

UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

Mr Sreten Savićević, dipl. inž.

RAZVOJ AUTOMATIZOVANOG
PROJEKTOVANJA KONSTRUKCIJSKIH
ELEMENATA OBLIKA ZAVOJNE LJUSKE

Doktorska disertacija

PODGORICA, 2000.

Muz IV 626

UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

Ključna dokumentaciona informacija

Redni broj	
RBR	
Identifikacioni broj	
IBR	
Tip dokumenta	
TD	monografska publikacija
Tip zapisa	
TZ	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada	
VR	doktorska disertacija
Autor	
AU	mr Sreten Savićević dipl. inž. maš.
Mentor	
MN	dr Milisav Kalajdžić, red. prof.
Naslov rada	
NR	Razvoj automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljske
Jezik publikacije	
JP	srpski
Zemlja publikovanja	
ZP	SR Jugoslavija
Geografsko područje	
GP	Crna Gora
Godina	
GO	2000.
Izdavač	
IZ	autorski reprint
Mjesto i adresa	
MS	81000 Podgorica, YU, Cetinjski put bb
Fizički opis rada (broj pog./ strana/ lit.citata/ tabela/ slika/ grafika/priloga)	
FO	(8/200+55/112/25/177/0/5)

Naučna oblast

OB

Naučna disciplina

DIS

Predmetna odrednica/ključne reči

PO

UDK

Čuva se

ČU

Važna napomena

VN

Izvod

IZ

Mašinstvo

Projektovanje mašinskih sistema

ljuska, zavojna, konstrukcijski, ploča, cilindrična, diferencijalna, tenzor, veličina deformacije, presječna sila, kontinualni spreg, numerički, element, konačni, mreža

621.879.32.3: 519.67 (043.3)

u Biblioteci Univerziteta Crne Gore, YU, 81000 Podgorica, Cetinjski put bb

nema

Izvedena je diferencijalna jednačina po pomjeraju za savijanje zavojne ljuske izložene ravnomjerno raspoređenom pritisku. Korišćena je restriktivna teorija ljuski jer je mješoviti koeficijent druge fundamentalne forme površi različit od nule, tj koordinantne linije kod ove ljuske nisu linije krivine. U specijalnim slučajevima diferencijalna jednačina se svodi na jednačine savijanja kružne i pravougaone ploče. Diferencijalna jednačina je riješena numerički korišćenjem programskog paketa MATLAB. Dat je postupak proračuna cilindrične ljuske izložene savijanju kontinualnim spregom po zavojnoj liniji. Uvedene su koordinatne linije na cilindričnoj ljusci koje čine dvije familije međusobno ortogonalnih zavojnica. Riješena je diferencijalna jednačina po pomjeraju u pravcu normale na cilindar. Određen je položaj tačaka na cilindričnoj ljusci u

kojima je vrijednost pomjeraja maksimalna kao i veličina tog pomjeraja. Korišćenjem izvedenih analitičkih rješenja dat je program za automatizovano određivanje geometrijskih parametara zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Razvijen je originalni model za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske. Konstrukcijom dvostruke zavojne ljuske i korišćenjem specijalnog zaptivnog elementa realizovan je normalni pritisak na površi ljuske. Eksperimentalni model je potvrdio opravdanost predloženih rješenja i omogućio efikasne analize napona i deformacija. U radu su dati uporedni rezultati korišćenjem programskog paketa za anлізу MKE Pro MECHANICA.

Datum prihvatanja teme od strane NN vijeća

DP

3. 7. 1997.

Datum odbrane

DO

Članovi komisije (naučni stepen/ ime i prezime/zvanje/ fakultet)

KO

dr Kosara Jojić, red. prof.,
Mašinski fakultet, Beograd

dr Milisav Kalajdžić, red. prof.,
Mašinski fakultet, Beograd

dr Radomir Vukasojević, red. prof.,
Mašinski fakultet, Podgorica

dr Zoran Čulafić, red. prof.,
Mašinski fakultet, Podgorica

dr Milan Vukčević, vanr. prof.,
Mašinski fakultet, Podgorica

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Key words documentation

Accession Number	
ANO	
Identification Number	
INO	
Document Type	
DT	monographie publication
Type of Record	
TR	textual printed article
Contents Code	
CC	Ph. D. thesis
Author	
AU	Sreten Savićević, M. Sci.
Mentor	
MN	dr Milisav Kalajdžić, Ph. D., prof.
Title	
TI	The Development of Automatized Design of Structural Elements of Helicoidal Shell Shape
Language of Text	
LT	Serbian
Country of Publication	
CP	FR Yugoslavia
Locality of Publication	
LP	Montenegro
Publication Year	
PY	2000.
Publisher	
PB	author's reprint
Publication Place	
PL	81000 Podgorica, YU, Cetinjski put bb
Physical Description	
PD	(8/200+55/112/25/177/0/5)

Scientific Field

SF

Scientific Discipline

SD

Subject / Key Words

CX

UC

Holding Data

HD

Note

N

Abstract

AB

Mechanical Engineering

Design of Mechanical Systems

shell, helicoidal, structural, plate, cylindrical, differential, tensor, strains, force per unit length, couple per unit length, numerical, finite element, mesh
621.879.32.3: 519.67 (043.3)

Library of University of Montenegro,
81000 Podgorica, YU, Cetinjski put
bb.

none

It is derived a differential equation in displacement for bending of a helicoidal shell subjected to uniform pressure. It is employed restricted shell theory because the mixed coefficient of second fundamental form is not equal to zero, i.e. the coordinate lines here are not lines of curvature. In special cases the differential equation is simplified in ones for bending circular and rectangular plate restrictively. The differential equation is solved numerically by using software MATLAB. It is given a bending theory for cylindrical shell loaded by uniformly distributed couple along helix. Two families of orthogonal helices on cylinder are introduced for the coordinate lines. The differential equation in displacement along normal is solved. The location of points on cylindrical shell with maximum displacement is found as

well as magnitude of this displacement. It is given a computer program for automatized determination of the geometric characteristics of helicoidal shell on cylindrical one by using derived analytical solution. It is developed on unique model for experimental research of structural elements of helicoidal shell shape. A pressure on the shell is realised by making dual helicoidal shell and with special airtight element. Experimental model is justified proposed technical solutions and assures effective strain measurement. In the thesis are given comparable results by using FEA software code ProMECHANICA.

Accepted by Scientific Board on
ACB

3. 7. 1997.

Defended on

DE

Thesis Defend Board (name/
surname/title/faculty)

DB

Ph. D., Kosara Jojić, prof., Faculty of
Mechanical Engineering, Belgrade

Ph. D., Milisav Kalajdžić, prof., Faculty
of Mechanical Engineering, Belgrade

Ph. D., Radomir Vukasojević, prof.,
Faculty of Mechanical Engineering,
Podgorica

Ph. D., Zoran Čulafić, prof., Faculty of
Mechanical Engineering, Podgorica

Ph. D., Milan Vukčević, ass. prof.,
Faculty of Mechanical Engineering,
Podgorica

PREDGOVOR

Ova doktorska disertacija orjentisana je na problematiku automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske. Eksperimentalna istraživanja i Analize MKE su realizovane u 3D centru Mašinskog fakulteta u Podgorici.

Doktorska disertacija je rađena pod rukovodstvom Prof. dr Milisava Kalajdžića, redovnog profesora Mašinskog fakulteta u Beogradu. Pomogao mi je da osmislim svoj rad, da iz njega izdvojim najkvalitetnije djelove i da ih komponujem u jedinstvenu i skladnu cjelinu. Na svemu tome, a naročito na toploj ljudskoj predusretljivosti, mu iskreno zahvaljujem.

Prof. dr Kosari Jojić, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Beogradu, u penziji, koja je bila mentor mog magistarskog rada, se zahvaljujem na stalnom interesovanju za moj rad i na podsticaju tokom rada.

Posebnu zahvalnost dugujem Prof. dr Radomiru Vukasojeviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Podgorici, Prorektoru Univerziteta Crne Gore i rukovodiocu 3D centra Mašinskog fakulteta za veliku pomoć, savjete i podršku tokom pripreme i realizacije ovog istraživanja.

Prof. dr Zoranu Ćulafiću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Podgorici i šefu Katedre za mehaniku se zahvaljujem za stalni podstrek, pomoć i savjete tokom izrade rada.

Prof. dr Milanu Vukčeviću, Dekanu Mašinskog fakulteta u Podgorici se zahvaljujem za savjete i pomoć tokom izrade rada.

Zahvalnost izražavam preduzeću "AD Radvent - HK Željezara Nikšić" u Nikšiću, a posebno njegovom direktoru Lazović Radoici, dipl.maš.ing. na znatnoj pomoći u izradi složenih modela za eksperimentalna istraživanja u ovom radu.

Zahvaljujem se kolegama sa Mašinskog fakulteta u Podgorici i svima drugima koji su mi na bilo koji način pomogli.

Za razumijevanje i podršku pri radu, zahvalnost dugujem svojoj porodici.

Sreten Savićević

OZNAKE

\mathbf{a}_α	Bazni vektori srednje površi ljuske u deformisanoj konfiguraciji
\mathbf{a}_β	Bazni vektori normale srednje površi ljuske u deformisanoj konfiguraciji
Λ_α ($\alpha=1, 2$)	Bazni vektori srednje površi ljuske (kovarijantni)
A^α	Kontravarijantni bazni vektori površi
Λ_3	Jedinični vektor normale na srednju površ ljuske
$a_{\alpha\beta}$	Koeficijenti prve fundamentalne forme u deformisanoj konfiguraciji ljuske
A	Determinanta matrice $[A_{\alpha\beta}]$
$A_{\alpha\beta}$	Kovarijantni koeficijenti prve fundamentalne forme površi
$A^{\alpha\beta}$	Kontravarijantni koeficijenti prve fundamentalne forme
$\mathcal{A}^{\alpha\beta}$	Algebarski komplement
$b_{\alpha\beta}$	Koeficijenti druge fundamentalne forme u deformisanoj konfiguraciji ljuske
B, B_c, B_h	Krutost na savijanje ljuske
$B_{\alpha\beta}$	Kontravarijantni koeficijenti druge fundamentalne forme
B^β_α	Mješoviti koeficijenti druge fundamentalne forme površi
C	Krutost na istezanje ljuske
C_1, C_2, C_3, \dots	Integracione konstante
$e_{\alpha\beta}$	Linearne i ugaone deformacije srednje površi ljuske
$\bar{e}^{\alpha\beta}$	Relativni permutacioni simbol
$[D]$	Matrica elastičnosti
E	Modul elastičnosti

\mathbf{F}, \mathbf{F}^i	Sila po jedinici mase površi
$\{\mathbf{F}\}$	Vektor opterećenja
G	Spreg u pravcu tangente na krivoj
h, h_c, h_h	Debljina ljuske (h_c - cilindrična, h_h - zavojna)
$H^{\alpha\beta\gamma\delta}$	Tenzor četvrtog reda u konstitutivnim relacijama
\mathbf{i}	Jedinični vektor ose x_1
\mathbf{j}	Jedinični vektor ose x_2
\mathbf{k}	Jedinični vektor ose x_3
k	Nagib zavojne linije
\bar{k}	Krivina granične krive
K	Gausova krivina
(k)	Indeks broja KE
$[\mathbf{K}]_{(k)}$	Matrica krutosti (k)-tog KE
$[\mathbf{K}]$	Ukupna (globalna) matrica krutosti
$[\bar{\mathbf{K}}_{rs}]_{(k)}$	Matrica krutosti (k)-tog KE u lokalnom sistemu
$[\mathbf{K}_{rs}]_{(k)}$	Matrica krutosti (k)-tog KE u globalnom sistemu
$\hat{\mathbf{M}}$	Kontaktne spreg po jedinici dužine krive na površi (tangentno vektorsko polje)
M	Moment kontinualno raspoređenog sprega duž zavojnice na cilindričnoj ljusci
$\hat{M}^{\alpha\beta}$	Komponente kontaktnog sprega $\hat{\mathbf{M}}$
\mathbf{N}	Kontaktne sile po jedinici dužine krive na površi u nedeformisanoj konfiguraciji
N	Broj ravnomjerno raspoređenih tačaka na intervalu $[a,b]$
$N^{\alpha i}$	Komponente kontaktne sile \mathbf{N}
$\hat{N}^{\alpha\beta}$	Izvjesna kombinacija komponenti $N^{\alpha\beta}$ i $\hat{M}^{\alpha\beta}$

$[N]$	Matrica funkcije pomjeraja
P	Pritisak ravnomjerno raspoređen po površi ljuske
p^3	Sila u pravcu normale na krivoj
\mathbf{r}	Radijus vektor tačke na srednjoj površi ljuske u deformisanoj konfiguraciji
\mathbf{R}	Radijus vektor tačke na srednjoj površi ljuske u nedeformisanoj konfiguraciji
r	Krivolinijska koordinata na zavojnoj površi
r_i ($i=0,1,..N-1$)	Vrijednost koordinate r u i -toj tački intervala $[a,b]$
R	Poluprečnik cilindrične ljuske
S	Dužina luka granične krive
T^{ij}	Prostorni tenzor drugog reda
$T^{(ij)}$	Simetrični dio tenzora T^{ij}
$T^{[ij]}$	Kososimetrični dio tenzora T^{ij}
$[T]$	Matrica transformacije
\mathbf{u}, \mathbf{u}^i	Infinitezimalni vektor pomjeraja ljuske
u_i	Vrijednost pomjeraja $u_3(r)=u(r)$ u i tački intervala $[a,b]$
$\{\mathbf{u}\}$	Vektor pomjeraja
$\mathbf{V}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}^i$	Prostorni vektor
x_i ($i=1, 2, 3$)	Dekartove koordinate tačke na površi
$\beta, \beta_\alpha, \beta^\alpha$	Infinitezimalna veličina deformacije usled rotacije jedinične normale na srednju površ ljuske
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$	Christoffel-ovi simboli druge vrste
φ	Krivolinijska koordinata na cilindričnoj površi
$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$	Christoffel-ovi simboli prve vrste
$[\epsilon]$	Vektor deformacije

ε_i	Dilatacija
$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$	Apsolutni permutacioni simbol
θ^α ($\alpha=1, 2$)	Krivolinijske koordinate tačke na površi
$\kappa_{\alpha\beta}$	Promjene krivine i “torzija” srednje površi ljuske
${}_0\mathbf{v}, {}_0\mathbf{v}_\alpha, {}_0\mathbf{v}^\alpha$	Jedinična normala na graničnoj krivoj u nedeformisanoj konfiguraciji
ν	Poissonov koeficijent
ρ_0	Masa po jedinici površi ljuske
$\rho_{(\gamma\delta)}$	Veličina deformacije u vezi sa $\bar{\kappa}_{\gamma\delta}$
$\bar{\rho}_{(\gamma\delta)}$	Veličina deformacije koja predstavlja izvjesnu kombinaciju $\bar{\kappa}_{\gamma\delta}$ i $\mathbf{e}_{\nu\delta}$, $\mathbf{e}_{\nu\gamma}$.
σ_i	Komponenta napona
$\{\sigma\}$	Vektor napona
φ	Krivolinijska koordinata na površi (zavojnoj, cilindričnoj)
Δ	Razlika koordinata r_i između dvije susjedne tačke intervala $[a,b]$
$\frac{\partial}{\partial v_0}, \frac{\partial}{\partial s_0}$	Izvod po pravcu normale i tangente na graničnoj krivoj respektivno
$(\)_{,\alpha}$	Parcijalni izvod po koordinati θ^α
$(\)_{ \alpha}$	Kovarijantni izvod po prvoj fundamentalnoj formi površi
$(\)_{\langle i \rangle}, (\)_{\langle \alpha\beta \rangle}$	Fizičke komponente tenzora
${}_0(\)$	Vrijednost odgovarajuće veličine na graničnoj krivoj

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. MEHANIČKI MODEL ZAVOJNE LJUSKE.....	8
2.1.Osnovna jednačina helikoidalne površi	8
2.2.Modeliranje zavojne ljuske u polju mogućih oblika	8
3. ANALITIČKA ANALIZA ZAVOJNE LJUSKE.....	12
3.1.Uvodne definicije	12
3.1.1. Prva fundamentalna forma površi	14
3.1.2. Druga fundamentalna forma površi	16
3.1.3. Christoffel-ovi simboli za površi	17
3.2.Osnovne veličine deformacija	18
3.3.Diferencijalne jednačine ravnoteže	27
3.4.Konstitutivne relacije	33
3.5.Diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske	35
3.6.Granični uslovi kod savijanja zavojne ljuske.....	38
3.7.Matematički model za numeričko rješavanje dif. jednačine.....	41
3.7.1. Realizacija matematičkog modela i dobijanje rezultata	44
3.7.2. Rezultati proračuna u funkciji varijacije geometrijskih parametara modela zavojne ljuske	47
3.8.Zaključci analitičke analize zavojne ljuske.....	59
4. ANALITIČKA ANALIZA CILINDRIČNE LJUSKE OPTEREĆENE KONTINUALNIM SPREGOM PO ZAVOJNOJ LINIJI	61
4.1.Parametri cilindrične površi u sistemu krivolinijskih koordinata	61
4.2.Veličine deformacija	65
4.3.Diferencijalne jednačine ravnoteže	67
4.4.Konstitutivne relacije	68

4.5.Diferencijalna jednačina ravnoteže cilindrične ljuske po pomjeraju ...	69
4.6.Definisanje graničnih uslova i rješavanje diferencijalne jednačine savijanja	70
4.7.Rezultati rješenja diferencijalne jednačine u funkciji debljine cilindrične ljuske.....	77
4.8.Zaključci analitičke analize cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji	78
5. MATEMATIČKI MODEL KAO PODLOGA ZA AUTOMATIZOVANO PROJEKTOVANJE ZAVOJNE LJUSKE NA CILINDRIČNOJ LJUSCI	80
5.1.Definisanje graničnih uslova na presjeku zavojne i cilindrične ljuske	80
5.2.Rezultati proračuna u funkciji varijacije geometrijskih parametara modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci	81
5.3.Zaključci analitičke analize zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci	89
6. MKE ANALIZA	91
6.1.Teorijske osnove metoda konačnih elemenata.....	91
6.2.Osnovne jednačine elastomehanike. Metod pomjeraja	92
6.3.Funkcija pomjeraja, matrica krutosti KE	93
6.4.Statički proračun noseće strukture	95
6.5.Programski paketi za analizu MKE.....	97
6.6.MKE analiza zavojne ljuske ukliještene na unutrašnjoj konturi	100
6.7.MKE analiza zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci.....	110
6.7.1. MKE analiza, model A.....	110
6.7.2. MKE analiza, model B.....	122
6.7.3. MKE analiza, model C.....	132
6.8.MKE analiza cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji.....	139
6.9.Zaključci MKE analiza sa uporednim rezultatima	145

7. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE	150
7.1. Opis modela za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske	151
7.1.1. Izbor oblika zavojne ljuske	151
7.1.2. Opterećenje na zavojnoj ljusci	155
7.1.3. O eksperimentu	159
7.2. Rezultati eksperimenta	162
7.2.1. Model A - Zavojna ljuska na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta	163
7.2.2. Model B - Prstenasta ploča na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta	169
7.2.3. Model C - Pravougaona ploča na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta	175
7.3. Zaključci na kraju eksperimentalnog istraživanja sa uporednim rezultatima	180
8. ZAKLJUČCI SA SMJERNICAMA ZA DALJI RAD.....	185
LITERATURA.....	191
PRILOZI	201

1. UVOD

Konstruktivski elementi oblika zavojne ljuske se primjenjuju na uređajima neprekidnog transporta, zavojnim transporterima, kod specijalnih mašina za čišćenje snijega, kod mašina specijalne namjene za eksploataciju rudnih nalazišta i drugih. Zavojna površ nije razvojna površ kao što su površi oblika cilindra, kupe i sl. koje je moguće dobiti savijanjem odnosno rolovanjem ravnih limova. Zavojna ljuska se najčešće izrađuje kovanjem iz čeličnog lima ili iz čelične trake na specijalnim mašinama a zatim se zavaruje. Kod zavojnih transportera ova ljuska se zavaruje na punim ili cijevnim vratilima sa spoljašnje strane vratila. Kod zavojnih cijevnih transportera zavojna ljuska se zavaruje sa unutrašnje strane cijevi, a kod specijalnih mašina za čišćenje snijega i sličnim zavaruje se na tankim cilindričnim ljuskama većeg prečnika.

U mehanici deformabilnog tijela poznate su analitičke metode proračuna ploča i ljuski. Njihovom primjenom rješava se relativno mali broj problema i to onih koji se odnose na jednostavnije geometrijske oblike ploča i ljuski. Diferencijalne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje napona i deformacija ljuski osim nekih izuzetaka nemaju rješenje u zatvorenom obliku. Rješenja ovih jednačina pomoću numeričkih metoda nemaju opšti karakter već obično važe za određeni oblik ljuske, posebne uslove oslanjanja ili posebnu vrstu opterećenja.

Poznati su istraživači u ovoj oblasti: A. L. Goldenveizer, Moskva; V. V. Bolotin, Lenjingrad; A. S. Volmir, Lenjingrad; T. S. Timoshenko, Stanford Kalifornija; Papkovič P. F, Lenjingrad; P. M. Naghdi, Kalifornija; Černih Lenjingrad; V. I. Fedossiev, Moskva; V. Z. Vlasov, Moskva; H.

Neuber, Berlin; I. M. Rabotnov, Moskva; Novožilov, Moskva; E. Reissner, Kalifornija i drugi.

Broj naučnih radova koji se odnose na savijanje zavojne ljuske je vrlo mali. Primjena jednačina teorije ljuski i njihovo rješavanje u slučaju zavojne ljuske je izuzetno komplikovano. Objavljeni su radovi iz ove oblasti od J. W. Cohen-a [12] i S. G. Mikhlina-a [55]. J. W. Cohen je uspostavio veličine deformacija u funkciji pomjeraja ljuske upoređivanjem odgovarajućih geometrijskih veličina (dužina, uglova, krivina) u deformisanoj i nedeformisanoj konfiguraciji ljuski. Diferencijalne jednačine ravnoteže je izveo na klasičan način razmatrajući ravnotežu diferencijalno malog elementa ljuske, pri čemu koordinatne linije nisu linije krivine i ove jednačine su saglasne sa diferencijalnim jednačinama koje su izvedene korišćenjem zakona o održanju količine kretanja ljuske u restriktivnoj teoriji ljuski. Konstitutivne relacije koje povezuju deformacione veličine i presječne sile koje su date u radu J. W. Cohen-a [12] nisu dobijene na osnovu principa minimuma deformacionog rada za ljusku koji se koristi pri izvođenju u restriktivnoj teoriji ljuski i međusobno se ne poklapaju. S. G. Mikhlin je u svom radu u osnovi koristio klasične konstitutivne relacije Love-a [50].

Proračun elemenata oblika zavojne ljuske razvijenim numeričkim metodama, koje se primjenjuju u ovom radu, u novije vrijeme otvara nove mogućnosti analize međusobnih uticaja karakteristika ove ljuske na naponsko i deformacijsko stanje. Razvijene numeričke metode proračuna mašinskih konstrukcija odnose se najviše na primjenu metoda konačnih elemenata (MKE) kao posebne naučne oblasti i savremenog numeričkog postupka za približno rješavanje kontinuuma njegovom diskretizacijom u fizičkom modelu. Primjena MKE je raširena na razne oblasti tehnike sa

stalnim porastom primjene. U oblasti proračuna nosećih struktura mašinskih konstrukcija predstavlja nezaobilazan metod analize.

Eksperimentalna istraživanja na specijalno izrađenim modelima ili originalnim konstrukcijama i pored činjenice da su skupa i složena, predstavljaju neophodan metod za cjelovito i pouzdano istraživanje konstrukcijskih elemenata.

Predmet ovog rada su teorijska, numerička i eksperimentalna istraživanja zavojne ljuske i razvoj metoda automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika ove ljuske. Naučni cilj istraživanja je da se razvijanjem metoda proračuna a na osnovu kriterijuma čvrstoće i deformabilnosti pri različitim režimima eksploatacije projektuju optimalne konstrukcije oblika zavojne ljuske, što predstavlja konkretan doprinos razvoju metoda automatizovanog projektovanja ovog složenog oblika ljuske kod specijalnih mašina i uređaja. Inženjerski cilj rada je primjena razvijenih metoda automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske, čime se obogaćuje inženjerska praksa projektovanja složenih tehničkih sistema.

Rad je koncipiran i prezentiran u 8 osnovnih poglavlja.

U ovom prvom poglavlju daje se pregled sadržaja disertacije, koja se u osnovi sastoji od sistema analiza koji je doveo i do konačnih upotrebljivih rezultata. Tako cio sistem analiza sadrži:

- (i) Analizu mehaničkog modela, opterećenja, specijalne slučajeve zavojne ljuske i dr. što je opisano u Poglavlju 2,
- (ii) Analitičku analizu zavojne ljuske, datu u Poglavlju 3,
- (iii) Analitičku analizu cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji, datu u Poglavlju 4,
- (iv) Analitičku analizu zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci u Poglavlju 5,

- (v) MKE analizu u Poglavlju 6 i
- (vi) Eksperimentalnu analizu u Poglavlju 7.

Analize konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske u ovoj disertaciji predstavljaju nastavak istraživanja urađenih u magistarskom radu [83].

U Poglavlju 2 su date osnovne relacije zavojne površi koje definišu geometriju zavojne ljuske i omogućavaju postavljanje mehaničkog modela. U ovom dijelu su pored opšteg slučaja zavojne ljuske definisani i specijalni oblici zavojne ljuske u polju njenih mogućih oblika.

U Poglavlju 3 je izvedena diferencijalna jednačina po pomjeraju za zavojnu ljusku u opštem slučaju preko parametarskih jednačina srednje površi. Ljuska je ukliještena na unutrašnjoj zavojnici i slobodna na spoljašnjoj zavojnici. Na ljusku djeluje ravnomjerno raspoređeni pritisak. Za sva izvođenja se koristi restriktivna teorija ljuski. Nisu se mogle koristiti jednačine klasične teorije ljuski zbog činjenice da je mješoviti koeficijent druge fundamentalne forme površi različit od nule, tj. koordinatne linije nisu linije krivine. Pretpostavljeno je da se pomjeraji u tangentnoj ravni mogu zanemariti u poređenju sa pomjerajem u pravcu normale.

U specijalnim slučajevima kada nagib zavojne ljuske ima ekstremne vrijednosti dobijamo jednačine savijanja kružne ploče i pravougaone ploče. Diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske je četvrtog reda po pomjeraju. Nakon definisanja četiri granična uslova na krajevima ljuske diferencijalna jednačina je riješena numerički. Postavljanje i rješavanje diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljuske omogućilo je da se polazeći od kriterijuma čvrstoće određuju optimalni geometrijski parametri zavojne ljuske. Za numeričko rješavanje diferencijalne

jednačine korišćen je metod konačnih razlika. Za rješavanje diferencijalne jednačine i automatizovano određivanje geometrijskih parametara konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske realizovan je program u programskom paketu MATLAB, koji je instaliran na PC računarima Pentium II 3D centra Mašinskog fakulteta u Podgorici i dat je u Prilogu 2.

U Poglavlju 4 dat je postupak proračuna cilindrične ljuske, izložene savijanju kontinualnim spregom po zavojnoj liniji. Kod konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci opterećenje sa zavojne ljuske se prenosi na cilindričnu ljusku preko linije presjeka srednjih površi tj. preko zavojnice. Kada je zavojna ljuska opterećena pritiskom, rezultantu tog opterećenja na cilindar čine kontinualni spreg u pravcu tangente na zavojnu ljusku na cilindru i kontinualno raspoređena sila u tangentnoj ravni cilindra. U radu se uvode pretpostavke da su pomjeraji usled sila zanemarljivi u poređenju sa pomjerajima usled sprega i da su pomjeraji duž zavojne linije jednaki nuli. S obzirom da su opterećenja i granični uslovi dati na zavojnici, uvedene su krivolinijske koordinate tačaka na srednjoj površi cilindrične ljuske, tako da koordinatne linije čine dvije familije međusobno ortogonalnih zavojnica. Za cilindričnu ljusku su korišćene relacije restriktivne teorije ljuski u tenzorskom obliku jer uvedene koordinatne linije nisu linije krivine cilindrične površi. Granični uslovi su definisani u srednjim tačkama presjeka zavojnice po kojoj je raspoređen spreg sa bilo kojom zavojnicom koja je na nju upravna. Na osnovu četiri granična uslova određene su nepoznate konstante u rješenju homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima po pomjeraju u pravcu normale na cilindar. Određen je položaj tačaka na cilindričnoj ljusci u kojima je

vrijednost pomjeraja maksimalna kao i veličina tog pomjeraja. Pokazano je da položaj ovih tačaka ne zavisi od intenziteta kontinualnog sprega.

Korišćenjem rješenja iz dvije diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljuske u Poglavlju 3 i savijanja cilindrične ljuske u Poglavlju 4, u Poglavlju 5 je riješen problem savijanja zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci u opštem slučaju. U tom cilju su definisani korigovani granični uslovi na liniji veze zavojne ljuske sa cilindričnom ljuskom.

Na osnovu graničnih uslova na zajedničkoj konturi ove dvije ljuske, diferencijalna jednačina je riješena numerički. Analitičko rješenje je omogućilo da se na osnovu kriterijuma čvrstoće određuju optimalne karakteristike zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci opterećene ravnomjernim pritiskom. Program za automatizovano određivanje optimalnih geometrijskih parametara zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci, na osnovu kriterijuma čvrstoće, je urađen u programskom paketu MATLAB. Program je instaliran na PC računarima Pentium II 3D centra Mašinskog fakulteta u Podgorici i dat je u Prilogu 3.

Mogućnosti savremenih programskih paketa Pro/ENGINEER, Pro/MECHANICA i drugih da automatski generišu mrežu konačnih elemenata zavojne ljuske oblika konoidnog helikoida na cilindričnoj ljusci omogućavaju da se efikasnije nego do sada provode analize na ovom obliku ljuske. Korišćenjem ovih programskih paketa u Poglavlju 6 su urađene deformacijske i naponske analize za različite modele zavojnih ljuski.

U Poglavlju 7 je prezentiran originalni model za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske. Za eksperimentalno istraživanje su odabrana tri oblika: model A- zavojna ljuska na cilindričnoj ljusci, model B- kružna (prstenasta) ploča na

cilindričnoj ljusci i model C- pravougaona ploča na cilindričnoj ljusci. Konstrukcijom dvostruke zavojne ljuske i korišćenjem specijalnog zaptivnog elementa, realizovan je normalni pritisak na površ ljuske. Deformacijske analize su urađene metodom tenzometrije. Na osnovu deformacija mjerenih u radijalnom i cirkularnom pravcu izračunate su vrijednosti napona u ovim pravcima na osnovu relacija koje važe za dvoosno naponsko stanje. Na ljuskama su mjerene vrijednosti ugiba sa tačnošću 1/100 [mm]. Izloženi eksperimentalni model je potvrdio opravdanost predloženih rješenja, omogućio je deformacijske i naponske analize konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske opterećenih ravnomjernim pritiskom.

Konačno u Poglavlju 8 daju se osnovni zaključci koji na osnovu saglasnosti analitičkih, MKE i eksperimentalnih rezultata: potvrđuju ispravnost uvedenih pretpostavki i postupaka u analitičkim analizama zavojne ljuske i cilindrične ljuske, pokazuju da je primjena MKE moćan numerički metod u statičkoj analizi i ove složene strukture i ističu efikasnost originalnog modela za eksperimentalna istraživanja konstrukcijskih elemenata zavojne ljuske, koji je prezentiran u ovom radu.

2. MEHANIČKI MODEL ZAVOJNE LJUSKE

2.1. Osnovna jednačina helikoidalne površi

U opštem slučaju, konoidne površi u koje spada i zavojna površ koja se analizira u ovom radu, su površi koje formiraju prave (izvodnice) koje prolaze kroz jednu datu pravu (direktrisu), paralelne su datoj ravni (direktorna ravan) i prolaze kroz datu krivu (vodilju). Za zavojnu površ direktrisa je z osa, direktorna ravan je xy, a vodilja je zavojna linija koja je prikazana na slici 2.1. Zavojna površ oblika konoidnog helikoida je prikazana na slici 2.2.

Jednačina površi konoidnog helikoida je data relacijom

$$z = k \arctan \frac{y}{x} \quad (2.1)$$

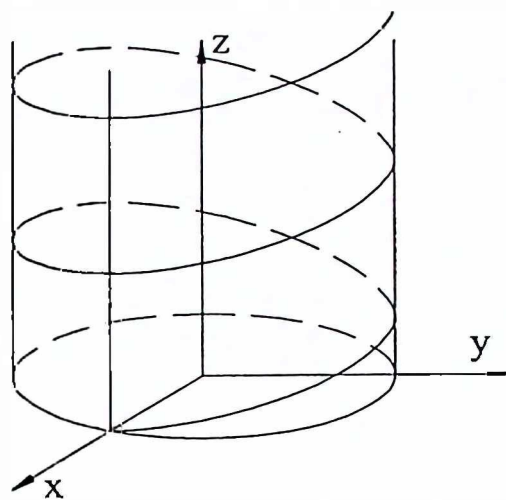
gdje je k koeficijent u zavisnosti od hoda zavojnih linija H, dat relacijom

$$k = \frac{H}{2\pi} \quad (2.2)$$

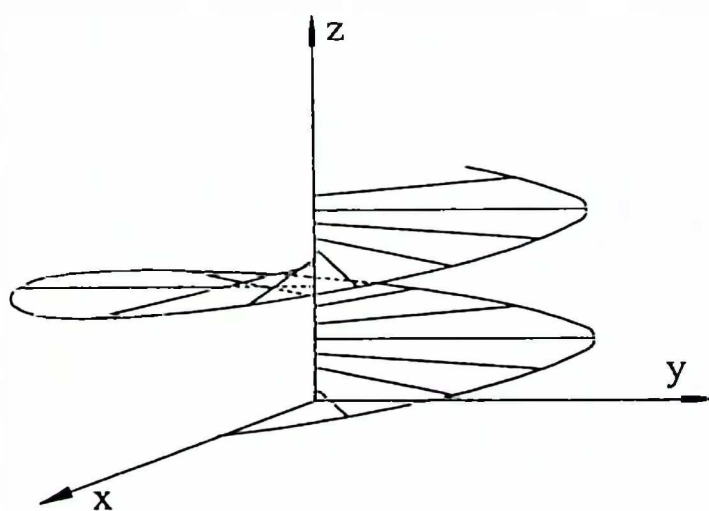
2.2. Modeliranje zavojne ljuske u polju mogućih oblika

Zavojna ljuska je dio površi konoidnog helikoida koji je po zavojnoj liniji postavljen na cilindar, a sa spoljašnje strane je ograničen zavojnom linijom istog hoda i sa konstantnim prečnikom kao na slici 2.3. Opterećenje koje na ljusku djeluje može biti koncentrisano, kontinualno ili kombinovano različitog pravca i smjera. Može se razložiti na komponente u tangentnoj ravni (p_n , p_t) i u pravcu normale na površ (p_b).

U specijalnom slučaju, kada je hod zavojne linije $H=0$, zavojnica prelazi u kružnicu koja leži u ravni xy, a konoidni helikoid u kružni prsten u ravni xy.



Slika 2.1 Zavojna linija

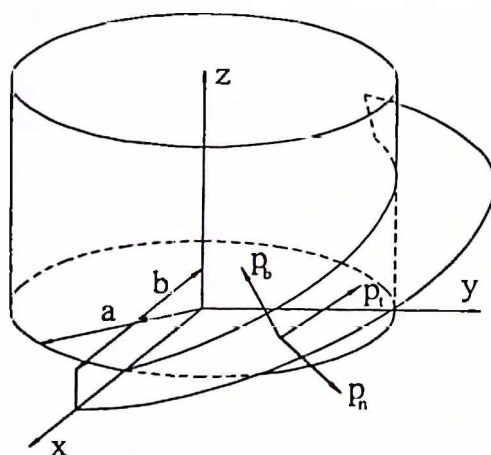


Slika 2.2 Zavojna površ oblika konoidnog helikoida

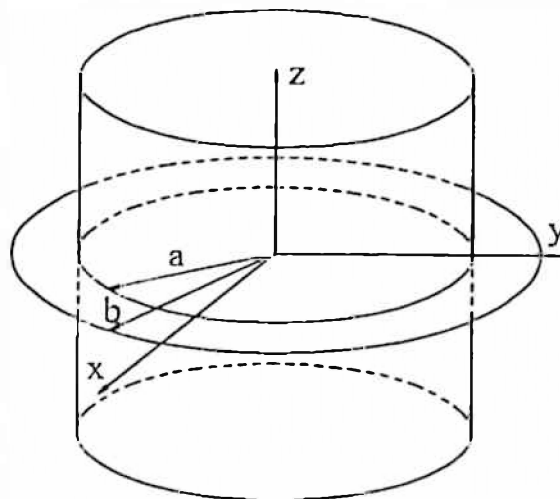
Ako se posmatra dio te ravni kao prsten unutrašnjeg prečnika a i spoljašnjeg prečnika b na cilindričnoj ljusci poluprečnika a dobićemo specijalni slučaj prstenaste ploče na cilindričnoj ljusci prikazan na slici 2.4. Opterećenje može biti u ravni prstenaste ploče ili normalno na nju.

Ako hod $H \rightarrow \infty$ tada i vrijednost konstante $k \rightarrow \infty$ i zavojnica prelazi u pravu liniju paralelnu z osi. Tada imamo specijalni slučaj pravougaone ploče koja je postavljena na cilindričnoj ljusci poluprečnika a i normalna je na ravan xy kao na slici 2.5. U daljim razmatranjima se analizira model koji ima dvije pravougaone ploče na cilindričnoj ljusci. Opterećenje u opštem slučaju može biti proizvoljno, a mogu se posmatrati komponente opterećenja koje leže u ravni pravougaone ploče i komponente koje su normalne na nju.

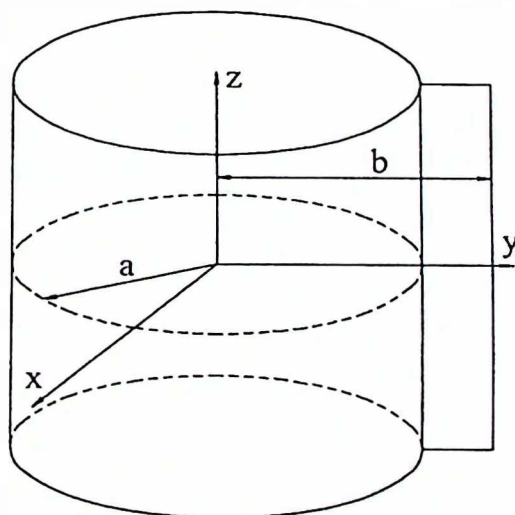
U radu se analizira uticaj ravnomjerno raspoređenog normalnog pritiska na površ ljuske.



Slika 2.3 Zavojna ljuska na cilindričnoj ljusci



Slika 2.4 Prstenasta ploča na cilindričnoj ljusci



Slika 2.5 Pravougaona ploča na cilindričnoj ljusci

3. ANALITIČKA ANALIZA ZAVOJNE LJUSKE

3.1. Uvodne definicije

Površ može biti definisana preko parametarskih jednačina oblika

$$x_i = f_i(\theta^1, \theta^2) \quad (3.1)$$

gdje su x_i ($i=1,2,3$) Dekartove koordinate tačke P na površi, a θ^α ($\alpha=1,2$) parametri. Ovi parametri se obično zovu krivolinijske koordinate na površi. U ovom slučaju, za parametre se usvajaju polarne koordinate $\theta^1 \equiv r$ i $\theta^2 \equiv \varphi$. Parametarske jednačine srednje površi zavojne ljuske onda glase

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x &= r \cos \varphi \\ x_2 = y &= r \sin \varphi \\ x_3 = z &= k\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Vektor položaja \mathbf{R} (sa Dekartovim komponentama x_i) može biti izražen kao funkcija parametara θ^α

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2) = i x_1 + j x_2 + k x_3 = i r \cos \varphi + j r \sin \varphi + k k \varphi \quad (3.3)$$

Svakoј običnoj tački P površi pridružuje se skup baznih vektora $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ definisanih sa

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} \quad \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0 \quad (3.4)$$

Za zavojnu površ bazni vektori glase

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = i \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -i r \sin \varphi + j r \cos \varphi + k k \quad (3.6)$$

Ovako definisani bazni vektori su linearno nezavisni i tangiraju koordinatne linije (prava i zavojnica) u tački P na površi. Ovi vektori definišu takođe tangentnu ravan na površi u tački P. Normala na površ u

tački P je normala na tangentnu ravan u toj tački, pa je otuda upravna na A_1, A_2 . Neka A_3 označava jedinični normalni vektor na površ u tački P tako da A_1, A_2, A_3 obrazuju triedar desne orijentacije. Onda slijedi da je

$$A_3 = \frac{A_1 \times A_2}{|A_1 \times A_2|} \quad (3.7)$$

$$A_1 \times A_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & k \end{vmatrix} = \mathbf{i} k \sin \varphi - \mathbf{j} k \cos \varphi + \mathbf{k} r$$

$$|A_1 \times A_2| = \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi + r^2} = \sqrt{r^2 + k^2}$$

$$A_3 = \mathbf{i} \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + k^2}} - \mathbf{j} \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + k^2}} + \mathbf{k} \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\mathbf{i} \frac{1}{2} (r^2 + k^2)^{-3/2} 2rk \sin \varphi + \mathbf{j} \frac{1}{2} (r^2 + k^2)^{-3/2} 2rk \cos \varphi +$$

$$+ \mathbf{k} \frac{\sqrt{r^2 + k^2} - r \frac{1}{2} (r^2 + k^2)^{-1/2} 2r}{r^2 + k^2}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\mathbf{i} \frac{kr \sin \varphi}{\sqrt{(r^2 + k^2)^3}} + \mathbf{j} \frac{kr \cos \varphi}{\sqrt{(r^2 + k^2)^3}} + \mathbf{k} \frac{k^2}{\sqrt{(r^2 + k^2)^3}}$$

$$A_3 \cdot \frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{k^2 r^2 \sin^2 \varphi}{(r^2 + k^2)^2} - \frac{k^2 r^2 \cos^2 \varphi}{(r^2 + k^2)^2} + \frac{k^2 r^2}{(r^2 + k^2)^2} = 0$$

Očigledno je da važe relacije

$$\left. \begin{aligned} A_3 \cdot A_3 &= 1 \\ A_3 \cdot A_\alpha &= 0 \\ A_3 \cdot A_{3,\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

3.1.1. Prva fundamentalna forma površi

Kvadrat linijskog elementa površi dat je relacijom

$$ds^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} \quad (3.10)$$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^2} d\theta^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} d\theta^\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} d\theta^\alpha$$

$$d\mathbf{R} = \mathbf{R}_{,\alpha} d\theta^\alpha = \mathbf{A}_\alpha d\theta^\alpha$$

$$d\mathbf{R} = \mathbf{A}_\beta d\theta^\beta$$

$$ds^2 = \mathbf{A}_\alpha d\theta^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta d\theta^\beta = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta d\theta^\alpha d\theta^\beta = A_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta \quad (3.11)$$

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad (3.12)$$

Ova kvadratna forma zove se prva fundamentalna forma površi.

Koeficijenti prve fundamentalne forme površi u ovom slučaju glase

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\ A_{12} &= A_{21} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = -r \sin \varphi \cos \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ A_{22} &= \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + k^2 = r^2 + k^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Kovarijantni koeficijenti prve fundamentalne forme u matričnom obliku se mogu napisati kao

$$[A_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 + k^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Kontravarijantni bazni vektori i kontravarijantne komponente prve fundamentalne forme označavaju se sa A^α i $A^{\alpha\beta}$ respektivno. Oni su definisani za sve tačke površi za koje važi

$$A = \det[A_{\alpha\beta}] \neq 0 \quad (3.15)$$

i dati su izrazima

$$\mathbf{A}^\alpha = A^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta \quad (3.16)$$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} = A^{\alpha} \cdot A^{\beta} = \frac{\mathcal{A}^{\alpha\beta}}{A} \quad (3.17)$$

Ovdje je $\mathcal{A}^{\alpha\beta}$ algebarski komplement od $A_{\alpha\beta}$ u razvoju determinante A .
U slučaju zavojne površi ima se

$$A = \det[A_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 + k^2 \end{vmatrix} = r^2 + k^2 \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} A^{11} &= \frac{\mathcal{A}^{11}}{A} = \frac{(-1)^{1+1}(r^2 + k^2)}{r^2 + k^2} = 1 \\ A^{12} &= A^{21} = \frac{(-1)^{1+2}0}{r^2 + k^2} = 0 \\ A^{22} &= \frac{\mathcal{A}^{22}}{A} = \frac{(-1)^{2+2}1}{r^2 + k^2} = \frac{1}{r^2 + k^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

sada je

$$[A^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 + k^2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Koeficijenti $A_{\alpha\beta}$ i $A^{\beta\alpha}$ će se koristiti za spuštanje i dizanje indeksa kod tenzorskih veličina. Kontravarijantni bazni vektori u ovom slučaju su

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^1 &= A^{1\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} = A^{11} \mathbf{A}_1 + A^{12} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \\ \mathbf{A}^2 &= A^{2\beta} \mathbf{A}_{\beta} = \frac{1}{r^2 + k^2} \mathbf{A}_2 = \frac{1}{r^2 + k^2} (-\mathbf{i} r \sin \varphi + \mathbf{j} r \cos \varphi + \mathbf{k} k) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Važe relacije

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^1 &= A^{11} = 1 \\ \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^2 &= 0 \\ \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}^2 &= \frac{1}{r^2 + k^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

3.1.2. Druga fundamentalna forma površi

Druga fundamentalna forma površi definisana je skalarnim proizvodom $-d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{A}_3$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^2} d\theta^2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} d\theta^\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} d\theta^\alpha = \mathbf{A}_\alpha d\theta^\alpha$$

$$d\mathbf{A}_3 = \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \theta^2} d\theta^2 = \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \theta^\beta} d\theta^\beta = \mathbf{A}_{3,\beta} d\theta^\beta$$

$$-d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{A}_3 = -\mathbf{A}_\alpha d\theta^\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} d\theta^\beta = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta$$

$$-d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{A}_3 = B_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta \quad (3.23)$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} \quad (3.24)$$

$B_{\alpha\beta}$ su kovarijantni koeficijenti druge fundamentalne forme koji za slučaj zavojne površi glase

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} (ik \sin \varphi - jk \cos \varphi + kr) \cdot 0 = 0 \\ B_{12} &= B_{21} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{1,2} \\ B_{12} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} (ik \sin \varphi - jk \cos \varphi + kr) (-i \sin \varphi + j \cos \varphi) = -\frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\ B_{22} &= \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{2,2} \\ B_{22} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} (ik \sin \varphi - jk \cos \varphi + kr) (-ir \cos \varphi - jr \sin \varphi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Da bi koordinatne linije bile linije krivine potrebno je da budu ispunjeni uslovi $A_{12}=B_{12}=0$. To u ovom slučaju nije ispunjeno jer je $B_{12} \neq 0$ tj. prava i zavojnica nisu linije krivine. Zbog ovoga nije moguće koristiti jednačine teorije ljuski koje su u literaturi uglavnom date za linije krivine.

U ovom radu diferencijalna jednačina savijanja ljuske oblika helikoidalne površi je izvedena polazeći od relacija koje se odnose na restriktivnu teoriju ljuski datih u tenzorskom obliku [60].

Koristeći pravila dizanja indeksa kod tenzorskih veličina određuju se mješoviti koeficijenti druge fundamentalne forme površi

$$\left. \begin{aligned} B_1^1 &= A^{1\gamma} B_{\gamma 1} = A^{11} B_{11} + A^{12} B_{21} = 0 \\ B_1^2 &= A^{2\gamma} B_{\gamma 1} = A^{21} B_{11} + A^{22} B_{21} = \frac{1}{r^2 + k^2} \left(-\frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \right) = \frac{-k}{\sqrt{(r^2 + k^2)^3}} \\ B_2^1 &= A^{1\gamma} B_{\gamma 2} = A^{11} B_{12} + A^{12} B_{22} = 1 \left(-\frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \right) = -\frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\ B_2^2 &= A^{2\gamma} B_{\gamma 2} = A^{21} B_{12} + A^{22} B_{22} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

3.1.3. Christoffel - ovi simboli za površi

Ovdje će se prikazati dobijanja Christoffel-ovih simbola druge vrste $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, koji se pojavljuju pri kovarijantnom diferenciranju tenzorskih funkcija, što će se koristiti u ovom radu. Christoffel-ovi simboli za površi druge vrste se definišu relacijom

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} = A^{\gamma} \cdot A_{\alpha,\beta} = -A_{\alpha} \cdot A_{\beta}^{\gamma} \quad (3.27)$$

Za helikoidalnu površ Christoffel-ovi simboli druge vrste su

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= A^1 \cdot A_{1,1} = (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = A^1 \cdot A_{1,2} = (i \cos \varphi + j \sin \varphi) (-i \sin \varphi + j \cos \varphi) = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= A^1 \cdot A_{2,2} = (i \cos \varphi + j \sin \varphi) (-ir \cos \varphi - jr \sin \varphi) = -r \\ \Gamma_{11}^2 &= A^2 \cdot A_{1,1} = \frac{1}{r^2 + k^2} (-ir \sin \varphi + jr \cos \varphi + kk) \cdot 0 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = A^2 \cdot A_{1,2} = \frac{1}{r^2 + k^2} (-ir \sin \varphi + jr \cos \varphi + kk) (-i \sin \varphi + j \cos \varphi) \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{r}{r^2 + k^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= A^2 \cdot A_{2,2} = \frac{1}{r^2 + k^2} (-ir \sin \varphi + jr \cos \varphi + kk) (-ir \cos \varphi - jr \sin \varphi) \\ \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$



3.2. Osnovne veličine deformacija

Osnovne veličine deformacija biće izvedene po restriktivnoj teoriji koja predstavlja specijalni slučaj opšte teorije za površi Cosserat-a. Prema opštoj teoriji svakoj tački srednje površi ljuske je osim vektora položaja pridružen deformabilni vektor zvani direktorni vektor koji se može rotirati i linearno deformisati nezavisno od deformacije u tački površi. Teorija Cosserat-a koja uzima u obzir deformacije direktornog vektora se koristi u teoriji debelih ljuski gdje ne važi Kirchhoff-Love-ova hipoteza o upravnosti normale u deformisanom položaju ljuske. Ova teorija se koristi kod ljuski promjenljive debljine i kod ljuski napravljenih od hiperelastičnih materijala. Ako zanemarimo deformacije direktornog vektora u jednačinama opšte teorije dolazi se do restriktivne teorije koja ne daje podatke o deformaciji duž normale na površ i o deformaciji usled transverzalnih sila.

Do relacija restriktivne teorije može se doći i posmatranjem izraza za koeficijente prve i druge fundamentalne forme površi u deformisanoj konfiguraciji ljuske. Naime, neka je radijus vektor tačke na srednjoj površi ljuske poslije deformisanja

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = u^i \mathbf{A}_i = u_i \mathbf{A}^i \quad (3.29)$$

gdje je \mathbf{u} infinitezimalni vektor pomjeraja.

Bazni vektori površi u deformisanoj konfiguraciji površi glase

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,\alpha} &= \mathbf{R}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} \\ \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ovom relacijom se uspostavlja veza između baznih vektora u deformisanoj konfiguraciji površi i baznih vektora u nedeformisanoj

konfiguraciji površi. U radu se za veličine koje se odnose na referentnu konfiguraciju ljuske koriste velika slova, a za veličine koje se odnose na deformisanu konfiguraciju ljuske mala slova.

Pretpostaviće se da jedinični vektor normale na srednju površ ljuske u deformisanoj konfiguraciji ima oblik

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{A}_3 + \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta^\alpha \mathbf{A}_\alpha = \beta_\alpha \mathbf{A}^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

gdje je $\boldsymbol{\beta}$ infinitezimalna veličina deformacija koja potiče od rotacije jedinične normale na srednju površ. Ovaj vektor ima komponente samo u pravcu baznih vektora. Komponente vektora $\boldsymbol{\beta}$ se određuju pretpostavljajući da jedinični vektor normale u deformisanoj konfiguraciji ostaje upravan na bazne vektore u deformisanoj konfiguraciji

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_3 + \boldsymbol{\beta}) \cdot (\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}) &= 0 \\ \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Zanemarivanjem beskonačno malih veličina višeg reda dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\beta} &= -\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_\alpha \cdot \beta^\gamma \mathbf{A}_\gamma &= -\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \\ \beta^\gamma (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\gamma) &= -\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \\ \beta^\gamma \mathbf{A}_{\alpha\gamma} &= -\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \\ \beta_\alpha = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha &= -\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Iz ovog izraza je očigledno da $\boldsymbol{\beta}$ nije primitivna veličina deformacije već izvedena. U restriktivnoj teoriji ljuski primitivna veličina deformacije je vektor pomjeraja \mathbf{u} u odnosu na koji se izvode sve veličine deformacija.

Korišćenjem izraza za \mathbf{a}_α i \mathbf{a}_3 uspostavlja se veza između koeficijenata fundamentalnih formi površi u deformisanoj i nedeformisanoj konfiguraciji. Relacije za $a_{\alpha\beta}$ i $b_{\alpha\beta}$ mogu biti napisane kao

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = (\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}) = A_{\alpha\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha \quad (3.34)$$

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -(\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{A}_{3,\beta} + \boldsymbol{\beta}_{,\beta}) = B_{\alpha\beta} - (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\beta}_{,\beta}) \quad (3.35)$$

Linearna i ugaona deformacija srednje površi ljuske se definišu izrazom

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha) \quad (3.36)$$

Promjena krivine i "torzija" srednje površi ljuske se definišu izrazom

$$\kappa_{\alpha\beta} = \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\beta}_{,\beta} \quad (3.37)$$

U prethodnim relacijama za osnovne veličine deformacija se pojavljuju parcijalni izvodi vektorskih funkcija po površinskim koordinatama. S tim u vezi, neka je \mathbf{V} trodimenzionalno vektorsko polje definisano na površi i neka su V^i komponente od \mathbf{V} koje se odnose na vektore baze $\mathbf{A}_i = \{\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{A}_3\}$

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{A}_i = V^\lambda \mathbf{A}_\lambda + V^3 \mathbf{A}_3 = V_i \mathbf{A}^i = V_\lambda \mathbf{A}^\lambda + V_3 \mathbf{A}^3 \quad (3.38)$$

Parcijalni izvod od \mathbf{V} po koordinati θ^α glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{,\alpha} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (V^\lambda \mathbf{A}_\lambda + V^3 \mathbf{A}_3) \\ \mathbf{V}_{,\alpha} &= V_{,\alpha}^\lambda \mathbf{A}_\lambda + V^\lambda \mathbf{A}_{\lambda,\alpha} + V_{,\alpha}^3 \mathbf{A}_3 + V^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \end{aligned}$$

Razmatraju se prvo parcijalni izvodi $\mathbf{A}_{3,\alpha}$ koji leže u tangentnoj ravni površi koja je određena sa $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$. Uvodi se izraz

$$\mathbf{A}_{3,\alpha} = K_\alpha^\nu \mathbf{A}_\nu$$

Koeficijent K_α^ν može biti određen skalarnim množenjem prethodne relacije sa \mathbf{A}_β

$$A_{\beta} \cdot A_{3,\alpha} = K_{\alpha}^{\gamma} A_{\beta\gamma}$$

$$-B_{\beta\alpha} = K_{\alpha}^{\gamma} A_{\beta\gamma}$$

$$-B_{\beta\alpha} = K_{\beta\alpha}$$

$$K_{\alpha}^{\nu} = -B_{\alpha}^{\nu}$$

Sada je

$$A_{3,\alpha} = -B_{\alpha}^{\nu} A_{\nu} \quad (3.39)$$

Ova relacija je poznata kao formula Weingarten-a.

