , datih sa (1.1.28), koje obrazuju tenzor ($\tilde{\xi}$). Međutim, ne treba zaboraviti suštinsku razliku, a to je, da veličine u_i karakterišu jednu fizičku tačku (česticu) dok se veličine U_i odnose na sve čestice koje prolaze kroz fiksiranu tačku prostora.

U slučaju malih deformacija predhodna dva načina prikazivanja deformacija se poklapaju i tada je

$$U_{ij} = \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial t}. \quad \dots (1.1.58)$$

Po analogiji sa intenzitetom deformacije može se uvesti i pojam intenziteta brzine deformacije (\tilde{U}_u)

$$\tilde{U}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\tilde{U}_{xx} - \tilde{U}_{yy})^2 + (\tilde{U}_{yy} - \tilde{U}_{zz})^2 + (\tilde{U}_{zz} - \tilde{U}_{xx})^2 + 6(\tilde{U}_{xy}^2 + \tilde{U}_{yz}^2 + \tilde{U}_{zx}^2)}, \quad \dots (1.1.59)$$

odnosno

$$\tilde{U}_u = \sqrt{\frac{2}{3} (\tilde{U}_{ij} - \delta_{ij} \tilde{U})(\tilde{U}_{ij} - \delta_{ij} \tilde{U})}, \quad \dots (1.1.60)$$

gdje je: \tilde{U} - srednja brzina deformacije

$$\tilde{U} = \frac{1}{3} (\tilde{U}_{xx} + \tilde{U}_{yy} + \tilde{U}_{zz}) = \frac{1}{3} \tilde{U}_{ii}. \quad \dots (1.1.61)$$

* Crtica iznad oznaka $d\tilde{\xi}_u$ i $d\tilde{\xi}_u^p$ označava da se radi o intenzitetu priraštaja deformacija a ne o priraštaju intenziteta deformacija $d\xi_u$ i $d\xi_u^p$ jer su to različite veličine.

Ako je materijal nestišljiv, što znači da je relativna promjena jedinične zapremine u jedinici vremena jednaka nuli, tada je

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{ii} = 0, \quad \dots (1.1.62)$$

pa relacija (1.1.60) ima oblik

$$U_u = \sqrt{\frac{2}{3}} U_{ij} \cdot U_{ij}. \quad \dots (1.1.63)$$

Bitno je primijetiti da čak i u slučaju malih deformacija, kada važi relacija (1.1.58), intenzitet brzine deformacije U_u nije jednak parcijalnom izvodu po vremenu od intenziteta deformacije (ξ_u). Jednakost

$$U_u = \frac{\partial \xi_u}{\partial t},$$

za slučaj malih deformacija, važi samo u slučaju tzv. prostog opterećivanja [4]* o čemu će kasnije biti više govora.

Takodje je važno naglasiti da se i u slučajevima kada treba povezati komponente tenzora napona (σ_{ij}) sa komponentama tenzora brzine deformacije (U_{ij}), tenzor ($\tilde{\sigma}$) formira u nepokretnom geometrijskom prostoru kroz koji se kreće materijal. U tim slučajevima se, dakle, komponente σ_{ij} ne odnose na jedne iste presjeke tijela u posmatranoj tački (oni se zajedno sa tačkom tokom vremena mijenjaju), već na nepokretne, uvijek (tokom vremena) međusobno normalne površi geometrijskog, nepokretnog, prostora, odnosno na one presjeke tijela koji se u posmatranom trenutku vremena poklapaju sa tim geometrijskim površinama.

1.3. HUKOV ZAKON I USLOVI POJAVE PLASTIČNIH DEFORMACIJA

1.3.1. Veza izmedju napona i deformacija elastičnog tijela

Poznato je, da izmedju komponenata tenzora napona i komponenata tenzora deformacije izotropnog tijela postoje sledeće zavisnosti [1],[2]:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \xi_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \xi_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad \dots (1.1.64)$$

gdje su: E i G - moduo elastičnosti i moduo klizanja,

μ - koeficijent poprečne deformacije (Poasonov koeficijent).

Veza izmedju karakteristika materijala E, G i μ je

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad \dots (1.1.65)$$

* Pod prostim opterećivanjem tijela se podrazumijeva ono pri kojem se sve spoljašnje sile mijenjaju proporcionalno nekom parametru.

Zapreminska deformacija (θ), kod malih deformacija, jednaka je zbiru linijskih deformacija i proporcionalna je zbiru normalnih napona [1]:

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\epsilon = \frac{1}{3K} (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = \frac{1}{K} \bar{\sigma}, \quad \dots (1.1.66)$$

gdje je K - zapreminski moduo elastičnosti, i važi

$$K = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-2\nu)}. \quad \dots (1.1.67)$$

U tenzorskim oznakama relacija (1.2.64) ima oblik

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} \bar{\sigma}), \quad \dots (1.1.68)$$

odnosno

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \bar{\sigma} = 2G (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon). \quad \dots (1.1.69)$$

Imajući u vidu relacije (1.1.6), (1.1.32) i (1.1.69), veza izmedju komponenata devijatora napona (S_{ij}) i komponenata devijatora deformacije, je

$$S_{ij} = 2G \cdot \vartheta_{ij}. \quad \dots (1.1.70)$$

Postavljajući relaciju (1.1.70) u (1.1.20) i koristeći (1.1.46) može se naći veza izmedju intenziteta napona ($\bar{\sigma}_u$) i intenziteta deformacije ($\bar{\epsilon}_u$), oblika

$$\bar{\sigma}_u = 3G \cdot \bar{\epsilon}_u. \quad \dots (1.1.71)$$

Imajući u vidu relacije (1.1.17) i (1.1.43) može se naći veza izmedju intenziteta tangenčnih napona ($\bar{\tau}_u$) i intenziteta ugaone deformacije ($\bar{\gamma}_u$)

$$\bar{\tau}_u = G \cdot \bar{\gamma}_u. \quad \dots (1.1.72)$$

Na osnovu (1.1.71) iz (1.1.70) dobija se

$$S_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}_u}{3\bar{\epsilon}_u} \cdot \vartheta_{ij}. \quad \dots (1.1.73)$$

Dakle, iz predhodnih relacija se vidi da su, u svakoj tački elastično deformisanog tijela, devijatori napona i deformacije, kao i intenziteta napona i deformacije, proporcionalni.

Takodje je poznato [3] da se komponente tenzora napona, izotropnog elastičnog tijela, mogu prikazati kao parcijalni izvodi specifične potencijalne energije deformacije (U) po komponentama tenzora napona. Važi i obratno, tj.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ji}} \right) \text{ i } \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ji}} \right) \dots (1.1.74)$$

1.3.2. Uslovi pojave plastičnih deformacija

Kao što je poznato, kod prostog aksijalnog naprezanja, ili kod čistog smicanja, plastične deformacije nastaju kada normalni, odnosno tangenčni napon dostigne vrijednost $\bar{\sigma}_T$, odnosno $\bar{\tau}_T$, na dijagramu istezanja.



Kod složenog naponskog stanja je takodje od posebnog značaja određivanje uslova koji karakteriše početak plastične deformacije materijala. Taj uslov se može prikazati u obliku

$$f_T(\bar{\sigma}_{ij}) = 0, \quad \dots (1.1.75)$$

jer je jasno da on mora zavistiti od komponentata tenzora napona. U relaciji (1.1.75) mora ući i neka mehanička karakteristika materijala koja određuje trenutak pojave plastičnih deformacija (kao što su to kod prostog naponskog stanja bile veličine $\bar{\sigma}_T$, odnosno τ_T).

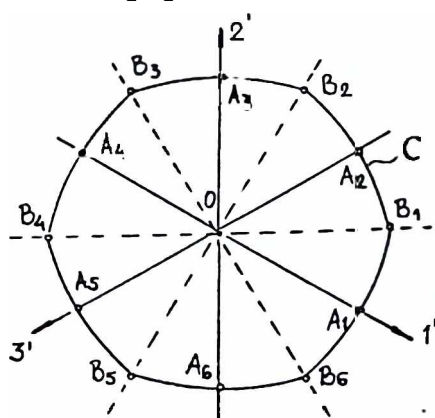
Za izotropno tijelo funkcija f_T se ne mijenja sa promjenom koordinatnih osa što znači da se uslov plastičnosti može zapisati u obliku neke funkcije koja zavisi od glavnih napona, odnosno od njihovih invarijanti, tj.

$$f_T(I_1\sigma, I_2\sigma, I_3\sigma) = 0.$$

Kao što je rečeno sferni tenzor ne utiče na pojavu plastičnih deformacija, što znači da se u predhodnoj relaciji mogu staviti invarijante devijatora napona, dakle

$$f_T(I_2S, I_3S) = 0. \quad \dots (1.1.76)$$

U sistemu koordinata $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ i $\bar{\sigma}_3$ jednačina (1.1.76) opisuje cilindar čije su izvodnice normalne na devijatorsku ravan (ravan u kojoj leži tangenti oktaedarski napon τ_{ok} , Sl. 1.1.2) jer srednji normalni napon, tj. I_1S , ne figuriše u relaciji (1.1.76). Trag toga cilindra u devijatorskoj ravni je neka kriva C koja je prikazana na Sl. 1.1.8. Ose $1', 2'$ i $3'$ su projekcije glavnih osa na devijatorsku ravan. Kriva C se naziva krivom tečenja i ona, saglasno [3], ima sledeća svojstva:

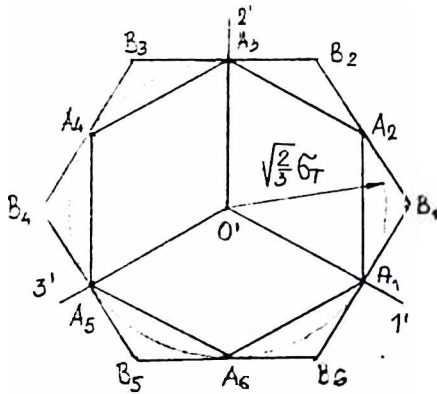


Sl. 1.1.8

- 1° Kriva C ne prolazi kroz koordinatni početak jer se plastične deformacije pojavljuju pri nekoj (znatnoj) vrijednosti napona;
- 2° Zrak povučen iz koordinatnog početka siječe krivu samo na jednom mjestu jer bi u protivnom postojala dva slična naponska stanja koja bi zadovoljavala uslov plastičnosti, što je nemoguće;
- 3° Kriva C je simetrična u odnosu na ose $1', 2'$ i $3'$, što je posledica ravnopravnosti osa zbog izotropnosti materijala;
- 4° Kriva C je simetrična i u odnosu na ose koje su normalne na pravcima $1', 2'$ i $3'$ jer se pretpostavlja da su mehaničke osobine materijala na zatezanje i pritisak iste, što znači da su tačke A_1, A_2, \dots, A_6 podjednako udaljene od koordinatnog početka.

5°. Kriva tečenja je ispupčena*.

Na osnovu navedenih osobina može se zaključiti da se kriva C sastoji iz dvanaest jednakih lukova kao i da se može uokviriti sa dva pravilna šestouglu:



Sl. 1.1.9.

(A_1, A_2, \dots, A_6) i (B_1, B_2, \dots, B_6) što je prikazano na Sl. 1.1.9. Rastojanja $\overline{O'A_1}$, $\overline{O'A_2}$ i $\overline{O'A_3}$ imaju vrijednosti $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$ (tačka A_1 na prvoj glavnoj osi je granica tečenja materijala pri jednoosnom istezanju, dok je $\sqrt{\frac{2}{3}}$ vrijednost kosinusa ugla između glavne ose 1 i njene projekcije na devijatorsku ravan).

Jednačine strana šestostranih prizmi, koje sa devijatorskom ravni obrazuju presjeke u vidu pravilnih šestouglova su [3]

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T; |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T; |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T. \quad \dots (1.1.77)$$

odnosno

$$|\sigma_1 - \sigma| = \frac{2}{3}\sigma_T; |\sigma_2 - \sigma| = \frac{2}{3}\sigma_T; |\sigma_3 - \sigma| = \frac{2}{3}\sigma_T. \quad \dots (1.1.78)$$

Presjek cilindra, koji je upisan u veću prizmu odnosno opisan oko manje prizme, sa devijatorskom ravni je kružnica poluprečnika $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$. Jednačina cilindra je

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad \dots (1.1.79)$$

a) Treska-Sen Venanov uslov plastičnosti

Na osnovu (1.1.77), uslov plastičnosti se može predstaviti u obliku

$$\max \{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_T. \quad \dots (1.1.80)$$

odnosno, pošto je usvojeno da je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, kao

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad \dots (1.1.81)$$

Ovaj uslov je eksperimentalno dobio Treska, a matematički ga je formulisao Sen Venan. Iz njega se vidi da glavni napon (σ_2) ne utiče na pojavu plastičnih deformacija. On se može napisati i u obliku

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_T. \quad \dots (1.1.82)$$

pa se često naziva i uslovom najvećeg tangentnog napona.

b) Uslov najvećeg devijatora napona

Ovaj uslov plastičnosti se dobija iz jednačine (1.1.78) i izražava se relacijom

$$\max \{|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\} = \frac{2}{3}\sigma_T. \quad \dots (1.1.83)$$

* Ispupčenost krive tečenja je posledica postulata Drukera o kojem će u narednom paragrafu biti više riječi.

Predložili su ga prvo A.J.Išlinski [9], zatim R.Hil [10], D.D.Ivlev [11] i na kraju R.M.Hejzornsvejt [12].

c) Huber-Mizesov uslov plastičnosti

Uslov (1.1.79) prvo je predložio Maksvel, zatim ga je Huber izveo [13] razmatrajući potencijalnu energiju deformacije tijela. Mizes [14] je, smatrajući Treska-Sen Venanov uslov tačnim, predložio da se umjesto šestougla $A_1A_2...A_6$ (Sl. 1.1.9) posmatra kružnica opisana oko njega. Dalja eksperimentalna provjera pokazala je da se Huber-Mizesov uslov bolje slaže sa eksperimentima od Treska-Sen Venanovog uslova. Imajući u vidu relacije (1.1.19) i (1.1.79) Huber-Mizesov uslov plastičnosti je

$$\sigma_u = \sigma_T \quad \dots (1.1.84)$$

Odnosi medju granicama tečenja za specijalne slučajeve čistog smicanja ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_0$ i $\sigma_3 = 0$) i zatezanja ($\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), prema navedenim uslovima plastičnosti, su:

$$\tau_T = \frac{1}{2} \sigma_T \quad (\text{prema uslovu Treske-Sen Venana})$$

$$\tau_T = \frac{2}{3} \sigma_T \quad (\text{prema uslovu najvećeg devijatora napona}) \dots (1.1.85)$$

$$\tau_T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (\text{prema uslovu Huber-Mizesa})$$

Eksperimenti na zatezanje i smicanje pokazuju da je $\tau_T = (0,57 \div 0,60) \sigma_T$ čemu je najbliži Huber-Mizesov uslov, kod koga je $\tau_T = 0,577 \sigma_T$.

2. METODE RJEŠAVANJA STATIČKIH I DINAMIČKIH PROBLEMA

2.1. TEORIJE PLASTIČNOSTI

2.1.1. Osnovi teorije plastičnosti

Površ plastičnosti

Znamo da, u slučaju jednoosnog naponskog stanja, materijal počinje da se plastično deformiše u trenutku kada napon dostigne granicu tečenja. Analogno, pri složenom stanju napona materijal se plastično deformiše kada su ispunjeni uslovi dati relacijama (1.1.81), (1.1.83) ili (1.1.84). Pri daljem deformisanju, u slučaju jednoosnog naponskog stanja, materijal očvršćava tj. povećava mu se granica tečenja, što je prikazano na Sl. 1.2.1a (tačka C).

U cilju razgraničavanja elastične i plastične deformacije očvršćavajućeg materijala, za slučaj složenog naponskog stanja, uvodi se pojam uslova plastičnosti

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad \dots (1.2.1)$$

Ovaj pojam se bitno razlikuje od pojma uslova početka plastičnosti, koji je definisan relacijom (1.1.75). Razlika je u tome što uslov (1.1.75) sadrži u sebi veličinu vezanu za mehaničke karakteristike materijala, dok uslov (1.2.1) mora sadržati neku mjeru kojom se definiše očvršćavanje. Kao mjere očvršćavanja (q) mogu se uzeti [3] rad plastične deformacije (A^P).

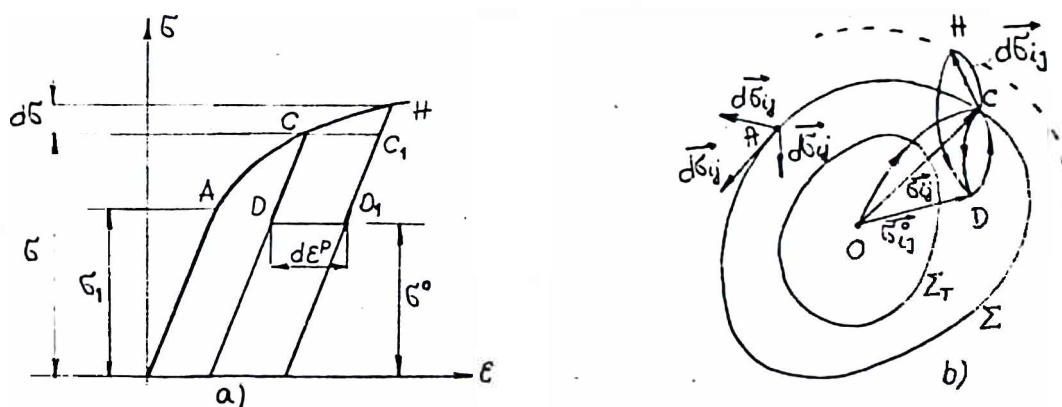
$$q = A^P = \int \bar{\epsilon}_{ij} \cdot d\bar{\epsilon}_{ij}^P. \quad \dots (1.2.2)$$

ili, tzv. parametar Udkvista

$$q = \int d\bar{\epsilon}_U^P. \quad \dots (1.2.3)$$

U prvom slučaju se za mjeru očvršćavanja uzima rad utrošen za ostvarivanje nepovratne plastične deformacije, dok u drugom slučaju mjeru određuje ostvarena plastična deformacija. Integracija u predhodnim relacijama se vrši po putu deformisanja.

Uslov plastičnosti (1.2.1) je jednačina hiper površi Σ (Sl.1.2.1b) u šestomjernom sistemu koordinata. Ta površ se naziva površ plastičnosti. Od nje treba razlikovati površ početka plastičnosti Σ_T .



Sl. 1.2.1.

Dimenzije, oblik i položaj površi plastičnosti ne zavise samo od konačnog deformacionog stanja već i od istorije deformisanja. Površ plastičnosti je ispupčena, što će kasnije biti pokazano.

Ako komponente tenzora napona dobiju priraštaj $d\bar{\epsilon}_{ij}$, to dodatno opterećenje može da izazove elastično rasterećenje materijala, dalje razvijanje plastične deformacije ili da bude neutralno, zavisno od toga kakav je položaj vektora $d\bar{\epsilon}_{ij}$ u odnosu na površ plastičnosti (Sl. 1.2.1b, tačka A).

Postulat Drukera (osnovna nejednakost plastičnosti)

Neka je, u slučaju jednoosnog stanja napona (Sl. 1.2.1a), obrazac opterećen do napona $\bar{\sigma}$ (tačka C), a zatim rasterećen do napona $\bar{\sigma}^0$ (tačka D). To stanje neka bude početno. Ako se zatim obrazac optereti do napona $\bar{\sigma} + d\bar{\sigma}$ (tačka H), a zatim rastereti do napona $\bar{\sigma}^0$ (tačka D1) onda je utrošena energija

proporcionalna zbiru površina CC_1DD_1 i CHC_1 , pa je

$$(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^0) d\varepsilon^p > 0 \quad \text{i} \quad d\bar{\sigma} d\varepsilon > 0, \quad \dots (1.2.4)$$

gdje je $d\varepsilon^p$ - priraštaj plastične deformacije.

U slučaju kada je $d\bar{\sigma} > 0$ i $d\varepsilon^p > 0$, tj. kada uslov (1.2.4) nije zadovoljen, na obrascu se pojavljuje vrat, pa se taj uslov može smatrati uslovom stabilnosti deformisanja preko granice elastičnosti.

Kada se razmatra opšti slučaj naponskog stanja (Sl. 1.2.1b) važi analogna analiza samo što se tačke C i H nalaze na površinama plastičnosti i njihov položaj je određen vektorima $\bar{\sigma}_{ij}$ i $d\bar{\sigma}_{ij}$.

Postulat Drukera (postavljen 1951.g.) glasi: Rad dodatnih napona na priraštajima deformacija (izazvanim tim naponima) za ciklus opterećenja i rasterećenja je pozitivan, tj.

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p + d\bar{\sigma}_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0. \quad \dots (1.2.5)$$

U predhodnoj relaciji se ne nalazi rad dodatnih napona na elastičnim deformacijama jer je na zatvorenom putu deformisanja, zbog obratnosti elastičnih deformacija, on jednak nuli.

Ako se u (1.2.5) stavi da je $\bar{\sigma}_{ij}^0 = \bar{\sigma}_{ij}$ onda se dobija

$$d\bar{\sigma}_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p > 0, \quad \dots (1.2.6)$$

Uslov koji je analogan uslovu (1.2.4), i koji se može smatrati kriterijumom stabilnosti deformisanja van granica elastičnosti za slučaj opšteg naponskog stanja.

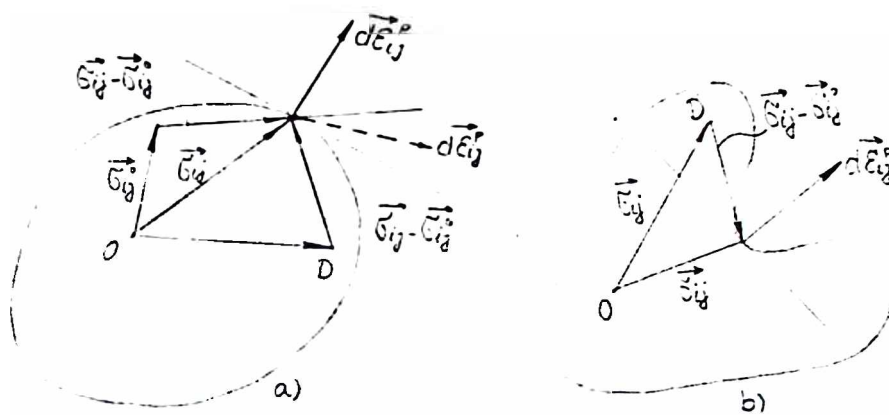
Ako je u (1.2.5) $\bar{\sigma}_{ij}^0 \neq \bar{\sigma}_{ij}$ onda se veličina $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0$ može napraviti proizvoljno velikom u odnosu na $d\bar{\sigma}_{ij}$ pa se drugi član može zanemariti, tada je

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p > 0. \quad \dots (1.2.7)$$

Predhodna relacija se, prema [15], naziva osnovnom nejednakosti plastičnosti.

Relacija (1.2.7) ima sledeće geometrijsko objašnjenje (Sl. 1.2.2a i b). Iz relacije (1.2.7) sledi da je skalarni proizvod vektora $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0$ i $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ pozitivan tj. da je ugao između njih oštar. Pošto tačka D može biti uzeta sa obije strane od vektora $\bar{\sigma}_{ij}$ (sl. 1.2.2a) to proizilazi da površ plastičnosti mora biti ispupčena i da vektor priraštaja plastične deformacije $d\varepsilon_{ij}^p$ ima pravac normale na površ plastičnosti. Samo pri ispunjenju oba ova uslova ugao između vektora $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0$ i $d\varepsilon_{ij}^p$ je oštar, tj. relacija (1.2.7) je zadovoljena, jer:

- Ako vektor $d\varepsilon_{ij}^p$ nije normalan na površ plastičnosti (isprekidani vektor na Sl. 1.2.2a) onda se uvijek može naći vektor $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^0$ koji sa njim



SL.1.2.2.

zaklapa tup ugao.

- Ako bi površ plastičnosti bila izdubljena (Sl. 1.2.2b) onda bi, nezavisno od pravca vektora $d\vec{\epsilon}_{ij}^p$, uvijek bilo moguće odabrati tačku D, tako da je ugao između vektora $\vec{\sigma}_{ij} - \vec{\sigma}_{ij}^0$ i $d\vec{\epsilon}_{ij}^p$ tup.

Povezujući zakon plastičnosti

Činjenica da je vektor $d\vec{\epsilon}_{ij}^p$ normalan na površ $f(\vec{\sigma}_{ij})=0$, odnosno da je kolinearan sa vektorom grad f , može se izraziti sledećom relacijom:

$$d\vec{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dots (1.2.8)$$

gdje je $d\lambda$ za sada neodređeni množitelj.

Relacija (1.2.8) je matematička formulacija povezujućeg zakona plastičnosti.

Na osnovu (1.2.8), (1.1.5) i (1.1.6) nije teško pokazati [3] da je promjena zapremine kod plastičnih deformacija jednaka nuli, tj.

$$d\vec{\epsilon}_{ij}^p = 3 \cdot d\epsilon = 0, \quad \dots (1.2.9)$$

što znači da se tenzor priraštaja plastične deformacije poklapa sa devijatorom priraštaja plastične deformacije, tj.

$$d\vec{\epsilon}_{ij}^p = d\vec{\epsilon}_{ij}^p. \quad \dots (1.2.10)$$

Množitelj $d\lambda$ se, na osnovu (1.2.10), (1.2.8) i (1.1.55), može odrediti preko intenziteta plastične deformacije $d\vec{\epsilon}_u^p$.

$$d\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d\vec{\epsilon}_u^p}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}}. \quad \dots (1.2.11)$$

Iz predhodne relacije sledi da je $d\lambda > 0$.

Na osnovu (1.2.6) i (1.2.8) dobija se:

- Za proces opterećivanja

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} > 0, f(\sigma_{ij}) = 0, d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda > 0). \quad \dots (1.2.12)$$

- Za proces rasterećivanja:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} < 0, f(\sigma_{ij}) = 0, d\lambda = 0, \quad \dots (1.2.13)$$

- Za proces prelaženja iz elastičnog u plastično stanje

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0, f(\sigma_{ij}) = 0, d\lambda = 0. \quad \dots (1.2.14)$$

U posljednjem slučaju vektor $d\vec{\sigma}_{ij}$ prolazi kroz ravan koja je tangenta na površ plastičnosti, tj. vrh vektora napona se kreće po površi plastičnosti, i takav tip opterećivanja se naziva neutralnim.

Kod materijala koji ne očvršćavaju (idealno-plastični materijali) površ plastičnosti se uvijek poklapa sa površi početka plastičnosti. Tada je neutralno opterećivanje osnovni tip opterećivanja. Ono je praćeno pojavom pri-
raštaja plastične deformacije, i tada je:

- Pri opterećivanju

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} = 0, f(\sigma_{ij}) = 0, d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda > 0), \quad \dots (1.2.15)$$

- Pri rasterećivanju

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} < 0, f(\sigma_{ij}) = 0, d\lambda = 0. \quad \dots (1.2.16)$$

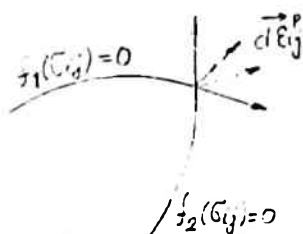
Ako je površ plastičnosti glatka (regularna) onda je u svakoj nje-
noj tački određena normala (npr. cilindar Genki-Mizesa). U slučaju singular-
ne površi plastičnosti, tj. površi koja ima rebra ili vrhove (npr. prizma
Treske-Sen Venana, prizma Islinskog-Hilla-Ivleva-Hajzernsvejta), normalu,
na singularnim mjestima, nije moguće odrediti. U tim slučajevima uslov
(1.2.8) treba dopuniti tako da bude određeno i plastično tečenje na rebrima.
Moguće je dokazati ([16] [17]) da je plastično tečenje na rebru linearna kom-
binacija tečenja na površima, čijim presjekom je određeno rebro. Neka je
rebro obrazovano presjekom dvije površi (Sl. 1.2.3) $f_1(\sigma_{ij}) = 0$ i $f_2(\sigma_{ij}) = 0$.
Tada za tačke rebra relacija (1.2.8) ima oblik

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Tečenje na rebru se vrši u pravcima koji leže unutar ugla čije krake obra-
zuju normale na površi tečenja (Sl. 1.2.3).

U slučaju kada postoji N površi. povezujući zakon plastičnosti, saglasno [15], ima oblik

$$\frac{\partial f_a}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0, \quad f_a(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\epsilon_{ij}^p = \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \sigma_{ij}} (d\lambda_a \geq 0), \quad \dots (1.2.17)$$



Sl. 1.2.3.

Znak jednakosti u predhodnim relacijama se odnosi na slučaj neutralnog opterećivanja.

NAPOMENA: Sva predhodna rasudjivanja moguće je sprovesti, ne u prostoru određenom komponentama tenzora napona već, u prostoru određenom komponentama tenzora deformacije, kako je i radio A.A. Iljušin ([18], 1960. godine).

2.1.2. Teorije priraštaja deformacije (teorije tečenje)

Zavisno od usvojenog zakona promjene dimenzija i oblika površi plastičnosti $f(\sigma_{ij})$, koji u stvari predstavlja zakon očvršćavanja, mogu se dobiti razne teorije plastičnosti: teorija plastičnosti izotropnog materijala sa izotropnim očvršćavanjem, teorija plastičnosti izotropnog materijala sa anizotropnim očvršćavanjem, teorija plastičnosti ortotropnog materijala sa izotropnim očvršćavanjem, itd. Za sve te teorije je karakteristično da povezuju priraštaje deformacije sa naponom, pa se i nazivaju teorijama priraštaja plastične deformacije [15] ili prosto teorijama tečenja [6].

Medjutim, često se pod pojmom "teorija tečenja" podrazumijeva teorija plastičnosti izotropnog materijala sa izotropnim očvršćavanjem [3]. Takav termin će i ovdje biti usvojen jer ostale teorije plastičnosti neće biti predmet detaljnijeg razmatranja.

Teorija plastičnosti izotropnog materijala sa izotropnim očvršćavanjem - teorija tečenja -

Ako se u procesu opterećivanja površ plastičnosti širi ravnomjerno (izotropno), kao što je to prikazano na Sl. 1.2.4, onda se očvršćavanje naziva izotropnim. Jasno je da se ovom teorijom efekat Baušingera [4] (smanjivanje vrijednosti granice tečenja u odnosu na opterećenje istog znaka) ne uzima u obzir jer su rastojanja OA^+ i OA^- ista.

Za izotropnu sredinu jednačina površi plastičnosti zavisi samo od druge i treće invarijante (ranije je objašnjeno). Ako se uticaj treće invarijante devijatora napona može smatrati malim onda, površ plastičnosti, u sistemu glavnih koordinata, ima oblik cilindra Genki-Mizesa. Radijus cilindra se povećava sa povećavanjem opterećenja. Najmanja vrijednost radijusa u devi-

jatorskoj ravni je $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$. Prema tome, da bi se cilindar Genki-Mizesa izotropno širio, u procesu opterećivanja, treba da je druga invarijanta devijatora napona (I_{2S}) proporcionalno parametru očvršćavanja (q) koji se mijenja po nekom zakonu $\Phi(q)$. To znači da se jednačina površine plastičnosti $f(\sigma_{ij})$ može uzeti u obliku

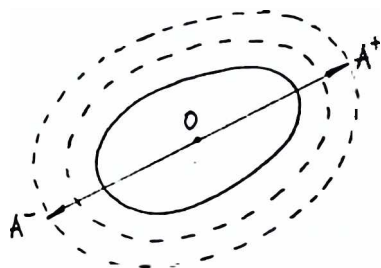
$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - [\Phi(q)]^2 = 0. \quad \dots (1.2.18)$$

Iz predhodne relacije se dobija

$$\delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = 3 \delta_{ij} S_{ij} = 3 S_{ii} = 0. \quad \dots (1.2.19)$$

Da bi se iz povezujućeg zakona plastičnosti (1.2.8) dobila veza između priraštaja deformacija i napona, neophodno je, na osnovu relacija (1.2.11) i (1.2.19), odrediti $d\lambda$ i $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. Na osnovu (1.1.5) i (1.1.6) slijedi

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(\frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma_{kl} \right),$$



Sl. 1.2.4.

pa je

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\delta_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \dots (1.2.20)$$

Imajući u vidu relaciju (1.2.19) iz (1.2.20) se dobija

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = 3 S_{ij}. \quad \dots (1.2.21)$$

Na osnovu (1.2.11) i (1.1.14) važi

$$d\lambda = \frac{1}{2} \frac{d\xi_u^p}{\sigma_u}.$$

Prema tome, povezujući zakon plastičnosti (1.2.8) dobija sledeći oblik

$$d\xi_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\xi_u^p}{\sigma_u} S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\xi_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma). \quad \dots (1.2.22)$$

Iz njega se vidi da su komponente tenzora priraštaja plastične deformacije proporcionalne komponentama devijatora napona.

Veza između priraštaja ukupne deformacije ($d\xi_{ij}$) i priraštaja napona ($d\sigma_{ij}$) se dobija kada se priraštaju plastične deformacije ($d\xi_{ij}^p$) doda priraštaj elastične deformacije, prema (1.1.68), tj.

$$d\xi_{ij} = \frac{1}{2G} (d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma) + \frac{3}{2} \frac{d\xi_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) \dots (1.2.23)$$

Relacijom (1.2.23) su definisane osnovne jednačine teorije tečenja. Za slučaj ravne deformacije prvi ih je dobio Prandtl 1924.g. [19], a za opšti slučaj Rejs 1930. g. [20]. Zbog toga se, često, te jednačine nazivaju jednačinama Prandtl-Rejsa. U radovima Prandtla i Rejsa se pretpostavljalo da mate-

rijal nije očvršćavanjući. Očvršćavanje je prvi uzeo u obzir Udkvist [23].

Ako je priraštaj plastične deformacije znatno veći u poredjenju sa priraštajem elastične deformacije onda se ovaj drugi može zanemariti i tada se jednačine date relacijama (1.2.22) i (1.2.23) poklapaju. Iz (1.2.22) se, formalnim dijeljenjem sa dt , dobija relacija kojom je definisana veza između komponenata tenzora brzine deformacije (\dot{U}_{ij}) i komponenata devijatora napona (S_{ij})

$$\dot{U}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{U}_u}{\bar{\sigma}_u} (S_{ij} - \delta_{ij} \bar{\xi}). \quad \dots (1.2.24)$$

U predhodnoj relaciji je uzeto u obzir da je (samo formalno)

$$\dot{U}_u = \frac{d\bar{\xi}_u}{dt},$$

pri čemu je veličina \dot{U}_u određena relacijom (1.1.63).

Jednačine (1.2.24) je, za slučaj ravne deformacije, dobio Sen Nevan [22], [21], dok ih je za opšti slučaj izveo Levi [24] 1871. god. Nezavisno od njih, znatno kasnije (1913.g.), dobio ih je i Mizes [25]. Zbog toga se ova teorija plastičnosti često i naziva teorija Sen Venan-Levi-Mizesa ili samo teorija Sen Venana.

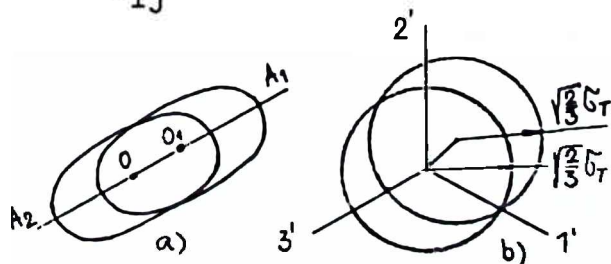
Teorija plastičnosti izotropnog materijala sa anizotropnim očvršćavanjem

Ova teorija plastičnosti, za razliku od predhodne, opisuje i tzv. deformacionu anizotropiju, odnosno njen prostiji oblik - efekat Baušingera. Prema ovoj teoriji [3], površ početka plastičnosti pomjera se samo translatorno (Sl. 1.2.5 a i b), što znači da je $OA_1 \neq OA_2$.

Ako se kao uslov početka plastičnosti uzme uslov Huber-Mizesa, onda jednačina površi plastičnosti ima oblik

$$f(\bar{\sigma}_{ij}) = \frac{3}{2} (S_{ij} - \delta_{ij} \bar{\xi})(S_{ij} - \delta_{ij} \bar{\xi}) - \bar{\sigma}_T^2 = 0, \quad \dots (1.2.25)$$

gdje su $\bar{\xi}_{ij}$ - komponente centra površi plastičnosti..



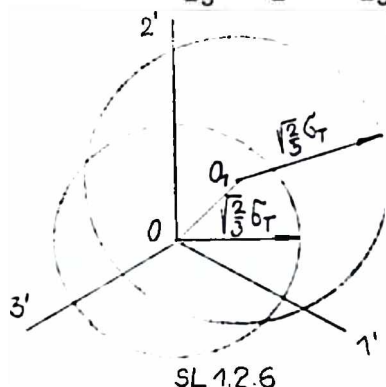
Sl.1.2.5.

Eksperimentalne provjere [26] pokazuju da ova teorija plastičnosti samo kvalitativno opisuje pojavu deformacione anizotropije. Da bi se dobili teorijski rezultati koji se bolje slažu sa eksperimentima neophodno je da se površ

plastičnosti pored translatornog pomjeranja i izotropno širi. Tada se kaže da materijal translatorno i izotropno očvršćava.

Varijantu takve teorije predložili su Ju.I. Kadešević i V.V. Novožilov [27]. Po njima, uslov plastičnosti treba da ima sledeći oblik

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - \bar{s}_{ij})(s_{ij} - \bar{s}_{ij}) - [\Phi(q)]^2 = 0. \quad \dots (1.2.26)$$



Iz predhodne relacije se može zaključiti da je trag površi plastičnosti na devijatorskoj ravni, u trodimenzionalnom prostoru glavnih napona, kružnica čiji je centar pomjeren van koordinatnog početka. U procesu opterećivanja ta kružnica se translatorno pomjera i širi.

1.2.3. Teorija malih elasto-plastičnih deformacija (deformaciona teorija plastičnosti)

Jednačine teorije malih elasto-plastičnih deformacija se dobijaju, kao što će kasnije biti pokazano, iz jednačina teorije priraštaja deformacija za slučaj tzv. prostog opterećivanja. Pod prostim opterećivanjem se podrazumijeva takvo opterećivanje pri kojem komponente devijatora napona rastu proporcionalno nekom parametru. U protivnom se opterećivanje naziva složenim.

U slučaju homogenog naponskog stanja opterećivanje tijela će biti prosto kada spoljašnje sile rastu proporcionalno jednom, za sve sile, zajedničkom parametru. To se objašnjava na sledeći način: U slučaju homogenog naponskog stanja (ono je moguće kada nema zapreminskih sila) i stanje deformacija je takodje homogeno. Tada su jednačine ravnoteže (1.1.3) i jednačine slaganja deformacija (1.1.29) indentički zadovoljene. To znači da je naponsko stanje određeno graničnim uslovima, odnosno samo površinskim silama. Zbog toga, kada spoljašnje opterećenje raste proporcionalno nekom parametru, onda i komponente napona, a samim tim i devijatora napona, takodje rastu proporcionalno istom parametru, a to je definicija prostog opterećivanja.

Dakle, neka je opterećivanje prosto. Tada je

$$s_{ij} = \beta \cdot s_{ij}^*$$

Sa zvezdicom je označena neka stalna vrijednost komponentata devijatora napona. Na primjer, to može biti vrijednost komponentata devijatora napona na kraju procesa opterećivanja. U tom slučaju parametar β ima vrijednost $1 \geq \beta \geq 0$.

Na osnovu relacije (1.2.22) je

$$d\xi_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u} d\xi_u^p,$$

pa je moguće izvršiti integraciju. Na kraju procesa opterećivanja dobija se

$$\xi_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\bar{\epsilon}_u^*} \int d\bar{\xi}_u^p. \quad \dots (1.2.27)$$

Postavljajući dobivenu relaciju u izraz za intenzitet plastične deformacije (1.1.50), i koristeći relaciju (1.1.20) je

$$\bar{\xi}_u^p = \int d\bar{\xi}_u^p. \quad \dots (1.2.28)$$

odnosno

$$d\bar{\xi}_u^p = d\bar{\xi}_u^p. \quad \dots (1.2.29)$$

Na taj način, u slučaju prostog opterećivanja, intenzitet priraštaja plastične deformacije jednak je priraštaju intenziteta plastične deformacije.

Postavljanjem (1.2.28) u (1.2.27) i ispuštanjem zvezdice, dobijamo

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\xi}_u^p}{\bar{\epsilon}_u} \cdot s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\xi}_u^p}{\bar{\epsilon}_u} (\bar{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\epsilon}). \quad \dots (1.2.30)$$

Dodavanjem komponenata devijatora elastične deformacije komponentama devijatora elastične deformacije, prema (1.1.68), i koristeći relaciju (1.1.69) dobijamo

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}^e + \vartheta_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\bar{\xi}_u^p}{\bar{\epsilon}_u} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\xi}_u^e + \bar{\xi}_u^p}{\bar{\epsilon}_u} s_{ij} \dots (1.2.31)$$

Na osnovu (1.2.31), iz (1.1.46), je

$$\bar{\epsilon}_u = \bar{\epsilon}_u^e + \bar{\epsilon}_u^p. \quad \dots (1.2.32)$$

Prema tome, iz (1.2.31) dobijamo

$$\vartheta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}_u}{\bar{\epsilon}_u} \cdot s_{ij}, \quad \dots (1.2.33)$$

ili

$$\bar{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\epsilon} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{\epsilon}_u}{\bar{\epsilon}_u} (\bar{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\epsilon}). \quad \dots (1.2.34)$$

odnosno

$$\bar{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}_u}{\bar{\epsilon}_u} (\bar{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\epsilon}). \quad \dots (1.2.35)$$

Grafik zavisnosti intenziteta napona od intenziteta deformacije se naziva dijagramom deformisanja materijala. On se, kako pokazuju mnogobrojni eksperimenti (npr. [28], [29], [30]), poklapa sa dijagramom istezanja materijala, što znači da ne zavisi od tipa naponskog stanja.

Prema tome, u specijalnom slučaju tzv. prostog opterećivanja, pokazala se mogućnost nalaženja zavisnosti između napona i deformacija na kraju procesa opterećivanja. Relacije (1.2.33), (1.2.34) i (1.2.35) predstavljaju osnovne jednačine tzv. deformacione teorije plastičnosti (teorije malih

elasto-plastičnih deformacija). Prvi je te jednačine, pri odsustvu očvršćavanja, dobio Genki [31]. Očvršćavanje je uveo Šmid [32], dok je zavisnost komponenta tenzora deformacije i komponenta tenzora napona, u obliku (1.2.34), dobio A.A. Iljušin [8]. Njemu se pripisuje dalja analiza i razvijanje te teorije.

Ranije je pokazano da će, u slučaju homogenog naponskog stanja, opterećivanje biti prosto samo kada spoljašnje sile rastu proporcionalno nekom parametru.

Problem o tome, kako u procesu opterećivanja treba da rastu spoljašnje sile da bi, za opšti slučaj nehomogenog naponskog stanja, opterećivanje u svim tačkama tijela bilo prosto, nije riješen. A.A. Iljušin je dao specijalno rešenje toga problema. On je dokazao sledeću teoremu [8]: Da bi u svim tačkama nestišljivog tijela, opterećenog spoljnim silama, koje rastu proporcionalno nekom parametru β , opterećivanje bilo prosto, dovoljno je da zavisnost intenziteta napona od intenziteta deformacije bude stepena funkcija oblika

$$\zeta_u = A \cdot \xi_u^m. \quad \text{..... (1.2.36)}$$

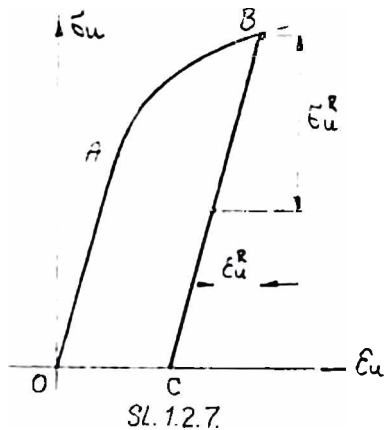
Jednočlanost stepene funkcije oblika (1.2.36) onemogućava da se teorema o prostom opterećivanju primijeni za niz slučajeva (npr. slučaj neočvršćavajućeg materijala), jer slabo aproksimira dijagram deformisanja, materijala [6]. D.D. Ivlev je pokazao [33] da ako zavisnost (1.2.36) ima oblik polinoma onda je prosto opterećivanje neostvarljivo. L.I. Sedov je zaključio [34] da je za slučaj proizvoljnog opterećenja i pri velikim deformacijama tijela, prosto opterećivanje takodje nemoguće ostvariti.

Ipak, imajući u vidu da funkcija data relacijom (1.2.36) sa dovoljnom tačnošću aproksimira zavisnost $\zeta_u = \zeta_u(\xi_u)$ za slučaj razvijenih plastičnih deformacija, kada postoji znatno očvršćavanje, približno se može smatrati da će u tim slučajevima opterećivanje biti prosto, ako spoljašnje sile rastu proporcionalno jednom zajedničkom (za sve sile) parametru.

Na kraju treba reći da se teorija tečenja i teorija malih elasto-plastičnih deformacija poklapaju za slučaj prostog opterećivanja. To je potvrđeno i mnogobrojnim eksperimentima.

Rasterećivanje. Zaostali naponi i deformacije.

Ranije je bilo pokazano (1.2.32) da intenzitet deformacije ξ_u može biti predstavljen u obliku zbira intenziteta elastične i plastične deformacije. Zbog toga, dijagram deformisanja materijala ima isti oblik kao i dijagram istezanja, ne samo pri opterećivanju nego i pri rasterećivanju (Sl. 1.2.7). Dakle, dijagram rasterećivanja na grafiku $\zeta'_u(\xi_u)$ je prava (BC) paralelna pravoj (OA),



pa matematička formulacija zakona rasterećivanja glasi

$$\sigma_u^R = 3G \cdot \epsilon_u^R \quad \dots (1.2.37)$$

Neka se, kao rezultat opterećivanja tijela, zapreminskim silama X_j i površinskim silama X_{vj} van granice elastičnosti, u proizvoljnoj tački tijela pojave naponi σ_{ij} i deformacije ϵ_{ij} . Zatim, neka se silama X_j i X_{vj} smanje vrijednosti do vrijednosti X_j^* i X_{vj}^* (tijelo

se rasteretilo). Tada se i vrijednosti σ_{ij} i ϵ_{ij} smanje za vrijednosti σ_{ij}^R i ϵ_{ij}^R , pa onda imaju vrijednosti (zaostale)

$$\sigma_{ij}^Z = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^R, \quad \dots (1.2.38)$$

$$\epsilon_{ij}^Z = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^R.$$

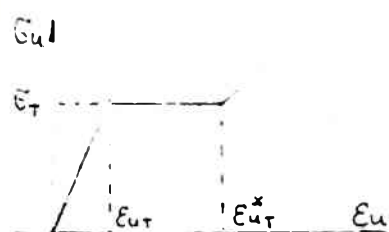
Jasno je da komponente deformacije ϵ_{ij} , ϵ_{ij}^R i ϵ_{ij}^Z moraju zadovoljavati uslove slaganja deformacija (1.1.29). Naponi σ_{ij} , σ_{ij}^Z i σ_{ij}^R moraju zadovoljavati jednačine ravnoteže (1.1.3) i granične uslove (1.1.1) sa zapreminskim i površinskim silama respektivno: X_j , X_{vj} , X_j^* , X_{vj}^* ; $X_j - X_j^*$; $X_{vj} - X_{vj}^*$.

Prema tome, da bi se na osnovu (1.2.38) našli zaostali naponi (σ_{ij}^Z) i zaostale deformacije (ϵ_{ij}^Z) treba naći napone (σ_{ij}^R) i deformacije (ϵ_{ij}^R). Oni se nalaze rješavanjem problema teorije elastičnosti za vrijednosti spoljašnjih sila koje su jednake razlici vrijednosti sila koje se dobijaju na kraju procesa opterećivanja i rasterećivanja. U slučaju potpunog rasterećenja vrijednosti sila na kraju procesa su jednake nuli.

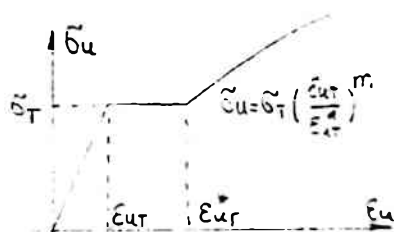
Sve što je predhodno rečeno za rasterećivanje tijela važi za slučaj kada se u tom procesu ne prelazi ponovo u oblast van granice elastičnosti. Takvi procesi su razmotreni u knjizi [35].

Shematizacije dijagrama deformisanja materijala

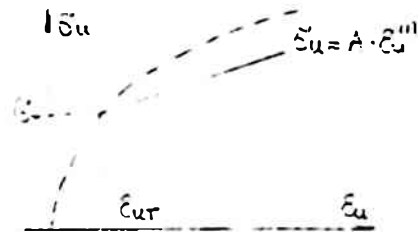
Radi uprošćavanja proračuna van granice elastičnosti, često se, stvarni dijagrami deformisanja materijala shematizuju, tj. zamjenjuju krivim ili pravim linijama, koje se, s jedne strane, dovoljno prosto matematički izražavaju i, s druge strane, dovoljno dobro aproksimiraju stvarni dijagram. Neki shematizovani dijagrami deformisanja materijala prikazani su na sledećim slikama



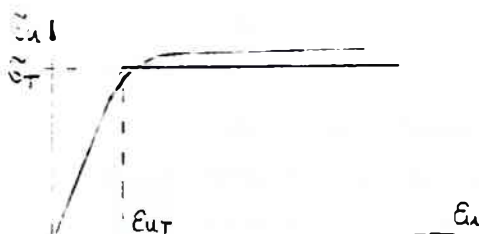
SL.1.28. DIJAGRAM DEFORMISANJA SA POUVRŠINOM TEČENJEM I LINEARNIM OČVRŠĆAVANJEM



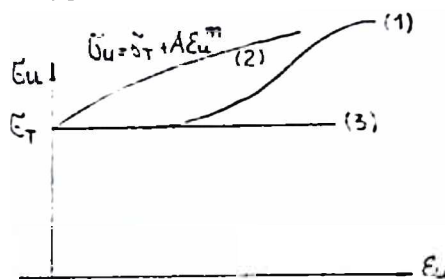
SL.1.29. DIJAGRAM DEFORMISANJA SA POUVRŠINOM TEČENJEM I STEPENIM OČVRŠĆAVANJEM



SL.1.2.10. DIJAGRAMI DEFORMISANJA SA LINEARNIM I STEPENIM OČVRŠĆAVANJEM



SL.1.2.11. DIJAGRAM DEFORMISANJA BEZ OČVRŠĆAVANJA



SL.1.2.12. DIJAGRAMI DEFORMISANJA: KRUTO-PLASTIČNO OČVRŠĆAVAJUĆEG TIJELA SA (1), BEZ (2) POUVRŠINNE TEČENJA I IDEALNO-KRUTO-PLASTIČNOG TIJELA (3).

1.2.4. Teorija tečenja plastičnog materijala po površima

Procesi deformisanja sa malom krivinom trajektorije deformacije

Znamo da su velike, razvijene, plastične deformacije osnovna karakteristika procesa obrade metala pritiskom, koji su od velikog značaja i interesa za savremenu tehnologiju i praksu. Za te procese je karakteristično da im trajektorija deformacije ima malu krivinu [36]. To znači, da matematički fundament tehnoloških procesa obrade metala pritiskom predstavljaju teorije priraštaja plastičnih deformacija (teorije plastičnog tečenja) sa malom krivinom trajektorije deformacije. U narednom tekstu će biti razjašnjen pojam "trajektorije deformacije male krivine" i biće izvedene osnovne jednačine naznačene teorije.

Neka je dat petomjerni Euklidov prostor deformacija (jer devijator deformacija ima pet nezavisnih komponenti) sa baznim vektorima \vec{e}_k ($k=1,2,\dots,5$) i sa koordinatama ϑ_k ($k=1,2,\dots,5$) [18], [36]

$$\vartheta_1 = \vartheta_{11}, \vartheta_2 = \frac{1}{3}(\vartheta_{22} - \vartheta_{33}), \vartheta_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\vartheta_{12}, \vartheta_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\vartheta_{23}, \vartheta_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}\vartheta_{31}, \dots \quad (1.2.39)$$

Na osnovu (1.2.39) vektor deformacije $\vec{\vartheta}$ je

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_k \vec{e}_k.$$

Koeficijenti u (1.2.39) su izabrani tako da je moduo vektora $\vec{\vartheta}$ jednak intenzitetu deformacije ε_u , tj.

$$|\vec{\vartheta}| = [\vartheta_k \cdot \vartheta_k]^{1/2} = \varepsilon_u.$$

Ako se prati proces deformisanja, izdvojene elementarne zapremine, počev od nedeformisanog stanja, kada je $\xi_{ij}=0$ (koordinatni početak), vidi se da vektor deformacije $\vec{\epsilon}$ mijenja svoj pravac i intenzitet, pri čemu njegov vrh u prostoru Σ_5 opisuje krivu koja se naziva trajektorijom deformacije. Dužina luka te krive

$$ds = (d\epsilon_k \cdot d\epsilon_k)^{1/2},$$

i četiri njene krivine $\chi_n = \chi_n(s)$, $n=1,2,3$ i 4 definišu njenu unutrašnju geometriju. Treba naglasiti da svaka tačka deformabilnog tijela ima svoju trajektoriju deformacije.

Na osnovu uvedenih geometrijskih objekata vrši se klasifikacija procesa deformacije tačke. Deformacija okoline tačke se naziva prostom ako je njena trajektorija prava (prolazi kroz koordinatni početak), tj. ako su $\chi_n(s)=0$, ($n=1,2,3,4$). U protivnom ona je složena.

Analogno predhodnom, može se definisati i petomjerni prostor napona (jer devijator napona ima pet nezavisnih komponenti). U njemu je vektor napona \vec{S} , sa koordinatama S_k ($k=1,2,\dots,5$), određen

$$\vec{S} = S_k \vec{e}_k,$$

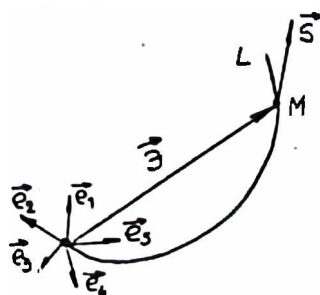
pri čemu su:

$$S_1 = \frac{3}{2} S_{11}; S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{22} - S_{33}); S_3 = \sqrt{3} \cdot S_{12}; S_4 = \sqrt{3} \cdot S_{23} \text{ i } S_5 = \sqrt{3} \cdot S_{31}$$

$$|\vec{S}| = (S_k \cdot S_k)^{1/2} = S_u$$

Vrh vektora \vec{S} , u prostoru Σ_5 , opisuje trajektoriju napona, koja u stvari predstavlja proces izmjene devijatorskog dijela ukupnog naponskog stanja u posmatranoj tački deformabilnog tijela. Trajektorija napona takodje može biti prosta i složena.

Pod procesom deformisanja [36] podrazumijeva se sveukupnost vektora $\vec{\epsilon}$ i \vec{S} formirana tako što se u svakoj tački trajektorije deformacije L (Sl.1.2.13) nanese odgovarajući vektor \vec{S} iz prostora napona, ali tako da bazni vektori prostora Σ_5 i Σ_5 budu paralelni.



Sl.1.2.13

U vezi sa predhodnim, jedan od osnovnih zadataka teorije plastičnosti je utvrđivanje veze između vektora $\vec{\epsilon}$ i \vec{S} . Te veze se mogu formulisati na bazi date geometrijske interpretacije i postulata i principa savremene teorije plastičnosti ([4], [18], [8], [36], [5]).