Parcijalni izvod $A_{\lambda,\alpha}$ će se napisati kao linearna kombinacija od A_i u obliku

$$A_{\lambda,\alpha} = C_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\gamma} + C_{\lambda\alpha} A_3$$

Množeći prethodnu relaciju sa A_3 određuje se koeficijent $C_{\lambda\alpha}$, a skalarnim množenjem sa A_{ν} određuje se koeficijent $C_{\lambda\alpha}^{\gamma}$

$$A_{\lambda,\alpha} \cdot A_3 = C_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\gamma} \cdot A_3 + C_{\lambda\alpha} A_3 \cdot A_1$$

$$B_{\lambda\alpha} = C_{\lambda\alpha}$$

$$A_{\lambda,\alpha} \cdot A_{\nu} = C_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\nu} \cdot A_{\gamma} + C_{\lambda\alpha} A_{\nu} \cdot A_3$$

$$\Gamma_{\lambda\alpha\nu} = C_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\nu\gamma}$$

$$\Gamma_{\lambda\alpha\nu} = C_{\lambda\alpha\nu}$$

$$C_{\lambda\alpha}^{\gamma} = \Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma}$$

Izraz za $A_{\lambda,\alpha}$ postaje

$$A_{\lambda,\alpha} = \Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\gamma} + B_{\lambda\alpha} A_3 \quad (3.40)$$

i poznat je kao formula Gauss-a.

Sada izraz za $V_{,\alpha}$ postaje

$$V_{,\alpha} = V_{,\alpha}^{\lambda} A_{\lambda} + V^{\lambda} (\Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\gamma} + B_{\lambda\alpha} A_3) + V_{\alpha}^3 A_3 - V^3 B_{\alpha}^{\nu} A_{\nu}$$

$$V_{,\alpha} = V_{,\alpha}^{\lambda} A_{\lambda} + V^{\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} A_{\gamma} - V^3 B_{\alpha}^{\nu} A_{\nu} (V_{,\alpha}^3 + B_{\lambda\alpha} V^{\lambda}) A_3$$

Pogodnom zamjenom nijemih indeksa dobija se

$$V_{,\alpha} = (V_{,\alpha}^{\lambda} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} - V^3 B_{\alpha}^{\nu}) A_{\lambda} + (V_{,\alpha}^3 + B_{\lambda\alpha} V^{\lambda}) A_3$$

Izraz

$$V_{|\lambda}^{\alpha} = V_{,\alpha}^{\lambda} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} \quad (3.41)$$

predstavlja kovarijantni izvod u odnosu na metrički tenzor $A_{\alpha\beta}$

$$V_{,\alpha} = (V_{|\alpha}^{\lambda} - B_{\alpha}^{\nu} V^3) A_{\lambda} + (V_{,\alpha}^3 + B_{\lambda\alpha} V^{\lambda}) A_3 \quad (3.42)$$

Relacija za parcijalni izvod proizvoljnog vektora V po koordinati θ^{α} izražen preko baznih vektora A_{λ} i jediničnog vektora normale A_3 omogućava da se napiše izraz za veličine deformacija u komponentnom obliku.

Za određivanje osnovne veličine deformacije $e_{\alpha\beta}$ koriste se sledeće relacije

$$u_{,\beta} = (u_{|\beta}^{\lambda} - B_{\beta}^{\lambda} u^3) A_{\lambda} + (u_{,\beta}^3 + B_{\lambda\beta} u^{\lambda}) A_3$$

$$u_{,\alpha} = (u_{|\alpha}^{\lambda} - B_{\alpha}^{\lambda} u^3) A_{\lambda} + (u_{,\alpha}^3 + B_{\lambda\alpha} u^{\lambda}) A_3$$

$$A_{\alpha} \cdot u_{,\beta} = (u_{|\beta}^{\lambda} - B_{\beta}^{\lambda} u^3) A_{\alpha} \cdot A_{\lambda} + (u_{,\beta}^3 + B_{\lambda\alpha} u^{\lambda}) A_{\alpha} \cdot A_3$$

$$A_{\alpha} \cdot u_{,\beta} = u_{\alpha|\beta} - B_{\alpha\beta} u^3$$

$$A_{\beta} \cdot u_{,\alpha} = u_{\beta|\alpha} - B_{\beta\alpha} u^3$$

Sada je izraz za $e_{\alpha\beta}$

$$e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - B_{\alpha\beta} u^3 \quad (3.43)$$

Za određivanje osnovne veličine deformacije $\kappa_{\alpha\beta}$ koriste se sledeće relacije

$$u_{,\alpha} \cdot A_{3,\beta} = [(u_{|\alpha}^{\lambda} - B_{\alpha}^{\lambda} u^3) A_{\lambda} + (u_{,\alpha}^3 + B_{\lambda\alpha} u^{\lambda}) A_3] (-B_{\beta}^{\nu} A_{\nu})$$

$$u_{,\alpha} \cdot A_{3,\beta} = (u_{|\alpha}^{\lambda} - B_{\alpha}^{\lambda} u^3) (-B_{\beta}^{\nu} A_{\nu} \cdot A_{\lambda})$$

$$\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} = -B_{\beta}^{\vee} (A_{\nu\lambda} u_{|\alpha}^{\lambda} - A_{\nu\lambda} B_{\alpha}^{\lambda} u_3)$$

$$\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} = -B_{\beta}^{\vee} \left[(A_{\nu\lambda} u^{\lambda})_{|\alpha} - A_{\nu\lambda|\alpha} u^{\lambda} - B_{\alpha\nu} u_3 \right]$$

$$\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} = -B_{\beta}^{\vee} (u_{\nu|\alpha} - B_{\alpha\nu} u_3)$$

$$\beta_{,\beta} = (\beta_{\gamma} A^{\gamma})_{,\beta} = \beta_{\gamma,\beta} A^{\gamma} + \beta_{\gamma} A_{,\beta}^{\gamma}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \beta_{,\beta} = \beta_{\gamma,\beta} \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}^{\gamma} + \beta_{\gamma} \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{,\beta}^{\gamma}$$

$$\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \beta_{,\beta} = \beta_{\alpha,\beta} - \beta_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \beta_{\alpha|\beta}$$

$$\beta_{\alpha} = -\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} = -\mathbf{A}_3 \cdot \left[(u_{|\alpha}^{\lambda} - B_{\alpha}^{\lambda} u_3) \mathbf{A}_{\lambda} + (u_{3,\alpha} + B_{\lambda\alpha} u^{\lambda}) \mathbf{A}_3 \right]$$

$$\beta_{\alpha} = -u_{3,\alpha} + B_{\lambda\alpha} u^{\lambda}$$

$$\beta_{\alpha} = -(u_{3|\alpha} + B_{\lambda\alpha} A^{\lambda\nu} u_{\nu}) = -(u_{3|\alpha} + B_{\alpha}^{\vee} u_{\nu})$$

$$\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \beta_{,\beta} = -(u_{3|\alpha} + B_{\alpha}^{\vee} u_{\nu})_{|\beta} = -(u_{3|\alpha\beta} + B_{\alpha|\beta}^{\vee} u_{\nu} + B_{\alpha}^{\vee} u_{\nu|\beta})$$

Sada je izraz za $\kappa_{\alpha\beta}$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -B_{\beta}^{\vee} (u_{\nu|\alpha} - B_{\alpha\nu} u_3) - (u_{3|\alpha\beta} + B_{\alpha|\beta}^{\vee} u_{\nu} + B_{\alpha}^{\vee} u_{\nu|\beta})$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -(u_{3|\alpha\beta} + B_{\alpha|\beta}^{\vee} u_{\nu} + B_{\alpha}^{\vee} u_{\nu|\beta} + B_{\beta}^{\vee} u_{\nu|\alpha} - B_{\beta}^{\vee} B_{\alpha\nu} u_3) \quad (3.44)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha} = -\overline{\kappa}_{\alpha\beta} = -\overline{\kappa}_{\beta\alpha} \quad (3.45)$$

Izvodi se izraz za $e_{\alpha\beta}$ za helikoidalnu površ

$$e_{11} = u_{1|1} - B_{11} u_3 \quad e_{12} = \frac{1}{2} (u_{1|2} + u_{2|1}) - B_{12} u_3 \quad e_{22} = u_{2|2} - B_{22} u_3$$

$$u_{1|1} = u_{1,1} - \Gamma_{11}^{\vee} u_{\nu} = \frac{\partial u_1}{\partial r} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2$$

$$u_{1|2} = u_{1,2} - \Gamma_{12}^{\vee} u_{\nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \Gamma_{12}^1 u_1 - \Gamma_{12}^2 u_2$$

$$u_{2|1} = u_{2,1} - \Gamma_{21}^{\vee} u_{\nu} = \frac{\partial u_2}{\partial r} - \Gamma_{21}^1 u_1 - \Gamma_{21}^2 u_2$$

$$u_{2|2} = u_{2,2} - \Gamma_{22}^v u_v = \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2$$

Na osnovu vrijednosti kovarijantnih koeficijenata druge fundamentalne forme i Christoffel-ovih simbola druge vrste za helikoidalnu površ ima se

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial r} \\ e_{12} &= e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{r}{r^2 + k^2} u_2 + \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} u_3 \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Ako se fizičke komponente tenzora oblika u_i , $e_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{\alpha\beta}$ označe kao $u_{\langle i \rangle}$, $e_{\langle \alpha\beta \rangle}$ i $\kappa_{\langle \alpha\beta \rangle}$ tada važe sledeće relacije

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sqrt{A_{ii}} u_{\langle i \rangle} & (\text{bez sumiranja po } i) \\ e_{\alpha\beta} &= \sqrt{A_{\alpha\alpha}} \sqrt{A_{\beta\beta}} e_{\langle \alpha\beta \rangle} & (\text{bez sumiranja po } \alpha, \beta) \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \sqrt{A_{\alpha\alpha}} \sqrt{A_{\beta\beta}} \kappa_{\langle \alpha\beta \rangle} & (\text{bez sumiranja po } \alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

odnosno

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{\langle 1 \rangle} & u_2 &= \sqrt{r^2 + k^2} u_{\langle 2 \rangle} & u_3 &= u_{\langle 3 \rangle} \\ e_{11} &= e_{\langle 11 \rangle} & e_{12} &= \sqrt{r^2 + k^2} e_{\langle 12 \rangle} & e_{22} &= \left(r^2 + k^2 \right) e_{\langle 22 \rangle} \\ \kappa_{11} &= \kappa_{\langle 11 \rangle} & \kappa_{12} &= \sqrt{r^2 + k^2} \kappa_{\langle 12 \rangle} & \kappa_{22} &= \left(r^2 + k^2 \right) \kappa_{\langle 22 \rangle} \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Zamjenom izraza (3.48)₁₂ u formule (3.46) dobija se zavisnost između fizičkih komponenti $e_{\langle \alpha\beta \rangle}$ i $u_{\langle i \rangle}$ u obliku

$$\left. \begin{aligned} e_{\langle 11 \rangle} &= \frac{\partial u_{\langle 1 \rangle}}{\partial r} \\ e_{\langle 12 \rangle} &= e_{\langle 21 \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 + k^2}} \frac{\partial u_{\langle 1 \rangle}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\langle 2 \rangle}}{\partial r} - \frac{r}{r^2 + k^2} u_{\langle 2 \rangle} \right) + \frac{k u_3}{r^2 + k^2} \\ e_{\langle 22 \rangle} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} \frac{\partial u_{\langle 2 \rangle}}{\partial \varphi} + \frac{r}{r^2 + k^2} u_{\langle 1 \rangle} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Izraz za $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ izvodi se za helikoidalnu površ

$$\bar{\kappa}_{11} = u_{3|11} + B_{1|1}^1 u_1 + B_{1|1}^2 u_2 + B_1^1 u_{1|1} + B_1^2 u_{2|1} + B_1^1 u_{1|1} + B_1^2 u_{2|1} - (B_1^1 B_{11} + B_1^2 B_{21}) u_3$$

$$\bar{\kappa}_{12} = \bar{\kappa}_{21} = u_{3|12} + B_{1|2}^1 u_1 + B_{1|2}^2 u_2 + B_2^1 u_{1|1} + B_2^2 u_{2|1} + B_1^1 u_{1|2} + B_1^2 u_{2|2} - (B_2^1 B_{11} + B_2^2 B_{21}) u_3$$

$$\bar{\kappa}_{22} = u_{3|22} + B_{2|2}^1 u_1 + B_{2|2}^2 u_2 + B_2^1 u_{1|2} + B_2^2 u_{2|2} + B_2^1 u_{1|2} + B_2^2 u_{2|2} - (B_2^1 B_{12} + B_2^2 B_{22}) u_3$$

Članovi u ovim izrazima određuju se na osnovu prethodno određenih vrijednosti koeficijenata druge fundamentalne forme i Christoffel-ovih simbola

$$u_{3|1} = u_{3,1} = \frac{\partial u_3}{\partial r}$$

$$u_{3|11} = (u_{3|1})_{|1} = (u_{3,1})_{|1} = u_{3,11} - u_{3,\lambda} \Gamma_{11}^\lambda = u_{3,11} - u_{3,1} \Gamma_{11}^1 - u_{3,2} \Gamma_{11}^2 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}$$

$$u_{3|12} = (u_{3|1})_{|2} = (u_{3,1})_{|2} = u_{3,12} - u_{3,\lambda} \Gamma_{12}^\lambda = u_{3,12} - u_{3,1} \Gamma_{12}^1 - u_{3,2} \Gamma_{12}^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}$$

$$u_{3|2} = u_{3,2} = \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}$$

$$u_{3|22} = (u_{3|2})_{|2} = (u_{3,2})_{|2} = u_{3,22} - u_{3,\lambda} \Gamma_{22}^\lambda = u_{3,22} - u_{3,1} \Gamma_{22}^1 - u_{3,2} \Gamma_{22}^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial u_3}{\partial r}$$

$$B_{1|1}^1 = B_{1,1}^1 + B_1^\lambda \Gamma_{\lambda 1}^1 - B_\lambda^1 \Gamma_{11}^\lambda = B_1^1 \Gamma_{11}^1 + B_1^2 \Gamma_{21}^1 - B_1^1 \Gamma_{11}^1 - B_2^1 \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$B_{1|1}^2 = B_{1,1}^2 + B_1^\lambda \Gamma_{\lambda 1}^2 - B_\lambda^2 \Gamma_{11}^\lambda = B_{1,1}^2 + B_1^1 \Gamma_{11}^2 + B_1^2 \Gamma_{21}^2 - B_1^2 \Gamma_{11}^2 - B_2^2 \Gamma_{11}^2 =$$

$$= \frac{3kr}{(r^2 + k^2)^{5/2}} - \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \frac{r}{(r^2 + k^2)} = \frac{2kr}{(r^2 + k^2)^{5/2}}$$

$$B_{1|2}^2 = B_{1,2}^1 + B_1^\lambda \Gamma_{\lambda 2}^1 - B_\lambda^1 \Gamma_{12}^\lambda = B_1^1 \Gamma_{12}^1 + B_1^2 \Gamma_{22}^2 - B_1^1 \Gamma_{12}^1 - B_2^1 \Gamma_{12}^2 =$$

$$= -\frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}}(-r) + \frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{r}{(r^2 + k^2)} = \frac{2kr}{(r^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$B_{1|2}^2 = B_{1,2}^2 + B_1^\lambda \Gamma_{\lambda 2}^2 - B_\lambda^2 \Gamma_{12}^\lambda = B_1^1 \Gamma_{12}^2 + B_1^2 \Gamma_{22}^2 - B_1^2 \Gamma_{12}^1 - B_2^2 \Gamma_{12}^2 = 0$$

$$B_{2|2}^1 = B_{2,2}^1 + B_2^\lambda \Gamma_{\lambda 2}^1 - B_\lambda^1 \Gamma_{22}^\lambda = B_2^1 \Gamma_{12}^1 + B_2^2 \Gamma_{22}^1 - B_1^1 \Gamma_{22}^1 - B_2^1 \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$B_{2|2}^2 = B_{2,2}^2 + B_2^\lambda \Gamma_{\lambda 2}^2 - B_\lambda^2 \Gamma_{22}^\lambda = B_2^1 \Gamma_{12}^2 + B_2^2 \Gamma_{22}^2 - B_1^2 \Gamma_{22}^1 - B_2^2 \Gamma_{22}^2 =$$

$$= -\frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{r}{(r^2 + k^2)} + \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}}(-r) = \frac{2kr}{(r^2 + k^2)^{3/2}}$$

Poslije sređivanja izrazi za $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ konačno postaju

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa}_{11} &= -\frac{2k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{4kr}{(r^2 + k^2)^{5/2}} u_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - \frac{k^2}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \\ \bar{\kappa}_{12} = \bar{\kappa}_{21} &= -\frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{kr}{(r^2 + k^2)^{3/2}} u_1 - \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \\ \bar{\kappa}_{22} &= -\frac{2k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2 + k^2} u_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Relacije za veličine deformacije $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ daju se preko fizičkih komponenti poslije smjene (3.48)_{1,3} u relacije (3.50)

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\kappa}_{<11>} &= -\frac{2k}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_{<2>}}{\partial r} + \frac{2kr}{(r^2 + k^2)^2} u_{<2>} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - \frac{k^2}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \\
 \bar{\kappa}_{<12>} &= \bar{\kappa}_{<21>} = -\frac{k}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_{<1>}}{\partial r} + \frac{kr}{(r^2 + k^2)^2} u_{<1>} - \frac{k}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_{<2>}}{\partial \varphi} + \\
 &\quad + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{r}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \\
 \bar{\kappa}_{<22>} &= \frac{2k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \frac{\partial u_{<1>}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 + k^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{k^2}{(r^2 + k^2)^2} u_3
 \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

3.3. Diferencijalne jednačine ravnoteže

Jednačine ravnoteže u tenzorskom obliku u restriktivnoj teoriji ljuski glase

$$N_{|\alpha}^{\alpha\beta} - B_{\alpha}^{\beta} N^{\alpha\beta} + \rho_0 F^{\beta} = 0 \quad (3.52)$$

$$N_{|\alpha}^{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \rho_0 F^3 = 0 \quad (3.53)$$

$$\hat{M}_{|\beta}^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3} = 0 \quad (3.54)$$

$$\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} [N^{\alpha\beta} - B_{\gamma}^{\alpha} \hat{M}^{\gamma\beta}] = 0 \quad (3.55)$$

U ovim jednačinama $N^{\alpha i}$ su komponente kontaktne sile \mathbf{N} koja se mjeri po jedinici dužine krive na površi, $\hat{M}^{\alpha\beta}$ komponenta kontaktnog sprega $\hat{\mathbf{M}}$ koji se takođe mjeri po jedinici dužine krive na površi. F^i su komponente zapreminske sile \mathbf{F} po jedinici mase površi, ρ_0 je masa jedinične površine razmatrane površi. Apsolutni permutacioni simbol je $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$ koji se određuje na osnovu relativnog permutacionog simbola $\bar{e}_{\alpha\beta}$ koristeći relaciju

$$\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} = \sqrt{A} \bar{e}_{\alpha\beta} \quad (3.56)$$

Vrijednosti za relativne permutacione simbole su $e_{11}=e_{22}=0$; $e_{12}=-e_{21}=1$. Pošto se razmatraju linearizovane jednačine, sve veličine se odnose na referentnu (nedeformisanu) konfiguraciju površi. Jednačine ravnoteže u razvijenom obliku glase

$$\left. \begin{aligned} N_{|1}^{11} + N_{|2}^{21} - B_1^1 N^{13} - B_2^1 N^{23} + \rho_0 F^1 &= 0 \\ N_{|1}^{12} + N_{|2}^{22} - B_1^2 N^{13} - B_2^2 N^{23} + \rho_0 F^2 &= 0 \\ N_{|1}^{13} + N_{|2}^{23} + B_{11} N^{11} + B_{12} N^{12} + B_{21} N^{21} + B_{22} N^{22} + \rho_0 F^3 &= 0 \\ \hat{M}_{|1}^{11} + \hat{M}_{|2}^{21} - N^{13} &= 0 \\ \hat{M}_{|1}^{12} + \hat{M}_{|2}^{22} - N^{23} &= 0 \\ N^{12} - N^{21} + B_1^2 \hat{M}^{11} - B_2^2 \hat{M}^{21} + B_1^1 \hat{M}^{12} + B_2^1 \hat{M}^{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Dobijaju se diferencijalne jednačine ravnoteže za kontravarijantne i fizičke komponente sila N i sprega \hat{M}

$$N_{|1}^{11} = N_{,1}^{11} + N^{\nu 1} \Gamma_{\nu 1}^1 + N^{1\nu} \Gamma_{\nu 1}^1 = N_{,1}^{11} + N^{11} \Gamma_{11}^1 + N^{21} \Gamma_{21}^1 + N^{11} \Gamma_{11}^1 + N^{12} \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial N^{11}}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} N_{|2}^{21} &= N_{,2}^{21} + N^{\nu 1} \Gamma_{\nu 2}^2 + N^{2\nu} \Gamma_{\nu 2}^1 = N_{,2}^{21} + N^{11} \Gamma_{12}^2 + N^{22} \Gamma_{22}^2 + N^{21} \Gamma_{12}^1 + N^{22} \Gamma_{22}^1 = \\ &= \frac{\partial N^{21}}{\partial \varphi} + N^{11} \frac{r}{r^2 + k^2} - N^{22} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{|1}^{12} &= N_{,1}^{12} + N^{\nu 2} \Gamma_{\nu 1}^1 + N^{1\nu} \Gamma_{\nu 1}^2 = N_{,1}^{12} + N^{12} \Gamma_{11}^1 + N^{22} \Gamma_{21}^1 + N^{11} \Gamma_{11}^2 + N^{12} \Gamma_{21}^2 = \\ &= \frac{\partial N^{12}}{\partial r} + N^{12} \frac{r}{r^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{|2}^{22} &= N_{,2}^{22} + N^{\nu 2} \Gamma_{\nu 2}^2 + N^{2\nu} \Gamma_{\nu 2}^2 = N_{,2}^{22} + N^{12} \Gamma_{12}^2 + N^{22} \Gamma_{22}^2 + N^{21} \Gamma_{12}^2 + N^{22} \Gamma_{22}^2 = \\ &= \frac{\partial N^{22}}{\partial \varphi} + N^{12} \frac{r}{r^2 + k^2} + N^{21} \frac{r}{r^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$N_{|1}^{13} = N_{,1}^{13} + N^{\nu 3} \Gamma_{\nu 1}^1 = N_{,1}^{13} + N^{13} \Gamma_{11}^1 + N^{23} \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial N^{13}}{\partial r}$$

$$N_{|2}^{23} = N_{,2}^{23} + N^{\nu 3} \Gamma_{\nu 2}^2 = N_{,2}^{23} + N^{13} \Gamma_{12}^2 + N^{23} \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial N^{23}}{\partial \varphi} + N^{13} \frac{r}{r^2 + k^2}$$

Analognim postupkom dobijaju se vrijednosti za momente

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_{11}^{11} &= \frac{\partial \hat{M}^{11}}{\partial r} \\ \hat{M}_{12}^{21} &= \frac{\partial \hat{M}^{21}}{\partial \varphi} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{11} - r \hat{M}^{22} \\ \hat{M}_{11}^{12} &= \frac{\partial \hat{M}^{12}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{12} \\ \hat{M}_{12}^{22} &= \frac{\partial \hat{M}^{22}}{\partial \varphi} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{12} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{21} \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Na osnovu izvedenih vrijednosti za komponente sile N i sprega \hat{M} dobijaju se diferencijalne jednačine ravnoteže za kontravarijantne komponente

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N^{11}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N^{11} + \frac{\partial N^{21}}{\partial \varphi} - r N^{22} + \frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} N^{23} + \rho_0 F^1 &= 0 \\ \frac{\partial N^{12}}{\partial r} + \frac{2r}{r^2 + k^2} N^{12} + \frac{r}{r^2 + k^2} N^{21} + \frac{\partial N^{22}}{\partial \varphi} + \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} N^{13} + \rho_0 F^2 &= 0 \\ \frac{\partial N^{13}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N^{13} + \frac{\partial N^{23}}{\partial \varphi} - \frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} (N^{12} + N^{21}) + \rho_0 F^3 &= 0 \\ \frac{\partial \hat{M}^{11}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{11} + \frac{\partial \hat{M}^{21}}{\partial \varphi} - r \hat{M}^{22} - N^{13} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{M}^{12}}{\partial r} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{12} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}^{21} + \frac{\partial \hat{M}^{22}}{\partial \varphi} - N^{23} &= 0 \\ N^{12} - N^{21} + \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \hat{M}^{11} - \frac{k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \hat{M}^{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Veze između kontravarijantnih i fizičkih komponenti sila i momenata su oblika

$$N^{\alpha i} = \frac{N_{\langle \alpha i \rangle}}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}} \sqrt{A_{ii}}} \quad (\text{bez sumiranja po } \alpha, i)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N^{11} &= \frac{N_{<11>}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{11}}} = \frac{N_{<11>}}{1 \cdot 1} = N_{<11>} \\
 N^{12} &= \frac{N_{<12>}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}} = \frac{N_{<12>}}{\sqrt{r^2 + k^2}} \quad N^{21} = \frac{N_{<21>}}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\
 N^{22} &= \frac{N_{<22>}}{r^2 + k^2} \quad N^{13} = \frac{N_{<13>}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{33}}} = N_{<13>} \\
 N^{23} &= \frac{N_{<23>}}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\
 \hat{M}^{11} &= \hat{M}_{<11>} \quad \hat{M}^{12} = \frac{\hat{M}_{<12>}}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\
 \hat{M}^{21} &= \frac{\hat{M}_{<21>}}{\sqrt{r^2 + k^2}} \quad \hat{M}^{22} = \frac{\hat{M}_{<22>}}{r^2 + k^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Jednačine ravnoteže u fizičkim komponentama glase

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial N_{<11>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<11>} + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial N_{<21>}}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<22>} + \frac{k}{r^2 + k^2} N_{<23>} + \rho_0 F_{<1>} = 0 \\
 &\frac{\partial N_{<12>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} (N_{<12>} + N_{<21>}) + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial N_{<22>}}{\partial \varphi} + \\
 &\quad + \frac{k}{r^2 + k^2} N_{<13>} + \rho_0 F_{<2>} = 0 \\
 &\frac{\partial N_{<13>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<13>} + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial N_{<23>}}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{k}{r^2 + k^2} (N_{<12>} + N_{<21>}) + \rho_0 F_{<3>} = 0 \\
 &\frac{\partial \hat{M}_{<11>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<11>} + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial \hat{M}_{<21>}}{\partial \varphi} - \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<22>} - \\
 &\quad - N_{<13>} = 0 \\
 &\frac{\partial \hat{M}_{<12>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} (\hat{M}_{<12>} + \hat{M}_{<21>}) + \frac{1}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \frac{\partial \hat{M}_{<22>}}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - N_{<23>} = 0 \\
 &N_{<12>} - N_{<21>} + \frac{k}{r^2 + k^2} (M_{<11>} + M_{<22>}) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

U slučaju kada je helikoidalna ljuska opterećena ravnomjernim pritiskom u pravcu normale tj. $\rho_0 F_{<3>} = -P$ pretpostavlja se da presječna sila ne zavisi od koordinate φ . Tada se prethodne jednačine transformišu u sledeći sistem jednačina

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{<11>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<11>} - \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<22>} + \frac{k}{r^2 + k^2} N_{<23>} &= 0 \\ \frac{\partial N_{<12>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} (N_{<12>} + N_{<21>}) + \frac{k}{r^2 + k^2} N_{<13>} &= 0 \\ \frac{\partial N_{<13>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} N_{<13>} - \frac{k}{r^2 + k^2} (N_{<12>} + N_{<21>}) - P &= 0 \\ \frac{\partial \hat{M}_{<11>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<11>} - \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<22>} - N_{<13>} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{M}_{<12>}}{\partial r} + \frac{r}{r^2 + k^2} (\hat{M}_{<12>} + \hat{M}_{<21>}) - N_{<23>} &= 0 \\ N_{<12>} - N_{<21>} + \frac{k}{r^2 + k^2} (M_{<11>} + M_{<22>}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Ovdje se uvodi nešto drugačiji skup presječnih sila. Naime, svaki kovarijantni ili kontravarijantni tenzor drugog reda može biti predstavljen jedinstveno kao suma simetričnog i kososimetričnog tenzora

$$\left. \begin{aligned} T^{ij} &= T^{(ij)} + T^{[ij]} \\ T^{(ij)} &= \frac{1}{2} (T^{ij} + T^{ji}) \\ T^{[ij]} &= \frac{1}{2} (T^{ij} - T^{ji}) \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Oznake $T^{(ij)}$ i $T^{[ij]}$ predstavljaju simetrični i kososimetrični dio od T^{ij} respektivno. U tom smislu, zbog određenosti teorije smatra se da je kososimetrični dio sprega jednak nuli tj.

$$\hat{M}^{[\alpha\beta]} = 0 \quad (3.64)$$

Onda slijedi da je

$$\hat{M}^{12} = \hat{M}^{(12)} = \hat{M}^{(21)} = \hat{M}^{21}$$

Odnosno u fizičkim komponentama

$$\hat{M}_{<12>} = \hat{M}_{<21>} \quad (3.65)$$

Veza između $N^{\alpha\beta}$ i $\hat{M}^{\gamma\alpha}$ glasi

$$N^{\alpha\beta} = \hat{N}^{\alpha\beta} - \hat{M}^{\gamma\alpha} B_{\gamma}^{\beta} \quad (3.66)$$

Ovdje je $\hat{N}^{\alpha\beta}$ simetrična presječna sila za koju važi

$$\hat{N}^{\alpha\beta} = \hat{N}^{\beta\alpha} \quad (3.67)$$

$$N^{11} = \hat{N}^{11} - \hat{M}^{\gamma 1} B_{\gamma}^1 = \hat{N}^{11} - \hat{M}^{11} B_1^1 - \hat{M}^{21} B_2^1 = \hat{N}^{11} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \hat{M}^{12}$$

$$N^{22} = \hat{N}^{22} - \hat{M}^{\gamma 2} B_{\gamma}^2 = \hat{N}^{22} - \hat{M}^{12} B_1^2 - \hat{M}^{22} B_2^2 = \hat{N}^{22} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \hat{M}^{12}$$

$$N^{12} = \hat{N}^{12} - \hat{M}^{\gamma 1} B_{\gamma}^2 = \hat{N}^{12} - \hat{M}^{11} B_1^2 - \hat{M}^{21} B_2^2 = \hat{N}^{12} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \hat{M}^{11}$$

$$N^{21} = \hat{N}^{21} - \hat{M}^{\gamma 2} B_{\gamma}^1 = \hat{N}^{12} - \hat{M}^{12} B_1^1 - \hat{M}^{22} B_2^1 = \hat{N}^{12} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \hat{M}^{22}$$

ili u fizičkim komponentama

$$\left. \begin{aligned} N_{<11>} &= \hat{N}_{<11>} + \frac{k}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<12>} \\ N_{<22>} &= \hat{N}_{<22>} + \frac{k}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<12>} \\ N_{<12>} &= \hat{N}_{<12>} + \frac{k}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<11>} \\ N_{<21>} &= \hat{N}_{<21>} + \frac{k}{r^2 + k^2} \hat{M}_{<22>} \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Zamjenom $N_{<23>}$ iz (3.62)₅ u (3.62)₁ i $N_{<13>}$ iz (3.62)₄ u (3.62)₂ i (3.62)₃ a uzimajući u obzir relacije (3.65) i (3.68) dobijaju se sledeće tri diferencijalne jednačine ravnoteže

$$\frac{d\hat{N}_{<11>}}{dr} + \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{N}_{<11>} - \frac{r}{r^2 + k^2} \hat{N}_{<22>} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}_{<12>}}{dr} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{d\hat{N}_{<12>}}{dr} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \hat{N}_{<12>} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}_{<11>}}{dr} = 0 \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{M}_{<11>}}{dr^2} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}_{<11>}}{dr} - \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}_{<22>}}{dr} - \frac{2k^2}{(r^2 + k^2)^2} \hat{M}_{<22>} - \\ - \frac{2k}{r^2 + k^2} \hat{N}_{<12>} - P = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Do ovih jednačina se moglo doći korišćenjem sistema diferencijalnih jednačina u restriktivnoj teoriji ljuski, sa duplim kovarijantnim diferenciranjem, što je zbog složene procedure izvođenja u naprijed izloženom postupku izbjegnuto.

3.4. Konstitutivne relacije

U restriktivnoj teoriji ljuski konstitutivne relacije imaju oblik

$$\hat{N}^{\alpha\beta} = CH^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} \quad (3.72)$$

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = -BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \overline{\kappa}_{\gamma\delta} \quad (3.73)$$

gdje je

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left\{ A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma} + \nu \left[2A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} - A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} - A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma} \right] \right\} \quad (3.74)$$

C i B predstavljaju krutosti na istezanje i savijanje i određene su relacijama

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad (3.75)$$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.76)$$

Razvijeni izrazi za karakteristične presječne sile glase

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}^{12} &= CH^{12\gamma\delta} e_{\gamma\delta} = C(H^{1211} e_{11} + H^{1212} e_{12} + H^{1221} e_{21} + H^{1222} e_{22}) \\ \hat{M}^{11} &= -BH^{11\gamma\delta} \bar{\kappa}_{\gamma\delta} = -B(H^{1111} \bar{\kappa}_{11} + H^{1112} \bar{\kappa}_{12} + H^{1121} \bar{\kappa}_{21} + H^{1122} \bar{\kappa}_{22}) \\ \hat{M}^{22} &= -BH^{22\gamma\delta} \bar{\kappa}_{\gamma\delta} = -B(H^{2211} \bar{\kappa}_{11} + H^{2212} \bar{\kappa}_{12} + H^{2221} \bar{\kappa}_{21} + H^{2222} \bar{\kappa}_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Preostale sile \hat{N}^{11} i \hat{N}^{22} i spreg \hat{M}^{12} jednostavno se dobijaju tako što se u odgovarajućem izrazu sa istim indeksima zamjenjuju B sa C kao i $-\bar{\kappa}_{\gamma\delta}$ sa $e_{\gamma\delta}$ i obrnuto. Izrazi za karakteristične kombinacije indeksa $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$ koji se pojavljuju u gornjim izrazima su

$$\begin{aligned} H^{1211} &= 0 & H^{1212} &= \frac{1-\nu}{2} A^{11} A^{22} & H^{1221} &= \frac{1-\nu}{2} A^{11} A^{22} \\ H^{1222} &= 0 & H^{1111} &= (A^{11})^2 & H^{1112} &= 0 & H^{1121} &= 0 \\ H^{1122} &= \nu A^{11} A^{22} & H^{2211} &= \nu A^{11} A^{22} & H^{2212} &= 0 & H^{2221} &= 0 \\ H^{2222} &= (A^{22})^2 \end{aligned}$$

Izrazi za kontravarijantne komponente presječnih sila glase

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}^{11} &= -B \left[(A^{11})^2 \bar{\kappa}_{11} + \nu A^{11} A^{22} \bar{\kappa}_{22} \right] \\ \hat{M}^{22} &= -B \left[(A^{22})^2 \bar{\kappa}_{22} + \nu A^{11} A^{22} \bar{\kappa}_{11} \right] \\ \hat{N}^{12} &= C(1-\nu) A^{11} A^{22} e_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Koristeći izraze (3.45), (3.48)₃ i (3.60)_{2,5,7} prevode se izrazi (3.78) sa kontravarijantnim komponentama u izraze sa fizičkim komponentama presječnih sila

$$\begin{aligned} \hat{M}_{<11>} &= -BA_{11} \left[\frac{1}{(A_{11})^2} A_{11} \bar{\kappa}_{<11>} + \nu \frac{1}{A_{11}} \frac{1}{A_{22}} A_{22} \bar{\kappa}_{<22>} \right] \\ \hat{M}_{<22>} &= -BA_{22} \left[\frac{1}{(A_{22})^2} A_{22} \bar{\kappa}_{<22>} + \nu \frac{1}{A_{11}} \frac{1}{A_{22}} A_{11} \bar{\kappa}_{<11>} \right] \end{aligned}$$

$$\hat{N}_{<12>} = C\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}(1-\nu)\frac{1}{A_{11}}\frac{1}{A_{22}}\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}$$

$$\hat{M}_{<11>} = -B[\bar{\kappa}_{<11>} + \nu\bar{\kappa}_{<22>}] \quad (3.79)$$

$$\hat{M}_{<11>} = -B[\bar{\kappa}_{<22>} + \nu\bar{\kappa}_{<11>}] \quad (3.80)$$

$$\hat{N}_{<12>} = C(1-\nu)e_{<12>} \quad (3.81)$$

3.5. Diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske

Rješavanje diferencijalnih jednačina (3.69), (3.70) i (3.71) nakon uvrštavanja konstitutivnih relacija za komponente presječnih sila omogućilo bi određivanje polja svih pomjeraja zavojne ljuske. Razmatranje sistema diferencijalnih jednačina u ovom slučaju s obzirom na broj raspoloživih graničnih uslova dovelo bi do izuzetno komplikovanih rezolventnih jednačina po pomjerajima visokog reda. Zbog navedenog u radu se koristi jednačina (3.71). Konstitutivne relacije za presječne sile koje ulaze u tu jednačinu date su relacijama (3.79), (3.80) i (3.81). Pošto se razmatra samo savijanje helikoidalne ljuske pretpostavlja se da su pomjeraji $u_{<1>}$ i $u_{<2>}$ mali u poređenju sa pomjerajem u_3 što je pretpostavka u teoriji plitkih ljuski. Zavojna ljuska predstavlja karakterističan primjer plitke ljuske jer je Gausova krivina zavojne površi definisana izrazom

$$K = B_1^1 B_2^2 - B_2^1 B_1^2 = -\frac{k^2}{(r^2 + k^2)^2} \quad (3.82)$$

mala veličina, naročito za veće vrijednosti poluprečnika r . Koristeći konstitutivne relacije (3.79), (3.80) i (3.81) kao i vezu između odgovarajućih veličina deformacija i pomjeraja u_3 datu sa relacijama (3.51)

izvode se u ovom radu relacije za fizičke komponente presječnih sila i momenata kod zavojne ljuske

$$\hat{N}_{<12>} = C(1-\nu) \frac{k}{r^2 + k^2} u_3 \quad (3.83)$$

$$\hat{M}_{<11>} = -B \left[\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{\nu r}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(\nu+1)}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \right] \quad (3.84)$$

$$\hat{M}_{<22>} = -B \left[\nu \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(\nu+1)}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \right] \quad (3.85)$$

Koristeći (3.71), (3.60)_{5,8} i (3.60)₂ napisan za \hat{N}^{12} dobija se diferencijalna jednačina po kovarijantnim komponentama presječnih sila

$$\frac{d^2 \hat{M}^{11}}{dr^2} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}^{11}}{dr} - r \frac{d\hat{M}^{22}}{dr} - 2\hat{M}^{22} - \frac{2k}{(r^2 + k^2)^{1/2}} \hat{N}^{12} - P = 0 \quad (3.86)$$

Zamjenom vrijednosti za deformacione veličine iz relacija (3.50)_{1,3} i (3.46)₃ u relacije (3.78) dobija se veza između kontravarijantnih komponenti presječnih sila i pomjeraja u_3

$$\hat{N}^{12} = C(1-\nu) \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} u_3 \quad (3.87)$$

$$\hat{M}^{11} = -B \left[\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{\nu r}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(\nu+1)}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \right] \quad (3.88)$$

$$\hat{M}^{22} = -B \left[\frac{\nu}{r^2 + k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r}{(r^2 + k^2)^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(\nu+1)}{(r^2 + k^2)^3} u_3 \right] \quad (3.89)$$

Poslije sređivanja (postupak je dat u Prilogu 1) konačno se dolazi do diferencijalne jednačine savijanja helikoidalne ljuske u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \frac{r^2 + k^2(\nu + 1)}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r[r^2 + k^2(3\nu + 4)]}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \\ + \left[\frac{2k^2(\nu + 1)(3k^3 - 8r^2)}{(r^2 + k^2)^4} + \frac{24k^2(1 - \nu)}{h^2(r^2 + k^2)^2} \right] u_3 + \frac{P}{B} = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Ovo je originalna diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske po pomjeraju u_3 . Ispravnost izvedene diferencijalne jednačine potvrđuje činjenica da se u specijalnim slučajevima za $k=0$ i $k \rightarrow \infty$ ona svodi na poznate diferencijalne jednačine savijanja kružne i pravougaone ploče.

U specijalnom slučaju, za $k=0$ dobija se

$$\frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{P}{B} = 0$$

odnosno

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_3}{dr} \right) \right] \right] \right\} = -\frac{P}{B} \quad (3.91)$$

što predstavlja poznatu diferencijalnu jednačinu savijanja kružne ploče pri simetričnom opterećenju.

U drugom specijalnom slučaju za $k \rightarrow \infty$ dobija se

$$\frac{d^4 u_3}{dr^4} = -\frac{P}{B} \quad (3.92)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu savijanja beskonačno duge ploče u cilindričnu površ. U ovom slučaju savijanje ploče je ekvivalentno savijanju grednog elementa jedinične širine, isječenog iz ploče upravno na njen pravac prostiranja i čija je krutost na savijanje B . Veza između momenata

$$M_{<22>} = -\nu B \frac{d^2 u_3}{dr^2} = \nu M_{<11>}$$

Ovo je posljedica činjenice da je deformacija u uzdužnom pravcu jednaka nuli da bi se održala neprekidnost ploče prilikom savijanja.

3.6. Granični uslovi kod savijanja zavojne ljuske

Ovdje se definišu granični uslovi za postavljenu diferencijalnu jednačinu savijanja helikoidalne ljuske. Pošto je jednačina četvrtog reda, potrebna su četiri granična uslova. Na kraju ljuske, $r=a$, postavljaju se dva granična uslova po pomjeraju, a na kraju ljuske, $r=b$, dva granična uslova po presječnim silama, koji se zbog poznatih veza između presječnih sila i pomjeraja svode na uslove po pomjeraju u_3 .

Pošto su pomjeraji $u_{\langle\alpha\rangle}$ zanemareni, granični uslovi imaju oblik na kraju ljuske za $r=a$

$$u_3 = {}_0u_3 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial v_0} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial v_0} \right) \quad (3.94)$$

na kraju ljuske za $r=b$

$${}_0G = \hat{M}^{\alpha\gamma} {}_0v_\alpha {}_0v_\gamma \quad (3.95)$$

$${}_0P^3 = {}_0v_\alpha \left(\hat{M}_{|\beta}^{\beta\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\bar{\epsilon}_{\beta\gamma} \hat{M}^{\alpha\beta} {}_0v_\alpha {}_0v_\gamma \right] \quad (3.96)$$

Indeksom nula ispred odgovarajućih izraza predstavljena je njihova vrijednost na graničnim krivama za $r=a$ ili $r=b$. Odgovarajući članovi u graničnim uslovima predstavljaju: ${}_0v_\alpha$ komponente spoljašnje jedinične normale ${}_0\mathbf{v}$ na graničnu krivu na referentnoj (nedeformisanoj) površi; $\partial/\partial v_0$ i $\partial/\partial s_0$ izvode po pravcu duž normale i tangente na graničnu krivu; ${}_0G$ i ${}_0P^3$ spreg i silu u pravcu tangente i binormale na graničnoj krivoj respektivno i $\bar{\epsilon}_{\beta\gamma}$ apsolutni permutacioni simboli koji se određuju prema relaciji (3.56).

U ovom slučaju granična kriva je zavojna linija. Tada se pokazuje da je jedinična normala

$${}_0\mathbf{v} = -\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial s^2} \quad (3.97)$$

za vrijednost dužine luka zavojnice

$$s = \sqrt{b^2 + k^2} \varphi$$

Izvodi vektora položaja \mathbf{R} tačaka zavojnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} &= -\mathbf{i} \frac{b}{\sqrt{b^2 + k^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{b^2 + k^2}} + \mathbf{j} \frac{b}{\sqrt{b^2 + k^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{b^2 + k^2}} + \mathbf{k} \frac{k}{\sqrt{b^2 + k^2}} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial s^2} &= -\mathbf{i} \frac{b}{\sqrt{b^2 + k^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{b^2 + k^2}} - \mathbf{j} \frac{b}{\sqrt{b^2 + k^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{b^2 + k^2}} \end{aligned}$$

Izraz za krivinu \bar{k} zavojne linije

$$\bar{k} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = \frac{b}{b^2 + k^2} \quad (3.98)$$

Sada je vektor spoljašnje jedinične normale

$$\left. \begin{aligned} {}_0\mathbf{v} &= {}_0v_\alpha \mathbf{A}^\alpha = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \\ {}_0\mathbf{v} &= {}_0v_1 \mathbf{A}^1 + {}_0v_2 \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.99)$$

Vrijednosti za komponente spoljašnje jedinične normale

$${}_0v_1 = 1 \quad {}_0v_2 = 0 \quad (3.100)$$

Pošto se u ovom slučaju jedinična normala ${}_0\mathbf{v}$ poklapa sa baznim vektorom \mathbf{A}_1 izvod po pravcu v_0 se poklapa sa izvodom po r , izvod po pravcu s_0 je proporcionalan sa izvodom po φ , jer je $ds_0 = \sqrt{b^2 + k^2} d\varphi$. Pošto je zanemaren izvod po φ od svih veličina kao male vrijednosti onda otpada ovaj izvod duž tangente na zavojnicu. Zavojna linija na kraju za $r=b$ je slobodna od sila i spregova pa je ${}_0G=0$ i ${}_0P^3=0$. Zavojna površ na kraju za $r=a$ je uklještena pa je ${}_0u_3=0$ i ${}_0(du_3/dr)=0$.

Granični uslov (3.95) sada ima oblik

$$0 = \hat{M}^{\alpha\gamma}{}_{\alpha 0} v_{\alpha 0} v_{\gamma} \\ \hat{M}^{11} = 0 \quad (3.101)$$

Granični uslov (3.96) sada ima oblik

$$0 = v_{\alpha} \left(\hat{M}_{\beta\alpha}^{\beta\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\bar{\epsilon}_{\beta\gamma} \hat{M}^{\alpha\beta}{}_{\alpha 0} v_{\alpha 0} v_{\gamma} \right) \\ v_1 \left(\hat{M}_{11}^{11} + \hat{M}_{12}^{21} \right) + v_2 \left(\hat{M}_{11}^{12} + \hat{M}_{12}^{22} \right) = 0 \\ \hat{M}_{11}^{11} + \hat{M}_{12}^{21} = 0 \quad (3.102)$$

Zamjenom vrijednosti za kovarijantne izvode komponenti momenata prema relacijama (3.58)_{1,2} dobija se granični uslov

$$\frac{d\hat{M}^{11}}{dr} + \hat{M}^{11} \frac{r}{r^2 + k^2} - \hat{M}^{22} r = 0 \quad (3.103)$$

Zamjenom vrijednosti za komponente momenata izražene preko pomjeraja u_3 a prema relacijama (3.87) i (3.88) u relacije (3.101) i (3.103), konačno se dobijaju četiri granična uslova za diferencijalnu jednačinu savijanja zavojne ljuske

$$u_3 = 0 \quad (\text{za } r=a) \quad (3.104)$$

$$\frac{du_3}{dr} = 0 \quad (\text{za } r=a) \quad (3.105)$$

$$\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{vr}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(v+1)}{(r^2 + k^2)^2} u_3 = 0 \quad (\text{za } r=b) \quad (3.106)$$

$$\frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{r}{r^2 + k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \frac{1}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)}{(r^2 + k^2)^3} u_3 = 0 \quad (\text{za } r=b) \quad (3.107)$$

3.7. Matematički model za numeričko rješavanje diferencijalne jednačine

Rješavanje diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljuske (3.90) je otežano zbog toga što su granični uslovi definisani jednačinama (3.104), (3.105), (3.106) i (3.107) dati na oba kraja segmenta na kojem se rješava diferencijalna jednačina, odnosno u tačkama a i b i ne mogu se svesti na jednu tačku. Diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske se rješava metodom konačnih razlika.

Na segmentu $[a,b]$ uzima se N ravnomjerno raspoređenih tačaka $a=r_0, r_1, r_2, \dots, r_{N-1}=b, r_i=a+i(b-a)/(N-1)$. Vrijednosti funkcije $u_3=u_3(r)=u(r)$ u ovim tačkama označavaju se sa $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ pri čemu je $u_i=u(r_i)$. Sada se u polaznoj jednačini (3.90) zamjenjuju vrijednosti izvoda funkcije $u(r)$ sa njihovim aproksimacijama

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_i} &\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} \\ \frac{d^2u}{dr^2} \Big|_{r=r_i} &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta^2} \\ \frac{d^3u}{dr^3} \Big|_{r=r_i} &\approx \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta^3} \\ \frac{d^4u}{dr^4} \Big|_{r=r_i} &\approx \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta^4} \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

gdje je $\Delta = \frac{b-a}{N-1}$

Zamjenom se dobija

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{\Delta^4} + \frac{r_i}{\Delta^3(r_i^2 + k^2)} \right] u_{i+2} + \left\{ -\frac{4}{\Delta^4} - \frac{2r_i}{\Delta^3(r_i^2 + k^2)} - \frac{r_i^2 + k^2(v+1)}{\Delta^2(r_i^2 + k^2)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_i[r_i^2 + k^2(3v+4)]}{\Delta(r_i^2 + k^2)^3} \right\} u_{i+1} + \left\{ \frac{6}{\Delta^4} + \frac{2r_i + 2k^2(v+1)}{\Delta^2(r_i^2 + k^2)^2} - \frac{r_i[r_i^2 + k^2(3v+4)]}{\Delta(r_i^2 + k^2)^3} \right. \\
 & \left. + \frac{2k^2(v+1)(3k^2 - 8r_i^2)}{(r_i^2 + k^2)^4} + \frac{24k^2(1-v)}{h^2(r_i^2 + k^2)^2} \right\} u_i + \left[-\frac{4}{\Delta^4} + \frac{2r_i}{\Delta^3(r_i^2 + k^2)} - \right. \\
 & \left. - \frac{r_i^2 + k^2(v+1)}{\Delta^2(r_i^2 + k^2)^2} \right] u_{i-1} + \left[\frac{1}{\Delta^4} - \frac{r_i}{\Delta^3(r_i^2 + k^2)} \right] u_{i-2} = -\frac{P}{B}
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Dobijen je sistem od N-4 jednačine po promjenljivim $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$, jer indeks i ne može biti manji od 2 niti veći od N-3, zato što se tada ne bi raspolagalo sa vrijednostima funkcije u_{i-2} odnosno u_{i+2} koje se pojavljuju u jednačini. Zbog navedenog u ovom sistemu i uzima vrijednosti 2, 3, \dots N-2, N-3. Sistem je petodijagonalan što se koristi da se pojednostavi njegovo rješavanje. Da bi sistem bio određen potrebne su još četiri dodatne jednačine koje se dobijaju iz graničnih uslova. Treba voditi računa da se ne naruši petodijagonalna struktura sistema.

Prvi granični uslov (3.104) daje jednačinu

$$u_0 = 0 \tag{3.110}$$

Drugi granični uslov (3.105) se mora transformisati jer se u njemu javlja prvi izvod funkcije $u(r)$. S obzirom da je ovaj uslov dat u tački $r=a$, mora se voditi računa da se prilikom aproksimacije izvoda mogu koristiti samo one vrijednosti funkcije za $r \geq a$ tj. vrijednosti u_0, u_1, \dots . Koristi se aproksimacija trećeg reda, odnosno prvi izvod funkcije $u(r)$ u tački $r=a$ aproksimira se sa

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=r_0=r_a} \approx \frac{1}{6} \frac{-11u_0 + 18u_1 - 9u_2 + 2u_3}{\Delta} \tag{3.111}$$

Dobija se i drugi granični uslov u obliku

$$\frac{-11}{6\Delta}u_0 + \frac{3}{\Delta}u_1 - \frac{3}{2\Delta}u_2 + \frac{1}{3\Delta}u_3 = 0 \quad (3.112)$$

Treći i četvrti uslov (3.106) i (3.107) koriste vrijednosti funkcije i njenih izvoda do trećeg reda. Iz istih razloga koji su ranije navedeni, mora se koristiti aproksimacija izvoda sa vrijednostima funkcije $u_{N-1}, u_{N-2} \dots$. Da bi se očuvala petodijagonalna struktura sistema, u trećem graničnom uslovu (3.106) izvodi se aproksimiraju aproksimacijama trećeg reda

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_{N-1}=b} &\approx \frac{1}{6} \frac{11u_{N-1} - 18u_{N-2} + 9u_{N-3} - 2u_{N-4}}{\Delta} \\ \frac{d^2u}{dr^2} \Big|_{r=r_{N-1}=b} &\approx \frac{2u_{N-1} - 5u_{N-2} + 4u_{N-3} - u_{N-4}}{\Delta^2} \\ \frac{d^3u}{dr^3} \Big|_{r=r_{N-1}=b} &\approx \frac{u_{N-1} - 3u_{N-2} + 3u_{N-3} - u_{N-4}}{\Delta^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

Na ovaj način dobija se treći granični uslov u obliku

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{1}{\Delta^3} - 2\frac{r_{N-1}}{\Delta^2(r_{N-1}^2 + k^2)} + \frac{1}{3\Delta} \frac{1}{(r_{N-1}^2 + k^2)} \right] u_{N-4} + \\ &+ \left[\frac{3}{\Delta^3} + 8\frac{r_{N-1}}{\Delta^2(r_{N-1}^2 + k^2)} + \frac{3}{2\Delta} \frac{1}{(r_{N-1}^2 + k^2)} \right] u_{N-3} + \\ &+ \left[-\frac{3}{\Delta^3} - 10\frac{r_{N-1}}{\Delta^2(r_{N-1}^2 + k^2)} + 3\frac{1}{\Delta} \frac{1}{(r_{N-1}^2 + k^2)} \right] u_{N-2} + \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta^3} + 4\frac{r_{N-1}}{\Delta} \frac{1}{(r_{N-1}^2 + k^2)} + \frac{11}{6\Delta} \frac{1}{(r_{N-1}^2 + k^2)} + 4\frac{k^2(v+1)r_{N-1}}{(r_{N-1}^2 + k^2)^3} \right] u_{N-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

U četvrtom graničnom uslovu (3.107) petodijagonalnost sistema se očuva ako se uzme aproksimacija izvoda drugog reda

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_{N-1}=b} &\approx \frac{1}{2} \frac{3u_{N-1} - 4u_{N-2} + u_{N-3}}{\Delta} \\ \frac{d^2u}{dr^2} \Big|_{r=r_{N-1}=b} &\approx \frac{u_{N-1} - 2u_{N-2} + u_{N-3}}{\Delta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

Tako se dobija četvrti granični uslov u obliku

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{2} \frac{vr_{N-1}}{\Delta(r_{N-1}^2 + k^2)} \right] u_{N-3} + \\ &+ \left[-\frac{2}{\Delta^2} - 2 \frac{vr_{N-1}}{\Delta^2(r_{N-1}^2 + k^2)} \right] u_{N-2} + \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta^2} + \frac{3}{2} \frac{vr_{N-1}}{\Delta^2(r_{N-1}^2 + k^2)} - \frac{k^2(v+1)}{(r_{N-1}^2 + k^2)^2} \right] u_{N-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Uzimanjem prve dvije dodatne jednačine (dobijene na osnovu uslova u tački $r=a$), zatim $N-4$ jednačine (dobijene aproksimacijom polazne diferencijalne jednačine) i na kraju druge dvije dodatne jednačine (dobijene na osnovu uslova u tački $r=b$) dobija se sistem od N jednačina sa N nepoznatih. Njegovim rješavanjem dobijaju se vrijednosti funkcije $u_{(r)}$ u N tačaka. Očuvana je petodijagonalna struktura sistema, pa se ta osobina može iskoristiti da se riješi na efikasan način primjenom Gausovog sistema eliminacije. Na taj način je polazni problem rješavanja diferencijalne jednačine sveden na rješavanje sistema linearnih jednačina.

3.7.1. Realizacija matematičkog modela i dobijanje rezultata

Za implementaciju navedenog matematičkog modela za rješavanje razmatrane diferencijalne jednačine (3.90) korišćen je programski paket MATLAB, najviše zbog njegove jednostavnosti i velikih mogućnosti

analize dobijenih rezultata. Programski paket MATLAB u ovom slučaju daje dovoljno tačna rješenja s obzirom na karakter problema i veoma je efikasan za realizaciju inženjerskih aplikacija. Program za rješavanje diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljuske po izloženom matematičkom modelu dat je u Prilogu 2. Ovaj problem riješio bi se i korišćenjem programskog paketa koji nudi rad sa većom tačnošću, ili alternativno, korišćenjem drugog matematičkog modela, ali kao što je već navedeno, za analize koje se provode u ovom radu sasvim je postignuta dovoljna tačnost.

Provjera ispravnosti pristupa rješavanju posmatrane diferencijalne jednačine daje se rješavanjem dva granična slučaja za $k=0$ i $k \rightarrow \infty$. U oba ova slučaja posmatrana jednačina se svodi na oblik koji ima rješenje u zatvorenom obliku, tako da se poređenjem tog rješenja sa rezultatima dobijenim pomoću opisanog metoda može potvrditi vjerodostojnost metoda i procijeniti greška.

Za $k=0$ dobija se jednačina (3.91) za koju granični uslovi glase

$$\left. \begin{aligned} u(r) &= 0 & \frac{du(r)}{dr} &= 0 & \text{za } r &= a \\ \frac{d^3u(r)}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2u(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du(r)}{dr} &= 0 & \frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{du(r)}{dr} &= 0 & \text{za } r &= b \end{aligned} \right\} \quad (3.117)$$

Opšte rješenje ove jednačine je

$$u(r) = -\frac{1}{64} \frac{P}{B} r^4 + C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln(r) + C_4 r^2 \ln(r) \quad (3.118)$$

Uvrštavanjem rješenja u jednačine graničnih uslova dobija se sistem jednačina iz kojih se određuju integracione konstante

$$C_1 = -46.42488020$$

$$C_2 = -0.003699091754$$

$$C_3 = 11.7317756$$

$$C_4 = 0.000637088242$$

Poređenjem rezultata dobijenih na ovaj način sa rezultatima dobijenim primjenom opisanog numeričkog metoda dobija se da maksimalna apsolutna greška iznosi $1.2 \mu\text{m}$ dok relativna greška iznosi oko 0.25% . Za praktične inženjerske analize, na osnovu veličine greške, se može smatrati da su dobijeni rezultati apsolutno tačni.

Za $k \rightarrow \infty$ dobija se jednačina (3.92) za koju granični uslovi imaju oblik

$$\left. \begin{array}{l} u(r) = 0 \quad \frac{du(r)}{dr} = 0 \quad \text{za } r = a \\ \frac{d^3u(r)}{dr^3} = 0 \quad \frac{d^2u(r)}{dr^2} = 0 \quad \text{za } r = b \end{array} \right\} \quad (3.119)$$

Opšte rješenje ove jednačine je

$$u(r) = -\frac{1}{24} \frac{P}{B} r^4 + C_1 r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + C_4 \quad (3.120)$$

Iz graničnih uslova određuju se integracione konstante

$$C_1 = 0.4265625627 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = -0.001279687688$$

$$C_3 = 0.1633094771$$

$$C_4 = -7.452207932$$

Poredeći ovaj rezultat sa rezultatom dobijenim numeričkim putem, pri čemu je uzeta vrijednost za k reda 10^{10} , dobija se da je maksimalna apsolutna greška $1.1 \mu\text{m}$, a relativna greška iznosi oko 0.25% . Posmatranjem ova dva ekstremna slučaja može se zaključiti da navedeni metod daje vjerodostojno rješenje postavljenog problema. Rješenja dobijena numeričkim rješavanjem diferencijalne jednačine u odnosu na rješenja u zatvorenom obliku se mogu smatrati apsolutno tačnim.

3.7.2. Rezultati proračuna u funkciji varijacije geometrijskih parametara modela zavojne ljuske

Program za numeričko rješavanje diferencijalne jednačine (3.90) napisan u programskom paketu MATLAB dat je u Prilogu 2. Korišćenjem ovog programa sa funkcijama za automatizovano određivanje geometrijskih parametara zavojne ljuske, u Tabeli 3.1 su određene vrijednosti h_h na osnovu kriterijuma dozvoljenog maksimalnog napona u radijalnom pravcu ($\sigma_d=150 \text{ N/mm}^2$) za različite geometrijske parametere. Program omogućava proračun modela zavojne ljuske za različite materijale i u odnosu na bilo koju vrijednost dozvoljenog napona u radijalnom pravcu.

Razmatrano je opterećenje normalnim pritiskom $p=0.15 \text{ N/mm}^2$, hod $H=140 \text{ mm}$, modul elastičnosti $E=200000 \text{ N/mm}^2$ i Poisson-ov koeficijent $\nu=0.3$. Vrijednost napona u radijalnom pravcu se određuje na osnovu vrijednosti momenta po jedinici dužine u razmatranom presjeku korišćenjem relacije

$$\sigma_r = \frac{6M_{<11>}}{h_h^2} \quad (3.121)$$

Zbog postojanja poluprečnika zaobljenja na ukliještenom kraju u realnim konstrukcijskim elementima oblika zavojne ljuske, kojim se eliminišu negativni uticaji koncentracije napona, vrijednost maksimalnog napona u radijalnom pravcu se računa na osnovu relacije (3.121) u tačkama sa koordinatom $r=a+h_h$.

Na slikama 3.1 do 3.9 dati su dijagrami pomjeraja tačaka zavojne ljuske za različite vrijednosti parametara. Na slikama 3.10 do 3.18 dati su dijagrami zavisnosti napona u radijalnom pravcu za različite vrijednosti geometrijskih parametara zavojne ljuske.

Tabela 3.1 Vrijednosti proračunatih debljina zavojne ljuske [mm]
za različite modele

		MODEL ZAVOJNE LJUSKE											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a[mm]		130	280	30	80	130	230	30	30	30	5	100	10
b[mm]		200	350	100	200	300	550	200	250	300	80	350	60
Debljina h_k	Izrač.	3.958	3.815	4.295	7.212	10.138	19.165	10.963	14.305	17.623	4.904	15.475	3.101
	Usvoj.	4	4	4.5	7.5	10.5	19.5	11	14.5	17.5	5	15.5	3.5

Na slici 3.1 dat je dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika za veličine ravnomjernog pritiska 0.1, 0.12, 0.15, 0.18, 0.2 i 0.25 N/mm². Na ovom dijagramu se analizira zavojna ljuska model 1 iz Tabele 3.1. Na slici 3.2 prikazan je dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika za vrijednosti debljine ljuske 2, 3, 4, 5, 6 mm za zavojnu ljusku model 1. Za ovu zavojnu ljusku i za usvojenu debljinu $h_k=4$ mm na slici 3.3 je prikazan dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika za visine zavojne linije $H=0$, $H=140$ mm i $H \rightarrow \infty$, a na slici 3.4 prikazana je razlika pomjeraja $u(H=0) - u(H=140)$ za razmatrani model. Na slikama 3.5 i 3.6 dat je dijagram zavisnosti pomjeraja od hoda zavojne ljuske modela 1 za

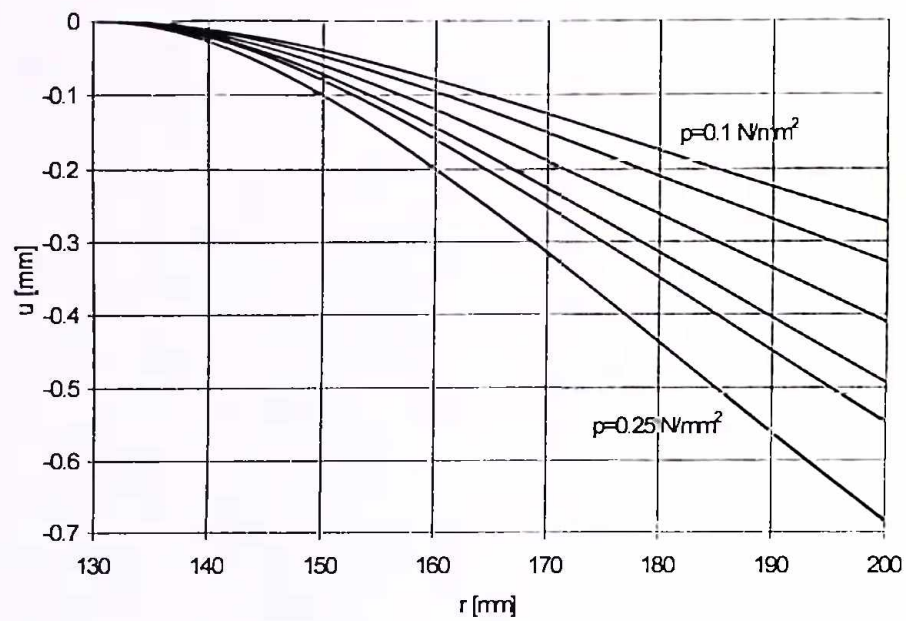
vrijednosti $r=a+1/3(b-a)$ i za $r=b$, a na slikama 3.7 i 3.8 je na isti način analiziran model 7.

Na slici 3.9 je dat dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika, a na slici 3.10 dijagram zavisnosti napona u radijalnom pravcu od poluprečnika za model prstenaste ploče ukliještene na unutrašnjoj konturi sa sledećim parametrima: $a=136$ mm, $b=200$ mm i $h_h=4.15$ mm.

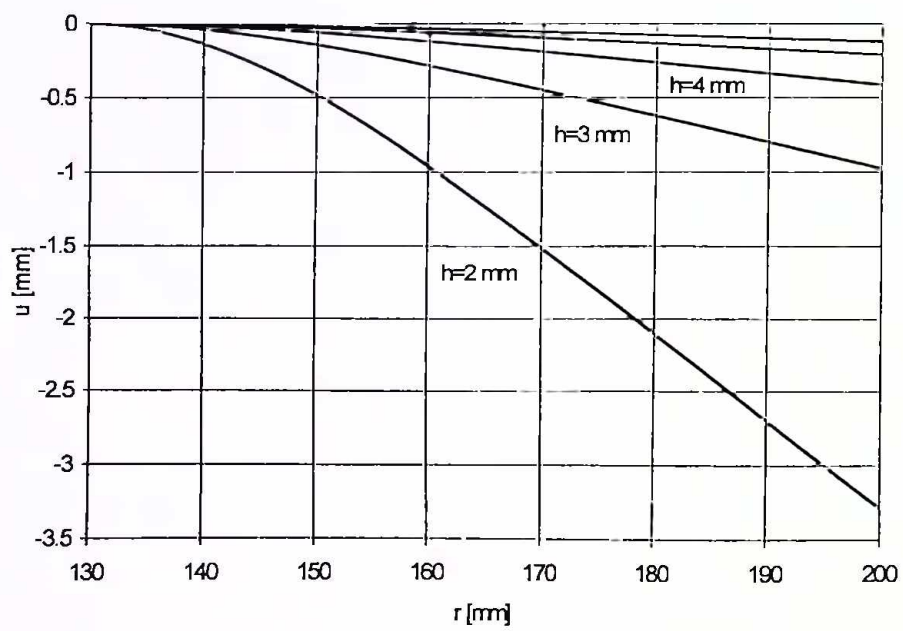
Na slici 3.11 je data zavisnost napona u radijalnom pravcu od poluprečnika za vrijednosti $H=0$, $H=140$ mm i $H\rightarrow\infty$ modela 1. Na slici 3.12 je data zavisnost napona u radijalnom pravcu od poluprečnika kod modela 1 pri čemu su za vrijednosti $H=0$, $H=140$ mm i $H\rightarrow\infty$ uzete vrijednosti debljine ljuske $h_h=4.15$ mm, $h_h=3.6$ mm i $h_h=4$ mm respektivno.

Na slici 3.13 je prikazan dijagram zavisnosti maksimalnog napona u radijalnom pravcu od visine hoda zavojne ljuske za pritiske 0.1, 0.15 i 0.25 N/mm² za model 1. Na slici 3.14 je dat uporedni dijagram zavisnosti maksimalnih napona u radijalnom pravcu od visine hoda helikoidalne ljuske za modele 1, 2 i 3 (prema proračunatim debljinama zavojnih ljuski). Na slikama 3.15 i 3.16 su date prethodne zavisnosti za modele 4, 5 i 6 i modele 7, 8 i 9 respektivno (prema proračunatim debljinama zavojnih ljuski).

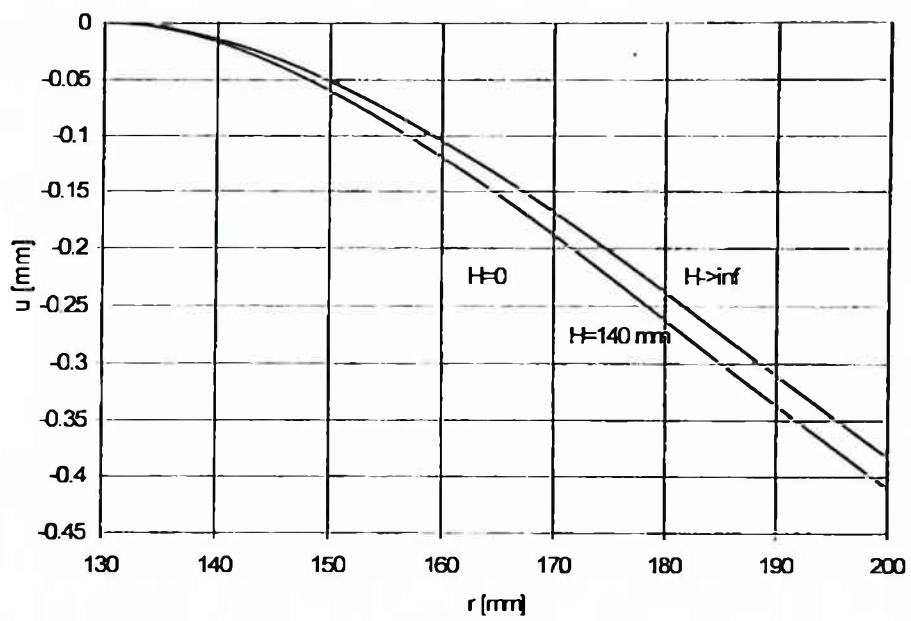
Na slikama 3.17 i 3.18 je data karakteristična zavisnost maksimalnog napona u radijalnom pravcu od visine hoda helikoidalne ljuske modela 10.



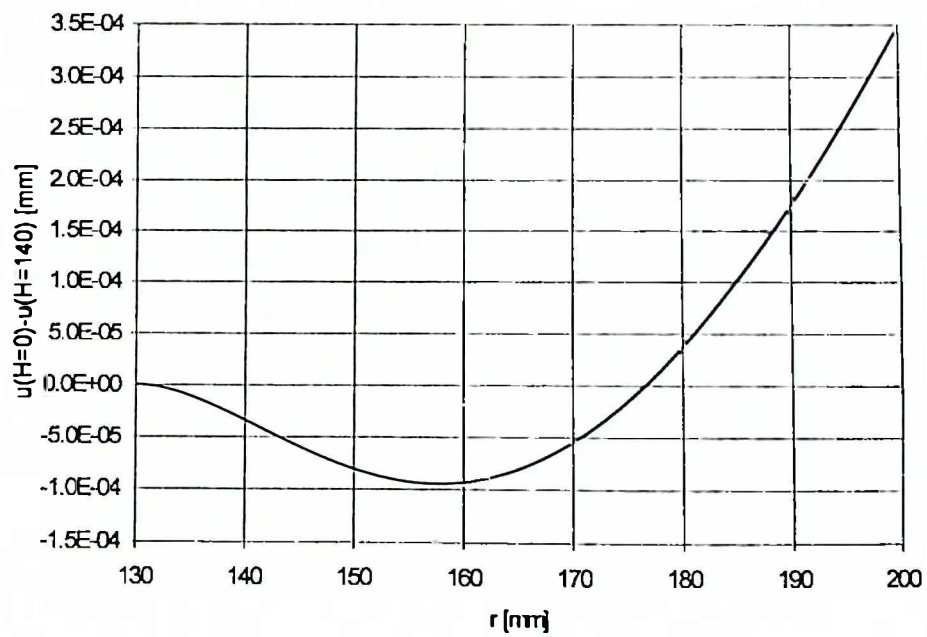
Slika 3.1



Slika 3.2

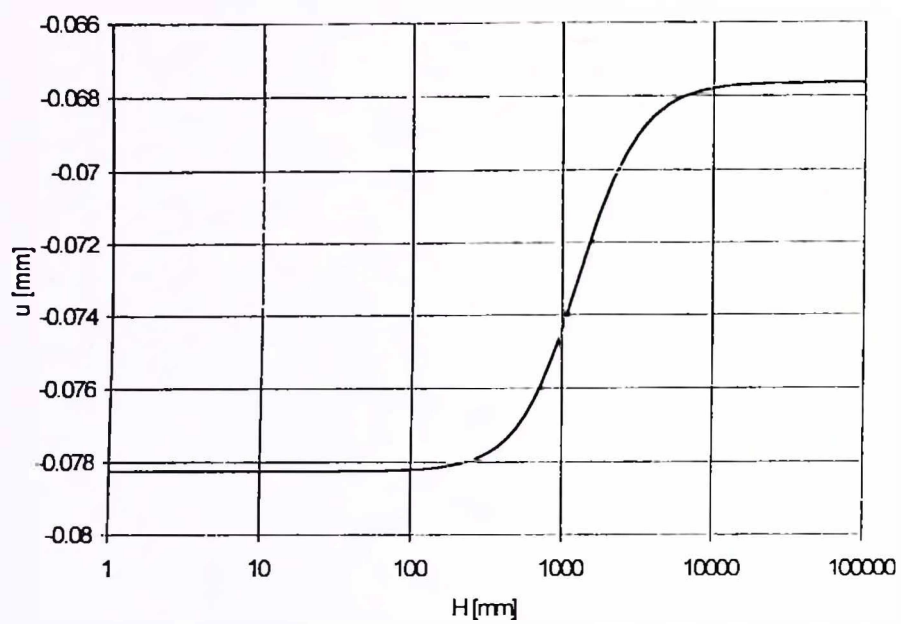


Slika 3.3

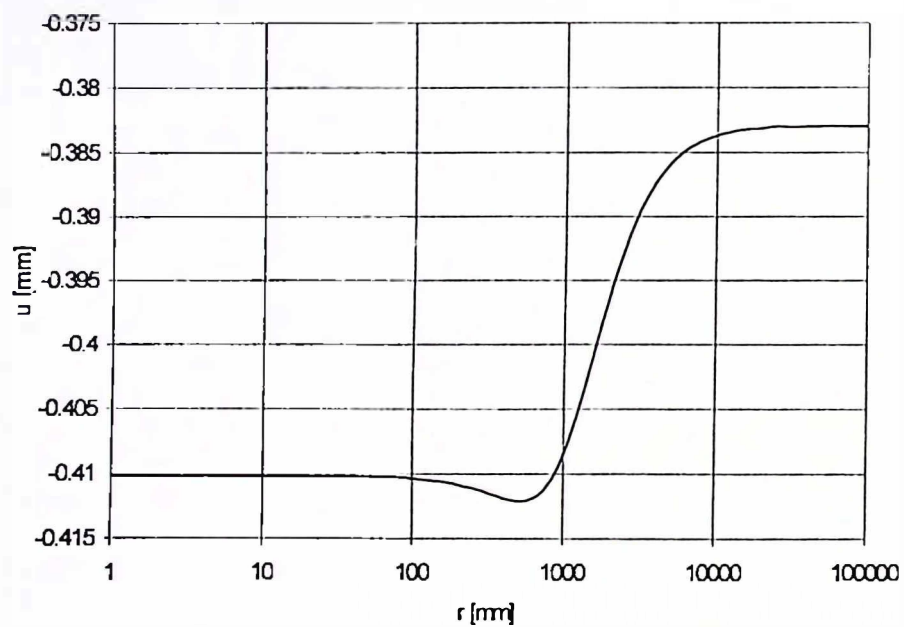


Slika 3.4

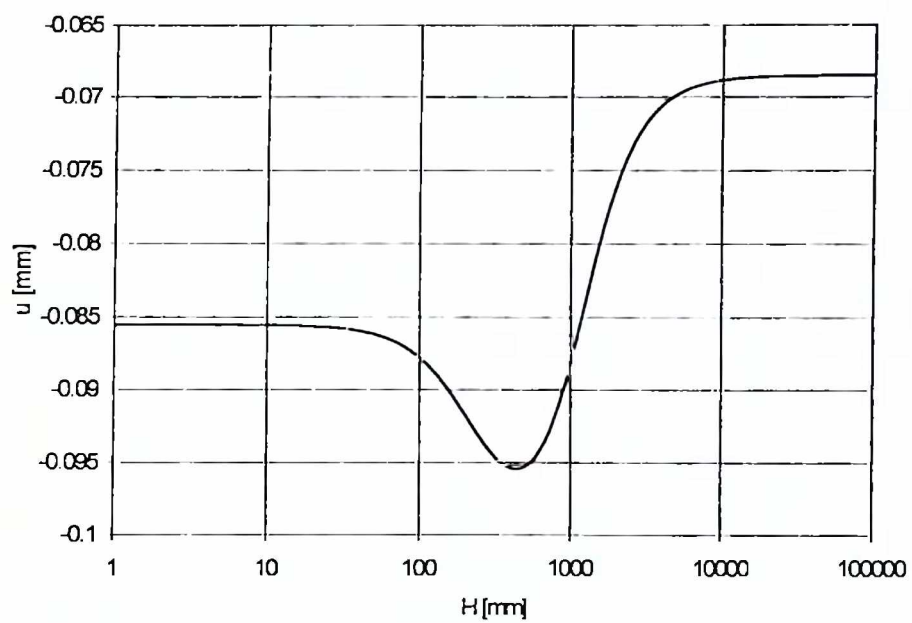




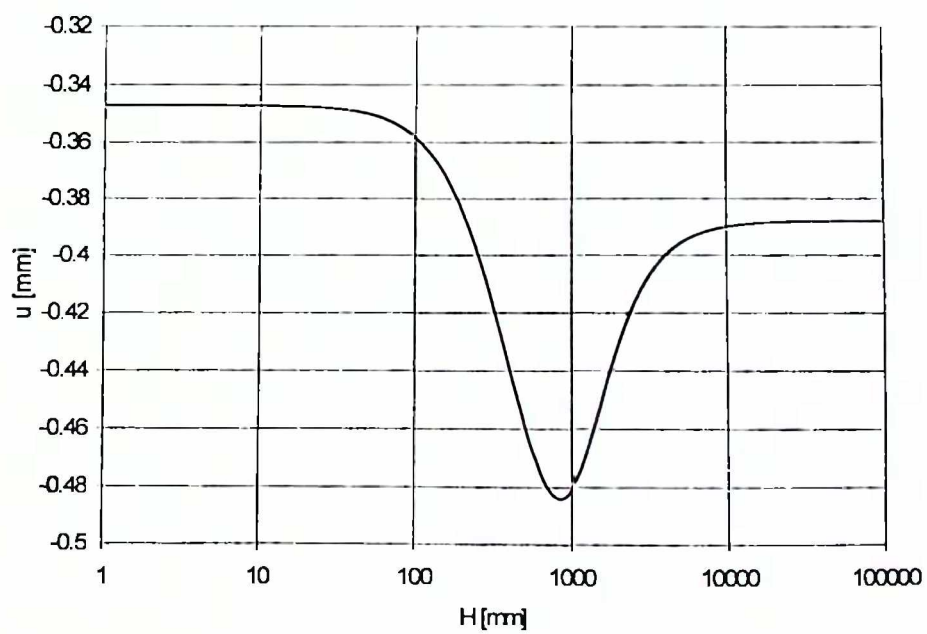
Slika 3.5



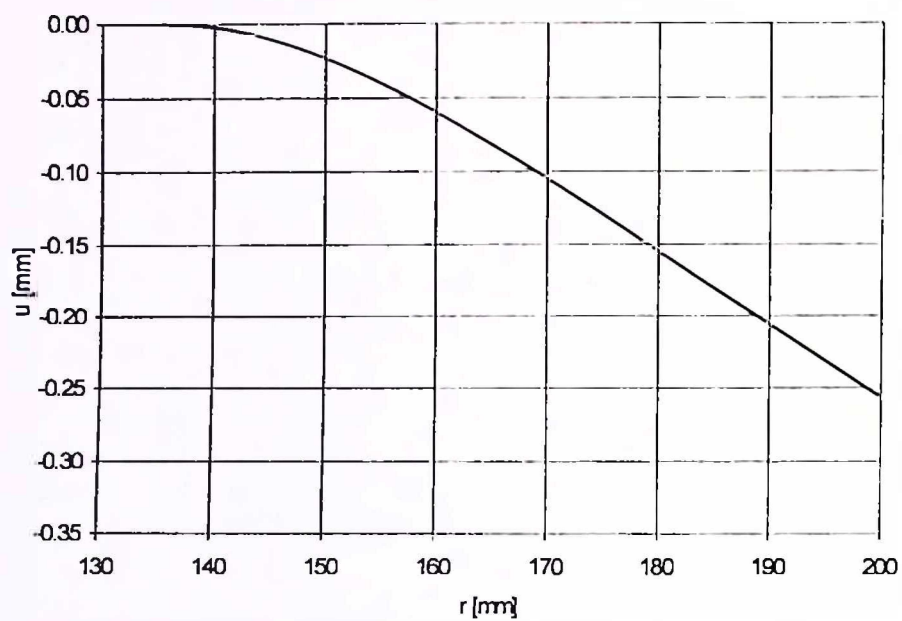
Slika 3.6



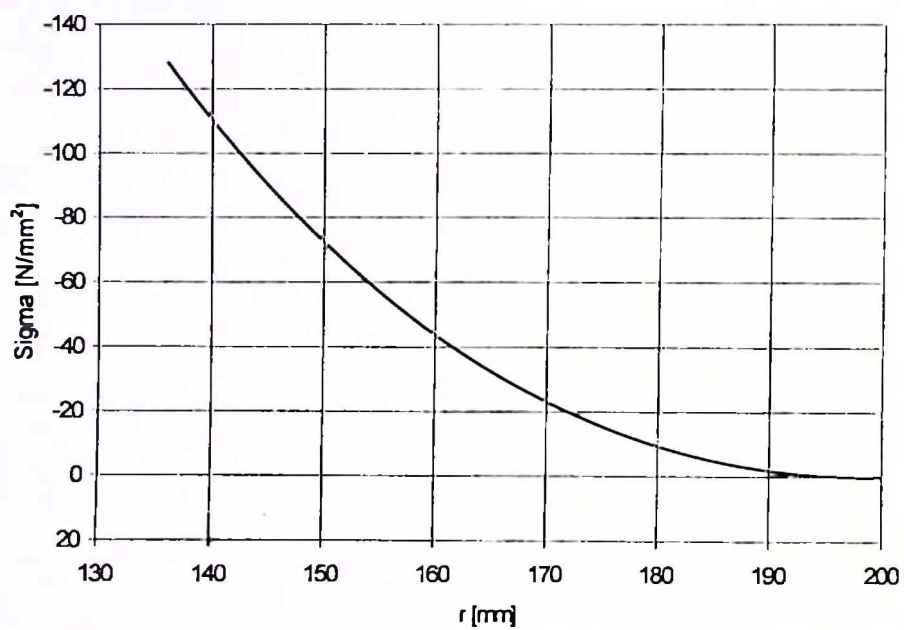
Slika 3.7



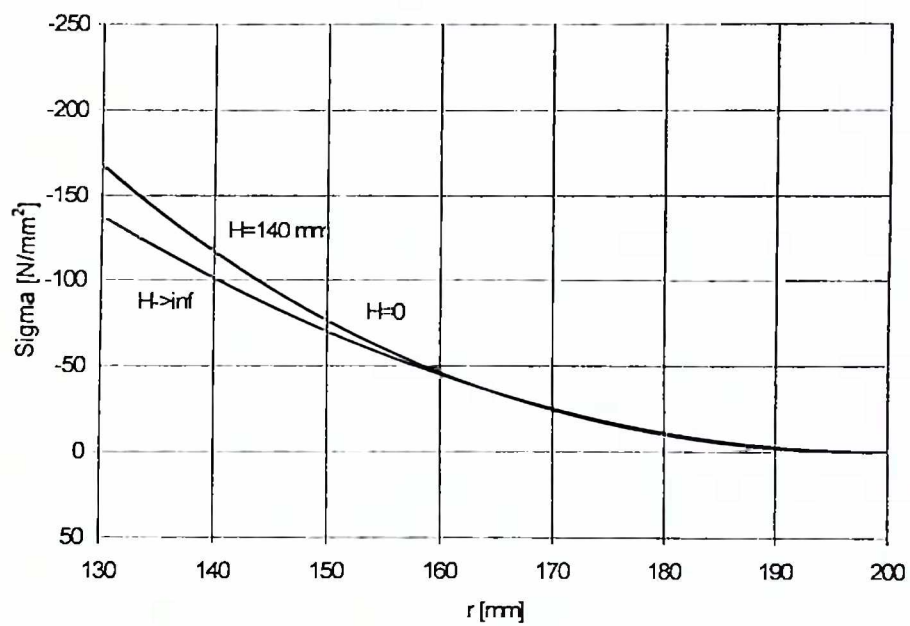
Slika 3.8



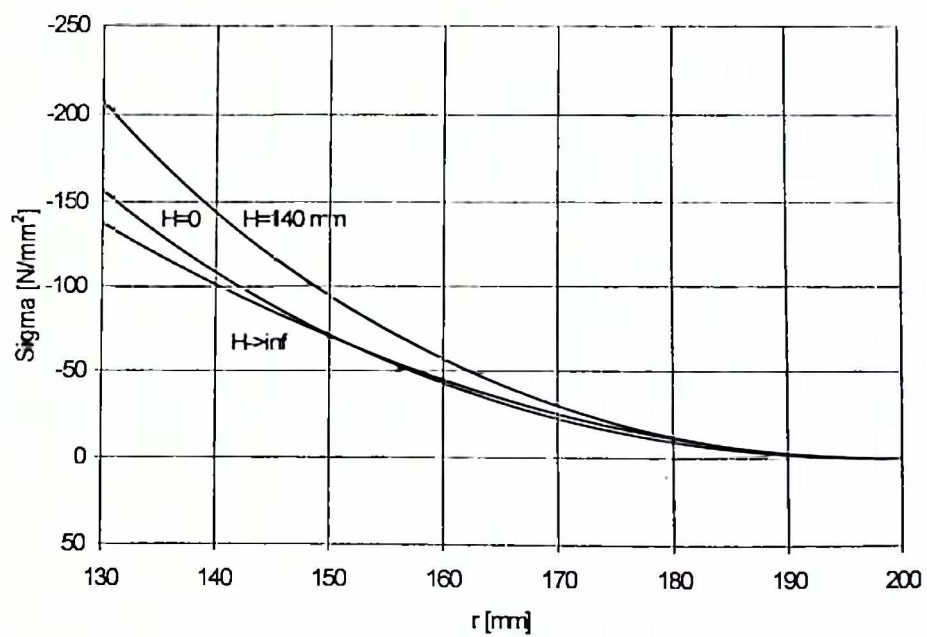
Slika 3.9



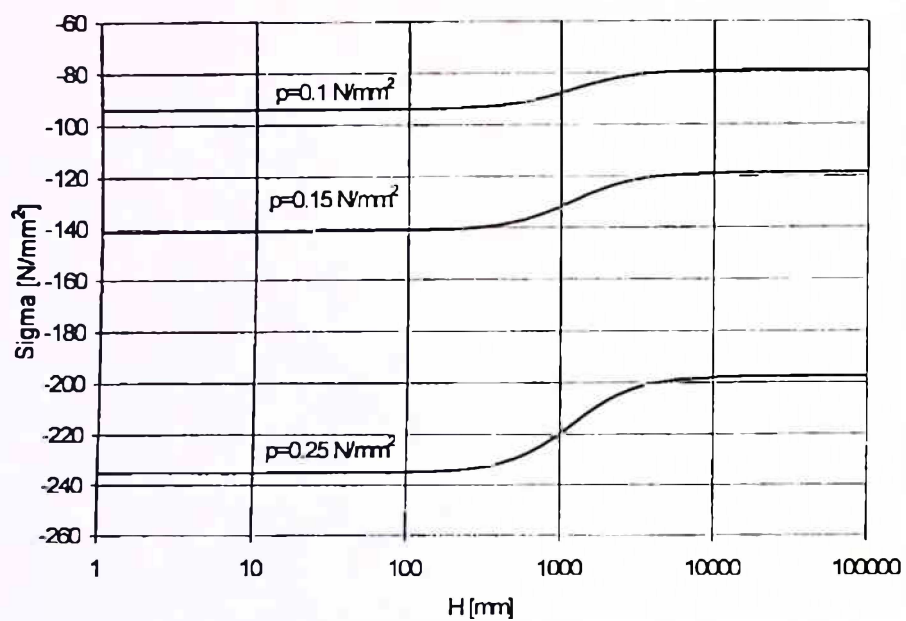
Slika 3.10



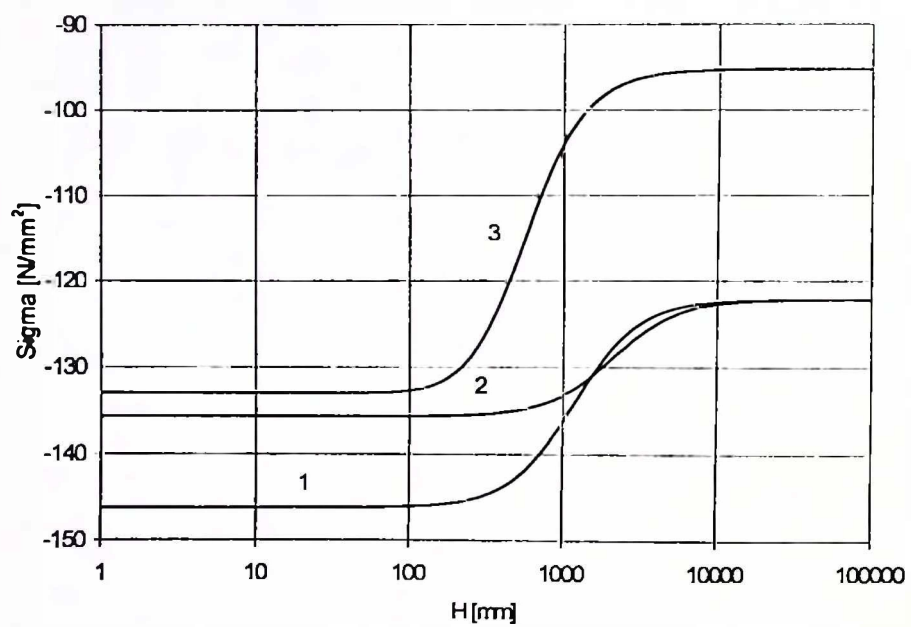
Slika 3.11



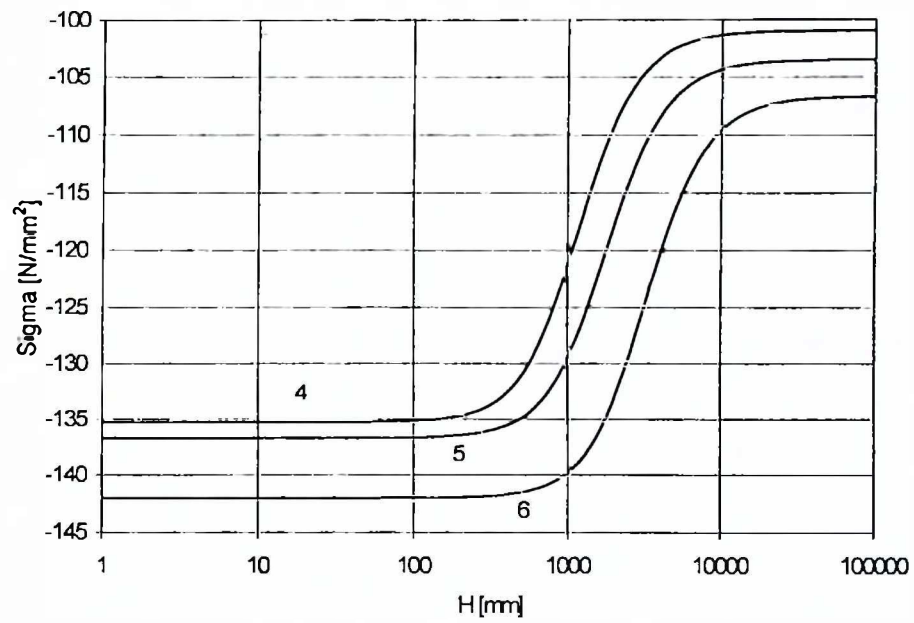
Slika 3.12



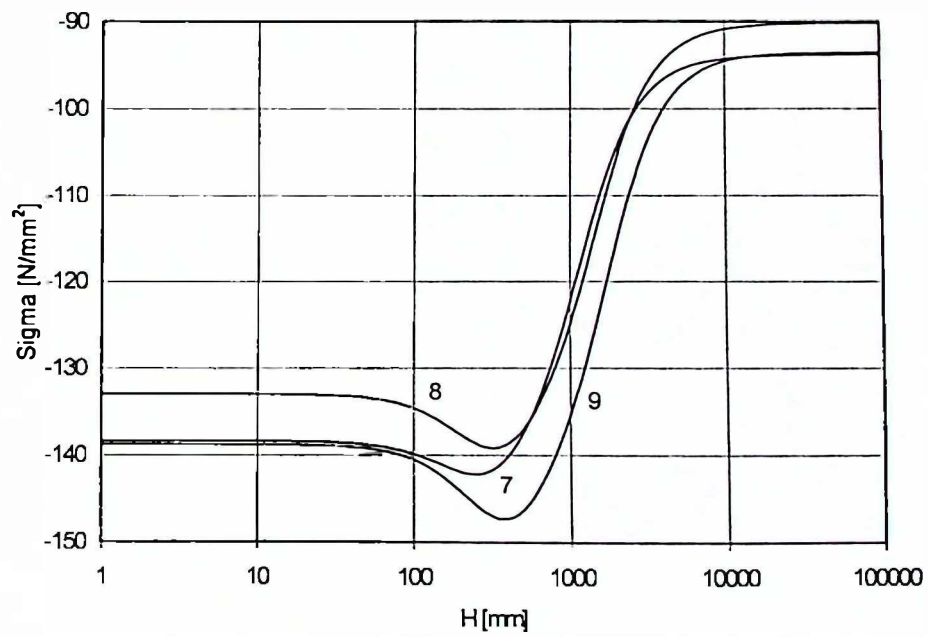
Slika 3.13



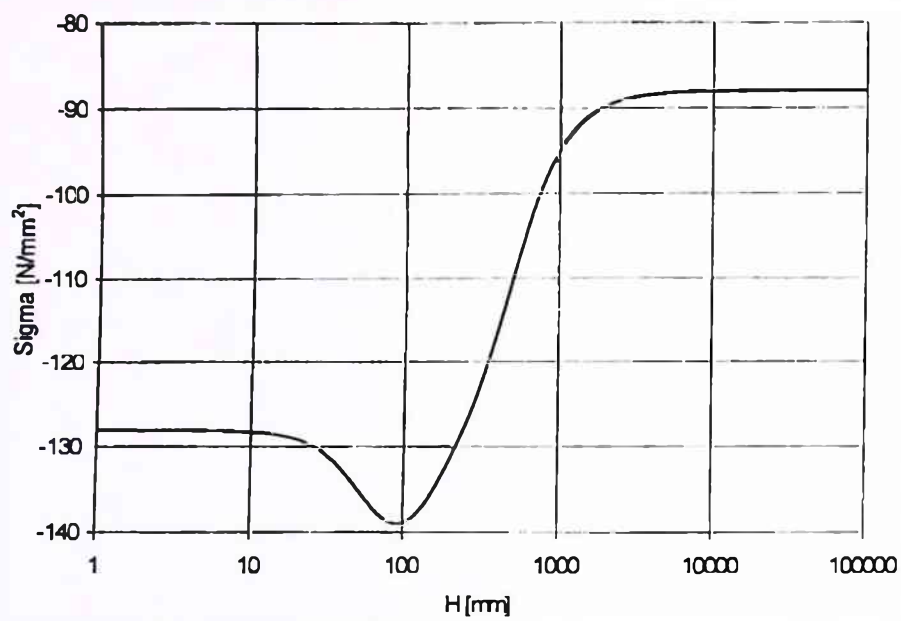
Slika 3.14



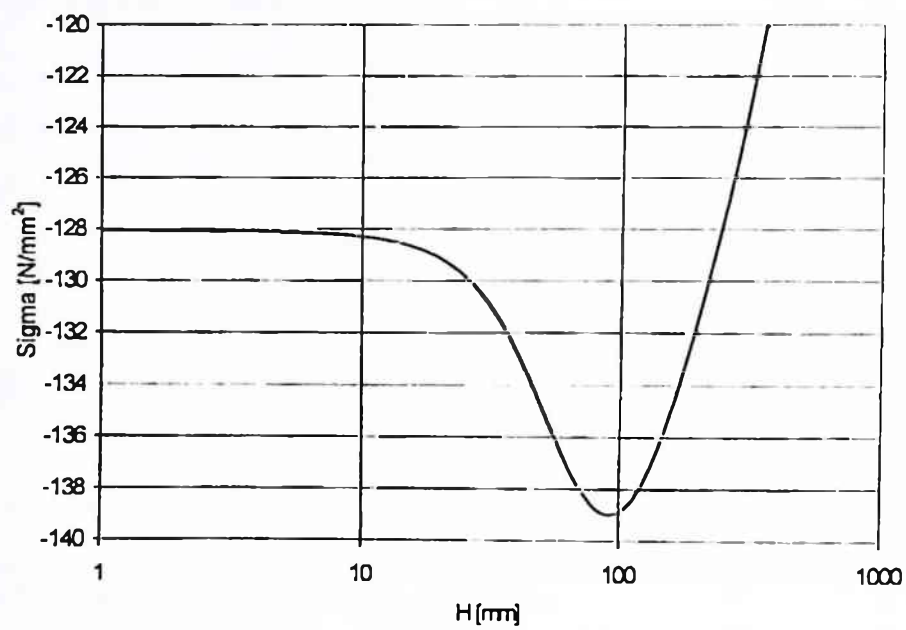
Slika 3.15



Slika 3.16



Slika 3.17



Slika 3.18

3.8 Zaključci analitičke analize zavojne ljske

Uvedene pretpostavke o pomjerajima su omogućile dobijanje rezultata rješavanjem jedne diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljske po pomjeraju, umjesto složenog rješavanja sistema diferencijalnih jednačina. Tačnost postupka izvođenja diferencijalne jednačine, u kojem je izbjegnuto duplo kovarijantno diferenciranje, je potvrđena činjenicom da se u specijalnim slučajevim zavojne ljske ova jednačina svodi na poznate jednačine savijanja kružne i pravougaone ploče.

Programski paket MATLAB korišćen za numeričko rješavanje, metodom konačnih razlika, diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljske je potvrdio efikasnost u realizaciji ovih aplikacija. Na osnovu upoređenja sa rezultatima diferencijalnih jednačina za specijalne slučajeve zavojne ljske, koje imaju rješenja u zatvorenom obliku zaključuje se da je za praktičnu inženjersku primjenu, sprovedeni numerički metod rješavanja diferencijalne jednačine apsolutno tačan.

Konkretan naučni i stručni doprinos automatizovanom projektovanju konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljske predstavlja ovdje razvijeni postupak proračuna geometrijskih parametara zavojne ljske za zadate modele koji mogu biti različitog opterećenja, oblika, materijala i dr. Razvijeni metod proračuna debljine zavojne ljske u odnosu na kriterijum maksimalnog napona u konstrukciji za zadati mehanički model predstavlja doprinos u inženjerskim aplikacijama.

Numerička rješenja i prikazani dijagrami zavisnosti pomjeraja i napona od opterećenja i geometrijskih parametara u ovom poglavlju pokazuju da promjena debljine zavojne ljske ključno utiče na nivo napona i deformacija.

Zavisnosti pomjeraja od nagiba zavojne ljuske za različite modele pokazuju da se maksimalne vrijednosti pomjeraja za konkretne modele imaju u čitavom polju vrijednosti k .

Maksimalne vrijednosti napona su u radijalnom pravcu na unutrašnjoj konturi zavojne ljuske. Za većinu modela maksimalne vrijednosti napona u radijalnom pravcu su za nagib ljuske $k=0$, a zatim se sa povećavanjem nagiba do $k \rightarrow \infty$ smanjuju i najmanje su kod modela pravougaonih ploča.

Detaljnija ispitivanja zavojne ljuske pokazuju da se maksimalne vrijednosti napona u radijalnom pravcu mogu pojaviti za vrijednosti nagiba koje su veće od nule. Ovakva promjena napona u radijalnom pravcu od nagiba zavojne ljuske ima se kod onih modela kod kojih je odnos širine ljuske i unutrašnjeg prečnika veliki, što je prikazano na slikama 3.17 do 3.18 u ovom Poglavlju.

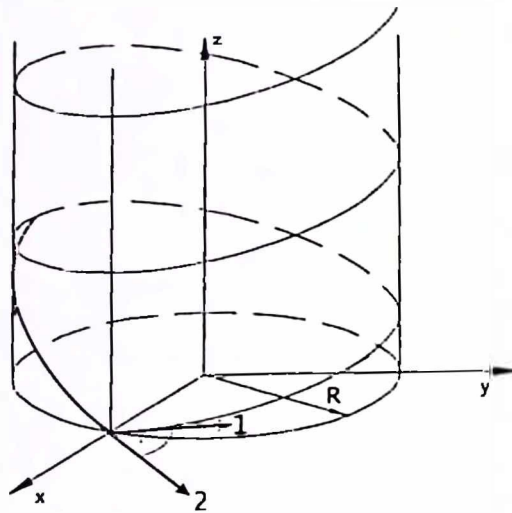
4. ANALITIČKA ANALIZA CILINDRIČNE LJUSKE OPTEREĆENE KONTINUALNIM SPREGOM PO ZAVOJNOJ LINIJI

4.1. Parametri cilindrične površi u sistemu krivolinijskih koordinata

Kod konstrukcijskih elemenata oblika tanke cilindrične ljuske na koju je postavljena zavojna ljuska, opterećenje sa zavojne ljuske se prenosi na cilindričnu preko linije presjeka srednjih površi tj. preko zavojnice. U slučaju kada je zavojna površ opterećena pritiskom, rezultantu tog opterećenja na cilindar čine kontinualno raspoređena sila u tangentnoj ravni cilindra i kontinualni spreg u pravcu tangente na zavojnu liniju na cilindru. U radu se uvode pretpostavke da su pomjeraji zbog sile zanemarljivi u poređenju sa pomjerajima zbog sprega tako da razmatramo teoriju savijanja cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji.

U cilju razmatranja interakcije između helikoidalne i cilindrične ljuske u ovom radu, uvedene su na cilindričnoj površi krivolinijske koordinate koje su drugačije od onih koje se uglavnom koriste u teoriji za cilindrične ljuske a to su ugao i odstojanje duž izvodnice. Pošto je zavojnica granična kriva između zavojne i cilindrične površi, kao krivolinijske koordinate na srednjoj površi cilindrične ljuske uvedena su dva ugla $\theta^1 \equiv \varphi$ i $\theta^2 \equiv \psi$ tako da su koordinatne linije dvije familije zavojnica (sl. 4.1). Parametarske jednačine srednje površi cilindrične ljuske glase

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos(\varphi + \psi) \\ x_2 &= R \sin(\varphi + \psi) \\ x_3 &= k\varphi - \frac{R^2}{k} \psi \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$



Slika 4.1 Koordinatne linije na cilindričnoj ljusci

Vektor položaja tačke na cilindričnoj ljusci dat je relacijom

$$\mathbf{R} = i x_1 + j x_2 + k x_3 = i R \cos(\varphi + \psi) + j R \sin(\varphi + \psi) + k \left(k\varphi - \frac{R^2}{k} \psi \right) \quad (4.2)$$

Kovarijantni bazni vektori su

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -i R \sin(\varphi + \psi) + j R \cos(\varphi + \psi) + k k \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} = -i R \sin(\varphi + \psi) + j R \cos(\varphi + \psi) + k k \end{aligned} \quad (4.3)$$

Koristeći relaciju (3.7), za ovaj slučaj ima se

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin(\varphi + \psi) & R \cos(\varphi + \psi) & \psi \\ -R \sin(\varphi + \psi) & R \cos(\varphi + \psi) & -\frac{R^2}{k} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = -\mathbf{i} \frac{R}{k} (R^2 + k^2) \cos(\varphi + \psi) - \mathbf{j} \frac{R}{k} (R^2 + k^2) \sin(\varphi + \psi)$$

$$|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| = \sqrt{\frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2)^2 \cos^2(\varphi + \psi) + \frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2)^2 \sin^2(\varphi + \psi)} =$$

$$= \frac{R}{k} (R^2 + k^2)$$

Jedinični vektor normale je

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} = -\mathbf{i} \cos(\varphi + \psi) - \mathbf{j} \sin(\varphi + \psi). \quad (4.4)$$

Kovarijantni koeficijenti prve fundamentalne forme površi su

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = R^2 + k^2 \\ A_{12} &= A_{21} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = R^2 - k \frac{R^2}{k} = 0 \\ A_{22} &= \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Matrični zapis kovarijantnih koeficijenata prve fundamentalne forme glasi

$$[A_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 + k^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Determinanta matrice $[A_{\alpha\beta}]$ je data izrazom

$$A = \det[A_{\alpha\beta}] = \frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2)^2 \quad (4.7)$$

Kontravarijantni koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$\left. \begin{aligned} A^{11} &= \frac{A^{11}}{A} = \frac{(-1)^{1+1} A_{22}}{A} = \frac{1}{R^2 + k^2} \\ A^{22} &= \frac{A^{22}}{A} = \frac{(-1)^{2+2} A_{11}}{A} = \frac{k^2}{R^2(R^2 + k^2)} \\ A^{12} &= A^{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Kontravarijantni bazni vektori su

$$\left. \begin{aligned} A^1 &= A^{1\alpha} A_\alpha = A^{11} A_1 + A^{12} A_2 = \\ &= \frac{1}{R^2 + k^2} [-iR \sin(\varphi + \psi) + jR \cos(\varphi + \psi) + k] \\ A^2 &= A^{2\alpha} A_\alpha = A^{21} A_1 + A^{22} A_2 = \\ &= \frac{k^2}{R^2(R^2 + k^2)} \left[-iR \sin(\varphi + \psi) + jR \cos(\varphi + \psi) - k \frac{R^2}{k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Kovarijantni koeficijenti druge fundamentalne forme površi su

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= A_3 \cdot A_{1,1} = [-i \cos(\varphi + \psi) - j \sin(\varphi + \psi)] \\ &\quad \cdot [-iR \cos(\varphi + \psi) - jR \sin(\varphi + \psi)] = R \\ B_{12} &= B_{21} = A_3 \cdot A_{1,2} = R \\ B_{22} &= A_3 \cdot A_{2,2} = R \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Mješoviti koeficijenti druge fundamentalne forme površi

$$\left. \begin{aligned} B_1^1 &= A^{1\alpha} B_{\alpha 1} = A^{11} B_{11} + A^{12} B_{21} = \frac{R}{R^2 + k^2} \\ B_1^2 &= A^{2\alpha} B_{\alpha 1} = A^{21} B_{11} + A^{22} B_{21} = \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)} \\ B_2^1 &= A^{1\alpha} B_{\alpha 2} = A^{11} B_{12} + A^{12} B_{22} = \frac{R}{R^2 + k^2} \\ B_2^2 &= A^{2\alpha} B_{\alpha 2} = A^{21} B_{12} + A^{22} B_{22} = \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Pošto je $B_{12} \neq 0$, koordinatne linije nisu linije krivine pa su sve relacije teorije ljuski date u tenzorskom obliku. Pošto su koeficijenti prve

fundamentalne forme konstante to su svi Christoffel-ovi simboli prve i druge vrste jednaki nuli. To znači da se u ovom slučaju kovarijantni izvodi svode na parcijalne.