POSTULAT IZOTROPIJE: Za početno izotropan materijal, koji zadovoljava uslov Huber-Mizesa,

(1.1.84) slika procesa deformacije je invarijantna u odnosu na transformacije obrtanja i slikanja (refleksije) u prostoru \mathfrak{S}_5 . (Teorema izomorfizma tvrdi da postulat izotropije važi i za prostor Σ_5). Drugim riječima, kao što je pokazano u [5], to znači, da su veličina i orijentacija vektora \vec{S} u razmatranoj tački trajektorije deformacije određeni samo karakteristikama njene unutrašnje geometrije (dužina luka i krivine χ_n , $n = 1, 2, 3, 4$).

Pri matematičkom formulisanju postulata izotropije [5] treba imati u vidu relacije Frane-a kojima se izvod oblika $d^k \mathfrak{S} / dS^k$, počev od šestog pa na dalje, može izraziti preko linearne veze prvih izvoda. pri čemu koeficijenti tog linearnog razlaganja zavise samo od karakteristika unutrašnje geometrije.

Imajući u vidu predhodno rečeno, vektor \vec{S} se može prikazati u reperu sa jediničnim vektorima \vec{P}_k u obliku

$$\vec{S} = A_k \cdot \vec{P}_k,$$

gdje su:

$$\vec{P}_1 = \frac{d\mathfrak{S}}{dS} - \text{jedinični vektor u pravcu tangente}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dS^2} - \text{jedinični vektor glavne normale. itd.,}$$

⋮

odnosno u vidu petočlane relacije oblika

$$\vec{S} = \sum_{n=k}^{k+4} A_{nk} \cdot \frac{d^n \mathfrak{S}}{dS^n}; \quad A_{nk} = A_{nk}(dS, \chi_n(S)) \quad \dots (1.2.40)$$

Na taj način postulat izotropije određuje strukturu zakona plastičnosti pri proizvoljnom (složenom) opterećivanju.

PRINCIP ZAOSTAJANJA: Orijentacija vektora \vec{S} u odnosu na trajektoriju deformacije zavisi od unutrašnje geometrije trajektorije, ali ne od čitave već samo od jednog njenog dijela dužine ℓ_0 koji se nalazi neposredno ispred razmatrane tačke. Veličina ℓ_0 se naziva tragom zaostajanja i jedna je od karakteristika materijala ($\ell_0 \approx 10 \ell_T$). Na osnovu nje se definiše trajektorija male krivine. To je ona trajektorija za čiju svaku tačku važi da je radijus krivine $1/|\chi_n| > \ell_0$.

POSLEDICA PRINCIPA ZAOSTAJANJA [36]: Ako je od neke tačke A do neke tačke B ($\overline{AB} = \ell_0$) trajektorija deformisanja prava linija, tada za tačku B i sve sledeće tačke se vektor \vec{S} poklapa sa pravcem tangente trajektorije. To znači da svaka tačka trajektorije deformisanja male krivine ima osobinu da u njoj vektor \vec{S} ima pravac tangente, tj. da važi

$$\frac{\vec{S}}{\partial u} = \frac{d\vec{\Theta}}{ds} \quad \dots\dots (1.2.41)$$

Vidimo, da se predhodna relacija može dobiti iz (1.2.40) zanemarivanjem svih članova osim prvog.

Sva predhodna razmatranja su izvršena za slučaj malih deformacija. Medjutim, dijeljenjem i množenjem desne strane relacije (1.2.41) sa dt dobija se

$$\frac{\vec{S}}{\partial u} = \frac{d\vec{\Theta}}{ds} = \frac{\vec{V}}{U_u}, \quad \dots\dots (1.2.42)$$

gdje je $\vec{V} = \frac{d\vec{\Theta}}{dt}$ - vektor brzine deformacije, a $U_u = \frac{ds}{dt}$ - njegov intenzitet. To znači da se relacija (1.2.42) u Ojlerovom sistemu koordinata, odnosi na velike (razvijene) plastične deformacije, o čemu je ranije više govoreno.

Tenzorski zapis relacije (1.2.42) je potpuno isti kao relacija Sen Venan-Levi-Mizesa data relacijom (1.2.24), što znači da su procesi deformisanja sa trajektorijom male krivine, tj. procesi obrade metala pritiskom, matematički gledano opisani teorijom tečenja Sen Venan-Levi-Mizesa.

Analiza Prandtlovog problema

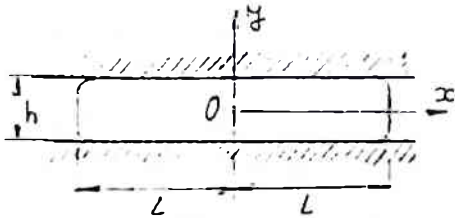
Iz skupa različitih procesa plastičnog tečenja materijala može se izdvojiti klasa procesa koja se karakteriše jednim opštim svojstvom: tečenje materijala se vrši u obliku relativno tankog sloja, koji se nalazi između radnih površi koje se kreću i time određuju karakter i geometriju tečenja. Interes ka izučavanju takvih procesa je u osnovi dvojak: prvo, u tehnologiji su veoma rasprostranjeni (presovanje, kovanje tankozidnih elemenata, valjanje tankih listova, izvlačenje itd.) i drugo, pri relativno opštim pretpostavkama pokazalo se mogućim formirati teoriju i predložiti efektivne metode za rješavanje problema.

Procesi plastičnog tečenja tankog sloja metala imaju niz karakteristika [36]. Relativno proste ocjene pokazuju da se kod njih pojavljuju veoma veliki pritisci p , reda veličine $\sigma_T L/h_0$, gdje je L - karakteristična dimenzija oblasti i h_0 - debljina sloja, odnosno $p \approx (1 \div 5) 10^4 \text{ kp/cm}^2$. Zahtjev za tačnosti proizvoda ima za posledicu da se pri konstruisanju radnih djelova mašine mora uzimati u obzir njihova deformacija. Ako se proces tečenja vrši na povišenim temperaturama neophodno je imati u vidu da se svojstva materijala mijenjaju i da između zagrijanog materijala i okoline dolazi do intenzivne razmjene toplote.

Osnovu za razvijanje teorije tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površinama predstavljao je klasični Prandtlov problem [37] o sabi-

janju trake krutim hrapavim površima. Potpunom rješenju problema doprinio je Nadai rješavajući kinematiku tečenja. Na osnovu rješenja Prandtl-Nadai-a, A.A. Iljušin je radovima [38],[39],[40] razvio teoriju tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površinama.

Prantlov problem Traka od idealno-plastičnog materijala sabija se pomoću dvije krute, hrapave ravne ploče, usled čega se plastično deformiše i teče. Rastojanje $h(t)$ između ploča je malo u odnosu na širinu trake $2L$ (Sl. 1.2.14).



Sl. 1.2.14.

Neka koordinatni početak (tačka 0) bude na mjestu gdje dolazi do grananja (rasticanja) plastično deformisanog materijala. Predmet razmatranja biće presjek koji je dovoljno udaljen od kraja trake i tačke 0, tj.

$$\frac{|x|}{h} \gg 1; \quad \frac{L-|x|}{h} \gg 1 \quad \dots (1.2.43)$$

Pošto se radi o ravnom stanju brzina deformacija, važi da je $\dot{U}_x = \dot{U}_x(x, y)$, $\dot{U}_y = \dot{U}_y(x, y)$ i $\dot{U}_z = 0$, pa je, na osnovu (1.1.57), $\dot{U}_{zz} = \dot{U}_{yz} = \dot{U}_{zx} = 0$. Iz (1.2.24) slijedi

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

odakle je $\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$, pri čemu su σ_x , σ_y i τ_{xy} funkcije samo od x i y .

Intenzitet napona, prema (1.1.18), i Hober-Mizesov uslov plastičnosti, prema (1.1.84) i (1.1.85), su

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{i} \quad \sigma_u = \sigma_T = \sqrt{3} \cdot \tau_T,$$

pa je

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = 4 \tau_T^2 \quad \dots (1.2.44)$$

Jednačine ravnoteže (1.1.3) su

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad \dots (1.2.45)$$

Pošto je osnovni granični uslov kinematičkog tipa, jer je zadata brzina približavanja ploča

$$\dot{U}_y = \dot{U}_0 = \pm \frac{dh}{dt} \quad \text{za} \quad y = \pm \frac{h(t)}{2},$$

Prantlov problem je statički neodređen. To znači da je u razmatranje neophodno još uključiti jednačinu nestišljivosti materijala

$$\frac{\partial \dot{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{U}_y}{\partial y} = 0, \quad \dots (1.2.46)$$

i relaciju koja se dobija iz (1.2.24)

$$\frac{\zeta'_x - \zeta'_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial \zeta'_x}{\partial x} - \frac{\partial \zeta'_y}{\partial y}}{\frac{\partial \zeta'_x}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'_y}{\partial x}} \quad \dots (1.2.47)$$

Neophodno je uzeti u obzir granični uslov na kontaktnim površima ($y = \pm h(t)/2$), kojim je određen zakon trenja na njima, kao i granični uslov na slobodnim površima $x = \pm L$.

L. Prandtl [37] je, pošao od relacija (1.2.44) i (1.2.45) i postavio sledeći postulat: "... treba očekivati da će pri plastičnom tečenju površ pritiska biti površ klizanja", i dalje piše: "To naponsko stanje koje se asimptotski ostvaruje na dovoljno velikom rastojanju od slobodnog kraja, prihvatljivo je za proračun", poslije čega nalazi rješenje sistema jednačina (1.2.44) i (1.2.45) koje ima svojstvo da $\zeta'_x - \zeta'_y$ i τ_{xy} zavise samo od koordinate y . Ta rješenja su:

$$\begin{aligned} \zeta'_x &= \tau_T \left(\frac{2x}{h} + 2 \sqrt{1 - \frac{4y^2}{h^2}} - \frac{2L}{h} \right), \\ \zeta'_y &= \tau_T \frac{2}{h} (x-L), \\ \tau_{xy} &= -\tau_T \frac{2y}{h}. \end{aligned} \quad \dots (1.2.48)$$

Nadai, razmatrajući ζ'_x i ζ'_y iz (1.2.46) i (1.2.47) kao pomicanja tačaka mase, daje za njih izraze koji odgovaraju rešenju Prandtla

$$\begin{aligned} \zeta_x &= -\zeta_0 \left(\frac{2x}{h} + 2 \sqrt{1 - \frac{4y^2}{h^2}} - C_1 \right), \\ \zeta_y &= \zeta_0 \cdot \frac{2y}{h}. \end{aligned} \quad \dots (1.2.49)$$

Na osnovu predhodnih relacija Nadai zaključuje da se tačke koje su prije deformisanja bile na vertikali, poslije deformisanja raspoređuju po elipsi i da deformacija smicanja za $y = \pm \frac{h}{2}$ postaje beskonačno velika.

Rješenje Prandtla (1.2.48) važi i za male i za konačne deformacije dok, prividno, rješenje Nadai-a važi samo za slučaj malih deformacija. Ipak, to ograničenje otpada ako se ζ'_x i ζ'_y shvate kao brzine tečenja, a x i y ne kao Lagranzeove već kao Ojlerove koordinate.

Prelazeći, na osnovu (1.2.49), na Lagranzeove koordinate tj. stavljajući da je $\zeta'_x = dx/dt$ i $\zeta'_y = dy/dt$ i integraleći jednačine (1.2.49)

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} + C_2(h) \quad \text{ i } \quad \frac{dy}{dh} = \frac{y}{h}.$$

dobija se da se tačke, koje su prije početka tečenja bile na duži $x_0 = \text{const.}$, sada nalaze na elipsi

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\xi = (x)_y - (x)_{y=h/2}; \quad a = \frac{h_0^2 - h^2}{h}; \quad b = \frac{h}{2}).$$

Medjutim, treba reći da je za fiksirano h , tj. u odredjenom trenutku vremena, deformisani oblik svih duži iz oblasti definisanosti (1.2.43) isti.

Najvažnije posledice koje slijede iz rešenja Prandtlovog problema su: prisustvo proklizavanja plastično deformisane mase po površima kontakta ($y = \pm \frac{h}{2}$) i konstantnost tangentnih napona. Postavka problema sa zahtjevima potpunog pripajanja materijala za ploču i neprekidnosti brzina ($\bar{U}_x = 0$ za $y = \pm h/2$) nema smisla, jer je protivurječna jednačinama (1.2.44 - 47). Ako ploče nebi bile hrapave, proklizavanje bi se dešavalo u samom materijalu ("hladno zavari- vanje").

Iz svega što je predhodno rečeno za Prandtlov problem, mogu se for- mulisati sledeće posledice [38].

1. Komponente devijatora napona su, u odnosu na srednji hidrosta- tički napon, male veličine (kao h prema $2L$).

2. Srednji hidrostatički napon je sa istom tačnošću konstantan po y -osi.

3. Kontaktni napon trenja je jednak granici tečenja pri smicanju, a brzina proklizavanja je različita od nule.

4. Srednja vrijednost po debljini, polurazlike normalnih napona bliska je vrijednosti granice tečenja pri smicanju, tj.

$$\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)_{SR} = \frac{\pi}{4} \tau_T.$$

5. Brzina tečenja plastične mase \bar{U}_x praktično ne zavisi od y , u oblasti definisanosti (1.2.43), jer je razlika $\bar{U}_{x/y=0} - (\bar{U}_x)_{SR}$ veličina reda $\frac{h}{4L}$.

6. Brzine deformacija i intenzitet brzine deformacije ne zavise od koordinate x , tj.

$$\bar{U}_{xx} = -\bar{U}_{yy} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \quad \bar{U}_{xy} = \frac{8}{h} \cdot \frac{y/h}{\sqrt{1-4y^2/h^2}}; \quad \bar{U}_u = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4z^2/h^2}}.$$

Njihove srednje vrijednosti po debljini sloja su

$$(\bar{U}_{xx})_{SR} = -(\bar{U}_{yy})_{SR} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \quad (\bar{U}_{xy})_{SR} = 0; \quad (\bar{U}_u)_{SR} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Važe i sledeće relacije

$$\frac{(\bar{U}_{xx})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(\bar{U}_{xx})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}}; \quad \frac{(\bar{U}_{yy})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(\bar{U}_{yy})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}}; \quad \frac{(\bar{U}_{xy})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(\bar{U}_{xy})_{SR}}{(\bar{U}_u)_{SR}} = 0.$$

Osnovne hipoteze i jednačine

Neka je u prostoru zadana tzv. osnovna površ. pomoću krivolinijskih koordinata α i β , koje se poklapaju sa glavnim krivinama površi. Jednačina osnovne površi u vektorskom, parametarskom, obliku je

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) \quad \dots\dots (1.2.50)$$

Sa $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $R_1(\alpha, \beta)$ i $R_2(\alpha, \beta)$ ćemo označiti, respektivno, koeficijente prve kvadratne forme i glavne poluprečnike krivine površi (1.2.50). Ove veličine se mogu odrediti, ako je poznata (zadana) površ. Ako u svakoj tački površi, po njenoj normalni, postavimo duži $h_0(\alpha, \beta)$, onda je njima u potpunosti određena druga površ. Te dvije površi se nazivaju i radnim površima jer se poklapaju sa površima alata mašine za presovanje. Plastično deformisanje materijala, koji se nalazi između radnih površi, ostvaruje se prinudnom promjenom debljine sloja (približavanjem radnih površi).

Proučavajući Prandtlov problem, A.A. Iljušin je [38] postavio niz hipoteza, kinematičkog karaktera i hipoteze za kontaktni napon trenja, na osnovu kojih je i razvio teoriju tečenja plastičnog materijala po površima. Te hipoteze omogućavaju da se izvrši osrednjavanje po debljini sloja svih veličina koje karakterišu tečenje, i glase:

1. Projekcije brzina čestica plastičnog materijala (koje se nalaze na zajedničkoj normalni površi (1.2.50) na tangentnu ravan te površi se malo razlikuju između sebe i mogu biti zamijenjene srednjom brzinom po debljini sloja.

2. Brzine deformacije čestica, koje se nalaze na zajedničkoj normalni površi (1.2.50), u pravcu normale, malo se razlikuju između sebe i jednake su srednjoj brzini deformacije sloja. Srednja vrijednost, po debljini sloja, odnosa brzina deformacije i intenziteta deformacije, jednaka je odnosu srednjih vrijednosti brzine deformacije i intenziteta deformacije, s tačnošću do množitelja koji je blizak jedinici.

3. Oblast kontakta se, pri suvom trenju, može razbiti na tri zone: zonu klizanja (u blizini granice) u kojoj je napon trenja određen Kulonovim zakonom $\tau = \mu \cdot p$ (μ - koeficijent trenja, p - pritisak), zonu kočenja u kojoj je napon trenja jednak granici tečenja pri smicanju τ_T (Prandtlov zakon) i zona zastoja u kojoj se napon trenja mijenja linearno od vrijednosti τ_T do nule. Dimenzije prve i treće zone su reda veličine debljine sloja. Smjer napona trenja (τ) je suprotan od smjera relativne brzine kretanja materijala.

4. Ako je prisutno podmazivanje onda je napon trenja poznata, eksperimentalnim putem dobivena, funkcija od normalnog kontaktnog pritiska, relativne brzine i koeficijenta trenja.

5. Ako nema normalnog pritiska na površi kontakta onda nema ni tangentskog napona trenja (ili je zanemarljivo mali).

na ni

U daljem tekstu se daju, bez posebnog izvodjenja, relacije teorije tečenja plastičnog materijala po površima [36], [38] i [39] u sistemu koordinata (α, β, z) .

a) Relacije koje povezuju brzine deformacija i brzine čestica plastično deformisanog materijala

tica pl

$$U_{\alpha\alpha} = \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{U_{\beta}}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$U_{\beta\beta} = \frac{\partial U_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{U_{\alpha}}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \dots (1.2.51)$$

$$U_{\alpha\beta} = \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial \alpha} - \frac{U_{\alpha}}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{U_{\beta}}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$

$$U_{zz} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + U_{\beta} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) = \frac{d(hnh)}{dt}. \quad \dots (1.2.52)$$

b) Uslov nestišljivosti plastično deformisanog materijala

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + U_{zz} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{U_{\alpha} B}{AB} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{h B}{AB} \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{h U_{\alpha}}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \dots (1.2.53) \right.$$

$$\left. + \frac{U_{\beta} A}{AB} \frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{h A}{AB} \frac{\partial U_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{h U_{\beta}}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\vec{U}) \right] = 0$$

c) Veze izmedju komponenata tenzora napona i komponenata tenzora brzine deformacije

$$\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} \cdot U_{\alpha\alpha},$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} \cdot U_{\beta\beta},$$

$$\sigma_{zz} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} \cdot U_{zz},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} U_{\alpha\beta},$$

..... (1.2.54)

pri čemu treba imati u vidu da se često koriste oznake: $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\beta}$ i $\sigma_{zz} = \sigma_z$, i da je $U_{\alpha\alpha} \neq U_{\alpha}$, $U_{\beta\beta} \neq U_{\beta}$ i $U_{zz} \neq U_z$.

Kod očvršćavajućih materijala, dokazuje se ([5], [40]) da, σ_u zavisi ne samo od U_u nego i od tzv. stepena deformacije λ (kasnije će biti definisan) tj.

$$\sigma_u = \Phi(U_u, \lambda), \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial U_u} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial \lambda} \geq 0. \quad \dots (1.2.55)$$

U slučajevima kada se proces plastičnog tečenja vrši sa intenzivnom razmjenom toplote izmedju materijala i okoline, onda σ_u zavisi još i od temperature T , tj.

$$\zeta_u = \Phi(\varepsilon_u, \lambda, T): \frac{\partial \zeta_u}{\partial T} \leq 0.$$

U tim slučajevima treba uzeti u obzir termičke jednačine i efekat očvršćavanja [40].

d) Step en deformacije (λ) je veličina koja je analogna veličini ε_u kod malih elasto-plastičnih deformacija (jer je $\frac{d\varepsilon_u}{dt} \approx \dot{\varepsilon}_u$)

$$\frac{d\lambda}{dt} \approx \dot{\varepsilon}_u = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \dot{\varepsilon}_\alpha \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} + \dot{\varepsilon}_\beta \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \quad \dots (1.2.56)$$

Imajući u vidu da je $(\dot{\varepsilon}_u)_{SR} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$, iz predhodne relacije se dobija

$$\lambda = \int_{h_0}^h (\dot{\varepsilon}_u)_{SR} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h_0}{h} \approx \ln \frac{h_0}{h} \quad \dots (1.2.57)$$

e) Neka su p_1 i p_2 normalni pritisci radnih površi na plastični materijal. Pošto su vrijednosti napona, prema (1.2.54), približno konstantne po debljini materijala, za ζ_z možemo uzeti da je

$$\zeta_z = - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \quad \dots (1.2.58)$$

f) Jednačine kretanja plastičnog materijala [38]

$$\begin{aligned} h g_d &= \frac{\partial (\zeta_d \cdot h)}{A \partial d} + \frac{\partial (\zeta_{d\beta} \cdot h)}{B \partial \beta} + h \cdot \frac{\zeta_d - \zeta_\beta}{B} \frac{\partial B}{A \partial d} + 2h \frac{\zeta_{d\beta}}{A} \frac{\partial A}{B \partial \beta} + \\ &+ p_1 \frac{\partial h}{A \partial d} - T_1 \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_d - \dot{\varepsilon}_{1d}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1|} - T_2 \frac{\dot{\varepsilon}_d - \dot{\varepsilon}_{2d}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2|}, \\ h g_\beta &= \frac{\partial (\zeta_\beta \cdot h)}{B \partial \beta} + \frac{\partial (\zeta_{d\beta} \cdot h)}{A \partial d} + h \cdot \frac{\zeta_\beta - \zeta_d}{A} \frac{\partial A}{B \partial \beta} + 2h \cdot \frac{\zeta_{d\beta}}{B} \frac{\partial B}{A \partial d} + \dots (1.2.59) \\ &+ p_2 \frac{\partial h}{B \partial \beta} - T_1 \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_\beta - \dot{\varepsilon}_{1\beta}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1|} - T_2 \frac{\dot{\varepsilon}_\beta - \dot{\varepsilon}_{2\beta}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2|}, \\ g_{h_z} &= \frac{\zeta_d \cdot h}{R_d} + \frac{\zeta_\beta \cdot h}{R_\beta} + T_2 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_d - \dot{\varepsilon}_{2d}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2|} \frac{\partial h}{A \partial d} + \frac{\dot{\varepsilon}_\beta - \dot{\varepsilon}_{2\beta}}{|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2|} \frac{\partial h}{B \partial \beta} \right) + p_2 - p_1, \end{aligned}$$

gdje su: g_d , g_β i g_z - projekcije ukupnog ubrzanja

$$\begin{aligned} g_d &= \frac{\partial \dot{\varepsilon}_d}{\partial t} + \frac{\dot{\varepsilon}_d \cdot \dot{\varepsilon}_\beta}{A B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\dot{\varepsilon}_\beta^2}{A B} \cdot \frac{\partial B}{\partial d}, \\ g_\beta &= \frac{\partial \dot{\varepsilon}_\beta}{\partial t} + \frac{\dot{\varepsilon}_d \dot{\varepsilon}_\beta}{A B} \cdot \frac{\partial B}{\partial d} - \frac{\dot{\varepsilon}_d^2}{A B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \dots (1.2.60) \\ g_z &= \frac{\dot{\varepsilon}_d^2}{R_d} + \frac{\dot{\varepsilon}_\beta^2}{R_\beta}. \end{aligned}$$

ρ - gustina materijala

$\vec{U}_i (U_{i\alpha}, U_{i\beta})$ $i=\alpha, \beta$ - poznate brzine kretanja radnih površi
u odnosu na materijal

$\vec{U} (U_\alpha, U_\beta)$ - brzina kretanja čestice materijala

$\vec{U} - \vec{U}_i$ - relativne brzine kretanja materijala u odnosu na površi

T_1 i T_2 - tangentski kontaktni naponi trenja, smjera suprotnog
od smjera relativnih brzina

Saglasno hipotezama 3., 4. i 5. a prema [38] važi

$$T_1 = \tau_T \cdot f\left(\frac{p_1}{\tau_T}, |\vec{U} - \vec{U}_1|, \mu_1\right); T_2 = \tau_T \cdot f\left(\frac{p_2}{\tau_T}, |\vec{U} - \vec{U}_2|, \mu_2\right). \quad (1.2.61)$$

gdje su: μ_1 i μ_2 - koeficijenti trenja,

f - poznata funkcija.

Na primjer u oblasti Kulonovog trenja su $(T_1, T_2) < \tau_T$ i važi

$$T_1 = \mu_1 \cdot p_1; \quad T_2 = \mu_2 \cdot p_2. \quad (1.2.62)$$

U oblasti Prandtlovog trenja klizanja je

$$T_1 = T_2 = \tau_T. \quad (1.2.63)$$

g) Promjena debljine sloja

$$h(d, \beta, t) = h_1(d, \beta, t) + w(d, \beta, t), \quad (1.2.64)$$

$$w = w_1 + w_2 = \check{K}_1 \cdot p_1 + \check{K}_2 \cdot p_2,$$

gdje su: w_1 i w_2 - normalna pomjeranja graničnih tačaka radne površi usled
deformacije radnih površi

\check{K}_1 i \check{K}_2 - odgovarajući Grinovi operatori [36]

$h=h_1$ - debljina sloja materijala za slučaj apsolutno krutih
radnih površi.

Tri osnovna problema upostavci A.A. Iljušina

A.A. Iljušin je u radu [38] formulisao tri osnovna problema tečenja
tankog sloja plastičnog materijala po površinama:

Prvi osnovni problem: geometrija i kretanje obije, pritiskujuće,
površni su poznati. To znači da su poznate i sledeće veličine: $A(d, \beta)$,
 $B(d, \beta)$, $R_\alpha(d, \beta)$, $R_\beta(d, \beta)$ i $\vec{U}_i(d, \beta, t)$ $i=1, 2$. Takodje su poznata i plastična
svojstva materijala tj. $\tau_T(U_\alpha, \lambda, T)$ i funkcije $T_i(p_i, |\vec{U} - \vec{U}_i|)$ koje definišu
zakon trenja na kontaktnim površinama.

Treba odrediti 11 funkcija: $U_\alpha, U_\beta, \zeta_\alpha, \zeta_\beta, \zeta_{\alpha\beta}, \zeta_z, \zeta = -p, p_1,$
 p_2, h i λ koje zadovoljavaju tri jednačine kretanja (1.2.59), četiri jednačine

stanja (1.2.54) kao i (1.2.53), (1.2.56), (1.2.58) i (1.2.63). Ovom zatvorenom sistemu jednačina treba dodati i granične uslove.

DRUGI OSNOVNI PROBLEM: Geometrija i kretanje jedne pritiskujuće površi su poznati, dok druge pritiskujuće površi nema, pa je $p_2 = T_2 = 0$.

TREĆI OSNOVNI PROBLEM: Pritiskujućih površi nema ($p_1 = p_2 = T_1 = T_2 = 0$). Treba odrediti dinamičke, kinematičke i geometrijske elemente plastičnog materijala koji teče u prostoru, na račun sila koje djeluju po njegovoj konturi $\Gamma(d, \beta, t) = 0$.

Mogućnosti urpošćavanja jednačina prvog osnovnog problema

Očigledna matematička složenost jednačina kojima je određen prvi osnovni problem isključuje mogućnost njihovog potpunog analitičkog istraživanja. Međutim, koristeći neke dopunske pretpostavke koje su prihvatljive za veliki broj u praksi važnih tehnoloških procesa, pokazuje se, da je moguće bitno uprostiti jednačine i predložiti efektivne metode za njihovo rješavanje.

Predpostaviće se da je tečenje materijala kvazistatično, tj. da se inercije sile mogu zanemariti. Ova pretpostavka je opravdana, kao što je pokazano u [36], kada karakteristične brzine čestica materijala ne prelaze vrijednost od 10 m/sec., što je kod mnogih praktičnih procesa i zadovoljeno.

Neka h_0 i L_0 predstavljaju karakteristične vrijednosti debljine sloja i dimenzije oblasti tečenja. Pošto je $T_1 \approx T_2 = \tilde{\tau}_T$ i $R_\alpha \approx R_\beta \approx L_0$, iz (1.2.59) je

$$p_1 - p_2 \approx (\tilde{\sigma}_\alpha + \tilde{\sigma}_\beta) \cdot \frac{h_0}{L_0} + 2 \tilde{\tau}_T \cdot \frac{h_0}{L_0}.$$

Uz pretpostavku da je $(h_0/L_0) \ll 1$ iz Prandtlovog rješenja slijedi da su $\tilde{\sigma}_\alpha$, $\tilde{\sigma}_\beta$, p_1 i p_2 veličine istog reda, što znači da sa tačnošću do veličina reda (h_0/L_0) , u odnosu na jedinicu, važi

$$p_1 = p_2 = p = -\tilde{\sigma}_z. \quad \dots (1.2.65)$$

Sa istom tačnošću se devijatorski djelovi napona mogu zanemariti u poredjenju sa srednjim pritiskom, pa su naponi $\tilde{\sigma}_\alpha$ i $\tilde{\sigma}_\beta$ međusobno jednaki, Tangentni napon $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ se u odnosu na njih može zanemariti, pa je

$$\tilde{\sigma}_u = \tilde{\sigma}_\alpha - \tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_\alpha + p = \tilde{\sigma}_\beta + p = \tilde{\sigma}_T. \quad \dots (1.2.66)$$

Svojstva (1.2.65) i (1.2.66), zajedno posmatrana, nazivaju se uslovima potpune plastičnosti.

Predpostavljajući dalje da je debljina sloja slabo promjenljiva u oblasti tečenja, tj. da važi

$$\left| \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial \beta} \right| \ll 1,$$

sistem jednačina prvog osnovnog problema svodi se na četiri diferencijalne jednačine, u kojima su nepoznate sledeće veličine: p , \vec{U}_α , \vec{U}_β i h . Taj sistem diferencijalnih jednačina ima oblik

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{A \partial \alpha} &= \frac{T_\alpha}{h} - g g_\alpha ; \\ \frac{\partial p}{B \partial \beta} &= \frac{T_\beta}{h} - g g_\beta ; \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dt} + \operatorname{div} \vec{U} &= 0 ; \\ h &= h_1 + (\check{K}_1 + \check{K}_2) p ,\end{aligned} \quad \dots (1.2.67)$$

gdje su

$$\begin{aligned}T_\alpha &= -(T_1 \frac{\vec{U}_\alpha - \vec{U}_{1\alpha}}{|\vec{U} - \vec{U}_1|} + T_2 \frac{\vec{U}_\alpha - \vec{U}_{2\alpha}}{|\vec{U} - \vec{U}_2|}) ; \\ T_\beta &= -(T_1 \frac{\vec{U}_\beta - \vec{U}_{1\beta}}{|\vec{U} - \vec{U}_1|} + T_2 \frac{\vec{U}_\beta - \vec{U}_{2\beta}}{|\vec{U} - \vec{U}_2|}) .\end{aligned}$$

Ako su brzine kretanja radnih površi, u odnosu na osnovnu površinu, iste ($\vec{U}_1 = \vec{U}_2$) i ako je uslov površinskog trenja na radnim površinama takodje isti [$T_1 = T_2 = \tilde{T}(p)$], uz pretpostavku da se inercijalne sile mogu zanemariti ($g_\alpha = g_\beta = 0$), prve dvije jednačine iz (1.2.67) dobijaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{A \partial \alpha} &= - \frac{2 \tilde{T}(p)}{h} \cdot \frac{\vec{U}_\alpha - \vec{U}_{1\alpha}}{|\vec{U} - \vec{U}_1|} ; \\ \frac{\partial p}{B \partial \beta} &= - \frac{2 \tilde{T}(p)}{h} \cdot \frac{\vec{U}_\beta - \vec{U}_{1\beta}}{|\vec{U} - \vec{U}_1|} .\end{aligned} \quad \dots (1.2.68)$$

Sistem jednačina (1.2.67) se dalje uprošćava za slučaj kada se zanemaruju deformacije radnih površi alata i kada nema njihovog kretanja u odnosu na materijal ($\vec{U}_1 = 0$).

U slučaju kada se sve predhodno uvedene pretpostavke mogu smatrati opravdanim, prvi osnovni problem teorije tečenja plastičnog materijala po površinama se može formulisati na sledeći način: U oblasti $S_t(\alpha, \beta, t)$ na površi (1.2.50) odrediti polje pritisaka $p(\alpha, \beta, t)$ i polja brzina $\vec{U}_\alpha = \vec{U}_\alpha(\alpha, \beta, t)$ i $\vec{U}_\beta = \vec{U}_\beta(\alpha, \beta, t)$, kao i oblik same oblasti, tako da je sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda (1.2.69) i (1.2.70), pri graničnim uslovima (1.2.71), zadovoljen, tj.

$$\operatorname{grad} p = \frac{2 \tilde{T}(p)}{h} \cdot \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} , \quad \dots (1.2.69)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial (h B \vec{U}_\alpha)}{A \partial \alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial (h A \vec{U}_\beta)}{B \partial \beta} = 0 , \quad \dots (1.2.70)$$

$$p(\alpha, \beta, t)|_{\Gamma} = k \cdot \zeta_T, \quad k=1,2 . \quad \dots (1.2.71)$$

Funkcija $h(\alpha, \beta, t)$ i početna oblast $S_0(\alpha, \beta, t)$ su poznati. Granični uslov (1.2.71) se dobija iz (1.2.66). Vrijednost koeficijenta k je sledeća:

$k=1$ - za slučaj slobodnog rasticanja ($\tilde{\sigma}_u = \tilde{\sigma}_p = 0 \Rightarrow p = \tilde{\sigma}_T$);

$k=2$ - za slučaj slobodnog uticanja u žljeb ($\tilde{\sigma}_u = \tilde{\sigma}_p = \tilde{\sigma}_T \Rightarrow p = 2 \tilde{\sigma}_T$).

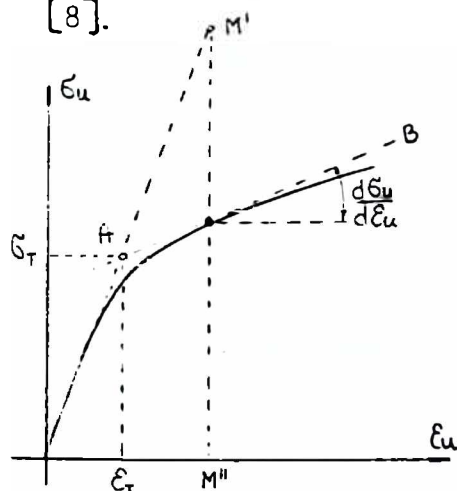
2.2. EFEKTIVNE METODE U TEORIJAMA PLASTIČNOSTI

1.2.1. Metod "elastičnih rešenja" u teoriji malih elasto-plastičnih deformacija

Prikazivanje zavisnosti $\tilde{\sigma}_u \sim \tilde{\epsilon}_u$ preko parametra ω .

Kao što je ranije rečeno, dijagram zavisnosti intenziteta napona ($\tilde{\sigma}_u$) od intenziteta deformacije ($\tilde{\epsilon}_u$) koji se naziva dijagramom deformisanja materijala, poklapa se sa dijagramom istezanja i ne zavisi od tipa naponskog stanja.

Funkcionalna zavisnost $\tilde{\sigma}_u = \Phi(\tilde{\epsilon}_u)$ se, u slučaju kada postoji znatno očvršćavanje (tada opterećivanje tijela može biti prosto) i kada važi teorija malih elasto-plastičnih deformacija, može prikazati na sledeći način (Sl.1.2.15) [8].



Sl.1.2.15

$$\tilde{\sigma}_u = 3G\tilde{\epsilon}_u[1 - \omega(\tilde{\epsilon}_u)]. \quad \dots (1.2.72)$$

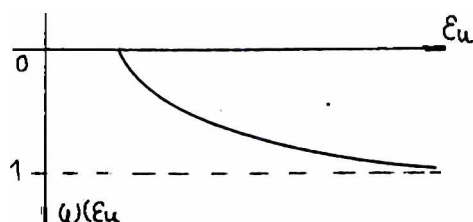
odakle je

$$\omega(\tilde{\epsilon}_u) = 1 - \frac{\tilde{\sigma}_u}{3G\tilde{\epsilon}_u}. \quad \dots (1.2.73)$$

Za krivu $\tilde{\sigma}_u = \Phi(\tilde{\epsilon}_u)$ se predpostavlja da zadovoljava nejednakost

$$3G \gg \frac{\tilde{\sigma}_u}{\tilde{\epsilon}_u} \gg \frac{d\tilde{\sigma}_u}{d\tilde{\epsilon}_u} > 0. \quad \dots (1.2.74)$$

Veličina $\omega(\tilde{\epsilon}_u)$ je odnos duži MM' i $M'M''$ i jednaka je nuli kada je deformacija elastična. Ona zadovoljava i nejednakost koja sledi iz (1.2.74) i (Sl. 1.2.16).



Sl.1.2.16.

$$1 \gg \omega + \tilde{\epsilon}_u \frac{d\omega}{d\tilde{\epsilon}_u} \gg \omega \gg 0, \frac{d\omega}{d\tilde{\epsilon}_u} > 0. \quad \dots (1.2.75)$$

Naznačena svojstva funkcija ω i $\tilde{\sigma}_u$ odgovaraju eksperimentalnim podacima i veoma su važna u teoriji malih elasto-plastičnih deformacija.

Ako se sa $\tilde{\sigma}_T$ i $\tilde{\epsilon}_T$ označe koordinate tačke A (Sl.1.2.15), onda za funkciju

$\omega(\tilde{\epsilon}_u)$ važi

$$\omega = 0 \text{ za } \tilde{\epsilon}_u \leq \tilde{\epsilon}_T,$$

$$\omega = \omega(\tilde{\epsilon}_u) \text{ za } \tilde{\epsilon}_u > \tilde{\epsilon}_T.$$

$$\dots (1.2.76)$$

Rješavanje problema teorije malih elasto-plastičnih deformacija u pomjeranjima

Kao što znamo iz teorije elastičnosti, osnovne jednačine teorije elastičnosti se mogu svesti na tri sintetizirujuće jednačine (Lameove jednačine) u kojima kao nepoznate veličine figurišu pomjeranja u_x , u_y i u_z ili u_i ($i=1,2,3$). Formalno gledajući i u teoriji malih elasto-plastičnih deformacija se mogu dobiti analogne jednačine [41].

Ako se u jednačinama, koje povezuju napone i deformacije u oblasti elastičnosti, (1.1.69) moduo smicanja G zamijeni modulom smicanja G' , definisanim na sledeći način

$$G' = G(1-\omega) = \frac{1}{3} \frac{\bar{\epsilon}_u}{\epsilon_u}, \quad \dots (1.2.77)$$

gdje je veličina ω određena sa (1.2.73), onda se iz njih, u formalno istom obliku, dobijaju jednačine koje povezuju napone i deformacije za slučaj malih elasto-plastičnih deformacija (1.2.35).

$$\bar{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\sigma} = 2 G' (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon), \quad \dots (1.2.78)$$

odnosno

$$\bar{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \bar{\sigma} = 2G(\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon) - 2G\omega(\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon), \quad \dots (1.2.79)$$

ili imajući u vidu (1.1.69), je

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\bar{\sigma}}_{ij} - 2G\omega(\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon), \quad \dots (1.2.80)$$

gdje su sa $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ označeni tzv. [41] fiktivni elastični naponi. To su oni naponi koji bi bili stvarni kada bi tijelo bilo elastično ($\omega=0$).

Ako se naponi $\bar{\sigma}_{ij}$ iz (1.2.80) postave u jednačine ravnoteže (1.1.3) dobija se

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 2G \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_j} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon) \right] \dots (1.2.81)$$

Označavajući sa R_i izraz na desnoj strani predhodne relacije

$$R_i = 2G \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon)] \quad i=1,2,3, \quad \dots (1.2.82)$$

važi

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + X_i - R_i = 0. \quad \dots (1.2.83)$$

Ako se u relacijama (1.2.81), odnosno (1.2.83), naponi $\bar{\sigma}_{ij}$ izraze preko deformacija, prema (1.1.69), a deformacije preko pomjeranja, prema (1.1.8), dobija se

$$(\lambda+G) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + G \nabla^2 u_i = G \cdot R_i \quad (i=1,2,3), \quad \dots (1.2.84)$$

gdje su: λ - Lameova konstanta. $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ (1.2.85)

∇^2 - Laplasov operator $\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\dots)$ (1.2.86)

Veličine R_i iz (1.2.82) se, pomoću (1.1.8), takodje mogu izraziti preko pomjeranja

$$R_i = 2G \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \theta \right] \right\}. \quad \text{..... (1.2.87)}$$

Lako se uočava da u slučaju elastičnog tijela relacije (1.2.83) predstavljaju poznate Lameove jednačine, jer su tada $\omega=0$ i $R_i=0$.

Analogno predhodnom postupku, i granični uslovi (1.1.2) se mogu izraziti preko pomjeranja. Uvrštavajući napone (1.2.80) u (1.1.2) dobija se

$$X_{vi} = \bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j - 2G \omega (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon) \cdot n_j, \quad (i=1,2,3) \quad \text{..... (1.2.88)}$$

Označavajući $\bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j$ sa X_{vi} , i

$$R_{vi} = -2\omega (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon) n_j \quad (i=1,2,3), \quad \text{..... (1.2.89)}$$

relacija (1.2.88) ima oblik

$$X_{vi} = \bar{X}_{vi} + G R_{vi}, \quad \text{..... (1.2.90)}$$

gdje su sa \bar{X}_{vi} označene tzv. [41] fiktivne površinske sile, a to su one sile koje bi bile stvarne kada bi tijelo bilo elastično tj. ($\omega=0$).

Metod "elastičnih rješenja"

Za rješavanje problema iz oblasti malih elasto-plastičnih deformacija A.A. Iljušin [8] koristi metod, koji je nazvao metodom elastičnih rješenja i koji se sastoji u sledećem:

U prvom približenju, stavljajući da je $\omega=0$ (odnosno $R_i=R_{vi}=0$), rješava se problem teorije elastičnosti u pomjeranjima. Na osnovu relacije (1.2.83), za zadate zapreminske sile, i relacije (1.2.88), kojom su određeni granični uslovi, mogu se naći pomjeranja u_i u prvom približenju $u_i^{(1)}$. Kada su poznata pomjeranja mogu se, na osnovu (1.1.8) i (1.2.80), naći i deformacije i naponi takodje u prvom približenju $\epsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$. Na osnovu poznatih $\epsilon_{ij}^{(1)}$ može se, koristeći (1.1.46), naći vrijednost intenziteta deformacija u posmatranoj tački, u prvom približenju $\epsilon_u^{(1)}$. Ukoliko je u razmatranoj tački tijela $\epsilon_u^{(1)} > \epsilon_T$ (Sl.1.2.15) onda se, na osnovu dijagrama (Sl. 1.2.16), odnosno na osnovu relacije (1.2.73), može naći vrijednost koeficijenta ω u nultom približenju $\omega^{(0)}$.

Za tako nadjeno $\omega^{(0)}$ se, na osnovu (1.2.82) i (1.2.89), mogu naći veličine R_i i R_{vi} u njihovom prvom približenju tj. $R_i^{(1)}$ i $R_{vi}^{(1)}$. Smatrajući,

u relaciji (1.2.83). veličinu $X_i - R_i$ kao neku novu poznatu zapreminsku silu $X_i^{(1)}$ tj. $X_i^{(1)} = X_i - R_i^{(1)}$, a veličinu $\bar{X}_{vi} + G R_{vi}^{(1)}$ kao neki novi granični uslov $X_{vi}^{(1)}$. problem se svodi na ponovno rješavanje problema teorije elastičnosti. ali ovoga puta sa "tačnijim" zapreminskim silama $X_i^{(1)}$ i graničnim uslovima $X_{vi}^{(1)}$. Rješavajući ponovo problem teorije elastičnosti dobijaju se pomjeranja u drugom približenju $u_i^{(2)}$ ($i=1,2,3$), kao i deformacije $\epsilon_{ij}^{(2)}$, naponi $\sigma_{ij}^{(2)}$ i intenzitet deformacija $\epsilon_u^{(2)}$. Znajući $\epsilon_u^{(2)}$ u razmatranoj tački, na osnovu dijagrama sa Sl. 1.2.16. može se naći vrijednost koeficijenta ω u prvom približenju $\omega^{(1)}$.

Ponavljajući predhodni postupak, mogu se naći vrijednosti pomjeranja, deformacija i napona u trećem, četvrtom, i td. približenju. Postupak se završava u trenutku kada razlika između dobivenih vrijednosti u dva uzastopna izračunavanja bude manja od željene ili uslovljene tačnosti.

Metod "elastičnih rješenja" pokazuje veoma brzu konvergenciju. Kod niza riješenih problema ([42], [43]) pokazalo se da su za dobijanje zadovoljavajuće tačnosti dovoljna tri, a u nekim slučajevima i dva približenja.

1.2.2. Metod pješćane analogije i metod karakteristika u teoriji tečenja plastičnog materijala po površinama

a) Metod pješćane analogije

Za rješavanje klase problema, za koje je $h=h(t)$ A.A. Iljušin je predložio metod analogije sa pješćanim nasipom ([5], [38]). Neka se, kao što je ranije bilo rečeno, kontaktno trenje u čitavoj oblasti tečenja može predstaviti u obliku funkcije $\tau(p)$, za oblasti Kulona i Prandtla respektivno je

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \mu \cdot p & \text{za} & \quad p \leq \frac{\tau_T}{\mu}, \\ \tau(p) &= \tau_T & \text{za} & \quad p \geq \tau_T. \end{aligned} \quad \text{..... (1.2.91)}$$

Iz (1.2.68) lako se dobija jedna jednačina za određivanje polja pritiska

$$\left(\frac{\partial p}{A \partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{B \partial \beta}\right)^2 = \frac{4 \tau^2(p)}{h^2}. \quad \text{..... (1.2.92)}$$

Uvodeći u razmatranje novu veličinu, tzv. uopšteni pritisak $\mathcal{P}(p)$, relacijom

$$\mathcal{P} = \int \frac{dp}{2\tau(p)}, \quad \text{..... (1.2.93)}$$

relacija (1.2.92) ima izgled

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{A \partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{B \partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{h^2}. \quad \text{..... (1.2.94)}$$

Na osnovu (1.2.91) i (1.2.93). promjene uopštenog pritiska u zonama Kulona i Prandtla su

$$P = \frac{1}{2\mu} \cdot \ln \frac{p}{\zeta_T} \quad \text{za} \quad \frac{\zeta_T}{\mu} \gg p \gg \zeta_T \left(\frac{1}{2\mu} \ln \frac{\zeta_T}{\zeta_T} \right) p \gg 0). \quad \dots (1.2.95)$$

$$P = \frac{1}{2\mu} \left(\ln \frac{1}{2\mu} + 1 \right) + \frac{p}{\zeta_T} \quad \text{za} \quad p \gg \frac{\zeta_T}{\mu} \left(\beta \frac{1}{2\mu} \ln \frac{\zeta_T}{\zeta_T} \right). \quad \dots (1.2.96)$$

Oblast tečenja, na osnovnoj površi, ima određenu granicu kojoj mogu da pripadaju i mjesta na kojima dolazi do nagle promjene debljine sloja (kanali ili nagla uzvišenja na radnim površinama). Ako se sa Γ označi granica te oblasti. onda se na njoj mogu pojaviti sledeći granični uslovi:

1°. Nepremostiva prepreka. Ako se sa \vec{n} označi vektor normale na konturu. koji leži u tangentnoj ravni u odnosu na osnovnu površ, onda je $(\vec{u} - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} = 0$, odnosno. na osnovu (1.2.68) i (1.2.69). zamjenjujući p sa P prema (1.2.93) je

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad \dots (1.2.97)$$

2°. Slobodna granica. Na njoj je $\zeta_d = \zeta_p = 0$. pa je. na osnovu (1.2.66), $p = \zeta_T$, odnosno. imajući u vidu (1.2.93). je

$$P|_{\Gamma} = 0. \quad \dots (1.2.98)$$

3°. Na granici postoji žljeb ili otvor u koji materijal može da utiče. Ako je širina žljeba, ili najmanja dimenzija otvora. reda veličine (ili manja) debljine sloja h . tada će približan uslov slobodnog uticanja biti jednakost $\zeta_d = \zeta_p = \zeta_T$. Iz (1.2.66) je $p = 2\zeta_T$. odnosno na osnovu (1.2.93) je

$$P|_{\Gamma} = \int_{\zeta_T}^{2\zeta_T} \frac{dp}{2\zeta(p)} = \text{const}. \quad \dots (1.2.99)$$

4°. Ako se u predhodnom slučaju uticanje u žljeb ili otvor javlja otežanim. onda je

$$P|_{\Gamma} = P_{(s)}. \quad \dots (1.2.100)$$

Jednačina (1.2.94), sa graničnim uslovima (1.2.97 - 1.2.100), je, kako je uočio A.A. Iljušin, potpuno analogna jednačini kojom se određuje visina (z) pješčanog nasipa dobivenog nasipanjem pijeska koeficijenta trenja f , na oblast koja se poklapa sa oblasti S koju zauzima materijal. Visina nasipa u tački (α, β) oblasti S se određuje iz jednačine

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2 = f^2.$$

Ako se za visinu oboda konture uzme

$$z(d, \beta) \Big|_r = f \cdot h \cdot \mathcal{P}(d, \beta)_r . \quad \dots (1.2.101)$$

onda se odredjivanjem funkcije $z(d, \beta)$ u oblasti S_r automatski odredjuje i uopšteni pritisak $\mathcal{P}(d, \beta)$, jer je

$$\mathcal{P}(d, \beta) = \frac{1}{fh} \cdot z(d, \beta) . \quad \dots (1.2.102)$$

Dakle, iz poznatog oblika pješčanog nasipa, može se, mjerenjem koordinate $z(d, \beta)$ i koristeći relaciju (1.2.102), naći uopšteni pritisak \mathcal{P} , a zatim i stvarni pritisak p . Pored toga, na modelu osnovne površi mogu se prikazati linije jednakog pritiska $\mathcal{P} = \text{const.}$ (tj. $z = \text{const.}$). Za tim se, mogu konstruisati linije koje su normalne na linije konstantnog pritiska. Iz (1.2.69) je jasno da te linije predstavljaju linije po kojima se čestice materijala kreću. (Strujne linije ili linije toka).

Na osnovu tako dobivenog skupa linija toka nije teško odrediti raspored brzina tečenja. Linije konstantnog pritiska $r = r(d, \beta) = \text{const.}$ i linije toka $\psi = \psi(d, \beta) = \text{const.}$, prikazane su na Sl. 1.2.17. Njihove elementarne dužine su

$$ds_r = B_r dr \text{ i } ds_\psi = B_\psi d\psi .$$

Jednačina nestišljivosti materijala (1.2.70) ima oblik

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B_r B_\psi} \frac{\partial}{\partial r} (B_r h U) = 0 ,$$

pa je

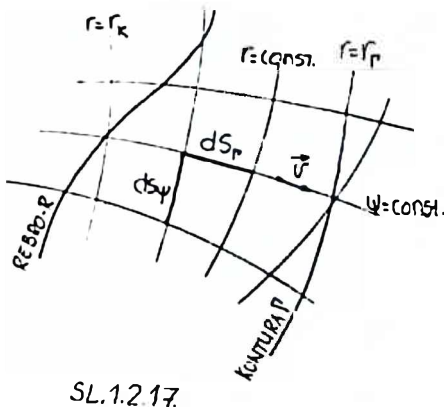
$$U = -\frac{1}{B_r h} \int B_r B_\psi \frac{\partial h}{\partial t} dr + C . \quad \dots (1.2.103)$$

Najveći pritisak, u oblasti tečenja, se pojavljuje na linijama koje odgovaraju rebrima pješčanog nasipa, a koje se dobijaju projekciranjem rebara na

na osnovnu površ. Te linije $r = r_k$ (Sl. 1.2.17) se karakterišu time da tačke na njima imaju brzinu jednaku nuli tj. $U = 0$, za $r = r_k$. Ova konstatacija slijedi neposredno iz (1.2.67). Prema tome, konstanta C iz (1.2.103) se odredjuje iz uslova da je $U = 0$ za $r = r_k$, pa je brzina proizvoljne tačke sa linije toka $\psi = \text{const.}$ u potpunosti odredjen relacijom

$$U = -\frac{1}{B_r h} \cdot \int_{r_k}^r B_r B_\psi \frac{\partial h}{\partial t} dr . \quad \dots (1.2.104)$$

Stavljajući da je $r = r_r$, možemo odrediti brzine tačaka koje pripadaju konturi ($U = U_r$). Na taj način se metodom pješčane analogije odredjuje i polje brzina tečenja.



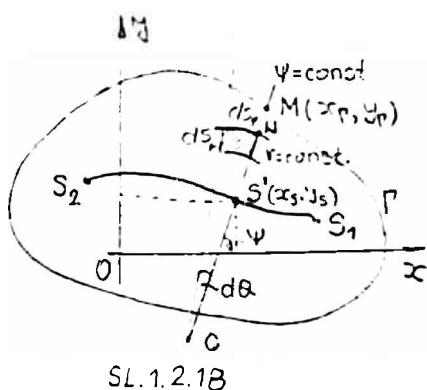
Slučaj ravnih radnih površi

U slučaju kada su radne površi ravne ili slabo iskrivljene i kada se rastojanje između njih smanjuje samo tokom vremena, a ne i sa promjenom koordinata, tj. kada je $h=h(t)$, mogu se, umjesto krivolinijskih koordinata, koristiti Dekartove koordinate. Tada je

$$A=B=1, \quad \alpha=x, \quad \beta=y, \quad ds_\alpha=dx, \quad ds_\beta=dy.$$

i relacije (1.2.68), za slučaj kada je $\vec{U}_i=0$, imaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tilde{T}}{h} \cdot \frac{U_x}{|\vec{U}|} = -\frac{2\tilde{T}(p)}{h} \cos \Psi, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tilde{T}}{h} \cdot \frac{U_y}{|\vec{U}|} = -\frac{2\tilde{T}(p)}{h} \sin \Psi, \end{aligned} \quad (1.2.105)$$



pri čemu je $U_x = U \cos \Psi$ i $U_y = U \sin \Psi$. Iz (1.2.105) se lako pokazuje da su linije toka $\Psi = \text{const.}$ prave linije. Takva jedna linija prikazana je na Sl. 1.2.18. Ona presijeca rbro rasticanja $S_1 S_2$ u tački $S'(x_s, y_s)$, a konturu u tački $M(x_r, y_r)$. Označavajući

$$\overline{MC} = r_r; \quad \overline{NC} = r; \quad \overline{SC} = r_o,$$

je

$$\begin{aligned} x &= x_s + (r - r_o) \cos \Psi, & \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \Psi; & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \Psi. \end{aligned} \quad (1.2.106)$$

Pošto je

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} \cos \Psi + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \Psi,$$

iz (1.2.105) se dobija

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tilde{T}(p)}{h},$$

pa je

$$p = p_r + \frac{2\tilde{T}(p)}{h} \cdot (r_r - r), \quad (1.2.107)$$

gdje je p_r - vrijednost pritiska na konturi. Iz predhodne relacije se vidi da je najveća vrijednost pritiska u tački S' tj. na rebro rastojanja $r = r_s$.

Pošto su linije toka $\Psi = \text{const.}$ prave normalne na linije konstantnog pritiska, to slijedi da su normalne i na konturu Γ ukoliko je pritisak po konturi konstantan.

Brzina čestice se određuje iz (1.2.104). Važi

$$ds_r = dr = B_r dr, \quad ds_\Psi = r d\Psi = B_\Psi d\Psi,$$

gdje je

$$B_r = 1; \quad B_\psi = r.$$

pa se, iz (1.2.103), dobija

$$\psi = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(r - \frac{r_k^2}{r} \right). \quad \dots (1.2.103)$$

Za tačke sa konture ($r = r_p$) je

$$\psi_p = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(r_p - \frac{r_k^2}{r_p} \right). \quad \dots (1.2.109)$$

b) Metod karakteristika

Za odredjivanje polja pritiska $p(x,y)$ u fiksiranoj oblasti $S(x,y)$ tankog sloja plastičnog materijala, kod koga je $h=h(x,t)$ i koji se plastično deformiše, u radu [45] je predložen metod karakteristika.

V.A.Kadimov je [44] dalje razvio ovaj efektivni metod. Primijenio ga je na opšti slučaj, kada je $h=h(\alpha, \beta, t)$, i uspio da pored polja pritiska riješi i kinematiku tečenja kao i da odredi oblik oblasti pri slobodnom tečenju materijala. Suština metoda sastoji se u svodjenju nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina (1.2.69) i (1.2.70) na ekvivalentni karakteristični sistem od četiri obične diferencijalne jednačine i dvije kvadrature.

Iz vektorske jednačine (1.2.69) dobija se sledeća parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda za odredjivanje $P(\alpha, \beta)^*$

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) = \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2 = 0, \quad \dots (1.2.110)$$

gdje su

$$\Omega(\alpha, \beta) = \frac{2\tilde{L}_T}{h(\alpha, \beta)}, \quad p = \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial P}{\partial \beta}. \quad \dots (1.2.111)$$

karakteristični sistem jednačina, jednačine (1.4.38), ima oblik

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{A^2} \frac{p}{\Omega}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{B^2} \frac{q}{\Omega}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\alpha + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\alpha + \Omega_\alpha, \quad \frac{dq}{ds} = \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\beta + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\beta + \Omega_\beta \end{aligned} \quad \dots (1.2.112)$$

Problem odredjen sa (1.2.112) i graničnim uslovima na konturi oblasti S_t je Košijev problem. Granični uslovi imaju oblik

$$\alpha(s_0) = \alpha_0, \quad \beta(s_0) = \beta_0, \quad P(s_0) = P_0, \quad p(s_0) = p_0, \quad q(s_0) = q_0.$$

gdje je $s_0 = s_0(\lambda)$, λ semijenja od tačke do tačke konture.

* Umjesto $p(\alpha, \beta, t)$ uvedena je oznaka $P(\alpha, \beta, t)$ sa ciljem nemiješanja oznaka. Parametar t , kao nezavisan parametar ćemo često ispuštati.

Slučaj ravnih radnih površi

Jednačine (1.2.69) i (1.2.70) za $\alpha = x$, $\beta = y$, $A=B=1$ opisuju plastično tečenje ravnih slojeva. Kao što se vidi iz (1.2.110), (1.2.111) i (1.2.112), polazni problem se svodi na rješavanje sistema od pet običnih diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{dx}{ds} = \frac{p}{\Omega}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{q}{\Omega}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \quad \frac{dp}{ds} = \Omega x, \quad \frac{dq}{ds} = \Omega y, \quad \dots (1.2.113)$$

sa graničnim uslovima na konturi oblasti S_t

$$x(s_0)=x_0, \quad y(s_0)=y_0, \quad P(s_0)=P_0, \quad p(s_0)=p_0, \quad q(s_0)=q_0, \dots (1.2.114)$$

kao i na integraljenje jednačine (1.2.70), za odredjivanje kinematike tečenja duž karakterističnih linija $x(s); y(s)$. Lako je pokazati da je (s) dužinaluka, tj. $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Sa ciljem uprošćavanja sistema (1.2.113) uvešće se funkcija $\alpha(s)$ odnosom $(dy/ds) = \sin \alpha$. Tada je

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad p = \Omega \cos \alpha, \quad q = \Omega \sin \alpha, \quad \dots (1.2.115)$$

Diferenciranjem izraza za p i q dobija se

$$\frac{dp}{ds} = \frac{d}{ds} (\Omega(x(s), y(s)) \cos \alpha(s)) = (\Omega x \cos \alpha + \Omega y \sin \alpha) \cos \alpha - \Omega \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds},$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{d}{ds} (\Omega(x(s), y(s)) \sin \alpha(s)) = (\Omega x \cos \alpha + \Omega y \sin \alpha) \sin \alpha + \Omega \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds}.$$

Postavljanjem ovih relacija u poslednja dva člana relacije (1.2.113) dobija se

$$(\Omega x \cos \alpha + \Omega y \sin \alpha) \cos \alpha - \Omega \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \Omega x,$$

$$(\Omega x \cos \alpha + \Omega y \sin \alpha) \sin \alpha + \Omega \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \Omega y.$$

Iz poslednje dvije jednačine lako se dobija jedna diferencijalna jednačina za odredjivanje $\alpha(s)$

$$\Omega \frac{d\alpha}{ds} = -\Omega x \sin \alpha + \Omega y \cos \alpha.$$

Na taj način, sistemu jednačina (1.2.113) ekvivalentan je sledeći sistem od četiri obične diferencijalne jednačine za odredjivanje funkcija $x(s)$, $y(s)$, $P(s)$ i $\alpha(s)$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\Omega} (-\Omega x \sin \alpha + \Omega y \cos \alpha) \quad (1.2.116)$$

Za rješavanje takvih sistema postoje, u literaturi, kako tačne tako i približne metode. Rešenje sistema (1.2.116) sa graničnim uslovima

$$x(s_0)=x_0, \quad y(s_0)=y_0, \quad P(s_0), \quad \alpha(s_0)=\arctg(q_0/p_0).$$

zadatim u tačkama konture oblasti S_t određuje u prostoru (x, y, P) površ.

Odredjivanje kinematičkih karakteristika tečenja vrši se na sledeći način. Iz dvije očigledne relacije

$$\text{grad } P = -\Omega \frac{\vec{U}}{U} \quad \text{i} \quad \text{grad } P = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} = \Omega (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}).$$

je

$$\vec{U} = -U (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}), \quad \dots (1.2.117)$$

pa jednačina nestišljivosti materijala (1.2.70) ima oblik

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \alpha + W \psi + \omega = 0, \quad \dots (1.2.118)$$

gdje su

$$W(x, y) = h \cdot U, \quad \omega(x, y) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \psi(x, y) = \frac{\partial \cos \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \sin \alpha}{\partial y}.$$

Jednačina (1.2.118) duž karakteristika (karakterističnih linija) ima oblik

$$\frac{dW}{ds} = -W\psi - \omega. \quad \dots (1.2.119)$$

Pri rješavanju Košijevog problema (1.2.116) određuju se veličine $x(s)$, $y(s)$, $P(s)$, $p(s)$ i $q(s)$, što omogućava da se funkcija ψ smatra poznatom funkcijom od s duž karakteristika, pa je jednačina (1.2.119) može integraliti po nosačima tih karakteristika

$$W(s) = A(s_0) \cdot I_1(s) - I_2(s), \quad \dots (1.2.120)$$

gdje su:

$$I_1(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s \psi(s') ds'\right), \quad I_2(s) = \int_{s_0}^s \omega(s'') \exp\left(-\int_{s_0}^{s'} \psi(s') ds'\right) ds'',$$

pri čemu je vrijednost konstante $A(s_0)$ još neodređena.

$$A(s_0) = W(s_0) = h(s_0) \cdot U(s_0).$$

Konstanta $A(s_0)$ se određuje tako što se istovremeno sa rješavanjem sistema (1.2.116) vrši sračunavanje integrala $I_1(s)$ i $I_2(s)$. Kada bude poznat položaj rebara rasticanja (na njima je brzina tečenja jednaka nuli) konstanta $A(s_0)$ se određuje iz uslova $W = h \cdot U(s_R) = 0$, pa je

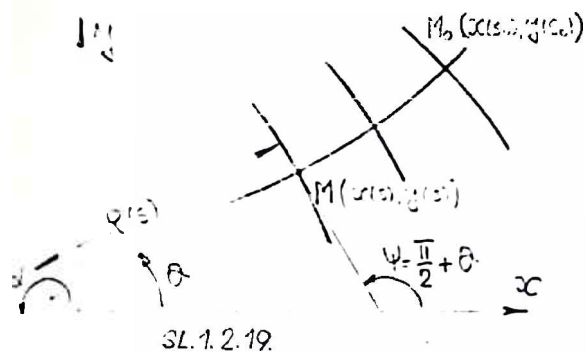
$$A(s_0) = I_2(s_R) / I_1(s_R) \quad \dots (1.2.121)$$

Odredjivanje funkcije ψ po karakteristikama (1.2.110) samo preko podataka koji se odnose na karakteristiku. vrši se transformacijom funkcije ψ

$$\psi = -\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right),$$

pri čemu se dobija

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{R(s)}, \quad \dots (1.2.122)$$



gdje je $R(s)$ - poluprečnik krivine linija konstantnog pritiska. Ove linije prolaze kroz zadanu tačku $x(s)$, $y(s)$ oblasti plastičnog tečenja (Sl. 1.2.19). Zaista, na osnovu definicije krivine ravne krive važi

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{dy}{d\eta} = \frac{\partial\theta}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial\theta}{\partial y} \sin\varphi = -\frac{\partial\theta}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial\theta}{\partial y} \cos\theta,$$

gdje je $d\eta$ element luka linije konstantnog pritiska u tački $x(s)$, $y(s)$. Na taj način, saglasno (1.2.122), važi

$$\Psi(s) = -1/R(s). \quad \dots (1.2.123)$$

Oдавде. specijalno za $h(x,y)=\text{const}$, kada su linije toka prave linije, dobija se izraz za Ψ ([38], [44])

$$\Psi(s) = 1/(R-S+S_0),$$

gdje je R - poluprečnik krivine početne linije konstantnog pritiska (kontura oblasti tečenja) u tački $x(s_0)$, $y(s_0)$.

Odredjivanje oblasti $S_t = S_t(x,y,t)$, kada je zadana početna oblast $S_0 = S_0(x,y,t_0)$, vrši se na osnovu polja brzina koje je, imajući u vidu (1.2.117), (1.2.120), (1.2.121), u oblasti $S_t(x,y,t)$ odredjeno relacijom

$$\vec{U} = U \cdot \vec{U}_0, \quad U(s) = \frac{1}{h(s) \cdot I_1(s_R)} \begin{vmatrix} I_1(s) & I_1(s_R) \\ I_2(s) & I_2(s_R) \end{vmatrix}, \quad \dots (1.2.124)$$

a samim tim i na konturi (za $S=S_0$).

Na taj način se problem svodi na odredjivanje konture oblasti S_t na osnovu početne konture Γ_0 i poznatih brzina koje imaju pravac normale na konturu.

Prema tome, potpuni sistem jednačina koji opisuje plastično tečenje materijala po ravnim površima pod dejstvom apsolutno krutih radnih površi svodi se, metodom karakteristika, na sistem od četiri obične diferencijalne jednačine i dvije kvadrature. To omogućava da se pomoću efektivnih numeričkih metoda odrede polja pritiska i brzina tečenja, rebra rasticanja i oblik oblasti na kojoj se nalazi materijal u toku tečenja.

Slučaj proizvoljnih radnih površi

Sistem jednačina (1.2.112):

$$\frac{Ad}{ds} = \frac{p/A}{\Omega}, \quad \frac{Bd}{ds} = \frac{q/B}{\Omega}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega.$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{(p/A)^2}{\Omega} \cdot \frac{\partial \ln A}{\partial \alpha} + \frac{(q/B)^2}{\Omega} \cdot \frac{\partial \ln B}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \quad \dots (1.2.125)$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{(p/A)^2}{\Omega} \cdot \frac{\partial \ln A}{\partial \beta} + \frac{(q/B)^2}{\Omega} \cdot \frac{\partial \ln B}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}.$$

se razlikuje od jednačina (1.2.113) prisutnošću članova sa slabo promjenljivim parcijalnim izvodima logaritama metričkih funkcija A i B po krivolinijskim koordinatama α i β .

Iz dvije prve jednačine sistema (1.2.112) i jednačine (1.2.110) sledi da je $A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 = ds^2$, tj. s je dužina luka karakteristike, pa se može uvesti nova funkcija $\chi = \chi(s)$

$$\frac{Ad}{ds} = \cos \chi, \quad \frac{Bd}{ds} = \sin \chi.$$

Saglasno (1.2.115) je

$$\frac{p}{A} = \Omega \cos \chi, \quad \frac{q}{B} = \Omega \sin \chi, \quad \dots (1.2.126)$$

odnosno

$$\frac{d(p/A)}{ds} = \frac{d}{ds} (\Omega(\alpha, \beta) \cos \chi) = (\Omega_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \Omega_\beta \frac{d\beta}{ds}) \cos \chi - \Omega \sin \chi \frac{d\chi}{ds}$$

$$\frac{d(q/B)}{ds} = \frac{d}{ds} (\Omega(\alpha, \beta) \sin \chi) = (\Omega_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \Omega_\beta \frac{d\beta}{ds}) \sin \chi + \Omega \cos \chi \frac{d\chi}{ds}.$$

S druge strane, imajući u vidu (1.2.125) je

$$\frac{d(p/A)}{ds} = \frac{1}{A} \frac{dp}{ds} - \frac{p}{A^2} \frac{dA}{ds} = \frac{1}{A} \frac{dp}{ds} - \frac{p}{A^2} (A_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + A_\beta \frac{d\beta}{ds}) = \left(\frac{q^2}{\Omega A B^3} B_\alpha - \frac{pq}{\Omega A^2 B^2} A_\beta \right) + \frac{1}{A} \Omega_\alpha,$$

$$\frac{d(q/B)}{ds} = \frac{1}{B} \frac{dq}{ds} - \frac{q}{B^2} \frac{dB}{ds} = \frac{1}{B} \frac{dq}{ds} - \frac{q}{B^2} (B_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + B_\beta \frac{d\beta}{ds}) = \left(\frac{p^2}{\Omega A^3 B} A_\alpha - \frac{pq}{\Omega A^2 B^2} A_\beta \right) + \frac{1}{B} \Omega_\beta.$$

Prema tome, moguće je dvije poslednje jednačine iz (1.2.125) svesti na jednu jednačinu sa promjenljivom χ (umjesto p i q)

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \chi + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \chi \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos \chi - B_\alpha \sin \chi).$$

Na taj način je pokazano da je sistemu (1.2.125) ekvivalentan sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\cos \chi}{A}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\sin \chi}{B}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \chi + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \chi \right) + \\ &+ \frac{1}{AB} (A_\beta \cos \chi - B_\alpha \sin \chi), \quad \dots (1.2.127) \end{aligned}$$

Rješenje predhodnog sistema jednačina sa Košijevim graničnim uslovima na konturi oblasti S_t je mnogolisna površ $P=P(\alpha, \beta)$, od koje, saglasno principu jedinstvenosti pritiska, se fizički realizuju samo oni djelovi koji se nalaze izmedju konture oblasti i rebra rasticanja.

Polje brzina i oblik oblasti u proizvoljnom trenutku vremena se određuje postupkom koji je analogan postupku sprovedenom za slučaj ravnih površi. Na osnovu (1.2.126) i (1.2.69) je

$$\vec{U}_0 = \frac{\vec{U}}{U} = -\frac{\text{grad } P}{S_L} = -\frac{1}{S_L} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial \beta} \vec{j} \right) = -\cos \gamma \vec{i} - \sin \gamma \vec{j}. \quad (1.2.128)$$

Pošto je $U_\alpha = -U \cos \gamma$ i $U_\beta = -U \sin \gamma$, jednačina (1.2.70) dobija oblik

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} \cos \gamma + \frac{\partial W}{\partial \beta} \sin \gamma + W \Psi + \omega = 0,$$

gdje je $W(\alpha, \beta) = h \cdot U$; $\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (B \cos \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A \sin \gamma)}{\partial \beta} \right]$; $\omega = -\frac{\partial h}{\partial t}$,

dok je $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ funkcija koja je poznata na karakteristikama sistema (1.2.127). Duž karakteristika problema (1.2.110) jednačina nestišljivosti ima oblik

$$\frac{dW}{ds} = -W \Psi - \omega. \quad \dots (1.2.129)$$

Za funkciju Ψ važi

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{AB} \left[-B \sin \gamma \frac{d\gamma}{ds} + A \cos \gamma \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cos \gamma + \frac{\partial A}{\partial \beta} \sin \gamma \right] = \\ &= -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \sin \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cos \gamma + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cos \gamma + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \sin \gamma = -\frac{1}{R(s)} + \\ &+ \frac{1}{R_\beta} \cos \gamma + \frac{1}{R_\alpha} \sin \gamma, \end{aligned} \quad \dots (1.2.130)$$

gdje su: $R_\alpha = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^{-1}$, $R_\beta = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^{-1}$ - poluprečnici krivina linija α i β na osnovnoj površi

$$\frac{1}{R(s)} = \chi(s) = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \sin \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cos \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} - \text{krivina linije konstantnog pritiska u posmatranoj tački } \alpha(s), \beta(s).$$

$d\eta$ - element dužine luka linije konstantnog pritiska u tački $\alpha(s), \beta(s)$.

Znajući Ψ po karakteristikama jednačine (1.2.127), može se naći rešenje jednačine (1.2.129)

$$W(s) = h(s) \cdot U(s) = W(s_0) \cdot I_1(s) - I_2(s), \quad \dots (1.2.131)$$

gdje je
$$I_1(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s \Psi(s') ds'\right), \quad I_2(s) = \int_{s_0}^s \omega(s') \exp\left(-\int_{s_0}^{s'} \Psi(s'') ds''\right) ds'$$

Veličina $W(s_0)$ nalazi se iz uslova, da je brzina tečenja na rebru jednaka nuli

$$W(s_0) = I_2(s_R) / I_1(s_R). \quad \dots (1.2.132)$$

Saglasno (1.2.128), (1.2.131) i (1.2.132) polje brzina u čitavoj oblasti $S_t(\alpha, \beta, t)$ je određeno relacijama

$$\vec{U} = U \vec{U}_0, \quad U(s) = \frac{1}{h(s) I_1(s_R)} \begin{vmatrix} I_1(s) & I_1(s_R) \\ I_2(s) & I_2(s_R) \end{vmatrix} \quad \dots (1.2.133)$$

Specijalno, brzine na samoj konturi dobijaju se za $s=s_0$. Određjivanje konture Γ_t oblasti S_t , ako je poznat njen oblik Γ_0 u početnom trenutku, i brzine tačaka konture, koje su normalne na konturu, je jednostavno.

Specijalno, ako se tečenje plastičnog materijala vrši po cilindru ($A=R_0$, $B=1$, $\alpha=\varphi$, $\beta=z$) karakteristični sistem jednačina (1.2.127) ima oblik

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\chi}{R_0}, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\chi, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega\varphi}{R_0} \sin\chi + \Omega z \cos\chi \right).$$

Ako se tečenje plastičnog materijala vrši po sferi ($A=R_0$, $B=R_0 \sin\theta$, $\alpha=\theta$, $\beta=\varphi$) jednačine (1.2.127) imaju oblik

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\chi}{R_0}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin\chi}{R_0 \sin\theta}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega\theta}{R_0} \sin\chi + \frac{\Omega\varphi}{R_0 \sin\theta} \cos\chi \right).$$

2.3. OSNOVI TEORIJE VISKO-ELASTIČNOSTI

2.3.1. Reološke osobine materijala

Predmet dosadašnjeg razmatranja bila su tijela koja imaju elastično-plastična svojstva. Kod takvih tijela, konačna vrijednost deformacije zavisi od oblika puta deformisanja, u petomjernom ili šestomjernom prostoru deformacije, tj. mijenja se sa promjenom puta deformisanja. Međutim, za put deformisanja materijala je karakteristično da nema vremenski karakter. To znači da tijelo na dato opterećenje reaguje trenutno, bez zakašnjevanja. Specijalno, to znači da vrijednost napona ne zavisi od toga koliko dugo vremena se deformacija drži konstantnom i, obrnuto, deformacija je ista nezavisno od vremena koliko dugo se napon zadržava istim.

Ponašanje svih realnih materijala se više ili manje razlikuje od ponašanja elastično-plastičnih tijela, a razlika je u tome što veza između

napona i deformacija nije nezavisna od vremena već se tokom vremena mijenja. Takvi materijali se nazivaju visko-elastičnim. Dvije najjednostavnije reološke (vremenske) pojave kod visko-elastičnih materijala su puženje (mijenjanje deformacije pri konstantnom naponu) i relaksacija (mijenjanje napona pri konstantnoj deformaciji). Kod velikog broja metala se ove reološke pojave ne mogu primijetiti na normalnim (sobnim) i nižim temperaturama, pa se u takvim uslovima njihovo ponašanje može, sa dovoljnom tačnošću, opisati modelom elastično-plastičnog tijela. Medjutim, pri visokim temperaturama pojave puženja i relaksacije su veoma primjetne. Tako na primjer, kod nisko-ugljeničnih čelika reološke pojave se pokazuju bitnim na temperaturama višim od 400° , jer se tada zavisnost izmedju napona i deformacija znatno mijenja sa promjenom brzine deformisanja (opterećivanja) tako da kriva $\sigma \sim \epsilon$ nema smisla ukoliko se ne ukaže na uslove u kojima se obavlja eksperiment. Važno je znati da se puženje metala na visokim temperaturama pojavljuje čak i pri malim naponima. Ta činjenica predstavlja i bitnu razliku izmedju pojava puženja i hladne plastičnosti (nastaje kada naponi dostignu odredjenu vrijednost). Reološke pojave se kod drugih materijala (plastične mase, beton, minerali, legure, kompozitni materijal, cement itd.) uočavaju i na normalnim temperaturama.

Dijagrami promjene deformacije sa vremenom, pri konstantnom naponu i temperaturi, za razne materijale imaju, pokazuje se, kvalitativno isti oblik, mada su fizički mehanizmi razvijanja deformacija potpuno različiti. Isto važi i za reološku pojavu relaksacije.

Puženje

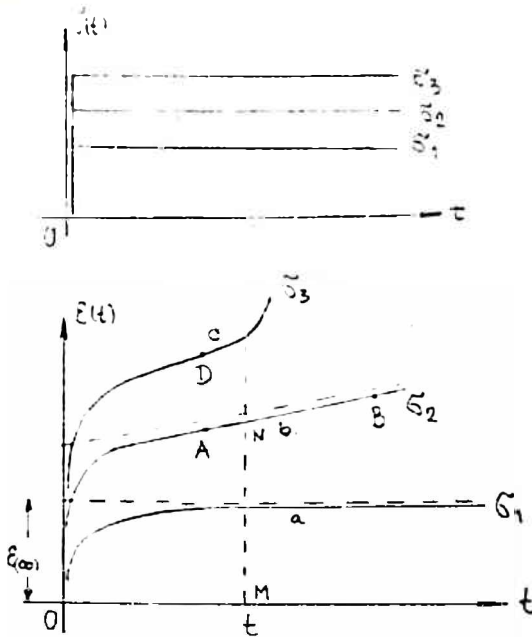
Proces izmjene deformacije tijela sa vremenom, pri konstantnom naponu, kao što je rečeno, naziva se puženjem. Obično se proces puženja proučava pomoću tzv. stepenastog opterećenja tj. pomoću funkcije $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot h(t)$, gdje je $\sigma_0 = \text{const.}$ neki konstantni napon, a $h(t)$ - Hevisajdova funkcija.

U početnom trenutku vremena, stepenasto opterećenje izaziva u tijelu elastične ili (kada je σ_0 dovoljno veliko) elastično-plastične deformacije. Zatim se, u tijelu, tokom vremena, razvijaju deformacije puženja. Pri tome, kriva $\epsilon(t)$ prelazi sa elastičnog, odnosno elasto-plastičnog, dijela na viskoelastični dio neprekidno, bez lomljenja kao što je to prikazano na Sl. 1.2.20. Prema tome, važi

$$\text{za } t = 0; \frac{d\epsilon}{dt} = \infty.$$

U početnom periodu vremena, kao što se vidi na Sl. 1.2.20, brzina puženja opada a kasnije može: da bude jednaka nuli, da ima konstantnu vrijednost, ili pak da poslije opadanja počne ponovo da raste. Uprvom slučaju puženje

se naziva ograničenim (kriva a). a u drugom ustaljenim (kriva b). U trećem slučaju (kriva c). kada je konstantni napon dovoljno velik. dio AB usta-

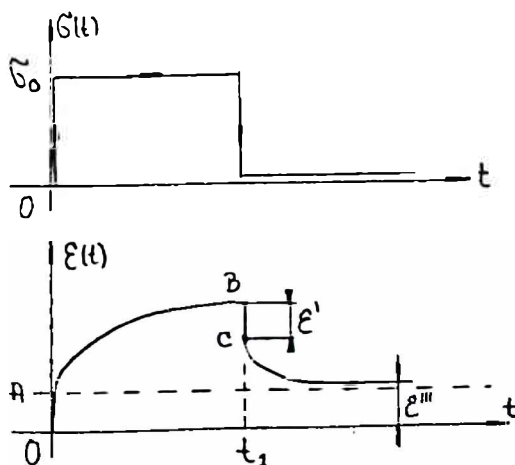


Sl. 1.2.20

$$\epsilon(t) = \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon'''$$

..... (1.2.134)

Naznačene komponente se mogu odrediti iz eksperimenta na puženje pri stepenastom opterećenju. a zatim rasterećenju (Sl. 1.2.21). Tehničke poteškoće su



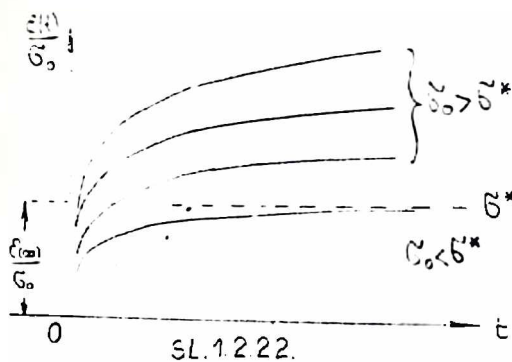
Sl. 1.2.21.

ljenog puženja se može smanjiti i preći u tačku prevoja D. tako da se kriva puženja dijeli na dva dijela. jedan na kojem brzina puženja opada i drugi na kojem brzina puženja raste. Za poslednja dva slučaja je karakteristično da brzina puženja nije ograničena. pa se takva puženja nazivaju neograničenim.

Za praktičnu primjenu od interesa je određivanje one vrijednosti napona pri kojoj krive puženja ostaju ograničene. Ordinata MN krive puženja u trenutku t sastoji se iz: elastične deformacije (ϵ'), visko-elastične deformacije (ϵ'') i trajne plastične deformacije (ϵ'''), tj.

vezane za ostvarivanje stepenastog opterećenja. kao i za nemogućnost fiksiranja tačaka B i C u procesu rasterećivanja. Odrezak OA krive $\epsilon \sim t$ jednak je vrijednosti deformacije u trenutku $t=0$ i predstavlja elastičnu ili plastičnu deformaciju. Dio BC. pri trenutnom rasterećenju, predstavlja elastični dio ukupne deformacije. Određivanje elastičnog dijela ukupne deformacije ima poseban značaj jer omogućava da se odredi moduo elastičnosti materijala $E = \sigma_0 / \epsilon'$.

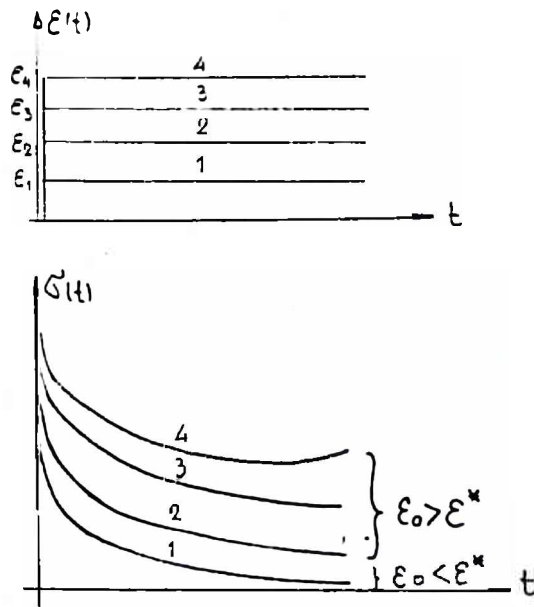
Važno je napomenuti da krive puženja imaju osobinu da ako je napon. pri kojem se vrši puženje. manji od neke vrijednosti σ^* one se praktično poklapaju i deformacija ne prelazi vrijednost $\epsilon(\infty) = \sigma^* / E_\infty$ (Sl. 1.2.22).



Takve krive puženja karakterišu fizičku linearnost visko-elastičnog materijala. U protivnom, dakle, kada je napon puženja veći od karakteristične vrijednosti napona σ^* krive puženja opisuju fizičku nelinearnost visko-elastičnog materijala. Modul E_∞ se naziva trajnim modulom i treba ga razlikovati od modula elastičnosti E (trenutni modul).

Relaksacija

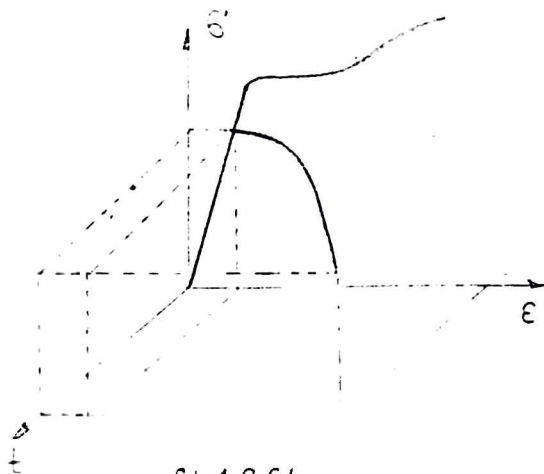
Krive relaksacije napona se dobijaju kada se deformacija zadržava konstantnom (Sl. 1.2.23). Ako su deformacije, pri kojima se vrši relaksacija,



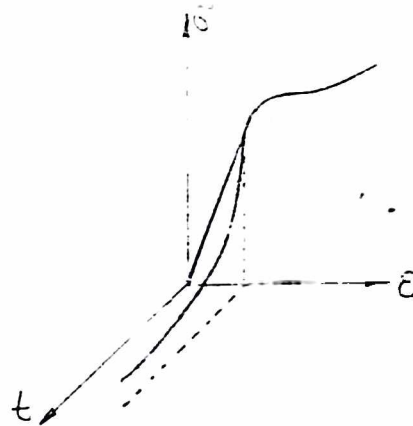
Sl. 1.2.23

dovoljno male (manje od neke vrijednosti ϵ^*), pokazuje se, da se naponi, poslije određenog vremena, mogu približiti nultim vrijednostima, kao i da se krive relaksacije praktično poklapaju. Za viskoelastični materijal, u tom opsegu deformacija, se kaže da je linearno visko-elastičan. U protivnom, kada je deformacija pri kojoj se vrši relaksacija veća od neke karakteristične deformacije ϵ^* , za materijal se kaže da je fizički nelinearan, jer krive relaksacije zavise ne samo od vremena t već i od deformacije koja se drži konstantnom. Kod fizički linearnog visko-elastičnog materijala kriva relaksacije zavisi samo od vremena (analogno kao kod krivih puženja). Inače, ako su deformacije, pri kojima se vrši relaksacija, mnogo velike dolazi do naglog porasta brzine relaksacije (kriva 4 sa Sl. 1.2.23), što može dovesti do razaranja materijala.

Prostorni dijagrami krivih puženja i relaksacije dati su na Sl. 1.2.24 i Sl. 1.2.25.



SL 1.2.24.



SL 1.2.25.

1.3.2. Osnovni linearno visko-elastični modeli

Prva istraživanja u oblasti visko-elastičnosti, koja su izvršili Maksvel, Fojgt, Kelvin, Bolcman..... a koja su se odnosila na proučavanje veoma viskoznih tečnosti, koloidnih rastvora itd., izvršena su u drugoj polovini prošlog vijeka. Na bazi tih istraživanja pojavila se ideja da se objedine elastično-plastična i reološka (viskozna) svojstva tijela i da se formira jedna zajednička teorija. U tom smislu najviše se razvila teorija linearne visko-elastičnosti koja vremensku vezu između napona i deformacija definiše linearnim (diferencijalnim ili integralnim) vremenskim operatorima. Pojavom i primjenom polimernih materijala u tehnici ova teorija je dobila na svom značaju i korisnosti.

U nelinearnoj teoriji visko-elastičnosti veza između napona i deformacije se ostvaruje nelinearnim operatorima.

Predmet daljeg razmatranja biće linearno visko-elastični modeli, tj. modeli koji sadrže i elastična i viskozna svojstva. Njima se zamjenjuju realna tijela koja također imaju elastična (trenutna reakcija na nanoseno opterećenje) i viskozna (deformacija se mijenja tokom vremena) svojstva.

Maksvelov model

Visko-elastična deformacija (ξ) se, imajući u vidu (1.2.134), može predstaviti u obliku zbira elastične (ξ') i viskozne (ξ'') deformacije

$$\xi = \xi' + \xi''.$$

odnosno

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}' + \dot{\xi}''.$$

Predpostavljajući da je elastična deformacija sa naponom vezana Hukovim zakonom, a viskozna deformacija sa naponom Njutnovim zakonom ($\dot{\epsilon} = \lambda \dot{\sigma}$, $\dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon}$) [46], iz predhodne relacije se dobija

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}. \quad \dots (1.2.135)$$

reološka relacija u kojoj su $\dot{\epsilon}(t)$ i $\sigma(t)$ povezani operatorom

$$L(\dots) = \dot{\epsilon}(0) + \int_0^t \left[\frac{1}{\lambda} (\dots) + \frac{1}{E} \frac{d}{d\tau} (\dots) d\tau \right], \quad \dots (1.2.136)$$

pri čemu je $\dot{\epsilon}(0)$ deformacija u trenutku $t=0$. Relacija (1.2.135) se šematski može prikazati modelom prikazanim na Sl. 1.2.26a. Taj model se naziva Maksvelovim.

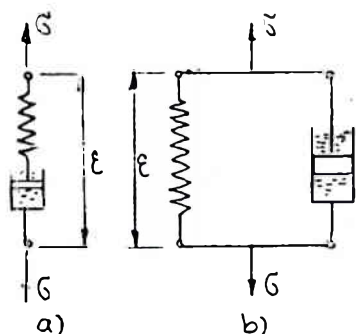
Razmotrićemo njegovo ponašanje pri puženju i relaksaciji, tj. kada je

$$1^\circ \quad \sigma = \sigma_0 = \text{const.}, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

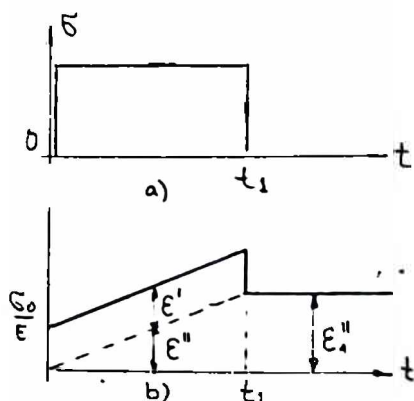
$$\sigma_0 = 0, \quad t \geq t_1,$$

$$2^\circ \quad \epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}, \quad \forall t.$$

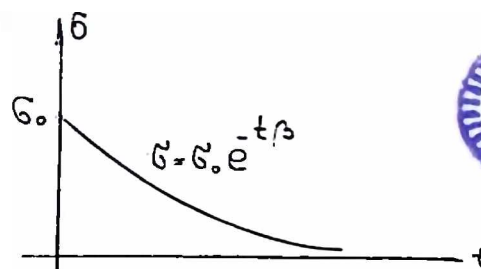
Krive puženja i relaksacije, za navedene režime, prikazani su na slikama 1.2.27 i 1.2.28.



SL.1.2.26



SL.1.2.27.



SL.1.2.28.



Veličina β koja se pojavljuje kod krive relaksacije, naziva se vremenom relaksacije ($\beta = \lambda/E$), a to je ono vrijeme po isteku kojeg se napon smanjuje e puta u odnosu na početnu vrijednost σ_0 .

Treba napomenuti da se Maksvelov model razlikuje od Njutnove viskozne tečnosti prisustvom trenutne elastične reakcije na opterećenje, kao i da se poslije vremena t_1 , tj. poslije rasterećenja, Maksvelovo tijelo ponaša kao Njutnov fluid. Takodje se može primijetiti da kad $t \rightarrow \infty \quad \sigma \rightarrow 0$, što nije slučaj kod realnih materijala. Osim toga ovim modelom se realno ne opisuje ponašanje visko elastičnog tijela u početnom trenutku vremena.

Fojgtov model

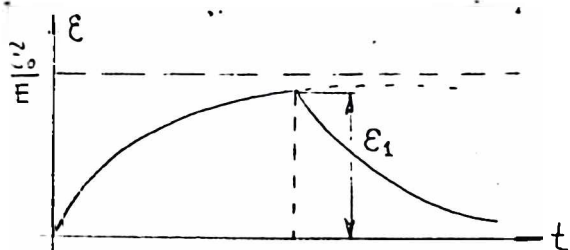
Predpostavljajući da se ukupni napon (ζ), visko-elastičnog tijela sastoji iz elastičnog napona (ζ'), koji je sa deformacijom vezan Hukovim zakonom, i viskoznog napona (ζ''), koji je sa deformacijom vezan Njutnovim zakonom, važi

$$\zeta = E \xi + \lambda \dot{\xi} \quad \dots (1.2.137)$$

Predhodna jednačina je reološka relacija u kojoj se $\zeta(t)$ i $\xi(t)$ povezuju operatorom

$$L(\dots) = \lambda \frac{d}{dt} (\dots) + E(\dots). \quad \dots (1.2.138)$$

Tijelo koje se ponaša prema (1.2.137) naziva se Fojgtovim modelom (Sl.1.2.26b).



SL. 1.2.29.

Prema ovom modelu, ako je deformacija konstantna, tj. $\xi = \xi_0 = \text{const.}$, i napon je konstantan ($\zeta = \text{const.}$), što znači da ne dolazi do njegove relaksacije. Ako se u trenutku $t=0$ nanese opterećenje koje se zadržava konstantnim ($\zeta = \zeta_0$) do trenutka $t=t_1$, a zatim se tijelo rastereti, zavisnost $\xi(t)$, tj. kriva relaksacije, ima oblik prikazan na Sl.1.2.29. Analitički zapisana kriva relaksacije,

tj. rješenje jednačine (1.2.137), prema [46], ima oblik

$$\xi(t) = \frac{\zeta_0}{E} (1 - e^{-t/\gamma}), \quad t \in [0, t_1]. \quad \dots (1.2.139)$$

Veličina $\gamma = \lambda/E$ je tzv. vrijeme kašnjenja. Od trenutka kada se tijelo rastereti, kriva puženja je određena jednačinom

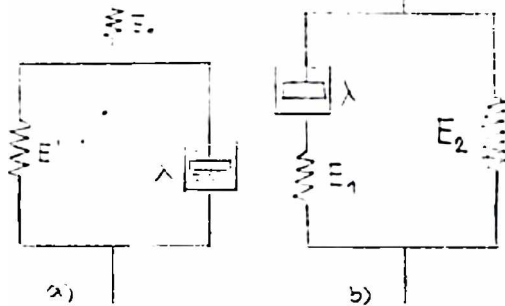
$$\xi(t) = \xi_1 \cdot e^{-(t-t_1)/\gamma} \quad \dots (1.2.140)$$

Veličina ξ_1 je prikazana na Sl. 1.2.29. Primjećuje se da kad $t \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 0$, što znači da je deformacija puženja povratna, kao i da ulogu trajnog modula igra moduo elastičnosti.

Kelvinov model

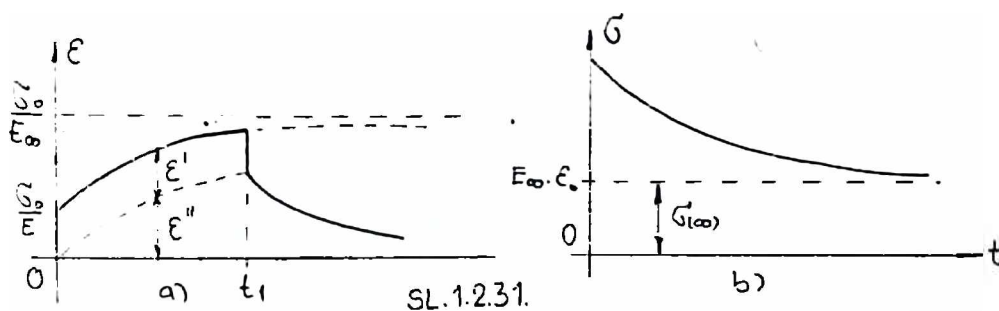
Predhodno navedeni Maksvelov i Fojgtov model se mogu usložiti dodavanjem trećeg elementa, kao što je to prikazano na Sl. 1.2.30. Reološko ponašanje modela sa Sl. 1.2.30a, koji se često naziva Kelvinovim modelom, opisano je relacijom

$$\frac{\lambda}{E_0} \dot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_1}{E_0}\right) \sigma = \lambda \dot{\epsilon} + E_1 \epsilon.$$



SL.1.2.30

Dijagrami puženja i relaksacije Kelvinovog modela dati su na Sl. 1.2.30 a) i b):



SL.1.2.31.

Može se pokazati [46], da je operator koji povezuje veličine $\epsilon(t)$ i $\sigma(t)$ linearno diferencijalno-integralan.

Sa Sl. 1.2.31, se vidi da je deformacija puženja povratna jer $\epsilon \rightarrow 0$ kad $t \rightarrow \infty$. Takodje se na Sl. 1.2.31 a) i b) može primijetiti da kod Kelvinovog modela, za razliku od Fojgtovog modela, važi da $\sigma \rightarrow E_\infty \cdot \epsilon_0$ kad $t \rightarrow \infty$, kao i da, za razliku od Maksvelovog modela, $\sigma(\infty)$ ne teži ka nuli.

Može se reći da je Kelvinovim modelom, u opštim crtama, predstavljeno ponašanje polimernih materijala, međjutim, da bi ono moglo da se potpuno modelira neophodno je da se posmatraju još složeniji modeli koji se sastoje od većeg broja elastičnih i viskoznih elemenata.

Formalno gledano, uopštavanjem predhodnim modela, dodavanjem beskonačnog broja elastičnih i viskoznih elemenata, može se sa diskretnog modela preći na neprekidni model koji bi u potpunosti pisivao reološka ponašanja visko-elastičnog tijela [46].

2.3.3. Bolcmanova teorija nasledne linearne visko-elastičnosti

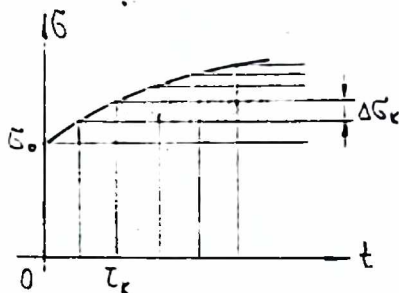
Za opisivanje procesa deformisanja visko-elastičnih materijala, Bolcman je [47] predložio teoriju linearne visko-elastičnosti. Formirao ju je na osnovu principa superpozicije, inače osnovnog principa linearne mehanike.

U cilju dobijanja jednačina teorije linearne visko-elastičnosti posmatračemo visko-elastični materijal na konstantnoj temperaturi, opterećen opterećenjem čija je promjena tokom vremena poznata, što znači da je poznata zavisnost oblika $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$. Sl. 1.2.32. Neka je, takodje, poznata kriva puženja posmatranog materijala pri naponu $\bar{\sigma}_0$ (vrijednost napona $\bar{\sigma}(t)$ u trenutku $t=0$). Tada je

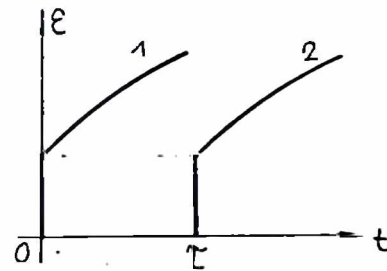
$$\bar{\epsilon}(t) = \bar{\epsilon}' + \bar{\epsilon}'' = \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (1 + \bar{\epsilon}''/\bar{\epsilon}') = \frac{\bar{\sigma}_0}{E} [1 + \bar{\Phi}(t)], \quad \dots (1.2.150)$$

gdje su: E - moduo elastičnosti materijala.

$\bar{\Phi}(t)$ - funkcija promjene odnosa visko-elastične i elastične (trenutne) deformacije tokom vremena.



Sl. 1.2.32.



Sl. 1.2.33.

Na Sl. 1.2.33. su prikazane dvije krive puženja. Prva kriva (1) se dobija kada napon $\bar{\sigma}(t)$ počinje da "dejstvuje" u trenutku $t=0$, dok se kriva (2) dobija ako napon $\bar{\sigma}(t)$ počne da "dejstvuje" u nekom proizvoljnom trenutku $t=\bar{\tau} \neq 0$. Jasno je da krive (1) i (2) moraju imati isti oblik, s tim što je kriva (2) pomjerena po osi t za vrijednost $t=\bar{\tau}$. (Sl. 1.2.33). Imajući u vidu (1.2.150) jednačina krive (2) je

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{\bar{\sigma}_0}{E} [1 + \bar{\Phi}(t-\bar{\tau})]. \quad \dots (1.2.151)$$

Kriva $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ se može aproksimirati zbirom stepenastih opterećenja (Sl. 1.2.31)

$$\bar{\sigma}(t) \approx \bar{\sigma}_0 + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta \bar{\sigma}_k,$$

gdje su: $\Delta \bar{\sigma}_k$ - priraštaj napona u trenutku $t=\bar{\tau}_k$

$n(t)$ - broj stepenastih opterećenja u posmatranom vremenu t .

Princip superpozicije se izražava hipotezom da je ukupna deformacija u trenutku t jednaka sumi deformacija za taj trenutak vremena nastalih od stepenastih opterećenja $\Delta \bar{\sigma}_k$, tj.

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^{n(t)} \Delta \xi_k(t-\tau_k). \quad \dots (1.2.152)$$

gdje su: $\xi_0(t)$ i $\Delta \xi_k(t)$ - deformacije koje odgovaraju naponima σ_0 i $\Delta \sigma_k$.
Na osnovu (1.2.150) i (1.2.151), relacija (1.2.152) dobija oblik

$$\xi(t) = \frac{\sigma_0}{E} [1 + \Phi(t)] + \sum_{k=1}^{n(t)} \frac{\Delta \sigma_k}{E} [1 + \Phi(t-\tau_k)]. \quad \dots (1.2.153)$$

Pošto je

$$\Delta \sigma_k = \frac{\Delta \sigma_k}{\Delta \tau_k} \Delta \tau_k, \quad \Delta \tau_k = \tau_k - \tau_{k-1},$$

puštajući da $\Delta \tau_k \rightarrow 0$, iz (1.2.153), dobija se

$$\xi(t) = \frac{\sigma_0}{E} [1 + \Phi(t)] + \int_0^t \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\tau} [1 + \Phi(t-\tau)] d\tau,$$

odnosno

$$\xi(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau \right]. \quad \dots (1.2.154)$$

Uzeto je u obzir da je $\Phi(0)=0$, i da je

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t-\tau).$$

Veličina

$$P(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t-\tau) = \frac{\partial \Phi(t-\tau)}{\partial (t-\tau)} \quad \dots (1.2.155)$$

naziva se funkcijom brzine puženja ili jezgrom puženja, i potpuno je određena ako je poznata funkcija $\Phi(t)$ odnosno kriva puženja. U slučaju ograničenog puženja (brzina puženja je pozitivna opadajuća funkcija) kriva puženja (Sl.1.2.20) ima horizontalnu asimptotu, što znači da $P \rightarrow 0$ kad $t \rightarrow \infty$, pa se, na osnovu (1.2.150), može naći trajni moduo E

$$E_\infty = \frac{E}{1 + \Phi(\infty)}. \quad \dots (1.2.156)$$

Koristeći drugi oblik principa superpozicije, princip nezavisnosti deformacija, može se postupkom analognim predhodnom, dobiti sledeća reološka jednačina

$$\sigma(t) = E \left[\xi(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t-\tau) \cdot \xi(\tau) \cdot d\tau \right], \quad \dots (1.2.157)$$

Veličina

$$R(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t-\tau) = \frac{\partial \Psi(t-\tau)}{\partial (t-\tau)}, \quad \dots (1.2.158)$$

raziva se funkcijom brzine relaksacije ili jezgrom relaksacije, i potpuno je određena ako je poznata funkcija $\Psi(t-\tau)$, odnosno kriva relaksacije. Kriva $\Psi(t)$ se dobija iz eksperimenta na relaksaciju, tj. za $\xi = \xi_0 = \text{const.}$ Iz (1.2.157) je

$$\tilde{\sigma}(t) = E \cdot \xi_0 [1 - \Psi(t)]. \quad \dots (1.2.149)$$

Imajući u vidu (1.2.155) i (1.2.158), jednačine (1.2.154) i (1.2.157) se mogu prikazati u sledećem obliku

$$\xi(t) = \frac{1}{E} \left[\tilde{\sigma}(t) + \int_0^t P(t-\tau) \cdot \tilde{\sigma}(\tau) \cdot d\tau \right], \quad \dots (1.2.160)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{E} \left[\xi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \cdot \xi(\tau) \cdot d\tau \right], \quad \dots (1.2.161)$$

2.3.4. Teorija linearne visko-elastičnosti

Jednačinama (1.2.160) i (1.2.161) data je veza između napona i deformacija linearno visko-elastičnog materijala za slučaj jednoosnog naponskog stanja. Znajući kako glasi Hukov zakon za čisto elastičan materijal, jednačine (1.2.160) i (1.2.161) se mogu zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} \xi &= \left[\frac{1}{E} \right]^* \cdot \tilde{\sigma}; \\ \tilde{\sigma} &= [E]^* \xi, \end{aligned} \quad \dots (1.2.162)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{E} \right]^* &= \frac{1}{E} \left[1 \cdot (\dots) + \int_0^t P(t-\tau) \cdot (\dots) d\tau \right] \\ [E]^* &= E \left[1 \cdot (\dots) - \int_0^t R(t-\tau) \cdot (\dots) d\tau \right] \end{aligned} \quad \dots (1.2.163)$$

operatori koje treba primijeniti na funkcije koje slijede iza njih.

U slučaju složenog naponskog stanja jednačine teorije elastičnosti imaju oblik

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2G \cdot \Theta_{ij} \\ \tilde{\sigma} &= K \cdot \Theta \end{aligned}$$

pa se, jednačine teorije linearne visko-elastičnosti, imajući u vidu analogije (1.2.162) i (1.2.163), mogu napisati kao

$$2G \Theta_{ij} = S_{ij} + \int_0^t P(t-\tau) S_{ij} d\tau, \quad \dots (1.2.164)$$

$$K\Theta = \tilde{\sigma} + \int_0^t P_1(t-\tau) \tilde{\sigma} dt, \quad \dots (1.2.165)$$

odnosno

$$\frac{s_{ij}}{2G} = \vartheta_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \vartheta_{ij} d\tau. \quad \dots (1.2.166)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}}{K} = \theta - \int_0^t R_1(t-\tau) \theta d\tau. \quad \dots (1.2.167)$$

gdje su P i P_1 odnosno R i R_1 funkcije brzine smičućeg i zapreminskog puženja materijala, odnosno relaksacije. Krive smičućeg i zapreminskog puženja, odnosno relaksacije, se određuju eksperimentalno iz testa na smičuće i zapreminsko puženje, odnosno relaksaciju. Funkcije P i P_1 , odnosno R i R_1 , se često nazivaju i jezgrima smičućeg i zapreminskog puženja, odnosno relaksacije.

Veličine P i P_1 su pozitivne monotonno opadajuće funkcije svojih argumenata. Kada $t \rightarrow \infty$, kao što je ranije naglašeno, asimptotski teže ka nuli. Za negativne vrijednosti argumenata identički su jednake nuli.

Zamjenom relacija (1.2.166) i (1.2.167) u (1.2.164) i (1.2.165) dobija se zavisnost izmedju funkcija P i P_1 i funkcija R i R_1

$$P(t) = R(t) + \int_0^t P(t-\tau) R(t-\tau) d\tau; \quad \dots (1.2.168)$$

$$P_1(t) = R_1(t) + \int_0^t P_1(t-\tau) R_1(t-\tau) d\tau. \quad \dots (1.2.169)$$

Jednačine (1.2.168) i (1.2.169) se mogu koristiti za određivanje jezgara R i R_1 ako su poznata jezgra P i P_1 i obratno. U slučaju kada su eksperimentima određene sve funkcije brzine puženja i relaksacije onda relacije (1.2.168) i (1.2.169) služe za provjeru.

Jednačine (1.2.164 - 167) se mogu predstaviti i kao

$$\vartheta_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) dS_{ij}, \quad \dots (1.2.170)$$

$$\theta = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) d\zeta;$$

$$s_{ij} = \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\vartheta_{ij},$$

$$\zeta = \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) d\theta; \quad \dots (1.2.171)$$

gdje su: Π i Π_1 - funkcije smičućeg i zapreminskog puženja

Γ i Γ_1 - funkcije smičuće i zapreminske relaksacije.

Sa jednačina (1.2.170) i (1.2.171) može se preći na jednačine (1.2.164 - 167) na sledeći način. Ako funkcije $\Xi_{ij}(\tau)$, $\Theta(\tau)$, $S_{ij}(\tau)$ i $\zeta(\tau)$ imaju integrabilne izvode $d\Xi_{ij}/dt$, $d\Theta/dt$ i $d\zeta/dt$ na intervalu $0 \leq \tau \leq t$, onda se jednačine (1.2.170) i (1.2.171) mogu napisati kao

$$\dot{\Xi}_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) \frac{dS_{ij}}{d\tau} d\tau,$$

$$\dot{\Theta} = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) \frac{d\Theta}{d\tau} d\tau,$$

odnosno

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \int_0^t \Gamma(t-\tau) \frac{dS_{ij}}{d\tau} d\tau, \\ &= \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \frac{d\Theta}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Iz predhodnih relacija se lako dobija

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \Pi(0) S_{ij} + \int_0^t \left[-\frac{d\Pi}{d\tau} \right] S_{ij} d\tau, \\ \Theta &= \Pi_1(0) \zeta + \int_0^t \left[-\frac{d\Pi_1}{d\tau} \right] \zeta d\tau, \end{aligned} \quad \dots (1.2.172)$$

odnosno

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \Gamma(0) \Xi_{ij} + \int_0^t \left[-\frac{d\Gamma}{d\tau} \right] \Xi_{ij} d\tau, \\ \zeta &= \Gamma_1(0) \Theta + \int_0^t \left[-\frac{d\Gamma_1}{d\tau} \right] \Theta d\tau. \end{aligned} \quad \dots (1.2.173)$$

Imajući u vidu da se iz predhodnih relacija, za početni trenutak vremena, moraju dobiti relacije Hukovog zakona, važi

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= 2G, \quad \Pi_1(0) = K, \\ \Gamma(0) &= 1/2G, \quad \Gamma_1(0) = 1/K \end{aligned} \quad \dots (1.2.174)$$

Na osnovu (1.2.164 - 167) iz (1.2.172) i (1.2.173) se dobija

$$\begin{aligned} P(t) &= -\frac{1}{2G} \cdot \frac{d\Pi(t)}{dt}, \\ P_1(t) &= -\frac{1}{K} \cdot \frac{d\Pi_1(t)}{dt}, \\ R(t) &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{d\Gamma(t)}{dt}, \\ R_1(t) &= \frac{1}{K} \cdot \frac{d\Gamma_1(t)}{dt}, \end{aligned} \quad \dots (1.2.175)$$

Iz (1.2.174) se vidi da je

$$\begin{aligned}\Pi(0) \cdot \Gamma(0) &= 1. \\ \Pi_1(0) \cdot \Gamma_1(0) &= 1.\end{aligned}\quad \text{..... (1.2.176)}$$

Funkcije Π , Π_1 , Γ i Γ_1 ne zavise od vida naponskog stanja, pa se određuju iz jednostavnih eksperimenata.

Na osnovu izvedenih relacija može se zaključiti da su veze između napora i deformacija u potpunosti određene ukoliko su poznate funkcije $P(t)$ i $P_1(t)$ ili $R(t)$ i $R_1(t)$, odnosno $\Pi(t)$ i $\Pi_1(t)$ ili $\Gamma(t)$ ili $\Gamma_1(t)$, i ako su poznate konstante G , K , E i μ pri čemu između njih važe poznate veze

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad \text{..... (1.2.177)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{..... (1.2.178)}$$

Treba napomenuti da u jednačinama (1.2.164 - 167) naponi i deformacije figurišu na prvom stepenu tj. linearno, što je posledica fizičke linearosti viskoelastičnog materijala, o čemu je ranije bilo riječi. Kod fizički nelinearnih visko-elastičnih materijala naponi i deformacije nijesu samo funkcije od vremena.