4.2. Veličine deformacija

U ovom modelu cilindrične ljuske opterećenje je kontinualno duž zavojnice $\psi=0$ i ne zavisi od koordinate φ . Za istu zavojnicu se definišu granični uslovi koji ne zavise od koordinate φ . Uvodi se pretpostavka da ni veličine deformacija i presječne sile ne zavise od koordinate φ . Takođe se uvodi pretpostavka da su pomjeraji $u_{<1>}$ i $u_{<2>}$ zanemarljivi prema pomjeraju u_3 što znači da razmatramo samo savijanje ljuske.

Deformacije u tangentnoj ravni se računaju prema relaciji (3.43). S obzirom da se u našem slučaju kovarijantni izvodi svode na parcijalne, imamo

$$e_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) - B_{11}u_3 = u_{1,1} - B_{11}u_3 = -Ru_3 \quad (4.12)$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - B_{12}u_3 = -Ru_3 \quad (4.13)$$

$$e_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) - B_{22}u_3 = u_{2,2} - B_{22}u_3 = -Ru_3 \quad (4.14)$$

Promjena krivine i "torzija" srednje površi ljuske određuje se prema relacijama (3.45) i (3.44). Ove se relacije, na osnovu uvedenih pretpostavki, svode na

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{11} &= u_{3,11} + B_{1,1}^v u_v + B_1^v u_{v,1} + B_1^v u_{v,1} + B_1^v B_{1v} u_3 \\ \bar{\kappa}_{11} &= -B_1^1 B_{11} u_3 - B_1^2 B_{12} u_3 = - \left[\frac{R}{R^2 + k^2} R + \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)} R \right] u_3 = -u_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\bar{\kappa}_{12} = \bar{\kappa}_{21} = u_{3,12} + B_1^v u_v + B_1^v u_{v,2} + B_2^v u_{v,1} - B_2^v B_{1v} u_3$$

$$\bar{\kappa}_{12} = -B_2^1 B_{11} u_3 - B_2^2 B_{12} u_3 = - \left[\frac{R}{R^2 + k^2} R + \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)} R \right] u_3 = -u_3 \quad (4.16)$$

$$\bar{\kappa}_{22} = u_{3,22} + B_2^v u_v + B_2^v u_{v,2} + B_2^v u_{v,2} + B_2^v B_{2v} u_3$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} - B_2^1 B_{21} u_3 - B_2^2 B_{22} u_3 = \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} - u_3 \quad (4.17)$$

Koriste se veličine deformacija $\bar{\rho}_{\gamma\delta}$ koje se izračunavaju po formulama

$$\bar{\rho}_{(\gamma\delta)} = \rho_{(\gamma\delta)} + \frac{1}{2} (B_\gamma^v e_{v\delta} + B_\delta^v e_{v\gamma}) \quad (4.18)$$

gdje je

$$\rho_{(\gamma\delta)} = -\bar{\kappa}_{\gamma\delta} \quad (4.19)$$

U razmatranom slučaju cilindrične ljuske ima se

$$\bar{\rho}_{(11)} = \rho_{(11)} + \frac{1}{2} (B_1^v e_{v1} + B_1^v e_{v1}) = \rho_{(11)} + B_1^v e_{v1}$$

$$\bar{\rho}_{(11)} = \rho_{(11)} + B_1^1 e_{11} + B_1^2 e_{21} = u_3 - \frac{R^2}{R^2 + k^2} u_3 - \frac{k^2}{R^2 + k^2} u_3 = 0 \quad (4.20)$$

$$\bar{\rho}_{(12)} = \rho_{(12)} + \frac{1}{2} (B_1^v e_{v2} + B_2^v e_{v1}) = \rho_{(11)} + \frac{1}{2} (B_1^1 e_{12} + B_1^2 e_{22} + B_2^1 e_{11} + B_2^2 e_{11})$$

$$\bar{\rho}_{(12)} = u_3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{R^2}{R^2 + k^2} u_3 - \frac{k^2}{R^2 + k^2} u_3 - \frac{R^2}{R^2 + k^2} u_3 - \frac{k^2}{R^2 + k^2} u_3 \right) = 0 \quad (4.21)$$

$$\bar{\rho}_{(22)} = \rho_{(22)} + \frac{1}{2} (B_2^v e_{v2} + B_2^v e_{v2}) = \rho_{(22)} + B_2^v e_{v2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{(22)} &= \rho_{(22)} + B_2^1 e_{12} + B_2^2 e_{22} = \\ &= -\frac{d^2 u_3}{d\psi^2} + u_3 - \frac{R^2}{R^2 + k^2} u_3 - \frac{k^2}{R^2 + k^2} u_3 = -\frac{d^2 u_3}{d\psi^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3. Diferencijalna jednačina ravnoteže

Iz diferencijalne jednačine ravnoteže (3.54) slijedi da je vrijednost presječne sile

$$N^{\alpha 3} = \hat{M}_{\beta}^{\alpha \beta}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u diferencijalnu jednačinu ravnoteže (3.53) dobija se

$$\hat{M}_{\beta \alpha}^{\beta \alpha} + B_{\alpha \beta} N^{\alpha \beta} \rho_0 F^3 = 0 \quad (4.23)$$

Zamjenom vrijednosti za $N^{\alpha \beta}$ iz jednačine (3.66), dobija se diferencijalna jednačina

$$\hat{M}_{\beta \alpha}^{\beta \alpha} + B_{\alpha \beta} \hat{N}^{\alpha \beta} - B_{\alpha \beta} B_{\gamma}^{\beta} \hat{M}^{\gamma \alpha} = 0 \quad (4.24)$$

U razvijenom obliku jednačina glasi

$$\begin{aligned} & \hat{M}_{11}^{11} + \hat{M}_{12}^{12} + \hat{M}_{21}^{21} + \hat{M}_{22}^{22} + B_{11} \hat{N}^{11} + B_{12} \hat{N}^{12} + B_{21} \hat{N}^{21} + B_{22} \hat{N}^{22} - \\ & - B_{11} B_1^1 \hat{M}^{\gamma 1} - B_{12} B_2^2 \hat{M}^{\gamma 1} - B_{21} B_1^1 \hat{M}^{\gamma 2} - B_{22} B_2^2 \hat{M}^{\gamma 2} = 0 \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir uvedene pretpostavke ima se

$$\begin{aligned} & \hat{M}_{,22}^{22} + B_{11} \hat{N}^{11} + B_{12} \hat{N}^{12} + B_{21} \hat{N}^{21} + B_{22} \hat{N}^{22} - B_{11} B_1^1 \hat{M}^{11} - B_{11} B_2^1 \hat{M}^{21} - \\ & - B_{12} B_1^2 \hat{M}^{11} - B_{12} B_2^2 \hat{M}^{21} - B_{21} B_1^1 \hat{M}^{12} - B_{21} B_2^1 \hat{M}^{22} - B_{22} B_1^2 \hat{M}^{12} - \\ & - B_{22} B_2^2 \hat{M}^{22} = 0 \\ & \hat{M}_{,22}^{22} - (B_{11} B_1^1 + B_{12} B_1^2) \hat{M}^{11} - (B_{11} B_2^1 + B_{12} B_2^2 + B_{12} B_1^1 + B_{22} B_1^2) \hat{M}^{12} - \\ & - (B_{12} B_2^1 + B_{22} B_2^2) \hat{M}^{22} + \hat{M}^{22} + B_{11} \hat{N}^{11} + 2B_{21} \hat{N}^{12} + B_{22} \hat{N}^{22} = 0 \\ & \frac{d^2 \hat{M}^{22}}{d\psi^2} - \left(\frac{R^2}{R^2 + k^2} + \frac{k^2}{R^2 + k^2} \right) \hat{M}^{11} - \left(\frac{R^2}{R^2 + k^2} + \frac{k^2}{R^2 + k^2} + \frac{R^2}{R^2 + k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{R^2 + k^2} \right) \hat{M}^{12} - \left(\frac{R^2}{R^2 + k^2} + \frac{k^2}{R^2 + k^2} \right) \hat{M}^{22} + R \hat{N}^{11} + 2R \hat{N}^{12} + R \hat{N}^{22} = 0 \end{aligned}$$

Konačno se dobija diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 \hat{M}^{22}}{d\psi^2} - \hat{M}^{11} - 2\hat{M}^{12} - \hat{M}^{22} + R(\hat{N}^{11} + 2\hat{N}^{12} + \hat{N}^{22}) = 0 \quad (4.25)$$

4.4. Konstitutivne relacije

Za uspostavljanje veze između presječnih sila i veličina deformacija iz restriktivne teorije ljuski koriste se konstitutivne relacije (3.72) i (3.73) koje se svode na jednačine sledećeg oblika

$$\hat{N}^{\alpha\beta} = C \left[\nu A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + (1 - \nu) A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} \right] e_{\gamma\delta} \quad (4.26)$$

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = B \left[\nu A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + (1 - \nu) A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} \right] \bar{\rho}_{\gamma\delta} \quad (4.27)$$

Za ovaj model cilindrične ljuske sa uvedenim krivolinijskim koordinatama konstitutivne relacije glase

$$\hat{N}^{11} = C \left[(A^{11})^2 e_{11} + \nu A^{11} A^{22} e_{22} \right]$$

$$\hat{N}^{12} = C(1 - \nu) A^{11} A^{22} e_{12}$$

$$\hat{N}^{22} = C \left[(A^{22})^2 e_{22} + \nu A^{11} A^{22} e_{11} \right]$$

$$\hat{M}^{11} = B \left[(A^{11})^2 \bar{\rho}_{(11)} + \nu A^{11} A^{22} \bar{\rho}_{(22)} \right]$$

$$\hat{M}^{12} = B(1 - \nu) A^{11} A^{22} \bar{\rho}_{(12)}$$

$$\hat{M}^{22} = B \left[(A^{22})^2 \bar{\rho}_{(22)} + \nu A^{11} A^{22} \bar{\rho}_{(11)} \right]$$

U konačnom obliku dobija se veza između presječnih sila i veličina deformacija

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}^{11} &= -C \frac{R^2 + \nu k^2}{R(R^2 + k^2)} u_3 \\ \hat{N}^{12} &= -C(1 - \nu) \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)} u_3 \\ \hat{N}^{22} &= -C \frac{k^2(k^2 + \nu R^2)}{R^3(R^2 + k^2)^2} u_3 \\ \hat{M}^{11} &= -B \frac{\nu k^2}{R^2(R^2 + k^2)} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} \\ \hat{M}^{12} &= 0, \\ \hat{M}^{22} &= -B \frac{k^4}{R^4(R^2 + k^2)} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

4.5. Diferencijalna jednačina ravnoteže cilindrične ljuske po pomjeraju

Zamjenom vrijednosti za presječne sile izražene preko pomjeraja prema relacijama (4.28) u jednačinu ravnoteže (4.25) dobija se

$$\begin{aligned} & -B \frac{k^4}{R^4(R^2 + k^2)^2} \frac{d^4 u_3}{d\psi^4} + B \frac{\nu k^2}{R^2(R^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} + B \frac{k^4}{R^4(R^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} + \\ & + R \left[-C \frac{R^2 + \nu k^2}{R(R^2 + k^2)^2} u_3 - 2C(1 - \nu) \frac{k^2}{R(R^2 + k^2)^2} u_3 - C \frac{k^2(k^2 + \nu R^2)}{R^3(R^2 + k^2)^2} u_3 \right] = 0 \\ & -B \frac{k^4}{R^4(R^2 + k^2)^2} \left[\frac{d^4 u_3}{d\psi^4} - \left(\frac{\nu R^2}{k^2} + 1 \right) \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} \right] - \\ & -C \frac{1}{(R^2 + k^2)^2} \left[R^2 + \nu k^2 + 2k^2 - 2\nu k^2 + \frac{k^2(k^2 + \nu R^2)}{R^2} \right] u_3 = 0 \end{aligned}$$

Konačno, diferencijalna jednačina ravnoteže cilindrične ljuske po pomjeraju glasi

$$\frac{d^4 u_3}{d\psi^4} - \frac{k^2 + \nu R^2}{k^2} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} + \frac{C R^2 (R^2 + k^2)^2}{B k^4} u_3 = 0 \quad (4.29)$$

Problem traženja polja pomjeraja cilindrične ljuske sa zavojnom ljuskom koja je opterećena ravnomjernim pritiskom, svodi se na diferencijalnu jednačinu (4.29) po pomjeraju u_3 . Ovdje se cilindrična ljuska na kojoj je vezana zavojna ljuska duž presječne zavojne krive ($\psi=0$), opterećena normalnim pritiskom, posmatra kao izdvojena cilindrična ljuska opterećena kontinualno raspoređenim spregom po jedinici dužine zavojne krive ($\psi=0$) čiji je pravac duž tangente na tu zavojnu liniju.

4.6. Definisane graničnih uslova i rješavanje diferencijalne jednačine savijanja

Ponašanje cilindrične ljuske koja je opterećena kontinualno raspoređenim spregom po jedinici dužine zavojne krive $\psi=0$ može se prikazati krivolinijskom trakom jedinične širine i debljine h_c koja odgovara debljini ljuske čija srednja linija može biti bilo koja zavojnica iz familije $\varphi=\text{const}$, a krajevi su susjedne tačke presjeka sa zavojnicom $\psi=0$. Kao reprezentativnu srednju liniju trake uzećemo zavojnu liniju $\varphi=0$. Krajevi ove trake su u tačkama $\psi=0$ i $\psi=\psi^*=2\pi k^2/(R^2 + k^2)$ gdje je za drugi kraj trake uzeta prva pozitivna vrijednost ugla ψ za koju zavojnica $\varphi=0$ siječe zavojnicu $\psi=0$. Uvodi se pretpostavka da su pomjeraji duž zavojne linije $\psi=0$ jednaki nuli. Razmatrana traka je dakle na krajevima vezana i opterećena spregovima po jedinici širine trake $M/2$. Pravac

djelovanja spregova je duž tangenti na zavojnicu $\psi=0$ što znači da se oni poklapaju sa spregovima $\hat{M}_{<22>}$ tj. važi relacija

$$\hat{M}_{<22>} = \frac{M}{2} \quad (4.30)$$

pošto je

$$\hat{M}_{<22>} = \hat{M}^{22} A_{22} = \hat{M}^{22} \frac{R^2}{k^2} (R^2 + k^2) \quad (4.31)$$

Koristeći konstitutivnu relaciju (4.28)₆ ima se veza između fizičke komponente $\hat{M}_{<22>}$ i pomjeraja u_3

$$\hat{M}_{<22>} = -B \frac{k^2}{R^2 (R^2 + k^2)} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} \quad (4.32)$$

Na osnovu navedenih pretpostavki i relacije za $\hat{M}_{<22>}$ granični uslovi za diferencijalnu jednačinu (4.32) glase

$$u_3 = 0 \quad \text{za } \psi = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{d^2 u_3}{d\psi^2} = - \frac{R^2 (R^2 + k^2)}{k^2} \frac{M}{2B} \quad \text{za } \psi = 0 \quad (4.34)$$

$$u_3 = 0 \quad \text{za } \psi = \psi^* \quad (4.35)$$

$$\frac{d^2 u_3}{d\psi^2} = \frac{R^2 (R^2 + k^2)}{k^2} \frac{M}{2B} \quad \text{za } \psi = \psi^* \quad (4.36)$$

Diferencijalna jednačina (4.29) se rješava uvođenjem smjene

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{k^2 + \nu R^2}{2k^2} \\ n^2 &= \frac{C R^2 (R^2 + k^2)^2}{B k^4} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Diferencijalna jednačina ima oblik

$$\frac{d^4 u_3}{d\psi^4} - 2m \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} + n^2 = 0$$

Rješenja karakteristične jednačine

$$v^4 - 2mv^2 + n^2 = 0$$

su zbog odnosa $n > m$ konjugovano kompleksna

$$\begin{aligned} v_1 &= s + it & v_2 &= -s - it \\ v_3 &= s - it & v_4 &= -s + it \end{aligned}$$

gdje su

$$s = \sqrt{\frac{n+m}{2}} \quad t = \sqrt{\frac{n-m}{2}} \quad (4.38)$$

Sada rješenje diferencijalne jednačine ima oblik

$$u_3(\psi) = e^{s\psi} (C_1 \cos t\psi + C_2 \sin t\psi) + e^{-s\psi} (C_3 \cos t\psi + C_4 \sin t\psi) \quad (4.39)$$

a drugi izvod funkcije $u_3(\psi)$ glasi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_3}{d\psi^2} &= e^{s\psi} \left\{ \left[(s^2 - t^2)C_1 + 2stC_2 \right] \cos t\psi + \left[-2stC_1 + (s^2 - t^2)C_2 \right] \sin t\psi \right. \\ &\quad \left. + e^{-s\psi} \left\{ \left[(s^2 - t^2)C_3 - 2stC_4 \right] \cos t\psi + \left[2stC_3 + (s^2 - t^2)C_4 \right] \sin t\psi \right\} \right. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Na osnovu graničnih uslova datih relacijama (4.33), (4.34), (4.35) i (4.36) dobija se sistem iz kojeg se određuju integracione konstante C_1, C_2, C_3 i C_4 , tj.

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ (s^2 - t^2)C_1 + 2stC_2 + (s^2 - t^2)C_3 - 2stC_4 &= -\overline{M} \\ e^{s\psi^*} (C_1 \cos t\psi^* + C_2 \sin t\psi^*) + e^{-s\psi^*} (C_3 \cos t\psi^* + C_4 \sin t\psi^*) &= 0 \\ e^{s\psi^*} \left\{ \left[(s^2 - t^2)C_1 + 2stC_2 \right] \cos t\psi^* + \left[-2stC_1 + (s^2 - t^2)C_2 \right] \sin t\psi^* \right\} + \\ + e^{-s\psi^*} \left\{ \left[(s^2 - t^2)C_3 - 2stC_4 \right] \cos t\psi^* + \left[2stC_3 + (s^2 - t^2)C_4 \right] \sin t\psi^* \right\} &= \overline{M} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

ovdje je

$$\overline{M} = \frac{M}{2B} \frac{R^2(R^2 + k^2)}{k^2} \quad (4.42)$$

Iz jednačina (4.41)_{1,2} slijedi

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -C_1 \\ C_4 &= C_2 + \frac{\overline{M}}{2st} \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Zamjenom izraza za C_3 i C_4 u jednačine (4.41)_{3,4} dobija se

$$\begin{aligned} C_1 \left(e^{s\psi^*} - e^{-s\psi^*} \right) \cos t\psi^* + C_2 \left(e^{s\psi^*} + e^{-s\psi^*} \right) \sin t\psi^* &= -\frac{\overline{M}}{2st} e^{-s\psi^*} \sin t\psi^* \\ C_1 \left\{ \left[(s^2 - t^2) \cos t\psi^* - 2st \sin t\psi^* \right] e^{s\psi^*} - \left[(s^2 - t^2) \cos t\psi^* + 2st \sin t\psi^* \right] e^{-s\psi^*} \right\} + \\ C_2 \left\{ \left[2st \cos t\psi^* + (s^2 - t^2) \sin t\psi^* \right] e^{s\psi^*} + \left[-2st \cos t\psi^* + (s^2 - t^2) \sin t\psi^* \right] e^{-s\psi^*} \right\} &= \\ = -\frac{\overline{M}}{2st} \left\{ \left[-2st \cos t\psi^* + (s^2 - t^2) \sin t\psi^* \right] e^{-s\psi^*} - 2st \right\} \end{aligned}$$

Ako se eksponencijalni izrazi u gornjim jednačinama daju preko hiperboličkih funkcija

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{e^{s\psi} + e^{-s\psi}}{2} \quad \operatorname{sh}\psi = \frac{e^{s\psi} - e^{-s\psi}}{2} \quad e^{-s\psi} = \operatorname{ch}\psi - \operatorname{sh}\psi$$

tada jednačine (4.41)_{3,4} imaju oblik

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh}\psi^* \cos t\psi^* + C_2 \operatorname{ch}\psi^* \sin t\psi^* &= -\frac{\overline{M}}{4st} (\operatorname{ch}\psi^* - \operatorname{sh}\psi^*) \sin t\psi^* \\ C_1 \left[(s^2 - t^2) \operatorname{sh}\psi^* \cos t\psi^* - 2st \operatorname{ch}\psi^* \sin t\psi^* \right] + \\ + C_2 \left[2st \operatorname{sh}\psi^* \cos t\psi^* + (s^2 - t^2) \operatorname{ch}\psi^* \sin t\psi^* \right] &= \\ = -\frac{\overline{M}}{4st} \left\{ \left[-2st \cos t\psi^* + (s^2 - t^2) \sin t\psi^* \right] (\operatorname{ch}\psi^* - \operatorname{sh}\psi^*) - 2st \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Rješavanjem sistema jednačina (4.44), a koristeći relacije (4.43), dobijaju se integracione konstante C_1 , C_2 , C_3 i C_4 , odnosno

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\bar{M}}{4st} \frac{\sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \\ C_2 &= -\frac{\bar{M}}{4st} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \right) \\ C_3 &= \frac{\bar{M}}{4st} \frac{\sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \\ C_4 &= \frac{\bar{M}}{4st} \left(1 + \frac{\operatorname{sh}\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Rješenje diferencijalne jednačine (4.29) konačno ima oblik

$$\begin{aligned} u_3(\psi) = & -\frac{\bar{M}}{2st} \left[\frac{\sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \operatorname{sh}\psi \cos t\psi + \right. \\ & \left. + \left(\operatorname{sh}\psi - \frac{\operatorname{sh}\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \operatorname{ch}\psi \right) \sin t\psi \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nagib krive date funkcijom $u_3(\psi)$ dobija se relacijom

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{d\psi} = & -\frac{\bar{M}}{2st} \left[\frac{\sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} (\operatorname{sch}\psi \cos t\psi - t \operatorname{sh}\psi \sin t\psi) + \right. \\ & + s \left(\operatorname{ch}\psi - \frac{\operatorname{sh}\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \operatorname{sh}\psi \right) \sin t\psi + \\ & \left. + t \left(\operatorname{sh}\psi - \frac{\operatorname{sh}\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \operatorname{ch}\psi \right) \right] \cos t\psi \end{aligned} \quad (4.47)$$

Za krajnje tačke segmenta, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{d\psi} \Big|_{\psi=0} &= \frac{\bar{M}}{2st} \frac{t \operatorname{sh}\psi^* - s \sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \\ \frac{du_3}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi^*} &= \frac{\bar{M}}{2st} \frac{t \operatorname{sh}\psi^* - s \sin t\psi^*}{\operatorname{ch}\psi^* - \cos t\psi^*} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nagib krive dat funkcijom $u_3(\psi)$ je isti u krajnjim tačkama za $\psi = 0$ i $\psi = \psi^*$ što je očigledno iz fizičkog značenja funkcije $u_3(\psi)$.

Ovako nađeni nagib nema fizičku dimenziju nagiba. Da bi se odredila fizička dimenzija nagiba može se izraz za $u_3(\psi)$ izraziti u funkciji dužine luka zavoynice S tj. naći $u_3(S)$ pa izvršiti diferenciranje po S . Međutim, to u ovom slučaju nije potrebno raditi pošto je veza između S i ψ sledeća

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{R^2}{k^2}\right)^2} d\psi \\ \frac{d\psi}{dS} &= \frac{k}{R\sqrt{R^2 + k^2}} \\ \frac{du_3}{dS} &= \frac{k}{R\sqrt{R^2 + k^2}} \frac{du_3}{d\psi} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Koristeći relacije (4.48) i (4.49) dobija se vrijednost nagiba u krajnjim tačkama razmatranog intervala

$$\left. \frac{du_3}{dS} \right|_{S=0} = \frac{k}{R\sqrt{R^2 + k^2}} \frac{\overline{M}}{2st} \frac{tshs\psi^* - s\sin t\psi^*}{chs\psi^* - \cos t\psi^*} \quad (4.50)$$

Vrijednost $\psi = \psi_m$ za koju funkcija $u_3(\psi)$ dostiže ekstremnu vrijednost određuje se izjednačavanjem prvog izvoda $du_3/d\psi$, određenog relacijom (4.47), sa nulom, tj.

$$\frac{du_3}{d\psi} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \left[s \left(\operatorname{ch} s \psi^* - \frac{\operatorname{sh} s \psi^*}{\operatorname{ch} s \psi^* - \cos t \psi^*} \operatorname{sh} s \psi \right) - \frac{t \sin t \psi^* \operatorname{sh} s \psi}{\operatorname{ch} s \psi^* - \cos \psi^*} \right] \operatorname{tg}(t \psi) = \\
 & = t \left(\frac{\operatorname{sh} s \psi^* \operatorname{ch} s \psi}{\operatorname{ch} s \psi^* - \cos t \psi^*} - \operatorname{sh} s \psi \right) - \frac{s \sin t \psi^* \operatorname{ch} s \psi}{\operatorname{ch} s \psi^* - \cos t \psi^*} \\
 & \left[s (\operatorname{ch} s \psi^* \operatorname{ch} s \psi - \cos t \psi^* \operatorname{ch} s \psi - \operatorname{sh} s \psi^* \operatorname{sh} s \psi) - t \sin t \psi^* \operatorname{sh} s \psi \right] \operatorname{tg}(t \psi) = \\
 & = t (\operatorname{sh} s \psi^* \operatorname{ch} s \psi - \operatorname{ch} s \psi^* \operatorname{sh} s \psi + \cos t \psi^* \operatorname{sh} s \psi) - s \sin t \psi^* \operatorname{ch} s \psi / : \operatorname{ch} s \psi \\
 & \left[s (\operatorname{ch} s \psi^* - \cos t \psi^*) - (s \operatorname{sh} s \psi^* + t \sin t \psi^*) \operatorname{th} s \psi \right] \operatorname{tg}(t \psi) = \\
 & = (t \operatorname{sh} s \psi^* - s \sin t \psi^*) + t (\cos t \psi^* - \operatorname{ch} s \psi^*) \operatorname{th} s \psi
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ako se u jednačinu (4.51) uvedu oznake

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= t \operatorname{sh} s \psi^* - s \sin t \psi^* \\
 D_2 &= t (\cos t \psi^* - \operatorname{ch} s \psi^*) \\
 D_3 &= s (\operatorname{ch} s \psi^* - \cos t \psi^*) \\
 D_4 &= -(s \operatorname{sh} s \psi^* + t \sin t \psi^*)
 \end{aligned} \right\} \tag{4.52}$$

dobija se relacija

$$(D_3 + D_4 \operatorname{th} s \psi) \operatorname{tg}(t \psi) = D_1 + D_2 \operatorname{th} s \psi$$

ili

$$\operatorname{tg}(t \psi) = \frac{D_1 + D_2 \operatorname{th} s \psi}{D_3 + D_4 \operatorname{th} s \psi} \tag{4.53}$$

Ovo je transcendentna jednačina iz koje se za konkretne vrijednosti s , t , ψ^* i to nekom od iterativnih metoda, određuje vrijednost ψ_m za koju funkcija $u_3(\psi)$ ima ekstremnu vrijednost. Iz izraza je očigledno da ψ_m ne zavisi od vrijednosti koncentrisanog momenta M .

4.7. Rezultati rješenja diferencijalne jednačine u funkciji debljine cilindrične ljuske

Koristeći transcendentnu jednačinu (4.53) za konkretne vrijednosti parametara cilindrične ljuske: $R=127$ mm, $H=140$ mm, $k=H/2\pi=22.2817$ mm, $E=200000$ N/mm², $\nu=0.3$ određene su za različite debljine ljuske 2, 3, 4 i 6 mm vrijednosti ψ_m za koju funkcija $u_3(\psi)$ ima ekstremnu vrijednost. Korišćenjem relacija (4.46) određene su vrijednosti maksimalnih pomjeraja za razmatrane modele.

Maksimalne vrijednosti napona se kod ovog modela nalaze u presjecima cilindrične ljuske na zavojnici duž koje djeluje kontinualni spreg i određuju se korišćenjem relacije (4.30) i relacije (3.121) koja je navedena u analizi zavojne ljuske, s tim što se u njoj umjesto $\hat{M}_{<11>}$ uvrštava $\hat{M}_{<22>}$ i umjesto debljine zavoje ljuske h_h se tretira debljina cilindrične ljuske h_c .

Veličine maksimalnih pomjeraja i napona kao i vrijednosti uglova i ostalih parametara koji su određeni u postupku proračuna cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji prikazane su u Tabeli 4.1.

Parametri koji su dati u Tabeli 4.1 su proračunati za različite debljine cilindrične ljuske u postupku iterativnog rješavanje transcendentne jednačine (4.53). To su bezdimenzioni parametri koji zavise od karakteristika materijala i geometrijskih parametara cilindrične ljuske sa datom zavojnom linijom. Relativni odnos \bar{M}/M [1/N] obuhvata veličinu \bar{M} koja je takođe bezdimenzioni parametar zavisao od veličine

kontinualnog opterećenja M [N], geometrijskih parametara i mehaničkih karakteristika materijala cilindrične ljuske prema relaciji (4.42).

Tabela 4.1 Vrijednosti maksimalnih pomjeraja, napona i ostalih parametara kod cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji

	DEBLJINA CILINDRIČNE LJUSKE [mm]			
	2	3	4	6
n	7366.1752	4910.7843	3683.0883	2455.3917
s	60.7106	49.5790	42.9445	35.0768
t	60.6663	49.5248	42.8819	35.0001
\bar{M}/M [1/N]	1.84313	0.54611	0.23039	0.06826
D_1	2685520.16	271525.14	67667.16	12618.06
D_2	-2685441.03	-271580.79	-67717.51	-12594.33
D_3	2687400.58	271878.00	67816.37	12621.92
D_4	-2687367.32	-271835.39	-67850.25	-12665.35
ψ_m [rad]	$1.2941 \cdot 10^{-2}$	$1.5840 \cdot 10^{-2}$	$1.8280 \cdot 10^{-2}$	$2.2583 \cdot 10^{-2}$
$u_3(\psi_m)/M$ [mm/N]	$8.0623 \cdot 10^{-5}$	$3.5803 \cdot 10^{-5}$	$2.0137 \cdot 10^{-5}$	$0.9004 \cdot 10^{-5}$
σ_{\max}/M [1/mm ²]	0.75	0.3333	0.1875	0.0833

4.8 Zaključci analitičke analize cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavonoj liniji

Doprinos analitičkoj analizi ovog modela ljuske, koji je omogućio izvođenje diferencijalne jednačine savijanja po pomjeraju, zasniva se na uvođenju krivolinijskih koordinata na cilindričnoj površi drugačijih od onih koje se koriste u teoriji za ovakve ljuske.

Uvedene pretpostavke o pomjerajima, pri definisanju graničnih uslova, omogućile su da se diferencijalna jednačina savijanja cilindrične ljuske za ovaj model efikasno riješi u zatvorenom obliku.

Konkretni doprinos proračunu ovog modela ljuske predstavlja razvijeni matematički postupak kojim se nekom od iterativnih metoda određuje položaj tačaka na cilindričnoj ljusci sa maksimalnim pomjerajima. Položaj ovih tačaka ne zavisi od vrijednosti momenta M kontinualnog sprega.

Rezultati po pomjerajima za $u_3(\psi_m)$ [mm] koji su dati u odnosu na vrijednost momenta kontinualnog sprega po zavojnoj liniji M [N] za razmatrane debljine, pokazuju da su za ovaj model cilindrične ljuske pomjeraji veoma mali i pored činjenice da je nivo maksimalnih napona za ovakav oblik konstrukcije i opterećenja relativno veliki.

Dobijeni rezultati analitičke analize cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji imaju teorijski značaj i predstavljaju doprinos u konkretnom rješavanju modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci koji se tretira u sledećem Poglavlju ovog rada.

5. MATEMATIČKI MODEL KAO PODLOGA ZA AUTOMATIZOVANO PROJEKTOVANJE ZAVOJNE LJUSKE NA CILINDRIČNOJ LJUSCI

5.1. Definisane graničnih uslova na presjeku zavojne i cilindrične ljuske

Koristeći rezultate analitičkih analiza koje su u Poglavlju 3 urađene za zavojnu ljusku, u Poglavlju 4 za cilindričnu ljusku opterećenu kontinualnim spregom po zavojnoj liniji, ovdje razmatramo savijanje zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske (3.90) se koristi i u ovom modelu. Granični uslovi na presječnoj krivoj srednjih površi zavojne i cilindrične ljuske definišu se kao

$$\left. \frac{du_3}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{du_3}{dS} \right|_{S=0} \quad (5.1)$$

$$\hat{M}_{<22>} \Big|_{S=0} = \frac{1}{2} \hat{M}_{<11>} \Big|_{r=a} \quad (5.2)$$

Na osnovu uslova (5.2), i relacija (4.30), (4.42) i (4.50), dobija se

$$\left. \frac{du_3}{dS} \right|_{S=0} = \frac{1}{4st} \frac{R\sqrt{R^2+k^2}}{k} \frac{tshs\psi^* - s\sin t\psi^*}{chs\psi^* - \cos t\psi^*} \frac{\hat{M}_{<11>} \Big|_{r=a}}{B_c} \quad (5.3)$$

Zamjenom vrijednosti za $\hat{M}_{<11>}$ iz relacije (3.84) u relaciju (5.3) granični uslov (5.1) glasi

$$\left. \frac{du_3}{dr} \right|_{r=a} = \mathcal{H} \left[\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(v+1)}{(r^2+k^2)^2} u_3 \right] \Big|_{r=a} \quad (5.4)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4st} \frac{R\sqrt{R^2+k^2}}{k} \frac{tshs\psi^* - s\sin t\psi^*}{chs\psi^* - \cos t\psi^*} \frac{B_h}{B_c} \quad (5.5)$$

Krutosti na savijanje B_h i B_c za zavojnu i cilindričnu ljusku određuju se koristeći relaciju (3.76). Debljine zavojne i cilindrične ljuske su h_h i h_c .

Ovim postupkom se savijanje zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci svodi na rješavanje iste diferencijalne jednačine (3.90) kao u Poglavlju 3, s tim što od 4 granična uslova (3.104), (3.105), (3.106) i (3.107) tri uslova ostaju nepromijenjena a granični uslov (3.105) se mijenja u granični uslov dat relacijom (5.4). Na ovaj način se uspostavlja matematički model kao podloga za automatizovano projektovanje zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Program za numeričko rješavanje diferencijalne jednačine savijanja zavojne ljuske sa novim graničnim uslovima dat je u Prilogu 3.

5.2. Rezultati proračuna u funkciji varijacije geometrijskih parametara modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci

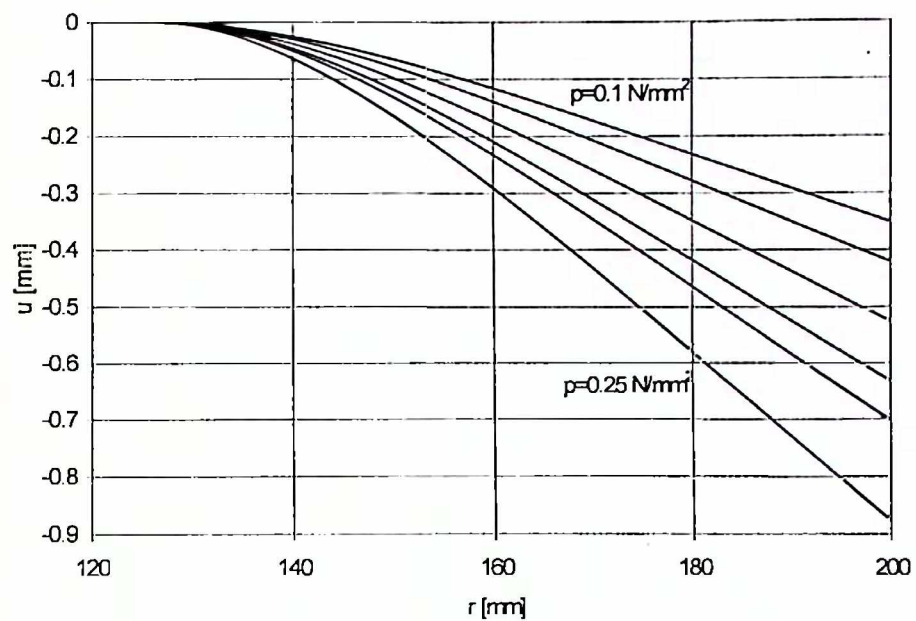
Korišćenjem programa za numeričko rješavanje diferencijalne jednačine, sa funkcijom za automatizovano određivanje debljine zavojne ljuske, u Prilogu 3, na osnovu kriterijuma dozvoljene vrijednosti maksimalnog napona u radijalnom pravcu ($\sigma_d=150 \text{ N/mm}^2$) određene su vrijednosti h_h za različite geometrijske parametre ljuske prema Tabeli 5.1. Program omogućava proračun modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci u odnosu na bilo koju vrijednost dozvoljenog napona. Analiza je urađena za modele sa istom debljinom zavojne i cilindrične ljuske. Ostali parametri su: $p=0.15 \text{ N/mm}^2$, $H=140 \text{ mm}$, $E=200000 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$. Vrijednost maksimalnog napona u radijalnom pravcu je računata na osnovu relacije (3.121) u tačkama sa koordinatom $r=a+h_c/2+h_h$. Na slici 5.1 za model 1 prema Tabeli 5.1 ($h_c=6\text{mm}$) dat je dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika za veličine pritiska 0.1, 0.12, 0.15, 0.18, 0.2 i 0.25 N/mm^2 .

Tabela 5.1 Vrijednosti proračunatih debljina zavojne ljuske [m]

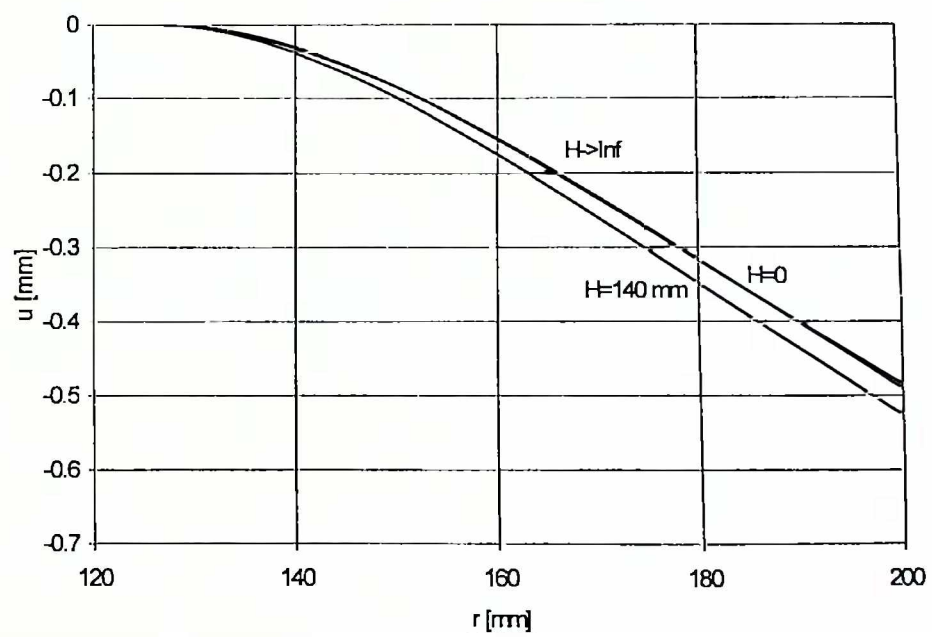
MODEL ZAVOJNE LJUSKE NA CILINDRIČNOJ LJUSCI													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a[mm]		127	280	30	80	130	230	30	30	30	5	100	10
b[mm]		200	350	100	200	300	550	200	250	300	80	350	60
Debljina h_b	Izrač.	3.932	3.804	4.227	7.101	9.988	18.910	10.683	13.904	17.099	4.845	15.136	3.064
	Usvoj.	4	4	4.5	7.5	10	19	11	14	17.5	5	15.5	3.5

Na slici 5.2 za model 1 ($h_c=6\text{mm}$) je prikazan dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika za veličinu hoda zavojne ljuske $H=0$, $H=140$ mm i $H\rightarrow\infty$. Na slikama 5.3 i 5.4 je data zavisnost pomjeraja od hoda zavojne ljuske za model 1 ($h_c=6\text{mm}$) u tačkama sa poluprečnikom $r=a+1/3(b-a)$ i $r=b$. Na slici 5.5 dat je dijagram zavisnosti pomjeraja od poluprečnika, a na slici 5.6 dijagram zavisnosti napona u radijalnom pravcu od poluprečnika za model prstenaste ploče na cilindričnoj ljusci sa sledećim parametrima: $a=130\text{mm}$, $b=200\text{ mm}$, $h_c=12\text{ mm}$ i $h_b=4.15\text{ mm}$.

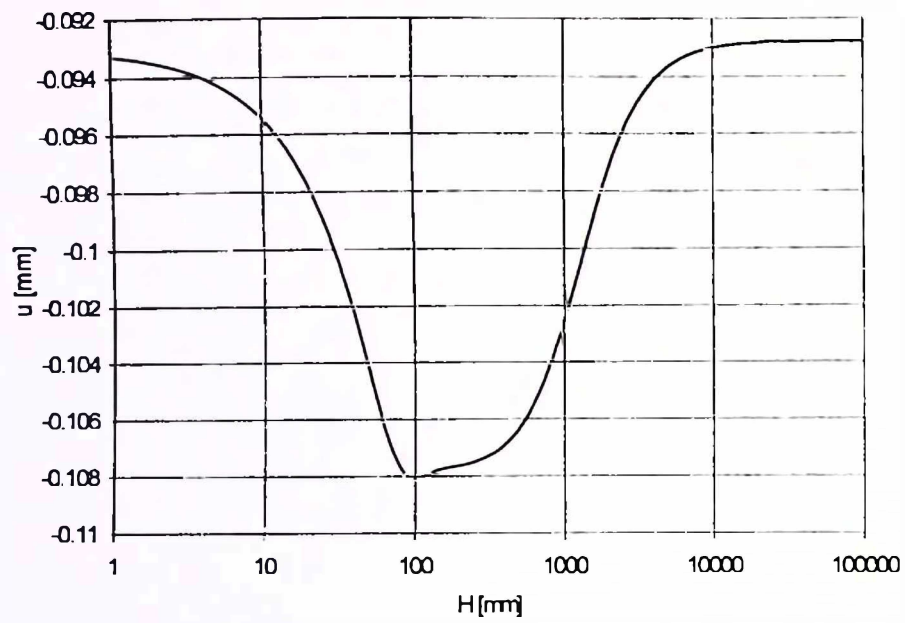
Na slici 5.7 je data zavisnost napona u radijalnom pravcu od poluprečnika, za model 1 ($h_c=6\text{mm}$) za vrijednosti $H=0$, $H=140\text{ mm}$ i $H\rightarrow\infty$. Na slici 5.8 je prethodna zavisnost data za iste vrijednosti hoda i debljine ljuski 4.15, 3.6 i 4 mm respektivno. Na slici 5.9 je za model 1 ($h_c=6\text{mm}$) prikazan dijagram zavisnosti maksimalnog napona u radijalnom pravcu od hoda zavojne ljuske za pritiske 0.1, 0.15 i 0.25 N/mm². Na slikama 5.10, 5.11 i 5.12 data je zavisnost maksimalnog napona u radijalnom pravcu od hoda zavojne ljuske za modele od 1 do 9 kako je to označeno na samim dijagramima.



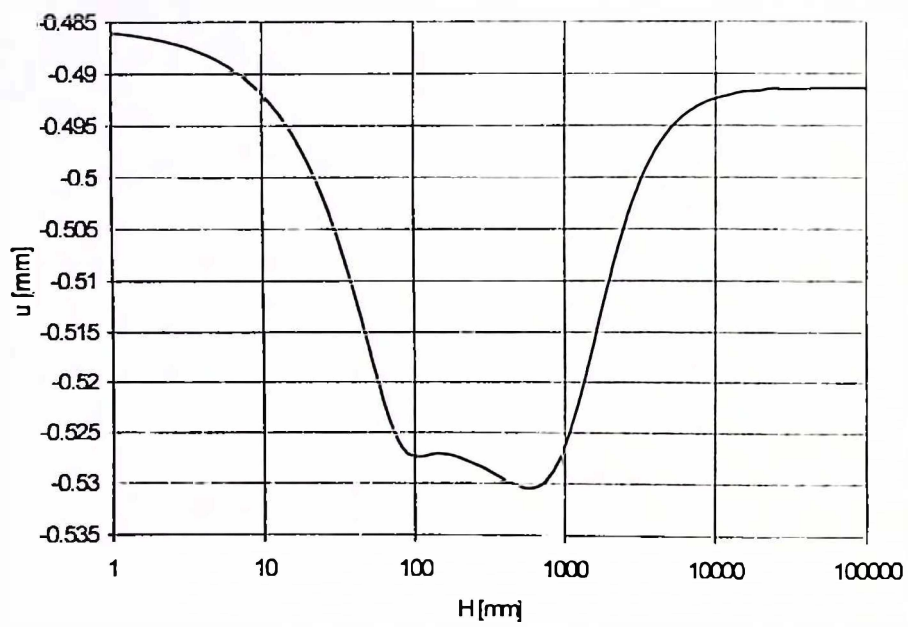
Slika 5.1



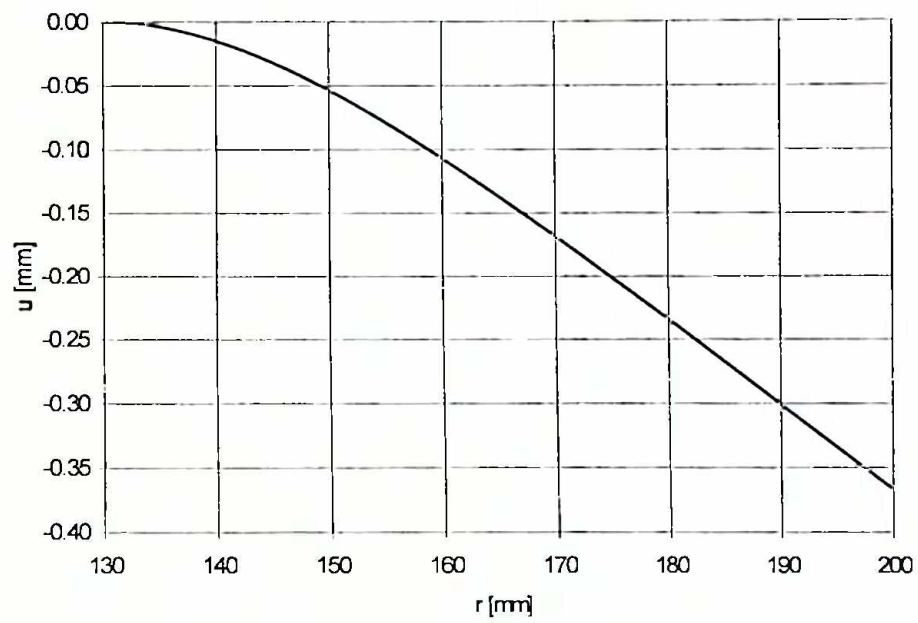
Slika 5.2



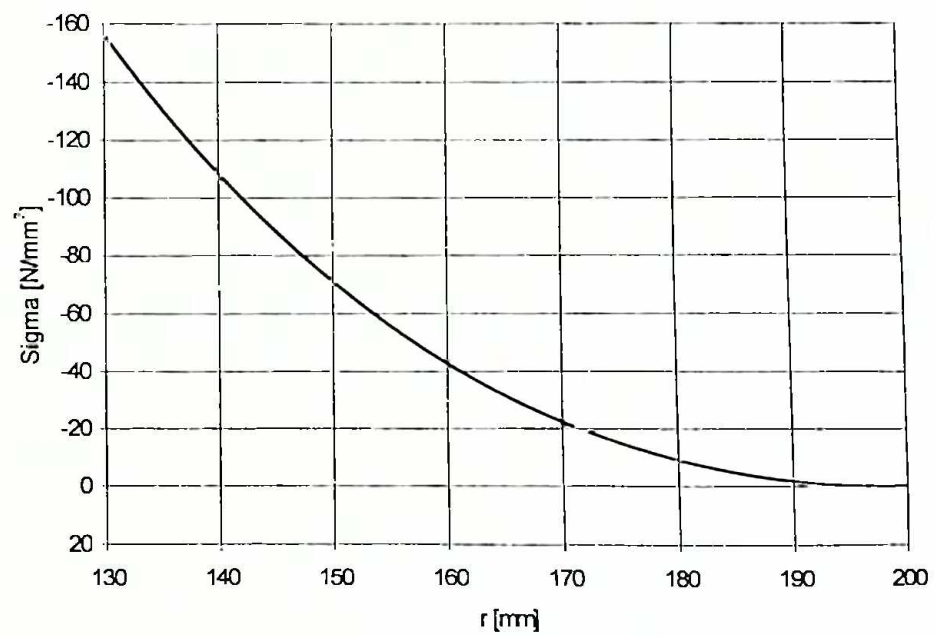
Slika 5.3



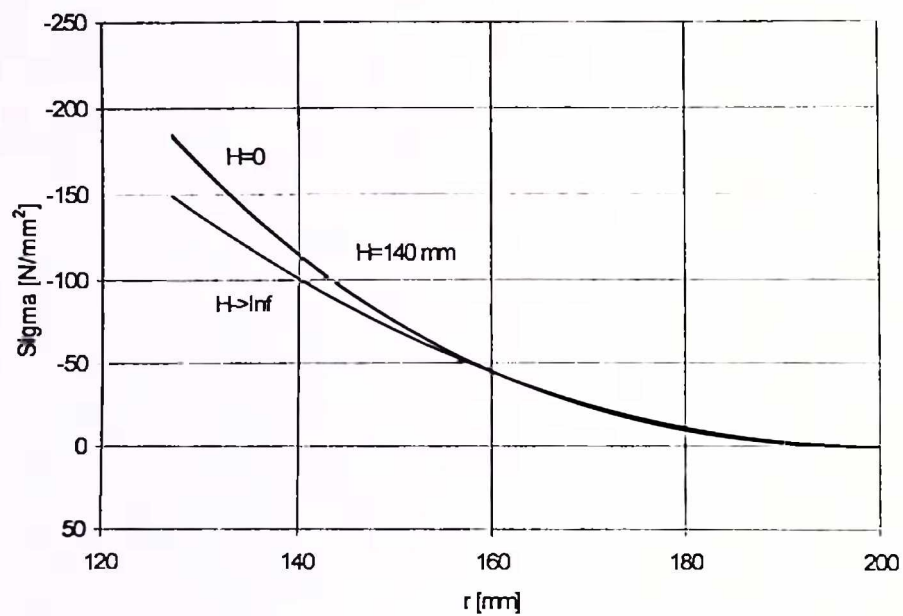
Slika 5.4



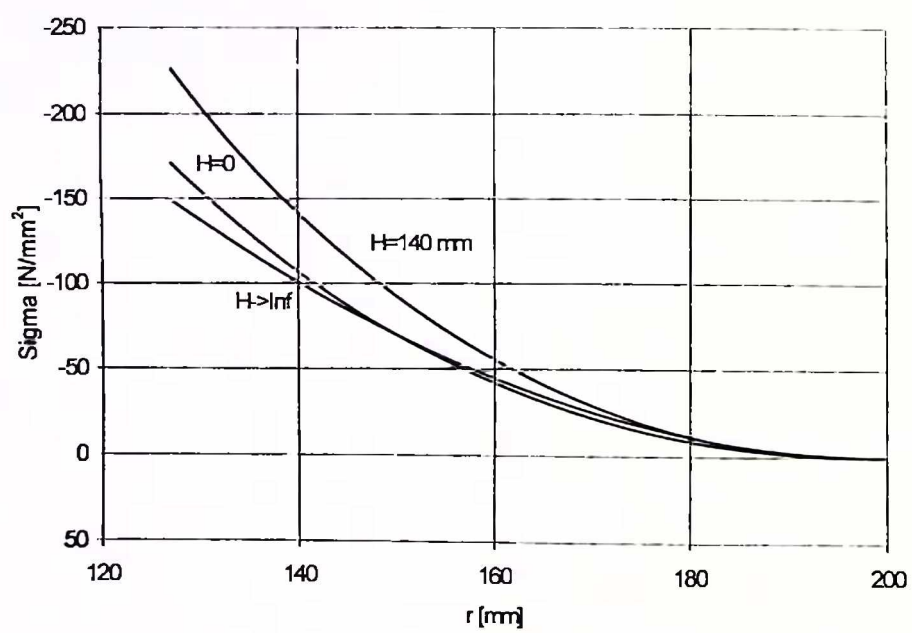
Slika 5.5



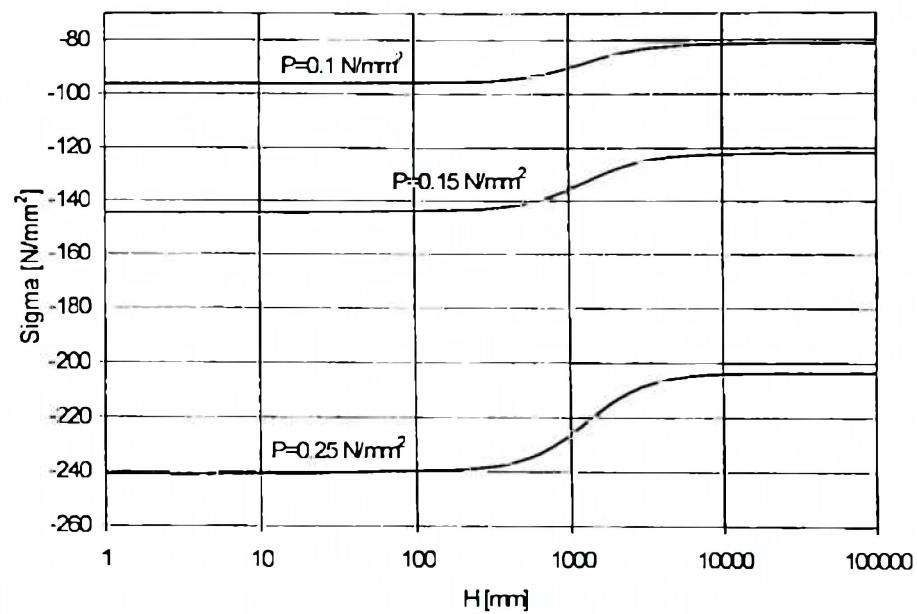
Slika 5.6



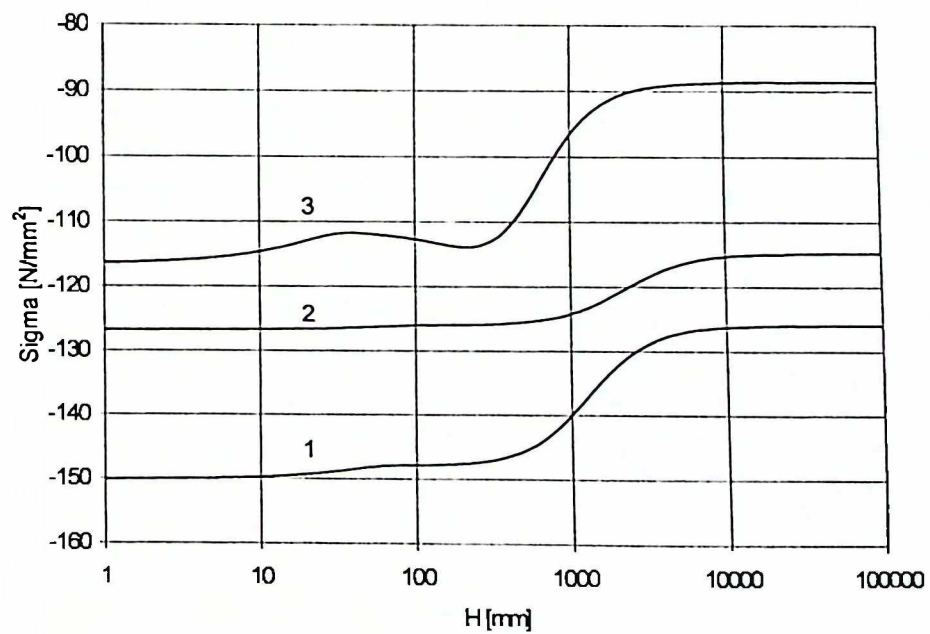
Slika 5.7



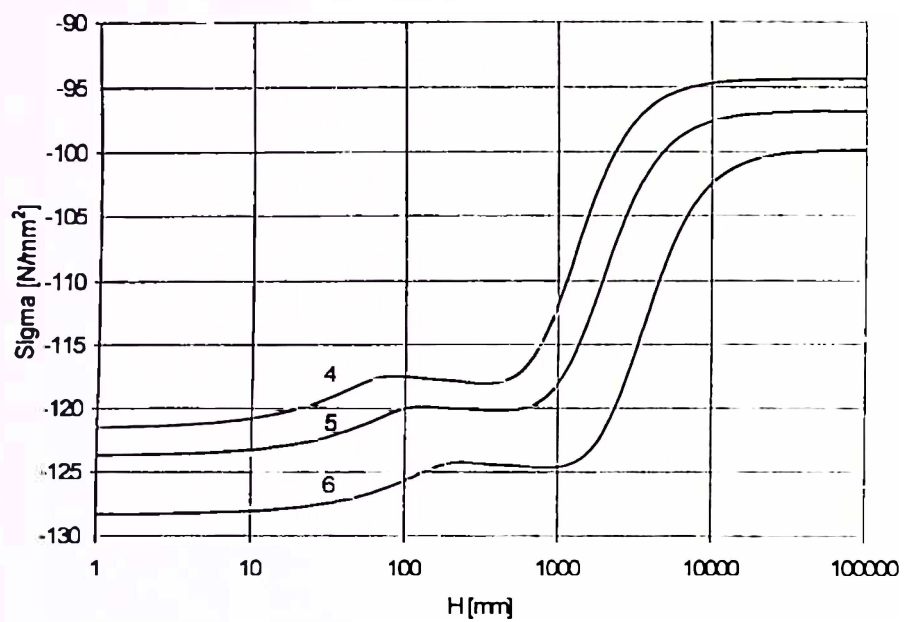
Slika 5.8



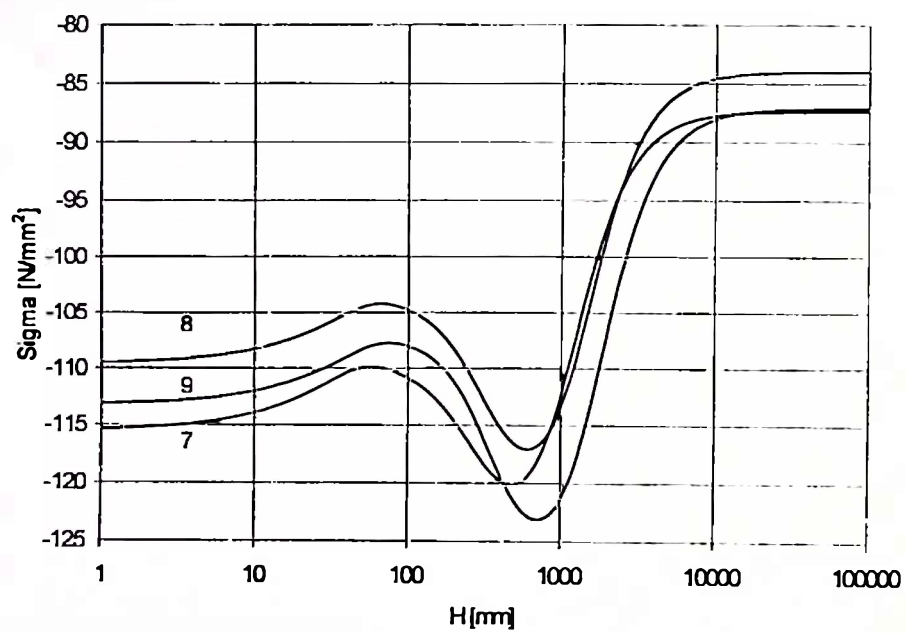
Slika 5.9



Slika 5.10



Slika 5.11



Slika 5.12

5.3 Zaključci analitičke analize zavojne ljuste na cilindričnoj ljusti

Matematički model kao podloga za automatizovano projektovanje zavojne ljuste na cilindričnoj ljusti, zasnovan na izvedenim diferencijalnim jednačinama savijanja zavojne ljuste i savijanja cilindrične ljuste opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji je omogućio veoma efikasno određivanje geometrijskih parametara zavojne ljuste na cilindričnoj ljusti. Uvođenje graničnih uslova (5.1) i (5.2) na presječnoj krivoj srednjih površi zavojne i cilindrične ljuste i zadržavanje uslova (3.104), po kojem su pomjeraji tačaka na toj krivoj jednaki nuli, naprotiv činjenice da ona u ovom slučaju nije ukliještena kao kod modela u Poglavlju 3, već se nalazi na elastičnoj strukturi cilindrične ljuste, pokazalo je punu opravdanost.