O određivanju materijalnih funkcija i konstanti

Pri određivanju materijalnih funkcija (Π i Π_1 odnosno P i P_1) i elastičnih konstanti pojavljuju se dva osnovna problema [48]: prvo, vrlo se teško praktično mogu realizovati eksperimenti kojima se dobijaju krive puženja ili relaksacije, ali tako da promjene napona odnosno deformacije budu u obliku Hevizajdove funkcije jer uvijek postoji neko vrijeme koje je neophodno da protekne da bi se izvršilo opterećivanje, i drugo, veoma je teško ostvariti eksperiment na svestrano zatezanje ili pritisak.

M.A. Koltunov je u [48] pokazao da se naznačene poteškoće praktične prirode mogu prevazići izražavanjem smičućih i zapreminskih karakteristika materijala (G i K) preko veličina koje se dobijaju iz testa istezanja viskoelastičnog materijala. Takodje je ukazao na način kako se, pomoću faktora korekcije, iz stvarnih stepenastih krivih opterećenja ili deformisanja, mogu dobiti stepenaste krive u obliku Hevizajdove funkcije, koje predstavljaju osnov za rješavanje konkretnih problema.

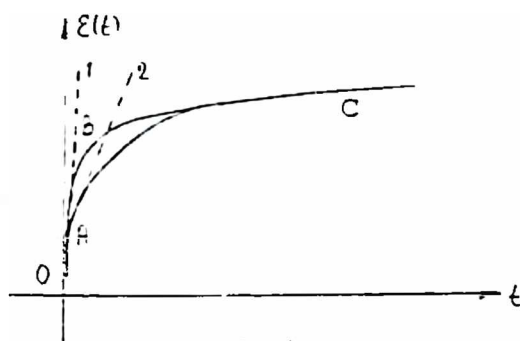
Ovdje se neće detaljnije razmatrati sam eksperimentalno-teorijski metod određivanja materijalnih funkcija i konstanti, već će se smatrati da su određene. Detaljno razradjen metod njihovog određivanja dat je u [48].

Izbor funkcije brzine puženja odnosno relaksacije

Kao što se vidi iz relacija (1.2.175) funkcije brzine puženja odnosno relaksacije (jezgra puženja odnosno relaksacije) mogu se konstruisati tako što se prvo prema eksperimentalnim podacima konstruišu krive puženja (relaksacije), a zatim se izvrši njihovo diferenciranje. Međutim, greške subjektivnog karaktera, koje se mogu pojaviti pri konstrukciji ovih krivih, često dovode do grubih i netačnih rezultata. Zbog toga se, u praktičnim proračunima, veoma često koristi analitički zapis tih funkcija. U tom zapisu figuriše određen broj parametara koji se određuju na osnovu poznate krive puženja odnosno relaksacije.

Uslovi koje moraju zadovoljavati funkcije $P(t)$ i $R(t)$, odnosno njihov analitički zapis, su

$$1^{\circ} \lim_{t \rightarrow 0} P(t) = \infty$$



SL. 1.2.34.

Tangenta (1) u tački A, prelaza od elastične ka viskoelastičnoj deformaciji (Sl. 1.2.34), je zajednička za elastični dio OA i dio AB krive puženja. Lomljenje tangente u tački A fizički nije opravdano. Zbog toga u tački A, dakle za $t=0$, mora važiti

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \infty.$$

Pošto je, na osnovu (1.2.16), za $\zeta(t) = \zeta_0 = \text{const.}$

$$P(t) = \frac{E}{\zeta_0} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt},$$

to je

$$P(0) = \infty.$$

2° Iz jednačine (1.2.168) je

$$R(0) = \infty \text{ za } t=0.$$

3° Integral $\int_0^t P(\tau) d\tau$ treba da konvergira

4° Integral $\int_0^t R(\tau) d\tau$ ne smije da bude veći od jedinice.

Ovaj poslednji uslov se dobija iz (1.2.161), stavljajući da je $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const.}$ Tada je

$$\zeta(t) = E \cdot \varepsilon_0 \left(1 - \int_0^t R(\tau) d\tau \right).$$

odnosno

$$\int_0^t R(\tau) d\tau = 1 - \frac{\zeta(t)}{\zeta_0} \leq 1.$$

jer je uvijek $\zeta(t) < \zeta(0) = \zeta_0$.

U literaturi se često sreću funkcije brzine relaksacije u obliku $A e^{-\beta t}$ ili $\sum A_i e^{-\beta_i t}$, ali se one ovdje neće detaljnije razmatrati jer ne karakterišu proces relaksacije u početnom trenutku, tj. za $t=0$ one imaju konačnu vrijednost.

A.A.Ržanicin [49] je predložio dovoljno prostu a istovremeno i dovoljno opštu funkciju brzine relaksacije (jezgro relaksacije) u obliku

$$R(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad \dots (1.2.179)$$

Koristeći se Laplasovim transformacijama, može se pokazati [48] da funkcija brzine puženja $P(t)$, na osnovu (1.2.169), ima sledeći oblik

$$P(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A \Gamma(\alpha)]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad \dots (1.2.180)$$

gdje je $\Gamma(\alpha)$ - gama funkcija. Red (1.2.180) ravnomjerno konvergira po t na bilo kom intervalu vremena.

Može se pokazati da pri velikim vrijednostima promjenljive t relacija (1.2.180) ima oblik

$$P(t) \approx \frac{1}{\alpha} [A \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} e^{[A \Gamma(\alpha)]^{1/\alpha} - \beta} t, \quad \dots (1.2.181)$$

pa

a) Ako je $\frac{\beta^\alpha}{A \Gamma(\alpha)} > 1$, tada $P(t) \rightarrow 0$ kad $t \rightarrow \infty$.

Predhodna relacija označava da brzina, za $\zeta = \zeta_0 = \text{const.}$ teži ka nuli, što odgovara slučaju ograničenog puženja, kada deformacija asimptotski teži konačnoj i stalnoj vrijednosti.

b) Ako je $\frac{\beta^\alpha}{A \Gamma(\alpha)} < 1$, tada $P(t) \rightarrow \infty$ kada $t \rightarrow \infty$,

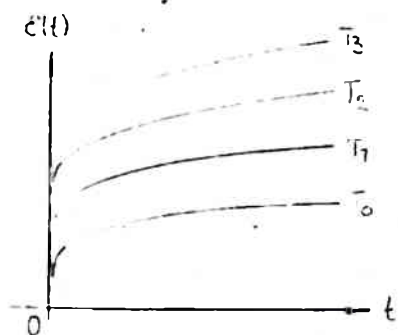
što znači da brzina puženja raste i teži ka beskonačno velikoj vrijednosti što odgovara slučaju neograničenog puženja.

c) Ako je $\frac{\beta^\alpha}{A \Gamma(\alpha)} = 1$, tada je $P(t) = \text{const.}$ kada $t \rightarrow \infty$,

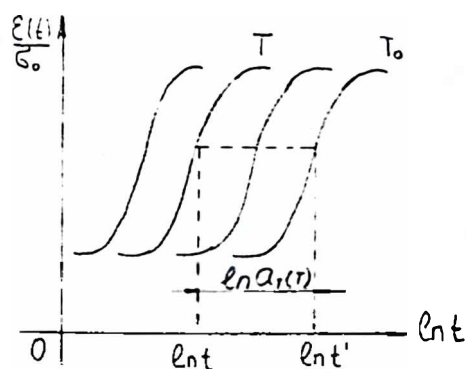
što znači da se radi o ustaljenom puženju, kod koga brzina puženja, posle određenog vremena postaje konstantna tj. taj dio krive puženja je prava linija.

Važno je napomenuti da je u radu [50] razradjen postupak odredjivanja parametara α , β i A kada su poznate, na osnovu eksperimenta, krive puženja ili relaksacije.

Ispitivanja materijala na puženje, pri raznim temperaturama, pokazuju da krive puženja "rastu" sa povišenjem temperature (Sl. 1.2.35) a pri konstantnom naponu. To znači da je vrijednost deformacije, u trenutku t i



Sl. 1.2.35



Sl. 1.2.36

temperaturi T , jednaka vrijednosti deformacije u nekom trenutku t' ($t' > t$) na temperaturi T' ($T' < T$). Navedena činjenica omogućava da se eksperimentima na povišenim temperaturama i ograničenom vremenskom intervalu prognoziraju reološka svojstva materijala u nekom budućem trenutku vremena. Predhodno rečeno čini osnovu principa temperaturno-vremenske analogije. Princip se zasniva na činjenici da se translatorskim pomjeranjem krivih puženja, koje odgovaraju raznim temperaturama ($T > T_0$), one mogu dovesti do poklapanja sa krivom puženja koja je dobivena na osnovnoj temperaturi (T_0). Takve krive puženja prikazane su na Sl. 1.2.36, u sistemu $\xi(t)/\xi_0 \sim \ln t$.

Sa Sl. 1.2.36, se vidi da je

$$\ln t - \ln t' = \ln a_T(T) \dots (1.2.182)$$

Očigledno da mora važiti uslov

$$\ln a_T(T_0) = 0,$$

odakle je

$$a_T(T_0) = 1.$$

Veličina $a_T(T)$ je koeficijent temperaturnog pomjeranja. Kriva $\ln a_T(T)$ se često (npr. [51]) aproksimira funkcijom

$$\ln a_T = -C_1 \cdot \frac{T - T_0}{C_2 + T - T_0}, \dots (1.2.183)$$

pri čemu se konstante C_1 i C_2 odredjuju eksperimentalno [52].

Iz (1.2.182) je

$$t' = \frac{t}{a_T(T)}, \quad T \neq f(t). \dots (1.2.184)$$

U slučaju kada se radi o nestacionarnom temperaturnom polju, tj. kada je $T=T(t)$, relacija (1.2.184) se odnosi na beskonačne male intervale vremena $dt' : dt$, pa u tom slučaju je

$$t' = \int_0^t \frac{dt}{a_T(T)} : \quad T=T(t). \quad \dots (1.2.185)$$

Vrijeme t' se naziva modificiranim vremenom.

Imajući u vidu predhodno rečeno, važi

$$\Pi(t, T) = \Pi(t'), \quad \dots (1.2.186)$$

gdje je (t') funkcija puženja na osnovnoj temperaturi.

Prema tome, uvodjenjem modificiranog vremena t' izbjegava se neopodnost dobijanja analitičkog izraza za funkciju puženja $\Pi(t, T)$ na odredjenoj temperaturi. Osim toga, to znači da se metode rješavanja problema u linearnoj viskoelastičnosti mogu efektno koristiti i za rješavanje problema linearne termo-visko-elastičnosti.

2.3.6. Teorije nelinearne visko-elastičnosti

Za jednačine teorije linearne visko-elastičnosti, kao što je bilo ranije naglašeno, karakteristično je da na linearan način povezuju napone i deformacije. To znači, da krive puženja (relaksacije) zavise samo od vremena (t) a ne i od napona (deformacije) pri kojem (kojoj) se dešavaju reološke pojave. To svojstvo je karakteristično za sve polimerne materijale i to pri maloj vrijednosti napona odnosno deformacije. Medjutim, pri većim vrijednostima napona (deformacija), jednačine koje povezuju napone i deformacije postaju nelinearne tj. zavise ne samo od vremena već zavise i od samih napona, odnosno deformacija. Te jednačine se u literaturi nazivaju jednačinama nelinearne visko-elastičnosti.

Predmet daljeg razmatranja biće tzv. teorija kvazilinearne visko-elastičnosti koju su predložili A.A.Iljušin i P.M.Ogibalov [54], i koja se bazira na fundamentalnim postulatima mehanike deformabilnog tijela [54]. Za razliku od Bolcmanovog principa superpozicije, predpostavili su da veličina deformacije, u trenutku t , nije odredjena samo priraštajem napona ("stepenikom"), u odnosu na predhodni trenutak vremena, već i njihovim zajedničkim uticajem. Imajući još u vidu da veza izmedju devijatorskih veličina mora biti tenzorno linearna (veličine sa indeksima i i j ulaze linearno, što je posledica postulata izotropije [54]), mogu se dobiti [51] sledeće jednačine, koje povezuju devijator deformacije \mathfrak{D}_{ij} sa devijatorom napona ([53], [55] i [56]).

$$2G \dot{\epsilon}_{ij} = S_{ij} + \int_0^t P(t, \tau) S_{ij}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t S_{ij}(\tau) d\tau \int_0^\tau \int_0^\tau P_3(t, \tau, \xi, \eta) S(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots \quad (1.2.187)$$

gdje su: G - modu smicanja

P, P_3 - neka jezgra tj. funkcije brzine puženja

$$S(\xi, \eta) = S_{ij}(\xi) S_{ij}(\eta),$$

S_{ij} - komponente devijatora napona.

Funkcija brzine puženja P_3 posjeduje svojstvo simetrije u odnosu na poslednje dvije promjenljive (ξ, η) tj. $P_3(t, \tau, \xi, \eta) = P_3(t, \tau, \eta, \xi)$. Imajući u vidu relaciju (1.2.20) važi

$$S(\xi, \xi) = \frac{2}{3} \sigma_u^2(\xi).$$

Relacije (1.2.187), autori [53] nazivaju jednačinama kvazilinearne kvadratne teorije visko-elastičnosti. Jednačine kojima se povezuju naponi i deformacije, i koje su analogne jednačinama (1.2.187), imaju oblik [56]

$$\frac{S_{ij}}{2G} = \dot{\epsilon}_{ij} - \int_0^t R(t, \tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) d\tau \int_0^\tau \int_0^\tau R_3(t, \tau, \xi, \eta) \dot{\epsilon}(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots \quad (1.2.188)$$

gdje su: R i R_3 - jezgra tj. funkcije brzine relaksacije

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij}(\xi) \dot{\epsilon}_{ij}(\eta)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ - komponente devijatora deformacije.

I ovdje, na osnovu (1.1.46), važi

$$\dot{\epsilon}(\xi, \xi) = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_u^2(\xi).$$

Relacije (1.2.187) i (1.2.188) moraju biti uzajamne, pa između funkcija P, P_3, R i R_3 postoje veze, analogne vezama (1.2.168) koje važe u teoriji linearne visko-elastičnosti. Funkcije P i R vezane su relacijom (1.2.168), dok se funkcija R_3 izražava preko ostalih funkcija P, P_3 i R sledećom relacijom

$$-R_3(t, \tau, \xi, \eta) = \int_{\max(\xi, \tau)}^t R(t, x) dx \int_{\tau}^x R(y, \tau) d\tau \int_{\xi}^x P(u, \xi) du \int_{\eta}^u P(\sigma, \eta) P_3(x, y, u, \sigma) d\sigma.$$

Potpuno analogno se funkcija P_3 izražava preko funkcija P, R, R_3 . Funkcije P, P_3, R, R_3 posjeduju još čitav niz osobina [53].

Iz (1.2.187) se, specijalno, mogu dobiti jednačine takozvane [53] glavne kvadratne teorije visko-elastičnosti

$$2G \mathfrak{D}_{ij} = [1 + A(t, S)] S_{ij} + \int_0^t [P^*(t-\tau) - B(t, \tau, S)] S_{ij}(\tau) d\tau, \dots (1.2.189)$$

Koeficijenti $A(t, S)$ i $B(t, \tau, S)$ imaju sledeći oblik

$$A(t, S) = \frac{2}{3} K \zeta_u^2(t) + \int_0^t P_1(t-\tau) S(t, \tau) + P_2(t-\tau) \frac{2}{3} \zeta_u^2(\tau) d\tau, \dots (1.2.190)$$

$$B(t, \tau, S) = \frac{2}{3} P_3(t-\tau) \zeta_u^2(t) + P_4(t-\tau) S(t, \tau) + \frac{2}{3} P_5(t-\tau) \zeta_u^2(\tau),$$

gdje su: P_i ($i=1, 2, \dots, 5$) i P^* jezgra
 K - neka fizička konstanta.

U daljem tekstu će biti prikazani neki specijalni slučajevi glavne kvadratne teorije visko-elastičnosti.

Ako su sve funkcije $P_i = 0$, na osnovu (1.2.190), je

$$A = \frac{2}{3} K \zeta_u^2, \quad B = 0.$$

pa relacija (1.2.189) ima oblik

$$2G \mathfrak{D}_{ij} = \left[1 + \frac{2}{3} K \zeta_u^2(t)\right] S_{ij} + \int_0^t P^*(t-\tau) S_{ij}(\tau) d\tau, \dots (1.2.191)$$

U opštijem slučaju kada je $P_2 \neq 0$ i $P_5 \neq 0$, je

$$2G \mathfrak{D}_{ij} = [1 + A(t)] S_{ij} + \int_0^t \left[P^*(t-\tau) - \frac{2}{3} P_5(t-\tau) \zeta_u^2(\tau) \right] S_{ij}(\tau) d\tau, \dots (1.2.192)$$

$$A(t) = \frac{2}{3} K \zeta_u^2(t) + \frac{2}{3} \int_0^t P_2(t-\tau) \zeta_u^2(\tau) d\tau.$$

Ako se u (1.2.192) stavi da je $P_2 = 0$ dobija se

$$2G \mathfrak{D}_{ij} = \left[1 + \frac{2}{3} K \zeta_u^2(t)\right] S_{ij} + \int_0^t \left[P^*(t-\tau) - \frac{2}{3} P_5(t-\tau) \zeta_u^2(\tau) \right] S_{ij}(\tau) d\tau \dots (1.2.193)$$

Jednačine (1.2.193) se, stavljajući $P^* = P$ i $P_5 = P_0$ [51], mogu prikazati u obliku

$$2G \mathfrak{D}_{ij} = [1 + \omega_1(\zeta_u)] S_{ij} + \int_0^t S_{ij}(\tau) [P(t-\tau) + P_0(t-\tau) \omega_2(\zeta_u)] d\tau, \dots (1.2.194)$$

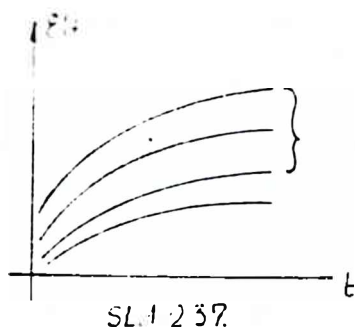
gdje su: $\omega_1(\epsilon_u)$ i $\omega_2(\epsilon_u)$ univerzalne funkcije koje ne zavise od oblika naponskog stanja.

U radu [68] je pokazano da, ako se iskoristi uslov sličnosti krivih puženja (Sl. 1.2.37), funkcije ω_1 i ω_2 se medjusobno poklapaju, kao i da su jezgra P i P_0 ista. Imajući to u vidu, iz (1.2.194) je

$$2G \cdot \epsilon_{ij} = S_{ij} f(\epsilon_u) + \int_0^t P(t-\tau) f[\epsilon_u(\tau)] S_{ij}(\tau) d\tau, \quad \dots (1.2.195)$$

pri čemu se funkcija $f(\epsilon_u)$ određuje iz eksperimenta na nelinearno puženje [51].

Za $\epsilon_u \leq \epsilon_u^*$ je $f(\epsilon_u) = 1$ što znači da se iz (1.2.195), kao specijalan slučaj, dobija relacija (1.2.164) kojom se povezuju deformacije i naponi za slučaj linearno visko-elastičnog materijala.



Sve predhodno izvedene relacije, iz teorije nelinearne visko-elastičnosti, odnosile su se na vezu između komponenta devijatora deformacije i devijatora napona. Pri tome nije razmatrana veza između ϵ i θ . Potpuno analognim postupkom dobija se

$$K \theta = \epsilon \cdot f_1(\epsilon) + \int_0^t P_1(t-\tau) f_1[\epsilon(\tau)] \epsilon(\tau) d\tau, \quad \dots (1.2.196)$$

Funkcije brzine puženja P i P_1 se određuju iz odgovarajućih eksperimenata na linearno puženje, a $f_1(\epsilon)$ iz eksperimenta na nelinearno puženje. I ovdje se, specijalno za $f_1(\epsilon) = 1$, iz (1.2.196) dobija poznata relacija (1.2.165).

Izvođenje jednačina kojima se naponi izražavaju preko deformacija vrši se na bazi sličnosti krivih relaksacije. Na kraju se dobija

$$\frac{S_{ij}}{2G} = \epsilon_{ij} \varphi(\epsilon_u) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\epsilon_u) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau, \quad \dots (1.2.197)$$

$$\frac{\epsilon}{K} = \theta \cdot \varphi_1(\theta) - \int_0^t R_1(t-\tau) \varphi_1(\epsilon_u) \theta(\tau) d\tau, \quad \dots (1.2.198)$$

Dalje uopštavanje jednačina (1.2.195) i (1.2.196) vrši se uvođenjem u razmatranje prve invarijante tenzora napona (ϵ) i tenzora deformacije (θ).

U tom slučaju, relacije (1.2.195) i (1.2.196) imaju oblik [58]

$$\begin{aligned} \varphi_1(\epsilon_u, \theta) \epsilon_{ij} &= f_1(\epsilon_u, \epsilon) S_{ij} + \int_0^t P(t-\tau) f_1(\epsilon_u, \epsilon) S_{ij}(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(\theta, \epsilon_u) \theta &= f_2(\epsilon, \epsilon_u) + \int_0^t P_1(t-\tau) f_2(\epsilon, \epsilon_u) \epsilon(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad \dots (1.2.199)$$

U radu [58] je ukazano i na način odredjivanja materijalnih konstanti i funkcija.

2.4. EFEKTIVNE METODE U TEORIJAMA VISKO-ELASTIČNOSTI

2.4.1. Operatorski metod. Volterin princip

Neka su jednačine teorije linearne visko-elastičnosti date u obliku (1.2.166) i (1.2.167)

$$S_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \epsilon_{ij} d\tau \right], \quad \dots (1.2.200)$$

$$\sigma = K \left[\theta - \int_0^t R_1(t-\tau) \theta d\tau \right],$$

gdje su $R(t)$ i $R_1(t)$ funkcije brzine smičuće i zapreminske relaksacije. Relacije (1.2.200) se mogu zapisati u sledećem, operatorskom vidu

$$S_{ij} = 2\hat{G} \epsilon_{ij} \quad \dots (1.2.201)$$

$$\sigma = \hat{K} \theta, \quad \dots (1.2.202)$$

pri čemu su G i K operatori

$$\hat{G}(\dots) = G \left[(\dots) - \int_0^t R(t-\tau) (\dots) d\tau \right] = G \left[(\dots) - \hat{R}(\dots) \right], \quad \dots (1.2.203)$$

$$\hat{K}(\dots) = K \left[(\dots) - \int_0^t R_1(t-\tau) (\dots) d\tau \right] = K \left[(\dots) - \hat{R}_1(\dots) \right]. \quad \dots (1.2.204)$$

gdje su

$$\hat{R}(\dots) = \int_0^t R(t-\tau) (\dots) d\tau. \quad \dots (1.2.205)$$

$$\hat{R}_1(\dots) = \int_0^t R_1(t-\tau) (\dots) d\tau.$$

Ako jednačine teorije linearne visko-elastičnosti zapišemo u obliku (1.2.164) i (1.2.165)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[S_{ij} + \int_0^t P(t-\tau) S_{ij} d\tau \right], \quad \dots (1.2.206)$$

$$\theta = \frac{1}{K} \left[\sigma + \int_0^t P_1(t-\tau) \sigma d\tau \right].$$

nije teško pokazati, imajući u vidu (1.2.201-205), da je

$$\frac{1}{1-\hat{R}} = 1+\hat{P}, \quad \dots (1.2.207)$$

$$\frac{1}{1-\hat{R}_1} = 1+\hat{P}_1.$$

gdje su:
$$\hat{P}(\dots) = \int_0^t R(t-\tau)(\dots)d\tau$$

$$\hat{P}_1(\dots) = \int_0^t R_1(t-\tau)(\dots)d\tau.$$
..... (1.2.208)

Na osnovu relacija (1.2.201) i (1.2.202) zaključuje se da se postavka graničnih problema teorije linearne visko-elastičnosti po formi poklapa sa postavkom graničnih problema teorije elastičnosti. Razlika je u tome što, umjesto elastičnih konstanti G i K kod problema teorije linearne visko-elastičnosti figurišu operatori \hat{G} i \hat{K} . Pošto se operatorima \hat{G} i \hat{K} realizuju operacije integraljenja po vremenu, i pošto se pri rješavanju problema teorije elastičnosti vrši integraljenje po koordinatama, a ne po vremenu, to slijedi da se problemi teorije linearne visko-elastičnosti mogu rješavati na način na koji se rješavaju odgovarajući problemi teorije elastičnosti, s tim što u konačnom rezultatu elastične konstante treba zamijeniti sa odgovarajućim operatorima. Predhodno rečeno predstavlja Volterin princip.

U rješenju odgovarajućeg problema teorije elastičnosti mogu se pojaviti i elastične konstante E i μ što znači, da umjesto njih, u cilju dobijanja rešenja linearne visko-elastičnosti, treba koristiti odgovarajuće operatore \hat{E} i $\hat{\mu}$. Veze izmedju operatora \hat{G} i \hat{K} i operatora \hat{E} i $\hat{\mu}$ su potpuno iste vezama izmedju konstanti E, μ, G i K koje važe u teoriji elastičnosti, a koje su date relacijama (1.2.177) i (1.2.178).

2.4.2. Laplas-Karsonov metod integralnih transformacija

Dalje će biti razmotren metod rešavanja problema teorije linearne viskoelastičnosti primjenom Laplas-Karsonovih integralnih transformacija.

Kao što znamo, pod Laplas-Karsonovim likom, neke funkcije $f(t)$, podrazumijeva se funkcija $\bar{f}(p)$ realnog parametra p , definisana na sledeći način

$$\bar{f}(p) = p \cdot \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$
..... (1.2.209)

Funkcija $\bar{f}(p)$ ima sledeće osobine:

1° Ako je $f(t)=f_0=\text{const.}$ tada je lik sama ta funkcija, tj. $\bar{f}(p)=f_0$

2° Ako je $f(t)$ data u obliku

$$f(t) = \int_0^t F(t-\tau) d\psi.$$
..... (1.2.210)

onda je lik funkcije $f(t)$ jednak proizvodu likova funkcija F i ψ

$$\bar{f}(p) = \bar{F}(p) \cdot \bar{\psi}(p)$$
..... (1.2.211)

važi i obratno.

Prema tome, ako se Laplas-Karsonova transformacija (1.2.209) primijeni na: jednačine ravnoteže (1.1.4), veze između deformacija i pomjeranja (1.1.28), granične uslove i jednačine linearne visko-elastičnosti (1.2.170) ili (1.2.171), one imaju izgled

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\kappa}_i = 0, \quad \dots (1.2.212)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \dots (1.2.213)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j = \bar{\kappa}_{vi} \text{ na } S_\sigma \text{ i } \bar{u}_i = \bar{u}_{i0} \text{ na } S_u, \quad \dots (1.2.214)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_{ij}, \quad \bar{\theta} = \bar{\Pi}_1 \bar{\epsilon}, \quad \dots (1.2.215)$$

Dakle, iz (1.2.212–215) se zaključuje da se postavka problema teorije linearne visko-elastičnosti u liku poklapa sa postavkom problema teorije elastičnosti u originalu. To znači, da je rešenje problema teorije elastičnosti u originalu ujedno i rešenje problema teorije linearne visko-elastičnosti u liku, s tim što umjesto elastičnih konstanti $1/2G$ i $1/K$ treba staviti likove funkcija $\bar{\Pi}$ i $\bar{\Pi}_1$ tj. $\bar{\Pi}$ i $\bar{\Pi}_1$. Prema tome, ako je problem teorije elastičnosti riješen znači da su poznate funkcije $\bar{\sigma}_{ij}(p, x_d)$ i $\bar{\epsilon}_{ij}(p, x_d)$. Na osnovu poznatih likova treba naći originale tj. $\sigma_{ij}(t, x_d)$ i $\epsilon_{ij}(t, x_d)$, što i jesu rešenja postavljenog problema teorije linearne visko-elastičnosti u originalu. U ovom poslednjem koraku tj. u odredjivanju originala iz lika leže i najveće poteškoće u primjeni navedenog metoda.

Laplas-Karsonov metod integralnih transformacija ima ograničenu oblast primjene. Pri transformaciji graničnih uslova oblika (1.2.214) predpostavljalo se da se granice tijela ne mijenjaju u procesu opterećivanja, kao i da se granice površi S_σ i S_u , na kojima su zadati naponi i pomjeranja, ne mijenjaju tokom vremena. Zbog toga se navedeni metod ne može koristiti za rješavanje problema kod kojih je granica unaprijed nepoznata, ili je promjenljiva (npr. kontaktne probleme).

Za oba do sada navedena metoda, za rješavanje problema teorije linearne visko-elastičnosti, karakteristično je da jezgra integralnih operatora, dakle $\bar{\Pi}$ i $\bar{\Pi}_1$ odnosno $\bar{\Gamma}$ i $\bar{\Gamma}_1$, moraju biti zadana analitički, što bitno utiče na lakoću potpunog rješavanja problema. U vezi s tim javila se neophodnost iznalaženja metoda koji bi dovodio do rešenja problema nezavisno od toga u kakvom su obliku zadana jezgra operatora. Takav metod, koji ima primjenu kod široke klase problema, predložio je A.A. Iljušin u radu [59].

Napomena: Ako se umjesto relacije

$$\vartheta_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) dS_{ij}.$$

koristi relacija

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2G} \left[S_{ij} + \int_0^t P(t-\tau) S_{ij} d\tau \right].$$

onda umjesto Laplas-Karsonove transformacije treba koristiti Laplasovu integralnu transformaciju oblika

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \quad \dots (1.2.216)$$

2.4.3. Iljušinov metod aproksimacija

Iljušinov metod aproksimacija je zasnovan na korišćenju Laplas-Karsonovih integralnih transformacija i na specijalnom prestavljanju rešenja odgovarajućeg problema teorije elastičnosti. Osnovna karakteristika metoda je što se konačno rješenje dobija nezavisno od oblika u kojem je zadano jezgro operatora (analitički, grafički ili tabelarno). Pri korišćenju metoda pretpostavlja se da su termomehanička svojstva posmatranog linearno visko-elastičnog materijala u skladu sa temperaturno-vremenskom analogijom i da su zapreminske deformacije idealno elastične. Tada su veze između napona i deformacija, posmatranog linearno visko-elastičnog materijala, oblika

$$\vartheta_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) dS_{ij} \quad S_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\vartheta_{ij} \quad \dots (1.2.217)$$

$$\theta = \frac{1}{K} \bar{\sigma} \quad ; \quad \bar{\sigma} = K \theta.$$

Ako se na predhodne jednačine primijeni Laplas-Karsonova transformacija (1.2.209), dobija se

$$\bar{\vartheta}_{ij} = \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_{ij}, \quad \bar{\theta} = \frac{1}{K} \bar{\sigma} \quad ; \quad \bar{S}_{ij} = \bar{\Gamma} \cdot \bar{\vartheta}_{ij}, \quad \bar{\sigma} = K \cdot \bar{\theta} \quad \dots (1.2.218)$$

Prema tome, granični problem linearne visko-elastičnosti, prikazan preko Laplas-Karsonovog lika, određen je relacijama (1.2.212-214) i (1.2.218) u potpunosti se poklapa sa odgovarajućim graničnim problemom teorije elastičnosti, s tim što kod ovog drugog treba izvršiti zamjene sledećeg oblika

$$2G \rightarrow \bar{\Gamma}, \quad \frac{1}{2G} \rightarrow \bar{\Pi}, \quad S_{ij} \rightarrow \bar{S}_{ij}, \quad \vartheta_{ij} \rightarrow \bar{\vartheta}_{ij}, \quad \dots (1.2.219)$$

$$\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\sigma}, \quad \theta \rightarrow \bar{\theta}, \quad u_i \rightarrow \bar{u}_i, \quad x_i \rightarrow \bar{x}_i,$$

$$x_{vi} \rightarrow \bar{x}_{vi}, \quad u_{io} \rightarrow \bar{u}_{io}, \quad K \rightarrow K.$$

Uvodeći u razmatranje funkciju

$$\omega = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}, \quad \dots (1.2.220)$$

na osnovu (1.2.219) je

$$\bar{P} \cdot \bar{P} = 1, \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{P}}{3K}, \quad \frac{1}{\bar{\omega}} = 3K \cdot \bar{P}. \quad \dots (1.2.221)$$

Neka u nekoj tački A na granici ili unutar tijela djeluje sila \mathbf{P} i neka je u nekoj tački B (može da se poklapa sa A) zadano pomjeranje \mathbf{U} . Problem se sastoji u tome da se u proizvoljnoj (fiksiranoj) tački M unutar ili na granici tijela izračunaju komponente tenzora napona, tenzora deformacije, komponente vektora pomjeranja, ili, opštije, neki broj skalarnih veličina tipa S, dimenzija kojih se (sa tačnošću do množitelja) poklapa sa dimenzijom sile \mathbf{P} , (dimenzija množitelja zavisi od dužine), i neki broj veličina tipa W dimenzija kojih zavisi samo od dužine. Imajući u vidu činjenicu da su rešenja mnogih problema teorije elastičnosti i otpornosti materijala upravo data u tom obliku, proizilazi da je postavljeni zahtjev pogodan i dovoljno opšt. jer se pod veličinom S mogu podrazumijevati: napon, moment savijanja, reakcija, a pod veličinom W: ugib, nagib, krivina,

Takodje je poznato da se u rješenjima problema teorije elastičnosti i otpornosti materijala mogu pojaviti i neke od fizičkih konstanti E, G, K, λ, μ , kao i da su od njih samo dvije nezavisne. Pri rješavanju problema teorije linearne visko-elastičnosti, metodom aproksimacija [59] A.A. Iljušin je za nezavisne fizičke konstante usvojio zapreminski moduo elastičnosti K i koeficijent ω (1.2.220). Relacije kojima se ostale fizičke konstante izražavaju preko K i ω su

$$\mu = \frac{1-\omega}{2+\omega}, \quad 2G = 3K \omega, \quad \dots (1.2.222)$$

$$E = 9K \frac{\omega}{2+\omega}, \quad \lambda = K(1-\omega).$$

Imajući u vidu predhodno rečeno, rješenje postavljenog problema se može prikazati u obliku

$$S = \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}_{11}, \omega) + K \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{r}_{12}, \omega), \quad \dots (1.2.223)$$

$$W = \frac{\mathbf{P}}{K} \cdot \mathbf{g}_1(\mathbf{r}_{21}, \omega) + \mathbf{U} \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{r}_{22}, \omega),$$

gdje je \mathbf{r}_{mn} ($m, n = 1, 2$) - sveukupnosti geometrijskih dimenzija tijela (uključujući tu i koordinate tačaka M, A i B). Ako na tijelo djeluje sistem sila \mathbf{P}_k i ako postoji \mathbf{U}_ℓ zadatih pomjeranja, onda jednačine iz (1.2.223) imaju oblik

$$S = \sum_k \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{f}_{1k}(\mathbf{r}_{11k}, \omega) + K \sum_\ell \mathbf{U}_\ell \cdot \mathbf{f}_{2\ell}(\mathbf{r}_{12\ell}, \omega), \quad \dots (1.2.224)$$

$$W = \frac{1}{K} \sum_k \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{g}_{1k}(\mathbf{r}_{21k}, \omega) + \sum_\ell \mathbf{U}_\ell \cdot \mathbf{g}_{2\ell}(\mathbf{r}_{22\ell}, \omega),$$

Funkcije f_1, f_2, g_1 i g_2 iz (1.2.223) i f_{1k}, f_{2k}, g_{1k} i g_{2k} iz (1.2.224) su rešenja problema teorije elastičnosti. Ideja metode aproksimacija sastoji se u tome [59] da se funkcije f_{1k}, f_{2k}, g_{1k} i g_{2k} sa dovoljnom tačnošću, za praktične proračune, mogu aproksimirati funkcijom od tri člana u kojima se veličina ω pojavljuje na stepenu 0, 1, -1. Ako se sa $F(r, \omega)$ označi bilo koja funkcija f_i, g_i ($i=1,2$) iz (1.2.223), onda koeficijente tročlana

$$F^1(r, \omega) = F^{(0)}(r) + \omega F^{(1)}(r) + \frac{1}{\omega} F^{(-1)}(r), \quad \dots (1.2.225)$$

$F^{(0)}, F^{(1)}$ i $F^{(-1)}$ treba odabrati tako da za sve vrijednosti veličine ω , odstupanje funkcije F^1 od F bude u nekom smislu minimalno (razlika grafika da je mala, da je sredina kvadratna greška minimalna itd.)

Koristeći aproksimacije oblika (1.2.225) tražene veličine S i W iz (1.2.223) se mogu prikazati u obliku

$$S = P \cdot f_1^{(0)}(r_{11}) + K U f_2^{(0)}(r_{12}) + \omega [P f_1^{(1)}(r_{11}) + K U f_2^{(1)}(r_{12})] + \frac{1}{\omega} [P f_1^{(-1)}(r_{11}) + K U f_2^{(-1)}(r_{12})], \quad \dots (1.2.226)$$

$$W = \frac{P}{K} g_1^{(0)}(r_{21}) + U g_2^{(0)}(r_{22}) + \omega \left[\frac{P}{K} g_1^{(1)}(r_{21}) + U g_2^{(1)}(r_{22}) \right] + \frac{1}{\omega} \left[\frac{P}{K} g_1^{(-1)}(r_{21}) + U g_2^{(-1)}(r_{22}) \right].$$

Treba napomenuti [56] da se za elastično nestišljiv materijal, kao i za mnoge konkretne probleme teorije elastičnosti stišljivog materijala, rešenje dobija baš u obliku (1.2.226), što znači da se metodom aproksimacija, na osnovu njih, može dobiti tačno rješenje odgovarajućeg problema teorije linearne viskoelastičnosti.

Relacijom (1.2.226) je određeno rješenje problema teorije elastičnosti. Imajući u vidu analogiju (1.2.219) tog problema sa problemom viskoelastičnosti u liku (1.2.212-215) i (1.2.221) rješenje ovog poslednjeg se dobija u obliku

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{P} f_1^{(0)}(r_{11}) + K \bar{U} f_2^{(0)}(r_{12}) + \bar{\omega} [\bar{P} f_1^{(1)}(r_{11}) + K \bar{U} f_2^{(1)}(r_{12})] + \\ &+ \frac{1}{\bar{\omega}} [\bar{P} f_1^{(-1)}(r_{11}) + K \bar{U} f_2^{(-1)}(r_{12})], \quad \dots (1.2.227) \\ \bar{W} &= \frac{1}{K} \bar{P} g_1^{(0)}(r_{21}) + \bar{U} g_2^{(0)}(r_{22}) + \bar{\omega} \left[\frac{1}{K} \bar{P} g_1^{(1)}(r_{21}) + \bar{U} g_2^{(1)}(r_{22}) \right] + \\ &+ \frac{1}{\bar{\omega}} \left[\frac{1}{K} \bar{P} g_1^{(-1)}(r_{21}) + \bar{U} g_2^{(-1)}(r_{22}) \right]. \end{aligned}$$

U relacijama (1.2.227) figurišu operatori tipa (1.2.211)

$$\bar{\omega} \cdot \bar{P} = \frac{1}{3K} \bar{P} \cdot \bar{P} . \quad \dots (1.2.228)$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \bar{P} = 3K \bar{\Pi} \bar{P} .$$

Njihovi originali, prema (1.2.210) i (1.2.211), su

$$\frac{1}{3K} \int_0^t \Gamma(t-\tau) dP(\tau), \quad 3K \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) . \quad \dots (1.2.229)$$

Prelazeći sa (1.6.22) na originale, pomoću (1.2.229), dobija se rješenje polaznog problema

$$\begin{aligned} S = & P(t) f_1^{(0)}(r_{11}) + K U(t) f_2^{(0)}(r_{12}) + \frac{1}{3K} f_1^{(1)}(r_{11}) \int_0^t (t-\tau) dP(\tau) + \\ & + \frac{1}{3} f_2^{(1)}(r_{12}) \int_0^t \Gamma(t-\tau) dU(\tau) + 3K f_1^{(-1)}(r_{11}) \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \\ & + 3K^2 f_2^{(-1)}(r_{12}) \int_0^t \Pi(t-\tau) dU(\tau) , \quad \dots (1.2.230) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = & \frac{P(t)}{K} g_1^{(0)}(r_{21}) + U(t) g_2^{(0)}(r_{22}) + \frac{1}{3K^2} g_1^{(1)}(r_{21}) \int_0^t \Gamma(t-\tau) dP(\tau) + \\ & + \frac{1}{3K} g_2^{(1)}(r_{22}) \int_0^t \Gamma(t-\tau) dU(\tau) + 3g_1^{(-1)}(r_{21}) \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \\ & + 3Kg_2^{(-1)}(r_{22}) \int_0^t \Pi(t-\tau) dU(\tau) . \end{aligned}$$

Na kraju treba napomenuti da, ukoliko se razmatra problem teorije linearne termo-visko-elastičnosti, umjesto vremena t , u razmatranje treba uvesti modificirano vrijeme t' , prema (1.2.184) i (1.2.185), na osnovu principa temperaturno vremenske analogije.

Uoptenje metoda aproksimacija

Bilo koja od funkcija f_i ili g_i iz (1.2.223) ili (1.2.224) može se, umjesto (1.2.225), aproksimirati funkcijom oblika

$$F^i(r, \omega) = F^{(0)}(r) + \omega F^{(1)}(r) + \frac{1}{\omega} F^{(-1)}(r) + \sum_k \frac{1}{1 + \beta_k \omega} F_{\beta_k} , \quad \dots (1.2.231)$$

gdje su β_k - realni brojevi, a F_{β_k} - funkcije koje ne zavise od ω . Dakle, u rješenju problema teorije elastičnosti pojavljuju se članovi oblika

$$\frac{P}{1 + \beta \omega} i \frac{U}{1 + \beta \omega} , \quad \dots (1.2.232)$$

Ovakvim članovima, kod problema teorije linearne viskoelastičnosti u Laplas-Karsonovom liku, odgovaraju članovi

$$\frac{\bar{P}}{1 + \beta \bar{\omega}} i \frac{\bar{U}}{1 + \beta \bar{\omega}} , \quad \dots (1.2.233)$$

pa je, u cilju rješavanja problema linearne visko-elastičnosti, neophodno naći original lika datog sa (1.2.233). U tom cilju se može uvesti funkcija

$$\bar{g}_\beta = \frac{1}{1+\beta\omega} \quad \text{..... (1.2.234)}$$

tako da original lika (1.2.233) ima oblik

$$\int_0^t g_\beta(t-\tau) dP(\tau), \quad \text{..... (1.2.235)}$$

pri čemu je g_β - funkcija tzv. vezanog puženja [48] i određuje se eksperimentalno [48] na osnovu testova puženja i relaksacije. Prema tome, rješenjima oblika (1.2.230) treba dodati i:

$$\sum_k \int_0^t g_{\beta k}(t-\tau) dP \quad \text{i} \quad \sum_k \int_0^t g_{\beta k}(t-\tau) dU \quad \text{..... (1.2.236)}$$

2.4.4. Metod usrednjavanja

Za rješavanje dinamičkih problema (prostiranje talasa i oscilacije) visko-elastičnosti najčešće su se koristili operatorski metod i metod integralnih transformacija.

Osnovnu poteškoću u primjeni operatorskog metoda, zasnovanog na Volterinom principu i činjenici da važi komutativnost vremenskih diferencijalnih i integralnih operatora, predstavlja "dešifrovanje" algebarskih ili transcendentnih funkcija operatora [56].

Od integralnih transformacija najviše je korištena Laplasova transformacija (1.2.216) [60] i [61], dok je određen broj problema riješen Furijeovom transformacijom [62]

$$\bar{f}(p) = \int_0^t e^{-ipt} f(t) dt.$$

U posljednje vrijeme se brzo razvio, i uspješno se koristi za rješavanje dinamičkih problema teorije visko-elastičnosti, metod usrednjavanja koji se zasniva na usrednjavanju funkcija koje ulaze u sastav odgovarajućih jednačina. Metod je, za rješavanje sistema diferencijalnih jednačina, predložio Bogoljubov [63]. Za rješavanje sistema integro-diferencijalnih jednačina primijenjen je u radu [64]. Zatim su, primjenom metoda usrednjavanja, dobiveni i prvi fundamentalni rezultati u rješavanju problema dinamike visko-elastičnih tijela [65].

Metod se sastoji u sledećem: veliki broj dinamičkih problema teorije linearne visko-elastičnosti se svodi na rješavanje sledećeg sistema integro-diferencijalnih jednačina ([65], [55], [51])

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_\alpha, t) + \varepsilon \cdot \varphi_k(x_\alpha, t) + \varepsilon \int_0^t \psi_k(t, s, x_\alpha(s)) ds \quad \dots (1.2.237)$$

gdje su: $x_k = x_k(t)$ - tražene funkcije

f_k, φ_k, ψ_k - poznate funkcije svojih argumenata

ε - mali parametar

$k, \alpha = 1, 2, 3, \dots, n$.

Sistem jednačina (1.2.237) se može prevesti na tzv. standardni oblik

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon \left[F_k(x_\alpha, t) + \int_0^t \Phi_k(t, s, x_\alpha(s)) ds \right], \quad x_k(0) = (x_k)_0 \quad \dots (1.2.238)$$

U tom cilju, neophodno je naći opšte rješenje sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_\alpha, t). \quad \dots (1.2.239)$$

Neka je to rješenje oblika

$$x_k = \eta_k(t, C_\alpha). \quad \dots (1.2.240)$$

Shvatajući veličine C_α kao funkcije od vremena $C_\alpha(t)$ [58], relacija

(1.2.240) se može koristiti za prelaz sa promjenljivih x_k na promjenljive C_α .

Pri tome se sistem jednačina (1.2.237) transformiše na standardni oblik

(1.2.238)

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial C_\alpha} \cdot \frac{dC_\alpha}{dt} = \varepsilon \left[\varphi_k(\eta_\alpha(t, C_\alpha) + \int_0^t \psi_k(t, s, \eta_\alpha(C_\alpha(s), s)) ds \right]. \quad \dots (1.2.241)$$

Pod srednjom vrijednosti neke funkcije $f(t)$ podrazumijeva se

$$f^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad \dots (1.2.242)$$

Za funkcije dvije i više promjenljivih t, x, \dots moguće je izračunati srednje vrijednosti po bilo kojoj promjenljivoj, npr. f_t^*, f_x^*, \dots

Sa ciljem primjene metode usrednjavanja za rješavanje sistema jednačina (1.2.238) izračunaćemo, predhodno, integrale oblika

$$\int_0^t \Phi(t, s, x) ds = \Phi_0(t, x), \quad \dots (1.2.243)$$

po promjenljivoj s , smatrajući promjenljive x i t parametrima. Indeks k kod svih funkcija će se ispuštati jer ne utiče na opštost razmatranja. Sada će se funkcija $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$ osredniti po promjenljivoj t , tj. naći će se funkcija $z_0(x)$ kao

$$z_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(x, t) + \Phi_0(x, t)] dt, \quad \dots (1.2.244)$$

što znači da se sistem jednačina (1.2.238) svodi na

92.

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \cdot z_0(\xi), \quad \xi(0) = x_0 \quad (\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r). \quad \dots (1.2.245)$$

Može se dokazati da, ukoliko su zadovoljena neka ograničenja za funkcije $F(x, t)$, $\Phi(t, s, x)$, $z_0(x)$, je rješenje usrednjenog sistema $\xi_k(t)$ blisko rješenju polaznog sistema $x_k(t)$ [66], [55]. Pošto je integraljenje sistema (1.2.245) znatno jednostavnije, to je prelaz na usrednjeni sistem jednačina veoma prikladan.

Na kraju treba reći [51] da razlika $|x(t) - \xi(t)|$ zavisi od veličine malog parametra ε koja je određena i ne može se smanjivati prema želji. To znači da kod metode usrednjavanja ne postoji mogućnost da se poboljša aproksimacija. Ipak takva mogućnost je nadjena [51] formiranjem takozvanih viših približenja. U tom cilju se rješavanje sistema jednačina (1.2.238) obično aproksimira na sledeći način

$$x = \xi + \varepsilon \cdot u_1(t, \xi) + \varepsilon^2 \cdot u_2(t, \xi) + \dots, \quad \dots (1.2.246)$$

Problem se sada svodi na određivanje funkcija ξ , $u_k = u_k(t, \xi) (k=1, 2, \dots)$.

Funkcija $\xi(t)$ se određuje iz jednačine

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \cdot \Psi_1(\xi) + \varepsilon^2 \cdot \Psi_2(\xi) + \dots \quad \dots (1.2.247)$$

gdje su $\Psi_1, \Psi_2 \dots$ takodje nepoznate funkcije. Promjenljiva x treba da zadovoljava jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon [F(x, t) + \Phi_0(x, t)], \quad \dots (1.2.248)$$

pri čemu $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$ može biti razložena u red uzimanjem u obzir (1.2.246).

Ako se sada (1.2.246) i, razložena u red, funkcija $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$ postave u (1.2.248), uz uzimanje u obzir relacije (1.2.247) i izjednačavanje veličina uz isti stepen ε , iz (1.2.248) se mogu odrediti nepoznate funkcije Ψ_1, Ψ_2, \dots .

GLAVA II: POSTAVKE I REŠENJA GRANIČNIH PROBLEMA OBRADE
METALA PRITISKOM I VISKO-ELASTIČNO DEFORMISANJE
ŠUPLJEG CILINDRA

Glava je posvećena sistematskom rešavanju novih problema vezanih za hladno presovanje i valjanje tankog metalnog sloja. Istraženi su sledeći problemi: presovanje tankog sloja metala oblika elipse, dobijanje koncentričnih kružnih rebara, udar tereta o kružni disk i prsten i valjanje metalnog lima. Uopšten je efektivni metod karakteristika i dobivena su tačna (analitička) rešenja nekoliko novih problema. Osim toga, predložen je metod rešavanja, i dobivena su rešenja, problema dinamičkog ponašanja visko-elastičnog šupljeg cilindra, obloženog elastičnom ljuskom, u nehomogenom i nestacionarnom temperaturnom polju.

1. PROBLEMI HLADNOG PRESOVANJA I VALJANJA TANKOG METALNOG SLOJA

1.1. KRATKI PRIKAZ TEORIJE TEČENJA TANKOG SLOJA PLASTIČNOG MATERIJALA PO POVRŠINAMA

Kao što je ranije bilo rečeno, teoriju tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površima predložio je A.A. Iljušin [1], [2] i [3] od 1954 - 1958. god. Teoriju je formirao na osnovu hipoteze kinematičkog karaktera i hipoteza koje definišu kontaktni napon trenja. Formulirao je tri osnovna problema i ukazao na mogućnosti uprošćavanja jednačina koje ih opisuju. Za rješavanje klase problema kod kojih je $h=h(t)$ A.A. Iljušin je predložio metod analogije sa pješčanim nasipom [2]; o čemu je ranije bilo više govora. Na osnovu pješčane analogije riješio je [1] problem slobodnog rasticanja kružnog prstena, kao i probleme vezane za presovanje rebrastih ploča [2]. Za pomenutu klasu problema našao je izraze za odredjivanje brzina tečenja pri rasticanju tankih plastičnih slojeva. Ti izrazi su dati relacijama (1.2.108) i (1.2.109). Na osnovu relacije (1.2.109) V.N. Bezuhov [4] je dobio diferencijalnu jednačinu, čije rješenje omogućava da se ustanovi oblik konture tankog sloja plastičnog materijala koji slobodno i teče tokom vremena ako je poznat oblik konture jednostruko povezane oblasti i ako ima osu simetrije (npr. osu x). Ta jednačina ima oblik

$$y^2 y''_{xx} + 2y(1+y'^2_x) = 2y'x,$$

sa početnim uslovom

$$y(x,t)|_{t=0} = \tilde{P}(x),$$

gdje je $\tilde{P}(x)$ zadana funkcija, koja odredjuje konturu početne oblasti.

Predhodna diferencijalna jednačina može se riješiti samo numerički što ukazuje na složenost rješavanja problema tečenja tankih slojeva plastičnog materijala sa pokretnom granicom.

U radu [5] J.S. Arutjunov je za rješavanje problema tečenja tankih slojeva sa debljinom $h=h(x)$ koristio metod Ležandrovih transformacija, i pomoću njega je rješavao ravanske i osnosimetrične probleme. Tim metodom je riješio i problem valjanja tankog lima [6].

Problem valjanja tankih limova A.A. Iljušin je, u radu [2], riješio za slučaj malog stepena deformisanja, i formulirao teoremu o postojanju zone zastoja. Osim toga dobio je formulu za odredjivanje granice lima koja se pomjera zbog širenja materijala pri valjanju.

Suštinski doprinos razvoju teorije tečenja po površinama dao je I.A.Kijko svojim mnogobrojnim radovima [7]. On je predložio varijacioni metod rješavanja problema tečenja po elastično deformisanim površima. Postavio je, i riješio, mnoge za praksu interesantne probleme (valjanje limova uz uzimanje u obzir elastičnih deformacija valjaka, razvlačenje cijevi i dr.). Za rješavanje mnogih problema koristio je metod postupnog približavanja.

U radovima P.M.Ogibalova i I.A.Kijka ([8], [9]) izračunati su, metodom pješčane analogije, kontaktni pritisci i ukupna sila presovanja kod rebrastih ploča, a takodje je izvršena i eksperimentalna provjera teorijskih rezultata.

U radu J.S.Arutjunova i A.L.Gonora [10], predložen je metod karakteristika za određivanje pritiska p u fiksiranoj oblasti $S(x,y)$ sa debljinom sloja $h=h(x)$.

V.A.Kadimov je [11] dalje razvio ovaj efektivni metod, o čemu je bilo više govora u dijelu 1.2.2, i treba naglasiti da pomoću njega određuje polja brzina i pritisaka kao i oblik oblasti koju zauzima materijal za slučaj kada je pritisak po konturi konstantan.

1.2. STATIČKI PROBLEMI

1.2.1. Presovanje tankog sloja plastičnog materijala sa osnovom u obliku elipse

Postavka problema. Dokaz da se krajnje tačke rebra rasticanja poklapaju sa centrima minimalnih krivina elipse.

Plastični sloj materijala zauzima oblast $S_t = S_0 : x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 \leq 0$, sa granicom $\Gamma_t = \Gamma_0 : x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. Konstantne je debljine h_0 i pritiska se pomoću dvije ravne radne površi ($A=B=1$, $\alpha=x$, $\beta=y$). Po konturi elipse se nalazi žljeb širine δ (reda veličine h_0) u koji materijal slobodno utiče. Brzina približavanja radnih površina je poznata i jednaka dh/dt . Biće razmatran slučaj Prandtlovog trenja ($\tau(p) = \tau_T$).

Imajući u vidu predhodno rečeno, iz (1.2.69), (1.2.70) i (1.2.71) se dobijaju sledeće relacije za određivanje polja pritiska $p(x,y)$ i polja brzina $U_x(x,y,t)$ i $U_y(x,y,t)$

$$\text{grad } p = - \frac{2 \tau_T}{h} \cdot \frac{\vec{U}}{U} ; \quad \dots (2.1.1)$$

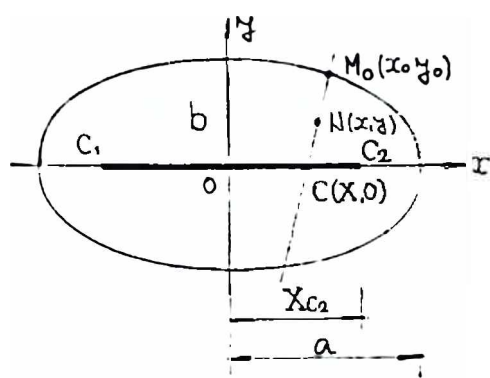
$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} ; \quad \dots (2.1.2)$$

$$p(x,y,t) \Big|_{\Gamma} = 2 \tau_T. \quad \dots (2.1.3)$$

Pošto je pritisak po konturi konstantan (2.1.3) i pošto je vektor grad p normalan na linije konstantnog pritiska, a samim tim i na konturu, to se može zaključiti da su linije toka normalne na konturu. Znak "-" u relaciji (2.1.1) označava da pritisak raste u smjeru suprotnom od smjera brzine čestice, tj. ka unutrašnjosti elipse. To znači da u unutrašnjosti elipse postoje tačke u kojima pritisak dostiže maksimalnu vrijednost, tj. u kojima je grad $p=0$, odnosno u kojima je brzina jednaka nuli ($\vec{U}=0$). Skup tih tačaka čini rebro rasticanja materijala koji se plastično deformiše. U radu [1] je ukazano na neke osobine rebra rasticanja. Nije teško zaključiti da će u problemu koji se razmatra rebro rasticanja biti duž koja se nalazi na osi x (Sl. 2.1.1) i obuhvata sve tačke između tačaka C_1 i C_2 .

U daljem tekstu će biti pokazano da se tačke C_1 i C_2 , poklapaju sa centrima minimalnih krivina elipse, tj. da važi

$$a-R \Big|_{\substack{x_0=a \\ y_0=b}} = X_{C_2}, \quad \dots (2.1.4)$$



gdje je R poluprečnik krivine elipse, a X_{C_2} koordinata tačke C_2 . U tom cilju uočiće se linija toka* kroz proizvoljnu tačku M_0 sa konture (Sl. 2.1.1).

Jednačina konture elipse ima oblik

$$F(x_0, y_0) = y_0^2 + b^2 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = 0. \quad \dots (2.1.5)$$

Poluprečnik krivine elipse u tački M_0 je

$$R = \frac{[1 + (F'x_0)^2]^{3/2}}{F''x_0} = \dots = \frac{[a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2]^{3/2}}{b^4 a^4},$$

odnosno

$$R \Big|_{\substack{x_0=a \\ y_0=b}} = \frac{b^2}{a}. \quad \dots (2.1.6)$$

Jednačina normale, koja prolazi kroz tačke $M_0(x_0, y_0)$ i $C(X, 0)$ ima oblik

$$y_0 - 0 = \frac{F'y_0}{F'x_0} (x_0 - X),$$

pa je

$$X = x_0 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right). \quad \dots (2.1.7)$$

Specijalno, kada $x \rightarrow a \Rightarrow X \rightarrow a - \frac{b^2}{a} = X_{C_2}$, čime je tvrdjenje (2.1.4) dokazano. Ako je $a=b=R$ dobija se da je $X_{C_2}=0$ što je poznato od ranije [1].

*Na osnovu relacija (2.1.1) i (2.1.2) nije teško pokazati da su linije toka prave linije.

Odredjivanje polja brzina i polja pritiska

Brzina proizvoljno uočene čestice koja se kreće po liniji toka je

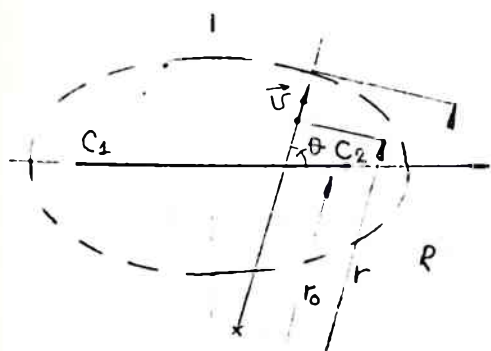
$$U = |\vec{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

ili

$$U_x = U \cos \theta; \quad \dots (2.1.8)$$

$$U_y = U \sin \theta.$$

gdje je θ ugao između linije toka i ose Ox (Sl. 2.1.2). Imajući u vidu (2.1.8), relacija (2.1.1.) se može napisati preko dvije skalarne



Sl. 2.1.2.

relacije oblika

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\tau_T}{h} \cos \theta = - \frac{2\tau_T}{h} \cdot \frac{U_x}{U}; \quad \dots (2.1.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2\tau_T}{h} \sin \theta = - \frac{2\tau_T}{h} \frac{U_y}{U}.$$

Označavajući sa r rastojanje od centra krivine do proizvoljno uočene tačke (Sl. 2.1.1) odgovarajuće linije toka, važi

$$x = X + (r - r_0) \cos \theta \quad \text{ili} \quad X = x_0 (1 - b^2/a^2); \quad \dots (2.1.10)$$

$$y = (r - r_0) \sin \theta.$$

Eliminacijom pritiska $p(x, y)$ iz (2.1.9), uz korišćenje (2.1.8), može se, na osnovu (2.1.9) i (2.1.2), naći izraz za brzinu

$$U = - \frac{1}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (r - \frac{r_0^2}{r}). \quad \dots (2.1.11)$$

Za tačke sa konture, predhodna relacija ima oblik

$$U_r = - \frac{1}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (R - \frac{r_0^2}{R}). \quad \dots (2.1.12)$$

Eliminacijom ugla θ iz (2.1.9) dobija se

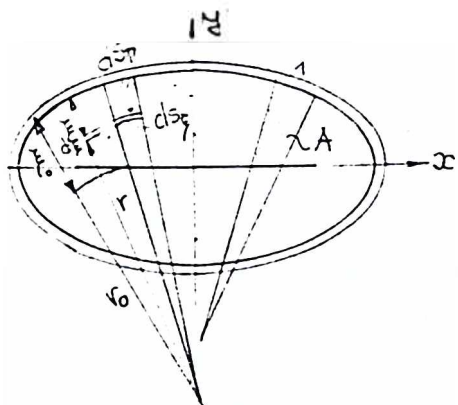
$$p = p_r + \frac{2\tau_T}{h} (R - r), \quad \dots (2.1.13)$$

odnosno

$$p = \tau_T (2 + \frac{R - r}{h}). \quad \dots (2.1.14)$$

jer je $p_r = 2\tau_T$ i ako je $\tau_T = \tau_T/2$.

Odredjivanje visine materijala u žljebu



SL.2.1.3

Koristeći činjenicu da je količina plastično deformisanog materijala koja, u jedinici vremena, prodje kroz površinu jediničnog luka konture, jednaka količini materijala koji udje u žljeb za isto vrijeme, može se napisati sledeća relacija

$$1 \cdot h \cdot \dot{V}_p = -\frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \frac{R^2 - r_0^2}{R} = -\frac{dh}{dt} A = \delta \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.1.15)$$

gdje je

H - visina materijala u žljebu

A - površina između dvije susjedne linije toka, rebra rasticanja i konture (Sl. 2.1.3).

Iz (2.1.3) se dobija

$$H(x_0, t) = \frac{1}{\delta} [h_0 - h(t)] \cdot A(x_0) \quad \dots (2.1.16)$$

Imajući u vidu relacije (2.1.15), (2.1.6) i (2.1.10), kao i sledeće relacije

$$|\text{grad } F| = \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2};$$

$$\sin \theta = \frac{1}{|\text{grad } F|},$$

za konturu oblika elipse, je

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{(1 - x_0^2/a^2)(2 - b^2/a^2) + (b^2 x_0^2)/a^4}{\sqrt{1 + (x_0^2/a^2)(1 - b^2/a^2)}}, \quad \dots (2.1.07)$$

pa se, na osnovu (2.1.16), mogu izračunati maksimalna i minimalna visina materijala u žljebu

$$H_{\max} = H|_{x_0=0} = \frac{1}{\delta} (h_0 - h) \frac{1}{2} b (2 - b^2/a^2); \quad \dots (2.1.18)$$

$$H_{\min} = H|_{x_0=a} = \frac{1}{\delta} (h_0 - h) \frac{1}{2} b \frac{b^2/a^2}{\sqrt{2 - b^2/a^2}}.$$

Specijalno za $a=b=R$ iz (2.1.17) i (2.1.18) dobijaju se poznati rezultati [1]

$$A = \frac{R}{2}; \quad H_{\max} = H_{\min} = \frac{1}{\delta} (h_0 - h) \frac{R}{2} = \text{const.}$$

Da bi se odredila ukupna sila presovanja Q neophodno je prvo odrediti silu dQ potrebnu za presovanje materijala koji se nalazi između dvije linije toka na rastojanju dS_T po luku konture (Sl.2.1.3). Uvodeći novu promjenljivu $\xi = R - r$, relacija (2.1.14) ima oblik

$$p = \sigma_T (2 + \xi/h), \quad \xi \in [0, \xi_0], \quad \dots (2.1.19)$$

pa je

$$dQ = \int_0^{\xi_0} p(\xi) dS_{\xi} d\xi.$$

Sa Sl. 2.1.3. se vidi da važi

$$(dS_{\xi}/dS_{\rho}) = (r/R) = 1 - (\xi/R),$$

pa je

$$dQ = \left[\int_0^{\xi_0} p(\xi) (1 - \xi/R) d\xi \right] dS_{\rho}.$$

Dakle, izraz za odredjivanje ukupne sile presovanja dobija oblik

$$Q = \int_{S_{\rho}} \left[\int_0^{\xi_0} p(\xi) (1 - \xi/R) d\xi \right] dS_{\rho}, \quad \dots (2.1.20)$$

gdje je dS - element dužine luka elipse. Izračunavanje sile Q , na osnovu (2.1.20), se svodi na rješavanje eliptičkih integrala.

Specijalno, za materijal oblika kružnog diska $\xi_0 = R$ i $dS_{\rho} = R d\varphi$, se, na osnovu (2.1.20), dobija poznati rezultat [1].

$$Q = 2R^2 G_T [1 + R/Gh] T.$$

1.2.2. Koncentrična kružna rebra u procesima tečenja plastičnog materijala po površinama

Postavka problema

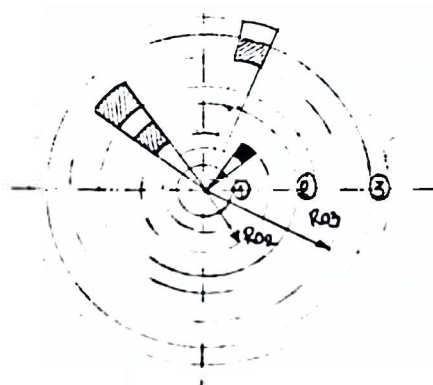
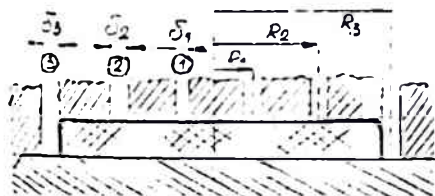
Tanki sloj plastičnog materijala se nalazi između dvije krute, ravne i paralelne ravne površi. Usled prinudnog primicanja radnih površi, u pravcu njihove zajedničke normale, materijal se plastično deformiše. Ako se na jednoj radnoj površi nalaze žljebovi, rasporedjeni po nekoj proizvoljnoj liniji, onda će u toku procesa tečenja materijal uticati u žljebove i tako obrazovati rebra. Smatra se da su žljebovi dovoljno veliki tako da materijal može slobodno u njih da utiče, i da se na površima kontakta može usvojiti zakon trenja po Prandtlu. U uslovima kada se inercijalne sile mogu zanemariti (statički problemi) tečenje materijala se opisuje jednačinama (2.1.1), (2.1.2) i (2.1.3). Na radnim površima, kao što je ranije naglašeno, postoje tačke u kojima pritisak dostiže maksimalnu vrijednost. Skup tih tačaka čini tzv. rebro rasticanja. U radu [1] je pokazano da kružni prsten poluprečnika a i b ima rebro rasticanja oblika kružnice radijusa $r_0 \approx (a+b)/2$. Za kružni disk je $r_0 = 0$, što znači da se rebro rasticanja transformiše u tačku.

Rješenje nekih novih problema

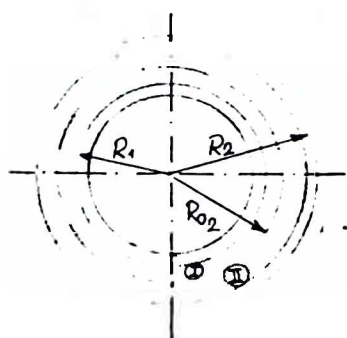
Predmet daljeg razmatranja biće materijal kružnog oblika, koji se pritiska ravnom radnom površi sa žljebovima u obliku koncentrisanih kružnica.

Neka žljebovi imaju širinu $\delta_1, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n$ i poluprečnik $R_1, \dots, R_k, \dots, R_n$. Prvo će se, radi jednostavnosti, razmatrati slučaj kada postoje tri žljeba, kao što je to prikazano na Sl. 2.1.4.

Važno je uočiti da se uticanje materijala u žljebove vrši nezavisno, što znači da se visina materijala i sila preslovanja za pojedine žljebove mogu izračunavati na osnovu relacija (2.1.16) i (2.1.20). Jasno je, na osnovu



Sl. 2.1.4



Sl. 2.1.5

pješčane analogije, da su rebra rastićanja kružnice poluprečnika R_{o2} i R_{o3} i tačka O (Sl. 2.1.4). Odredjivanje veličina R_{o2} i R_{o3} vrši se na osnovu relacije (2.1.13) i graničnih uslova oblika (2.1.3). Naime, na osnovu jednačine

$$p(r, t) = p_r + \frac{2\tau_T}{h} (R - r);$$

$$p_r|_{r=R_1} = 2\sigma_T \quad \text{i} \quad p_r|_{r=R_2} = 2\sigma_T,$$

zakoni promjene pritiska u oblastima I i II (Sl. 2.1.5) su

$$p_I(r, t) = 2\sigma_T - \frac{2\tau_T}{h} (R_1 - r),$$

$$p_{II}(r, t) = 2\sigma_T + \frac{2\tau_T}{h} (R_2 - r).$$

Imajući u vidu da mora biti zadovoljen uslov oblika

$$\text{za } r=R_{o2}: p_I(R_{o2}, t) = p_{II}(R_{o2}, t),$$

iz navedenih relacija se dobija

$$R_{o2} = (R_1 + R_2)/2, \quad \dots (2.1.21)$$

$$R_{o3} = (R_2 + R_3)/2.$$

Visina materijala u žljebovima se odredjuje na osnovu relacije

$$H = \frac{h_0 - h}{\sigma} A,$$

gdje su: δ - širina žljeba

h_0 - početna debljina materijala

A - površina materijala koju formiraju: dvije linije toka na međusobnom jediničnom rastojanju idući po luku žljeba i rebara rastićanja lijevo i desno od žljeba. pa je

$$A = A_L + A_D.$$

gdje su A_L i A_D djelovi ukupne površine sa lijeve i desne strane od žljeba.

Prema tome, visine materijala u žljebovima 1,2 i 3 (Sl.2.1.4) su:

rebro 1

$$(A_L + A_D)_1 = A_1 = \frac{R_{o2}^2}{2R_1}, \quad \dots (2.1.22)$$

$$H_1 = \frac{1}{\delta_1} (h_o - h) \frac{R_{o2}^2}{2R_1}.$$

rebro 2

$$(A_L + A_D)_2 = A_2 = \frac{R_{o3}^2 - R_{o2}^2}{2R_2}; \quad \dots (2.1.23)$$

$$H_2 = \frac{1}{\delta_2} (h_o - h) \cdot \frac{R_{o3}^2 - R_{o2}^2}{2R_2},$$

rebro 3

$$(A_L + A_D)_3 = A_3 = \frac{R_{o3}^2 - R_{o2}^2}{2R_3} \quad \dots (2.1.24)$$

$$H_3 = \frac{1}{\delta_3} (h_o - h) \cdot \frac{R_{o3}^2 - R_{o2}^2}{2R_3}.$$

U slučaju kada umjesto tri žljeba postoji n žljebova, relacije (2.1.22-24) dobijaju oblik

$$H_1 = \frac{1}{\delta_1} (h_o - h) \cdot \frac{R_{o2}^2}{2R_1};$$

$$H_k = \frac{1}{\delta_k} (h_o - h) \cdot \frac{(R_{ok+1}^2 - R_{ok}^2)}{2R_k}; \quad (k=2,3,\dots,n-1) \quad \dots (2.1.25)$$

$$H_n = \frac{1}{\delta_n} (h_o - h) \cdot \frac{R_{on}^2 - R_{o(n-1)}^2}{2R_n}.$$

Uslovljavajući da je rastojanje izmedju žljebova isto, tj. da je

$$R_k = k a, \quad \dots (2.1.26)$$

iz relacija (2.1.25) se, na osnovu (2.1.21), dobija

$$H_1 = \frac{1}{\delta_1} (h_o - h) \cdot \frac{9}{8} a;$$

$$H_k = \frac{1}{\delta_k} (h_o - h) a; \quad (k=2,3,\dots,n-1) \quad \dots (2.1.27)$$

$$H_n = \frac{1}{\delta_n} (h_o - h) \cdot \frac{4n-1}{n} \cdot \frac{a}{8}.$$

Ako se zahtijeva da je i širina žljebova ista, tj. da je $\delta_1 = \dots = \delta_k = \dots = \delta_n$, na osnovu (2.1.27), dobija se

$$H_1 = 9/8 \cdot H_k; \quad (k=2,3,\dots,n-1) \quad \dots (2.1.28)$$

$$H_n = 11/24 \cdot H_k.$$

Obratno, ako se zahtijeva da je visina materijala u žljebovima ista, tj. da je

$H_1 = \dots = H_k = \dots = H_n$, onda se, na osnovu (2.1.27), dobija

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 9/8 \cdot \sigma_k \quad (k=2,3,\dots,n-1); \\ \sigma_n &= 11/24 \cdot \sigma_n. \end{aligned} \quad \dots (2.1.29)$$

Za određivanje ukupne, potrebne sile presovanja, treba imati u vidu da integral u srednjoj zagradi relacije (2.1.20) ne zavisi od toga koja se linija toka razmatra, što znači da se može napisati u sledećem obliku

$$Q = 2R\pi \int_0^{R_0} p(\xi)(1-\xi/R)d\xi. \quad \dots (2.1.30)$$

U slučaju kada postoji n žljebova, ukupna sila presovanja jednaka je zbiru sila presovanja potrebnih da materijal do određene visine ispuni žljebove, tj. važi

$$Q_{(n)} = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad \dots (2.1.31)$$

Sile Q_i određuju se na osnovu (2.1.31) i (2.1.30)

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2R_1\pi \left[\int_0^{R_1} p(\xi)(1-\xi/R_1)d\xi + \int_0^{(R_2-R_1)/2} p(\xi)(1-\xi/R_1)d\xi \right]; \\ Q_k &= 2R_k\pi \left[\int_0^{(R_k-R_{k-1})/2} p(\xi)(1-\xi/R_k)d\xi + \int_0^{(R_{k+1}-R_k)/2} p(\xi)(1-\xi/R_k)d\xi \right]; \quad k=2,3,\dots,n-1 \\ Q_n &= 2R_n\pi \left[\int_0^{(R_n-R_{n-1})/2} p(\xi)(1-\xi/R_n)d\xi \right], \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} Q_{(n)} &= 2\pi \left[R_1 \int_0^{R_1} p(\xi)(1-\xi/R)d\xi + \sum_{k=2}^{n-1} R_k \int_0^{(R_k-R_{k-1})/2} p(\xi)(1-\xi/R_k)d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} R_k \int_0^{(R_{k+1}-R_k)/2} p(\xi)(1-\xi/R_k)d\xi \right]. \quad \dots (2.1.32) \end{aligned}$$

Razmatrajući slučajeve za koje važi relacija (2.1.26), (2.1.32) dobija oblik

$$Q_{(n)} = 2\pi a \left[\int_0^a p(\xi)(1-\xi/a)d\xi + \int_0^{a/2} \left\{ p(\xi) \left[2\left(\frac{n-1}{2}n-1\right)+n+1 \right] - [2(n-2)+2]\xi/2 \right\} d\xi \right],$$

odnosno

$$Q_{(n)} = 2\pi a \left[\int_0^a p(\xi)(1-\xi/a)d\xi + (n-1) \int_0^{a/2} p(\xi)(n+1-2\xi/a)d\xi \right]. \quad \dots (2.1.33)$$

Imajući u vidu relaciju (2.1.14), predhodna relacija je

$$Q_{(n)} = 2\pi a^2 G_T \left[(2n^2-n+1)/2 + (3n^2-2n+3)a/(24H) \right]. \quad \dots (2.1.34)$$

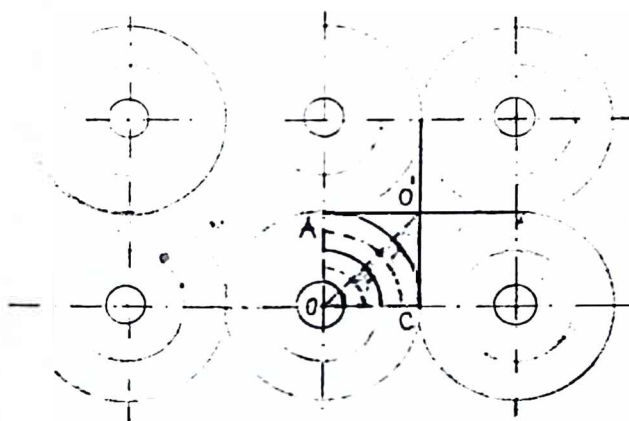
gdje n predstavlja broj žljebova. Specijalno za $n=1,2,3,\dots$, dobijaju se sledeći izrazi

$$n=1: Q_{(1)} = 2\pi a^2 \left[\zeta_T \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{H} \right) \right]; \quad \dots (2.1.35)$$

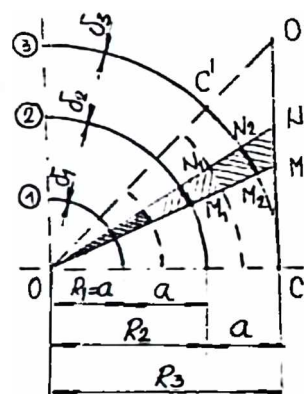
$$n=2: Q_{(2)} = 2\pi a^2 \zeta_T \left(\frac{7}{2} + \frac{11}{24} \cdot \frac{a}{H} \right); \quad \dots (2.1.36)$$

$$n=3: Q_{(3)} = 2\pi a^2 \zeta_T \left(8 + \frac{a}{H} \right). \quad \dots (2.1.37)$$

Dalje će biti razmatran slučaj kada jedna od radnih površi ima žljebove oblika prikazanih na Sl. 2.1.6. Na toj slici je, radi jednostavnosti, prikazan slučaj kada u svakoj od ćelija postoje po tri koncentrična kružna žljeba.



SL.2.1.6



SL.2.1.7.

U cilju odredjivanja visine materijala u žljebovima i potrebne sile presovanja, uočiće se element OCO' jedne ćelije, što je prikazano na Sl.2.1.7. Na osnovu pješćane analogije se može zaključiti da rebra rasticanja sačinjavaju: centri O koncentričnih kružnica, koncentrične kružnice koje prolaze kroz polovine rastojanja izmedju rebara i duži AB i CD . Rebra rasticanja su, na Sl. 2.1.6, prikazana zadebljanim linijama.

Visina materijala u žljebovima se može izračunati na bazi relacija (2.1.27)

$$H_1 = \frac{1}{\delta_1} (h_o - h) \frac{9}{8} a; \quad \dots (2.1.38)$$

$$H_k = \frac{1}{\delta_k} (h_o - h) a, \quad k=2,3,\dots,n-1, \quad \dots (2.1.39)$$

dok je za odredjivanje visine materijala u žljebu n neophodno izračunati površinu figure M_1N_1MN (Sl. 2.1.7). Površina trougla OMN je:

$$A_{OMN} = R_n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad \text{za } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right],$$

pa je

$$A_{M_1N_1MN} = R_n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{(R_n^2 - R_{on}^2) \pi}{2R_n \pi} = \frac{a}{2} \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - \frac{11}{12} \right).$$

Tražena visina materijala u žljebu n je

$$H_n = \frac{1}{\delta_n} (h_0 - h) \frac{a}{2} \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - \frac{11}{12} \right). \quad \dots (2.1.40)$$

Ako se uslovljava da je $\delta_1 = \dots = \delta_k = \dots = \delta_n = \bar{\delta}$, važi

$$H_1 = \frac{9}{8} H_k, \quad \dots (2.1.41)$$

$$H_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - \frac{11}{12} \right) \cdot H_k.$$

odnosno, ako se traži da je $H_1 = \dots = H_k = \dots = H_n = H$, dobija se

$$\delta_1 = \frac{9}{8} \delta_k; \quad \dots (2.1.42)$$

$$\delta_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - \frac{11}{12} \right) \delta_k.$$

Za određivanje sile potrebne za presovanje jedne ćelije materijala može se koristiti relacija (2.1.31), pri čemu tako izračunatoj sili treba dodati silu (Q') potrebnu za presovanje materijala određenog površinom $CC'O'$ (Sl. 2.1.7) pomnoženu sa 8. Da bi se izračunala ukupna potrebna sila presovanja, predhodno izračunatu silu treba pomnožiti i sa brojem ćelija N , pa je

$$Q = N(Q_{(n)} + 8Q'). \quad \dots (2.1.43)$$

Sila Q' se može izračunati tačno, na osnovu relacija (2.1.20) i (2.1.13), ili procijeniti kao što je to radjeno u radu [2]. Na osnovu (2.1.20) i (2.1.13) važi

$$Q' = \int_0^{\xi(\varphi)} \int_0^{\xi(\varphi)} p(\xi) (1 - \xi/R_n) d\xi d\Gamma;$$

$$p(\xi) = \sigma_T (2 + \xi/h),$$

gdje je

$$\Gamma: x^2 + y^2 = R_n^2; \quad d\Gamma = R_n d\varphi,$$

$$\xi = \xi(\varphi) = R_n \cdot \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{za } \varphi=0 \\ R_n (\sqrt{2}-1) & \text{za } \varphi=\pi/4, \end{cases}$$

pa je

$$Q' = \int_0^{\pi/4} \left[\sigma_T \int_0^{\xi(\varphi)} (2 + \xi/h) (1 - \xi/R_n) d\xi \right] R_n d\varphi, \quad \dots (2.1.44)$$

odnosno, poslije integracije

$$Q' = R_n^2 \sigma_T [2I_1 + (R_n/2h - 1)I_2 - R_n/3h \cdot I_3], \quad \dots (2.1.45)$$

gdje je

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right) d\varphi = \dots = -\frac{1}{4};$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)^2 d\varphi = \dots = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4};$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)^3 d\varphi = \dots = -\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}.$$

Imajući predhodno dobivene vrijednosti integrala I_1 , I_2 i I_3 , relacija (2.1.45) dobija izgled

$$Q' = R_n^2 \pi \zeta_T (0.6108 R_n / h - 1.0683). \quad \dots (2.1.46)$$

1.3. DINAMIČKI PROBLEMI

1.3.1. Udar tereta u kružni disk

Postavka problema

Na osnovu relacija (1.2.67) i (1.2.60) biće postavljene jednačine za rešavanje sledećeg problema: materijal oblika kružnog diska, poluprečnika R , konstantne debljine h_1 nalazi se izmedju dvije ravne radne površi, koje se približavaju jedna ka drugoj i koje se mogu elastično deformisati. Smatraće se da se napon trenja mijenja po Prandtlovom zakonu, kao i da je materijal linearno-očvršćavajući. Inercijalne sile se ne zanemaruju. Na bazi predhodno rešenog može se zaključiti da je: $\alpha = x$, $\beta = y$, $A = B = 1$, $h_1 = h_1(t)$, $U_{1x} = U_{1y} = U_1 = U_{2x} = U_{2y} = U_2 = 0$, $T_1 = T_2 = T_T$, kao i da relacije (1.2.55) i (1.2.57) imaju sledeći oblik

$$\zeta_u = \zeta_T (1 + a_1 \lambda + a_2 U_u). \quad \dots (2.1.47)$$

gdje su: a_1 , a_2 - konstante

λ - stepen deformacije odredjen relacijom (1.2.57)

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h_0}{h(t)},$$

pri čemu je h_0 rastojanje izmedju radnih površi u početnom trenutku vremena tj. $h_0 = h|_{t=0}$.

U_u - intenzitet brzine deformacije, prema (1.2.56).

U slučaju idealno-plastičnog materijala, relacija (2.1.47) se svodi na $\zeta_u = \zeta_T$.

Imajući u vidu činjenicu da se radi o osnosimetričnom problemu, pogodnije je koristiti polarne koordinate ($\alpha = r$, $\beta = \varphi$, $A = 1$, $B = r$) i tada jednačine (1.2.67) imaju oblik

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial(r\dot{U}_r)}{r \cdot \partial r} = 0; \quad \dots (2.1.48)$$

$$\xi h \frac{d\dot{U}_r}{dt} = -h \frac{\partial p}{\partial r} - 2\tau_T. \quad \dots (2.1.49)$$

pri čemu je

$$h(r,t) = h_1(t) + \psi(r,t). \quad \dots (2.1.50)$$

Poslednji član u predhodnoj relaciji $\psi(r,t)$ se pojavljuje kao posledica činjenice da se radne površine elastično deformišu. Kao što je poznato od ranije (1.2.64), pomjeranja ψ su proporcionalna pritisku $p(r,t)$, pri čemu je, "koeficijent" proporcionalnosti Grinov operator \hat{K} . U najprostijem slučaju (model Vinklera) operator \hat{K} može biti konstanta K i tada se relacija (2.1.50) može napisati u obliku

$$h(r,t) = h_1(t) + K \cdot p(r,t). \quad \dots (2.1.51)$$

Granični uslovi, neophodni za rješavanje jednačina (2.1.48) i (2.1.49), imaju sledeći oblik

- 1) Tačka $r=0$ je tačka rasticanja materijala, što znači da je

$$\dot{U}_r(r,t) \Big|_{r=0} = 0. \quad \dots (2.1.52)$$

- 2) Na konturi diska se mogu pojaviti sledeći granični uslovi:

- a) u slučaju slobodnog tečenja je

$$p(r,t) \Big|_{r=R(t)} = \sigma_T. \quad \dots (2.1.53)$$

- b) u slučaju slobodnog utišanja u žljeb je

$$p(r,t) \Big|_{r=R(t)} = 2\tau_T. \quad \dots (2.1.54)$$

Pošto se veličina \dot{U}_u može, na osnovu (1.2.56), prikazati kao

$$\dot{U}_u = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}. \quad \dots (2.1.55)$$

to se relacija (2.1.47) može napisati u obliku

$$\sigma_u = \sigma_T \left\{ 1 + a_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h_0}{h_1 + Kp} - a_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h_1 + Kp} \left[\frac{dh_1}{dt} + K \left(\dot{U}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{t} \right) \right] \right\}.$$

Prema tome, diferencijalne jednačine (2.1.48) i (2.1.49), na osnovu kojih se određuje polje brzina $\dot{U}_r = \dot{U}_r(r,t)$ i polje pritisaka $p = p(r,t)$, su

$$\frac{1}{h_1 + Kp} \left[\frac{dh_1}{dt} + K \left(\dot{U}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{t} \right) \right] + \frac{\partial(r\dot{U}_r)}{\partial r} = 0; \quad \dots (2.1.56)$$

$$\xi(h_1 + Kp) \left(\frac{\partial \dot{U}_r}{\partial t} + \dot{U}_r \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - 2\tau_T \left[1 + a_1 \lambda + a_2 \dot{U}_u \right], \quad \dots (2.1.57)$$

pri čemu su veličine λ i \dot{U}_u određene relacijama (1.2.57) i (2.1.55).

Jednačinama (2.1.56) i (2.1.57) treba dodati i granične uslove (2.1.52), (2.1.53) i (2.1.54). Kao što se vidi, dobiveni sistem jednačina je spregnut po nepoznatim funkcijama p i \dot{U}_r i može se rešavati samo numeričkim putem.

Tečenje tankog sloja idealno plastičnog materijala između krutih ravnih radnih površina

a) Slučaj slobodnog tečenja

U posmatranom slučaju je $a_1=a_2=K=0$ i $h_1(t)=h(t)$ pa relacije (2.1.56) i (2.1.57) dobijaju sledeći oblik

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{\partial(r\dot{U}_r)}{r \partial r} = 0; \quad \dots (2.1.58)$$

$$\xi \cdot h \left(\frac{\partial \dot{U}_r}{\partial t} + \dot{U}_r \cdot \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} \right) = -h \frac{\partial p}{\partial r} - 2\tau_T. \quad \dots (2.1.59)$$

Granični uslovi su

$$\dot{U}_r(r,t) \Big|_{t=0} = 0; \quad \dots (2.1.60)$$

$$p(r,t) \Big|_{r=R(t)} = \xi_T. \quad \dots (2.1.61)$$

pri čemu je

$$h(t)_{t=0} = h_0 \quad \text{i} \quad R(t) \Big|_{t=0} = R_0. \quad \dots (2.1.62)$$

Iz (2.1.58) i graničnog uslova (2.1.60) dobija se

$$\dot{U}_r(r,t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \right) = \frac{1}{2} r \left(-\frac{1}{h} h'_t \right). \quad \dots (2.1.63)$$

Za tačke sa konture je

$$\dot{U}(r,t) \Big|_{r=R(t)} = \frac{1}{2} R(t) \left(-\frac{1}{h} h'_t \right). \quad \dots (2.1.64)$$

Veličina $R(t)$ se može izračunati iz jednakosti zapremina, u početnom i proizvoljnom trenutku, materijala koji plastično teče.

$$R(t) = R_0 \sqrt{h_0/h(t)}. \quad \dots (2.1.65)$$

Uvodeći oznaku $A(t)$,

$$A(t) = \frac{1}{h} \cdot h''_t - \frac{3}{2h^2} \cdot (h'_t)^2. \quad \dots (2.1.66)$$

iz (2.1.59) i graničnog uslova (2.1.61) dobija se

$$p(r,t) = \left\{ \xi \cdot \frac{r^2 - R(t)^2}{4} \cdot A(t) + 2\tau_T \left[1 - \frac{r - R(t)}{h(t)} \right] \right\}. \quad \dots (2.1.67)$$

Prema tome, ako je poznata funkcija $h=h(t)$ onda se, na osnovu dobivenih relacija (2.1.63), (2.1.65) i (2.1.67), mogu u potpunosti odrediti polje brzina $\dot{U}_r = \dot{U}_r(r,t)$, polje pritiska $p=p(r,t)$ i veličina radijusa kružnog diska u proizvoljnom trenutku vremena $R=R(t)$.

b) Slučaj slobodnog uticanja materijala u žljeb

Po obodu kružnog diska se nalazi žljeb u koji materijal može slobodno da utiče. U ovom slučaju radijus R nije više funkcija od vremena, nego je konstantan. Pri određivanju polja pritiska treba koristiti granični uslov u obliku (2.1.54)

$$p(r, t) \Big|_{r=R} = 2\zeta_T.$$

i dobija se

$$p(r, t) = \left\{ \zeta \cdot \frac{r^2 - R^2}{4} \cdot A(t) + 2\zeta_T \left[1 - \frac{r-R}{2h(t)} \right] \right\} \quad \dots (2.1.68)$$

Polje brzina je određeno relacijom (2.1.63).

Udar tereta mase M brzinom U_0 u kružni disk

Neka na jediničnu površinu, ranije razmatranog kružnog diska, u nekom trenutku (npr. početnom) udara teret mase M , i neka, u posmatranom trenutku udara, teret ima brzinu U_0 . Tada važe sledeće relacije

$$Mh_t'' = \int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} p(r, t) \cdot r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{R(t)} p(r, t) \cdot r dr; \quad \dots (2.1.69)$$

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{t=0} = h_t' \Big|_{t=0} = U_0. \quad \dots (2.1.70)$$

Prema tome, na osnovu (2.1.69) i (2.1.70), treba odrediti funkciju $h=h(t)$ ako je poznato M i U_0 . Ukoliko se u tome uspije, onda se rješava za praksu značajan problem: određivanje potrebne brzine U_0 , tako da se, usled udara tereta mase M , materijal stanji za željenu veličinu $\Delta h = h_0 - h_1$.

Iz jednačine (2.1.69) se, na osnovu (2.1.67), poslije integracije dobija

$$Mh_t'' = -\frac{\pi \zeta}{8} R^4(t) \cdot A(t) + 2\pi \zeta_T R^2(t) \left[\frac{R(t)}{3h(t)} + 1 \right]. \quad \dots (2.1.71)$$

Imajući u vidu relacije (2.1.65) i (2.1.66), i uvodeći smjenu

$$h' = \frac{dh}{dt} = U, \quad \dots (2.1.72)$$

odnosno

$$h'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(U^2)}{dh}, \quad \dots (2.1.73)$$

diferencijalna jednačina (2.1.71) svodi se na specijalan slučaj Abelove diferencijalne jednačine druge vrste [12]:

$$\frac{1}{2} \frac{d(U^2)}{dh} = f_2(h) U^2 + f_1(h), \quad \dots (2.1.74)$$

gdje funkcije f_1 i f_2 određene sledećim relacijama

$$f_1(h) = \frac{b_2 \cdot \sqrt{h}}{Mh^3 + 2b_1} + \frac{b_3 \cdot h^2}{Mh^3 + 2b_1}; \quad \dots (2.1.75)$$

$$f_2(h) = \frac{3b_1 h}{Mh^3 + 2b_1}.$$

a b_1 , b_2 i b_3 su sledeće konstante:

$$b_1 = \frac{1}{16} \pi \cdot S \cdot R_o^4 h_o^2;$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot S \cdot R_o^3 \cdot \sqrt{h_o^3}; \quad \dots (2.1.76)$$

$$b_3 = \pi \cdot S \cdot R_o.$$

Rješenje jednačine (2.1.74) se svodi na dvije kvadrature [12]

$$J(h) = - \sqrt{\left[2 \int_{h_o}^h (f_1(h) \cdot J(h)) dh + J_o^2 \right] \cdot J(h)}, \quad \dots (2.1.77)$$

gdje je

$$J(h) = e^{\int_{h_o}^h 2 \cdot f_2(h) dh} \quad \dots (2.1.78)$$

Dalje rešavanje jednačina (2.1.77) i (2.1.78), analitičkim putem je vrlo otežano.

U slučaju slobodnog uticanja materijala u žljeb kružnog oblika, koji se nalazi po konturi diska, neophodno je, pri integraciji jednačine (2.1.69), koristiti izraz za pritisak dat sa (2.1.68) i pri tome imati u vidu da radius R , koji u tim relacijama figuriše, nije funkcija od vremena već je konstantan tokom vremena. Tada se jednačina (2.1.74), na koju se svodi jednačina (2.1.71), lakše rješava, jer funkcije $f(h)$ i $f_2(h)$ imaju sledeći oblik

$$f_1(h) = \frac{R+3h}{Mh+B} \cdot C; \quad \dots (2.1.79)$$

$$f_2(h) = \frac{3B}{2h(Mh+B)},$$

gdje su C i B konstante

$$C = \frac{1}{3} \pi \cdot (2 S_T) R^2;$$

$$B = \frac{1}{8} \pi \cdot S \cdot R^4. \quad \dots (2.1.80)$$

U ovom slučaju integral $J(h)$, odredjen sa relacijom (2.1.78), ima sledeće rješenje

$$J(h) = J_o \frac{(Mh+B)^3}{h^3}; \quad J_o = \frac{(Mh_o+B)^3}{h_o^3}.$$

Integral $J(h)$, prema (2.1.77), ima rješenje

$$U(h) = - \sqrt{\left[\frac{2C}{J_0} (R I_1 + 3 I_2) + U_0^2 \right]} J(h), \quad \dots (2.1.81)$$

gdje su I_1 i I_2 sledeći integrali

$$I_1 = \int_{h_0}^h \frac{h^3}{(Mh+B)^3} dh = \dots = \frac{1}{M^4} \left[\ln h + \frac{3B}{Mh+B} - \frac{3}{2} \frac{B^2}{(Mh+B)^2} + \frac{1}{3} \frac{B^3}{(Mh+B)^3} \right] \Big|_{h_0}^h ;$$

$$I_2 = \int_{h_0}^h \frac{h^4}{(Mh+B)^4} dh = \dots = \frac{1}{M^5} \left[(Mh+B) - 4B \ln(Mh+B) - \frac{2B^2}{Mh+B} + \frac{2B^3}{(Mh+B)^2} - \frac{1}{3} \frac{B^4}{(Mh+B)^3} \right] \Big|_{h_0}^h .$$

Odredjivanje neophodne brzine udara U_0 , tereta mase M (to može biti npr. jedna od radnih površi), se vrši na osnovu relacija (2.1.77) i (2.1.81), kada se iskoristi granični uslov

$$U = 0 \text{ za } h = h_1 < h_0, \text{ tj. } t = t_1.$$

U tom slučaju relacije (2.1.77) i (2.1.81) imaju oblik

$$U_0^2 = - 2 \int_{h_0}^{h_1} \left[f_1(h_1) / J(h_2) \right] dh_1, \quad \dots (2.1.82)$$

odnosno

$$U_0^2 = - \frac{2C}{J_0} \cdot (R I_1 + 3 I_2). \quad \dots (2.1.83)$$

Iz (2.1.77) i (2.1.81) se uočava da je u početnom trenutku $t = t_0 = 0$, odnosno $h = h_0$, brzina $U_0 = 0$.

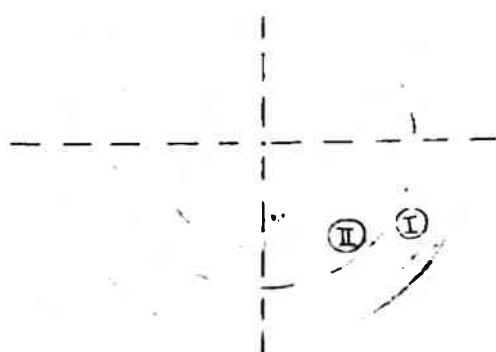
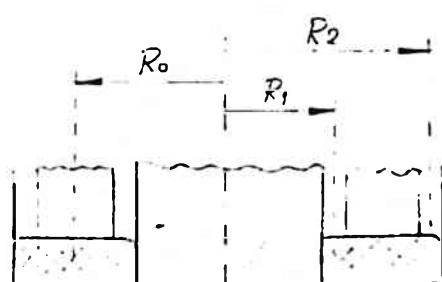
Zakon promjene debljine sloja se dobija integracijom iz (2.1.72)

$$t = t_0 = \int_{h_0}^h \frac{dh}{U(h)}, \quad \dots (2.1.84)$$

pri čemu se može uzeti da je $t_0 = 0$.

1.3.3. Tečenje materijala oblika kružnog prstena

Materijal oblika kružnog diska, početne debljine h_0 , od idealno plastičnog materijala pritiska se krutim ravnim površima sa žljebovima po spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi (Sl. 2.1.8). usled čega materijal utiče u žljebove. Diferencijalne jednačine, za odredjivanje polja brzina i polja pritiska, sa



SL.2.18.

graničnim uslovima. imajući u vidu (2.1.48), (2.1.49) i (2.1.54) kao i činjenicu da je brzina čestica na rebru rasticanja jednaka nuli, imaju oblik

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial(r\dot{U}_r)}{r \partial r} = 0; \quad \dots (2.1.85)$$

$$\rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{2\tau_T}{h}; \quad \dots (2.1.86)$$

$$U_r(r,t) \Big|_{r=R_0} = 0; \quad \dots (2.1.87)$$

$$p_I(r,t) \Big|_{r=R_2} = p_{II}(r,t) \Big|_{r=R_1} = 2\sigma_T; \quad (2.1.88)$$

'pri čemu se znaci "-" i "+" u (2.1.86) koriste respektivno za oblasti I i II (Sl.2.1.8). Položaj rebra rasticanja (R_0) je neodređen i određuje se iz uslova jednakosti pritiska na rebru rasticanja

$$p_I(r,t) \Big|_{r=R_0} = p_{II}(r,t) \Big|_{r=R_0} \quad \dots (2.1.89)$$

Ako se uvede vremenska konstanta $B(t)$

$$B(t) = - \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dt},$$

iz (2.1.85) i (2.1.87) se dobija

$$U_r(r,t) = B(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right). \quad \dots (2.1.90)$$

Brzine kojima materijal utiče u žljebove su

$$U_r(R_1,t) = B(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R_1 - \frac{R_0^2}{R_1} \right) < 0;$$

$$U_r(R_2,t) = B(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R_2 - \frac{R_0^2}{R_2} \right) > 0.$$

Uvodeći u razmatranje i vremensku konstantu $A(t)$ relacijom (2.1.66), izvod $\frac{dU_r}{dt}$ se može napisati u obliku

$$\frac{dU_r}{dt} = - \left[A(t) + B^2(t) \frac{R_0^2}{r^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right). \quad \dots (2.1.91)$$

Imajući u vidu (2.1.91) i (2.1.86) raspored pritiska u oblasti I se određuje rješavanjem jednačine

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = - \frac{2\tau_T}{h} - \rho \frac{dU_r}{dt} = - 2 \frac{\tau_T}{h} + \rho \left[A(t) + B(t) \frac{R_0^2}{r^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right),$$

Uz korišćenje graničnog uslova $p_I(r, t)|_{r=R_2} = 2\bar{\sigma}_T$. Dobija se

$$p_I(r, t) = p_I(R_2, t) + \frac{1}{4} \mathfrak{A} (r^2 - R_2^2) - \frac{2\bar{\epsilon}_T}{h} (r - R_2) - \frac{1}{2} \mathfrak{A} R_0^2 \left[(A-B) \ln \frac{r}{R_2} - \right. \\ \left. - B R_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \right].$$

Analognim postupkom se, za oblast II, dobija

$$p_{II}(r, t) = p_{II}(R_1, t) + \frac{1}{4} \mathfrak{A} (r^2 - R_1^2) + \frac{2\bar{\epsilon}_T}{h} (r - R_1) - \frac{1}{2} \mathfrak{A} R_0^2 \left[(A-B) \ln \frac{r}{R_1} - \right. \\ \left. - B R_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right].$$

Izjednačavajući lijeve strane predhodne dvije relacije, uz uslov da je $r = R_0$, tj. koristeći uslov (2.1.88), dobija se

$$\frac{1}{4} \mathfrak{A} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{2\bar{\epsilon}_T}{h} [2R_0 - (R_1 + R_2)] - \frac{1}{2} \mathfrak{A} R_0^2 \left[(A-B) \ln \frac{R_2}{R_1} - \right. \\ \left. - B R_0^2 \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] = 0. \dots (2.1.92)$$

Iz predhodne relacije treba naći veličinu R_0 , tj. položaj rebra rasticanja, koji se, zbog prisutnosti inercijalnih članova, mijenja tokom vremena. Jednačina (2.1.92) je algebarska jednačina četvrtog stepena, sa koeficijentima koji zavise od vremena.

$$a \cdot R_0^4 + b \cdot R_0^2 + c \cdot R_0 + d = 0,$$

što otežava njeno rješavanje. Samim tim ostaje neodređen i raspored pritiska u oblastima I i II.

Interesantno je napomenuti da se iz relacija (2.1.90) i (2.1.92) postavljanjem da je $R_0 = 0$ dobijaju relacije koje važe za kružni disk

$$u_r(r, t) = B(t) \cdot \frac{1}{2} r; \\ p(r, t) = \mathfrak{A} \frac{r^2 - R^2}{4} A(t) + 2\bar{\sigma}_T \left[1 - \frac{r - R}{2h(t)} \right].$$

Iz (2.1.92) se zanemarivanjem inercijalnih članova (članovi koji sadrže veličinu \mathfrak{S}) dobija

$$R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

1.4. METOD I TAČNA REŠENJA PROBLEMA TEČENJA TANKOG SLOJA METALA

U ovom dijelu će problem sporog, nestacionarnog, tečenja tankog sloja plastičnog materijala između dvije proizvoljne, krute i hrapave radne površi biti razmatran za slučaj najopštijeg oblika graničnog uslova. Biće dat i metod njegovog rješavanja.

Naznačeni problem je, kao što je poznato od ranije (relacije (1.2.69) i (1.2.70) . opisan sledećim sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\text{grad } P = - \frac{2 \hat{U}_T}{h} \cdot \frac{\vec{U}}{U} ; \quad \dots (2.1.93)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial (h B U_d)}{A \partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial (h A U_\beta)}{B \partial \beta} = 0. \quad \dots (2.1.94)$$

Za zadati zakon približavanja radnih površi (tj. pri poznatoj funkciji $h=h(\alpha, \beta, t)$) i za zadati uslov na granici sloja

$$P[\alpha(\mu), \beta(\mu), t] = P_r(\mu). \quad \dots (2.1.95)$$

treba, za svako $t \geq t_0$ odrediti zakone promjene kontaktnog pritiska $P(\alpha, \beta, t)$ brzina $U_d(\alpha, \beta, t)$ i $U_\beta(\alpha, \beta, t)$ i oblik oblasti $S_t = S(\alpha, \beta, t)$, koju zauzima plastični materijal, ako je poznata početna oblast $S_0 = S(\alpha, \beta, t)$, na osnovnoj površi. U predhodnim relacijama, A i B su koeficijenti prve kvadratne forme osnovne površi, α i β su glavne ose, a veličina μ je parametar kojim su definisane tačke sa konture.

Treba naglasiti da predhodno postavljen problem sa graničnim uslovom u obliku (2.1.95) do sada nije rešavan. Poznata rešenja ([1], [2]) i razvijeni metod karakteristika [11], su se odnosili na specijalan slučaj opšteg graničnog uslova (2.1.95), tj. na slučaj kada je pritisak po konturi konstantan ($P_r(\mu) = \text{const.}$). Takav oblik graničnog uslova se može usvojiti u slučajevima kada se radi o slobodnom rasticanju plastično deformisanog materijala, ili kada se radi o procesima presovanja pri kojima materijal slobodno utiče u žljebove, ili otvore koji se nalaze na jednoj od radnih površina. Međutim, pri presovanju tankozidnih metalnih konstrukcija, najčešće se uticanje materijala u žljebove javlja otežanim što znači da pritisak po konturi mora biti promjenljiv, tj. da se granični uslov mora usvojiti u opštijem obliku, kao što je to dato relacijom (2.1.95).

1.4.1. Uopštenje metode karakteristika

U vektorske jednačine (2.1.93) sledi da su linije konstantnog pritiska $P(\alpha, \beta) = \text{const.}$ normalne na linije toka

$$\frac{A d\alpha}{ds} = - \frac{U_d}{U} ; \quad \frac{B d\beta}{ds} = - \frac{U_\beta}{U} .$$

To omogućava da se umesto jednačina (2.1.93) i (2.1.94) predje na ekvivalentni sistem od dvije skalarne jednačine u odnosu na $P(\alpha, \beta, t)$ i na intenzitet brzine U :

$$\text{grad}^2 P = \frac{4 \hat{U}_T^2}{h^2} ; \quad \dots (2.1.96)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (hB U \cos \gamma)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (hA U \sin \gamma)}{\partial \beta} = 0. \quad \dots (2.1.97)$$

gdje su: $\vec{U} = -U(\cos \gamma \cdot \vec{i} + \sin \gamma \cdot \vec{j})$ - vektor brzine

$\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$ - ugao između tangente na liniju toka u posmatranoj tački oblasti tečenja i ose α

Predmet daljeg razmatranja biće rješavanje jednačine (2.1.96), koja se može napisati u sledećem obliku

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0. \quad \dots (2.1.98)$$

gdje je

$$\Omega = \frac{2 \Gamma_T}{h} > 0 : \quad p = \frac{\partial P}{\partial \alpha} : \quad q = \frac{\partial P}{\partial \beta}.$$

Karakteristični sistem jednačina. jednačine (2.1.98), ima izgled

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{P}{\Omega} : \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{B^2} \cdot \frac{q}{\Omega} : \quad \frac{dP}{ds} = \Omega;$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{p^2}{\Omega A^3} \cdot A_\alpha + \frac{q^2}{\Omega B^3} \cdot B_\alpha + \Omega_\alpha; \quad \dots (2.1.99)$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{p^2}{\Omega A^3} \cdot A_\beta + \frac{q^2}{\Omega B^3} \cdot B_\beta + \Omega_\beta.$$

gdje je s - dužina luka duž karakteristične linije $\alpha(s)$, $\beta(s)$. Problem (2.1.99) je Košijev problem sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$\alpha|_{s=s_0} = \alpha_0 = \alpha_0(\mu):$$

$$\beta|_{s=s_0} = \beta_0 = \beta_0(\mu):$$

$$P|_{s=s_0} = P_0 = P_0(\mu):$$

..... (2.1.100)

$$p|_{s=s_0} = p_0 = p_0(\mu):$$

$$q|_{s=s_0} = q_0 = q_0(\mu),$$

pri čemu je $s_0 = f(\mu)$, a μ je parametar koji se mijenja sa promjenom tačke konture oblasti. Veličine $p_0(\mu)$ i $q_0(\mu)$ se odabiraju tako da bi bili ispunjeni sledeći uslovi u regularnim tačkama konture Γ , oblasti S_t

$$\frac{dP_0}{d\mu} = p_0 \frac{d\alpha_0}{d\mu} + q_0 \frac{d\beta_0}{d\mu} :$$

$$F[\alpha_0(\mu), \beta_0(\mu), P_0(\mu), p_0(\mu), q_0(\mu)] = 0; \quad \dots (2.1.101)$$

$$\Delta = F_{p_0} \cdot \beta_{0\mu} - F_{q_0} \cdot \alpha_{0\mu} \neq 0.$$

gdje F_{p_0} , F_{q_0} , $y_{0\mu}$ i $x_{0\mu}$ označavaju parcijalne izvode funkcije F po promjenljivim p_0 i q_0 , odnosno y_0 i x_0 po parametru μ . Ukoliko su relacije (2.1.101) zadovoljene tada lokalna teorema postojanja i jedinstvenosti rešenja [11], pri zadovoljenju uslova tipa Lipšicca za desne strane znaka jednakosti u relacijama (2.1.99), tvrdi da se rešenje problema definisanog sa (2.1.96) i (2.1.95), u okolini glatkih tačaka konture oblasti, poklapa sa rešenjem Košijevog problema (2.1.99).

Imajući u vidu da se karakteristične linije, posmatranog problema, poklapaju sa linijama toka, relacije (2.1.99) se mogu napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \chi}{A} ; \frac{d\beta}{ds} = \frac{\sin \chi}{B} ; \frac{dP}{ds} = \Omega ; \quad \dots (2.1.102)$$

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \chi + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \chi \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos \chi - B_\alpha \sin \chi).$$

Pošto je $\frac{dP}{ds} = \Omega > 0$ predhodne relacije se mogu napisati i u obliku

$$\frac{d\alpha}{dP} = \frac{\cos \chi}{A\Omega} ; \frac{d\beta}{dP} = \frac{\sin \chi}{B\Omega} ; \frac{ds}{dP} = \frac{1}{\Omega} ; \quad \dots (2.1.103)$$

$$\frac{d\chi}{dP} = \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin \chi + \frac{\Omega_\beta}{B} \cos \chi \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos \chi - B_\alpha \sin \chi).$$

U slučaju kada se radi o ravnim radnim površima ($A=B=1$, $d=x$, $\beta=y$) relacije (2.1.99-101) su

$$\frac{dx}{ds} = \frac{p}{\Omega} ; \frac{dy}{ds} = \frac{q}{\Omega} ; \frac{dP}{ds} = \Omega ; \quad \dots (2.1.104)$$

$$\frac{dp}{ds} = \Omega x ; \frac{dq}{ds} = \Omega y ;$$

$$x|_{s=s_0} = x_0(\mu) ; y|_{s=s_0} = y_0(\mu) ; P|_{s=s_0} = P_0(\mu) ; \quad \dots (2.1.105)$$

$$p|_{s=s_0} = p_0(\mu) ; q|_{s=s_0} = q_0(\mu) ;$$

$$\frac{dP_0}{d\mu} = p_0 \frac{dx}{d\mu} + q_0 \frac{dy}{d\mu} ;$$

$$F(x_0, y_0, P_0, p_0, q_0) = p_0^2 + q_0^2 + \Omega^2 = 0 ; \quad \dots (2.1.106)$$

$$\Delta = F_{p_0} \cdot y_{0\mu} - F_{q_0} \cdot x_{0\mu} \neq 0.$$

Pošto veličina s , u relacijama (2.1.104) i (2.1.105) predstavlja dužinu luka (Sl. 2.1.9), sistem (2.1.104) se može uprostiti uvođenjem nove promjenljive, ugla γ

$$\frac{dy}{ds} = \sin \gamma. \quad \dots (2.1.107)$$

što znači da ugao γ predstavlja ugao između tangente na liniju toka u posmatranoj tački i ose x (Sl. 2.1.10). Pošto je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

to imajući u vidu (2.1.104), je

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \gamma; \\ p &= \Omega \cos \gamma; \end{aligned} \quad \dots (2.1.108)$$

$$q = \Omega \sin \gamma,$$

pa se jednačine (2.1.104) svode na

$$\frac{dx}{ds} = \cos \gamma; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \gamma; \quad \frac{dP}{ds} = \Omega; \quad \dots (2.1.109)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\Omega} (-\Omega_x \sin \gamma + \Omega_y \cos \gamma).$$

Neka je $\vec{\tau}$ jedinični vektor tangente na karakterističnu liniju, i neka je usmjeren u smjeru rasta veličine s tj. od konture ka unutrašnjosti (Sl.2.1.10). Ako je $\vec{\tau}_0$ vektor $\vec{\tau}$ u tački konture, tada se sa γ i γ_0 mogu označiti odgovarajući uglovi (Sl.2.1.10). Podrazumijevajući pod parametrom μ dužinu luka konture, jasno je da će ugao γ_0 , kao i γ , zavisiti od μ . Neka je $\vec{\tau}_\mu$ jedinični vektor tangente na konturi (Sl. 2.1.10) i neka je usmjeren tako da se obilazak konture vrši u pozitivnom matematičkom smjeru. Ugao γ_μ je ugao između vektora $\vec{\tau}_\mu$ i jediničnog vektora i ose x , kao što je to prikazano na Sl. 2.1.10.