Konkretni naučni i stručni doprinos automatizovanom projektovanju konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuste na cilindričnoj ljusti predstavlja predloženi metod proračuna koji omogućava određivanje parametara zavojne i cilindrične ljuste za modele sa različitom geometrijom, opterećenjem, karakteristikama materijala, i dr. Ovaj proračun se odnosi na modele zavojnih ljusti na tankim cilindričnim ljustama koji se susreću kod radnih elemenata specijalnih mašina za čišćenje snijega [93], specijalnih građevinskih mašina i dr.

Programski paket MATLAB korišćen za numeričko rješavanje diferencijalne jednačine za ove aplikacije je i ovdje potvrdio svoju efikasnost.

Prikazani dijagrami zavisnosti napona od poluprečnika za različita opterećenja i geometrijske parametre pokazuju da se, u odnosu na modele

sa ukliještenim zavojnim ljuskama, vrijednosti maksimalnih napona u radijalnom pravcu neznatno mijenjaju.

Uporedni dijagrami ovih modela sa modelima ukliještenih zavojnih ljuski pokazuju da se vrijednosti maksimalnih pomjeraja na spoljašnjoj konturi povećavaju zbog deformacija cilindrične ljuske. Na veličinu nagiba zavojne ljuske na unutrašnjoj konturi i u vezi sa tim na veličinu pomjeraja ove ljuske utiče debljina cilindrične ljuske.

Promjene pomjeraja i napona u radijalnom pravcu u zavisnosti od nagiba zavojne ljuske kod ovih modela su slične sa promjenama ovih veličina kod modela ukliještenih zavojnih ljuski pa se zaključci o tim promjenama napona i pomjeraja dati u tački 3.8 odnose i na modele u ovom Poglavlju.

6. MKE ANALIZA

6.1. Teorijske osnove metoda konačnih elemenata

Numerički pristup koji pretpostavlja diskretizaciju problema u fizičkom modelu, dok se krajnji rezultat dobija rješavanjem sistema algebarskih jednačina je metod konačnih elemenata. MKE danas predstavlja najmoćniji i najviše korišćen metod analize koji se primjenjuje u nauci i tehnici.

Suština MKE se zasniva na diskretizaciji složenih struktura skupom međusobno povezanih djelova jednostavnih oblika, koji se mogu posebno analizirati tj. odrediti zavisnost između spoljašnjeg opterećenja i polja pomjeraja, unutar ovih jednostavnih tijela koja se nazivaju konačnim elementima (KE). Neprekidnost domena se obezbjeđuje zajedničkim tačkama dva ili više susjednih elemenata. Zbog svog jednostavnog oblika moguće je pronaći zavisnost opterećenja i pomjeraja u čvorovima konačnog elementa a tu zavisnost izraziti određenim aproksimativnim funkcijama. Primjenom odgovarajućeg postupka slaganja stanja pomjeraja svih konačnih elemenata koji čine model konstrukcije može se dobiti stanje pomjeraja u svim čvorovima modela konstrukcije. Kada su poznati pomjeraji u čvorovima, onda se primjenom odgovarajućeg postupka vrši određivanje stanja napona i deformacija u konačnom elementu.

Broj diskretnih modela za jedan problem je neograničeno veliki. Osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući problem. Razvijeni su numerički testovi za izbor optimalnih diskretnih modela. Uspješna primjena MKE, uz neophodnu podršku

software-a i hardware-a u vrlo velikoj mjeri zahtjeva inženjersku intuiciju i poznavanje prirode i suštine problema koji se rješava.

U zavisnosti od toga šta su osnovne nepoznate pomjeraji ili sile u širem smislu, u čvorovima diskretizovane strukture, MKE se primjenjuje kao metod pomjeraja, metod sila ili hibridni metod.

Stanje u svakom konačnom elementu (npr. polje pomjeraja, deformacija, napona i sl.) opisuje se pomoću interpolacionih funkcija. Za jedan konačni element u metodi pomjeraja interpolaciona funkcija predstavlja funkciju pomjeraja.

6.2. Osnovne jednačine elastomehanike. Metod pomjeraja

Jednačine elastomehanike se daju u matričnom zapisu koji naročito kod metoda konačnih elemenata daje niz prednosti nad komponentnim zapisom koristeći vektor funkcije pomjeraja $\{u\}$, deformacije $\{\epsilon\}$ i napona $\{\sigma\}$ bilo koje tačke elastičnog tijela u prostoru.

Jednačina za specifične deformacije u matričnom zapisu glasi

$$\{\epsilon\}=[L]\{u\} \quad (6.1)$$

gdje je $[L]$ matrica diferencijalnih operatora.

Veza između napona i spoljašnjih zapreminskih sila data je jednačinom ravnoteže koja u matričnom obliku glasi

$$[L]^T\{\sigma\}+\{F\}=\{0\} \quad (6.2)$$

Jednačine veze između napona i deformacija za elastično tijelo date su Hooke-ovim zakonom koji u matričnom obliku glasi

$$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\} \quad (6.3)$$

$[D]$ je matrica elastičnosti.

6.3. Funkcija pomjeraja, matrica krutosti KE

Kod metode pomjeraja nepoznata veličina je vektor pomjeraja dok se vektor deformacije i napona određuju na osnovu vektora pomjeraja. Za diskretizovanu strukturu konačnim elementima, pri korišćenju ovog metoda prethodno se određuju pomjeraji kao nepoznate veličine za zadato opterećenje a zatim se određuje bilans napona. Pomjeraji su isti za zajedničke čvorove dva ili više elemenata.

Matrica krutosti konačnog elementa koja u opštoj proceduri korišćenja MKE zauzima posebno mjesto, zatim deformacije i naponi, se određuju preko funkcije pomjeraja koja jednoznačno određuje deformacije unutar elementa preko pomjeraja čvorova.

Za konačni element definišu se vektor pomjeraja i vektor napadnih sila u obliku

$$\{u\}_{(k)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}, \quad \{F\}_{(k)} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ F_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Komponente ovih vektora su vektori za čvor

$$\{u_r\}_{(k)} = \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ \theta_{xr} \\ \theta_{yr} \\ \theta_{zr} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad \{F_r\}_{(k)} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_r \\ F_r \\ M_{xr} \\ M_{yr} \\ M_{zr} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad r=i,j,m,\dots \quad (6.5)$$

U čvorovima funkcije pomjeraja imaju vrijednost pomjeraja čvora tj.

$$\{u_r\}_{(k)} = \begin{Bmatrix} u(x_r, y_r, z_r) \\ v(x_r, y_r, z_r) \\ w(x_r, y_r, z_r) \end{Bmatrix}_{r=i,j,m,n,\dots} \quad (6.6)$$

Na osnovu ovih jednačina funkcija pomjeraja se može dati preko pomjeraja čvornih tačaka

$$\{u\} = [N] \{u\}_{(k)} \quad (6.7)$$

[N] je matrica funkcije pomjeraja. Relativne deformacije se određuju relacijom

$$\{\epsilon\} = [L][N] \{u\}_{(k)} = [B] \{u\}_{(k)} \quad (6.8)$$

Koristeći Hooke-ov zakon u matričnom obliku dobijaju se naponi u bilo kojoj tački konačnog elementa preko

$$\{\sigma\} = [D][B] \{u\}_{(k)} \quad (6.9)$$

Ako je $d\{u\}_{(k)}$ virtualni pomjeraj čvornih tačaka konačnog elementa (k) tada se na osnovu datih relacija ima

$$d\{u\} = [N] d\{u\}_{(k)} \quad d\{\epsilon\} = [B] d\{u\}_{(k)}$$

Za deformisani konačni element a na osnovu principa virtualnih pomjeraja rad spoljašnjih sila jednak je radu unutrašnjih sila tj.

$$(d\{u\}_k)^T \{F\}_{(k)} = \int_V (d\{\epsilon\}_k)^T \{\sigma\} dV \quad (6.10)$$

Poslije smjene se dobija

$$\{F\}_{(k)} = \left[\int_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{u\}_{(k)}$$
$$\{F\}_{(k)} = [K]_{(k)} \{u\}_{(k)} \quad (6.11)$$

Matrica krutosti $[K]_{(k)}$ za konačni element (k) je data relacijom

$$[K]_{(k)} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (6.12)$$

V je zapremina konačnog elementa.

Funkcije pomjeraja opisuju pomjeraje bilo koje tačke konačnog elementa i mogu se opisati Kartezijanskim lokalnim koordinatama ili prirodnim koordinatama konačnog elementa. U ovim jednačinama je uvedena matrica funkcije pomjeraja [N] koja povezuje pomjeraje u bilo kojoj tački u unutrašnjosti konačnog elementa sa pomjerajima čvorova istog elementa. Od ovih funkcija se zahtijeva da obezbijede dobru aproksimaciju u elementu, kontinuitet između elemenata i da su što jednostavnije. Ova svojstva posjeduju polinomi, koji se uglavnom koriste kao interpolacione funkcije.

6.4. Statički proračun noseće strukture

Statički proračun nosećih struktura mašinskih konstrukcija obuhvata proračun deformacija i napona diskretizovanog modela. Iz ukupnog bilansa pomjeraja čvorova tačaka određuju se deformacije, dok se stanje napona određuje za svaki konačni element. Osnovna statička jednačina diskretizovane strukture u matričnom obliku glasi

$$[K]\{u\}=\{F\} \quad (6.13)$$

gdje su $[K]$ ukupna matrica krutosti, $\{u\}$ globalni vektor nepoznatih pomjeraja i $\{F\}$ ukupan vektor napadnih sila.

Vektor opterećenja može biti sadržan od spoljašnjeg koncentrisanog opterećenja i lokalnog kontinualnog opterećenja konačnog elementa.

Ukupna matrica krutosti predstavlja određen skup podmatrica krutosti elemenata nad kojima se prije lociranja u globalnoj matrici krutosti vrši transformacija iz lokalnog, za konačni element, u apsolutni koordinatni sistem za cijelu strukturu

$$[K] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)} \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, n_k \quad (6.14)$$

gdje su n ukupan broj čvorova, n_k ukupan broj elemenata.

Saglasno ukupnoj matrici krutosti, ukupni vektor pomjeraja i opterećenja glase

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r \ \dots \ u_n\}^T \\ \{F\} &= \{F_1 \ F_2 \ \dots \ F_r \ \dots \ F_n\}^T \end{aligned} \quad (6.15)$$

gdje su $\{u_r\}$ i $\{F_r\}$ vektori pomjeraja i opterećenja za numerisani čvor r .

Matrica krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu glasi

$$[K_{rs}]_{(k)} = [T]^T [\bar{K}_{rs}]_{(k)} [T] \quad (6.16)$$

gdje je $[\bar{K}_{rs}]$ matrica krutosti konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sistemu, $[T]$ matrica transformacije.

Metode za rješavanje statičke jednačine (6.16) podijeljene su na direktne i iterativne. U direktne metode spadaju metod Gauss-ove eliminacije i metod dekompozicije Choleski, dok u iterativne metode spadaju Gauss-Seidelova metoda, gradijentna metoda i druge.

6.5. Programski paketi za analizu MKE

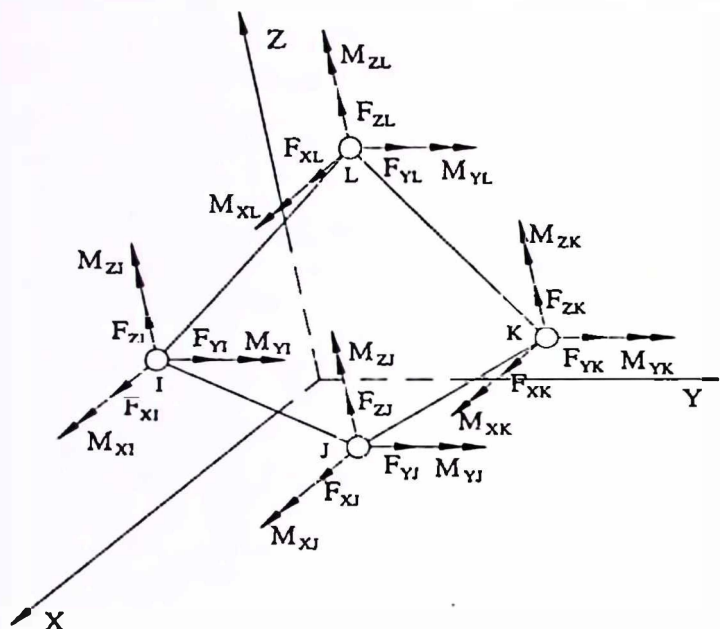
Za numeričku analizu složenih struktura metodom konačnih elemenata razvijen je veliki broj programskih paketa. U ovom radu za analizu modela zavojne ljuske korišćeni su programski paketi ALGOR [1] i Pro/MECHANICA [71] i [72] koji su instalirani na PC računarima Pentium II u 3D centru Mašinskog fakulteta u Podgorici.

Programski paket ALGOR u dužem vremenskom periodu predstavlja jedan od razvijenijih programa za analizu MKE za PC računare. Snabdjeven je procesorom za statičke analize SSAP0, nelinearne statičke analize, dinamičke analize, analize kompozitnih materijala i dr. Raspolaže sa više tipova konačnih elemenata greda, 2D ploča, 3D ploča - ljuski, zapreminskih elemenata i dr.

U ovom radu je korišćen element ljuske tip "PLATE" (TYPE 6). Ovaj tročvorovni ili četvoročvorovni element je formulisan u trodimenzionalnom prostoru. To je KE sa pet lokalnih stepeni slobode, tri translacije i dvije rotacije, koje proizvode vanravansko savijanje. Element ljuske u globalnom koordinatnom sistemu ima šest stepeni slobode, kako je to prikazano na slici 6.1. Razvijeni generatori mreže SGEN, HGEN, MERLIN, SOLMESH, SURFMESH, XGEN u ovom programskom paketu omogućavaju automatizovano generisanje mreže različitih geometrijskih modela. Programski paket ALGOR je tipičan predstavnik programa čije su karakteristike generisanje mreža modela sa puno pravilnih KE jednostavnog oblika, sa jednostavnim interpolacionim funkcijama i efikasnim programom za numeričko iterativno rješavanje sistema koji imaju veliki broj jednačina. Programski paket ALGOR verzija 12 ima mogućnost povezivanja sa programskim paketom



Pro/ENGINEER što omogućava efikasno geometrijsko modeliranje u ovom programu koji ima mogućnosti parametarskog modeliranja.



Slika 6.1 Konačni element ploče - ljuske u globalnom koordinatnom sistemu

Za prezentaciju rezultata izvršenih analiza po pomjerajima, naponima, deformacijama i dr., u programskom paketu ALGOR koristi se program SUPERVIEW. Moguće je analizirati napone po kriterijumima: Von Mises, Tresca, maksimalni glavni napon, minimalni glavni napon, komponente tenzora napona i dr.

Pro/MECHANICA je savremeni programski paket za analize MKE i predstavlja jedan od proizvoda firme Parametric Technology Corporation. Pro/MECHANICA se povezuje sa ostalim programima ove firme Pro/ENGINEER, Pro/DBMS i Pro/DRAW. Izrada modela i vršenje analiza su u ovom radu izvedene programom Pro/MECHANICA STRUCTURE 20. Ovaj programski paket sadrži i programe

Pro/MECHANICA MOTION i Pro/MECHANICA THERMAL za kinematičko - dinamičke i termičke analize.

Programski paket Pro/MECHANICA koristi različite tipove KE greda, ploča - ljuski, 3D elemenata i dr. Karakteristika ovog programskog paketa je da, za razliku od drugih kao što su ALGOR i slični, postiže visoku tačnost rezultata sa manjim brojem KE koji imaju visok stepen interpolacionih polinoma.

Mogućnost ovog programskog paketa da automatizovano generiše mreže KE (podprogram AUTOGEM) za modele koji se sastoje od više spojenih ljuski je u ovom radu bila od velikog značaja za efikasne analize različitih modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci.

Programski paket Pro/MECHANICA ima mogućnost ispitivanja konvergencije rezultata po različitim kriterijumima. U ovom radu je korišćena adaptivna iterativna metoda ("Multiple Pass Adaptive") koja omogućava postizanje željenog nivoa konvergencije rezultata sprovedenih analiza. Realizacija ove metode se zasniva na iterativnom povećavanju stepena interpolacionog polinoma do postizanja željene tačnosti. Maksimalni stepen polinoma u ovom programskom paketu je devet.

Programski paket Pro/MECHANICA ima razvijene mogućnosti grafičke prezentacije modela i rezultata izvršenih analiza, prikazivanje vektora koncentrisanih i kontinualnih opterećenja po liniji i površi, prikazivanje izonaponskih linija i površi za različite komponente napona, deformacija, pomjeraja i dr. Ovaj program ima mogućnost prikazivanja dijagrama promjene veličina napona, deformacija, pomjeraja i dr. duž određene krive na analiziranom modelu što se koristi u ovom radu.

6.6. MKE analiza zavojne ljuske ukliještene na unutrašnjoj konturi

Izvršena je analiza MKE zavojne ljuske ukliještene na unutrašnjoj konturi prema modelu koji je teorijski razmatran u Poglavlju 3. U cilju upoređivanja dobijenih rezultata korišćeni su programski paketi za analizu MKE, ALGOR i Pro/MECHANICA.

Analiziran je mehanički model sa sledećim parametrima: $a=130\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, opterećenje ravnomjernim pritiskom $p=0.15\text{ N/mm}^2$, $H=140\text{ mm}$, $E=200000\text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $h_h=4\text{ mm}$.

Rezultati analize u programskom paketu ALGOR su dati na slikama od 6.2 do 6.5. Na slici 6.2 prikazana je mreža KE modela zavojne ljuske koja je ukliještена po unutrašnjoj konturi. Model je generisan sa 8895 četvoročvorovnih KE ljuske i 9535 čvornih tačaka (ČT). Na slikama 6.3 i 6.4 su prikazane izonaponske površi za glavne napone i napone u radijalnom pravcu. Na slici 6.5 su prikazani rezultati za pomjeraje u z pravcu.

Rezultati analiza u programskom paketu Pro/MECHANICA za ovaj model ukliještene zavojne ljuske su prikazani na slikama od 6.6 do 6.13. Na slici 6.6 prikazana je mreža KE koja je generisana sa 101 KE (99 četvorougaoih KE i dva trugaona KE) i 153 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je sedam. Konvergencija rezultata je u granicama 1 %.

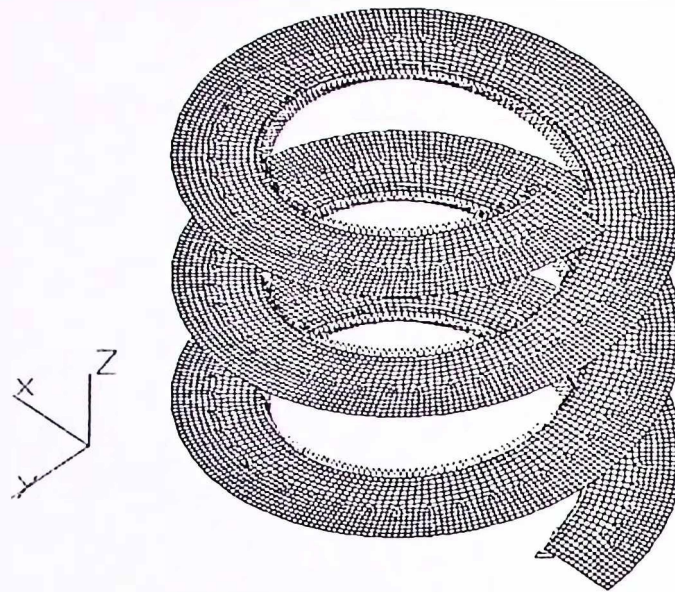
Na slikama 6.7 i 6.8 su prikazane vrijednosti za glavne napone i napone u radijalnom pravcu, a na slici 6.9 su prikazani pomjeraji u z pravcu. Na slikama 6.10 i 6.11 su prikazani dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu duž linije na zavojnoj ljusci u radijalnom pravcu između

tačaka sa koordinatom $r=130\text{mm}$ i $r=200\text{mm}$, za debljine ljuske $h_h=4\text{ mm}$ i $h_h=3.6\text{ mm}$ respektivno. Na slikama 6.12 i 6.13 su prikazani dijagrami promjene pomjeraja u z pravcu duž linije na zavojnoj ljusci koja je prethodno opisana za debljine ljuske $h_h=4\text{ mm}$ i $h_h=3.6\text{ mm}$.

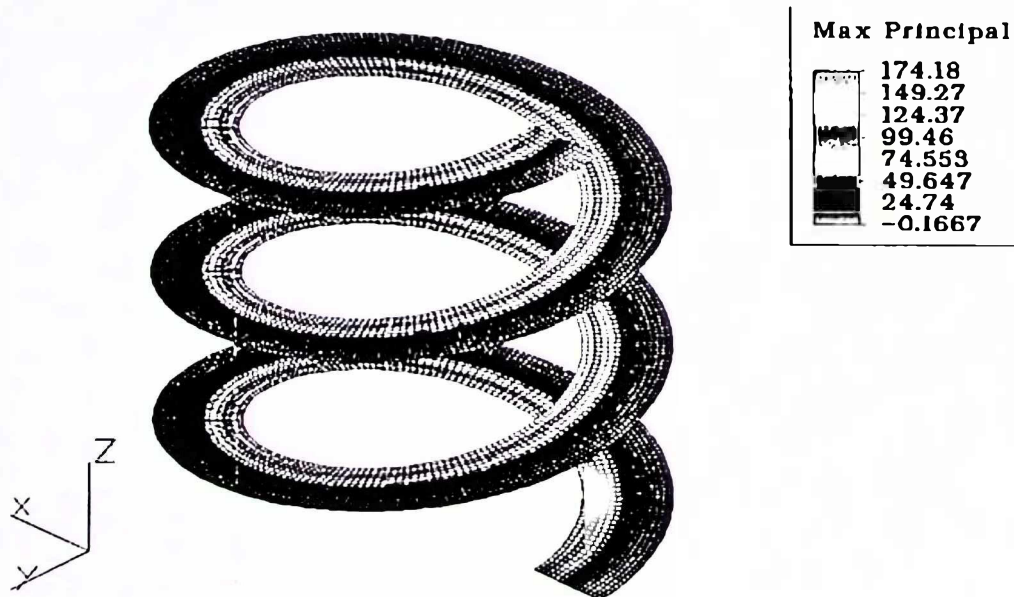
Na slikama 6.14 do 6.17 su prikazani rezultati analiza u programskom paketu Pro/MECHANICA za model ukliještene prstenaste ploče po unutrašnjoj konturi sa sledećim parametrima: $a=136\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, opterećenje ravnomjernim pritiskom $p=0.15\text{N/mm}^2$, $E=200000\text{N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $h_h=4.15\text{mm}$.

Na slici 6.14 su prikazane, za ovaj model, veze, opterećenje i mreža KE koja je generisana sa 64 četvorougona KE i 80 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je pet. Konvergencija rezultata je u granicama 1%. Na slici 6.15 su prikazani pomjeraji u z pravcu za ovaj model ukliještene prstenaste ploče.

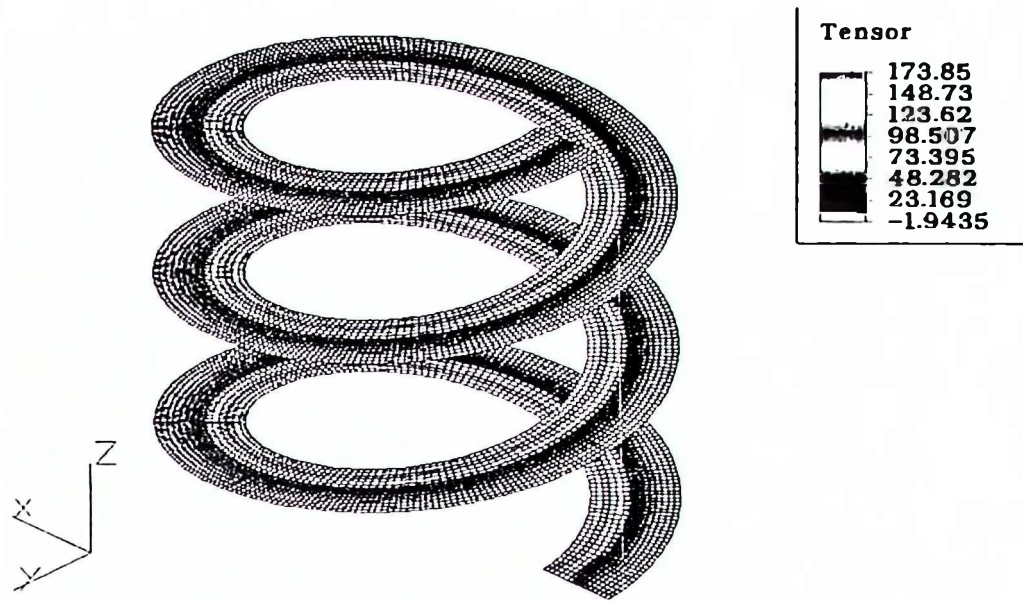
Na slikama 6.16 i 6.17 su prikazani dijagrami promjene pomjeraja u z pravcu i napona u radijalnom pravcu duž linije na prstenastoj ploči u radijalnom pravcu između tačaka sa koordinatom $r=136\text{ mm}$ i $r=200\text{ mm}$.



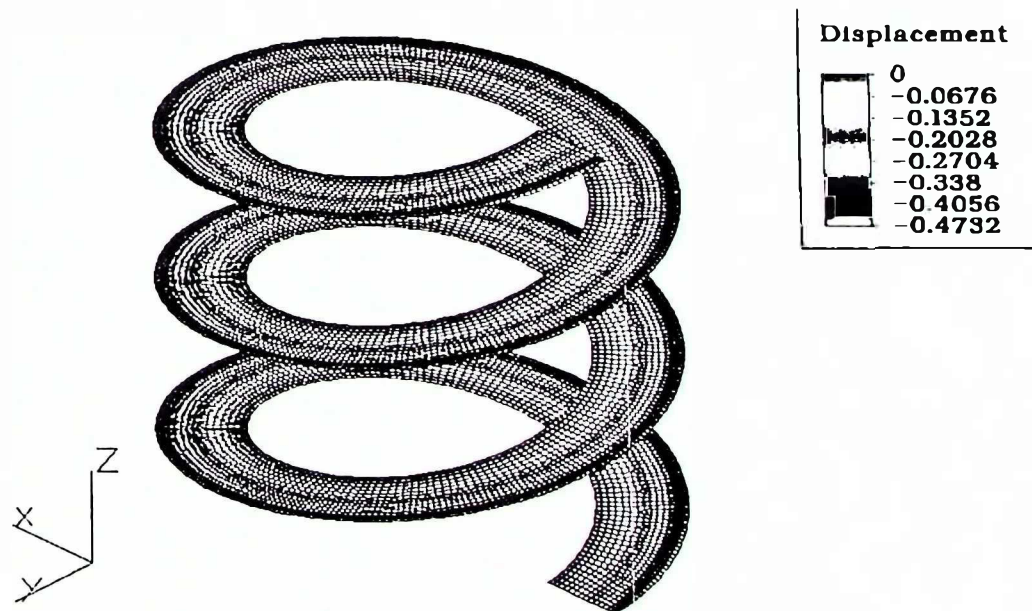
Slika 6.2 Mreža KE, ukliještana zavojna ljuska
(programski paket ALGOR)



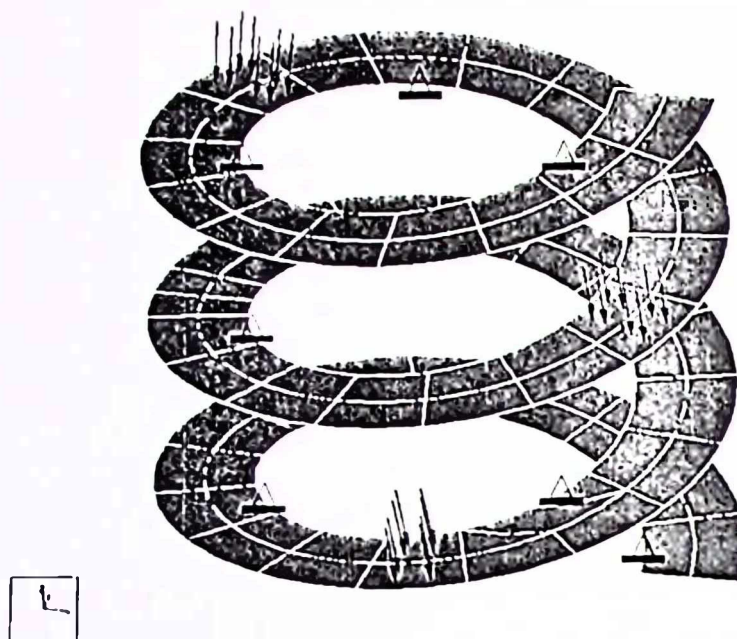
Slika 6.3 Glavni naponi za ukliještenu zavojnu ljusku
(programski paket ALGOR)



*Slika 6.4 Naponi u radijalnom pravcu za uklještenu zavoju ljusku
(programski paket ALGOR)*

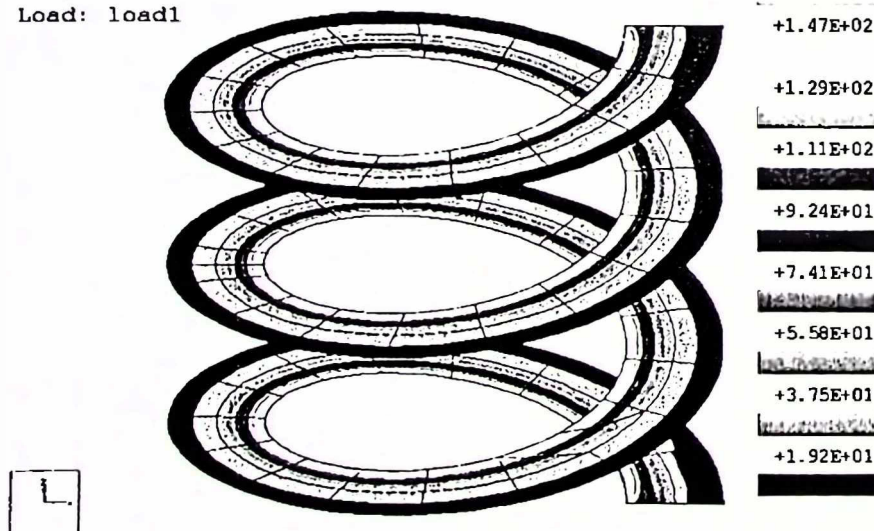


*Slika 6.5 Pomjeraji u z pravcu za uklještenu zavoju ljusku
(programski paket ALGOR)*

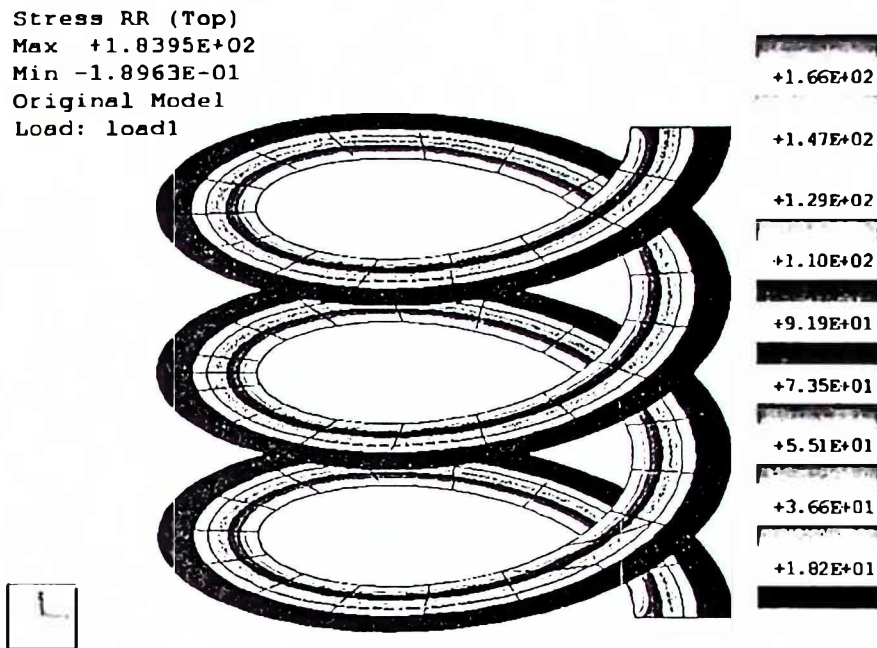


Slika 6.6 Mreža KE, ukliještenu zavojna ljuska

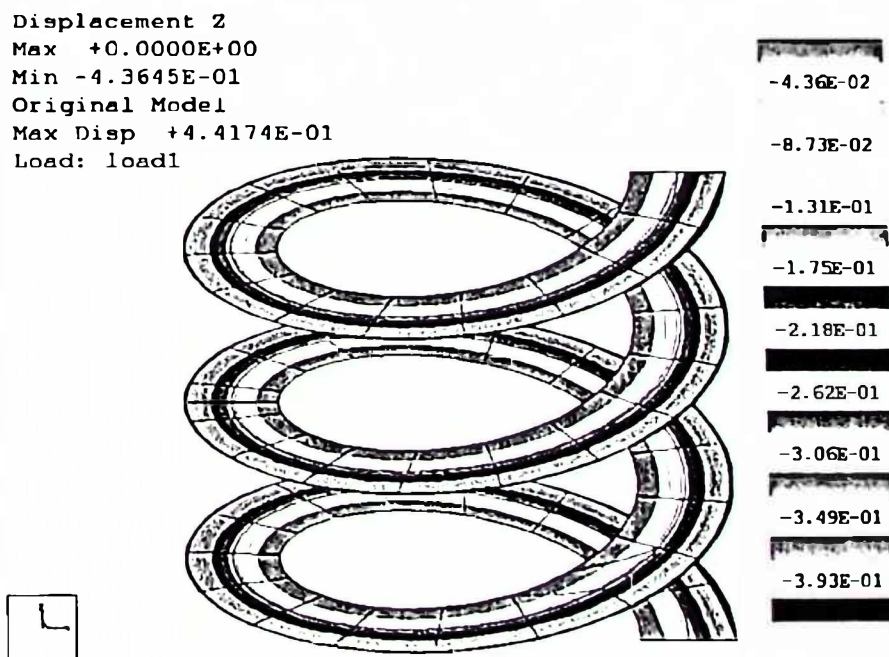
Stress Max Prin (Top)
 Max +1.8395E+02
 Min +9.2367E-01
 Original Model
 Load: load1



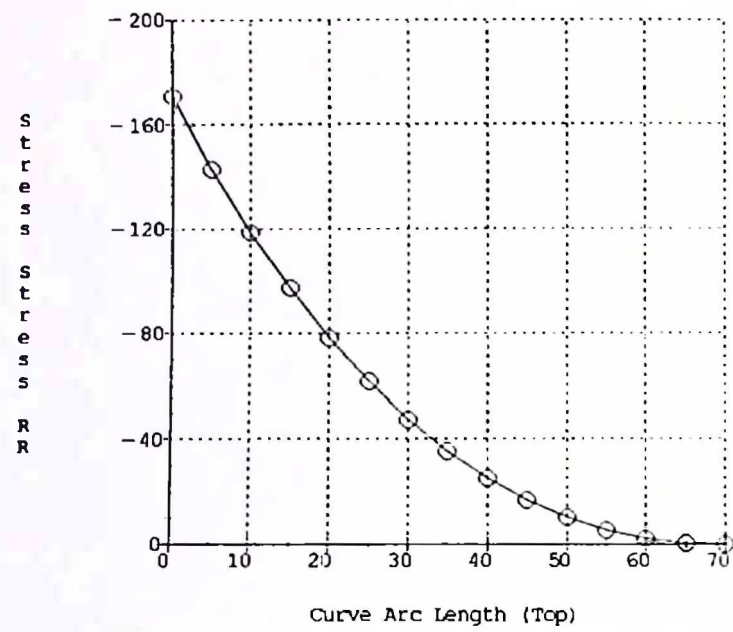
Slika 6.7 Glavni naponi za ukliještenu zavojnu ljusku



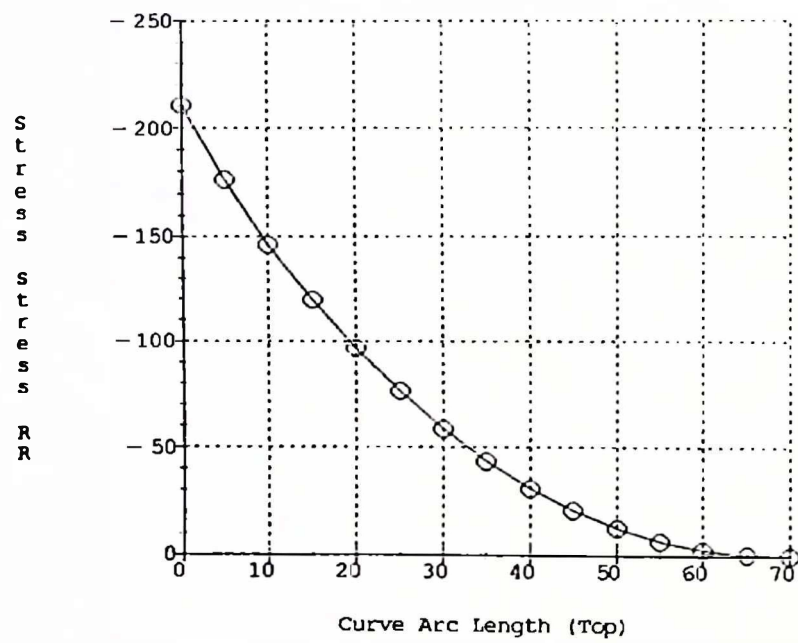
Slika 6.8 Naponi u radijalnom pravcu za uklještenu zavoju ljusku



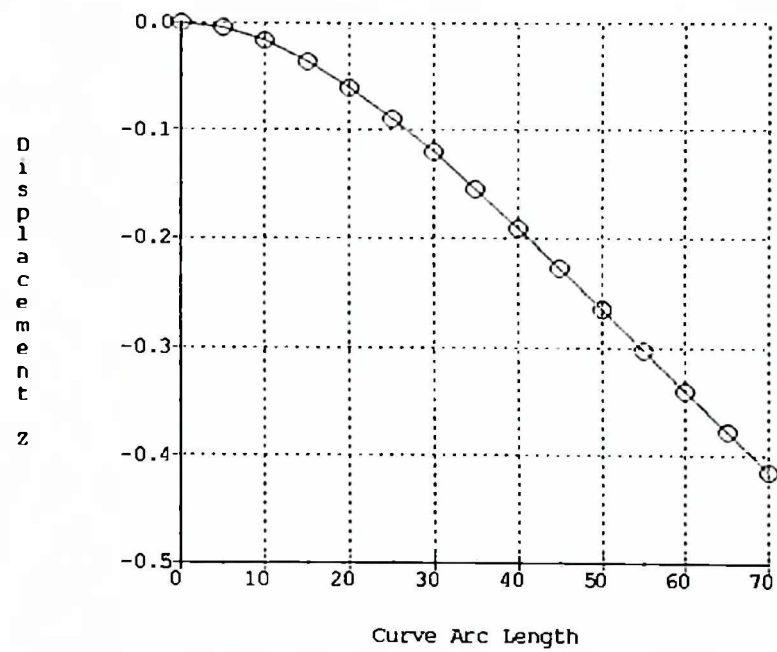
Slika 6.9 Pomjeraji u z pravcu za uklještenu zavoju ljusku



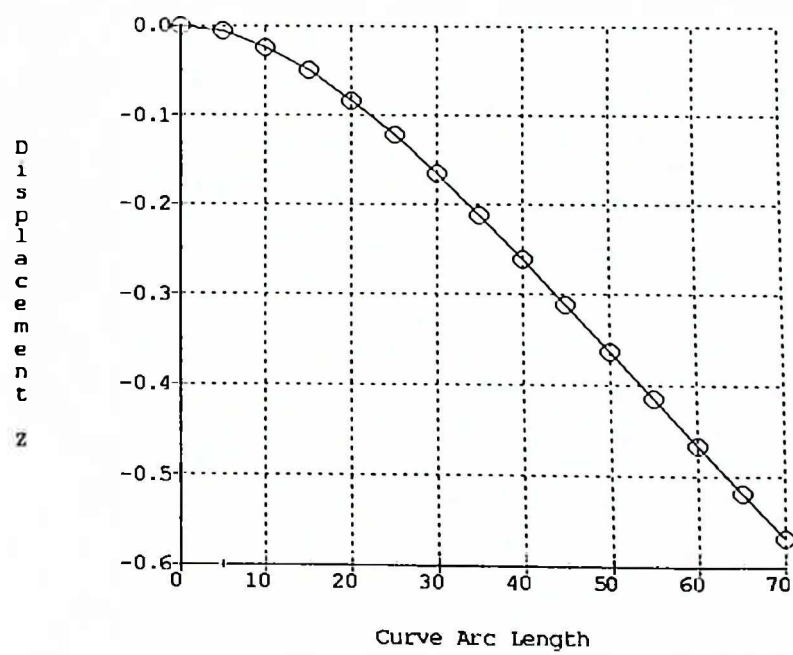
Slika 6.10



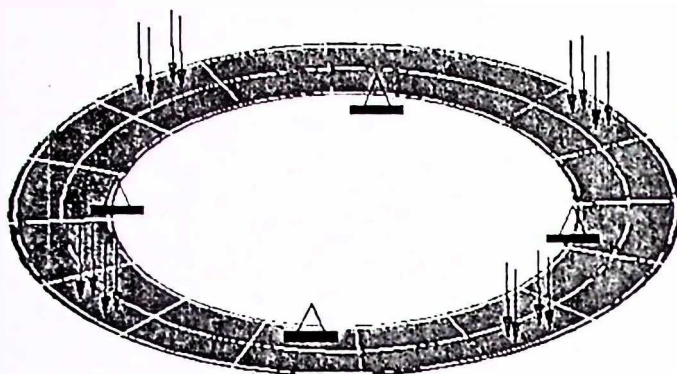
Slika 6.11



Slika 6.12

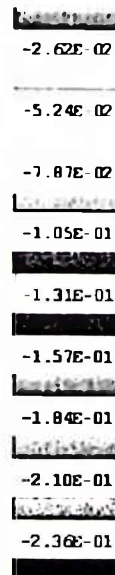
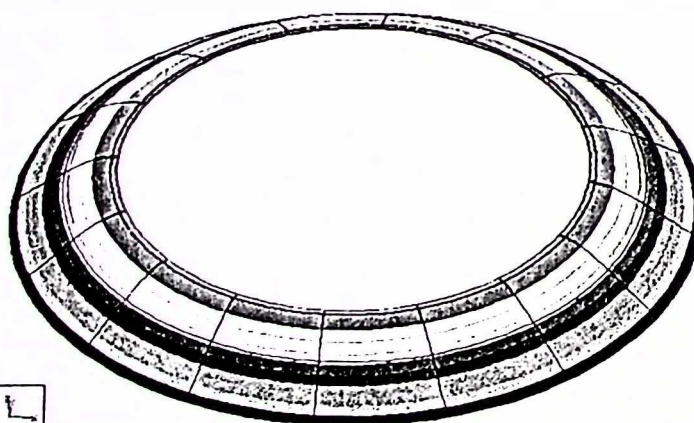


Slika 6.13

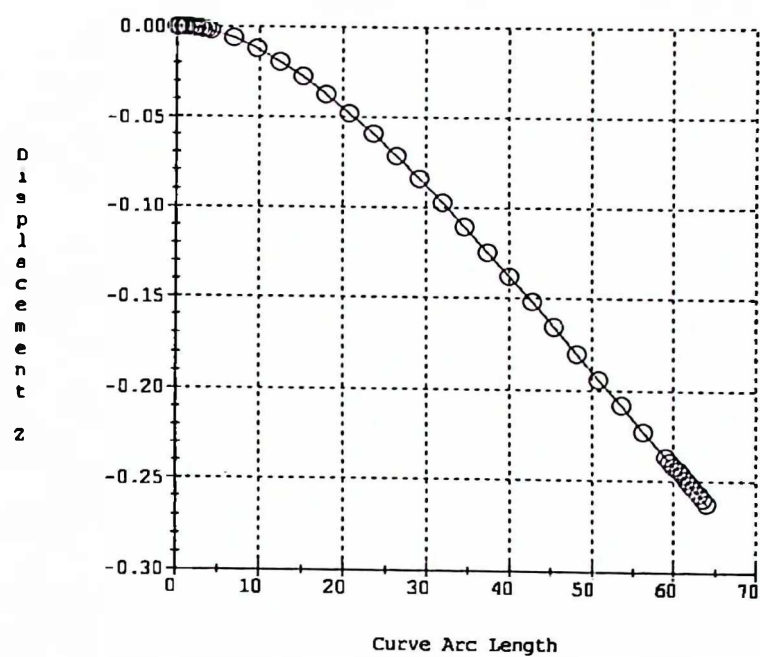


Slika 6.14 Mreža KE, ukliještena prstenasta ploča

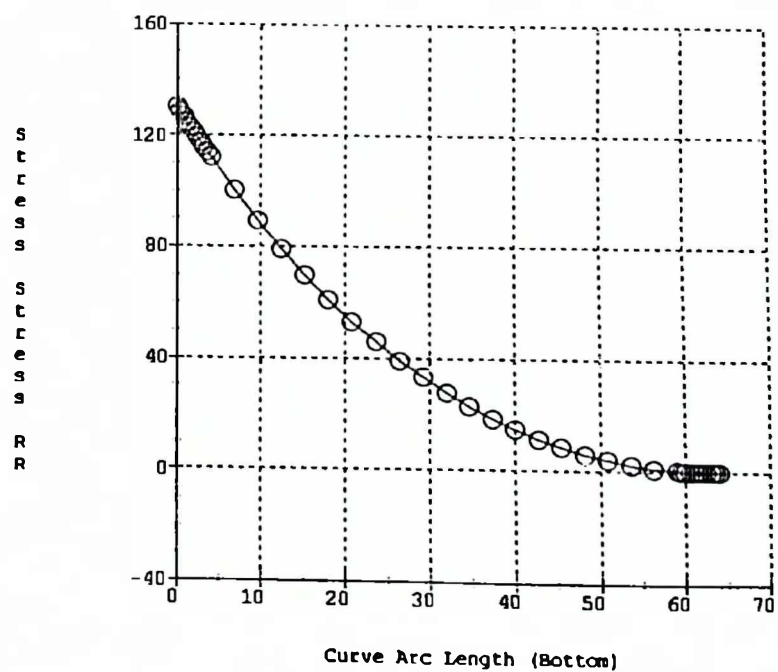
Displacement Z
 Max +0.0000E+00
 Min -2.6220E-01
 Deformed Original Model
 Max Disp +2.6220E-01
 Scale 1.5256E+02
 Load: load1



Slika 6.15 Pomjeraji u z pravcu za ukliještenu prstenastu ploču



Slika 6.16



Slika 6.17

6.7 MKE analiza zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci

Izvršena je analiza MKE tri modela zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci korišćenjem programskog paketa Pro/MECHANICA. Vrijednosti parametara za sve razmatrane modele su date u Tabeli 6.1.