Da bi se iz (2.1.109) odredile nepoznate veličine $x(s)$, $y(x)$, $P(s)$ i $\gamma(s)$ treba znati Košijeve uslove na konturi

$$\begin{aligned} \gamma|_{s=s_0} &= \gamma_0(\mu); \\ x|_{s=s_0} &= x_0(\mu); \\ y|_{s=s_0} &= y_0(\mu); \\ P|_{s=s_0} &= P_0(\mu). \end{aligned} \quad \dots (2.1.110)$$

U predhodnim relacijama se za veličinu s_0 može uzeti da je $s_0=0$ jer se veličina s mjeri od konture. U tim relacijama $P_0(\mu)$ je poznata, zadana funkcija, a $x_0(\mu)$ i $y_0(\mu)$ su poznate veličine jer sami uočavamo tačku konture u kojoj karakteristična linija presijeca konturu. Dakle, da bi se sistem jednačina (2.1.109) mogao riješiti, treba znati početnu vrijednost ugla χ tj. $\chi_0(\mu)$. Veličina $\chi_0(\mu)$ se odredjuje iz činjenice da jednačine (2.1.106)_{1,2,3} moraju biti zadovoljene.

Prije nego što se predje na odredjivanje veličine $\chi_0(\mu)$, može se konstatovati da su karakteristike prave linije u slučaju kada je debljina materijala konstantna, tj. kada je $h=h(t)=\text{const.}$ To slijedi iz relacija (2.1.109)

$$\chi = \chi_0 = \text{const.};$$

$$P = P_0 + \Omega s.$$

U cilju odredjivanja veličine $\chi_0(\mu)$, sa \vec{n} će se označiti vektor normale na konturu Γ , a sa \vec{v} jedinični vektor tangente na liniju toka, (Sl. 2.1.10). Neka $\omega_0(\mu)$ bude ugao izmedju vektora $\vec{\tau}_\mu$ i \vec{v} , važe sledeće relacije

$$\vec{\tau}_\mu = \frac{d\vec{\mu}}{d\mu} = \frac{dx_0}{d\mu} \vec{i} + \frac{dy_0}{d\mu} \vec{j}; \quad \dots (2.1.111)$$

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } P}{|\text{grad } P|} = \frac{1}{\Omega} (p_0 \vec{i} + q_0 \vec{j}) = -\vec{\tau}_0; \quad \dots (2.1.112)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\tau}_\mu = \frac{1}{\Omega} (p_0 \frac{dx_0}{d\mu} + q_0 \frac{dy_0}{d\mu}) = \cos(\chi \vec{v}, \vec{\tau}_\mu) = \cos \omega(\mu); \quad \dots (2.1.113)$$

$$\vec{n} = \frac{dy_0}{d\mu} \vec{i} - \frac{dx_0}{d\mu} \vec{j}; \quad \dots (2.1.114)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\Omega} (p_0 \cdot \frac{dy_0}{d\mu} - q_0 \cdot \frac{dx_0}{d\mu}). \quad \dots (2.1.115)$$

Da bi relacija (2.1.106), bila zadovoljena potrebno je, na osnovu (2.1.113), da je

$$\cos \omega_0(\mu) = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dP_0(\mu)}{d\mu} \dots (2.1.116)$$

Iz (2.1.116) se, za poznatu funkcionalnu zavisnost $P_0(\mu)$, može izračunati ugao $\omega_0(\mu)$ za svaku tačku konture. Za poznati ugao $\omega_0(\mu)$, ugao $\chi_0(\mu)$ se, kao što se vidi sa Sl. 2.1.10, može izračunati

$$\chi_0(\mu) = \chi_\mu - \omega_0(\mu) + \pi, \quad \dots (2.1.117)$$

gdje je $\chi_\mu = \chi(\vec{\tau}, \vec{\tau}_\mu)$. Specijalno, ako je $P_0(\mu) = \text{const.}$ iz (2.1.116) se dobija da je $\omega_0(\mu) = \pi/2$, a na osnovu (2.1.117) da je $\chi_0(\mu) = \chi_\mu + \pi/2$. To znači da su linije toka normalne na konturu.

Iz relacije (2.1.106), koja mora biti zadovoljena na konturi, imajući u vidu relacije (2.1.112), (2.1.114) i (2.1.115), dobija se uslov

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{n} \neq 0. \quad \dots (2.1.118)$$

Predhodni uslov znači da linija toka ne smije imati pravac tangente na konturu. To dalje znači da mora biti $\gamma_0(\mu) \neq \gamma_\mu$, pa imajući u vidu (2.1.117) dobija se ograničenje oblika

$$\omega_0 \neq k\pi, \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$$

Na osnovu (2.1.116) je

$$\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dP_0(\mu)}{d\mu} \neq \pm 1. \quad \dots (2.1.119)$$

Pošto je

$$|\cos \omega_0(\mu)| = \frac{1}{\Omega^2} \left| \frac{dP_0(\mu)}{d\mu} \right| \leq 1,$$

(2.1.119) dobija oblik

$$\left| \frac{dP_0(\mu)}{d\mu} \right| < \Omega. \quad \dots (2.1.120)$$

Na taj način je relacija (2.1.106), zadovoljena u svakoj tački konture, to ako je zadovoljen uslov (2.1.120), zadovoljeni su svi uslovi teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja razmatranog problema.

Izvodjenje relacija (2.1.116) i (2.1.120) izvršeno je za slučaj Dekartovih pravouglanih koordinata (radi jasnoće geometrijske interpretacije) ali to ne umanjuje opštost dobivenih zaključaka.

Za poznate vrijednosti $\gamma_0(\mu)$, na osnovu (2.1.117), poznati su i svi granični uslovi oblika (2.1.100) odnosno (2.1.110). Rešenje sistema jednačina (2.1.102) odnosno (2.1.103) određuje površ $P(d, \beta)$ iznad karakterističnih krivih koje polaze od konture ka unutrašnjosti oblasti do rebra rasticanja (geometrijsko mjesto tačaka presjeka najmanje dvije karakteristične krive). Za rješavanje postavljenog problema poznate su kako tačne, tako i približne metode, o čemu je ranije bilo više govora.

Jednačina (2.1.97) po poznatim karakterističnim krivim, dobivenim rešavanjem sistema (2.1.102), može se napisati u obliku

$$\frac{dW}{ds} = -W\Psi - \bar{W}, \quad \dots (2.1.121)$$

gdje je $W(s) = h(d(s), \beta(s)) \cdot V(s)$:

$$\bar{W}(d, \beta) = -\frac{\partial H}{\partial t};$$

$$\Psi = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (B \cos \gamma)}{\partial d} + \frac{\partial (A \sin \gamma)}{\partial \beta} \right].$$

Na osnovu (1.2.130) veličina Ψ se može prikazati u obliku

$$\Psi(s) = -\frac{1}{R(s)} + \frac{1}{R_\beta} \cos \gamma + \frac{1}{R_\alpha} \sin \gamma, \quad \dots (2.1.122)$$

gdje su:

$$R_\alpha = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^{-1}, \quad R_\beta = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \text{tangencijalni poluprečnici}$$

krivina α i β na osnovnoj površini.

$$\frac{1}{R(s)} - \text{krivina linija konstantnog pritiska } P(\alpha, \beta) = \text{const.}$$

Smatrajući $\Psi = \Psi(s)$ poznatom funkcijom, jednačina (2.1.121) se može integrirati, tj.

$$W(s) = h(s) \quad (s) = W(s_r) J_1(s) - J_2(s), \quad \dots (2.1.123)$$

gdje je:

$$J_1(s) = \exp\left(-\int_{s_r}^s \Psi(s') ds'\right), \quad J_2(s) = \int_{s_r}^s W(s'') \exp\left(-\int_{s_r}^{s''} \Psi(s') ds'\right) ds''.$$

Veličina $W(s_r)$ se dobija iz uslova da je brzina na rebru rasticanja jednaka nuli.

1.4.2. Tačna rešenja problema tečenja metala u obliku tankog sloja kada je pritisak po konturi promjenljiv

Tečenje plastičnog materijala kružnog oblika

Tanki sloj plastičnog materijala konstantne debljine teče u kružnoj oblasti $S(x, y): x^2 + y^2 < R^2$, pri čemu je na granici zadat promjenljiv pritisak u obliku

$$P_r(\varphi) = C + \Omega R \sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{R} \cos \varphi}, \quad \dots (2.1.124)$$

gdje je: C - konstanta

R - poluprečnik kružnice konture oblasti

φ - parametar kojim se definišu tačke sa konture.

Važi

$$x_r = R \cos \varphi, \quad y_r = R \sin \varphi,$$

gdje je r - fiksirani broj (tačka oblasti S), $0 \leq r \leq R$.

Diferencirajući relaciju (2.1.124) po uglu φ i postavljajući je u (2.1.116) dobija se

$$\cos \omega_0(\varphi) = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dP_r}{R d\varphi} = \frac{\frac{r}{R} \sin \varphi}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{R} \cos \varphi}} \quad \dots (2.1.125)$$

gdje je

$$J_1 = e^{-\int_0^s \psi(s') ds'} ;$$

$$J_2 = \int_0^s \left(-\frac{dh}{dt}\right) e^{\left(-\int_{s''}^s \psi(s') ds'\right)} ds''.$$

Konstanta A se određuje iz uslova da je

$$U(s) \Big|_{s=s_r} = 0,$$

odnosno

$$A = \frac{J_2(s_r)}{J_1(s_r)}.$$

Prema tome, na osnovu dobivenih rezultata se može zaključiti da će oblik pješčanog nasipa, koji bi se dobio nasipanjem homogenog pijeska na kružnu površinu na čijoj se konturi nalazi "zid" čija se visina mijenja po zakonu (2.1.124), biti konus sa vrhom koji se nalazi na vertikali povučenoj kroz tačku A. Imalo je smisla problem postaviti obratno.

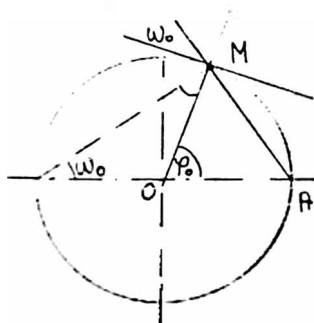
Na osnovu dobivenih rešenja mogu se analizirati dva specijalna slučaja:

1° Ako se rebro rasticanja nalazi na konturi, važi

$$r = r_A \rightarrow R,$$

pa se iz (2.1.125) dobija

$$\cos \omega_0 = \cos \frac{\varphi}{2}.$$



Sl. 2.1.13

odnosno

$$\omega_0 = \frac{\varphi}{2},$$

što je očigledno i sa Sl. 2.1.13.

2° Kada se rebro rasticanja nalazi u centru

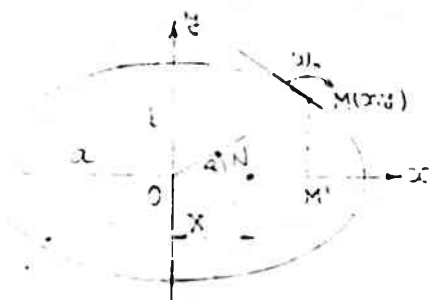
$$r = r_A \rightarrow 0,$$

pa se iz (2.1.125) dobija da je $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, odnosno da je $dP_r(\varphi)/d\varphi = 0$, što znači da je

$$P_r(\varphi) = \text{const.}$$

Tečenje plastičnog materijala oblika elipse

Tanki sloj plastičnog materijala, konstantne debljine, teče u oblasti eliptičnog oblika $S(x,y)$: $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$. Treba odrediti promjenu pritiska po konturi, tj. $P_r(\varphi)$, da bi rebro rasticanja bila tačka u centru elipse (Sl. 2.1.14).



Sl. 2.1.14

Jednačina elipse u parametarskom obliku je

$$x = a \cdot \cos t \quad \dots\dots (2.1.128)$$

$$y = b \cdot \sin t.$$

Veza između ugla φ i parametra t je data sledećom relacijom

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t. \quad \dots\dots (2.1.127)$$

Da bi se našla zavisnost $P_r = p_r(\varphi)$, prvo treba naći zavisnost $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$ a zatim, integraliti relaciju (2.1.116). Posmatrajući trouglove $\triangle NMM$; $\triangle ONM$ (Sl. 2.1.14) dobija se

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\varphi + \omega_0 - \frac{\pi}{2} \right). \quad \dots\dots (2.1.128)$$

Pošto je

$$\operatorname{tg} \left(\varphi + \omega_0 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \left(\omega_0 - \frac{\pi}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \left(\omega_0 - \frac{\pi}{2} \right)},$$

iz relacije (2.1.128) se dobija

$$\operatorname{tg} \omega_0 = - \frac{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \operatorname{tg} \varphi}, \quad \dots\dots (2.1.129)$$

odnosno

$$\cos \omega_0 = \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \cdot a \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg}^2 t}}, \quad \dots\dots (2.1.130)$$

gdje je t - parametar određen relacijom (2.1.126).

Pošto je

$$d\mu = dx^2 + dy^2 = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t} \, dt,$$

iz

$$\frac{dP(\varphi)}{d\mu} = \Omega \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \cdot a \cdot \cos t}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2 t + a^2 \cdot \sin^2 t}},$$

se dobija

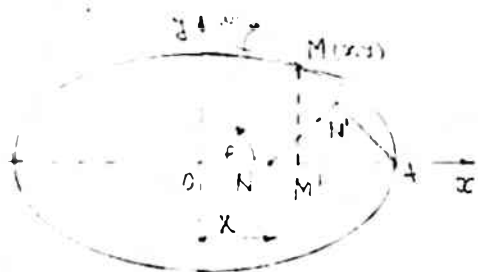
$$P(\varphi) = \Omega \cdot b \sqrt{a^2/b^2 - (a^2/b^2 - 1) \cdot \cos^2 t} + C,$$

odnosno

$$P(\varphi) = \Omega \cdot b \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{\frac{a^2}{b^2} - 1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}} + C. \quad \dots\dots (2.1.131)$$

Treba napomenuti da se za $a=b$ iz relacija (2.1.129), odnosno (2.1.130), dobija da je $\omega_0 = \pi/2$ što znači da je pritisak po konturi konstantan.

U slučaju kada se želi dobiti da se rebro rasticarja nalazi u krajnjoj tački velike poluose elipse, kao što je to prikazano na Sl. 2.1.15, onda



se, iz trouglova $\triangle AMM'$ i $\triangle NAN'$ može dobiti sledeća zavisnost izmedju uglova

ω_0 i φ

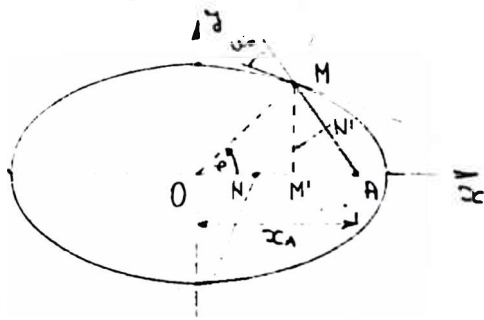
$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{a}{b} \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}}{1 + \left(\frac{a}{b} \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi} \dots (2.1.132)$$

pri čemu je veza izmedju ugla φ_0 i parametra t odredjena relacijom (2.1.117).

U opštem slučaju, kada se tačka A nalazi na proizvoljnom mjestu na velikoj poluosi elipse (Sl.2.1.16), iz razmatranja trouglova $\triangle AMM'$ i $\triangle NAN'$ dobija se

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{x_A}{b} \cdot \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}}{1 + \left(\frac{x_A}{b} \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi} \dots (2.1.133)$$

gdje je sa x_A označena koordinata tačke A (Sl. 2.1.16)



Na osnovu relacije (2.1.133) mogu se dobiti zavisnosti $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$ za sledeće specijalne slučajeve:

1° Kada je $x_A = a$ iz (2.1.133) se dobija relacija (2.1.132);

2° Kada je $x_A = 0$ iz (2.1.133) se dobija relacija (2.1.129);

3° Kada je $x_A = a=b$ iz (2.1.133) se zaključuje da je $\omega_0 = \varphi/2$.

4° Kada je $x_A = 0$ i $a=b$ na osnovu (2.1.133) se dobija da je $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, što je ranije i dobiveno.

1.5. HLADNO VALJANJE LIMA

1.5.1. Uvodjenje bicilindričnog sistema koordinata

Krivolinijski ortogonalni koordinatni sistem. Dužina luka. Gradijent. Divergencija.

Kod krivolinijskog ortogonalnog koordinatnog sistema (Sl.2.1.17),

koordinate linije x_1, x_2 i x_3 su međusobno normalne, a samim tim međusobno su normalni i bazni vektori \vec{e}_1, \vec{e}_2 i \vec{e}_3 .



SL 2 117

Dužina elementa luka krive u krivolinijskom koordinatnom sistemu je

$$(ds)^2 = (H_1 dx_1)^2 + (H_2 dx_2)^2 + (H_3 dx_3)^2, \dots (2.1.134)$$

gdje su H_1, H_2 i H_3 koeficijenti prve kvadratne forme.

Specijalno, u slučaju Dekartovih i polarno-cilindričnih koordinata je

$$H_1=H_2=H_3=1; \quad x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z; \quad \dots (2.1.135)_1,$$

odnosno

$$H_1=1, \quad H_2=r, \quad H_3=1; \quad x_1=r, \quad x_2=\varphi, \quad x_3=z. \quad \dots (2.1.135)_2$$

Prema tome, relacija (2.1.134), u sistemima (2.1.135)_{1,2}, ima oblik

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \dots (2.1.136)_{1,2}$$

$$ds^2 = dr^2 + (r d\varphi)^2 + dz^2$$

Gradijent skalarne funkcije Φ u krivolinijskom koordinatnom sistemu, saglasno [13], i u sistemima (2.1.135)_{1,2,3}, ima oblik

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{e}_3, \quad \dots (2.1.137)$$

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k},$$

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z. \quad \dots (2.1.138)_{1,2}$$

Divergencija vektorske funkcije $\vec{\Phi} = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu [13] i u sistemima (2.1.135)_{1,2,3} ima oblik

$$\text{div } \vec{\Phi} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 \Phi_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3 H_1 \Phi_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \Phi_3) \right]; \quad \dots (2.1.139)$$

$$\text{div } \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z},$$

$$\text{div } \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}, \quad \dots (2.1.140)_{1,2}$$

Jednačine ravnoteže i veze između deformacija i pomjeranja u krivolinijskom ortogonalnom sistemu koordinata.

Jednačine ravnoteže (1.1.3) u krivolinijskom ortogonalnom sistemu koordinata, saglasno [14], imaju oblik

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3 H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{31}) + \sigma_{12} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} +$$

$$\sigma_{31} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \sigma_{22} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \sigma_{33} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + X_1 H_1 H_2 H_3 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (H_3 H_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{23}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 \sigma_{12}) + \sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_2} +$$

..... (2.1.141)_{1,2}

$$\sigma_{12} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \sigma_{33} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \sigma_{11} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + X_2 H_1 H_2 H_3 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 \sigma_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3 H_1 \sigma_{23}) + \sigma_{31} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} +$$

$$\sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \sigma_{11} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \sigma_{22} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + X_3 H_1 H_2 H_3 = 0.$$

gdje su σ_{ij} - komponente tenzora napona

X_i - zapreminske sile.

Specijalno se iz (2.1.142)_{1,2,3} mogu dobiti jednačine ravnoteže u bilo kom iz razmatranih koordinatnih sistema, pa i jednačine (1.1.3).

Kada se radi o ravnom stanju deformacija

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

..... (2.1.142)

jednačine (2.1.141) imaju oblik

$$\frac{\partial (H_3 \sigma_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial (H_1 \sigma_{31})}{\partial x_3} + \sigma_{31} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \sigma_{33} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0;$$

..... (2.1.143)

$$\frac{\partial (H_1 \sigma_{33})}{\partial x_3} + \frac{\partial (H_3 \sigma_{31})}{\partial x_1} + \sigma_{31} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \sigma_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0.$$

U slučaju polarno-cilindričnog sistema koordinata, predhodne jednačine postaju

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial p} + \frac{\sigma_r - \sigma_p}{r} = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_p}{\partial p} + \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial r} + \frac{2 \tau_{rp}}{r} = 0.$$

..... (2.1.144)

Veze između deformacija i pomjeranja u krivolinijskom ortogonalnom koordinatnom sistemu [14] su

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} ; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{u_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} ; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} ;\end{aligned}\quad \dots (2.1.145)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] ; \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right] ; \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{u_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right] ;\end{aligned}$$

gdje su u_i ($i=1,2,3$) - pomjeranja

ε_{ij} ($i,j=1,2,3$) - komponente tenzora deformacije.

Jednačine kojima se povezuju komponente tenzora brzine deformacije ($\dot{\sigma}_{ij}$) sa brzinama (\dot{u}_i) su analogne jednačinama (2.1.145).

U slučaju ravnog stanja deformacije tenzor deformacije je

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} . \quad \dots (2.1.146)$$

pa se jednačine (2.1.145) svode na

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} ; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} ; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{u_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right] .\end{aligned}\quad \dots (2.1.147)$$

Predhodna relacija u koordinatnim sistemima (2.1.135)_{1,2} ima oblik

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} ; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} ; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} .\end{aligned}\quad \dots (2.1.148)_{1,2}$$

Bicilindrični sistem koordinata

Kao što znamo [15] pri rešavanju problema kod kojih se pojavljuju nekonzentrične kružnice obično je pogodno koristiti tzv. bipolarne koordinate, koje se uvode pomoću funkcije kompleksne promjenljive oblika

$$z = f(\gamma) = i \cdot a \cdot \operatorname{cth} \frac{1}{2} \gamma = x + iz, \quad \dots (2.1.149)$$

gdje je $z = x + iz$ - kompleksan broj u ravni u kojoj je x - realna, a iz - imaginarna osa.

a - proizvoljna, data, konstanta

γ - kompleksan broj u ravni u kojoj je ζ - realna, a $i\xi$ - imaginarna osa, tj.

$$\gamma = \zeta + i\xi. \quad \dots (2.1.150)$$

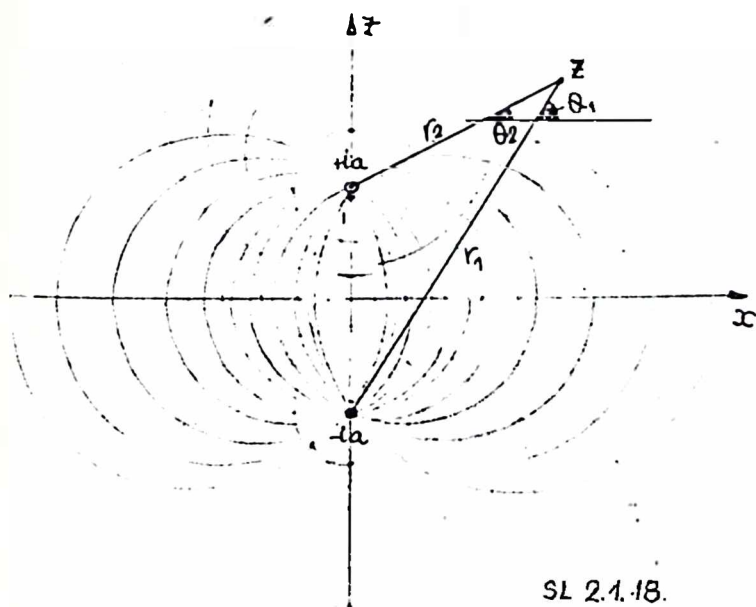
Prema tome, relacijom (2.1.149) je definisano preslikavanje kojim se svakom kompleksnom broju z iz ravni $(x, i \cdot y)$ pridružuje kompleksan broj γ iz ravni $(\zeta, i \xi)$.

Pošto je

$$\operatorname{cth} \frac{1}{2} \gamma = \frac{e^{\frac{1}{2} \gamma} + e^{-\frac{1}{2} \gamma}}{e^{\frac{1}{2} \gamma} - e^{-\frac{1}{2} \gamma}}. \quad \dots (2.1.151)$$

relacija (2.1.150) dobija oblik

$$\gamma = \ln \frac{z + ia}{z - ia} \quad \dots (2.1.152)$$



Sl 2.1.18.

Veličina $z + ia$ iz (2.1.152) je duž koja spaja tačku $(-ia)$ sa tačkom z (Sl.2.1.18). Kompleksan broj $z + ia$ se može napisati i u obliku

$$z + ia = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \dots (a)$$

gdje je θ_1 - ugao koji poteg r_1 zaklapa sa osom x .

Analogno predhodnom, za kompleksan broj $z - ia$, važi

$$z - ia = r_2 \cdot e^{i\theta_2} \dots (b)$$

Zamjenom (a) i (b) u (2.1.152), uz korištenje relacije (2.1.151), dobija se

$$\begin{aligned} \zeta &= \ln \frac{r_1}{r_2} ; \\ \xi &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned} \quad \dots (2.1.153)$$

Na osnovu predhodne relacije i sl. 2.1.18 može se uočiti geometrijski smisao novouvedenih koordinata ξ i ζ . Koordinata ξ je ugao između duži koje spajaju "polove" $(-ia)$ i $(+ia)$ sa proizvoljno uočenom tačkom z . Ovaj ugao je pozitivan kada se tačka z nalazi desno od vertikalne ose z a negativan je kada se tačka z nalazi lijevo od ose z . Isto tako se može zaključiti da se sa familije krivih $\xi = \text{const.}$ polovi vide pod istim uglom. Krive $\zeta = \text{const.}$ predstavljaju familije krivih sa osobinom da je za tačke sa njim odnos potega r_1 i r_2 konstantan.

Imajući u vidu relacije (2.1.150), (2.1.151) i (2.1.152) odnosno (2.1.153), možemo dobiti sledeću zavisnost između Dekartovih koordinata x i z i bipolarnih koordinata ξ i ζ

$$\text{odnosno } x = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \xi}; \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh} \zeta - \cos \xi} \quad \dots (2.1.154)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-ia)^2 + z^2}{(x+ia)^2 + z^2}; \quad \dots (2.1.155)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2}.$$

Dodavanjem još jedne koordinatne ose $y=\eta$ sa bipolarnih koordinata se prelazi na tzv. bicilindrične koordinate.

Pri transformaciji Dekartovih koordinata u bipolarne, i obratno, treba imati u vidu da važe sledeće relacije

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}); \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}); \quad \dots (2.1.156)$$

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{1}{2} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}); \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}).$$

Koordinatne površi

Ako je $\xi = \xi_0 = \text{const.}$ na osnovu (2.1.155), važi

$$x^2 - z^2 - (2ia)x + (ia)^2 = [(x^2 + z^2 + 2iax + (ia)^2)] e^{2\xi_0},$$

odnosno

$$x^2 + z^2 - 2iax \cdot \frac{1+e^{2\xi_0}}{1-e^{2\xi_0}} + (ia)^2 = 0.$$

Iz (2.1.156) je

$$\frac{1+e^{-2i\xi_0}}{1-e^{-2i\xi_0}} = \frac{1}{i} \cdot \operatorname{ctg} \xi_0.$$

pa je

$$(x^2 - a \operatorname{ctg} \xi_0)^2 + z^2 = a^2 (\operatorname{ctg}^2 \xi_0 + 1). \quad \dots (2.1.157)$$

Prema tome. koordinatna površ $\xi = \xi_0 = \text{const.}$ je pravi kružni cilindar čija osa presijeca osu x u tački udaljenoj od koordinatnog početka za $a \cdot \text{ctg } \xi_0$. Poluprečnik cilindra se određuje iz

$$R_{\xi_0}^2 = a^2 (\text{ctg}^2 \xi_0 + 1). \quad \dots (2.1.158)$$

Ako je $\eta = \eta_0 = \text{const.}$ koordinatna površ je ravan paralelna ravni xOz .

Na kraju. ako je $\zeta = \zeta_0 = \text{const.}$, na osnovu (2.1.155), je

$$x^2 + z^2 + 2az + a^2 = (x^2 + z^2 - 2az + a^2) e^{2\zeta_0},$$

odnosno

$$x^2 + z^2 + 2az \frac{1 + e^{2\zeta_0}}{1 - e^{2\zeta_0}} + a^2 = 0.$$

Iz (2.1.156) je

$$\frac{1 + e^{2\zeta_0}}{1 - e^{2\zeta_0}} = - \text{cth } \zeta_0.$$

pa je

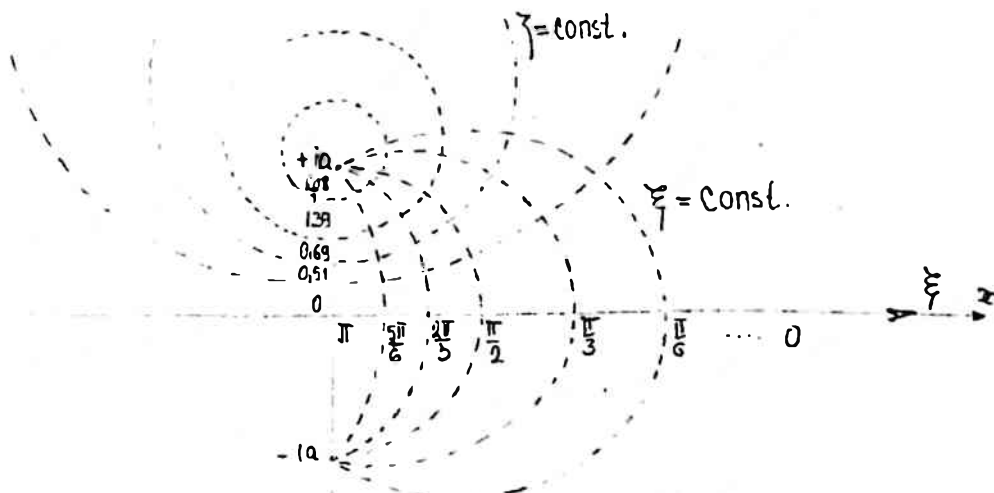
$$x^2 + (z - a \text{cth } \zeta_0)^2 = a^2 (\text{cth}^2 \zeta_0 - 1). \quad \dots (2.1.159)$$

Dakle. koordinatna površ $\zeta = \zeta_0 = \text{const.}$ je pravi kružni cilindar čija osa presijeca osu z u tački udaljenoj od koordinatnog početka za $a \cdot \text{cth } \zeta_0$. Poluprečnik cilindra se određuje iz

$$R_{\zeta_0}^2 = a^2 (\text{cth}^2 \zeta_0 - 1). \quad \dots (2.1.160)$$

ζ iz

r_1/r_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ln \frac{r_1}{r_2} = \zeta$	0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20



Prema tome, sistem bicilindričnih koordinata se sastoji od dvije familije cilindara koje imaju osobinu da su međusobno ortogonalne. U ravni Oxz (bipolarne koordinate (Sl.2.1.19)) postoje, dakle, dvije familije kružnica ξ_0 i ζ_0 od kojih kružnice ξ_0 imaju osobinu da uvijek prolaze kroz dvije tačke $A(0, +a)$ i $B(0, -a)$ koje se nazivaju polovima i po kojima je razmatrani sistem koordinata i dobio ime.

Iz bipolarnih (B-P) koordinata se, pored bicilindričnih, mogu dobiti još i [13] toroidalne (rotacijom kružnica oko ose $x-x$) i prostorne bipolarne koordinate (rotacijom kružnica oko ose $z-z$).

Prikazivanje nekih rarije datih relacija u bicilindričnom sistemu koordinata

Koeficijenti prve kvadratne forme H_1, H_2, H_3 , za slučaj bicilindričnog (B-C) sistema koordinata, dati su sledećim relacijama [13]

$$H_1 = H_3 = c(\xi, \zeta); H_2 = 1. \quad \dots (2.1.161)$$

gdje je

$$c^2(\xi, \zeta) = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^2}. \quad \dots (2.1.162)$$

Na osnovu (2.1.161) i (2.1.134), relacije (2.1.137) i (2.1.140) imaju izgled

$$ds^2 = c^2(d\xi^2 + d\zeta^2) + d\eta^2; \quad \dots (2.1.163)$$

$$\nabla \Phi = \operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \vec{e}_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \vec{e}_\zeta \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \vec{e}_\eta; \quad \dots (2.1.164)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}; \quad \dots (2.1.165)$$

$$\operatorname{div} \Phi = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (c \Phi_\xi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (c \Phi_\zeta) \right] + \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta}. \quad \dots (2.1.166)$$

Jednačine ravnoteže (2.1.143), prikazane u B-C sistemu koordinata, su

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (c \cdot \zeta_\xi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (c \cdot \xi_\zeta) + \xi_\zeta \frac{\partial c}{\partial \zeta} - \zeta_\xi \frac{\partial c}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (c \cdot \xi_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (c \cdot \zeta_\zeta) + \zeta_\xi \frac{\partial c}{\partial \xi} - \xi_\zeta \frac{\partial c}{\partial \zeta} = 0.$$

odnosno, poslije diferenciranja

$$\left(\frac{\partial \zeta_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi_\zeta}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \ln c}{\partial \xi} (\zeta_\xi - \xi_\zeta) + \frac{\partial \ln c}{\partial \zeta} \cdot 2 \cdot \xi_\zeta \zeta_\xi = 0; \quad \dots (2.1.167)$$

$$\left(\frac{\partial \xi_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta_\zeta}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \ln c}{\partial \zeta} (\xi_\xi - \zeta_\zeta) + \frac{\partial \ln c}{\partial \xi} \cdot 2 \cdot \xi_\xi \xi_\zeta = 0.$$

Veze izmedju brzina deformacija i brzina čestica, prema (2.1.147), u B-P sistemu koordinata su

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\xi\xi} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{U}_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \xi} \bar{U}_{\xi}; \quad \bar{U}_{\eta\eta} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \xi} \bar{U}_{\xi}; \quad \dots (2.1.168) \\ 2\bar{U}_{\xi\eta} &= \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \xi} \bar{U}_{\eta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \eta} \bar{U}_{\xi}. \end{aligned}$$

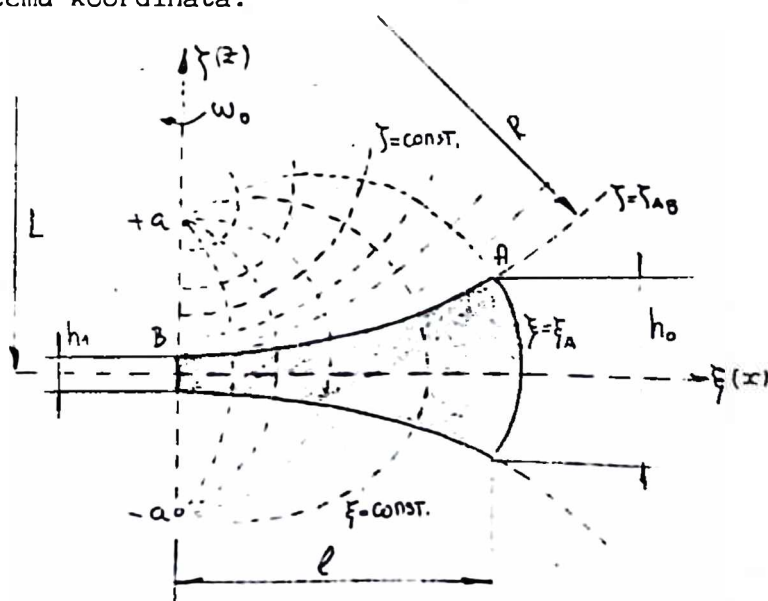
1.5.2. Definisanje problema. Konstrukcija koordinatne mreže.

Definisanje problema

Sloj metala (Sl. 2.1.20) početne debljine h_0 i širine b valja se izmedju dva apsolutno kruta valjka istih poluprečnika R i rastojanja izmedju osa $2L$, pri čemu se obrazuje zona kontakta ℓ . Neka je sloj tanak ($h_0 \ll \ell$) i neka je dužina zone kontakta mnogo manja od širine materijala b ($\ell \ll b$). Poznata je ugaona brzina obrtanja valjaka ω .

Do sada poznata rješenja problema valjanja tankog metalnog sloja, po teoriji Prandtl-Nadai-Iljušina, dobivena su aproksimacijom funkcije $h=h(x)$ (stepenastom [2], linearnom [6] ili nekom drugom funkcijom), što utiče na njihovu tačnost. S druge strane, na tačnost utiče i nepogoni Dekartov koordinatni sistem jer otežava postavljanje tačnih graničnih uslova (npr. koristi se da je $\bar{U}_x|_p = R\omega$).

U daljem radu će se problem valjanja tankog lima rešavati u bipolarnom (B-P) sistemu koordinata.



SL 2.1.20

Na osnovu postavljenih uslova proizilazi da se radi o ravnom stanju brzina deformacija. što znači da u nekom proizvoljnom poprečnom presjeku, koji je dovoljno udaljen od krajeva, a u njegovoj proizvoljnoj tački, postoje sledeće komponente tenzora napona koje su različite od nule $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{xy}$, pri čemu je $\tilde{\sigma}_z = 1/2(\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y)$. Od nule su različite sledeće komponente tenzora brzine deformacija $U_{xy} = U_{yx}, U_{yz} = U_{zy}, U_{zx} = U_{xz}$.

Konstrukcija koordinatne mreže

Familija kružnica $\gamma = \text{const}$ (2.1.159) u potpunosti je određena ako je poznata veličina a (Sl. 2.1.20). Tada se, zadavanjem raznih vrijednosti promjenljivoj γ mogu, prema (2.1.160), izračunavati vrijednosti poluprečnika a samim tim i konstruisati kružnice iz familije. Znajući vrijednost poluprečnika valjaka R može se odrediti vrijednost promjenljive γ za kružnicu koja prolazi kroz tačke A i B tj. γ_{AB} (Sl. 2.1.20).

Veličina a se određuje iz relacije (2.1.159) i činjenice da kružnici $\gamma = \gamma_{AB}$ pripada tačka B(0, L-R), gdje je R poluprečnik kružnice γ_{AB} . Iz (2.1.159) i (2.1.160) se dobija

$$R^2 = (L - R - a \operatorname{cth} \gamma_{AB})^2; \quad \dots (a)$$

$$R^2 = a^2 (\operatorname{cth} \gamma_{AB}^2 - 1). \quad \dots (b)$$

Relacija (a) se može napisati u obliku

$$\operatorname{cth} \gamma_{AB} = \frac{L}{a}. \quad \dots (c)$$

Zamjenom (c) u (b) dobija se

$$a = \sqrt{L^2 - R^2}. \quad \dots (2.1.169)$$

odnosno, iz (c) ili (a):

$$\gamma_{AB} = \operatorname{arcth} \frac{L}{a}. \quad \dots (2.1.170)$$

Familija kružnica $\xi = \text{const}$ je, za različite vrijednosti promjenljive ξ , u potpunosti određena ako su poznati poluprečnici kružnica R_ξ i položaj centara kružnica na osi x tj. x_c . Ove veličine se određuju na osnovu (2.1.158). Za konstruisanje kružnice $\xi = \text{const.}$, koja prolazi kroz tačku A, tj. $\xi = \xi_A$ (Sl. 2.1.20), neophodno je prvo odrediti x koordinatu tačke A tj. x_A jer je $z_A = h_0/2$. Koordinata x_A se određuje iz činjenice da tačka A pripada već određenoj kružnici γ_{AB} . Dakle iz (2.1.159) je

$$x_A^2 + \left(\frac{h_0}{2} - a \operatorname{cth} \gamma_{AB}\right)^2 = R^2.$$

Imajući u vidu (2.1.169) i (2.1.170) dobija se

• • • • • • • •

se lobija da 2.1.157

..... 2.1.172

poluprečnika R_{FA} i koordinata centra kružnice $\vec{r} = \vec{r}_n$ na osi x, tj. $x_0 = \vec{r}_n$

..... (2.1.173)

..... (2.1.174)

Ostale kružnice iz familije $\xi = \xi_0 = \text{const.}$, crtaju se na taj način što se zadaju vrijednosti promjenljivoj ξ iz intervala $\xi \in [\xi_A, \bar{\xi}]$, a zatim se nalaze odgovarajući poluprečnici R_ξ i koordinate centra $x_{c\xi}$ prema sledećim relacijama

..... (2.1.175)

$$R_{\xi} = a^2 (\operatorname{ctg}^2 \xi + 1).$$

Prema tome, relacijama (2.1.169-175) je definisan algoritam konstruisanja mreže u bicilindričnom, odnosno bipolarnom, sistemu koordinata, ako su poznate ulazne veličine R, L, h_0 .

U daljem radu će se postavljani problem valjarja metalnog lima rešavati u bipolarnom (B-P) koordinatnom sistemu. sa ciljem odredjivanja polja napora i polja brzina.

1.5.3. Postavka polaznih jednačina

S obzirom da se radi o ravnom stanju brzina deformacija (2.1.146) to su od nule različite sledeće komponente tenzora rapona

..... (2.1.176)

gdje su: S_x , S_y , S_z i S_{xy} - komponente devijatora napora
 p - srednji hidrostaticki pritisak, i važi

$$S_{\eta} = \frac{1}{2} (S_{\xi} + S_{\zeta});$$

12.1.1771

Imajući u vidu da je

$$S_{\xi} + S_{\zeta} + S_{\eta} = 0.$$

na osnovu (2.1.177) se dobija

$$S_{\eta} = 0:$$

..... (2.1.178)

$$S_{\xi} = -S_{\zeta} = S.$$

Označavajući

$$S_{\xi\zeta} = T.$$

..... (2.1.179)

nepoznate komponente tenzora napona se mogu napisati kao

$$\tilde{\sigma}_{\xi} = p + S:$$

$$\tilde{\sigma}_{\zeta} = p - S:$$

..... (2.1.180)

$$\tau_{\xi\zeta} = T.$$

što znači da treba odrediti veličine p , S i T .

Na osnovu predhodnih relacija jednačine ravnoteže (2.1.167) imaju oblik

$$\frac{\partial(p+S)}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\partial \ln c}{\partial\xi} 2S + \frac{\partial \ln c}{\partial\zeta} 2T = 0;$$

$$\frac{\partial(p-S)}{\partial\zeta} + \frac{\partial T}{\partial\xi} + \frac{\partial \ln c}{\partial\zeta} (-2S) + \frac{\partial \ln c}{\partial\xi} 2T = 0.$$

Pošto je

$$2 \ln c = \ln c^2.$$

važi

$$-\frac{\partial p}{\partial\xi} = \frac{\partial S}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\xi} S + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\zeta} T.$$

..... (2.1.181)

$$-\frac{\partial p}{\partial\zeta} = -\frac{\partial S}{\partial\zeta} + \frac{\partial T}{\partial\xi} - \frac{\partial \ln c^2}{\partial\zeta} S + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\xi} T.$$

Iz predhodnih jednačina se eliminacijom pritiska p može dobiti jedna jednačina sa nepoznatom S i T . Pošto je

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\zeta} = \frac{\partial^2 p}{\partial\zeta\partial\xi},$$

..... (2.1.182)

to diferenciranjem prve jednačine iz (2.1.181) po ζ a druge po ξ i oduzimanjem druge od prve dobija se

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial^2 S}{\partial\xi\partial\zeta} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial\zeta^2} \right) + \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial\xi\partial\zeta} S + \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial\zeta^2} T + \\ & + \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial\zeta\partial\xi} S - \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial\xi^2} T + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\xi} \frac{\partial S}{\partial\zeta} + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\zeta} \frac{\partial T}{\partial\xi} + \\ & + \frac{\partial \ln c^2}{\partial\zeta} \frac{\partial S}{\partial\xi} - \frac{\partial \ln c^2}{\partial\xi} \frac{\partial T}{\partial\zeta} = 0. \end{aligned}$$

odnosno

$$2 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \zeta} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\partial \ln c^2}{\partial \xi} \left[\frac{\partial S}{\partial \zeta} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial \ln c^2}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial \xi \partial \zeta} \cdot 2S + \left[- \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \ln c^2}{\partial \zeta^2} \right] T = 0. \quad \dots (2.1.183)$$

Uslov tečenja idealno-plastičnog materijala u obliku Huber-Mizesa (1.1.84), imajući u vidu (1.1.19), (2.1.178) i (2.1.179), je -

$$S^2 + T^2 = \tau_T^2. \quad \dots (2.1.184)$$

Prema tome, veličine S i T se odredjuju iz (2.1.183) i (2.1.184), p iz (2.1.181) a komponente tenzora napona σ_ξ , σ_ζ i $\tau_{\xi\zeta}$ iz (2.1.180)

Pri izvodjenju neophodnih relacija za odredjivanje polja brzina, takodje treba znati da se radi o ravnom stanju brzina deformacije, što znači da su komponente tenzora brzine deformacije $\dot{U}_{\xi\xi}$, $\dot{U}_{\zeta\zeta}$ i $\dot{U}_{\xi\zeta}$ različite od nule dok su ostale jednake nuli. Ove komponente se, na osnovu (2.1.168), izražavaju preko brzina čestice U_ξ i U_ζ . Jednačine koje stoje na raspolaganju, za odredjivanje U_ξ i U_ζ , su jednačina nestišljivosti plastičnog materijala

$$\dot{U}_{\xi\xi} + \dot{U}_{\zeta\zeta} = 0. \quad \dots (2.1.185)$$

i jednačina koja se dobija iz (1.2.24)

$$\frac{\dot{U}_{\xi\zeta}}{T} = \frac{\dot{U}_{\xi\zeta} - \dot{U}_{\zeta\xi}}{2S} = \frac{\dot{U}_{\xi\xi}}{S} = \frac{\dot{U}_{\zeta\zeta}}{-S} = \frac{\dot{U}}{S}, \quad \dots (2.1.186)$$

gdje je \dot{U} - srednja brzina deformacije (1.1.61). Predhodne dvije relacije se, na osnovu (2.1.168), mogu napisati u sledećem obliku

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \xi} \dot{U}_\xi + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \dot{U}_\zeta = 0;$$

$$\frac{\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \xi} \dot{U}_\xi - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \zeta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \dot{U}_\zeta}{\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \xi} \dot{U}_\zeta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \dot{U}_\xi} = \frac{S}{T},$$

odnosno

$$\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \ln c}{\partial \xi} \dot{U}_\xi + \frac{\partial \ln c}{\partial \zeta} \dot{U}_\zeta = 0; \quad \dots (2.1.187)$$

$$\frac{\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \ln c}{\partial \xi} \dot{U}_\xi - \frac{\partial \ln c}{\partial \zeta} \dot{U}_\zeta}{\frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{U}_\zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \ln c}{\partial \xi} \dot{U}_\zeta - \frac{\partial \ln c}{\partial \zeta} \dot{U}_\xi} = \frac{S}{T} \quad \dots (2.1.188)$$

jer je

$$d \ln c = \frac{1}{c} \cdot d c.$$

1.5.4. Odredjivanje polja napona

Odredjivanje funkcija $S=S(\xi, \eta)$, $T=T(\xi, \eta)$ i $p=p(\xi, \eta)$, odnosno komponentata tenzora napona $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ i $\sigma_{\xi\eta}$, se vrši, kao što je ranije pomeno, rešavanjem jednačina (2.1.183) i (2.1.184). U tom cilju će se funkcije $S=S(\xi, \eta)$ i $T=T(\xi, \eta)$ pretpostaviti u obliku

$$S = \bar{U}_T \sin \Phi(\xi, \eta); \quad \dots (2.1.189)$$

$$T = \bar{U}_T \cos \Phi(\xi, \eta).$$

čime je jednačina (2.1.184) zadovoljena. $\Phi(\xi, \eta)$ je neka proizvoljna, za sada, reodređena funkcija. Određuje se iz (2.1.183) kada se uzme u obzir (2.1.189). Pošto je

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi} &= \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} &= -\sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} &= -\cos \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 - \sin \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}; \end{aligned} \quad \dots (2.1.190)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = -\cos \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 - \sin \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \eta} = -\sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \cos \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}.$$

jednačina (2.1.183) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) \right] \sin \Phi + \dots (2.1.191) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) \right] \cos \Phi = 0. \end{aligned}$$

Jednačine (2.1.184), na osnovu (2.1.189), postaju

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) T + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) S; \\ -\frac{\partial p}{\partial \eta} &= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} \right) T - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} \right) S. \end{aligned} \quad \dots (2.1.192)$$

Iz (2.1.191) se vidi da se funkcija $\Phi(\xi, \eta)$ dobija rešavanjem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \eta} &= 0; \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ell_{nc^2}}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad \dots (2.1.193)$$

Na osnovu predhodnih jednačina, iz (2.1.192) se dobija

$$p(\xi, \zeta) = p_0 = \text{const.} \quad \dots (2.1.194)$$

Posto je

$$\frac{\partial \ln c^2}{\partial \xi} = 2 - \frac{4 \cdot A \cdot e^{\xi}}{A^2 + B^2} ;$$

$$\frac{\partial \ln c^2}{\partial \zeta} = -4 \frac{B \cdot e^{\xi}}{A^2 + B^2} .$$

gdje je $A = e^{\xi} - \cos \zeta$, $B = \sin \zeta$, rešenje jednačina (2.1.193) je

$$\Phi(\xi, \zeta) = 4 \cdot \text{arctg} \left(\frac{e^{\xi} - \cos \zeta}{\sin \zeta} \right) - 2\zeta + 2\Phi_0, \quad \dots (2.1.195)$$

gdje je Φ_0 konstanta.

Na osnovu (2.1.189) je

$$S = \tau_T \sin \Phi(\xi, \zeta), \quad \dots (2.1.196)$$

$$T = \tau_T \cos \Phi(\xi, \zeta).$$

Komponente tenzora napona σ_{ξ} , σ_{ζ} i $\sigma_{\xi\zeta}$, na osnovu (2.1.176), (2.1.194) i (2.1.196), su

$$\sigma_{\xi} = p_0 + \tau_T \sin \Phi;$$

$$\sigma_{\zeta} = p_0 - \tau_T \sin \Phi; \quad \dots (2.1.197)$$

$$\sigma_{\eta} = p_0;$$

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_T \cos \Phi.$$

Glavni pravci napona se, imajući u vidu (2.1.197), odredjuju iz

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{\xi\zeta}}{\sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta}} = \text{ctg } \Phi = \text{ctg } 2\Phi_1,$$

gdje je

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{2} = 2 \cdot \text{arctg} \left(\frac{e^{\xi} - \cos \zeta}{\sin \zeta} \right) - \zeta + \Phi_0, \quad \dots (2.1.198)$$

pa je

$$\varphi = -\Phi_1 + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad \dots (2.1.199)$$

Zadavanjem vrijednosti za ξ i ζ mogu se nacrtati familije

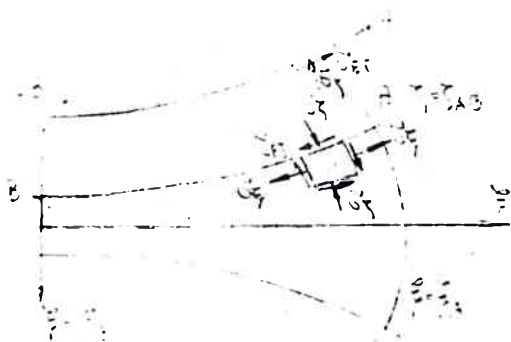
$\Phi_1 = \frac{\Phi}{2} = \text{const.}$ Naime, označavajući $\Phi_1 = \text{const} = C$, iz (2.1.193) se dobija

$$\xi = \ln \left[\text{tg} \frac{\zeta - C + \Phi_0}{2} + \text{ctg } \zeta \right], \quad \dots (2.1.200)$$

jednačina krive $\Phi_1 = \text{const.}$ Na osnovu (2.1.199) se zatim mogu raći linije glavnih napona.

Na osnovu (2.1.197) nije teško izračunati i ukupne sile pritiska

(F_{ξ} i F_{η}) materijala koji se valja na valjke (Sl. 2.1.21)



Sl. 2.1.21

$$F_{\xi} = 0 \quad \dots\dots (2.1.201)$$

$$F_{\eta} = b \int_{\xi_A}^{\xi_B} \sigma_{\eta\xi} \cdot d\xi$$

gdje je b širina materijala koji se valja.

1.5.5. Odredjivanje polja brzina

Jednačina nestišljivosti materijala (2.1.187) se može napisati i u obliku

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (c \cdot \dot{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (c \cdot \dot{\eta}) = 0. \quad \dots\dots (2.1.202)$$

i zadovoljena je ako se uvede funkcija $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$ na sledeći način

$$c \cdot \dot{\xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} ; \quad \dots\dots (2.1.203)$$

$$c \cdot \dot{\eta} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} .$$

U tom slučaju jednačina (2.1.188) dobija oblik

$$\frac{-\frac{\partial \ln c^2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \ln c^2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta}}{-\frac{\partial \ln c^2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln c^2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}} = \frac{S}{T} ,$$

odnosno, imajući u vidu (2.1.193), je

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta}}{-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}} = \frac{S}{T} = \tan \Phi = \frac{1}{\cot \Phi} \quad \dots\dots (2.1.204)$$

Predhodna jednačina se može napisati i u sledećem obliku

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + 2 \cot \Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \cot \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} +$$

$$+ \cot \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} . \quad \dots\dots (2.1.205)$$

$$a_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \zeta} + a_{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = f. \quad \dots (2.1.206)$$

gdje su: $a_{11}=1$, $a_{12}=\text{ctg } \Phi$, $a_{22}=-1$,

$$a_{12}=\text{ctg } \Phi, \quad a_{22}=-1, \quad \dots (2.1.207)$$

$$f = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \text{ctg } \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \text{ctg } \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}.$$

Jednačina (1.2.206) je kvazilinearna parcijalno diferencijalna jednačina drugog reda [13] hiperboličnog tipa jer je $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 < 0$. Njena karakteristična jednačina je

$$a_{11} \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 - 2a_{12} \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) + a_{22} = 0,$$

odnosno

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 - \text{ctg } \Phi \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) - 1 = 0. \quad \dots (2.1.208)$$

Familije krivih koje se dobijaju rešavanjem predhodne jednačine su karakteristike (karakteristične linije) polazne jednačine (1.2.206). Rešavanjem jednačine (1.2.208) dobija se

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{1/2} = \frac{\cos 2\Phi_1 \pm 1}{\sin 2\Phi_1},$$

odnosno

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_1 = \text{ctg } \Phi_1 = \text{ctg } \Phi / 2; \quad \dots (2.1.209)$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_2 = -\text{tg } \Phi_1 = -\text{tg } \Phi / 2.$$

Pošto je

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_1 \cdot \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_2 = -1, \quad \dots (2.1.210)$$

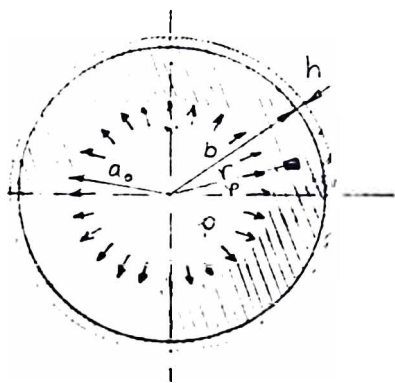
znači da se radi o dvije familije ortogonalnih krivih.

Integraljenjem jednačina (2.1.209) dobijaju se familije karakteristika. S obzirom na složenost funkcije $\Phi(\xi, \zeta)$ najvjerovatnije je da se rešavanje pomenutih jednačina može izvršiti jedino numeričkim putem, što znači da se dalja primjena metoda karakteristika, tj. odredjivanje prvih izvoda funkcije Ψ po karakteristikama (iz 2.1.103 se vidi da su to brzine U_ξ i U_ζ), svodi na numeričku realizaciju ovoga metoda.

2. PROBLEM DINAMIČKOG OPTEREĆENJA VISKO-ELASTIČNOG ŠUPLJEG CILINDRA PRI NEHOMOGENOM TEMPERATURNOM POLJU.

2.1. POSTAVKA PROBLEMA

Debeli dugački cilindar od linearno-visko-elastičnog materijala spoljašnjeg poluprečnika b i unutrašnjeg poluprečnika a promjenljivog tokom vremena (raste od vrijednosti a_0 do veličine b , tj. $a_0 \leq a(t) \leq b$), nalazi se pod dejstvom promjenljivog unutrašnjeg pritiska $p(t)$. Sa svoje spoljašnje strane



Sl. 2.2.1.

cilindar je obložen elastičnom ljuskom kao što je to prikazano na Sl. 2.2.1. Elastične karakteristike materijala ljuske E^* - moduo elastičnosti i μ^* - Poasonov koeficijent su poznate veličine. Predpostavlja se da je temperaturno polje u kojem se nalazi cilindar zadano i da temperatura zavisi od tekućeg radijusa - r i vremena - t , tj. $T=T(r,t)$. Ova predpostavka označava da se zanemaruje toplota koja se oslobadja deformisanjem materijala, što sa druge strane znači da će se razmatrati tzv. nevezani (nemiješani) problem linearne termo-visko-elastičnosti [16]. Iz predhodnog teksta se

može zaključiti da razmatrani problem pripada klasi osnosimetričnih problema ravnog stanja deformacija, pa će biti usvojen polarno-cilindrični koordinatni sistem (r, φ, z) . Sa u_r , u_φ i u_z će se označiti pomjeranja proizvoljno uočene tačke u pravcu koordinatnih osa. Saglasno Nejmanovoj hipotezi [17] relativnim izduženjima od opterećenja treba dodati relativna izduženja od temperature, oblika

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha \cdot \Delta T(r,t). \quad \dots (2.2.1)$$

pri čemu je $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ za $\alpha \neq \beta$, pa Košijeve relacije koje povezuju deformacije i pomjeranja za slučaj osnosimetričnog ravnog problema deformacija imaju, saglasno (2.1.145) i (2.1.135), ili [17], oblik

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha [T(r,t) - T_0] = \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha \Delta T(r,t); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \alpha [T(r,t) - T_0] = \frac{u}{r} + \alpha \Delta T(r,t); \\ \varepsilon_z &= 0 + \alpha [T(r,t) - T_0] = \alpha \Delta T(r,t), \end{aligned} \quad \dots (2.2.2)$$

gdje je $u = u_r$ - pomjeranje u pravcu radijusa

α - koeficijent linearnog širenja materijala

T_0 - početna temperatura koja se smatra konstantnom.

U slučaju osrosimetričnog ravnog stanja deformacija od ruke su različite komponente tenzora napona $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ i $\bar{\sigma}_z$ i one ne zavise od promjenljive φ pa se jednačine kretanja oblika (2.1.141)_{1,2,3} svode na samo jednu jednačinu

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi}{r} = \rho \ddot{u}, \quad \dots (2.2.3)$$

gdje je ρ - gustina materijala cilindra

\ddot{u} - ubrzanje.

Veze izmedju napona i deformacija u slučaju linearno visko-elastičnog materijala određene su relacijama (1.2.64-67), odnosno (1.2.170-171)

$$S_{ij}(r,t) = 2G \left\{ \bar{\epsilon}_{ij}(r,t) - \int_0^t R[t-\tau, T(r,t)] \bar{\epsilon}_{ij}(r,t) d\tau \right\};$$

$$\bar{\sigma}(r,t) = K \left\{ \bar{\epsilon}(r,t) - \int_0^t R_1[t-\tau, T(r,t)] \bar{\epsilon}(r,\tau) d\tau \right\}, \quad \dots (2.2.4)$$

ili

$$S_{ij}(r,t) = \int_0^t \Gamma[t-\tau, T(r,t)] d\bar{\epsilon}_{ij}(r,t); \quad \dots (2.2.5)$$

$$\bar{\sigma}(r,t) = \int_0^t \Gamma_1[t-\tau, T(r,t)] d\bar{\epsilon}(r,t).$$

Granični uslovi razmatranog problema se izražavaju u naponima

$$\bar{\sigma}_r|_{r=a(t)} = -p(t) \quad \dots (2.2.6)_1$$

$$\bar{\sigma}_r|_{r=b} = -q(t) = (\bar{\sigma}_r)^*|_{r=b}$$

gdje je $(\bar{\sigma}_r)^*$ - radijalna komponenta napona u elastičnoj metalnoj ljusci

$q(t)$ - pritisak na površini kontakta izmedju cilindra i ljuske. Taj pritisak je nepoznat i određuje se iz uslova slaganja deformacija cilindra i cilindrične ljuske

$$u|_{r=b} = u^*|_{r=b}, \quad \dots (2.2.7)$$

gdje je u^* - pomjeranje uočene tačke elastične ljuske.

2.2. KRATAK PRIKAZ PROBLEMA

Problem ponašanja visko-elastičnog cilindra sa promjenljivom unutrašnjom granicom, obloženog sa elastičnom ljuskom, pod dejstvom unutrašnjeg promjenljivog pritiska, bio je predmet interesovanja i istraživanja mnogih autora, prije svega zbog svoje interesantnosti i značaja za savremenu

tehničku praksu u transport goriva u tekućem i gasovitom stanju, saženi jeva-
nje čvrstog goriva, transport cijevi od visko-elastičnog materijala i td.

U vezi sa predhodnim postoji i mnogo raznih puteva i metoda re-
šavanja problema posebno u njegovoj kvazistatičkoj postavci. Npr. [16], [17],
[18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28]. Autori radova
[26] i [27] su razvili metod numeričke integracije dobivenih jednačina i nji-
me riješili problem za slučaj opštih svojstava materijala na smicanje i za
slučaj proizvoljno promjenljivog pritiska i granice. Drugi metod rešavanja
problema cilindra sa pokretnom granicom, u kvazistatičkoj postavci, dao je
Šeper [24]. Ideja metoda se sastoji u zamjeni tijela sa promjenljivom gra-
nicom, tijelom nepromjenljive granice, ali je opterećeno promjenljivim fik-
tivnim pritiskom. U radovima [29] i [30] se razmatra kvazistatički problem
uzimanje u obzir temperaturnog polja.

Za razliku od kvazistatičkog, problem dinamičkog ponašanja visko-
elastičnog cilindra obloženog sa elastičnom ljuskom, sa promjenljivom unutraš-
njom granicom i sa zadanim promjenljivim unutrašnjim pritiskom nije još uvi-
jek dovoljno proučen u literaturi. Uzrok tome je u činjenici da matematičke
metode, za rešavanje takve klase problema, još rjesu dovoljno razvijene. Po-
zната rešenja [31], [32], [33], [34], [35], [36], su ograničena činjenicom da
su dobivena za slučaj nestišljivog materijala cilindra. Korišten je, naravno,
približan metod rešavanja. U radu [32] je razmatrani problem rešavan kada ne
postoje elastične ljuske i dobiveno rešenje se sastoji od zbira kvazistatič-
kog rešenja i funkcije koja ustvari predstavlja dinamičko odstupanje od kva-
zistatičnog rešenja. Slučaj dinamičkog opterećenja šupljeg cilindra od neli-
nearno visko-elastičnog materijala sa unutrašnjim i spoljašnjim pritiskom
razmotren je u radu [34]. Materijal je smatran nestišljivim, a veza između
rapona i deformacija je uzeta u obliku koji je predložen u radu [17]. Dobi-
vena nelinearna jednačina se rešava metodom postupnog približavanja čija je
konvergencija i dokazana. U radovima [35], [36] razmatran je problem dinamičkog
ponašanja cilindra od linearno i nelinearno visko-elastičnog materijala sa
sporo promjenljivom unutrašnjom granicom. Usvojena pretpostavka o sporo pro-
mjenljivoj unutrašnjoj granici se pokazala pogodnom za primjenu metoda usred-
njavanja. U radu [37] je predložena nova matematička procedura rešavanja
integro-diferencijalnih jednačina koje se sreću kod dinamičkih problema visko-
elastičnosti, a zatim se primjenjuje za rešavanje problema oscilacija visko-
elastičnog cilindra obloženog sa elastičnom ljuskom i opterećenog unutraš-
njim pritiskom koji se, kao i unutrašnja granica, tokom vremena mijenja, za
slučajeve linearnog i nelinearnog visko-elastičnog materijala.

U daljem tekstu će biti predložen metod za rešavanje ranije postav-
ljenog problema o dinamičkom ponašanju šupljeg cilindra od linearno visko-
elastičnog materijala, obloženog sa elastičnom ljuskom uz prisustvo pozratog
nehomogenog i nestacionarnog temperaturnog polja. Unutrašnji pritisak i unu-
trašnja granica se tokom vremena mijenjaju.

2.3. METOD REŠAVANJA

2.3.1. Svodjenje polaznog problema na dinamički problem

Komponente devijatora napona S_{ij} , komponente devijatora deformacije
 ϵ_{ij} , srednji normalni napon $\bar{\sigma}$ i srednja deformacija θ , saglasno činjenici
da se radi o osnosimetričnom ravnom problemu deformacija, su

$$\begin{aligned} S_{rr} &= S_r = \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma} ; \\ S_{\varphi\varphi} &= S_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma} ; \\ \epsilon_{rr} &= \epsilon_r = \epsilon_r - \epsilon ; \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \epsilon_\varphi = \epsilon_\varphi - \epsilon ; \end{aligned} \quad \dots (2.2.8)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\varphi + \bar{\sigma}_z) ;$$

$$\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_r + \epsilon_\varphi + \epsilon_z) = \frac{1}{3} \theta ,$$

pa se prva od relacija (2.2.4) može prikazati u obliku

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma} &= 2G \left\{ (\epsilon_r - \epsilon) - \int_0^t R [t-\tau, T(r, \tau)] (\epsilon_r - \epsilon) d\tau \right\}, \\ \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma} &= 2G \left\{ (\epsilon_\varphi - \epsilon) - \int_0^t R [t-\tau, T(r, \tau)] (\epsilon_\varphi - \epsilon) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu je, radi jednostavnosti zapisa, uvedena oznaka $T(r, t) \equiv \Delta T(r, t)$.

Na osnovu predhodnih relacija je

$$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi = 2G \left\{ (\epsilon_r - \epsilon_\varphi) - \int_0^t R [t-\tau, T(r, \tau)] (\epsilon_r - \epsilon_\varphi) d\tau \right\}, \quad \dots (2.2.9)$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma} + 2G \left\{ (\epsilon_r - \epsilon) - \int_0^t R [t-\tau, T(r, \tau)] (\epsilon_r - \epsilon) d\tau \right\}. \quad \dots (2.2.10)$$

Da bi u jednačini kretanja (2.2.3) članovi koji sadrže napone bili izraženi
preko deformacija neophodno je naći izvod napona $\bar{\sigma}_r$ po promjenljivoj r , tj.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} + 2G \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon_r - \epsilon) - \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^t R [t-\tau, T(r, \tau)] (\epsilon_r - \epsilon) d\tau \right] \right\}. \quad (2.2.11)$$

Saglasno relacijama (2.2.2) i (2.2.8) je

$$a = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + 3 \cdot d \cdot T(r, t), \quad \dots (2.2.12)$$

odnosno

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}. \quad \dots (2.2.13)$$

Ako se u razmatranje uvedu operatori $L(u)$, $L_1(u)$ i $L_2(u)$

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2};$$

$$L_1(u) = \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{u}{r}; \quad \dots (2.2.14)_{1,2,3}$$

$$L_2(u) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{3}{2} \left(L_1 + \frac{u}{r} \right),$$

relacije (2.2.12) i (2.2.13) dobijaju oblik

$$\theta = L_2(u) + 3\alpha \cdot T, \quad \dots (2.2.15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}. \quad \dots (2.2.16)$$

Iz (2.2.11) se, na osnovu druge jednačine iz (2.2.4), dobija

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = K \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial r} - \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} \cdot \theta \cdot d\tau - \int_0^t R_1[t-\tau, T(r, t)] \frac{\partial \theta}{\partial r} d\tau \right\} \quad (2.2.17)$$

Nije teško pokazati, saglasno relacijama (2.2.2), (2.2.8) i (2.2.16), da je

$$\frac{\partial}{\partial r} (\xi_r - \xi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{3} L(u). \quad \dots (2.2.18)$$

U razmatranje će se, radi jednostavnosti zapisivanja, uvesti i integralni operatori

$$\begin{aligned} \hat{R}[\dots] &= \int_0^t R[t-\tau, T(r, t)] [\dots] d\tau, \\ \hat{R}_1[\dots] &= \int_0^t R_1[t-\tau, T(r, t)] [\dots] d\tau. \end{aligned} \quad \dots (2.2.19)_{1,2}$$

Imajući u vidu relacije (2.2.17), (2.2.18), (2.2.14), (2.2.19), kao i

$$\xi_r - \xi = L_1(u), \quad \dots (2.2.20)$$

relacija (2.2.11) postaje

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_r}{\partial r} &= K \left\{ (1 - \hat{R}_1) \left[L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} \left[L_2(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] d\tau \right\} + \\ &+ 2G \left\{ (1 - \hat{R}) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{3} L(u) \right] - \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} L_1(u) d\tau \right\}, \dots (2.2.21) \end{aligned}$$

Na osnovu (2.2.2), (2.2.9) i (2.2.20) je

$$\frac{\theta_r - \theta}{r} = 2G (1 - \hat{R}) \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right]. \quad \dots (2.2.22)$$

Dakle, imajući u vidu relacije (2.2.21) i (2.2.22), jednačina kretanja (2.2.3) izražena preko pomjeranja $u(r, t)$ ima oblik

$$K \left\{ (1-\hat{R}_1) \left[L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} \left[L_2(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] d\tau \right\} +$$

$$2G \left\{ (1-\hat{R}) \left[\frac{2}{3} L(u) - \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} L_1(u) d\tau \right] \right\} = g \ddot{u}, \quad \dots (2.2.23)$$

odnosno

$$\omega_0 \left\{ (1-\hat{R}) [2L(u)] - \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} L_1(u) d\tau \right\} +$$

$$+ \left\{ (1-\hat{R}_1) \left[L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} \left[L_2(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] d\tau \right\} = \frac{3\omega_0}{2G} g \ddot{u} \quad (2.2.24)$$

gdje je

$$\omega_0 = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}. \quad \dots (2.2.25)$$

Jednačina (2.2.24) predstavlja osnovnu jednačinu postavljenog problema. Radi se o integro-diferencijalnoj jednačini II reda. Ukoliko se ona riješi, za određene granične i početne uslove, dobija se funkcija $u=u(r, t)$. Kada je funkcija $u=u(r, t)$ određena, na osnovu (2.2.2) i (2.2.8), nije teško odrediti komponente tenzora napona i deformacije.

Iz (2.2.24) se mogu dobiti osnovne jednačine nekih specijalnih slučajeva kao na primjer:

1° Ako se smatra da nema zapreminske relaksacije materijala, tj. da je $\hat{R}_1 \equiv 0$, jednačina (2.2.24) ima oblik

$$\omega_0 \left\{ (1-\hat{R}) [2L(u)] - \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} L_1(u) d\tau \right\} + L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{3\omega_0}{2G} g \ddot{u} \quad \dots (2.2.26)$$

2° Ako ne postoji temperaturno polje, tj. $\Delta T(r, t) \equiv 0$, (2.2.24), dobija oblik

$$\omega_0 \left\{ (1-\hat{R}) [2L(u)] \right\} + (1-\hat{R}_1) [L(u)] = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_0}{G} \cdot g \ddot{u} \quad \dots (2.2.27)$$

Predhodna jednačina opisuje problem dinamičkog ponašanja šupljeg visko-elastičnog cilindra od linearno visko elastičnog materijala.

3° U slučaju kada se razmatra kvazistatički problem sa prisustvom i bez prisustva temperaturnog polja $\Delta T(r, t)$ jednačina (2.2.24) postaje

$$\omega_0 \left\{ (1-\hat{R}) [2L(u)] - \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} L_1(u) d\tau \right\} +$$

$$+ \left\{ (1-\hat{R}_1) \left[L(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r, t)]}{\partial r} \left[L_2(u) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right] d\tau \right\} = 0, \dots (2.2.28)$$

odnosno

$$2(1-\hat{R}) [L(u)] + (1-\hat{R}_1) [L(u)] = 0. \quad \dots (2.2.29)$$



Predmet daljeg razmatranja biće jednačina (2.2.24). U početku uve-
dena pretpostavka. da je temperaturno polje $T=T(r,t)$ poznato, znači da se
pretpostavlja da je jednačina provodjenja toplote riješena nezavisno od jed-
načina termo-visko-elastičnosti. Znajući funkciju $T=T(r,t)$, znamo kako se sa
vremenom i radijusom mijenja i koeficijent temperaturnog pomjeranja. određen
relacijom (1.2.183). tj.

$$\ln a_T(T) = \ln a_T(r,t) = - \frac{C_1 [T(r,t) - T_0]}{C_2 + T(r,t) - T_0} \quad \dots (2.2.30)$$

gdje je T_0 - temperatura redukcije, a C_1 i C_2 koeficijenti koji se određuju
eksperimentalno i karakteristika su materijala. Na osnovu principa temperatu-
rno vremenske analogije (odjeljak 2.3.5) jezgra relaksacije $R[t, T(t)]$ i $R_1[t, T(t)]$
su

$$R[t, T(r,t)] = R(t'), \quad \dots (2.2.31)$$

$$R_1[t, T(r,t)] = R_1(t').$$

gdje je t' tzv. modificirano vrijeme. određeno relacijom (1.2.185),

$$t' = \int_0^t \frac{dt}{a_T[T(r,t)]} = t'(r,t), \quad \dots (2.2.32)$$

i ono ne zavisi samo od stvarnog vremena t već i od radijusa r , što na osnovu
(2.2.32), znači da su i jezgra relaksacije R i R_1 funkcije i od vremena (t) i
od radijusa (r), tj.

$$R = R(t, r): \quad \dots (2.2.33)$$

$$R_1 = R_1(t, r),$$

što je očigledno posledica prisustva nehomogenog temperaturnog polja. Ako se sa
 $f(r,t)$ označi

$$f(r,t) = \frac{1}{a_T(r,t)},$$

srednja vrijednost te funkcije, po proizvoljno uočenom radijusu cilindra, je

$$f_{sr}(t) = \frac{1}{b-a(t)} \int_{a(t)}^b f(r,t) dr = \frac{f(b,t) - f[a(t),t]}{b-a(t)},$$

odnosno

$$f_{sr}(t) = \frac{a_T[a(t),t] - a_T[b,t]}{[b-a(t)] \cdot a_T[a(t),t] \cdot a_T(b,t)}. \quad \dots (2.2.34)$$

Pretpostavljajući da je veličina $f(r,t) - f_{sr}(t)$ mala veličina u odnosu na
 $f_{sr}(t)$, može se uvesti mali parametar λ relacijom

$$f(r,t) = f_{sr}(t) + \lambda [f(r,t) - f_{sr}(t)], \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad \dots (2.2.35)$$

Tada, na osnovu (2.2.32), je

$$t'(r,t) = \int_0^t f(r,t) dt = \int_0^t f_{sr}(t) dt + \lambda \int_0^t [f(r,t) - f_{sr}(t)] dt. \dots (2.2.36)$$

pa se i funkcije smičuće i zapreminske relaksacije mogu razviti u stepeni red po malom parametru λ , tj.

$$\begin{aligned} R(t) &= R^{(0)}(t) + \lambda R^{(1)}(r,t) + \lambda^2 R^{(2)}(r,t) + \dots \\ R_1(t) &= R_1^{(0)}(t) + \lambda R_1^{(1)}(r,t) + \lambda^2 R_1^{(2)}(r,t) + \dots \end{aligned} \dots (2.2.37)$$

Rešenje postavljeneog problema se može tražiti u obliku

$$u(r,t) = u^{(0)}(r,t) + \lambda u^{(1)}(r,t) + \lambda^2 u^{(2)}(r,t) + \dots \dots (2.2.38)$$

gdje su $u^{(0)}(r,t)$, $u^{(1)}(r,t)$, $u^{(2)}(r,t)$, ... traženo rešenje u nultom, prvom, drugom, itd. približenju.

U [33] se mogu naći uslovi i oblast konvergencije stepenog reda (2.2.38) po malom parametru.

Uvodeći operatore

$$\begin{aligned} \hat{R}[\dots] &= \int_0^t \frac{\partial R[t-\tau, T(r,t)]}{\partial r} [\dots] ; \\ \hat{R}_1[\dots] &= \int_0^t \frac{\partial R_1[t-\tau, T(r,t)]}{\partial r} [\dots] , \end{aligned} \dots (2.2.39)$$

i imajući u vidu da važi

$$\begin{aligned} \hat{R} &= 0 + \lambda \hat{R}^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}^{(2)}(r,t) + \dots ; \\ \hat{R}_1 &= 0 + \lambda \hat{R}_1^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}_1^{(2)}(r,t) + \dots ; \\ L(u) &= L[u^{(0)}] + \lambda L[u^{(1)}] + \lambda^2 L[u^{(2)}] + \dots ; \\ L_1(u) &= L_1[u^{(0)}] + \lambda L_1[u^{(1)}] + \lambda^2 L_1[u^{(2)}] + \dots ; \\ L_2(u) &= L_2[u^{(0)}] + \lambda L_2[u^{(1)}] + \lambda^2 L_2[u^{(2)}] + \dots ; \\ \ddot{u} &= \ddot{u}^{(0)} + \lambda \ddot{u}^{(1)} + \lambda^2 \ddot{u}^{(2)} + \dots , \end{aligned} \dots (2.2.40)$$

relacija (2.2.24) se može napisati kao

$$\begin{aligned} \omega_0 \{ & [1 - \hat{R}^{(0)}(t) + \lambda \hat{R}^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}^{(2)}(r,t) + \dots] 2 [L(u^{(0)}) + \lambda L(u^{(1)}) + \lambda^2 L(u^{(2)}) + \dots] - \\ & - [0 + \lambda \hat{R}_1^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}_1^{(2)}(r,t) + \dots] [L_1(u^{(0)}) + \lambda L_1(u^{(1)}) + \lambda^2 L_1(u^{(2)}) + \dots] \} + \\ & + \{ [1 - \hat{R}_1^{(0)}(t) + \lambda \hat{R}_1^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}_1^{(2)}(r,t) + \dots] [L(u^{(0)}) + \lambda L(u^{(1)}) + \lambda^2 L(u^{(2)}) + \dots + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] - \\ & - [0 + \lambda \hat{R}_1^{(1)}(r,t) + \lambda^2 \hat{R}_1^{(2)}(r,t) + \dots] [L_2(u^{(0)}) + \lambda L_2(u^{(1)}) + \lambda^2 L_2(u^{(2)}) + \dots + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] \} = \\ & = \frac{3\omega_0}{2G} g [\ddot{u}^{(0)} + \lambda \ddot{u}^{(1)} + \lambda^2 \ddot{u}^{(2)} + \dots] . \end{aligned} \dots (2.2.41)$$

Grupisanje članova uz iste stepene λ daje

$$''0'' \quad 2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(0)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(0)}) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u} \quad \dots (2.2.42)$$

$$''1'' \quad 2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(1)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(1)})] + \{ 2\omega_0 \hat{R}^{(1)} [L(u^{(0)})] + 2\omega_0 \hat{R}^{(1)} [L_1(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(1)} [L(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(1)} [L_2(u^{(0)})] \} = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u}^{(1)}; \quad \dots (2.2.43)$$

$$''2'' \quad 2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(2)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(2)})] + \{ 2\omega_0 \hat{R}^{(2)} [L(u^{(0)})] + 2\omega_0 \hat{R}^{(2)} [L(u^{(1)})] + 2\omega_0 \hat{R}^{(2)} [L_1(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(2)} [L(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(2)} [L(u^{(1)})] + 2\omega_0 \hat{R}^{(2)} [L_1(u^{(1)})] + 2\omega_0 \hat{R}^{(2)} [L_2(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(2)} [L_2(u^{(0)})] \} = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u}^{(2)}. \quad (2.2.44)$$

Označavajući

$$\mathcal{P}^{(0)} = [1-\hat{R}^{(0)}] [3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] ; \quad \dots (2.2.45)$$

$$\mathcal{P}^{(1)} = 2\omega_0 \{ \hat{R}^{(1)} [L(u^{(0)})] + \hat{R}^{(1)} [L_1(u^{(0)})] \} + \hat{R}_1^{(1)} [L(u^{(0)})] + \hat{R}_1^{(1)} [L_2(u^{(0)})] ;$$

$$\mathcal{P}^{(n)} = 2\omega_0 \sum_{i=1}^n \hat{R}^{(i)} [L(u^{(n-i)})] + \sum_{i=1}^n \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(n-i)})] + 2\omega_0 \sum_{i=1}^n \hat{R}_1^{(i)} [L(u^{(n-i)})] + \sum_{i=1}^n \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(n-i)})], \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.2.46)$$

relacije (2.2.42 - 44) dobijaju oblik

$$2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(0)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(0)})] + \mathcal{P}^{(0)} = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u}^{(0)} ;$$

$$2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(1)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(1)})] + \mathcal{P}^{(1)} = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u}^{(1)} \dots (2.2.47)$$

$$2\omega_0 [1-\hat{R}^{(0)}] [L(u^{(n)})] + [1-\hat{R}_1^{(0)}] [L(u^{(n)})] + \mathcal{P}^{(n)} = \frac{3\omega_0}{2G} \mathcal{S} \ddot{u}^{(n)} .$$

Predhodnom sistemu jednačina treba dodati i granične uslove, takodje u nultom, prvom, n-tom približenju, pa će se u narednom dijelu teksta ti granični uslovi odrediti. Kada oni budu određeni postavljeni problem se svodi na rešavanje dinamičkog problema u svakom od približenja.

Veličina pritiska na površini kontakta između cilindra i ljuske $q(t)$, koja figuriše u graničnom uslovu (2.2.6)₁, određuje se iz uslova slaganja deformacija (2.2.7). Za osnosimetričnu elastičnu ljusku, saglasno [17] . važi

$$u^*|_{r=b} = b \cdot \mathcal{E}_p^* = b \frac{1}{E} \cdot [\mathcal{E}_p^* \mu^* (\mathcal{E}_r^* + \mathcal{E}_z^*)] + b \alpha^* \cdot T^*, \quad \dots (2.2.48)$$

gdje je E^* - moduo elastičnosti materijala ljuske

μ^* - Poasonov koeficijent materijala ljuske

α^* - koeficijent temperaturnog širenja materijala ljuske.

Komponente tenzora napona i deformacije kao i pomjeranje, da bi se razlikovale od odgovarajućih komponenti linearno-visko-elastičnog materijala, označene su sa zvezdicom. Temperatura T^* je

$$T^* = T(r, t) \Big|_{r=b} = T(b, t).$$

Važi

$$\xi_z^* = \alpha^* T^* = \frac{1}{E^*} [\sigma_z^* - \mu^* (\sigma_r^* + \sigma_\theta^*)],$$

pa, pošto je $\sigma_r^* = 0$, iz predhodne relacije slijedi

$$\sigma_z^* = \alpha^* T^* E^* + \mu^* \sigma_\theta^*,$$

Relacija (2.2.48) postaje

$$u \Big|_{r=b} = b \cdot \alpha^* (1 + \mu^*) T^* + b \frac{(1 - \mu^*)}{E^*} \sigma_\theta^*.$$

Pošto za cilindričnu osnosimetričnu ljusku važi

$$\sigma_r^* = q(t) \frac{b}{h} - \rho^* \frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial t^2} \cdot h$$

dobija se

$$u \Big|_{r=b} = b \cdot \alpha^* (1 + \mu^*) T^* + \frac{b^2}{h \cdot E^*} (1 - \mu^*) \left[q(t) - \rho^* h \frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial t^2} \right],$$

gdje je ρ^* - gustina materijala ljuske

h - debljina ljuske.

Imajući u vidu predhodnu relaciju, iz graničnog uslova (2.2.7) se dobija

$$q(t) = \frac{h E^*}{b^2 (1 - \mu^{*2})} \left[u(b, t) - b \cdot \alpha^* (1 + \mu^*) T^* \right] + h \cdot \rho^* \frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial t^2}, \dots (2.2.49)$$

pa se uslovi (2.2.6) mogu napisati u obliku

$$\sigma_r \Big|_{r=a(t)} = -p(t), \dots (2.2.50)_{1,2}$$

$$\sigma_r \Big|_{r=b} = -B^* \left[u(b, t) - b \cdot \alpha^* (1 + \mu^*) T^* \right] - h \cdot \rho^* \ddot{u}(b, t),$$

gdje je B^* konstanta definisana na sledeći način

$$B^* = \frac{E^* h}{(1 - \mu^{*2}) b^2} \dots (2.2.51)$$

Radijalna komponenta napona σ_r , imajući u vidu (2.2.10), (2.2.4), (2.2.2), (2.2.12) i (2.2.14), se može napisati kao

$$\tilde{O}_r = 2G(1-\hat{R}) [L_1(u)] + K(1-\hat{R}_1) [L_2(u) + 3d T]. \quad \dots (2.2.52)$$

pa uslovi (2.2.50) dobijaju oblik

$$\begin{aligned} \{2G(1-\hat{R})[L_1(u)] + K(1-\hat{R}_1)[L_2(u) + 3d T]\}_{r=a(t)} &= -p(t). \\ \{2G(1-\hat{R})[L_1(u)] + K(1-\hat{R}_1)[L_2(u) + 3d T]\}_{r=b} &= \left\{ -B^* [u - b d^* (1 + \mu^*) T - h S^* \ddot{u}] \right\}_{r=b} \end{aligned} \quad \dots (2.2.53)_{1,2}$$

Na osnovu (2.2.37), (2.2.38) i (2.2.40) granični uslovi (2.2.53)_{1,2} se mogu napisati u nultom, prvom, drugom, ... približenju

$${}^{00} \quad \left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(0)}) + 3d T] \right\}_{r=a(t)} = \frac{\omega_0}{2G} \cdot p(t) \quad \dots (2.2.54)_{1,2}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(0)}) + 3d T] \right\}_{r=b} = \\ &= -\frac{\omega_0}{2G} \left\{ -B^* [u^{(0)} - b d^* (1 + \mu^*) T] - S^* h \ddot{u}^{(0)} \right\}_{r=b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{01} \quad &\left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(0)})] \right\}_{r=a(t)} = \\ &= \left\{ \omega_0 \hat{R}^{(1)} [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} \hat{R}_1^{(1)} [L_2(u^{(0)}) + 3d T] \right\}_{r=a(t)} \quad \dots (2.2.55)_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(0)})] \right\}_{r=b} = \\ &= \left\{ \omega_0 \hat{R}^{(1)} [L_1(u^{(0)})] + \frac{1}{3} \hat{R}_1^{(1)} [L_2(u^{(0)}) + 3d T] - B^* u^{(1)} - h S^* \ddot{u}^{(1)} \right\}_{r=b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{0n} \quad &\left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(n)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(n)})] \right\}_{r=a(t)} \\ &= \left\{ \omega_0 \sum_{i=1}^n \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(n)} [d T] \right\}_{r=a(t)} \quad \dots (2.2.56)_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \omega_0 (1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u^{(n)})] + \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(n)})] \right\}_{r=b} = \\ &= \left\{ \omega_0 \sum_{i=1}^n \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(n)} [d T] - \right. \\ &\quad \left. - B^* u^{(n)} - h S^* \ddot{u}^{(n)} \right\}_{r=b} \end{aligned}$$

Dakle, polazni problem se sveo na rešavanje, u svakom približenju, integro-diferencijalne jednačine oblika

$$2\omega_0 [1 - \hat{R}^{(0)}] [L(u^{(k)})] + [1 - \hat{R}_1^{(0)}] [L_1(u^{(k)})] + \varphi^{(k)} = \frac{3\omega_0}{2G} \delta u^{(k)} \dots (2.2.57)$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n.$$

pri čemu su funkcije $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ određene relacijama (2.2.45) i (2.2.46). Pri rešavanju jednačine (2.2.57) moraju biti zadovoljeni granični uslovi (2.2.54 - 56). Oni se mogu prikazati u obliku

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega_0 (1 - \hat{R}^{(0)}) [L(u^{(k)})] + \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(k)}) + 3\alpha T \delta_k] \right\}_{r=a(t)} \\ &= \left\{ -P_{1k} \right\}_{r=a(t)}; \dots (2.2.58)_{1,2} \\ & \left\{ \omega_0 (1 - \hat{R}^{(0)}) [L(u^{(k)})] + \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u^{(k)}) + 3\alpha \cdot T \delta_k] \right\}_{r=b} = \\ &= \left\{ -P_{2k} \right\}_{r=b}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{za } k=0 \\ 0 & \text{za } k \neq 0 \text{ (} k=1, 2, 3, \dots, n \text{)} \end{cases} \dots (2.2.59)$$

$$-P_{1k} = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{2G} \cdot p(t) & \text{za } k=0 \\ \omega_0 \sum_{i=1}^k \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [\alpha T] & k=1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \dots (2.2.60)$$

$$-P_{2k} = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{2G} \left\{ -B^* [u^{(0)}] - b \cdot d^* (1 + \mu^*) T^* \right\} - \xi^* \ddot{u}^{(0)} & \text{za } k=0 \\ \omega_0 \sum_{i=1}^k \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [\alpha T] - B^* u^{(k)} - h \xi^* \ddot{u}^{(k)} & k=1, 2, 3, \dots, n. \end{cases} \dots (2.2.61)$$

Može se primijetiti da, u specijalnom slučaju, kada nema temperaturnog polja ($T(r, t) = 0$) iz (2.2.57) se dobija relacija (2.2.27) jer su sve funkcije $\varphi^{(k)}$, iz (2.2.57) identički jednake nuli. U tom slučaju granični uslovi (2.2.58)_{1,2} imaju oblik

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega_0 (1 - \hat{R}) [L_1(u)] + \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1) [L_2(u)] \right\}_{r=a(t)} = \frac{\omega_0}{2G} \cdot p_{r=a} \dots (2.2.62) \\ & \left\{ \omega_0 (1 - \hat{R}) [L_1(u)] + \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1) [L_2(u)] \right\}_{r=b} = -\frac{\omega_0}{2G} \left\{ B^* u + h \xi^* \ddot{u} \right\}_{r=b}. \end{aligned}$$

2.3.2. Rešavanje odgovarajućeg dinamičkog problema

Integro-diferencijalna jednačina (2.2.57) će biti rešavana takođe metodom malog parametra. Za mali parametar biće usvojen parametar ω_0 određen relacijom (2.2.25). Rešenje $u^{(k)}$ jednačine (2.2.57) razvijeno u red po parametru ω_0 ima oblik

$$u^{(k)} = u_0^{(k)} + \omega_0 u_1^{(k)} + \omega_0^2 u_2^{(k)} + \dots + \omega_0^k u_k^{(k)} + \dots + \omega_0^m u_m^{(k)} \quad \dots (2.2.63)$$

Relacija (2.2.57) prelazi u

$$\begin{aligned} & 2\omega_0(1-\hat{R}^{(0)}) [L(u_0^{(k)}) + \omega_0 L(u_1^{(k)}) + \omega_0^2 L(u_2^{(k)}) + \dots + \omega_0^m L(u_m^{(k)})] + \\ & + (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L(u_0^{(k)}) + \omega_0 L(u_1^{(k)}) + \omega_0^2 L(u_2^{(k)}) + \dots + \omega_0^m L(u_m^{(k)})] + \\ & + \varphi^{(k)} = \frac{3\omega_0}{2G} g [\ddot{u}_0^{(k)} + \omega_0 \ddot{u}_1^{(k)} + \omega_0^2 \ddot{u}_2^{(k)} + \dots + \omega_0^m \ddot{u}_m^{(k)}] \quad \dots (2.2.64) \end{aligned}$$

Funkcije $\varphi^{(k)}$ su određene ranije (2.2.45) i (2.2.46). Izjednačavajući članove uz isti stepen parametra ω_0 , dobijaju se jednačine u nultom, prvom, ... itd. približenju

$$(1-\hat{R}_1^{(0)}) [L(u_0^{(k)})] = -\varphi^{(k)} \quad \dots (2.2.65)$$

$$(1-\hat{R}_1^{(0)}) [L(u_1^{(k)})] = -2(1-\hat{R}^{(0)}) [L(u_0^{(k)})] \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{u}_0^{(k)} \quad \dots (2.2.66)$$

$$(1-\hat{R}_1^{(0)}) [L(u_m^{(k)})] = -2(1-\hat{R}^{(0)}) [L(u_{m-1}^{(k)})] + \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{u}_{m-1}^{(k)}$$

Granični uslovi, neophodni za rešavanje predhodnih jednačina određuju se relacijom (2.2.58)_{1,2} njenim razvijanjem u red po parametru ω_0 . Parametar ω_0 , definisan relacijom (2.2.63), je mali parametar ($\omega_0 \ll 1$) jer je zapreminski moduo elastičnosti K znatno veći od modula klizanja G . Dakle, važi

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega_0(1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u_0^{(k)}) + \omega_0 L_1(u_1^{(k)}) + \omega_0^2 L_1(u_2^{(k)}) + \dots] + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_0^{(k)}) + \omega_0 L_2(u_1^{(k)}) + \dots + 3dT \delta_k] \right\}_{r=a(t)} = \{ -P_{1k} \}_{r=a(t)} \\ & \left\{ \omega_0(1-\hat{R}^{(0)}) [L_1(u_0^{(k)}) + \omega_0 L_1(u_1^{(k)}) + \dots] + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_0^{(k)}) + \omega_0 L_2(u_1^{(k)}) + \dots + 3dT \delta_k] \right\}_{r=b} = \{ -P_{2k} \}_{r=b} \end{aligned}$$

pri čemu je

$$-P_{1k} = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{2G} p(t) & \dots \text{ za } k=0 \\ \omega_0 \sum_{i=1}^k \hat{R}^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [dT] & \dots \text{ za } k=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$-P_{2k} = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{2G} \left\{ -B^* [u_0^{(0)} + \omega_0 u_1^{(0)} + \omega_0^2 + \dots - b d^* (1 + \mu^*) T^*] - g^* h [\ddot{u}_0^{(0)} + \omega_0 \ddot{u}_1^{(0)} + \dots] \right\} & \text{za } k=0 \\ (u_0 \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [dT] - & \\ -B^* [u_0^{(k)} + \omega_0 u_1^{(k)} + \dots] - g^* h [\ddot{u}_0^{(k)} + \omega_0 \ddot{u}_1^{(k)} + \dots] & \text{za } k=1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Traženi granični uslovi. za nulto. prvo. itd., približenje dobijaju oblik

$$\begin{aligned} \text{"0"} \quad & \left\{ \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_0^{(k)}) + 3 d \cdot T \delta_k] \right\}_{r=a(t)} \\ & = \begin{cases} 0 & \dots; \quad k=0 \\ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [dT] \dots; \quad k \geq 1 \end{cases}_{r=a(t)} \\ & \dots (2.2.67)_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_0^{(k)}) + 3 d \cdot T \delta_k] \right\}_{r=b} \\ & = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_2(u^{(i-1)})] + \hat{R}_1^{(k)} [dT] - B^* u_0^{(k)} - h g^* \ddot{u}_0^{(k)}; k \geq 1 \end{cases}_{r=b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{"1"} \quad & \left\{ \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_1^{(k)})] + (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_1(u_0^{(k)})] \right\}_{r=a(t)} \\ & = \begin{cases} -\frac{1}{2G} \cdot P(t) & ; \quad k=0 \\ \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] & ; \quad k \geq 1 \end{cases}_{r=a(t)} \\ & \dots (2.2.68)_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3} (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_1^{(k)})] + (1 - \hat{R}_1^{(0)}) [L_1(u_0^{(k)})] \right\}_{r=b} \\ & = \begin{cases} -\frac{1}{2G} [-B^* [u_0^{(0)} - b \cdot d^* (1 + \mu^*) T^*] - g^* h \cdot \ddot{u}_0^{(0)}] & ; \quad k=0 \\ \sum_{i=1}^k \hat{R}_1^{(i)} [L_1(u^{(i-1)})] - B^* u_1^{(k)} - g^* h \cdot \ddot{u}_1^{(k)} & k \geq 1 \end{cases}_{r=b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_\ell^{(k)})] + (1-\hat{R}) [L_1(u_{\ell-1}^{(k)})] \right\}_{r=a(t)} \\
& = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; k=0 \\ \sum_{i=1}^k \hat{R}^{(i)} [L_i(u^{(i-1)})] & ; k \geq 1 \end{array} \right\}_{r=a(t)} \\
& \dots\dots (2.2.69)_{1,2} \\
& \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1^{(0)}) [L_2(u_\ell^{(k)})] + (1-\hat{R}) [L_1(u_{\ell-1}^{(k)})] \right\}_{r=b} = \\
& = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2G} [-B^* u_{\ell-1}^{(0)} - \mathcal{G}^* h \ddot{u}_{\ell-1}^{(0)}] & ; k=0 \\ \sum_{i=1}^k \hat{R}^{(i)} [L_i(u^{(i-1)})] - B^* u_\ell^{(k)} - \mathcal{G}^* h \ddot{u}_\ell^{(k)} & ; k \geq 1 \end{array} \right\}_{r=b}
\end{aligned}$$

2.4. SLUČAJ HOMOGENOG JEZGRA RELAKSACIJE

U slučaju koji će biti razmotren predstavio se da temperaturno polje ne izaziva nehomogenost jezgara relaksacije tj. jezgra R i R_1 su samo funkcije od vremena. To znači da se u razvoju (2.2.37) zadržavamo na prvom članu, pa je $k=0$. Iz (2.2.65) i (2.2.66) slijedi

$$(1-\hat{R}_1) [L(u_0) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] = 0; \quad \dots\dots (2.2.70)$$

$$(1-\hat{R}_1) [L(u_\ell)] = -2(1-\hat{R}) [L(u_\ell)] + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}}{G} \ddot{u}_{\ell-1} \quad \dots\dots (2.2.71)$$

$\ell = 1, 2, 3, \dots, m$

Predhodnim jednačinama treba dodati i granične uslove, na osnovu (2.2.67-69);

$$\begin{aligned}
\text{"0"} \quad & \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_0) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] \right\}_{r=a(t)} = 0 \\
& \dots\dots (2.2.72)_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_0) + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial r}] \right\}_{r=b} = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{"1"} \quad & \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_1)] + (1-\hat{R}) [L_1(u_0)] \right\}_{r=a(t)} = \left\{ -\frac{1}{2G} p(t) \right\}_{r=a(t)} \\
& \dots\dots (2.2.73)_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_1) + (1-\hat{R}) L_1(u_0)] \right\}_{r=b} =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2G} [-B^* u_0 - b\alpha(1+\mu)^* T - \mathcal{G}^* h \ddot{u}_0] \right\}_{r=b}$$

$$"l" \quad \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_l)] + (1-\hat{R}) [L_1(u_{l-1})] \right\}_{r=a(t)} = 0 \quad \dots (2.2.74)_{1,2}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3} (1-\hat{R}_1) [L_2(u_l)] + (1-\hat{R}) [L_1(u_{l-1})] \right\}_{r=b} = \\ & = \left\{ -\frac{1}{2G} [-B^* u_{l-1} - \hat{S}^* h \cdot \ddot{u}_{l-1}] \right\}_{r=b}, \quad l=2,3,\dots,m. \end{aligned}$$

Da bi se dobilo rešenje u nultom približenju treba riješiti jednačinu (2.2.70) uz korišćenje graničnih uslova (2.2.72)_{1,2}. Jednačina (2.2.70) se, na osnovu (2.2.14)₂, može napisati u obliku

$$L(u_0) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_0) \right] = -3d \frac{\partial T}{\partial r} \quad \dots (2.2.75)$$

Njeno rešenje je

$$u_0(r,t) = C_{01}(t)r + \frac{C_{02}(t)}{r} - 3d \frac{1}{r} \cdot \int_{a(t)}^r T(r,t) \cdot r \cdot dr, \quad \dots (2.2.76)$$

gdje su $C_{01}(t)$ i $C_{02}(t)$ integracione konstante koje treba odrediti iz (2.2.72)_{1,2}. Postavljanjem rešenja (2.2.76) u (2.2.72)_{1,2} dobija se

$$C_{01}(t) = 0, \quad \dots (2.2.77)$$

dok je konstanta $C_{02}(t)$ za sada neodređena. Prema tome, rešenje u nultom približenju je

$$u_0(r,t) = \frac{1}{r} C_{02}(t) - 3d \frac{1}{r} \int_{a(t)}^r T(r,t) \cdot r \cdot dr. \quad \dots (2.2.78)$$

Važi

$$\ddot{u}_0(r,t) = \frac{1}{r} \cdot \ddot{C}_{02}(t) - 3d \frac{1}{r} \cdot \int_{a(t)}^r T(r,t) \cdot r \cdot dr. \quad \dots (2.2.79)$$

Treba napomenuti da se rešenje (2.2.76) dobija i iz pretpostavke da je linearno visko-elastični materijal nestišljiv, što znači da dobiveno nulto približenje predstavlja rešenje problema za slučaj kada je materijal nestišljiv.

U slučaju konstantne temperature $T(r,t)=T^0 T(t)$ rešenje $u_0(r,t)$ je

$$u_0(r,t) = \frac{1}{r} C_{02}(t) - 3d \frac{1}{r} \cdot T^0 \cdot T(t) \cdot \frac{1}{2} [(r^2 - a^2(t))], \quad \dots (2.2.80)$$

odnosno

$$\ddot{u}_0(r,t) = \frac{1}{r} \ddot{C}_{02}(t) - \frac{3dT^0}{e} \cdot r \cdot T(t) + \frac{3dT^0}{2} \cdot \frac{1}{r} [-\ddot{T}(t) + T(t) \cdot 2a(t)\ddot{a}(t)] \dots (2.2.81)$$

Za određivanje rešenja u prvom približenju $u_1=u_1(r,t)$ treba riješiti jednačinu koja se dobija iz (2.2.71) stavljanjem da je $\hat{R}_1=1$,

$$(1-\hat{R}_1) [L(u_1)] = -2(1-\hat{R}) [L(u_0)] + \frac{3}{2} \cdot \frac{\hat{S}}{G} u_0, \quad \dots (2.2.82)$$

Imajući u vidu (1.2.207) predhodna relacija se može napisati u obliku

$$L(u_1) = (1 + \hat{P}_1) \left\{ \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{u}_0 - 2(1 - \hat{R}) [L(u_0)] \right\} \quad \dots (2.2.83)$$

Na osnovu (2.2.75) i (2.2.79) iz predhodne relacije se dobija

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_1 \right] = (1 + \hat{P}_1) \left\{ \frac{3}{2} \frac{g}{G} \left[\frac{1}{r} \ddot{C}_{02}(t) - 3\alpha \frac{1}{r} \int_0^r \ddot{T}(r, t) \cdot r \cdot dr - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1 - \hat{R}) \left(-3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \right\} \quad \dots (2.2.84)$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_1 \right] = \frac{1}{r} (1 + \hat{P}_1) \cdot \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{C}_{02}(t) + d_1(r, t), \quad \dots (2.2.85)$$

gdje je

$$d_1(r, t) = (1 + \hat{P}_1) \left[-\frac{3g}{2G} \cdot 3\alpha \frac{1}{r} \int_0^r \ddot{T}(r, t) \cdot r \cdot dr - 2(1 - \hat{R}) \left(-3\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad \dots (2.2.86)$$

Rešenje jednačine (2.2.85) je

$$u_1(r, t) = r \cdot C_{11}(t) + \frac{1}{r} C_{12}(t) + \frac{r}{2} (2\ln r - \frac{1}{2}) (1 + \hat{P}_1) \frac{3g}{2G} \ddot{C}_{02}(t) \\ + \frac{1}{r} \int r \left[\int d_1(r, t) dr \right] dr, \quad \dots (2.2.87)$$

odnosno

$$u_1(r, t) = r \cdot C_{11}(t) + \frac{1}{r} C_{12}(t) + D_1(r, t) + I_1(r, t). \quad \dots (2.2.88)$$

gdje je

$$D_1(r, t) = \frac{1}{2} f_1(t) r (\ln r - \frac{1}{2}), \\ I_1(r, t) = \frac{1}{r} \int r \left[\int d_1(r, t) dr \right] dr, \quad \dots (2.2.89) \\ f_1(t) = \frac{3g}{2G} (1 + \hat{P}_1) \ddot{C}_{02}(t).$$

U specijalnom slučaju kada se $T(r, t) = T^0 \cdot T(t)$, veličina $I_1(r, t)$ iz predhodne relacije je

$$I_1(r, t) = (1 + \hat{P}_1) \left[-\frac{3g}{2G} \cdot 3\alpha \cdot T^0 \cdot \ddot{T}(t) \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{r^3}{2.4} - \alpha^2 \cdot \frac{1}{2} (r \ln r - \frac{r}{2}) \right] \quad \dots (2.2.90)$$

Ako temperaturnog polja nema, onda je $I_1(r, t) = 0$ pa je rešenje

$$u_1(r, t) = r C_{11}(t) + \frac{1}{r} C_{12}(t) + D_1(r, t) \quad \dots (2.2.91)$$

Analognim postupkom, stavljajući u (2.2.71) da je $\ell = 2$, jednačina za određivanja rešenja u drugom približenju $u_2(r, t)$ je

$$(1 - \hat{R}_1) L(u_2) = -2(1 - \hat{R}) [L(u_1)] + \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{u}_1$$

odnosno

$$L(u_2) = (1 + \hat{P}_1) \left\{ \frac{3}{2} \frac{g}{G} \ddot{u}_1 - 2(1 - \hat{R}) [L(u_1)] \right\} \quad \dots (2.2.92)$$

Na osnovu (2.2.83) i (2.2.91) predhodna relacija ima oblik

$$L(u_2) = f_2 r + \frac{1}{r} f_3 + f_4 r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{r} f_5 + d_2(r, t), \quad \dots (2.2.93)$$

gdje su

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3g}{2G} (1 + \hat{P}_1) \ddot{C}_{11}, \\ f_3 &= \frac{3}{2G} (1 + \hat{P}_1) \ddot{C}_{12}, \\ f_4 &= \frac{9}{8} \frac{g^2}{G^2} (1 + \hat{P}_1) \frac{d^2}{dt^2} \left[(1 + \hat{P}_1) \ddot{C}_{02} \right], \\ f_5 &= (1 + \hat{P}_1)(1 - \hat{R}) f_1, \end{aligned} \quad \dots (2.2.94)$$

funkcije samo od vremena. $C_{11}(t)$ i $C_{12}(t)$ su proizvoljne funkcije od vremena.

Opšte rešenje jednačine (2.2.93) se može prikazati u obliku

$$u_2(r, t) = \dot{C}_{21}(t) r + \frac{1}{r} C_{22}(t) + D_2(r, t) + I_2(r, t) \quad \dots (2.2.95)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} D_2(r, t) &= \frac{1}{8} f_2 r^3 + \frac{1}{2} f_3 r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} f_4 r^3 \left(\ln r - \frac{5}{4} \right) - f_5 r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad \dots (2.2.96)$$

a $I_2(r, t)$ funkcija koja zavisi od zadanog temperaturnog polja. U specijalnom slučaju kada nema temperaturnog polja funkcija $I_2(r, t)$ je jednaka nuli.

Nastavljanjem započetog postupka, mogu se naći i približenja

$u_3(r, t), u_4(r, t), \dots, u_m(r, t)$, pri čemu je

$$u_m(r, t) = C_{m1}(t) r + C_{m2} \frac{1}{r} + D_m(r, t) + I_m(r, t), \quad \dots (2.2.97)$$

gdje su $C_{m1}(t)$ i $C_{m2}(t)$ proizvoljne funkcije od vremena, a $D_m(r, t)$ i $I_m(r, t)$ predstavljaju partikularno rešenje m -tog približenja pri čemu je $I_m(r, t)$ posledica prisutnog temperaturnog polja.

Prema tome, problem se svodi na odredjivanje funkcija C_{m1}, C_{m2} , za $m=1, 2, \dots$, i C_{02} , pri čemu je $C_{01}=0$. Za njihovo odredjivanje treba iskoristiti granične uslove (2.2.73)_{1,2}, odnosno (2.2.74)_{1,2} za $m=1, 2, 3, \dots$

Postavljanjem dobivenih rešenja $u_0 = \ddot{u}_0(r, t)$ i $u_1 = \ddot{u}_1(r, t)$ u relacije (2.2.73)_{1,2}, dobijaju se granični uslovi u obliku

$$\begin{aligned} 2(1 - \hat{R}_1) C_{11} + \ln a (1 - \hat{R}_1) f_1 - \frac{3}{a^3} (1 - \hat{R}) C_{02} + F_1(a, t) &= -\frac{3}{2G} p(t), \\ 2(1 - \hat{R}_1) C_{11} + \ln b (1 - \hat{R}_1) f_1 - \frac{3}{b^3} (1 - \hat{R}) C_{02} + F_2(a, t) &= \\ = -\frac{3}{2G} \left[\frac{B^*}{b} C_{02} + \frac{g^* h}{b} \ddot{C}_{02} + F_3(b, t) \right]. \end{aligned} \quad \dots (2.2.98)$$

gdje su $F_1(a, t)$, $F_2(a, t)$ i $F_3(a, t)$ sledeći izrazi

$$\begin{aligned}
 F_1(a, t) &= \left[\frac{I_1(r, t)}{r} + \frac{I_1(r, t)}{r} - 3\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int_a^r T(r, t) r dr \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 3\alpha \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r, t) r dr \right]_{r=a} \\
 F_2(a, t) &= \left[\frac{\partial I_1(r, t)}{\partial r} + \frac{I_1(r, t)}{r} - 3\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int_a^r T(r, t) r dr \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 3\alpha \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r, t) \cdot r \cdot dr \right]_{r=b} \quad \dots\dots(2.2.99) \\
 F_3(b, t) &= \left[B^* \left(-3\alpha \frac{1}{r} \int_a^r T(r, t) r dr \right) + b \alpha^* (1 + \alpha^*) \right. \\
 &\quad \left. + S^* h \left(-3\alpha \frac{1}{r} \int_a^r \ddot{T}(r, t) r dr \right) \right]_{r=b}
 \end{aligned}$$

Eliminacijom veličine $C_{11}(t)$ iz (2.2.98) dobija se diferencijalna jednačina za određivanje veličine C_{02} , oblika

$$C_{02} + \omega^2 \cdot C_{02} = B \hat{R} C_{02} + P(a, t). \quad \dots\dots(2.2.100)$$

gdje su ω^2 , B i P , poznate funkcije vremena. Predpostavimo da je iz (2.2.100) nadjena funkcija $C_{02}(t)$, uz korišćenje odgovarajućih početnih uslova. Nepoznata $C_{11}(t)$ se zatim može naći iz prve ili druge jednačine relacije (2.2.98). Neka je nadjena iz druge relacije. Dobija se

$$(1 - \hat{R}_1) \cdot C_{11} = \Psi_1(C_{02}, t). \quad \dots\dots(2.2.101)$$

gdje je Ψ_1 poznata funkcija vremena. Nije teško dobiti izraz kojim se ona izražava preko C_{02} .