Tabela 6.1 Parametri modela zavojnih ljuski

		PARAMETRI							
		a (mm)	b (mm)	h_b (mm)	H (mm)	h_c (mm)	ν	E (N/mm ²)	ρ (N/mm ²)
MODEL	A	127	200	4 3.6	140	6	0.3	$2 \cdot 10^5$	0.15
	B			4.15 4	0				
	C			4	∞				

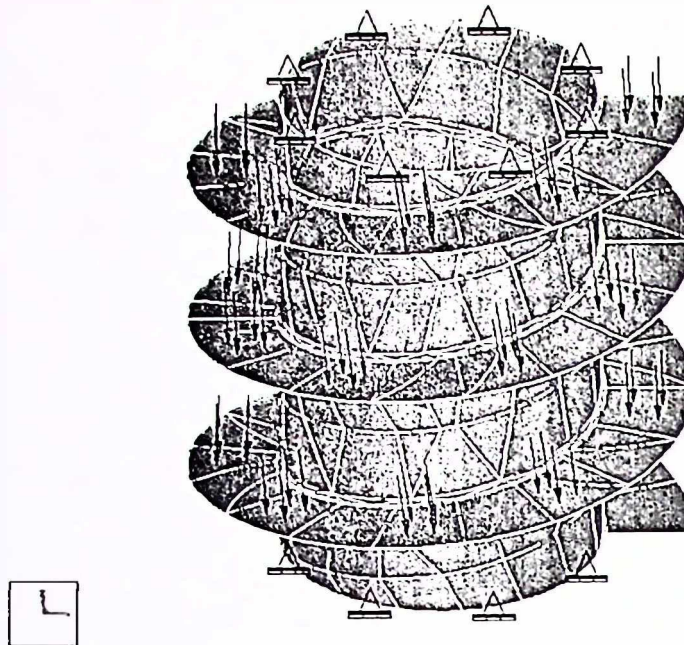
6.7.1 MKE analiza, model A

Na slici 6.18 prikazana je mreža KE sa vezama i opterećenjem koje djeluje samo na zavojnu ljusku. Model sadrži samo jednu zavojnu ljusku na cilindričnoj ljusci sa istim geometrijskim parametrima kao kod modela A. Ovaj model je analiziran zbog potrebe upoređivanja rezultata MKE sa rezultatima analitičkih analiza. Mrežu modela čini 331 KE ljuske (93 trugaona KE i 242 četvorougaona KE) i 329 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je devet, a konvergencija rezultata je u granicama 1 %.

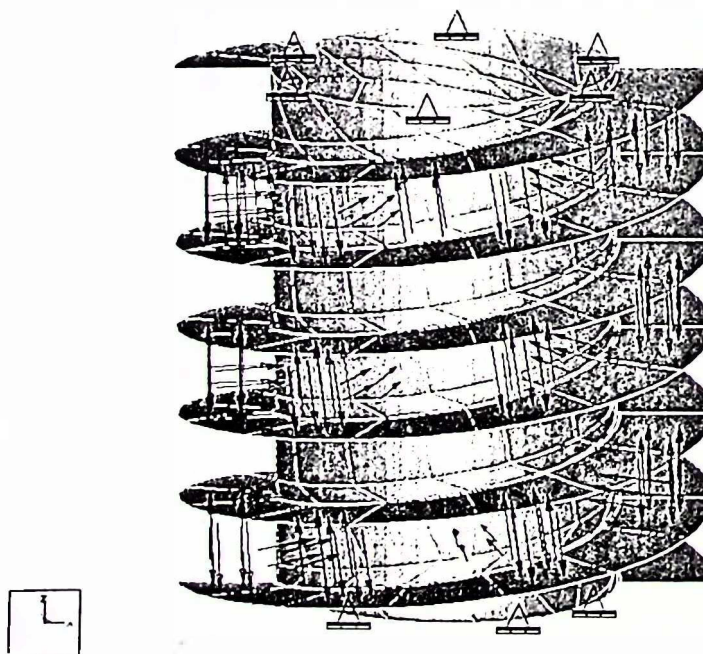
Na slici 6.19 prikazana je mreža KE sa vezama i opterećenjem za model A. Model A je generisan sa 440 KE (398 četvorougaonih KE i 42

trugaona) i 439 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je devet. Konvergencija rezultata je u granicama 1 %.

Na slikama 6.20 i 6.21 su prikazane vrijednosti za glavne napone i pomjeraje u z pravcu za model sa jednostrukom zavojnom ljuskom na cilindričnoj ljusci. Na slici 6.22 prikazane su vrijednosti glavnih napona, a na slici 6.23 pomjeraji u z pravcu za model A. Na slikama 6.24 i 6.26 date su vrijednosti za napone u radijalnom pravcu za debljine zavojne ljuske $h_h=4$ mm i $h_h=3.6$ mm respektivno. Ove dodatne analize sa korigovanim debljinama su urađene sa ciljem upoređivanja rezultata MKE analiza sa rezultatima eksperimentarnih istraživanja. Vrijednosti napona u cirkularnom pravcu za debljine zavojne ljuske $h_h=4$ mm i $h_h=3.6$ mm su prikazane na slikama 6.25 i 6.27. Na slikama od 6.28 do 6.37 su prikazani dijagrami promjene napona i pomjeraja duž linije na zavojnoj ljusci u radijalnom pravcu između dvije tačke. Početna tačka intervala dužine 70mm ima koordinatu $r=130$ mm, zadnja tačka intervala je na spoljašnjoj konturi zavojne ljuske i ima koordinatu $r=200$ mm. Na slikama 6.28 i 6.29 su dati dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu za model sa jednostrukom zavojnom ljuskom na cilindričnoj ljusci za debljine $h_h=4$ mm i $h_h=3.6$ mm. Na slikama 6.30 i 6.31 su dati dijagrami promjene pomjeraja u z pravcu za ovaj model i za navedene debljine ljuske. Na slikama 6.32 i 6.33 su dati dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu za model A i debljine ljuske $h_h=4$ mm i $h_h=3.6$ mm. Na slikama 6.34 i 6.35 su za navedene debljine ljuski dati dijagrami promjene napona u cirkularnom pravcu za ovaj model. Na slikama 6.36 i 6.37 su za naznačeni interval dati dijagrami promjene pomjeraja u z pravcu za razmatrani model A i debljine ljuske $h_h=4$ mm i $h_h=3.6$ mm.

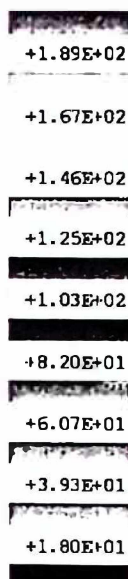
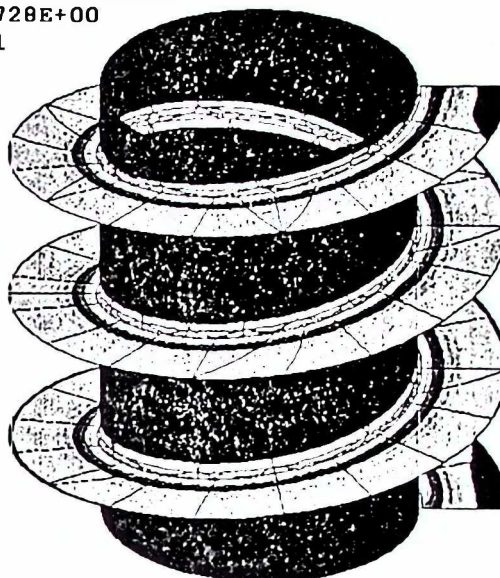


*Slika 6.18 Mreža KE, model A
(jednostruka zavojna ljuska)*



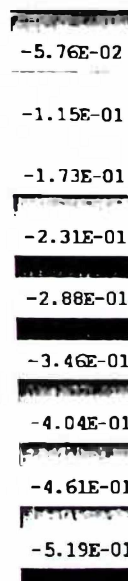
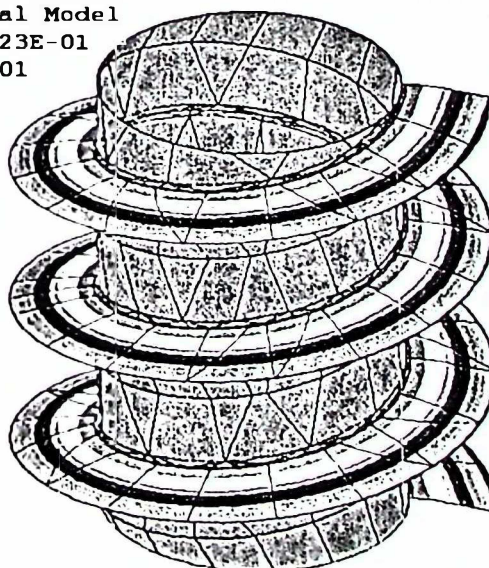
Slika 6.19 Mreža KE, model A

Stress Max Prin (Maximum)
Avg. Max +2.1015E+02
Avg. Min -3.3728E+00
Original Model
Load: load1



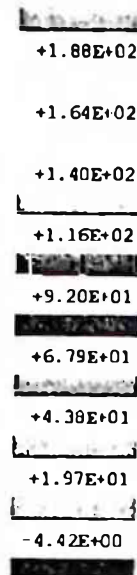
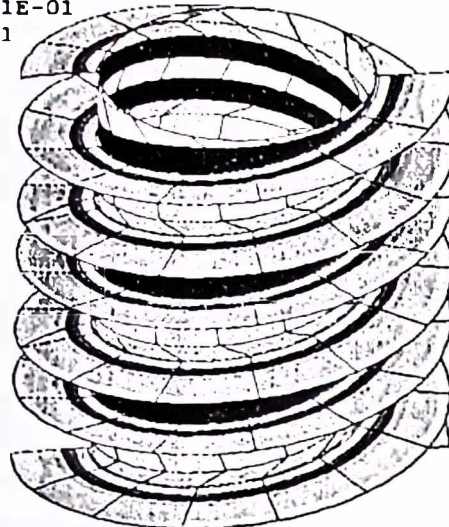
Slika 6.20 Glavni naponi za model A
(jednostruka zavojna ljuska)

Displacement Z
Max +9.7985E-05
Min -5.7685E-01
Deformed Original Model
Max Disp +5.8423E-01
Scale 2.5000E+01
Load: load1



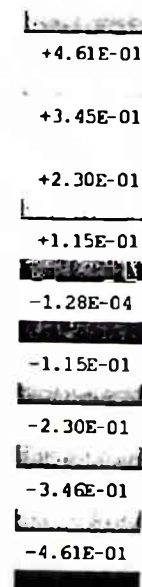
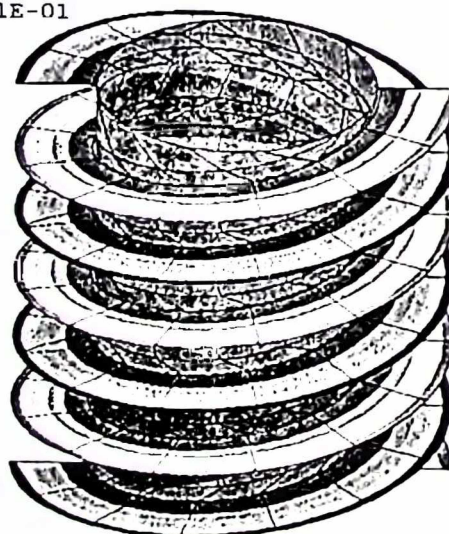
Slika 6.21 Pomjeraji u z pravcu za model A
(jednostruka zavojna ljuska)

Stress Max Prin (Top)
 Max +2.1257E+02
 Min -2.8525E+01
 Deformed Original Model
 Max Disp +5.8331E-01
 Scale 1.2000E+01
 Load: load1



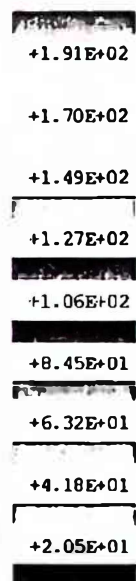
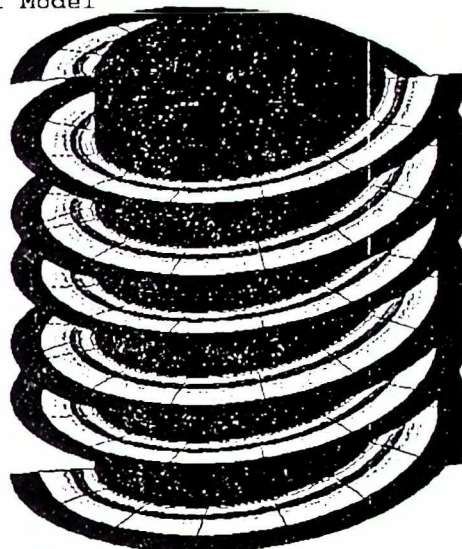
Slika 6.22 Glavni naponi za model A

Displacement Z
 Max +5.7570E-01
 Min -5.7596E-01
 Original Model
 Max Disp +5.8331E-01
 Load: load1



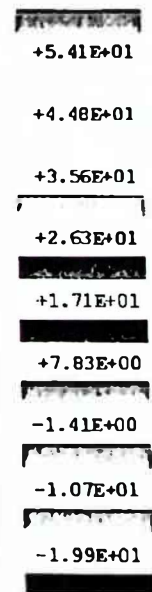
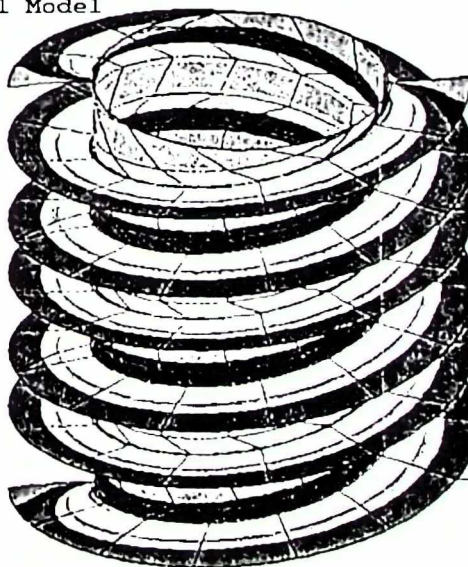
Slika 6.23 Pomjeraji u z pravcu za model A

Stress RR (Top)
 Max +2.1255E+02
 Min -8.2790E-01
 Deformed Original Model
 Load: load1



Slika 6.24 Naponi u radijalnom pravcu za model A
($h_h = 4 \text{ mm}$)

Stress TT (Top)
 Max +6.3304E+01
 Min -2.9151E+01
 Deformed Original Model
 Load: load1



Slika 6.25 Naponi u cirkularnom pravcu za model A
($h_h = 4 \text{ mm}$)

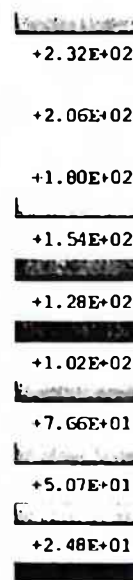
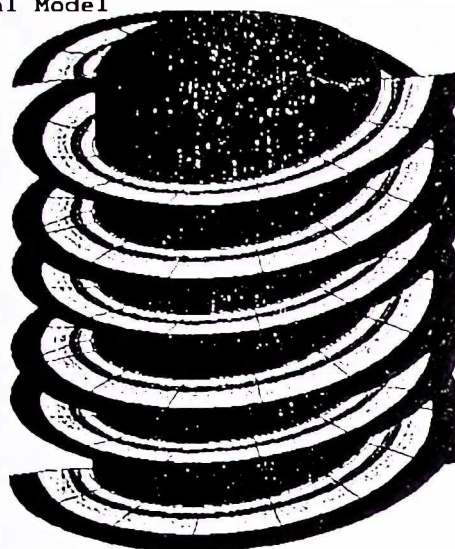
Stress RR (Top)

Avg. Max +2.5763E+02

Avg. Min -1.0156E+00

Deformed Original Model

Load: load1



Slika 6.26 Naponi u radijalnom pravcu za model A
($h_h = 3.6 \text{ mm}$)

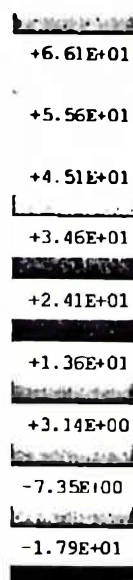
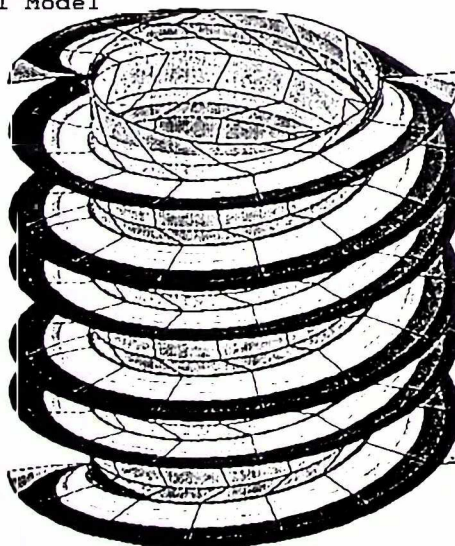
Stress TT (Top)

Avg. Max +7.6621E+01

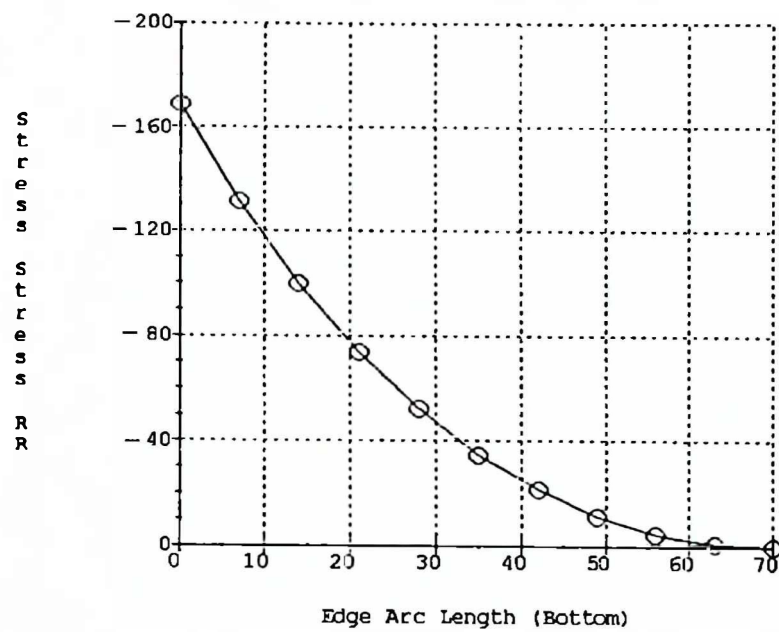
Avg. Min -2.8348E+01

Deformed Original Model

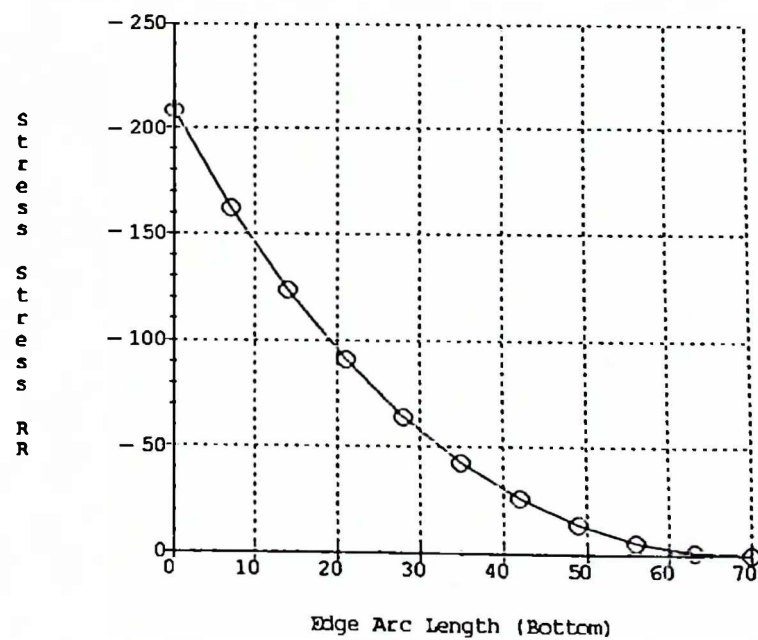
Load: load1



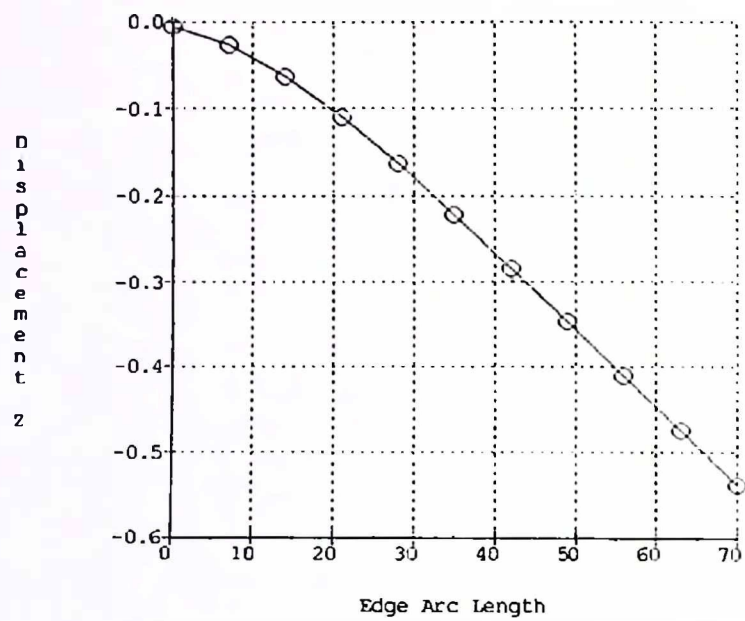
Slika 6.27 Naponi u cirkularnom pravcu za model A
($h_h = 3.6 \text{ mm}$)



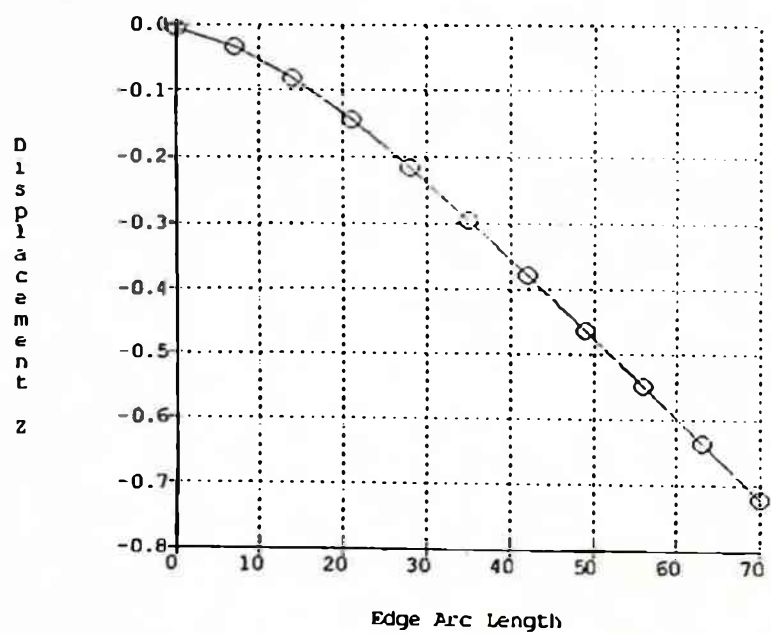
Slika 6.28



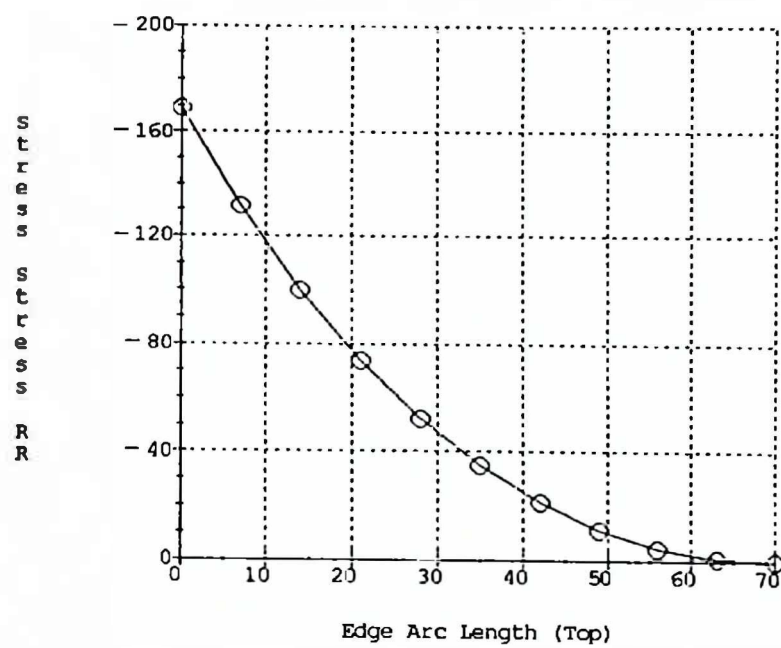
Slika 6.29



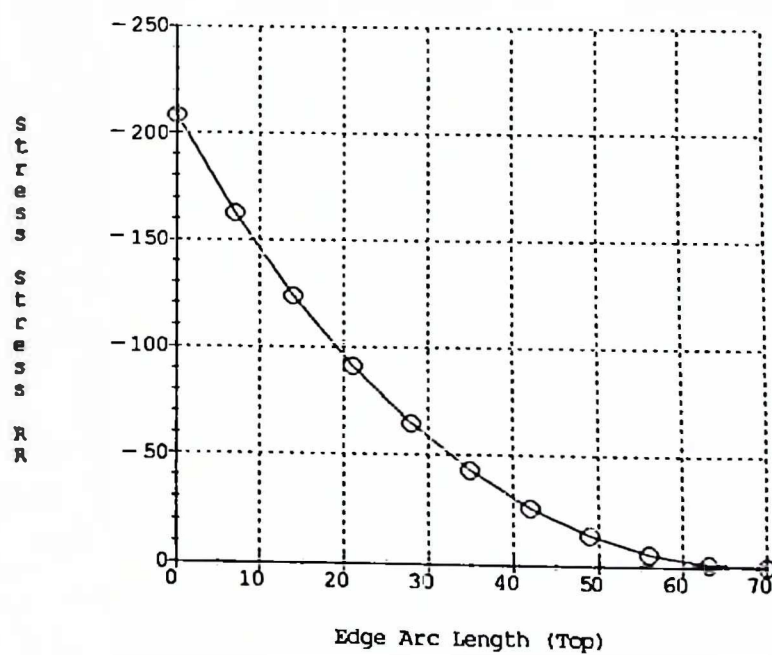
Slika 6.30



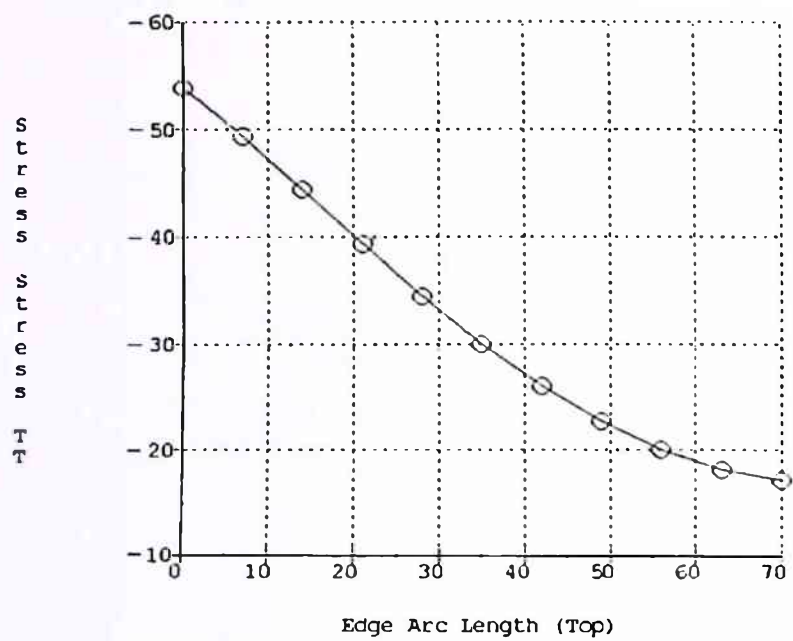
Slika 6.31



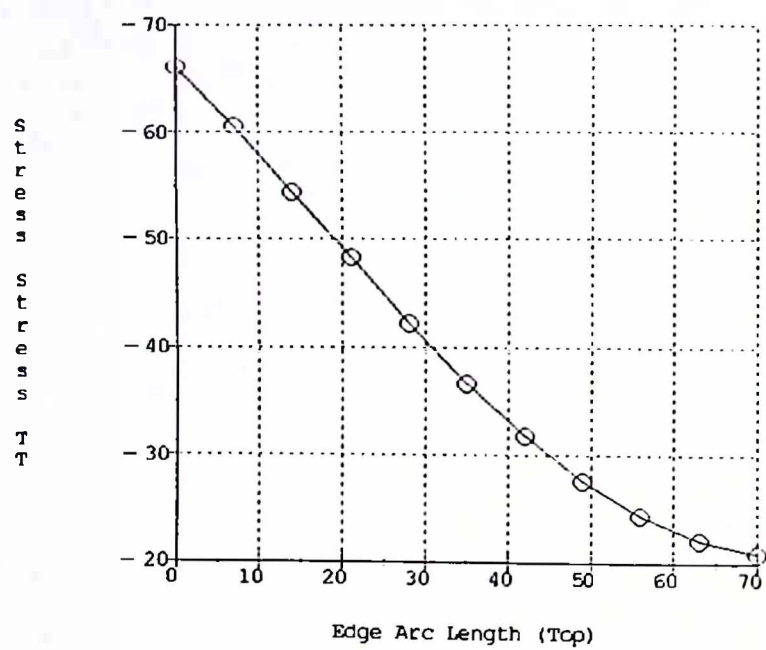
Slika 6.32



Slika 6.33



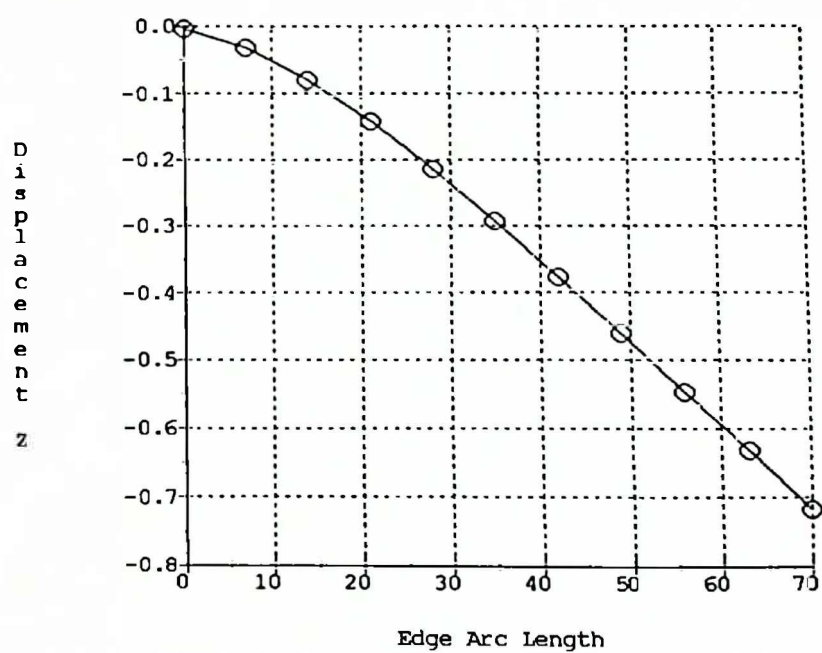
Slika 6.34



Slika 6.35



Slika 6.36

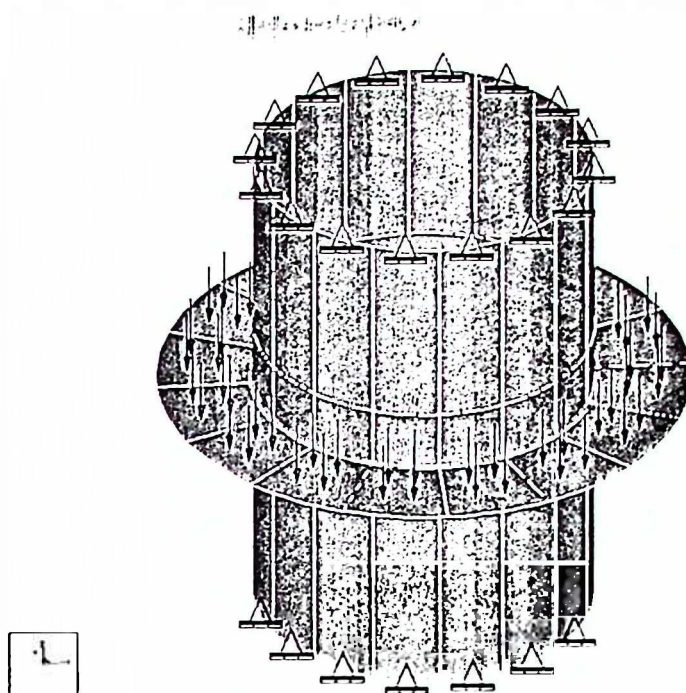


Slika 6.37

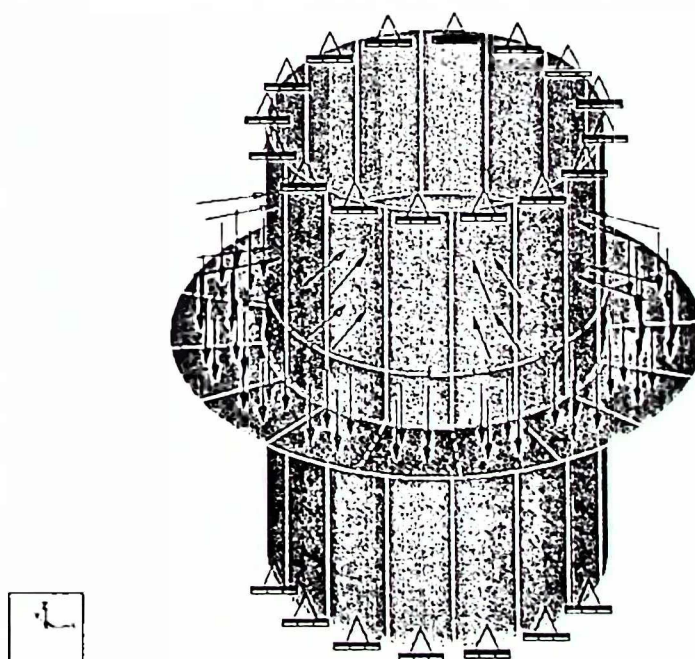
6.7.2 MKE analiza, model B

Na slici 6.38 prikazana je mreža KE sa vezama i opterećenjem koje djeluje samo na prstenastu ploču, sa istim geometrijskim parameterima kao kod modela B. Na slici 6.39 je prikazana mreža KE sa vezama i opterećenjem za model B. I jedan i drugi model su generisani sa 96 četvorougaoih KE ljuske i 112 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je pet. Konvergencija rezultata je u granicama 1 %. Na slici 6.40 prikazane su vrijednosti glavnih napona, a na slici 6.41 vrijednosti pomjeraja u z pravcu za model B. Na slikama 6.42 i 6.44 date su vrijednosti za napone u radijalnom pravcu za debljine prstenaste ploče 4 i 4.15 mm respektivno. Na slikama 6.43 i 6.45 date su izonaponske površine za napone u cirkularnom pravcu za navedene debljine prstenaste ploče.

Na slikama od 6.46 do 6.53 su prikazani dijagrami promjene napona i pomjeraja duž linije na prstenastoj ploči u radijalnom pravcu na intervalu dužine 70 mm. Početna tačka ima koordinatu $r=130\text{mm}$, a krajnja tačka je na spoljšnjoj konturi prstenaste ploče i ima koordinatu $r=200\text{mm}$. Na slikama 6.46 i 6.47 su dati dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu za model bez pritiska na cilindričnoj ljusci za debljine prstenaste ploče 4 i 4.15 mm. Za navedene debljine prstenaste ploče na slikama 6.48 i 6.49 su dati dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu za model B. Na slikama 6.50 i 6.51 su dati dijagrami promjene napona u cirkularnom pravcu za debljine prstenaste ploče 4 i 4.15 mm. Za navedene debljine na dijagramima 6.52 i 6.53 su date promjene pomjeraja u z pravcu za naznačeni interval. Na slikama 6.54 i 6.55 su date promjene pomjeraja i napona u radijalnom pravcu za model sa geometrijskim parametrima $H=0$, $a=130\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, $h_c=12\text{mm}$ i $h_n=4.15\text{mm}$.

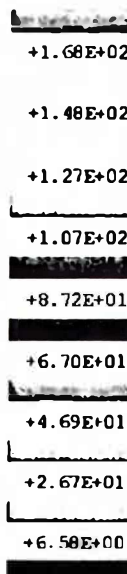
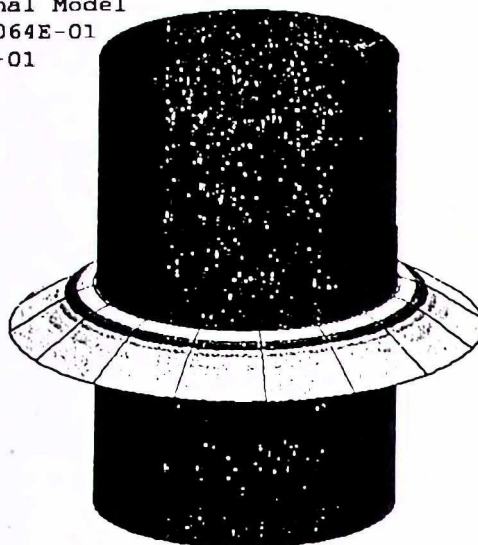


Slika 6.38 Mreža KE, model B
(opterećenje pritiskom samo na prstenastoj ploči)



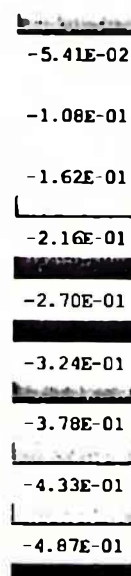
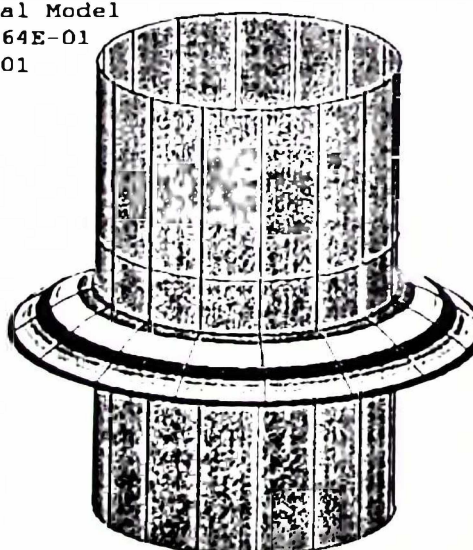
Slika 6.39 Mreža KE, model B

Stress Max Prin (Bottom)
 Max +1.8790E+02
 Min -1.3566E+01
 Deformed Original Model
 Max Disp +5.4064E-01
 Scale 7.7686E+01
 Load: load1

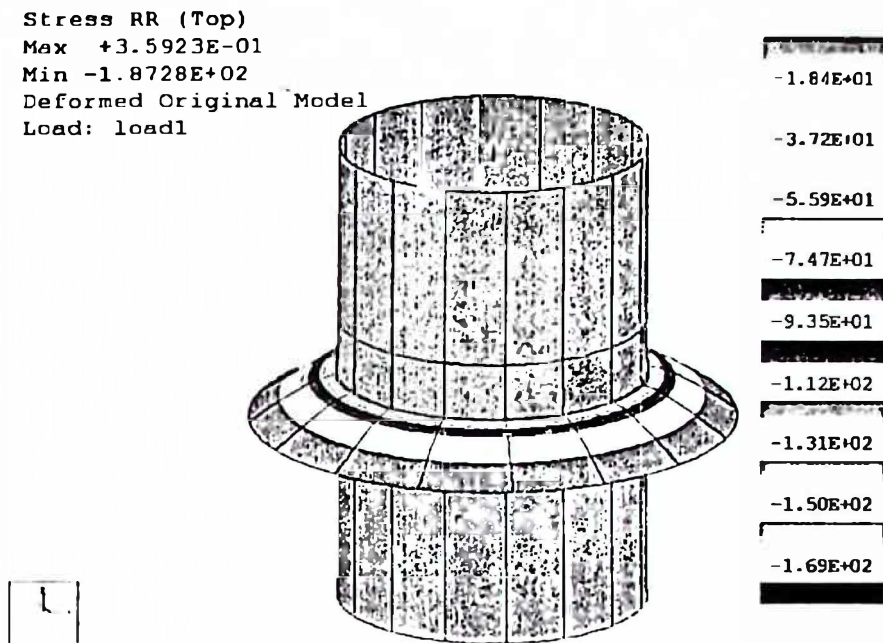


Slika 6.40 Glavni naponi za model B

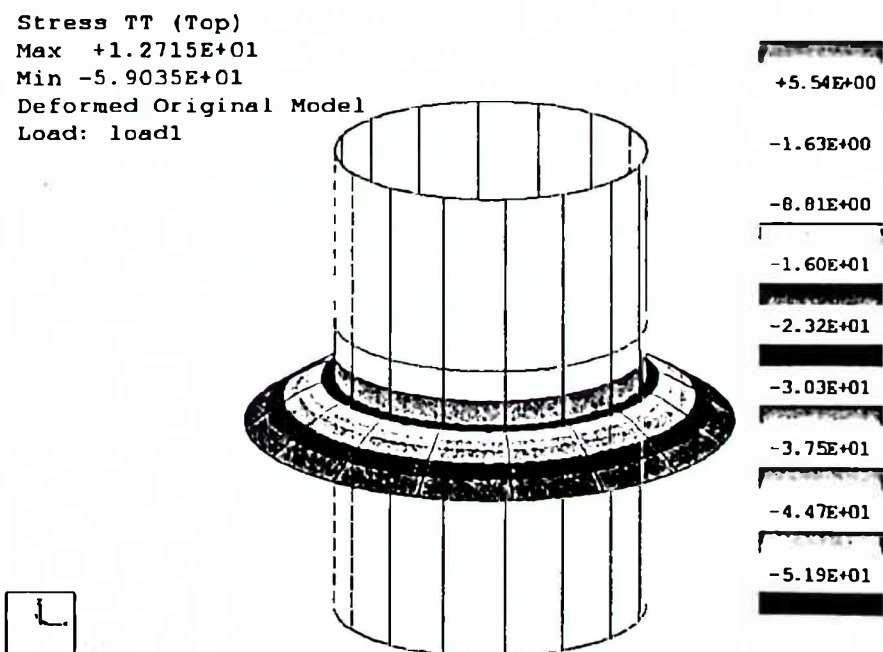
Displacement Z
 Max +0.0000E+00
 Min -5.4064E-01
 Deformed Original Model
 Max Disp +5.4064E-01
 Scale 7.7686E+01
 Load: load1



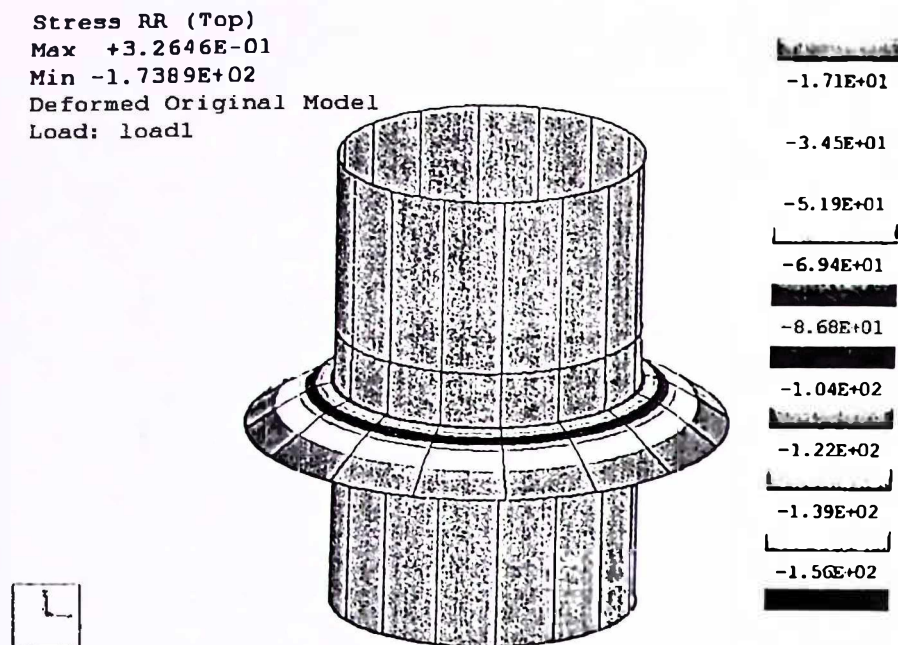
Slika 6.41 Pomjeraji u z pravcu za model B



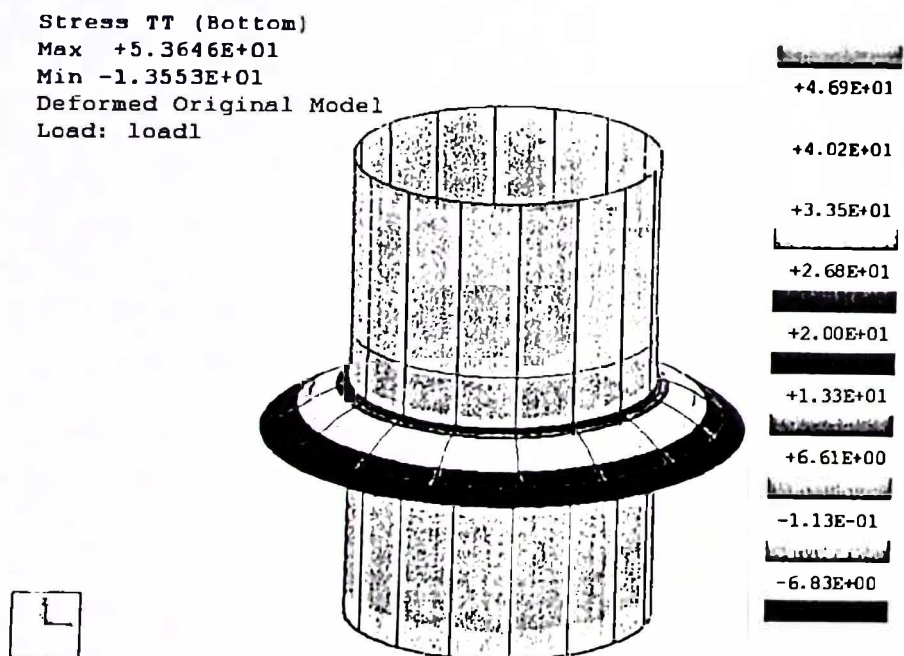
Slika 6.42 Naponi u radialnom pravcu za model B
 ($h_h = 4 \text{ mm}$)



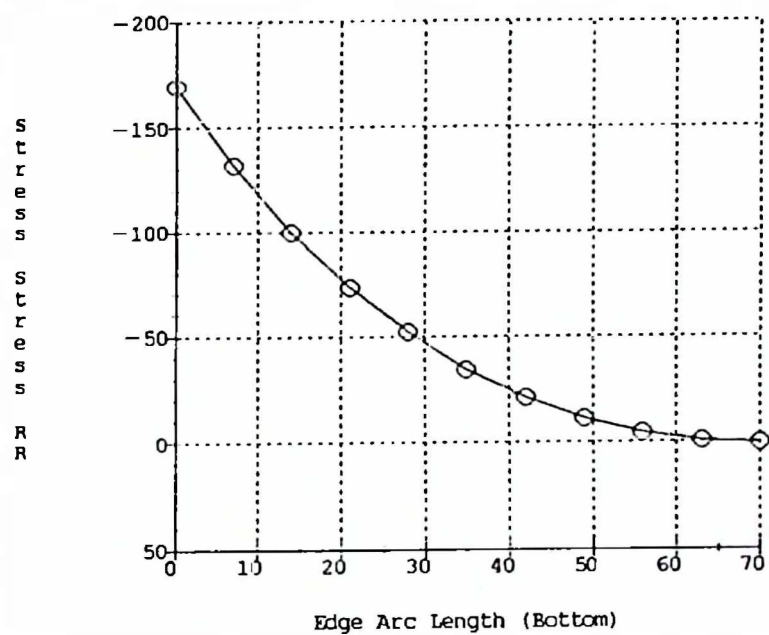
Slika 6.43 Naponi u cirkularnom pravcu za model B
 ($h_h = 4 \text{ mm}$)



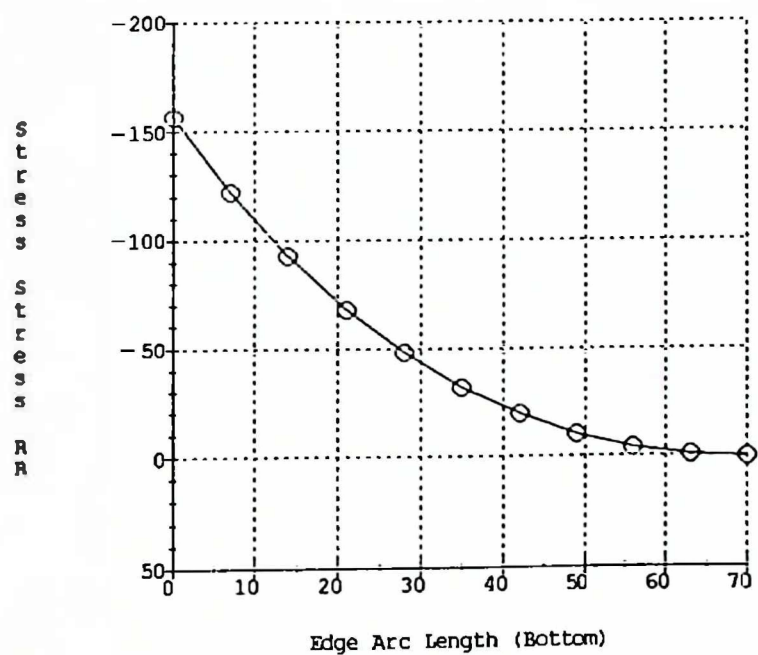
Slika 6.44 Naponi u radijalnom pravcu za model B
 ($h_b = 4.15 \text{ mm}$)



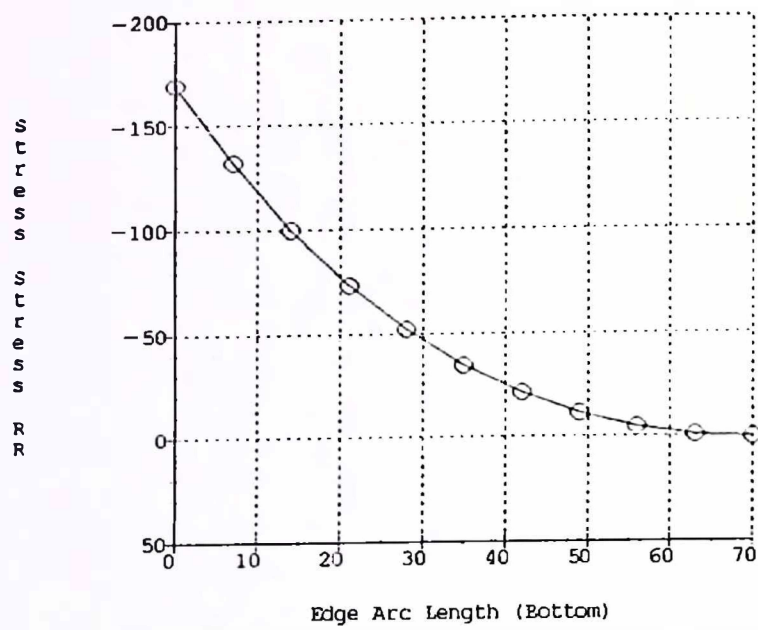
Slika 6.45 Naponi u cirkularnom pravcu za model B
 ($h_b = 4.15 \text{ mm}$)