Kada su funkcije C_{02} i C_{11} određene, onda se na osnovu graničnih uslova (2.2.74)_{1,2} za $m=2$, mogu analognim postupkom dobiti relacije za određivanje C_{12} i C_{21} .

$$\ddot{C}_{12} + \omega^2 C_{12} = B \cdot \hat{R} \cdot C_{12} + P_1(C_{02}, C_{11}, t). \quad \dots\dots(2.2.102)$$

$$(1 - \hat{R}_1) C_{21} = \Psi_2(C_{02}, C_{11}, C_{12}, t) \quad \dots\dots(2.2.103)$$

Uopšte, može se pokazati da funkcije C_{m1} i C_{m2} treba da zadovoljavaju jednačine oblika

$$C_{m2} + \omega^2 \cdot C_{m2} = B \cdot \hat{R} \cdot C_{m2} + P_m(C_{m-1,2}; C_{m1}, t) \quad \dots\dots(2.2.104)$$

$$(1-\hat{R}_1)C_{m1} = \Psi_m(C_{m-2,2}; C_{m-1,1}; C_{m-1,2}; t) \quad \dots\dots(2.2.105)$$

$$(m=0,1,2\dots)$$

Važno je napomenuti da ako je materijal cilindra nesišljiv tj. $\theta=0$, onda su sve konstante C_{m1} i C_{m2} jednake nuli osim konstante C_{02} koja se dobija rešavanjem jednačine (2.2.100).

Za rešavanje jednačina tipa (2.2.104) i (2.2.105) postoje u literaturi razradjene metode (metod usrednjavanja, zamrzavanja itd.) pa njihovo rešavanje neće biti razmatrano.

2.5. OPŠTI SLUČAJ

U predhodnom odeljku je nadjeno rešenje za slučaj kada smo se u razvoju (2.2.37) zadržali na prvom članu, tj. za $k=0$. Sledeća približenja, za $k=1,2,\dots$ se dobijaju potpuno analognim postupkom.

GLAVA III: POSTAVKA I REŠENJA PROBLEMA ELEKTRO- TERMO-PLASTIČNOSTI

U ovoj zaključnoj glavi su date originalne postavke i rešenja problema zasnovanih na elektro-termo-plastičnom efektu, a medju njima toplo izvlačenje tankih žica i toplo valjanje metalnog lima.

1. ELEKTRO-TERMO-PLASTIČNI EFEKAT

1.1. POJAM

Elektroplastični efekat ([1],[2],[3]) je pojava snižavanja granice tečenja metala, kroz koji protiče električna struja velike gustine, usled pospješivanja razvijanja dislokacija pod dejstvom elektrona. Efekat se obično ispituje propuštanjem električne struje, velike gustine (ili električnih impulsa), kroz tanku žicu (koja je opterećena) i registrovanjem pada napona. Da bi se jednoznačno utvrdio uticaj elektroplastičnog efekta na pad napona, neophodno je eliminisati ili učiniti neznatnim tzv. elektro-termo-plastični efekat.

Elektro-termo-plastični efekat se sastoji u snižavanju vrijednosti napona, odnosno granice tečenja metala, zbog zagrijavanja metala oslobodjenom Džulovom toplotom (jer kroz njega protiče električna struja). Tako zagrijani metal se lakše obradjuje (deformiše), ali ga zatim, u cilju izbjegavanja raznih neželjenih hemijskih efekata, treba hladiti, što se vrši rashladnom tečnošću ili gasom. Ukoliko je gustina struje dovoljno velika metal će se zagrijati toliko da mu temperatura na površini dostigne vrijednost temperature isparavanja tečnosti. To ima za posledicu da se između metala i tečnosti obrazuje sloj pregrijane pare, koja slabo provodi toplotu (i do 30 puta slabije od tečnosti [4]) i u neku ruku predstavlja izolator. Zbog toga se temperatura metala povišava i, da bi se uspostavila razmjena toplote sa tečnošću, treba da se povisi i do 30 puta, što praktično i predstavlja kritični trenutak samog procesa razmjene toplote. Na taj način je i gustina električne struje ograničena i kreće se, saglasno [4], u granicama 150-360 A/mm². Takodje je poznato ([4],[5]) da je za ostvarivanje elektroplastičnog efekta neophodna gustina električne struje od 10³-10⁵ A/mm². Zbog toga, da bi se realizovao elektroplastični efekat, neophodno je preduzimati specijalne mjere za povećanje provodjenja toplote kroz sistem metal-para-tečnost, što je veoma teško.

1.2. JEDNAČINA PROSTIRANJA TOPLOTE

Odredjivanje temperaturnog polja, u nekoj sredini koja se kreće, vrši se iz dvije jednačine Fika, oblika

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = Q \quad \dots (3.1.1)$$

$$\vec{J} = -\lambda \text{grad } T + \rho c T \vec{v}. \quad \dots (3.1.2)$$

Prva jednačina Fika (3.1.1) predstavlja jednačinu balansa toplote u svakoj diferencijalno maloj zapremini materijala. Druga jednačina (3.1.2) je jednačina prenosa toplote. Prenosjenje toplote se vrši provodjenjem toplote ($-\lambda \text{grad } T$) i konvekcijom (strujanjem), tj. odvođenjem toplote pomoću materi-

jala koji se kreće ($\rho c T \vec{U}$). U jednačinama (3.1.1) i (3.1.2) su uvedene sledeće oznake

$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$ - gustina metala

$c \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ \text{K}} \right)$ - specifična toplota materijala koji se zagrijava

$T(^{\circ})$ - temperatura u proizvoljnoj tački

$Q \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{ sec}} \right)$ - dovedena količina toplote

$\lambda \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ \text{K} \cdot \text{sec}} \right)$ - koeficijent provodjenja toplote

\vec{J} - vektor prenosa toplote

\vec{U} - brzina uočene čestice metala.

Postavljanjem (2) u (1) dobija se

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \text{div}(-\lambda \text{grad } T + \rho c T \vec{U}) = Q. \quad \dots (3.1.3)$$

U krivolinijskom ortogonalnom koordinatnom sistemu (x_1, x_2, x_3) predhodna jednačina, saglasno relacijama (2.1.37) i (2.1.39), ima oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho c H_2 H_3 U_1 T) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho c H_3 H_1 U_2 T) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho c H_1 H_2 U_3 T) \right] = Q(x_1, x_2, x_3, t), \end{aligned} \quad \dots (3.1.4)$$

a^u polarno-cilindričnom (2.1.135)₂ i bi-cilindričnom (2.1.161) koordinatnom sistemu je

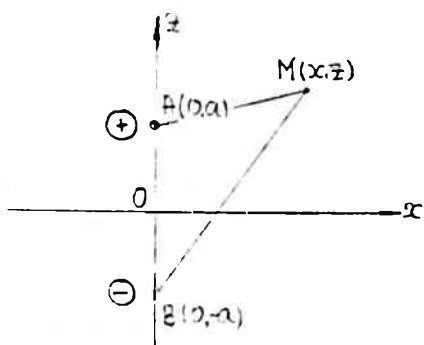
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho c U_r T) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho c U_\varphi T) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho c U_z T) \right] = Q(r, \varphi, z, t), \quad \dots (3.1.5) \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \frac{1}{e^2} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \xi} (e U_\xi T) \right] \\ + \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \eta} (U_\eta T) \right] + \\ + \frac{1}{e^2} \left[-\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \zeta} (e U_\zeta T) \right] = Q(\xi, \eta, \zeta, t) \quad \dots (3.1.6) \end{aligned}$$

1.3. POJAM ELEKTRIČNOG BIPOLA. DŽULOVA TOPLOTA

U dvije tačke A(0,a) i B(0,-a) ravni xOz dovedimo električni napor.



$U(x,z)$ pomoću nekog izvora električne struje (Sl. 3.1.1). Napon u proizvoljnoj tački M ravni xOz je određen sledećom relacijom

$$\frac{U(x,z)}{U_0} = \ln \frac{[x^2 + (z+a)]^2}{[x^2 + (z-a)]^2}, \dots (3.1.7)$$

gdje je U_0 neki konstantni napon. Ako se lijeva strana predhodne relacije označi sa 2ζ , dobija se

$$U = U_0 \cdot 2\zeta = \ln \frac{[x^2 + (z+a)]^2}{[x^2 + (z-a)]^2} \dots (3.1.8)$$

Sl. 3.1.1.

Ekvipotencijalne linije $U = \text{const.}$, tj. $\zeta = \zeta_0 = \text{const.}$ imaju oblik

$$x^2 + z^2 + 2az \frac{1+e^{2\zeta_0}}{1-e^{2\zeta_0}} + a^2 = 0,$$

odnosno

$$x^2 + (z - a \cdot \text{ctg } \zeta_0)^2 = a^2 (\text{ctg } \zeta_0^2 - 1),$$

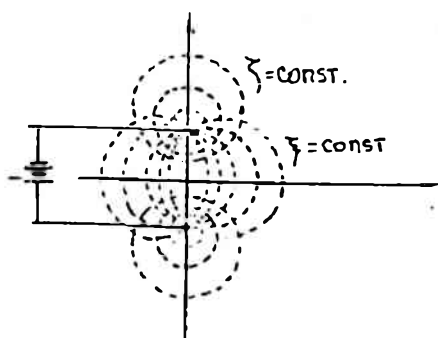
jer je

$$\frac{1+e^{2\zeta_0}}{1-e^{2\zeta_0}} = -\text{cth } \zeta_0,$$

što znači da su ekvipotencijalne linije, u ravni xOz, kružnice čiji se centri nalaze na osi z. Poluprečnici kružnica su promjenljivi

$$R_{\zeta_0} = a^2 (\text{ctg } \zeta_0^2 - 1),$$

kao što je prikazano na Sl. 3.1.2.



Sl. 3.1.2.

Prema tome, ekvipotencijalne linije $\zeta = \text{const.}$ se poklapaju sa familijom kružnica $\zeta_0 = \text{const.}$ (2.1.59) ranije uvedenog bicilindričnog koordinatnog sistema. Druga familija krivih normalnih na familiju $\zeta = \text{const}$ (Sl. 3.1.2) su kružnice $\xi = \text{const.}$, koje imaju osobinu da sve prolaze kroz tačke A i B što je ranije bilo pokazano. Dakle, strujne linije posmatranog električnog bipola se poklapaju sa krivima (kružnicama) $\xi = \text{const.}$

Vektor električnog polja (\vec{E}) je

$$\vec{E} = - \text{grad } U. \quad \dots (3.1.9)$$

što znači da je normalan na krivu $\xi = \text{const.}$ u posmatranoj tački i tangira krivu $\eta = \text{const.}$ u toj istoj tački.

Važi

$$\vec{E} = \mathcal{S}_T(T) \cdot \vec{j}. \quad \dots (3.1.10)$$

gdje je \vec{j} - vektor gustine električne struje ($\frac{A}{m^2}$)

\mathcal{S}_T - specifična otpornost ($\Omega \cdot m$).

Količina toplote koja se, proticanjem električne struje, oslobodi u jedinici vremena je

$$Q = \vec{j} \cdot \vec{E} = \mathcal{S}_T \cdot j^2. \quad \dots (3.1.11)$$

pa se, na osnovu (3.1.9), dobija

$$Q = \frac{1}{\mathcal{S}_T} (-\text{grad } U)^2. \quad \dots (3.1.12)$$

U slučaju električnog bipola, na osnovu (3.1.8) i (2.1.37), je

$$Q = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{4U_0}{\mathcal{S}_T},$$

odnosno, imajući u vidu (3.1.10),

$$Q = \frac{1}{\epsilon^2(\xi, \eta)} \cdot \mathcal{S}_T \cdot 4J_0 = \frac{1}{\epsilon^2(\xi, \eta)} Q_0(T), \quad \dots (3.1.13)$$

pri čemu je

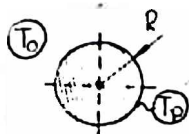
$$Q_0(T) = \mathcal{S}_T(T) 4J_0.$$

2. TEMPERATURNI POLJE PRI TOPLOM IZVLAČENJU TANKIH ŽICA

2.1. POSTAVKA PROBLEMA

Biće razmatran problem odredjivanja temperaturnog polja u žici koja

se izvlači i pri tome zagrijava Džulovom toplotom nastalom usled proticanja električne struje stalne gustine j . Predpostavlja se da je gustina električne struje tolika da izaziva elektro-termo-plastični efekat a ne elektro-plastični efekat. Žica se hladi u tečnosti temperature T_0 (Sl. 3.2.1). Temperaturu površine žice označimo sa T_p . Radi se o osnosimetričnom problemu, pa



Sl. 3.2.1.

će biti usvojen polarno cilindrični koordinatni sistem. Slika temperaturnog polja, za bilo koju vrijednost polarnog ugla φ , je ista pa su parcijalni izvodi svih veličina po uglu φ jednaki nuli, tj. $\partial/\partial\varphi = 0$. Od komponenta brzina deformacije od nule je različita komponenta $\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}$ dok su ostale komponente jednake nuli tj. $\dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_r = 0$.

Na osnovu predhodno rečenog i relacije (3.1.11), jednačina za određivanje polja temperature (3.1.5) dobija oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \rho c U T \right] \right] = Q(T) \quad \dots (3.2.1)$$

Za rešavanje predhodne jednačine najčešće se koristi metod usrednjavanja ([38], [39], [40], [41], [43]). Usrednjavanje se vrši po površini poprečnog presjeka žice. Dimenzije poprečnog presjeka su male pa se i vrijednosti temperature u pojedinim tačkama poprečnog presjeka ne mogu međusobno mnogo razlikovati. Zbog toga se kao reprezent temperature u nekom poprečnom presjeku može usvojiti srednja temperatura (\bar{T}) određena na sledeći način

$$\bar{T}(z, t) = \frac{1}{R^2 \pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} T(r, z, t) \cdot r \, d\varphi \, dr,$$

odnosno

$$\bar{T}(z, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R T(r, z, t) \cdot r \, dr. \quad \dots (3.2.2)$$

U cilju dobijanja jednačine za određivanje funkcije $\bar{T} = \bar{T}(z, t)$, treba jednačinu (3.2.1) usredniti po površini poprečnog presjeka, usrednjavanjem svakog člana jednačine, na način na koji je usrednjena temperatura $T(r, z, t)$, tj. pomoću relacije (3.2.2). Dakle, usrednjavanjem relacije (3.2.1), uz pretpostavku da veličine: λ , ρ , c , U i Q , ne zavise od promjenljive r , dobija se

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2} \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \left[-\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=0}^{r=R} + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\lambda \frac{R^2}{2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \rho c \frac{R^2}{2} U \cdot \bar{T} \right] = \\ = \frac{R^2}{2} \rho c \bar{Q}. \end{aligned} \quad \dots (3.2.3)$$

Iz predhodne relacije se vidi da je, u cilju određivanja zavisnosti $\bar{T} = \bar{T}(z, t)$, neophodno znati stvarni raspored temperature po poprečnom presjeku, tj. tzv. profil temperature $T = T(r)$.

2.2. PROFIL TEMPERATURE

Predpostavljajući da je profil temperature približno isti u svim presjecima žice i da se ne mijenja mnogo tokom vremena tj. da je $T = T(r)$, iz (3.2.1) se dobija jednačina za određivanje profila temperature

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT(r)}{dr} \right] = - \frac{q_0}{\lambda} \cdot \mathcal{J}^2, \quad \dots (3.2.4)$$

pri čemu je pretpostavljeno da je $q_T(T) = q_0 = \text{const.}$ i da je $\lambda(T) = \lambda = \text{const.}$ Granični uslov. neophodan za rešavanje predhodne jednačine. se određuje iz činjenice da je količina toplote koja prodje kroz površinu žice jednaka količini toplote koju primi okolina. Važi

$$J \Big|_{r=R} = -\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} = \alpha (T_p - T_0), \quad \dots (3.2.5)$$

gdje je α - konstanta provodjenja toplote ($\frac{W}{m^2 \cdot K}$).

Jednačina (3.2.4) je za slučaj linearnog graničnog uslova riješena u radu [41]. Medjutim, korišćenje takvog graničnog uslova je opravdano, kako je pokazano u [42]. samo u slučaju malih brzina izvlačenja za dijapazon većih brzina izvlačenja realnije je nelinearni granični uslov, tj. granični uslov oblika

$$J \Big|_{r=R} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = k (T_p - T_0)^2, \quad \dots (3.2.6)$$

gdje je k - konstanta provodjenja toplote [$W/(m^2 \cdot K^2)$].

Integracijom jednačine (3.2.4), uz korišćenje graničnih uslova oblika

$$T(r) \Big|_{r=0} = T_c, \quad \dots (3.2.7)_{1,2}$$

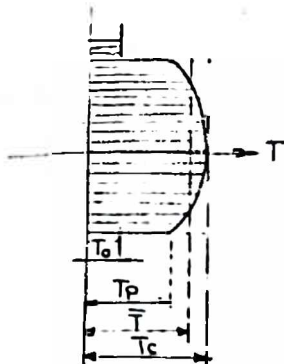
$$\frac{\partial T(r)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

dobija se

$$T(r) = T_0 - \frac{q_0}{4\lambda} \cdot \mathcal{J}^2 \cdot r^2 \quad \dots (3.2.8)$$

što znači da je promjena temperature, zavisno od poluprečnika r , parabolična.

Temperatura T_c je temperatura u centru žice (Sl. 3.2.2).



Sl. 3.2.2.

Na površini žice ($r=R$) temperatura je

$$T_p = T(r) \Big|_{r=R} = T_c - \frac{q_0}{4\lambda} \mathcal{J}^2 \cdot R^2, \quad \dots (3.2.9)$$

Ako se iz predhodne relacije i relacije (3.2.8) eliminiše temperatura centra T_c , dobija se

$$T(r) = T_p + \frac{q_0}{4\lambda} \mathcal{J}^2 \cdot (R^2 - r^2) \quad \dots (3.2.10)$$

Srednja vrijednost temperature, po poprečnom presjeku, na osnovu (3.2.2) je

$$\bar{T} = T_p + \frac{9}{8\lambda} j^2 \cdot R^2. \quad \dots (3.2.11)$$

Ako se iskoristi granični uslov (3.2.6). iz (3.2.10). se dobija

$$T_p = T_o + \sqrt{\frac{9}{2K} j^2 \cdot R^2}, \quad \dots (3.2.12)$$

pa jednačina profila temperature (3.2.10) i srednja temperatura \bar{T} imaju oblik

$$T(r) = T_o + \sqrt{\frac{9}{2K} j^2 \cdot R^2} + \frac{9}{4\lambda} j^2 (R^2 - r^2), \quad \dots (3.2.13)$$

$$\bar{T} = T_o + \sqrt{\frac{9}{2K} j^2 \cdot R^2} + \frac{9}{8\lambda} j^2 \cdot R^2. \quad \dots (3.2.14)$$

U slučaju linearnog graničnog uslova (3.2.5). saglasno [41], je

$$T_p - T_o = \frac{9}{2\lambda} j^2 \cdot R^2 = \bar{T} - (T_o + \frac{1}{8} \frac{9}{\lambda} j^2 \cdot R^2). \quad \dots (3.2.15)$$

Na osnovu jednačine (3.2.12) se može ocijeniti potrebna gustina električne struje J . da bi proces razmjene toplote između metala, koji se izvlači, i tečnosti za hlađenje bio stabilan tj. da ne bi došlo do formiranja izolacionog sloja od pregrijane pare. U kritičnom slučaju, kada je temperatura na površini žice jednaka temperaturi ključanja tečnosti za hlađenje ($T_p = T_k$), je

$$j = \sqrt{\frac{2K(T_k - T_o)^2}{9 \cdot R}}. \quad \dots (3.2.16)$$

2.3. ODREĐIVANJE ZAVISNOSTI $\bar{T} = \bar{T}(z, t)$

Iz jednačine (3.2.3) se, korišćenjem graničnih uslova (3.2.5) i (3.2.7)₂, dobija

$$\frac{9cR^2}{2} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + [-\lambda R d(T_p - T_o)] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\lambda \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + 9c \frac{R^2}{2} \cdot T \right] = 9j^2 \cdot \frac{R^2}{2}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K_s \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + U \cdot T \right] - V(\bar{T} - T_1) + \delta = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}. \quad \dots (3.2.17)$$

gdje su $K_s = \lambda / (9c)$;

$$\delta = j^2 / c;$$

$$V(\bar{T} - T_1) = [2d(T_p - T_o) / R 9c];$$

$$T_1 = T_o + \frac{1}{8} \frac{9}{\lambda} j^2 R^2;$$

$$V = (2d) / (9Rc).$$

U slučaju stacionarnog režima izvlačenja. desna strana jednačine (3.2.17) je

jednaka nuli pa je

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \frac{U}{k_s} \cdot \frac{d\bar{T}}{dz} - \frac{V}{k_s} \bar{T} + \frac{V}{k_s} T_1 + \delta = 0. \quad \dots (3.2.18)$$

Predhodna jednačina je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. što znači da je lako naći njeno rešenje.

U slučaju korišćenja nelinearnog graničnog uslova (3.2.6) dobija se nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda

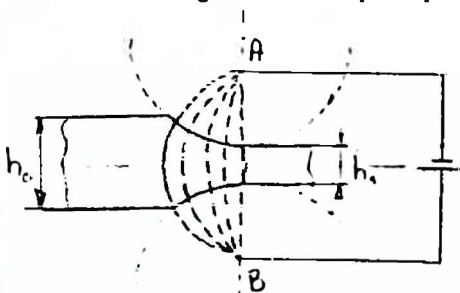
$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \frac{U}{k_s} \cdot \frac{d\bar{T}}{dz} - \frac{V}{k_s} (\bar{T} - T_1)^2 = -\delta. \quad \dots (3.2.19)$$

čije rešavanje se svodi na rešavanje eliptičkih integrala.

3. ODREĐJIVANJE PROFILA TEMPERATURE KOD TOPLO VALJANOG LIMA

3.1. POSTAVKA PROBLEMA

Sloj metala početne debljine h_0 i širine b valja se između dva apsolutno kruta valjka istih poluprečnika R i rastojanja između osa $2L$ (Sl.3.3.1)



Sl.3.3.1.

pri čemu se obrazuje zona kontakta dužine ℓ . Neka je sloj tanak ($h_0 \ll \ell$) i neka je dužina zone kontakta mnogo manja od širine materijala b ($\ell \ll b$). Poznata je ugaona brzina obrtanja valjaka ω .

Na valjke se, pomoću električnog bipola, dovodi električna struja gustine j u tačke $A(0, a)$ i $B(0, -a)$.

Usled oslobodjene Džulove toplote Q , određene relacijama (3.1.13), materijal se zagrijava. Polje temperature $T = T(\xi, \eta, \gamma)$ se određuje rešavanjem jednačine prostiranja toplote (3.1.6). Imajući u vidu (3.1.13), relacija (3.1.6) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \xi} (c U_\xi T) \right] + \\ + c^2 \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \eta} (U_\eta T) \right] + \\ + \left[-\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \gamma} (c U_\gamma T) \right] = Q_0(T). \quad \dots (3.3.1) \end{aligned}$$

Pošto se radi o ravnom stanju brzina deformacija, brzine U_ξ i U_γ su različite od nule dok je brzina $U_\eta = 0$. Osim toga, može se pretpostaviti da je slika temperaturnog polja u svakom presjeku ista, tj. ona ne zavisi od koordinate η , što znači da je parcijalni izvod temperature po promjenljivoj η jednak nuli.

Imajući u vidu predhodno rečeno. relacija (3.2.1) dobija oblik

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \left[- \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \xi} (c v_{\xi} T) \right] + \left[- \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho c \frac{\partial}{\partial \xi} (c v_{\xi} T) \right] = Q_0(T) \quad \dots (3.3.2)$$

U cilju rešavanja predhodne jednačine može se koristiti, kao i kod izvlačena tankih žica, metod usrednjavanja. S obzirom na činjenicu da je debljina sloja mala u odnosu na veličinu zone kontakta usrednjavanja treba izvršiti po koordinati ξ .

3.2. PROFIL TEMPERATURE

Predstavljajući da se profil temperature po debljini sloja ne mijenja mnogo sa promjenom vremena t i, koordinate ξ , tj. da je $T=T(\xi)$ iz jednačine (3.3.2) se dobija jednačina za odredjivanje profila temperature

$$\left[- \frac{d}{d\xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho \cdot c \frac{d}{d\xi} (c v_{\xi} T) \right] = Q_0(T) \quad \dots (3.3.3)$$

S obzirom da su brzine v_{ξ} male može se pretpostaviti da je dio toplote koji se prenosi kroz materijal konvekcijom (strujanjem) znatno manji od dijela toplote koja se kroz materijal prenosi provodjenjem. U tom slučaju jednačina (3.3.3) dobija izgled

$$\frac{d}{d\xi} \left(- \lambda \frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi} \right) = Q_0(T). \quad \dots (3.3.4)$$

U slučaju kada je $Q_0(T)=Q_0=\text{const.}$ i $\lambda(T)=\lambda=\text{const.}$, rešavanjem predhodne jednačine, dobija se

$$T(\xi) = T \Big|_{\xi=0} - \frac{Q_0}{2} \xi^2. \quad \dots (3.3.5)$$

pri čemu je $T \Big|_{\xi=0}$ temperatura u centru tj. u tačkama $\xi=0$. Pri rešavanju predhodne jednačine iskorišten je uslov da je

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{T=0} = 0. \quad \dots (3.3.6)$$

Odredjivanje temperature $T \Big|_{\xi=0}=T_0$ vrši se korištenjem graničnog uslova oblika

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_{AB}} = \alpha_1 \cdot (T_p - T_0) + \alpha_2 \cdot (T_p - T_0)^2. \quad \dots (3.3.7)$$

koji označava da je količina toplote koju materijal, kroz svoju granicu ξ_{AB} , oda okolini temperature T_0 jednaka količini toplote koju okolina primi, pri čemu je uzet opštiji (nelinearni) oblik graničnog uslova. Temperatura T_p je temperatura na površini metala, tj. $T \Big|_{\xi=\xi_{AB}}=T_p$.

Iz (3.3.5) se, za $\zeta = \zeta_{AB}$, dobija

$$T_p = T_c - \frac{Q_0}{2\lambda} \cdot \zeta_{AB}^2 \quad \dots\dots (3.3.8)$$

Ako se iz (3.3.5) i (3.3.8) eliminiše temperatura $T_c = T|_{\zeta=0}$, dobija se

$$T(\zeta) = T_p + \frac{Q_0}{2\lambda} (\zeta_{AB}^2 - \zeta^2) \quad \dots\dots (3.3.8)$$

pri čemu se temperatura T_p određuje iz graničnog uslova (3.3.7)

$$Q_0 \cdot \zeta_{AB} = \alpha_1 (T_p - T_0) + \alpha_2 (T_p - T_0)^2 \quad \dots\dots (3.3.9)$$

Ako je npr. $\alpha_2 = 0$, onda je

$$T_p = T_0 + \frac{Q_0}{\alpha_1} \zeta_{AB} \quad \dots\dots (3.3.10)$$

ili, ako je $\alpha_1 = 0$, onda je

$$T_p = T_0 + \frac{\sqrt{Q_0 \cdot \zeta_{AB}}}{\alpha_2} \quad \dots\dots (3.3.11)$$

U opštijem i realnijem slučaju kada se funkcija $Q_0(T)$ pretpostavi u obliku $Q_0(T) = Q_0(1 + \alpha T)$ jednačina (3.3.4) postaje

$$\frac{d^2 T(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{Q_0 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot T(\zeta) = -\frac{Q_0}{\lambda} \quad \dots\dots (3.3.12)$$

Radi se o diferencijalnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno rešenje je

$$T(\zeta) = A \cos \sqrt{\frac{Q_0 \cdot \alpha}{\lambda}} \cdot \zeta - \frac{1}{\alpha} \quad \dots\dots (3.3.13)$$

gdje je A – proizvoljna konstanta. Pri dobijanju predhodnog rešenja iskorišten je uslov (3.3.6).

Stavljajući u predhodnoj relaciji da je $\zeta = \zeta_{AB}$ dobija se temperatura na površini metala T_p

$$T_p = T(\zeta)|_{\zeta=\zeta_{AB}} = A \cdot \cos \sqrt{\frac{Q_0 \cdot \alpha}{\lambda}} \cdot \zeta_{AB} - \frac{1}{\alpha} \quad \dots\dots (3.3.14)$$

Ako se iz (3.3.13) i (3.3.14) eliminiše konstanta A, dobija se

$$T(\zeta) = \frac{T_p + \frac{1}{\alpha}}{\cos \sqrt{\frac{Q_0 \cdot \alpha}{\lambda}} \cdot \zeta_{AB}} \cdot \cos \sqrt{\frac{Q_0 \cdot \alpha}{\lambda}} \cdot \zeta - \frac{1}{\alpha} \quad \dots\dots (3.3.15)$$

Temperatura T_p se određuje iz graničnog uslova (3.3.7).

Na kraju će biti razmotren slučaj kada se u jednačini (3.3.3) ne zanemaruje član koji određuje toplotu koja se prenosi strujanjem, za slučaj

kada je $Q_0(T) = Q_0 = \text{const.}$ Tada se jednačina (3.3.3) može napisati u sledećem obliku

$$\frac{d}{d\zeta} \left[-\lambda \frac{dT}{d\zeta} + g c \cdot v_{\zeta} \cdot T \right] = Q_0. \quad \dots (3.3.16)$$

odnosno

$$-\lambda \frac{dT}{d\zeta} + g c \cdot v_{\zeta} \cdot T = Q_0 \zeta + B_1, \quad \dots (3.3.17)$$

gdje je B_1 integraciona konstanta.

Nehomogena diferencijalna jednačina prvog reda (3.3.17) se smjenom

$$T(\zeta) = U(\zeta) \cdot V(\zeta) \quad \dots (3.3.18)$$

može svesti na homogenu. Pošto je

$$\frac{dT}{d\zeta} = \frac{dU}{d\zeta} V + U \frac{dV}{d\zeta}. \quad \dots (3.3.19)$$

to zamjenom (3.3.18) i (3.3.19) u (3.3.17) dobija se

$$\left[-\lambda \frac{dV}{d\zeta} + g c \cdot v_{\zeta} \right] \cdot U = (Q_0 \zeta + B_1) + \lambda \frac{dU}{d\zeta} V$$

Da bi se predhodna jednačina svela na homogenu oblika

$$-\lambda \frac{dV}{d\zeta} + g c \cdot v_{\zeta} = 0. \quad \dots (3.3.20)$$

funkcija mora da zadovoljava jednačinu

$$-\lambda \frac{dU}{d\zeta} \cdot V = Q_0 \zeta + B_1. \quad \dots (3.3.21)$$

Rešenje jednačine (3.3.20) je

$$V(\zeta) = V_0 \cdot \exp I_1. \quad \dots (3.3.22)$$

gdje je

$$I_1 = \int \frac{g c \cdot v_{\zeta}}{\lambda} \cdot c \cdot d\zeta \quad \dots (3.3.23)$$

Funkcija $U(\zeta)$ se odredjuje iz (3.3.21) kao

$$U(\zeta) = - \int \frac{Q_0 \zeta + B_1}{\lambda \cdot V} \cdot d\zeta + B_2 \quad \dots (3.3.24)$$

Na osnovu (3.3.22) i (3.3.24) se, iz (3.3.18) dobija

$$T(\zeta) = \left[- \int \frac{Q_0 \zeta + B_1}{\lambda \cdot V} \cdot d\zeta + B_2 \right] \cdot V_0 \exp I_1 \quad \dots (3.3.25)$$

gdje je I_1 integral odredjen relacijom (3.2.28).

OPŠTI ZAKLJUČAK

Osnovni rezultati disertacije i komentari su:

1. Iz teorije tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površima istraženi su i riješeni sledeći novi statički i dinamički problemi:

a) Presovanje tankog sloja metala oblika elipse. Dokazano je da se krajnje tačke rebra rasticanja poklapaju sa centrima minimalnih krivina elipse i. za slučaj kada se po njenoj konturi nalazi žljeb. dobiveni su izrazi za izračunavanje visine materijala u žljebu i potrebne, ukupne, sile presovanja

b) Formiranje koncentričnih kružnih rebara pri presovanju tankog sloja metala. Riješeni su problemi presovanja kružne ploče sa ciljem dobijanja koaksijalnih kružnih rebara i problem dobijanja više ćelija sa koaksijalnim rebrima na ploči proizvoljnih dimenzija. Za razmotrene slučajeve dobiveni su izrazi za određivanje visine materijala u žljebovima, zavisno od veličine, položaja i broja žljebova. Prodiskutovani su neki specijalni slučajevi. Takođe su dobiveni izrazi za određivanje ukupne (potrebne) sile presovanja zavisno od položaja i broja žljebova.

c) Dinamički problemi udara tereta u kružni disk i kružni prsten. Data je postavka problema tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površima za slučaj elastičnih radnih površi, linearno-očvršćavajućeg materijala i postojanja inercijalnih sila. Dobiveni sistem diferencijalnih jednačina je spregnut po nepoznatim veličinama (pritisak i brzina čestice materijala) i ne može se dobiti analitičko rješenje. Za specijalan slučaj krutih radnih površi i idealno-plastičnog materijala dobiveni sistem jednačina je riješen tj. nadjeni su polje pritiska, polje brzina i oblik oblasti koju zauzima materijal u proizvoljnom trenutku vremena. Razmotreni su slučajevi slobodnog rasticanja i slobodnog uticanja u žljeb materijala. Na bazi predhodno postavljenog problema rešavan je, dalje, problem udara jedne radne površi (mase M i brzine v_0) u materijal, koji se na taj način deformiše (proces kovanja). Za slučajeve slobodnog rasticanja i slobodnog uticanja u žljeb materijala dobivena su, u kvadraturama, rješenja za brzinu promjene debljine sloja. Zatim su dati izrazi iz kojih se, za poznatu masu M i za željenu krajnju debljinu sloja h_1 , može odrediti neophodna brzina udara v_0 . Pri razmatranju dinamičkog problema tečenja plastičnog mat. oblika kružnog diska, pokazano je da rebro rasticanja mijenja svoj položaj tokom vremena što otežava dobijanje rešenja u analitičkom vidu.

Predhodno razmotreni problemi i dobivena rešenja odnose se na

proces obrade metala pritiskom (presovanje, štampanje kovarje), što im daje mogućnost konkretne primjene i realizacije.

d) U okviru teorije tečenja tankog sloja plastičnog materijala po površima (teorija Prandtl-Nadai-Iljušina) dalje je razvijen (uopšten) efektivni metod karakteristika na taj način što je dokazana njegova primjenljivost za najopštiji slučaj graničnog uslova (kada je pritisak po konturi promjenljiv). Dati su uslovi koji moraju biti zadovoljeni da bi lokalna teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja bila zadovoljena. Metod je ilustrovan interesantnim praktičnim problemima koji su riješeni.

Poslednji rezultat (tačka d) pored praktičnog ima i teorijski značaj jer predstavlja korak naprijed u daljem razvijanju i primjeni efektivnog metoda karakteristika.

2. Kod problema hladnog valjanja metalnog lima između krutih valjaka cilj je bio da se dodje do tačnog, analitičkog rešenja za polja napona i brzina s obzirom da ona do sada nijesu postojala. U tom cilju je uveden bicilindrični odnosno bipolarni krivolinijski ortogonalni sistem koordinata. Dat je algoritam konstruisanja koordinatne mreže. Za komponente tenzora napona dobivene su analitičke vrijednosti, što je omogućilo da se izračunaju ukupna normalna i tangencijalna sila koje djeluju na valjak u zoni kontakta samaterijalom. Odredjeni su i pravci glavnih napona. Pri odredjivanju polja brzina problem se sveo na rešavanje kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda hiperboličnog tipa. Korišten je metod karakteristika. Medjutim, mogućnosti daljeg istraživanja ovog problema u opštijoj postavci postoje.

3. U okviru istraživanja problema dinamičkog opterećenja šupljeg cilindra od linearno-visko elastičnog materijala, obloženog sa elastičnom ljuskom, uz prisustvo nehomogenog i nestacionarnog temperaturnog polja:

a) Data je najopštija moguća postavka problema za slučaj linearno visko-elastičnog materijala.

b) Predložen je metod rešavanja postavljenog problema. Metod se sastoji u tome da se, razvijajući jezgro relaksacije u red po odabranom malom parametru, problem svede na rešavanje dinamičkog problema uz prisustvo homogenog temperaturnog polja koje se može shvatiti kao neko fiktivno opterećenje. Za rešavanje dinamičkog problema takodje se koristi metod malog parametra.

c) Na osnovu opšte postavke problema i predloženog metoda rešavanja mogu se, kao specijalan slučaj, dobiti kako već poznata tako i nova rešenja. Na primjer rešenja za: slučaj nestišljivog materijala, nestacionarno

i homogenog temperaturnog polja. homogenog jezgra relaksacije. itd.

Razmatrani problem je poslednjih godina veoma aktuelan i mnogo istraživani u svjetskoj literaturi. možda zbog velikog praktičnog značaja, jer se dobivena rešenja i rezultati mnogo koriste pri projektovanju transporta tečnih i gasovitih goriva kao i u nekim drugim važnim oblastima tehnike.

4. Činjenica da proces obrade metala pritiskom postaje efektiv- : efek
niji ukoliko se metal obradjuje u toplom stanju uzrok je razvijanja tzv. elektro-termo-plastičnosti i elektro-plastičnosti. Kod problema iz tih oblasti važno je razmotriti pitanje odredjivanja profila temperature po debljini sloja. Profil temperature je u ovom radu odredjivan kod problema toplog izvlačenja žica i toplog valjanja metalnog lima. Metal se u oba slučaja zagrijavao električnom strujom. Kod valjanja metalnog lima struja se dovodi preko električnog bipola, pa se ranije uvedeni bicilindrični sistem koordinata pokazao veoma pogodan jer oslobodjena Džulova toplota praktično ne zavisi od bipolarnih koordinata. Razmotreni su razni specijalni slučajevi sa linearnim i nelinearnim graničnim uslovima. Za neke od njih dobivena su analitička rešenja i odredjen kriterijum stabilnosti procesa razmjene toplote.

LITERATURA UZ GLAVU I

- [1]. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов. Москва, „Наука“, 1979, 559 с.
- [2]. М.М.Филоленко-Бородич. Теория упругости. Москва, Физматгиз, 1959, 364 с.
- [3]. Н.Н.Малцун. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва, „Машиностроение“, 1975, 339 с.
- [4]. А.А.Цылюшин, В.С.Ленский. Сопротивление материалов. Москва, Физматгиз, 1959, 371 с.
- [5]. А.А.Цылюшин. Механика сплошной среды. Москва, МГУ, 1978, 287 с.
- [6]. Л.М.Качанов. Основы теории пластичности. Москва, „Наука“, 1969, 420 с.
- [7]. В.В.Новожилов. Теория упругости. Москва, Судпромгиз, 1958, 370 с.
- [8]. А.А.Цылюшин. Пластичность. Москва, Постехиздат, 1948, 376 с.
- [9]. А.Ю.Цылинский. Гипотеза прочности формоизменения. Москва, „Учебные записки МГУ, Механика“, 1940, вып. XVI, с. 117-124.
- [10]. R.Hill, H.H.Wils. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, „The philosophical magazine“, Seventh series, 1951, Vol. 42, № 331, p. 868-875.
- [11]. Д.Д.Цвелев. К построению теории идеальной пластичности. „Прикладная математика и механика“, 1958, т. XXII, вып. 6, с. 850-855.
- [12]. Р.М.Хейзорнсвейт. Диапазон изменения условий текучести для устойчивых идеально-пластических тел. „Механика“, периодический сборник переводов иностранных статей, 1961. вып. 5, с. 129-141.
- [13]. M.T.HUBER. WLASCIWA PRACA ADKSZTOLEENIA JAKO MIARA WYTEZENIA MATERIAŁU. PISMA, т. II, WARSZAWA, PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE 1956, s. 3-20.
- [14]. R.MISES. MECHANIK DER PLASTISCHEN FORMANDERUNG VON KRISTALLEN, „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, 1928, Band 8, Heft 3, s. 161-185.
- [15]. В.Д.Клюшников, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, Изд. МГУ 1979, 206 с.
- [16]. В.ПРАГЕР. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ. Физматгиз, 1958,
- [17]. В.КОУТЕР. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ, „Механика“ №2, 1960.
- [18]. А.А.Цылюшин. ПЛАСТИЧНОСТЬ. Изд. АН СССР, Москва, 1963.
- [19]. L.PRANDTL. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. „Proceedings of 1st. International congress of applied mechanics“, Delft, 1924 s. 43-54.
- [20]. Э.Рейсс. Учёт упругой деформации в теории пластичности. В кн. „Теория пластичности“. Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 283-290.
- [21]. Б.Сен-Венан. ОБ УСТАНОВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТВЁРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ. В кн. „Теория пластичности“, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 11-19.
- [22]. Б.Сен-Венан. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТВЁРДЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ, И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭТИХ ТЕЛ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. В кн. „Теория пластичности“, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 24-33.
- [23]. Ф.УДКВИСТ. УПРОЧНЕНИЕ СТАЛИ И ЕЁ ПОДОБНЫХ МАТЕРИАЛОВ. В кн. „Теория пластичности“ Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 283-290.
- [24]. В.ЛОДЕ. ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ГЛАВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ТЕКУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ. В кн. „Теория пластичности“, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 57-69.

- [25]. Р.Мизес. МЕХАНИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ. В кн. „Теория пластичности“, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 57-69.
- [26]. А.М. Жуков. ДЕФОРМАЦИОННАЯ АНИЗОТРОПИЯ И ПОЛЗУЧЕСТЬ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ ПРИ НОРМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ. „Инженерный журнал“, 1961, т.1, вып. 4, с. 150-153.
- [27]. Ю.И. Кадашевич., В.В. Новонильов, ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ОСТАТОЧНЫЕ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ. ПММ, 1958, т. XXII вып. 1 с. 78-85.
- [28]. А.М. Жуков. ПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И РАЗРУШЕНИЕ СТАЛИ ПРИ ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. „Инженерный сборник“, 1954, т. XX, с. 37-48.
- [29]. А.М. Жуков. СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МЕТАЛЛОВ. „Известия наук АН СССР“, Отд. техн. наук, 1955, №8, с. 81-92.
- [30]. А.М. Жуков. СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МЕТАЛЛОВ. „Известия АН СССР“, Отд. техн. наук, 1956, №12, с. 72-87.
- [31]. Г.Ренки. К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ВЫЗЫВАЕМЫХ ИМИ В МАТЕРИАЛЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ. В кн. Теория пластичности, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 114-135.
- [32]. Р.Шмидт. О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ОБЛАСТИ УПРОЧНЕНИЯ. В кн. „Теория пластичности“, Москва, Изд. иностр. лит., 1948, с. 231-256.
- [33]. Л.Д. Цвелев. К ТЕОРИИ ПРОСТОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 6, с. 734-735.
- [34]. Л.И. Седов. О ПОНЯТИЯХ ПРОСТОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ВОЗМОЖНЫХ ПУТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ. „ПММ“, 1959, т. XXIII, вып. 2, с. 400-402.
- [35]. В.В. Москвитин. ПЛАСТИЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ, Москва, Изд. МГУ, 1965, 263 с.
- [36]. И.А. Кийко. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ. Москва, Изд. МГУ, 1978, 75 с.
- [37]. Л.ПРАНДТЛ. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ РЕНКИ К РАВНОВЕСИЮ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ (ЗАММ, Bd. 3, z 401-406, 1923). ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, сб. статей. Под ред. Ю.Н. Работнова, Гос. изд. иностр. лит. 1948.
- [38]. А.А. Цыбушин. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА ПО ПОВЕРХНОСТИ, ПММ, т. XVIII вып. №3, 1954, с. 265-285.
- [39]. А.А. Цыбушин. ПОЛНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ В ПРОЦЕССАХ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, АНАЛОГИЯ С ПЕЩАНОЙ НАСЫПЬЮ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛЖЕНИЯ, ПММ, т. XIX №1, 1955, с. 693-713.
- [40]. А.А. Цыбушин. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ. Изв. АН СССР Отделение технических наук, №2, 1958, с. 64-86.
- [41]. И.И. Безухов. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ, М. Высшая школа, 1968, 512 с.
- [42]. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. СБ. СТАТЕЙ, ПОСВЯЩЕННЫХ 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПЕРВОГО РАБОТНИКА И.М. РАБИНОВИЧА (статьи А.А. Гвоздева, А.Р. Рязанцына, Ц.С. Цукрова и др.), Стройиздат, 1966.
- [43]. И.И. БЕЗУХОВ. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ. Москва, „Высшая школа“, 1965, 319 с.
- [44]. В.А. КАДЫМОВ. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕТАЛЛА. Изв. АН СССР, Сер. физ.-мат. наук, Москва, МГУ, 1981, с. 103.
- [45]. Ю.С. Арутюнов, А.Л. Пожар. ОСАЖИВАНИЕ ПОКОВОК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ. Изв. АН СССР, мех. и машиностроение, 1963, №1, с. 166-171.
- [46]. А.П. Филли. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА. Том I, Москва „Наука“, 1975, 832 с.

- [47]. L. Boltzmann. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, *Ann. Phys. and. Chem.*, 1976, Erg. Bd.
- [48]. М.А. Колтунов. Ползучесть и релаксация. Москва, „Высшая школа“, 1976, 276 с.
- [49]. А.Р. Ршаницын. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени, Москва, Стройиздат, 1949.
- [50]. М.А. Колтунов. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации. Москва, „Мех. полимеров“, 1966, №4, с. 483-491.
- [51]. В.В. Москвитин. Сопротивление вязко-упругих материалов, Москва, „Наука“, 1972, 32 с.
- [52]. Д. Ферри. Вязкоупругие свойства полимеров. ИЛ, 1963.
- [53]. А.А. Цылюшин, П.М. Огибалов, Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. „Мех. полимеров“, №2, 1966.
- [54]. А.А. Цылюшин. Пластичность. Москва, Изд. АН СССР, 1963.
- [55]. А.А. Цылюшин, Б.Е. Победра, Основы математической теории термо-вязко-упругости. Москва, „Наука“, 1970.
- [56]. П.М. Огибалов, В.А. Лонакин, Б.П. Кишкин. Механика полимеров. Москва, Изд. МГУ, 1952, 528 с.
- [57]. В.В. Москвитин. Некоторые вопросы прочности вязко-упругих сред, Проблемы прочности, АН СССР, №2, 1971.
- [58]. В.В. Москвитин. Об одной нелинейной модели вязко-упругой среды, учитывающей влияние вида напряженного состояния. „Мех. полимеров“, №6, 1969.
- [59]. А.А. Цылюшин. Метод аппроксимаций для расчета конструкций полилинейной теории термо-вязко-упругости. „Мех. полимеров“, №2, 1968.
- [60]. R.J. Arenz. Two-dimensional wave propagation in realistic viscoelastic materials. „Trans. ASME.“ E32, №2, 1965.
- [61]. В.Н. Кукуджанов. Распространение сферических волн в упруговязкой среде, „Инженерный журнал“, №3, 1963.
- [62]. Д. Бленд. Теория линейной вязко-упругости. Москва, „Мир“, 1965.
- [63]. И.Н. Боровиков. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев, Изд.-во АН СССР, 1945.
- [64]. А.Н. Филатов. Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, „ФАН“, 1967.
- [65]. А.А. Цылюшин, П.С. Ларионов, А.Н. Филатов. К усреднению в системах интегро-дифф. ур., ДАН СССР, 188, №1, 1969.
- [66]. П.С. Ларионов. Исследование колебаний, релаксирующих систем методом усреднения. „Мех. полимеров“, №4, 1969.

LITERATURA UZ GLAVE II : III

- [1]. А.А. Цылюшин. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности, ПММ, т. XVIII, вып. №3, 1954, с. 265-288.
- [2]. А.А. Цылюшин. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. ПММ, т. XIX, №4, 1955, с. 693-713.
- [3]. А.А. Цылюшин. Некоторые вопросы теории пластического течения. Изв. АН СССР, технических наук, Москва, 1958, №2 с. 64-86.
- [4]. В.И. Безухов. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плыве. ... канд. физ. мат. наук, Москва, 1955, 78 с.
- [5]. Ю.С. Арutyонов. Некоторые задачи обработки металлов давлением. Дис. ... канд. физ. мат. наук. Москва, 1956, 172 с.

- [6]. Ю.С. Арутюнов. Прокатка тонкого листа. Вестник МГУ - сер. мат.-мех.-астр.-физ.-хим., 1957, №4, с. 17-27.
- [7]. А.И. Кийко. Теория пластического течения. Изд. МГУ, 1978, 75с.
- [8]. П.М. Опцбалов, И.А. Кийко, Задачи пластических течений. Инженерный журнал. 1961, т. 1, вып. 3, с. 181-184.
- [9]. П.М. Опцбалов, И.А. Кийко, Определение усилий штамповки и пресовывания некоторых элементов конструкций. Сборник: "Рассчеты процессов пластического формоизменения металлов", Москва, Изд. АН СССР, 1962, с. 73-77.
- [10]. Ю.С. Арутюнов, Д.А. Гонор. Оснаивание локовок произвольной формы в плане. Изв. АН СССР мех. и машиностроение, 1963, №1 с. 166-171.
- [11]. В.А. Кадымов. Метод характеристик в теории течения пластического вещества по поверхностям. Дел. в винути АН СССР от. 16. II 1979, № 3895-79, 13с.
- [12]. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М. Изд. Рос. изд. физ. мат. лит, 1961, с. 703.
- [13]. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике. Москва, "Наука" 1973, 831с.
- [14]. Б.Ф. Власов. Построение решений методом прямых двухсторонних приближений по энергии в статике упругих элементов сооружений. Докт. дис. 1974, МГУ, мех.-мат., Москва.
- [15]. S. Тимошенко, J.N. Goodier. Теория эластичности. Изд. "Брадевицка книга", Београд 1962г. 392с.
- [16]. А.А. Цагюшин, Б.Е. Победра. Основы математической теории термо-вязко-упругости. Москва, "Наука", 1970.
- [17]. В.В. Москвитин. Сопротивление вязко-упругих материалов, Москва, "Наука", 1979, 327с.
- [18]. Б.Е. Победра. Задача о вязкоупругой трубе под давлением с переменным радиусом. Проблемы прочности, 1969, I.
- [19]. И.Е. Трояновский, М.А. Колтунов. Напряженное состояние вязкоупругого цилиндра с переменным внутренним радиусом. Вестник МГУ, Сер. мат. и мех., №2, 1969.
- [20]. E.H. Lee. Stress analysis in viscoelastic bodies. Quart. Appl. Math. 1955 - 13.
- [21]. A.H. Corneliussen, E.H. Lee. Stress distribution analysis for linear viscoelastic materials. Int. Union of Theor. and Applied Mech. Sump. on Creep. - 1960.
- [22]. A.H. Corneliussen, E.F. Kamowitz E.F., E.H. Lee, R.M. Radok. Viscoelastic stress analysis of a spinning hollow circular cylinder with an ablating pressurized cavity. Trans. Soc. Rheol. 1963.-7.
- [23]. H.E. Lee, J.R.M. Radok, W.B. Woodward. Stress analysis for linear viscoelastic materials. Trans. Soc. Rheol. 1959.-3.
- [24]. R.A. Schapery. An approximate method of stress analysis for a large class of problems in viscoelasticity. Purdue Univ. Rept. Acond. ESG2.-18, 1963.
- [25]. R.A. Schapery. Intern. J. Sol. struct. 1966-2,3.
- [26]. Т. Роджерс, Е.Н. Ли. Цилиндрическая задача анализа вязкоупругих напряжений. "Механика" (сб. переводов) №6 (88), 1964.
- [27]. Хуан Н., Е.Н. Ли, Т. Роджерс, Учет вязкоупругой сжимаемости в анализе напряжений. "Механика" (сб. переводов) №6 (88), 1964.
- [28]. И.Е. Трояновский, М.А. Колтунов. Осесимметричная задача вязкоупругости. Мех. полимеров, №5, 1969.

- [29]. И.Е. Трояновский, М.А. Колтунов. Напряженное состояние вязкоупругого цилиндра с переменным внутренним радиусом. Вестник МГУ, серия мат. и мех., №2, 1969.
- [30]. И.Е. Трояновский, М.А. Колтунов. Температурное напряжение в длинном упруговязком цилиндре с подвижной внутренней границей. Мех. полимеров, №2, 1969.
- [31]. Д.ш. Д. Ахенбах. Динамическое поведение ленточного скрепленного с корпусом вязкоупругого цилиндра. Ракетная техника и космонавтика, №4, 1965.
- [32]. Д.ш. Д. Ахенбах. Динамическая реакция вязкоупругого цилиндра с абдирующей внутренней поверхностью. Прикладная механика. (русский перевод), №33, №2, 1966.
- [33]. Б.Е. Победра. О связанных задачах механики сплошной среды. Сб. "Упругость и неупругость", выд. 2, Изд-во МГУ, 1971.
- [34]. О.Б. Токарев. Динамическое напряжение нелинейно вязкоупругого цилиндра с переменным внутренним радиусом. Вестник МГУ, "мат. и мех." №4, 1970.
- [35]. У. Тохтаров, М.А. Колтунов, Б.И. Моргунов, И.Е. Трояновский. Динамическая задача о цилиндре с медленно меняющейся внутренней границей. Мех. полимеров, №6, 1972.
- [36]. У. Тохтаров, М.А. Колтунов, Б.И. Моргунов, И.Е. Трояновский. Нелинейная динамическая задача о цилиндре с медленно меняющейся внутренней границей. Мех. полимеров, №2, 1973.
- [37]. Нгуен Тан Ли. Исследование колебаний вязкоупругого подкрепленного полоро цилиндра. Дисс. ... канд. физ. мат. наук, Москва, МГУ, Мех.-мат. 1977.
- [38]. O.A. Troitskiy and A.G. Rozno. Sov. Phys. - Solid State, 12, 161, 1970.
- [39]. K. Okazaki, M. Kagawa, H. Conrad, Scripta Met., 12, 1063, 1978.
- [40]. K. Okazaki, M. Kagawa, H. Conrad, Scripta Met., 13, 277, 1979.
- [41]. О.А. Троицкий. К вопросу о появлении термопластичности при нагреве тонкой проволоки постоянным током, ЦФХ АН ССР, М. 1982.
- [42]. В.Р. Рышков. Исследование влияния электрического тока большой плотности на процессах волочения и физико-механические свойства тонкой проволоки. Дисс. ... канд. тех. наук, МАНГО-ГОРСК, 1982.
- [43]. R.S. Timshiti. (Aluminium Company of Canada, Ltd, Research and Deve. Compent centre P.O. Box 8400, Kingston, Ontario Canada K7L 4Y4, nov. 24. 1980.
- [44]. К.М. Климов, И.И. Новиков. Влияние градиента температуры и электрического тока большой плотности на пластические деформирования при растяжении металлических проволок. Металлы, №6, 1978, 175-180.



PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: Čulafić Zoran
Godina rođenja: 10.05.1952. god, Beograd
E-mail:

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore:

Mašinski Fakultet

Naslov doktorske disertacije:

Metodi i rešenja nekih novih aktuelnih problema u nelinearnoj mehanici

Prevod naslova na engleski jezik:

Datum odbrane: 25.12.1983. god u Podgorici

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci¹:

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore):

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu):

Napomena:

¹ Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI
ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE

Prevod naslova disertacije na engleski jezik:

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu):

P. B. Ogilalov - Mentor

Dušan Medić - čl.

Vukro Domazetović - čl.

Luka Vujašević - čl.

Batvić Vukicević - čl.

Sažetak:

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku:

Ključne riječi: nelinearna mehanika

Ključne riječi na engleskom jeziku:

Naučna oblast/uža naučna oblast:

Mehanika krutog tijela

² Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku:

Ostali podaci:

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore unese doktorsku disertaciju pod naslovom

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la³.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

☒ Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

^{2a} Potpis autora

Gvetlana Čulapčić

u Podgorici, 11.02.2022. god.

³ Odabrati (čekomirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada – OVO

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.