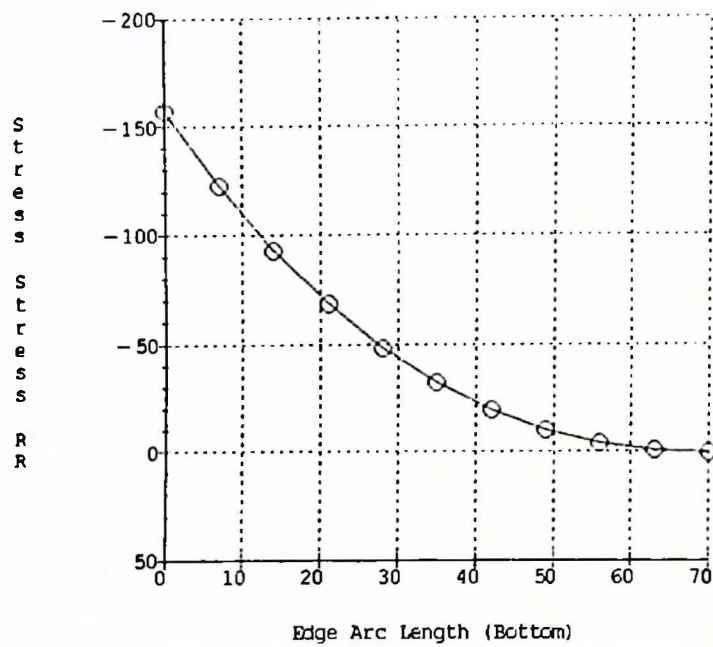
Slika 6.46



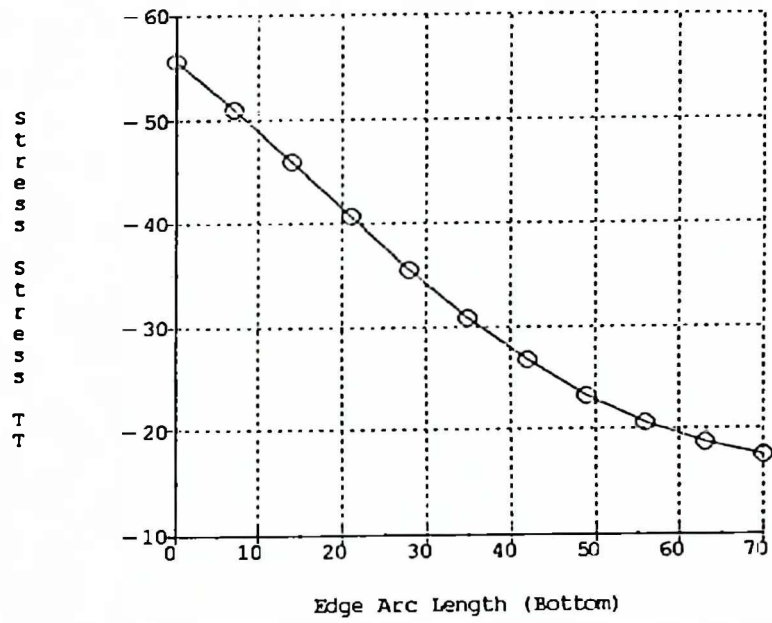
Slika 6.47



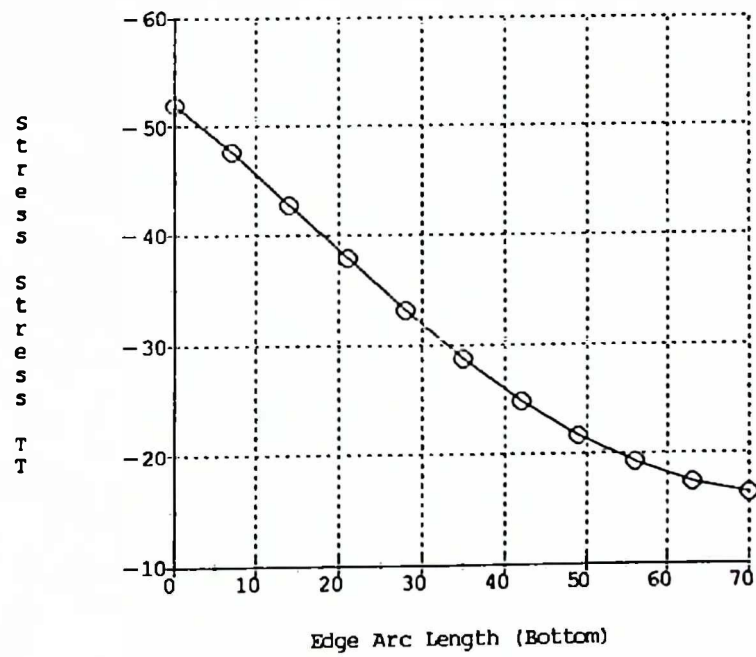
Slika 6.48



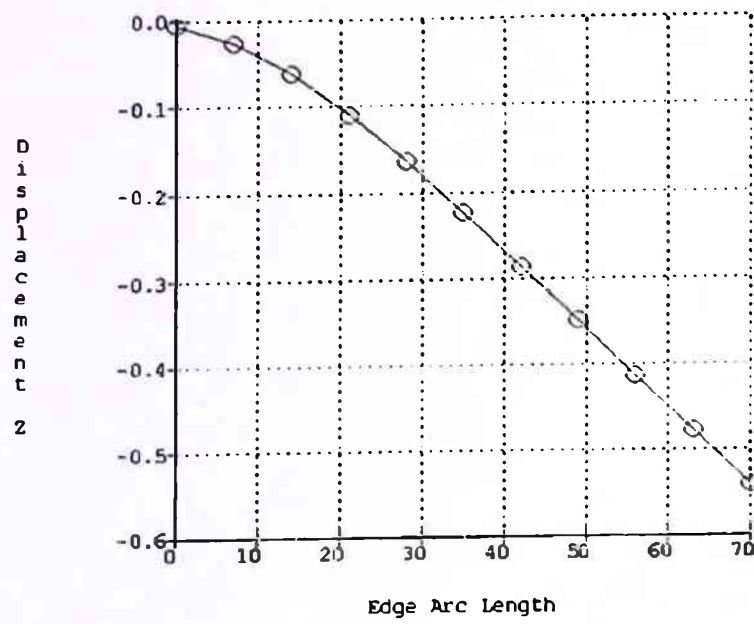
Slika 6.49



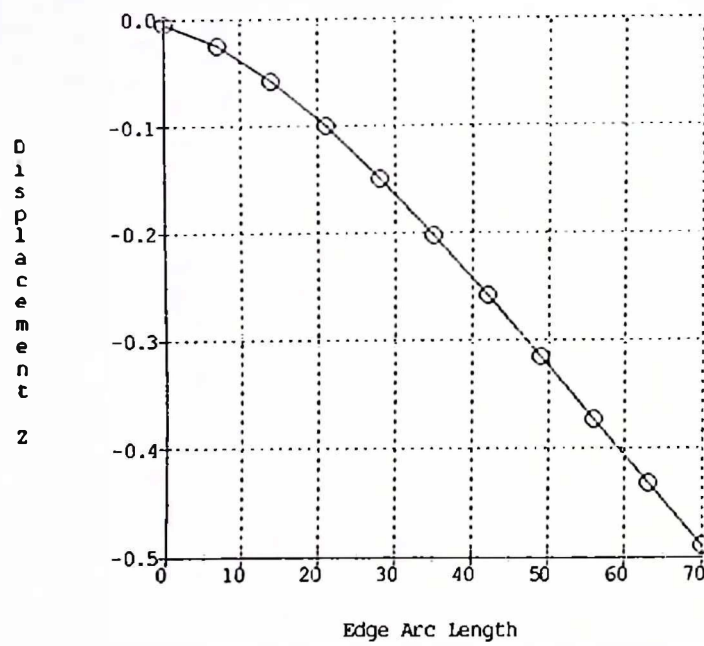
Slika 6.50



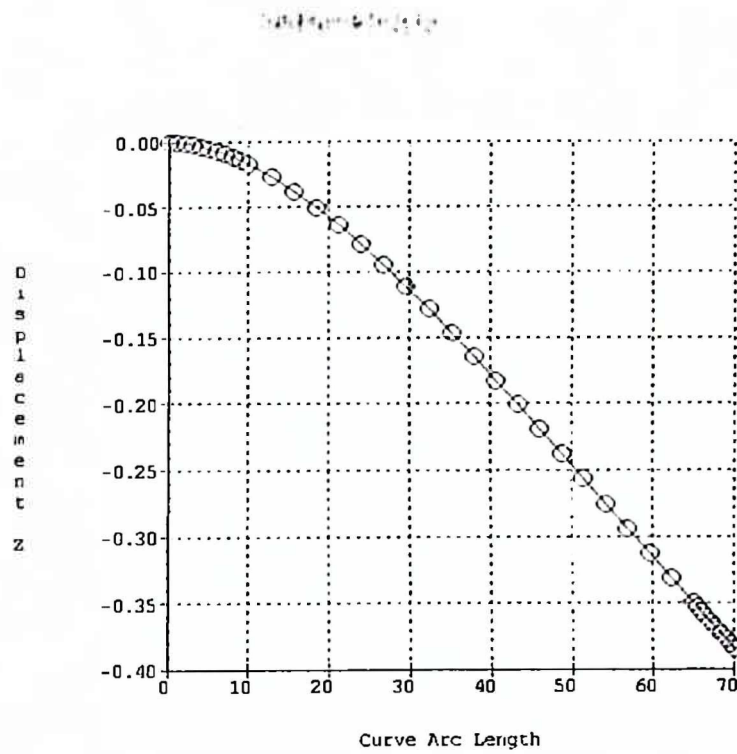
Slika 6.51



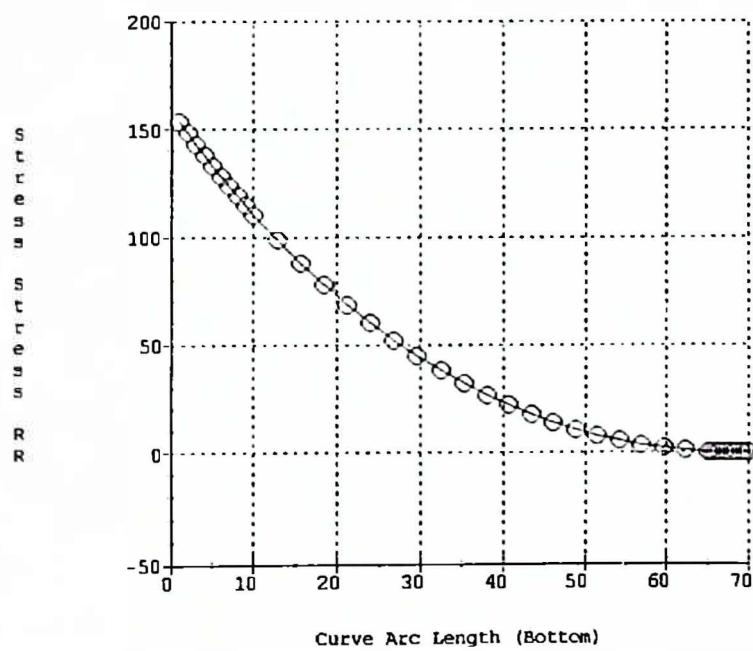
Slika 6.52



Slika 6.53



Slika 6.54



Slika 6.55

6.7.3 MKE analiza, model C

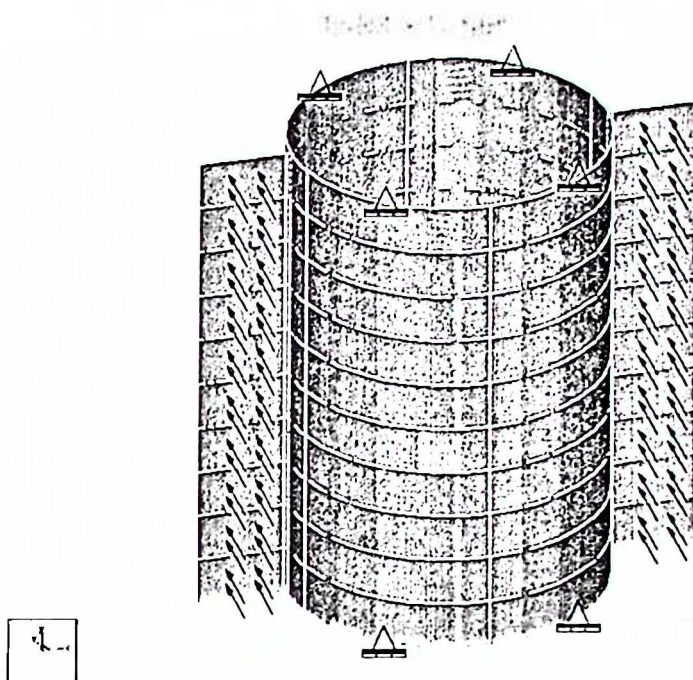
Na slici 6.56 prikazana je mreža KE sa vezama i opterećenjem koje djeluje samo na pravougaone ploče na cilindričnoj ljusci sa istim geometrijskim parametrima kao kod modela C. Ovaj model se analizira zbog potrebe upoređivanja rezultata MKE analiza sa rezultatima analitičkih analiza.

Na slici 6.57 je prikazana mreža KE sa vezama i opterećenjem za model C. Oba modela su generisana sa 120 četvorougaoonih elemenata ljuske i 132 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je sedam. Konvergencija rezultata je u granicama 1 %.

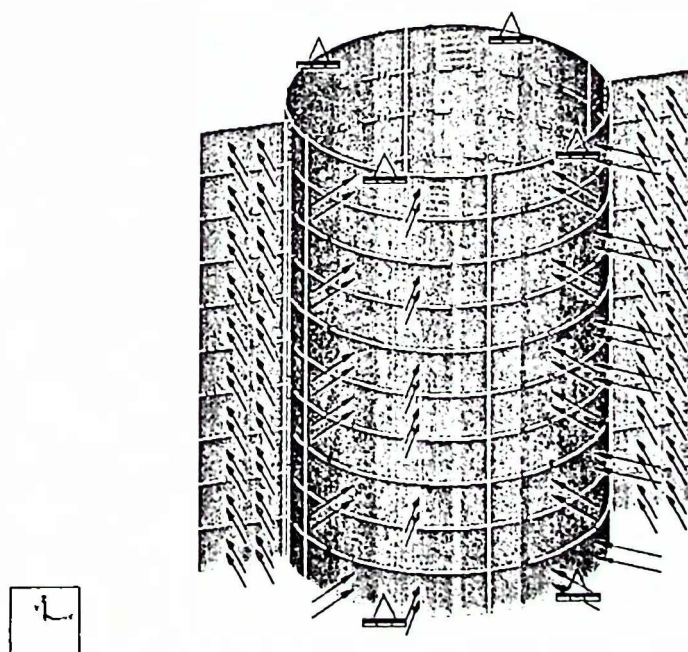
Na slici 6.58 su prikazane vrijednosti glavnih napona za ovaj model, a na slici 6.59 vrijednosti pomjeraja. Na slikama 6.60 i 6.61 su prikazane vrijednosti napona u radijalnom i podužnom pravcu. Na slikama od 6.62 do 6.67 su prikazani dijagrami promjene napona i pomjeraja duž linije koja leži u ravni pravougaone ploče i normalna je na osu cilindra. Razmatra se interval dužine 70mm sa početnom tačkom sa koordinatom $r=130\text{mm}$ i krajnjom tačkom sa koordinatom $r=200\text{mm}$.

Na slikama 6.62 i 6.63 su prikazani dijagrami promjene napona u radijalnom pravcu i pomjeraja duž navedenog intervala za model bez opterećenja pritiskom na cilindričnu ljusku.

Na slikama 6.64 i 6.65 su dati dijagrami promjene napona u radijalnom i podužnom pravcu za model C. Na slikama 6.66 i 6.67 su dati dijagrami promjene glavnog napona i pomjeraja za pravougaonu ploču u razmatranom intervalu.

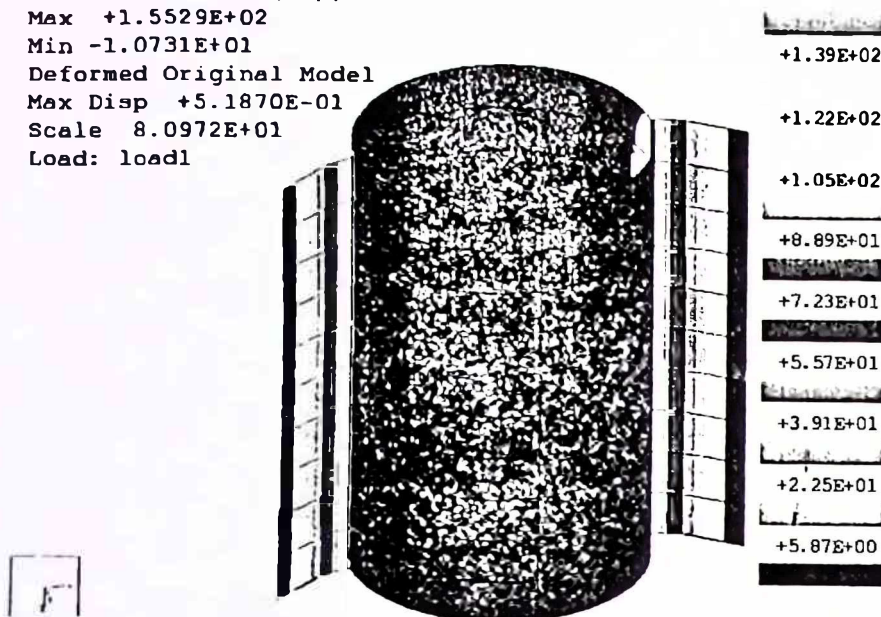


Slika 6.56 Mreža KE, model C
(opterećenje pritiskom samo na pravougaonim pločama)



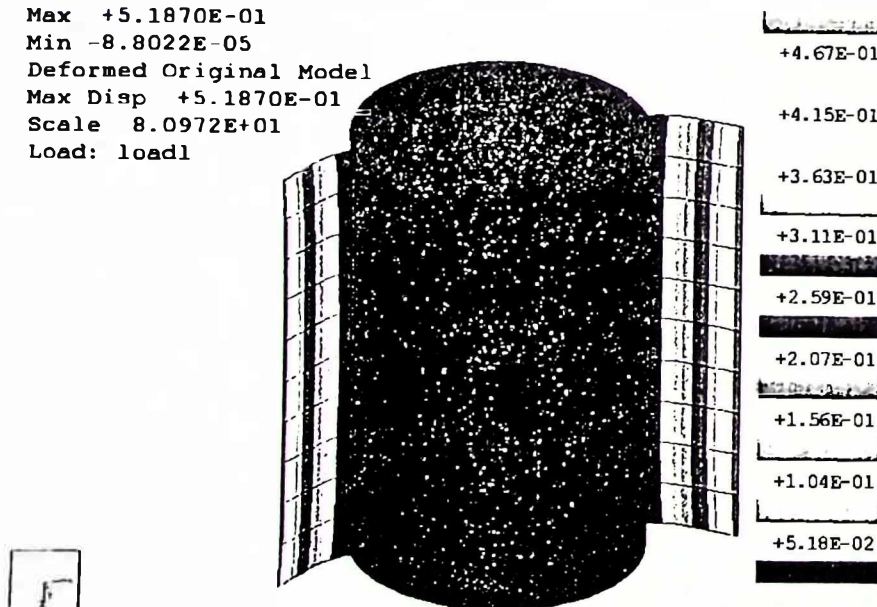
Slika 6.57 Mreža KE, model C

Stress Max Prin (Top)
 Max +1.5529E+02
 Min -1.0731E+01
 Deformed Original Model
 Max Disp +5.1870E-01
 Scale 8.0972E+01
 Load: load1



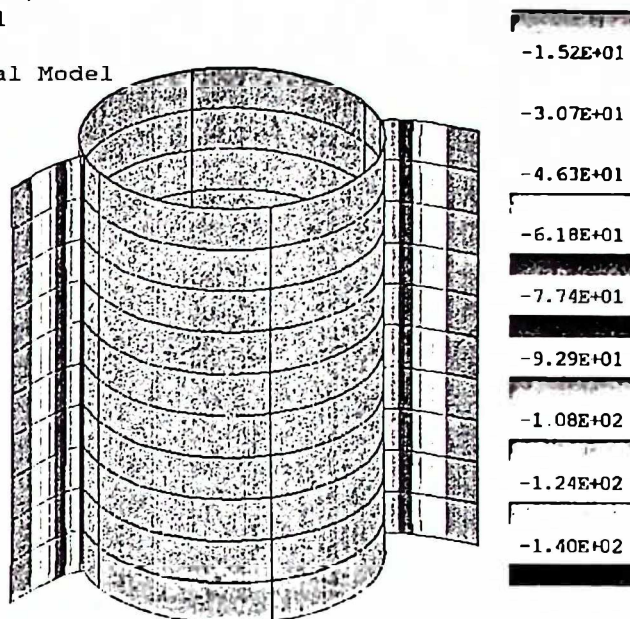
Slika 6.58 Glavni naponi za model C

Displacement Y
 Max +5.1870E-01
 Min -8.8022E-05
 Deformed Original Model
 Max Disp +5.1870E-01
 Scale 8.0972E+01
 Load: load1



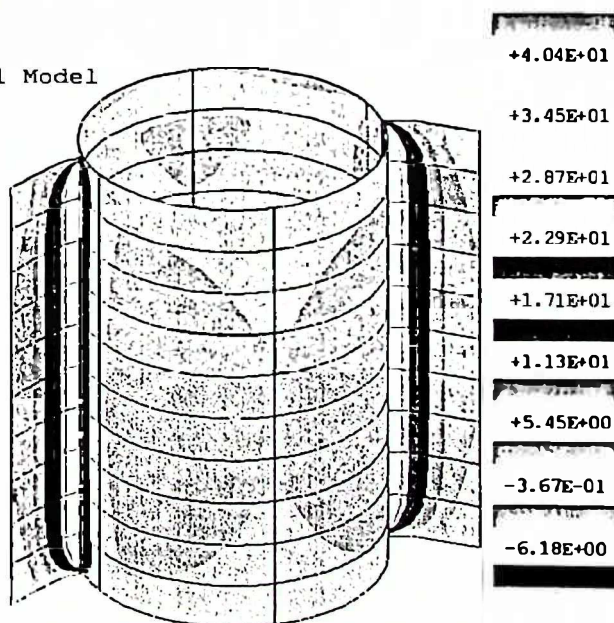
Slika 6.59 Pomjeraji u z pravcu za model C

Stress RR (Bottom)
 Max +3.3503E-01
 Min -1.5508E+02
 Deformed Original Model
 Load: load1

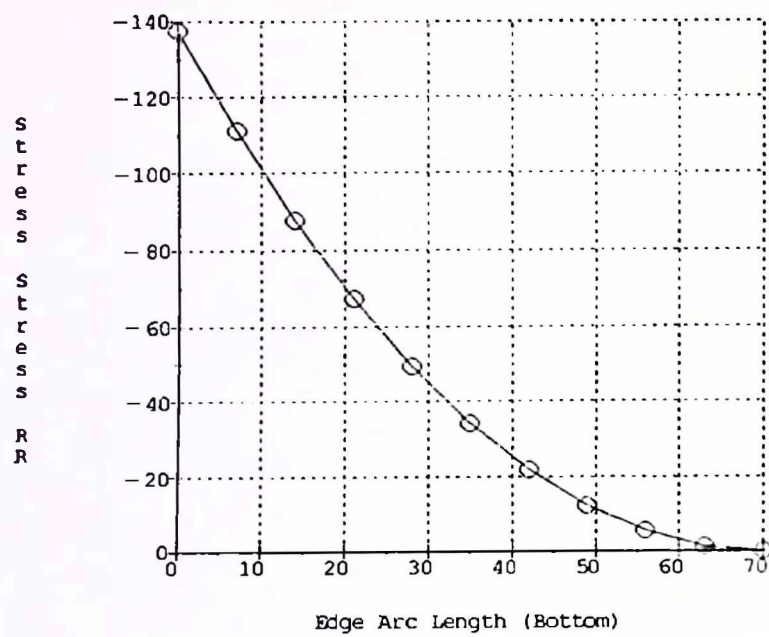


Slika 6.60 Naponi u radijalnom pravcu za model C

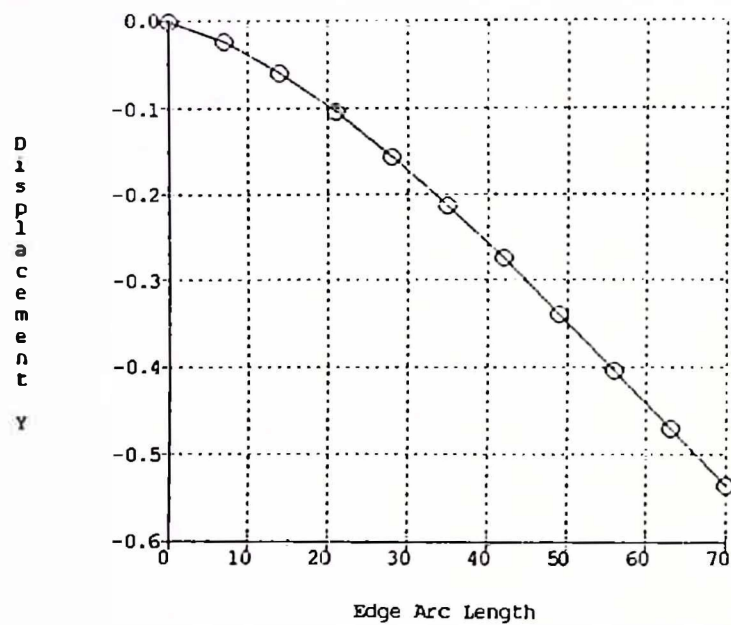
Stress ZZ (Top)
 Max +4.6167E+01
 Min -1.2001E+01
 Deformed Original Model
 Load: load1



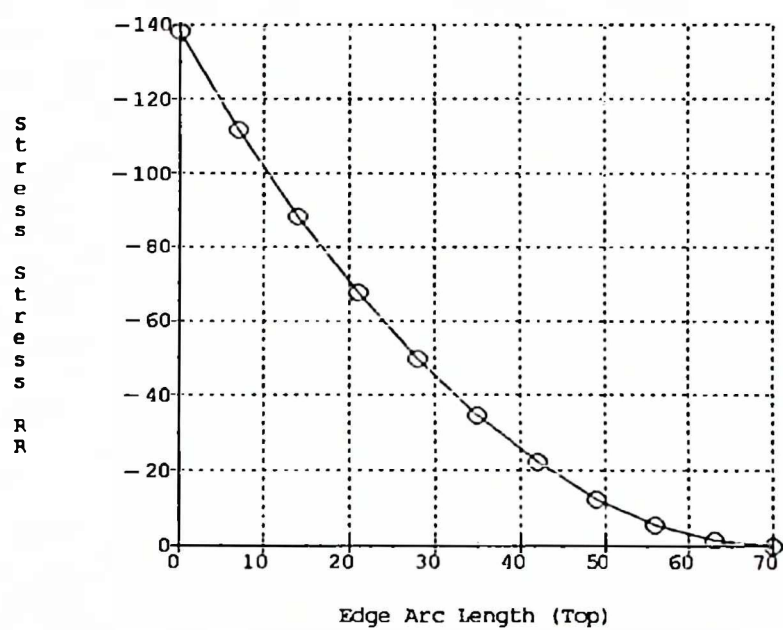
Slika 6.61 Naponi u podužnom pravcu za model C



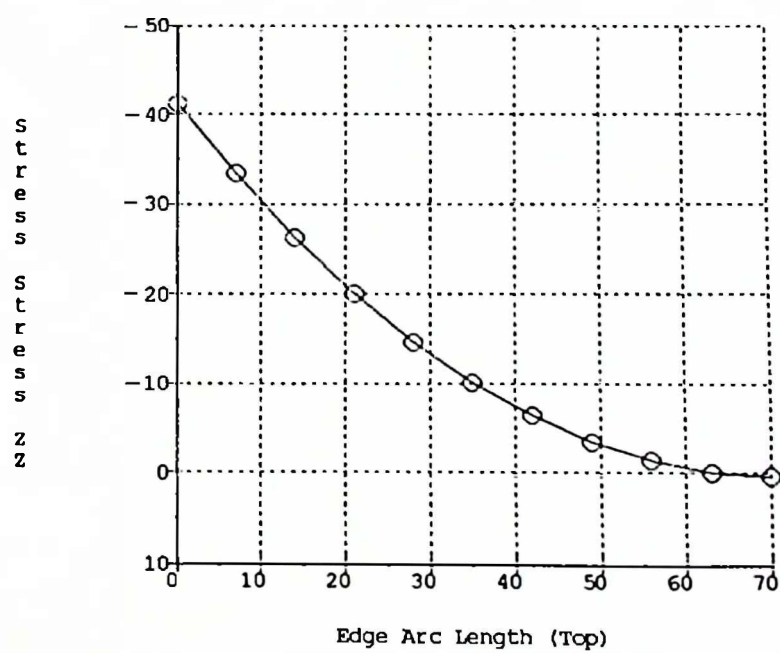
Slika 6.62



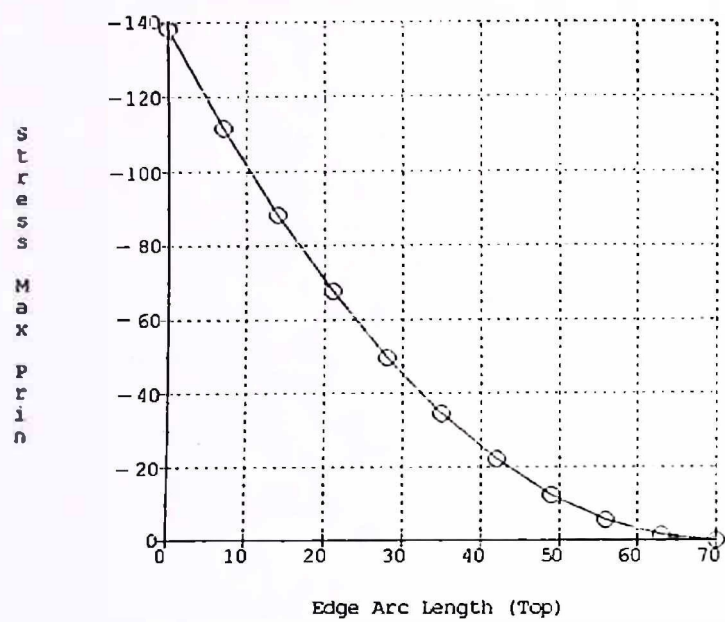
Slika 6.63



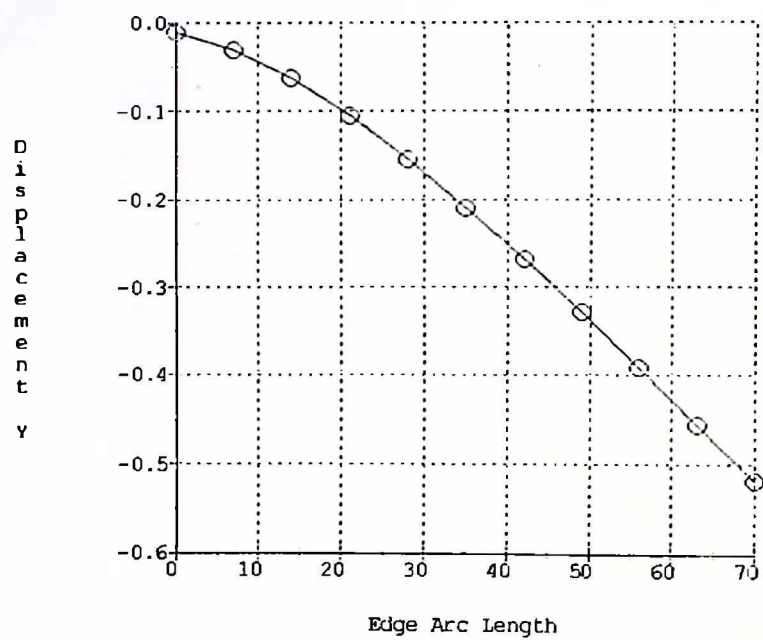
Slika 6.64



Slika 6.65



Slika 6.66



Slika 6.67

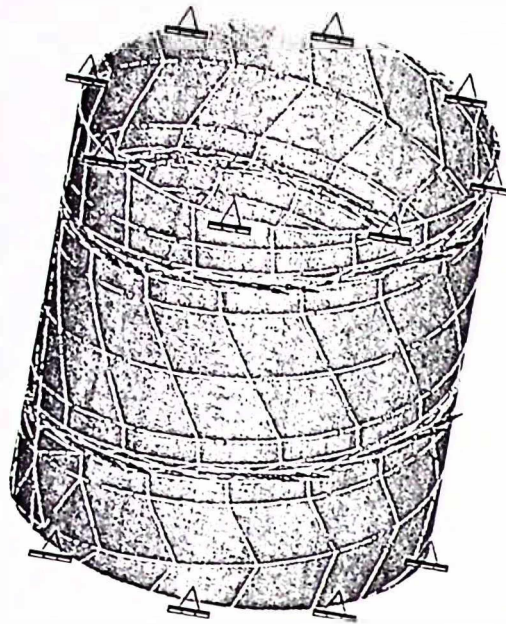
6.8. MKE analiza cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji

Izvršena je analiza MKE korišćenjem programskog paketa Pro/MECHANICA koji ima mogućnost definisanja kontinualnog sprega duž zavojne linije na cilindričnoj ljusci. Ovdje se razmatra model cilindrične ljuske sa sledećim parametrima: $R=127\text{mm}$, $H=140\text{mm}$, $E=200000\text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$, visina cilindrične ljuske je 280mm , vrijednost momenta kontinualnog sprega $M=1000\text{ [N]}$. Razmatraju se debljine cilindrične ljuske 2, 3, 4 i 6mm .

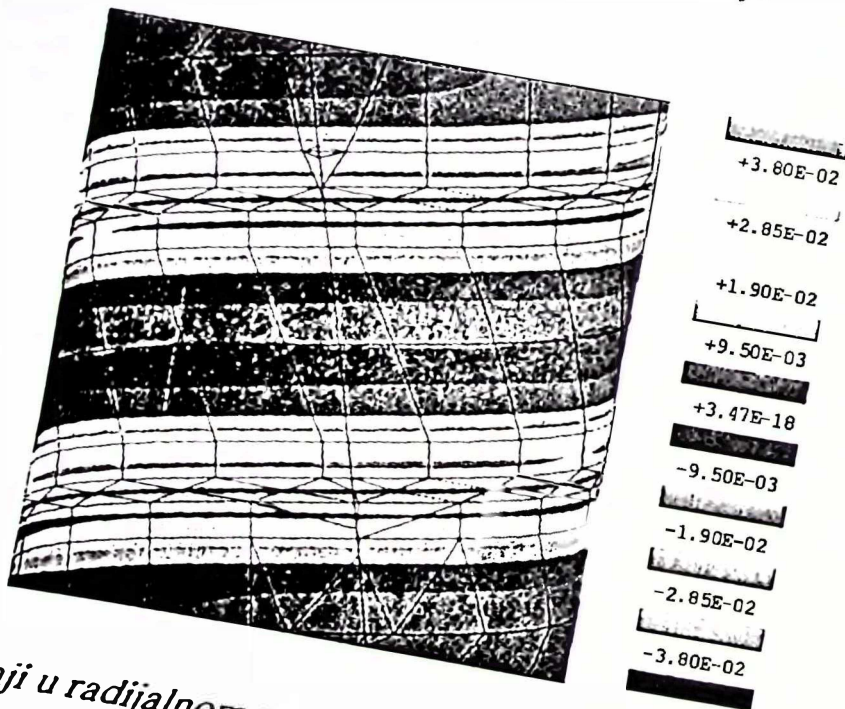
Na slici 6.68 prikazan je model cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom duž zavojne linije sa vektorom kontinualnog sprega i vezama po gornjoj i donjoj konturi cilindrične ljuske. Model ima 333 KE ljuske (153 četvorougona KE i 180 trugaonih KE) i 264 ČT. Maksimalni stepen interpolacionog polinoma je devet. Konvergencija rezultata je u granicama 1 %.

Na slici 6.69 prikazane su vrijednosti pomjeraja cilindrične ljuske u radijalnom pravcu za debljinu $h_c=3\text{mm}$.

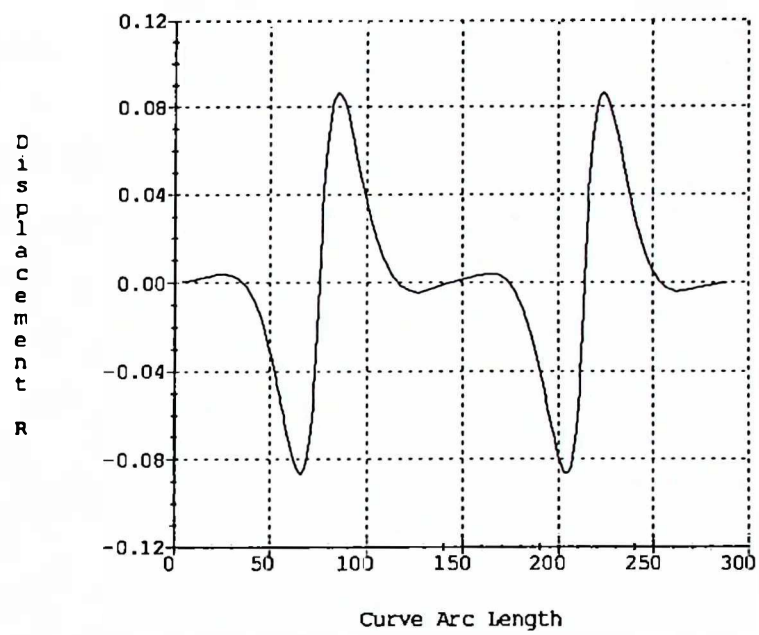
Na slikama 6.70, 6.71, 6.72 i 6.73 prikazani su dijagrami promjene pomjeraja tačaka cilindrične ljuske, duž zavojne linije na površi cilindrične ljuske koja je normalna na zavojnicu duž koje djeluje kontinualni spreg, za debljine cilindrične ljuske 2, 3, 4 i 6mm respektivno. Na slikama je prikazan interval duž zavojne linije na čitavoj dužini cilindrične ljuske. Za isti interval su dati na slikama 6.74, 6.75, 6.76 i 6.77 dijagrami promjene maksimalnog glavnog napona za debljine cilindrične ljuske 2, 3, 4 i 6mm respektivno.



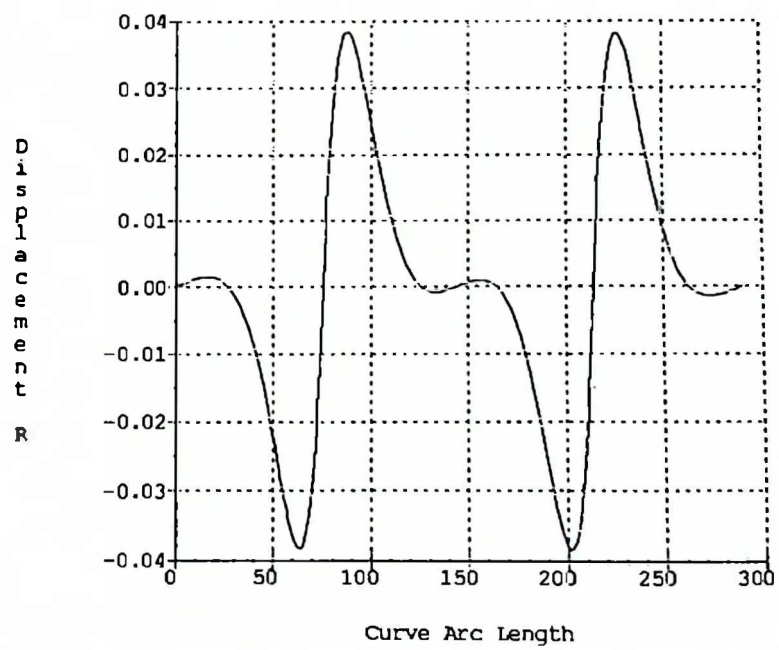
Slika 6.68 Mreža KE, cilindrična ljuska opterećena kontinualnim spregom po zavojnoj liniji



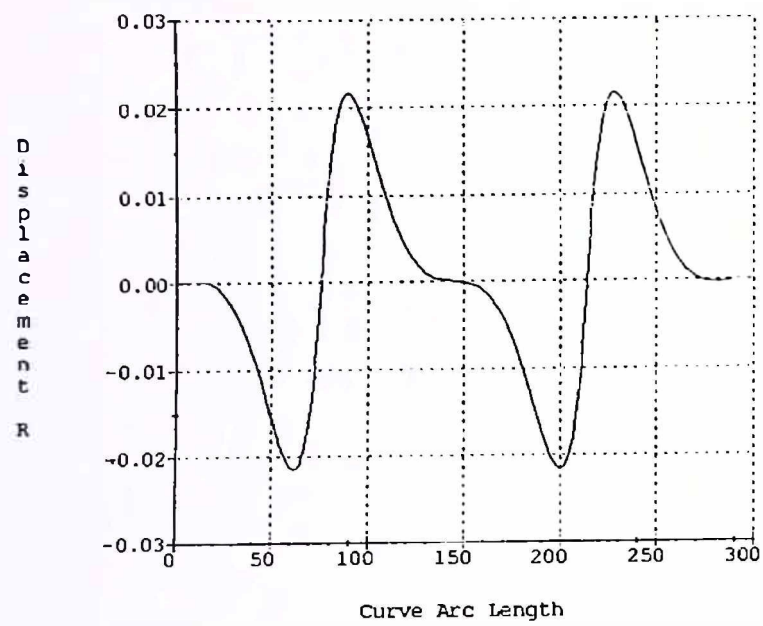
Slika 6.69 Pomjeraji u radialnom pravcu za cilindričnu ljusku opterećenu kontinualnim spregom po zavojnoj liniji ($h_c = 3 \text{ mm}$)



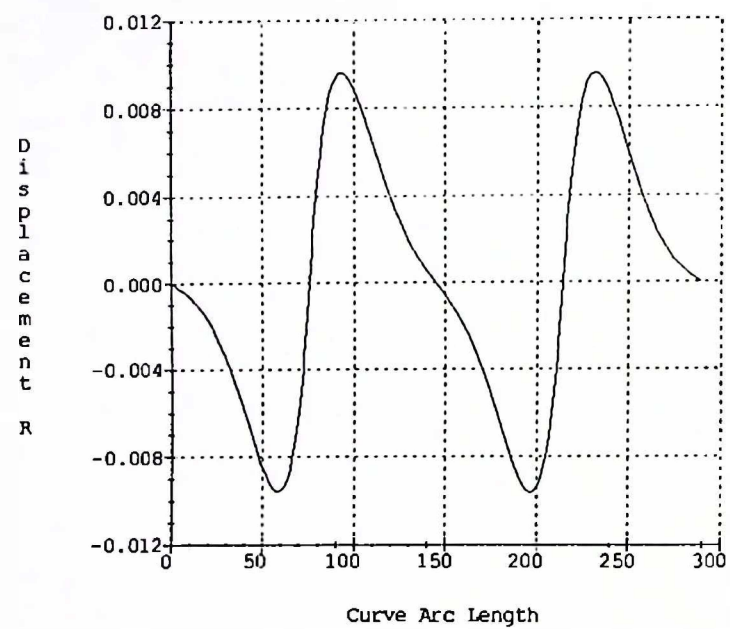
Slika 6.70



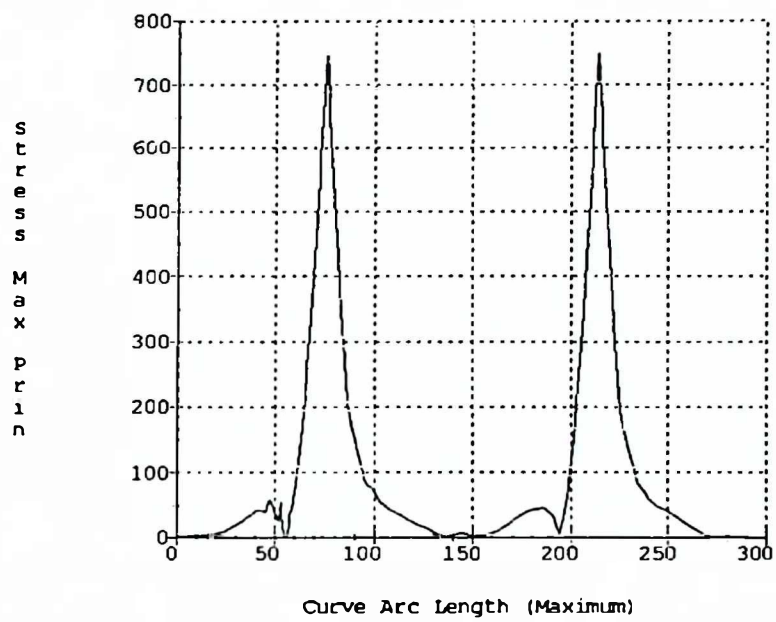
Slika 6.71



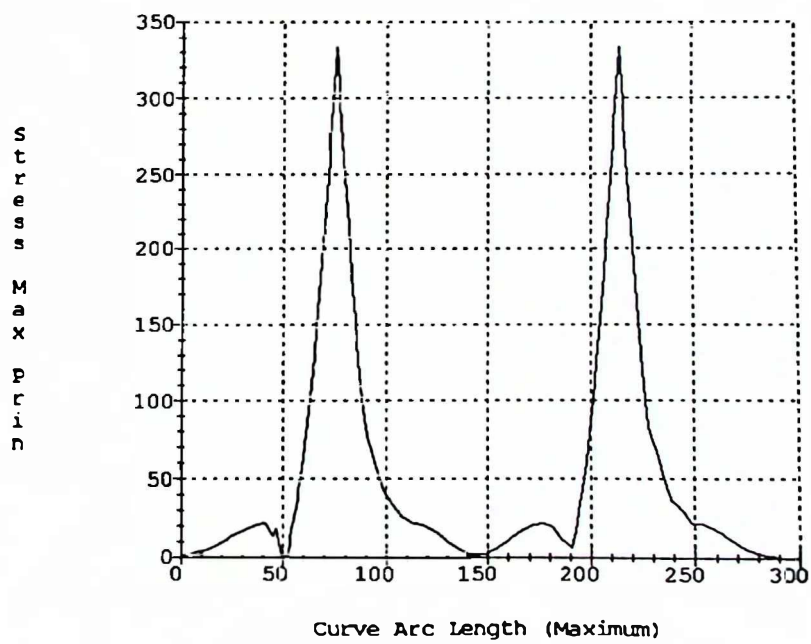
Slika 6.72



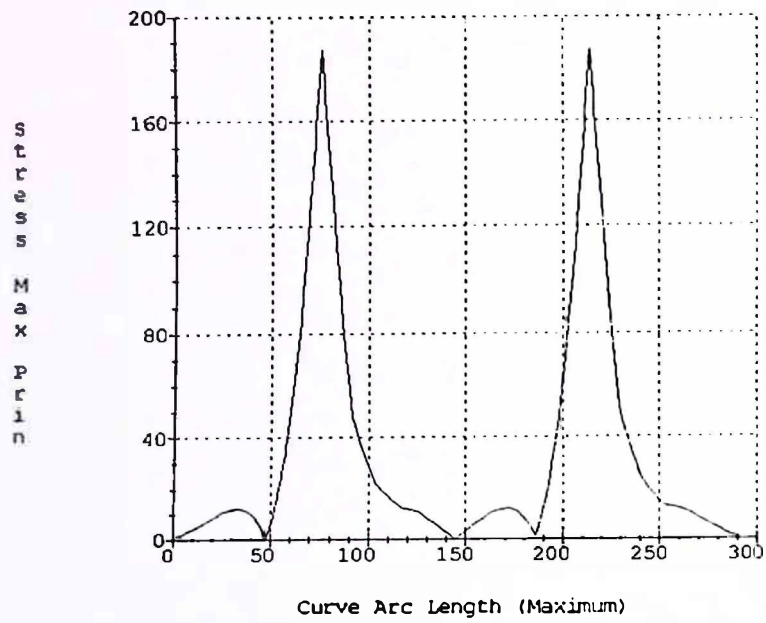
Slika 6.73



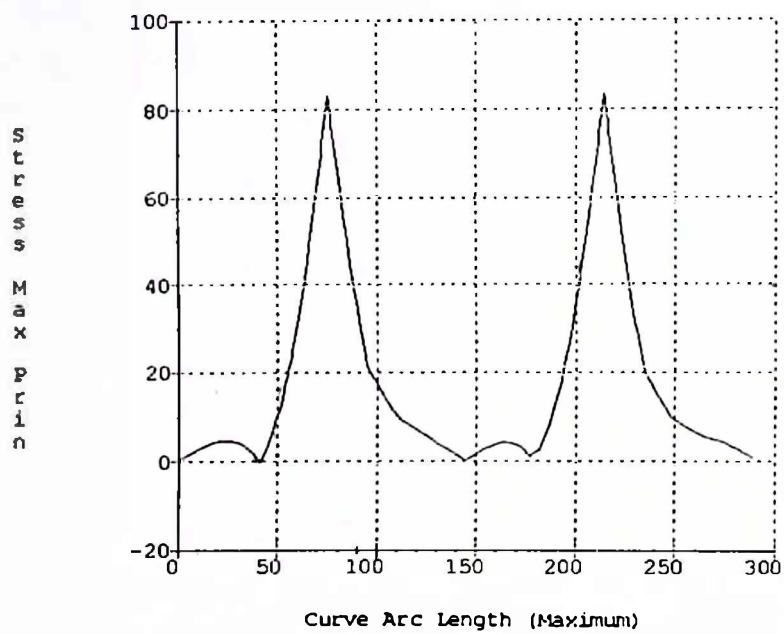
Slika 6.74



Slika 6.75



Slika 6.76



Slika 6.77

6.9 Zaljućci MKE analiza sa uporednim rezultatima

Primjena MKE u analizi konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske je u ovom Poglavlju potvrdila da je MKE nezamjenljiv metod za efikasne analize složenih struktura. Savremeni programski paketi ALGOR i Pro/MECHANICA su omogućili da se dobiju rezultati za pomjeraje, deformacije i napone sa visokom tačnošću.

Programski paket Pro/MECHANICA je veoma efikasan za analizu složenih struktura koje se sastoje iz više spojenih ljuski kakvi su modeli zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Modeliranje ovakvih struktura u većini drugih programskih paketa je složenije jer ovi ne posjeduju podprograme za automatizovano generisanje mreže sistema ljuski. Prednost programskog paketa Pro/MECHANICA u odnosu na druge je u mogućnosti ovog programa da se na modelima nanose različiti vektori opterećenja po linijama i površima što je u ovom radu omogućilo cjelovite analize modela zavojne ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji.

Savremeni programski paket Pro/MECHANICA ima velike mogućnosti prezentacije rezultata izvršenih analiza u formi izonaponskih, izodeformacijskih i dr. površina što posjeduje i programski paket ALGOR i dr., ali za razliku od njih Pro/MECHANICA ima i mogućnosti prezentacije dijagrama promjene pojedinih veličina po zadatim presjecima modela, što mnogi programski paketi nemaju. Mogućnost praćenja toka analize i uticanja na konvergenciju iterativnog postupka proračuna u programskom paketu Pro/MECHANICA dovodi do visoke tačnosti rezultata analiza. Tačnost kod programskog paketa ALGOR se postiže adaptacijom mreže KE u presjecima gdje su izražene promjene

komponenti napona i deformacija. U Tabeli 6.2 su dati uporedni rezultati za napone u radijalnom pravcu i pomjeraje za ukliještenu zavojnu ljusku dobijenu analitičkom i analizom MKE, korišćenjem programskih paketa ALGOR i Pro/ MECHANICA. Razmatrani su modeli opisani u tački 6.6.

Tabela 6.2 Uporedne vrijednosti za napone i pomjeraje za ukliještenu zavojnu ljusku

		Napon u radijalnom pravcu [N/mm ²]			Pomjeraj u z pravcu [mm]		
		r=135 [mm]			r=200 [mm]		
Mod.	h_h [mm]	Analitička analiza	MKE analiza		Analitička analiza	MKE analiza	
			ALGOR	Pro/M		ALGOR	Pro/M
Ukliještenu zavojnu ljusku	4	-140.7571	-141.2863	-142.9592	-0.4080	-0.4366	-0.4149
	3.6	-173.7733	-174.0554	-176.4949	-0.5596	-0.5983	-0.5687

Razlika rezultata dobijenih analitičkom analizom za napone u radijalnom pravcu i rezultata dobijenih u programskom paketu ALGOR je ispod 0.5%, a u programskom paketu Pro/MECHANICA je oko 1%. Rezultati analitičkih analiza po pomjerajima se u odnosu na rezultate kod programskog paketa ALGOR razlikuju oko 7%, a u odnosu na rezultate kod programskog paketa Pro/MECHANICA razlika je ispod 2%. Odnos rezultata pokazuje izuzetno visoku podudarnost analitičkih i MKE analiza naročito po naponima u radijalnom pravcu za ove modele.

U Tabeli 6.3 su dati uporedni rezultati analitičkih i MKE analiza za pomjeraje i napone za cilindričnu ljusku opterećenu kontinualnim spregom po zavojnoj liniji za različite debljine cilindrične ljuske za modele koji su opisani u tački 6.8.

Tabela 6.3 Uporedne vrijednosti za pomjeraje i napone za cilindričnu ljusku opterećenu kontinualnim spregom po zavojnoj liniji

		Maksimalni pomjeraj [mm] x10 ⁻²		Maksimalni normalni napon [N/mm ²]	
		Analitička analiza	MKE analiza Pro/M	Analitička analiza	MKE analiza Pro/M
Debljina cilindrične ljuske [mm]	2	8.6559	8.0623	750.00	750.0232
	3	3.8279	3.5803	333.333	333.2987
	4	2.1467	2.0137	187.50	187.4359
	6	0.9590	0.9004	83.333	83.2610

Analize MKE se za ovakve modele veoma efikasno realizuju u programu Pro/MECHANICA zbog mogućnosti nanošenja vektora opterećenja kontinualnog sprega duž zavojne linije. Rezultati analitičkih i MKE analiza dobijenih po kriterijumu maksimalnog normalnog napona razlikuju se do 0.5%, a rezultati po kriterijumu maksimalnih pomjeraja cilindrične ljuske razlikuju se za oko 7%.

U Tabeli 6.4 su date uporedne vrijednosti za pomjeraje i napone u radijalnom pravcu za model A sa jednom zavojnom ljuskom i modele B i C koji su opisani u tački 6.7. Ovdje se razmatraju teorijski modeli A, B i C kod kojih je opterećenje ravnomjernim pritikom samo na zavojnoj ljusci,

prstenastoj i pravougaonoj ploči. Za MKE analize su dati rezultati programskog paketa Pro/MECHANICA. Razlika rezultata analitičkih i MKE analiza za teorijski model A je po kriterijumu napona u radijalnom pravcu ispod 2%, a po kriterijumu pomjeraja zavojne ljuske oko 2.5%. Za model B je razlika rezultata ispod 1.5% za napone u radijalnom pravcu, a za pomjeraje je razlika oko 13%. Kod modela C je razlika rezultata analitičkih i MKE analiza po naponima u radijalnom pravcu ispod 1%, a po pomjerajima ispod 10%.

Tabela 6.4 Uporedne vrijednosti za pomjeraje i napone za modele A, B i C (pritisak djeluje na zavojnu ljusku, prstenastu i pravougaonu ploču)

			Napon u radijalnom pravcu [N/mm ²]		Pomjeraj u z pravcu [mm]	
Model	H [mm]	h _h [mm]	r=135 [mm]		r=200 [mm]	
			Analitička analiza	MKE analiza Pro/M	Analitička analiza	MKE analiza Pro/M
A	140	4	-138.6580	-141.3324	-0.5238	-0.5378
A	140	3.6	-171.4249	-174.6889	-0.7034	-0.7201
B	0	4	-139.5929	-141.5986	-0.4853	-0.5431
B	0	4.15	-129.6849	-131.4741	-0.4346	-0.4912
C	∞	4	-118.5438	-118.3321	-0.4914	-0.5359

Upoređujući rezultate za modele uklještene zavojne ljuske date u Tabeli 6.2 sa rezultatima za modele zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci date u Tabeli 6.4 zaključuje se da su vrijednosti za napone u radijalnom pravcu veoma bliske, za razliku od pomjeraja, koji su kod modela zavojne

ljuske na cilindričnoj ljusci veći nego kod modela ukliještene zavojne ljuske. Ovo povećanje vrijednosti za pomjeraje zavisi od geometrijskih parametara (debljine cilindrične ljuske i dr.) i karakteristika materijala cilindrične ljuske.

Uticaj ravnomjernog pritiska (0.15 N/mm^2), koji djeluje na cilindričnu ljusku, što imamo kod eksperimentalnih modela, na rezultate napona i pomjeraja zavojne ljuske, prstenaste ploče i pravougaone ploče je zanemarljiv. Ovo se zaključuje iz visoke podudarnosti uporednih dijagrama MKE analiza za eksperimentalne i teorijske modele (kod kojih se zanemaruje ravnomjerni pritisak na cilindričnoj ljusci).

Veoma mala razlika rezultata analitičkih i MKE analiza koja je u odnosu na kriterijum maksimalnog napona u radijalnom pravcu ispod 2% za sve razmatrane modele, potvrđuje visoku tačnost ovih analiza. Ovim se potvrđuje i tačnost matematičkih modela za automatizovano određivanje parametara ljuski razvijenih u analitičkim analizama zavojne i cilindrične ljuske koji se zasnivaju upravo na kriterijumu maksimalnog napona u radijalnom pravcu.

7. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE

U ovom radu je razvijen originalni model za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske. Eksperimentalno istraživanje je realizovano u 3D centru Mašinskog fakulteta u Podgorici. Ovim modelom riješen je problem nanošenja opterećenja na površ zavojne ljuske. Predložena rješenja u eksperimentalnom modelu su omogućila da se zavojna ljuska optereti površinskim pritiskom po inkrementima mjerenim specijalnim uređajem sa živinim stubom. Deformacijske i naponske analize su urađene tenzometrijskim ispitivanjima postavljanjem mjernih traka na slobodnim površima zavojnih ljuski. Na tim slobodnim površima u komorama bez pritiska su postavljeni mjerni uređaji za mjerenje pomjeraja tačaka na zavojnoj ljusci.

Eksperimentalno istraživanje je sprovedeno na tri modela. Oblik i dimenzije modela su odabrane na osnovu prethodnih numeričkih i teorijskih analiza sprovedenih na ljuskama različitih geometrijskih parametara. Veoma važan kriterijum pri definisanju dimenzija odabranih modela za eksperimentalno istraživanje je odnos debljine ljuske i njene širine. Zadovoljavanje ovih kriterijuma na ispitivanim modelima omogućava korišćenje i primjenu teorije za tanke ploče i ljuske. Sa druge strane ovakvi odnosi dimenzija za tanke ljuske i ploče i njihova mala debljina bitno utiču na mogućnosti i tačnost izrade modela mašinskom obradom. Na izbor dimenzija modela uticale su mogućnosti postavljanja mjernih traka za tenzometrijsku analizu što je naročito uticalo na veličinu međuprostora između dvostrukih zavojnih ljuski u kojima se trake postavljaju.

Potreba usklađivanja teorijskih pretpostavki o dužini pravougaonih ploča je bitno uticala na visinu eksperimentalnih modela.

Polazeći od ovih kriterijuma, a nakon pripremnih istraživanja, odabrani su eksperimentalni modeli koji omogućavaju upoređivanje dobijenih rezultata sa analitičkim i MKE analizama.

Realizacija ovog eksperimentalnog istraživanja i razvoj originalnih modela su bili složeni i zahtjevali su znatno korišćenje materijala, opreme i sredstava, čije je angažovanje na početku eksperimenta sa sobom nosilo i rizike da li će predložena rješenja biti uspješna.

Elementi modela su rađeni u toku 1998. i 1999. godine u “Industriji alata” u Trebinju i “AD Radvent-HK Željezara Nikšić” u Nikšiću.

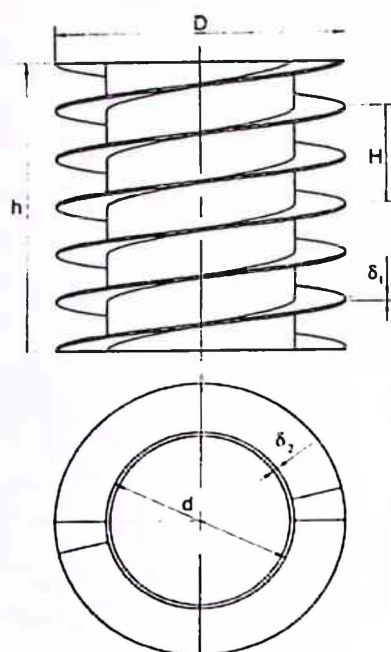
Postignut je potreban kvalitet izrade elemenata modela i pored činjenice da se radi o prototipovima, konstrukcijama koje se rade prvi put i izuzetno složenim oblicima kakva je dvostruka zavojna ljuska.

Kvalitet izrade elemenata modela i predložena rješenja sa specijalnim gumenim zaptivačima omogućili su efikasno zaptivanje u komorama sa pritiskom i opterećivanje zavojne ljuske pritiskom po planiranim inkrementima.

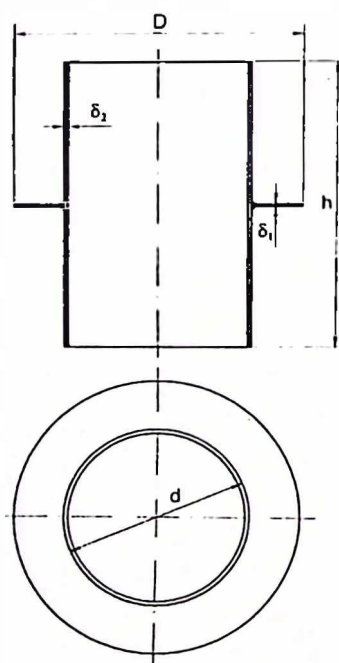
7.1. Opis modela za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske

7.1.1. Izbor oblika zavojne ljuske

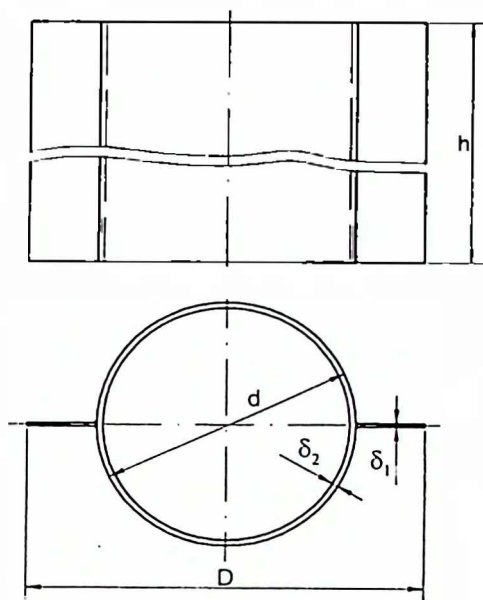
Razmatra se zavojna ljuska kao dio površi konoidnog helikoida između dva cilindra spoljašnjeg prečnika D i unutrašnjeg prečnika d , koja je po zavojnoj liniji vezana za cilindričnu ljusku prečnika d .



Slika 7.1 Zvojna ljuska na cilindričnoj ljusci kod modela A



Slika 7.2 Prstenasta ploča na cilindričnoj ljusci kod modela B



Slika 7.3 Pravougaona ploča na cilindričnoj ljusci kod modela C

Hod zavojne linije H može biti u granicama od 0 do ∞ . Za ovo eksperimentalno istraživanje odabrana su tri modela: model A koji predstavlja zavojnu ljusku na cilindričnoj ljusci, sa hodom zavojne linije $H=140$ mm (sl. 7. 1), model B koji predstavlja prstenastu ploču na cilindričnoj ljusci (sl. 7.2) i model C koji predstavlja pravougaonu ploču na cilindričnoj ljusci (sl. 7.3). Ovi modeli su koncipirani nakon sagledavanja mogućnosti izrade zavojne ljuske kao izuzetno komplikovanog konstrukcijskog elementa. Precizne deformacijske analize ne bi bilo moguće izvesti na modelima koji su izrađeni zavarivanjem segmenata zavojne ljuske, zbog značajnog odstupanja dimenzija. Zbog ovoga je predloženo da se konstrukcija zavojne ljuske izradi mašinskom obradom,

čime je postignuta tačnost geometrije potrebna za precizne deformacijske analize i neophodna za ostvarivanje zaptivanja između elemenata prilikom opterećivanja zavojne ljuske. Modeli prstenaste ploče i pravougaone ploče su izrađeni zavarivanjem ovih ploča na cilindričnoj ljusci i mašinskom obradom.

Ovako odabrana tri modela sa identičnim vrijednostima spoljašnjih prečnika ljuski ($D=400$ mm) i unutrašnjih prečnika ljuski ($d=260$ mm), visine $h=420$ mm i debljina $\delta_1=4$ mm i $\delta_2=6$ mm omogućavaju upoređivanje dobijenih eksperimentalnih rezultata za zavojnu ljusku u polju njenih mogućih oblika. Istovremeno ovakve dimenzije omogućavaju izradu istih elemenata ploča (sl. 1, Prilog 4) i čaura (sl. 2, Prilog 4) za sklapanje modela koje je potrebno dodatno uraditi. Masa odabranih modela ljuski i ploča je: 29 kg kod modela A i po 18 kg kod modela B i C, masa spoljašnje čaure je 42 kg, a masa ploča je po 30 kg što omogućava manipulaciju i transport u toku izvođenja eksperimenta bez korišćenja dodatnih transportnih sredstava.

Odnos debljine ljuske $\delta_1=4$ mm i njene širine $b=70$ mm je 1:17,5 što zadovoljava potrebne kriterijume i omogućava korišćenje i primjenu teorije za tanke ploče i ljuske na ovim modelima. Debljina cilindrične ljuske je odabrana nešto veća od vrijednosti koje bi zahtijevao nivo napona za usvojena opterećenja, zbog problema mašinske obrade kod tankozidnih cilindričnih oblika i činjenice da je eksperiment usmjeren na deformacijske i naponske analize zavojne ljuske.

Elementi sistema eksperimentalnih modela A B i C su urađeni od čelika. Za sve elemente su urađene hemijske analize materijala čiji su rezultati dati u Tabeli 1 u Prilogu 5.

Elementi ljuski i ploča koji su tenzometrijski ispitivani, prethodno su ispitani ultrazvukom. Za zavarivanje prstenaste ploče kod modela B i pravougaone ploče kod modela C korišćen je postupak elektrolučnog zavarivanja elektrodom PIVA 150B. Mehaničke osobine i hemijski sastav čistog zavara su dati u Tabeli 2 u Prilogu 5.

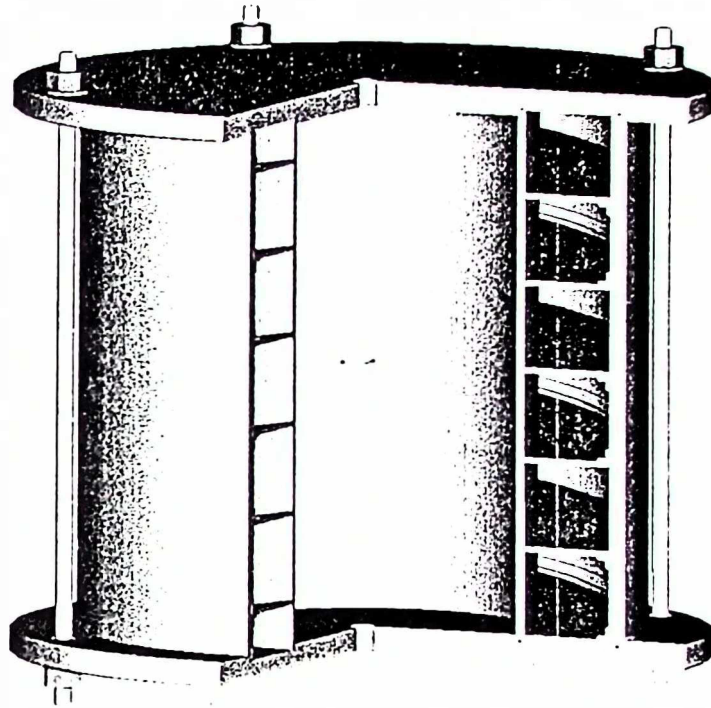
7. 1. 2 Opterećenje na zavojnoj ljusci

Opterećenje na ljusci može biti koncentrisano, kontinualno ili kombinovano sa komponentama u pravcu tangente, normale i binormale. Komponenta u pravcu binormale predstavlja komponentu opterećenja zavojne ljuske koja djeluje normalno na površ ljuske i uslovljava njeno savijanje.

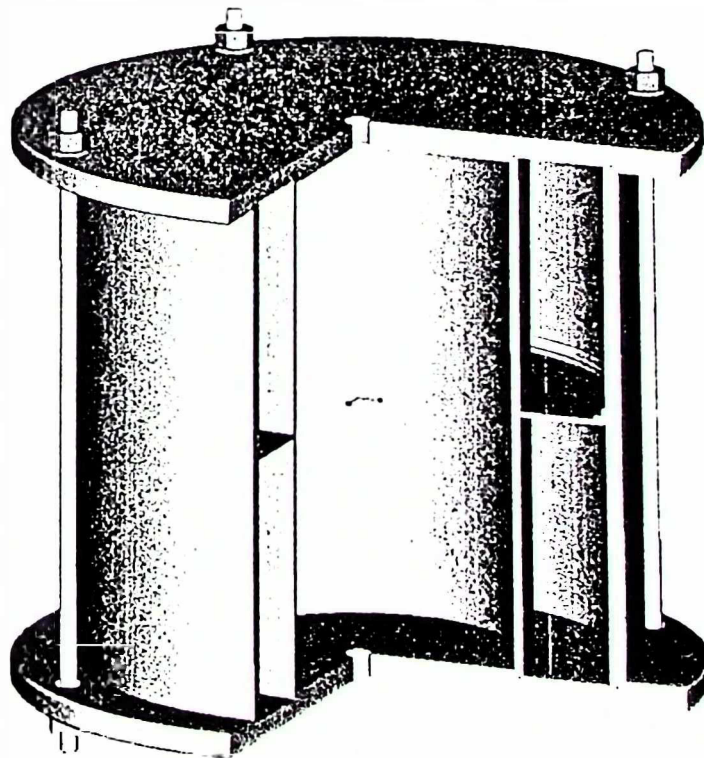
U ovom eksperimentalnom istraživanju se analizira uticaj ravnomjernog opterećenja pritiskom, normalno raspoređenim na površ zavojne ljuske, na njene pomjeraje, deformacije i napone. Na slikama 7.4, 7.5 i 7.6 su prikazani presjeci sklopova eksperimentalnih modela A, B i C u kojima se realizuju opterećenja površinskim pritiskom. Jedan od problema na početku planiranja eksperimenta je bio da se zavojna ljuska optereti površinskim pritiskom. U tom cilju je predložena konstrukcija zavojnih ljuski na cilindričnoj ljusci sa dva početka pod uglom od 180° . Ovakva konstrukcija sa dvostrukom zavojnom ljuskom omogućava da se u prostor između dvije ljuske dovede vazduh pod pritiskom, a da sa druge strane one budu slobodne, što naravno nije bilo moguće sa jednom ljuskom. Zaptivanje prostora pod pritiskom između dvije ljuske je riješeno postavljanjem specijalnog zaptivnog elementa i umetanjem ove konstrukcije u čauru koja je sa dvije okrugle ploče vezana sa 5 zavrtnjeva

u jednu cjelinu, što je prikazano na slici 7.4. Specijalni zaptivači između ljuske i čaure koji omogućavaju zaptivanje između ovih elemenata istovremeno treba da omoguće pomjeraje spoljašnje konture ljuske pod dejstvom normalnog pritiska. Specijalni zaptivni elementi su izrađeni od gumene trake čiji je profil u obliku slova "L", sa uglom između krakova većim od 90^0 i okrenuti jedan prema drugom pričvršćeni su za zavojne ljuske kao na slici 7.7. Pod dejstvom pritiska vazduha, ovi zaptivači prijanjaju uz zid cilindrične čaure i time efikasno ostvaruju funkciju zaptivanja. Da bi se obezbijedila funkcija specijalnih zaptivača da istovremeno zaptivaju i omogućavaju pomjeraj spoljašnje konture zavojne ljuske pod dejstvom pritiska, neophodno je odgovarajućom tolerancijom labavog sklopa između ljuske i čaure kao i tačnošću geometrije elemenata sistema onemogućiti da nakon sklapanja sistema ljuska zadre u čauru, čime bi se dobili neadekvatni rezultati. Zaptivanje između okruglih ploča i čaure i okruglih ploča i konstrukcije sa dvostrukom zavojnom ljuskom se ostvaruje sa okruglom gumom ubačenom u žljeb u okrugloj ploči.

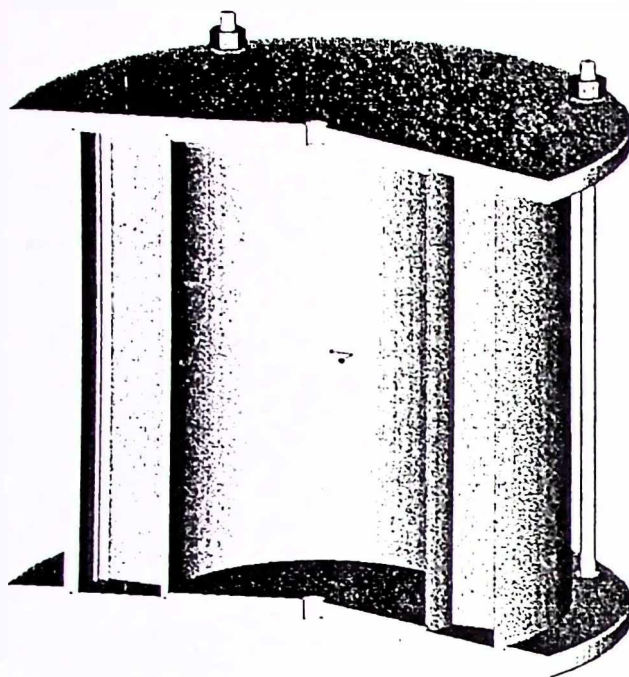
Izložena metodologija zaptivanja zavojne ljuske specijalnim zaptivnim gumama je primijenjena u zaptivanju prstenaste ploče na cilindričnoj ljusci (sl. 7.5) i zaptivanju dvije pravougaone ploče na cilindričnoj ljusci (sl. 7.6). Čaura i prstenaste ploče su zbog istih spoljašnjih dimenzija modela korišćene u sva tri slučaja. Zaptivanje krajeva zavojne ljuske kod modela A i krajeva pravougaonih ploča kod modela C je ostvareno specijalnim tečnim gumenim masama, kako je prikazano na slikama 10 i 11 u Prilogu 4. Sile kojima su nakon pritezanja zavrtnjeva za sklapanje sistema opterećeni krajevi zavojnih ljuski i pravougaonih ploča nemaju uticaja na izmjerene vrijednosti deformacija i pomjeraja kod modela A i neznatno utiču na ove vrijednosti kod modela C.



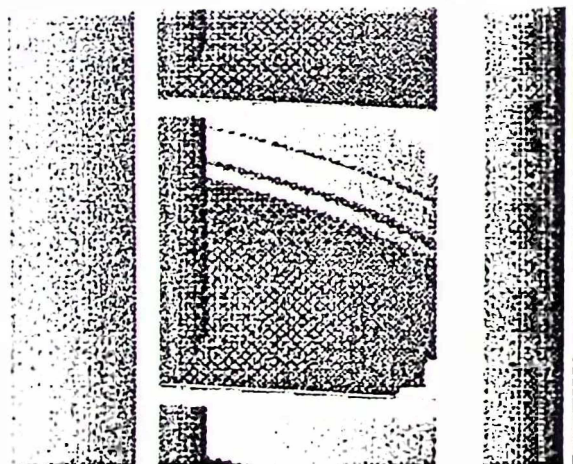
Slika 7.4 Sklop eksperimentalnog modela A



Slika 7.5 Sklop eksperimentalnog modela B



Slika 7.6 Sklop eksperimentalnog modela C



*Slika 7.7 Detalj komore sa pritiskom i postavljenim gumenim zaptivačima
kod modela A*

7. 1. 3 O eksperimentu

Eksperimentalno istraživanje je sprovedeno na sva tri modela u toku 1999. godine u “3D Centru” Mašinskog fakulteta u Podgorici u optimalnim mikroklimatskim uslovima. Kao izvor vazduha pod pritiskom korišćen je kompresor kapaciteta 60 dm^3 , radnog pritiska 0.8 N/mm^2 , proizvođača “Prva Petoletka”. Ispitivanje ljuski je izvršeno po inkrementima 0.05, 0.1, 0.1, 0.14, 0.15, 0.16, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24 i 0.25 N/mm^2 . Za regulaciju nivoa pritiska na ljuskama korišćen je uređaj za precizno podešavanje tip 647.2 (sl. 3, Prilog 4) proizvođač “Teleoptik”, koji je postavljen na instalaciji za dovod vazduha između kompresora i modela za ispitivanje. Ovaj uređaj automatski reguliše željeni nivo pritiska u komorama modela. Na samom modelu je postavljen barometar za kontrolu pritiska. Za precizno mjerenje pritiska u komorama modela konstruisan je uređaj sa živinim stubom za mjerenje pritiska u opsegu do 0.25 N/mm^2 (sl. 5, Prilog 4). Za mjerenje deformacija sa mjernih traka korišćen je mjerni most kapaciteta 30 mjernih mjesta (sl. 4, Prilog 4). Proizvođač mjernog mosta je “TML” Japan, a vlasnik Građevinski fakultet Podgorica. Mjerni most omogućava očitavanje rezultata sa svih mjernih traka i u slučaju eventualnog odstupanja pritiska u komorama modela obezbjeđuje upoređivanje nivoa deformacija u različitim tačkama zavojnih ljuski. Mjerni most ima mogućnost povezivanja sa računarom što je predstavljalo olakšanje u očitavanju rezultata sa mjernih traka. Za deformacijske analize korišćene su mjerne trake tip LY 11 6/120 čija je veličina $13 \times 6 \text{ mm}$, a dimenzije otpornika $6 \times 2.8 \text{ mm}$. Nominalni otpor trake je 120Ω . Trake su povezane specijalnim kablovima sa zaštitom i uzemljenjem radi otklanjanja električnih i magnetnih uticaja. Nakon

povezivanja mjernih traka kablovi su provučeni kroz komoru bez pritiska i izvučeni van modela kroz otvore sa gornje strane za model A, odnosno sa donje strane za modele B i C (sl. 7, Prilog 4). Trake su na čeličnu konstrukciju lijepljene dvokomponentnim ljepilom tip "P2" proizvođača "TML" Japan. U cilju boljeg prijanjanja ljepila površine su pripremljene i lagano zahrapavljene korišćenjem srednje finih brusnih sredstava finoće 180. Nakon što je površina učinjena hrapavom za njeno čišćenje i odmašćivanje korišćeno je jako sredstvo aceton. Problemi obilježavanja i postavljanja mjernih traka naročito u međuprostoru između dvije zavojne ljuske su rješavani specijalnim alatima za mjerenje, pozicioniranje i postavljanje mjernih traka. Nakon lijepljenja mjernih traka, koordinate njihovog tačnog položaja na ljuskama su mjerene sa tačnošću do 1/10 mm. Zbog veoma velikog uticaja debljine ljuske na deformacijske analize, ista je precizno mjerena instrumentom K-metar za ultrazvučno mjerenje debljine tip KM1, proizvođača Krautkramer GMBH Njemačka koji je prikazan na slici 9 u Prilogu 4. Polazeći od činjenice da kod razmatranih modela vrijednost napona ne zavisi od polarne koordinate φ već od vrijednosti poluprečnika r u razmatranoj tački, mjerenja deformacija su vršena u radijalnom, cirkularnom i pravcu pod uglom od 45^0 u odnosu na radijalni pravac u po dvije tačke, sa istom vrijednošću poluprečnika r .

Na ovaj način je omogućena kontrola dobijenih rezultata. Veća koncentracija mjernih traka je u krajnjim zonama ljuski na slobodnom kraju i pri cilindričnoj ljusci, gdje su vrijednosti deformacija u radijalnom i cirkularnom pravcu veće. Mjerenje deformacija u tri različita pravca, u tačkama sa istom koordinatom r , omogućava u ovim modelima određivanje pravaca glavnih napona bez korišćenja klasičnih rozeta. Ovdje se kao rezultati eksperimentalnih istraživanja prezentiraju izmjerene

deformacije ($\mu\epsilon=1\times10^{-6}$) na čeličnim konstrukcijama ljuski koje predstavljaju deformacije savijanja.

S obzirom na karakter naponskog stanja, vrijednosti za napone se izračunavaju koristeći relacije koje važe za dvoosno naponsko stanje

$$\sigma_1 = E \frac{1}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (7.1)$$

$$\sigma_2 = E \frac{1}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (7.2)$$

Za materijale čelika od kojih su izrađene ljuske modela uzete su vrijednosti: $E=200000 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$. Za mjerenje ugiba ljuski kod svih modela korišćen je specijalno pripremljeni uređaj sa komparaterom koji je prikazan na slici 6 u Prilogu 4. Uređaj se sastoji od nosača sa magnetnim stalkom koji se postavlja na donju ploču eksperimentalnih modela. Na nosaču sa magnetnim stalkom je pričvršćen element uređaja koji svojim mehanizmom vertikalno pomjeranje mjerne igle na jednom kraju transformiše u pomjeranje igle komparatera na drugom kraju uređaja. Ovaj element se jednim krajem provučenim kroz otvor na spoljašnjoj čauri eksperimentalnih modela postavlja na određene tačke zavojne ljuske u komorama bez pritiska a drugi kraj sa komparaterom se nalazi van modela i time je dostupan za očitavanje. Tačnost i pouzdanost ovog mjernog sistema, koji se sastoji iz više povezanih elemenata, potvrđuje činjenica da se nakon rasterećivanja modela, igla komparatera vraća u nulti položaj. Tačnost mjerenja ugiba je $1/100 \text{ [mm]}$. Ugibi su mjereni po navedenim inkrementima pritiska za različite vrijednosti poluprečnika r . Kompletan model sa povezanim mjernim mostom pripremljen za ispitivanje prikazan je na slici 8 u Prilogu 4.



7.2. Rezultati eksperimenta

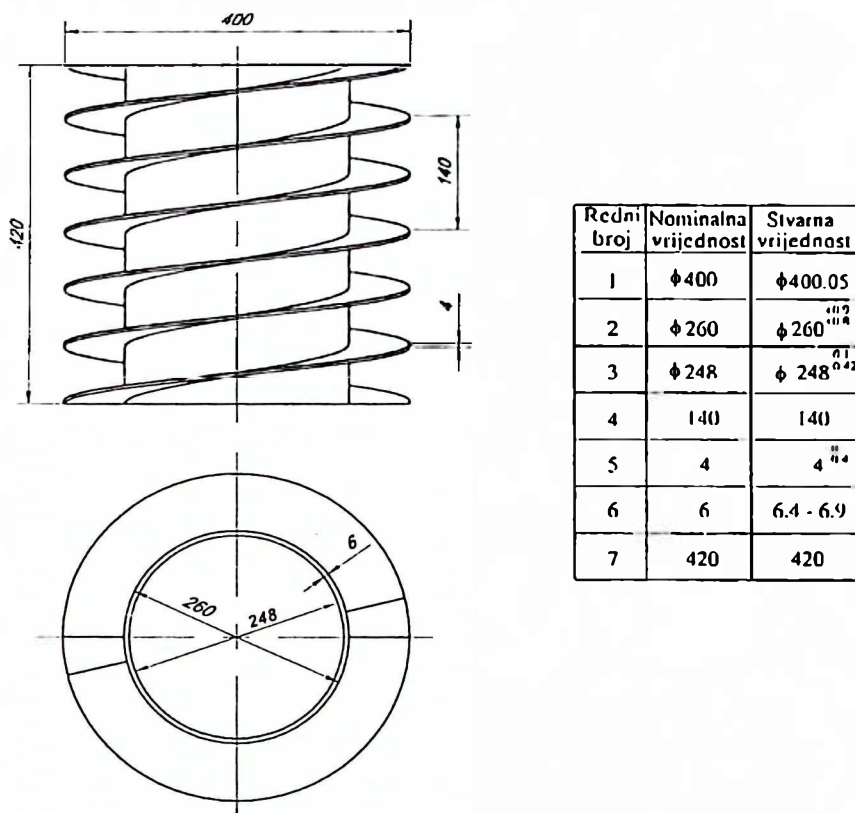
Prezentirani su rezultati eksperimenta za sva tri razmatrana modela. Date su vrijednosti geometrijskih karakteristika ljuski sa izmjerenim odstupanjima koja su nastala u postupku zavarivanja i mašinske obrade pojedinih elemenata. Prikazan je jedan broj fotografija o izgledu elemenata modela u različitim fazama pripreme i realizacije eksperimentalnog istraživanja koje su date u Prilogu 4. Istaknuti su detalji sa postavljenim mjernim trakama u radijalnom, cirkularnom i pravcu pod uglom od 45° na fotografijama koje su date u Prilogu 4.

Tabelarno su u Prilogu 5 dati rezultati tenzometrijskih ispitivanja, sa vrijednostima deformacija izmjerenih na 30 mjernih traka po svakom modelu, za različite inkremente pritiska. U tabelama u Prilogu 5 su date i vrijednosti ugiba izmjerene u tačkama sa određenom koordinatom r . Dio podataka je prikazan na dijagramima deformacija u radijalnom i cirkularnom (podužnom) pravcu u zavisnosti od koordinate r , za različite vrijednosti pritiska (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 N/mm² za mjerna mjesta 1÷15 i 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.22, 0.24 N/mm² za mjerna mjesta 16÷30).

Izvedeni su dijagrami napona u radijalnom i cirkularnom (podužnom) pravcu u zavisnosti od koordinate r , za različite inkremente pritiska (0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 N/mm² za mjerna mjesta 1÷15 i 0.12, 0.16, 0.2, 0.24 N/mm² za mjerna mjesta 16÷30). Naponi su izračunati prema relacijama (7.1) i (7.2) a tabelarne vrijednosti su date u Prilogu 5.

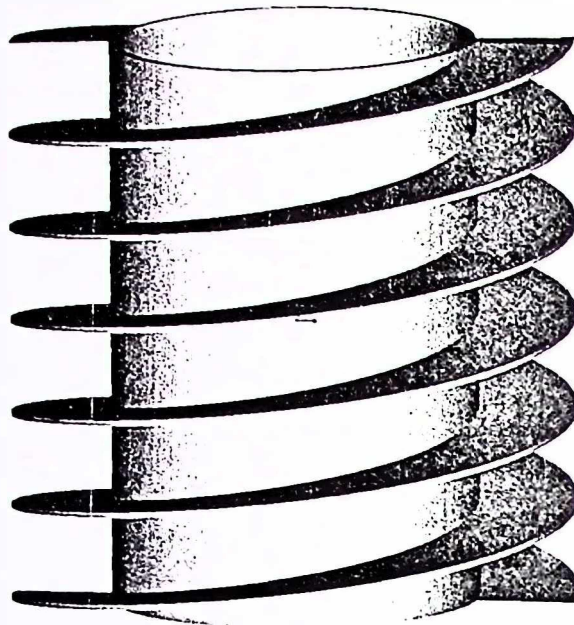
Na kraju su dati dijagrami zavisnosti pomjeraja tačaka ljuski od koordinate r za vrijednosti pritiska 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 N/mm². Za crtanje dijagrama korišćen je programski paket Microsoft Excel.

7.2.1. Model A- zavojna ljuska na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta

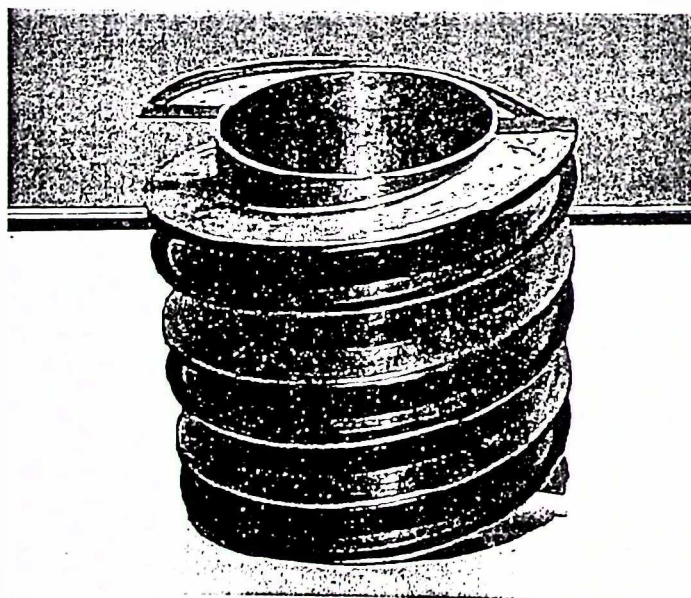


Slika 7.8 Geometrijski parametri zavojne ljuske

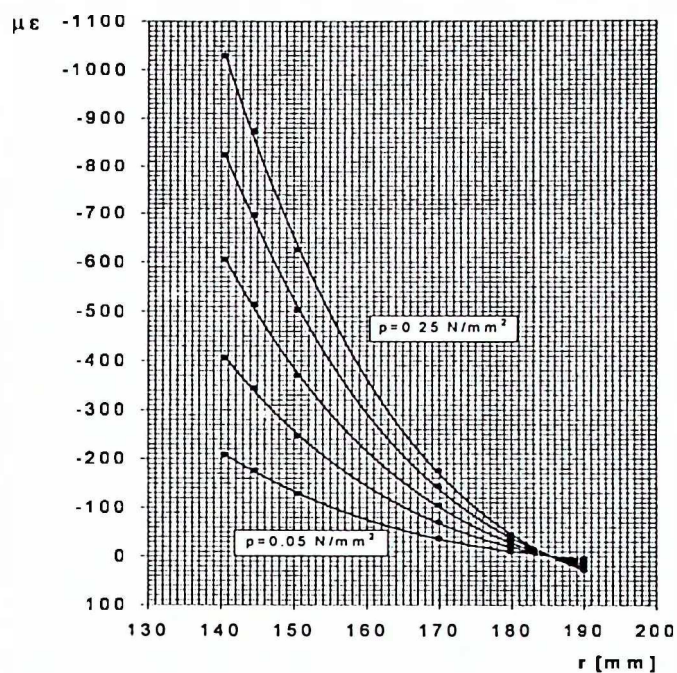
Eksperiment je realizovan u optimalnim uslovima pri temperaturi 19°C. Opterećenje je povećavano u inkrementima do pritiska 0.25 N/mm². Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti registrovana su mjerenja sa mjernih traka. Po završetku tenzometrijskih ispitivanja vršena su mjerenja ugiba ljuske. Uređaj za mjerenje ugiba ljuske je postavljan u tačkama sa određenom koordinatom r od 197 mm u početnom položaju, a zatim u intervalu od 195 do 140 mm sa korakom od 5 mm. Opterećenje je povećavano u inkrementima od 0.05 do 0.25 N/mm². Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti očitavane su sa skale komparatera vrijednosti ugiba.



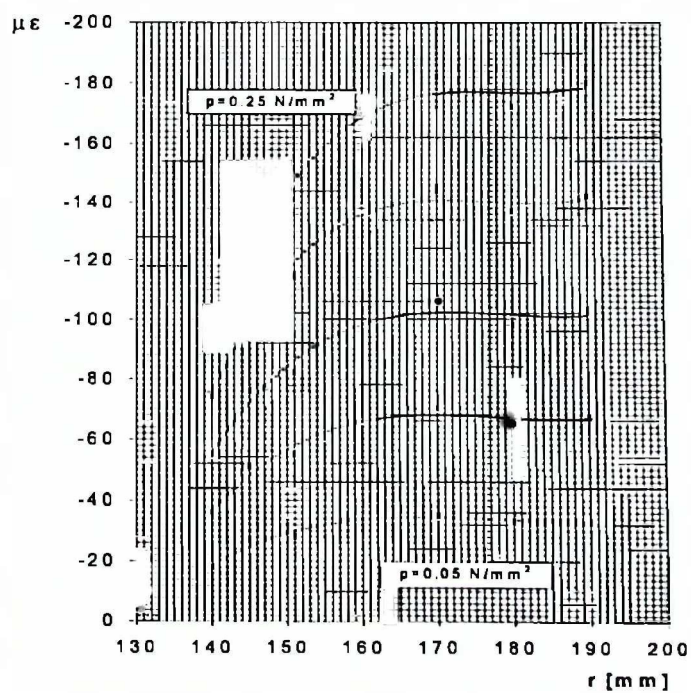
Slika 7.9 Model zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci



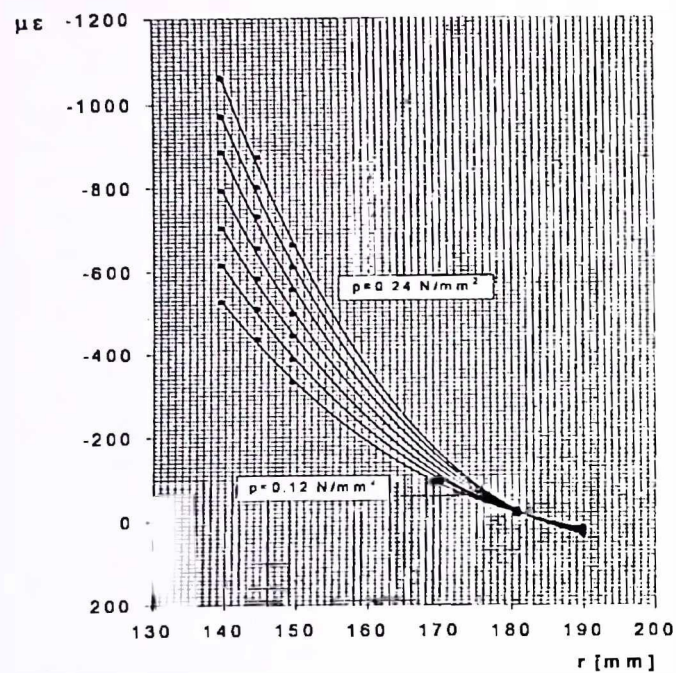
Slika 7.10 Zavojna ljuska sa postavljenim zaptivnim trakama



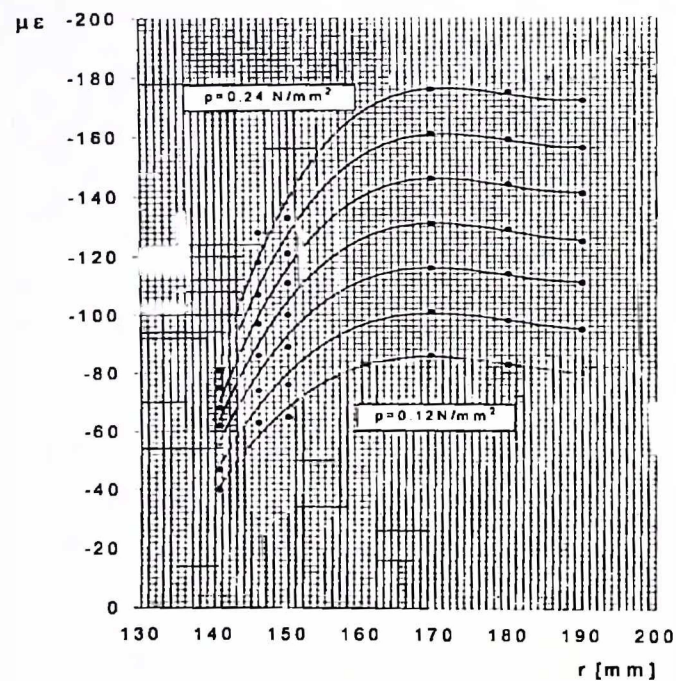
Slika 7.11 Deformacije u radijalnom pravcu za model A (mjerne trake 1÷15)



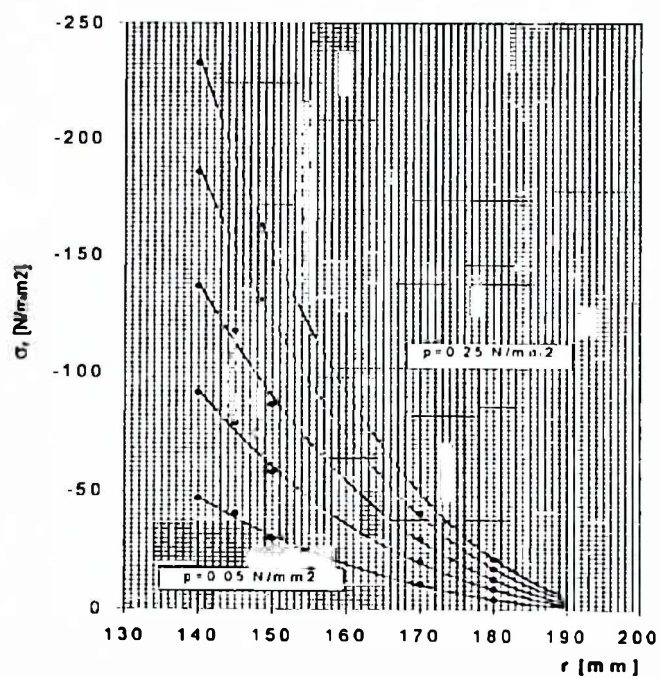
Slika 7.12 Deformacije u cirkularnom pravcu za model A (mjerne trake 1 ÷ 15)



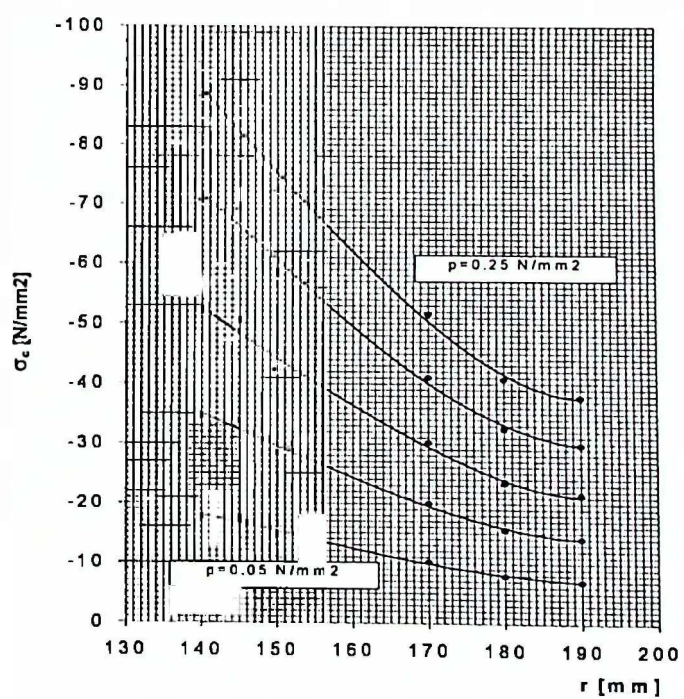
Slika 7.13 Deformacije u radijalnom pravcu za model A (mjerne trake 16÷30)



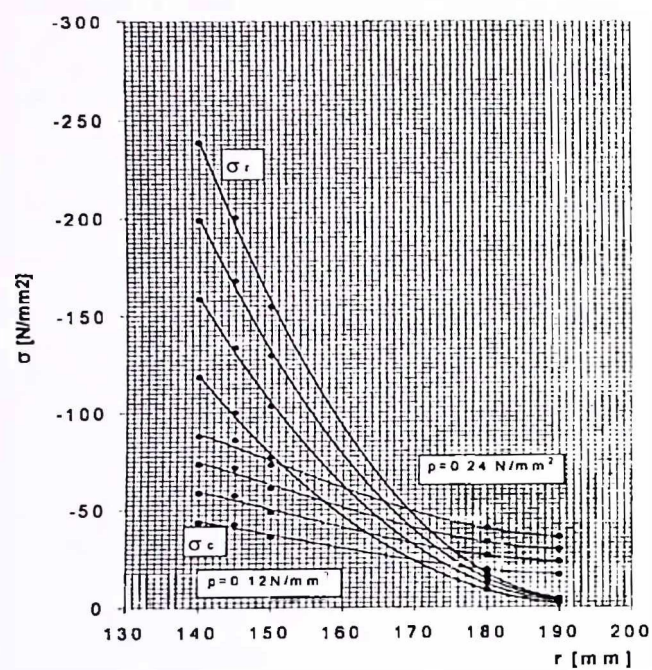
Slika 7.14 Deformacije u cirkularnom pravcu za model A (mjerne trake 16÷30)



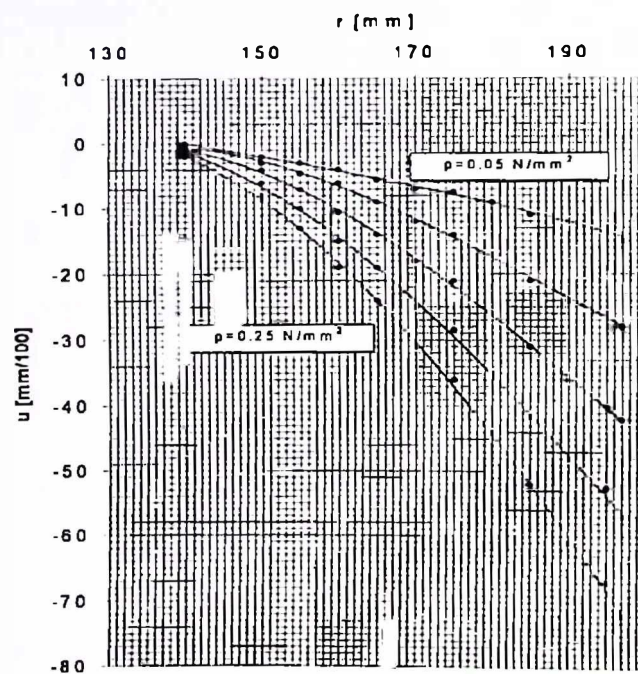
*Slika 7.15 Naponi u radijalnom pravcu model A
(mjerne trake 1÷12)*



*Slika 7.16 Naponi u cirkularnom pravcu model A
(mjerne trake 1÷12)*

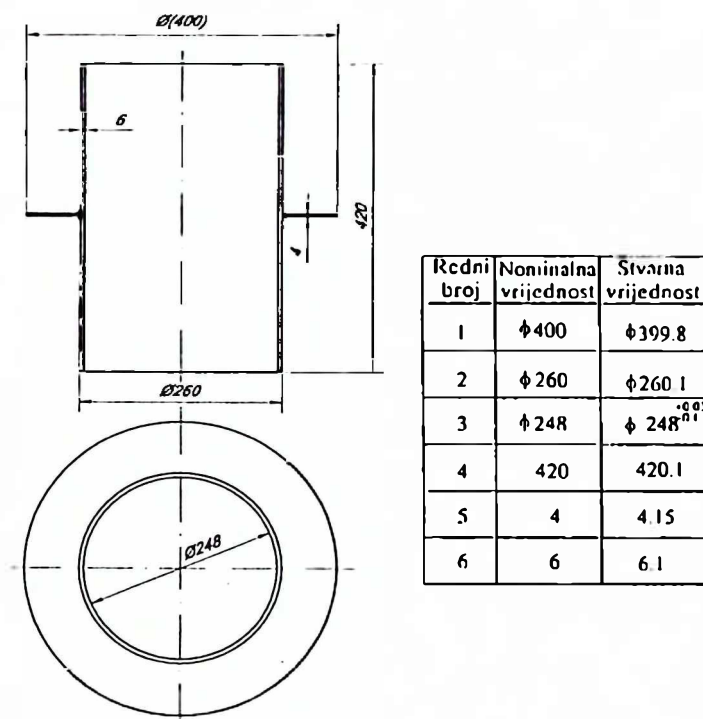


Slika 7.17 Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu model A
(mjerne trake 16÷27)



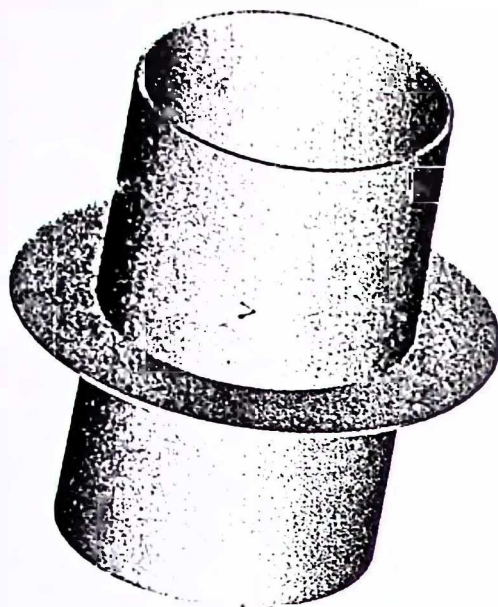
Slika 7.18 Vertikalni pomjeraji zavojne ljuske

7.2.2 Model B - prstenasta ploča na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta

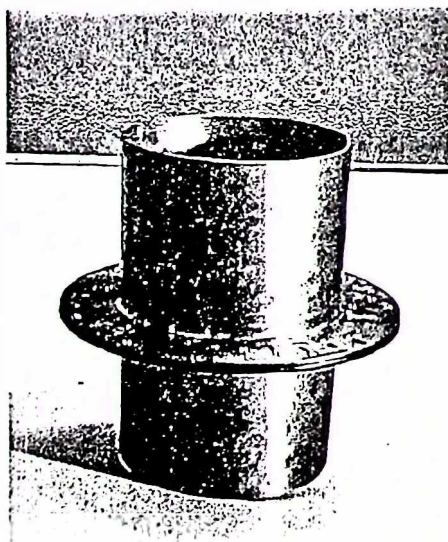


Slika 7.19 Geometrijski parametri prstenaste ploče

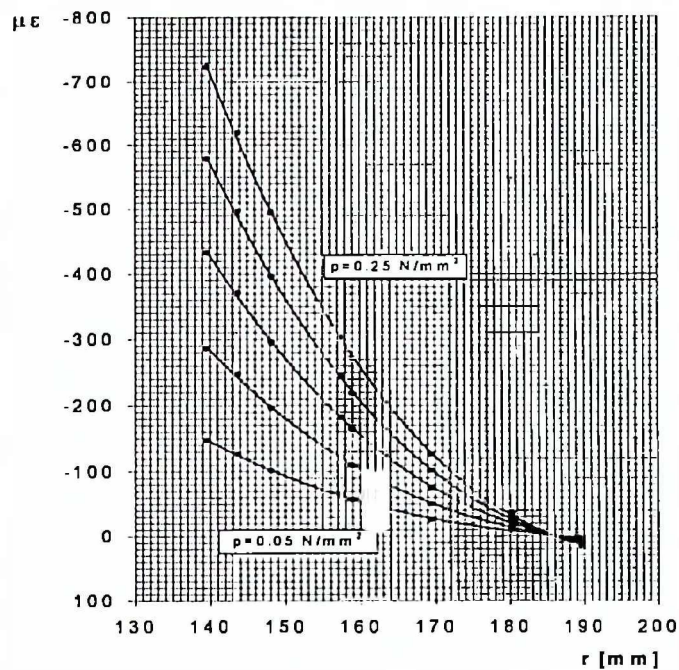
Eksperiment je realizovan u optimalnim uslovima pri temperaturi od 20°C. Opterećenje na prstenastoj ploči je povećavano od pritiska 0.05 do 0.25 N/mm². Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti na skali živinog stuba registrovana su mjerenja sa mjernih traka. Nakon završetka tenzometrijskih ispitivanja vršena su mjerenja vertikalnih pomjeraja prstenaste ploče. Uređaj za mjerenje ugiba ploče je postavljan u tačkama sa određenom koordinatom r . Početno mjerenje je urađeno za $r=197$ mm a zatim sa korakom od 5 mm u opsegu od 140 do 195 mm. Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti registrovane su vrijednost ugiba prstenaste ploče.



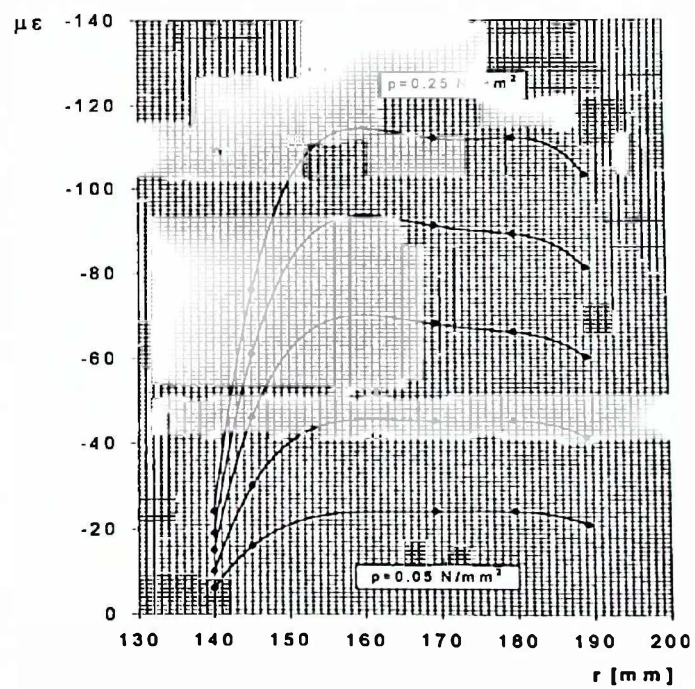
Slika 7.20 Model kružne ploče na cilindričnoj ljusci



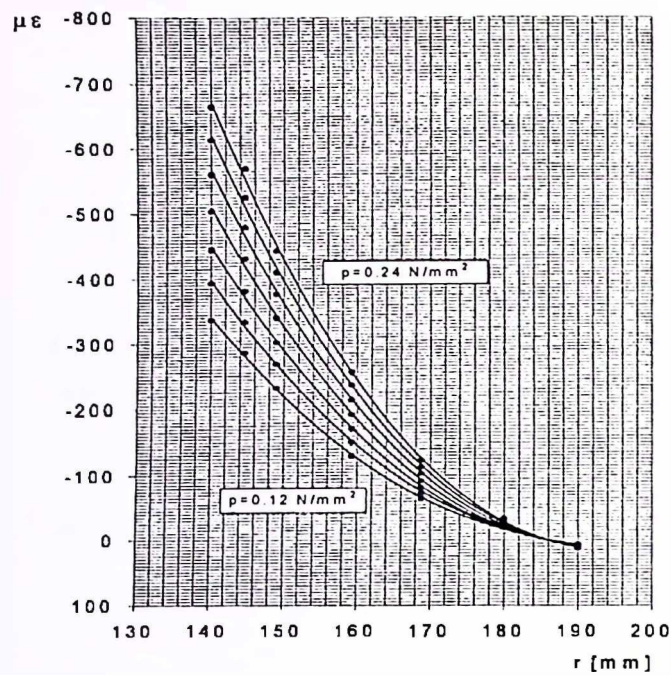
Slika 7.21 Kružna ploča sa postavljenim mjernim trakama



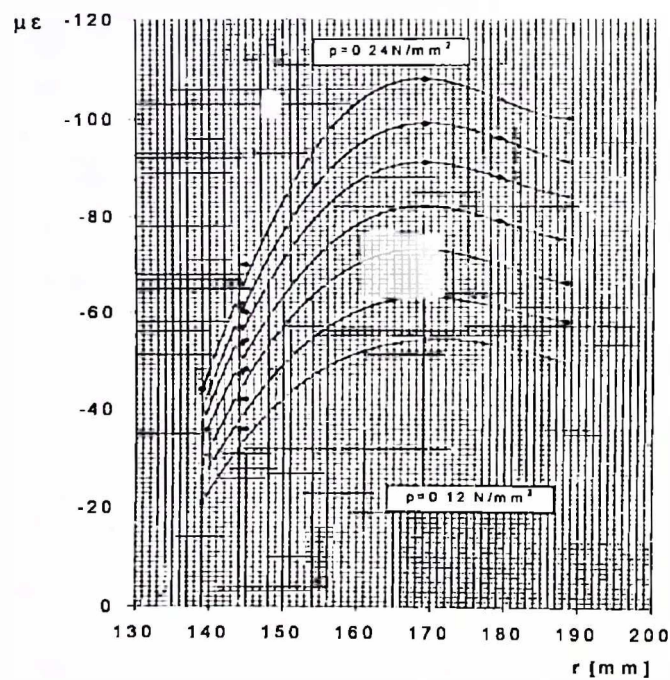
*Slika 7.22 Deformacije u radijalnom pravcu za model B
(mjerne trake 1÷15)*



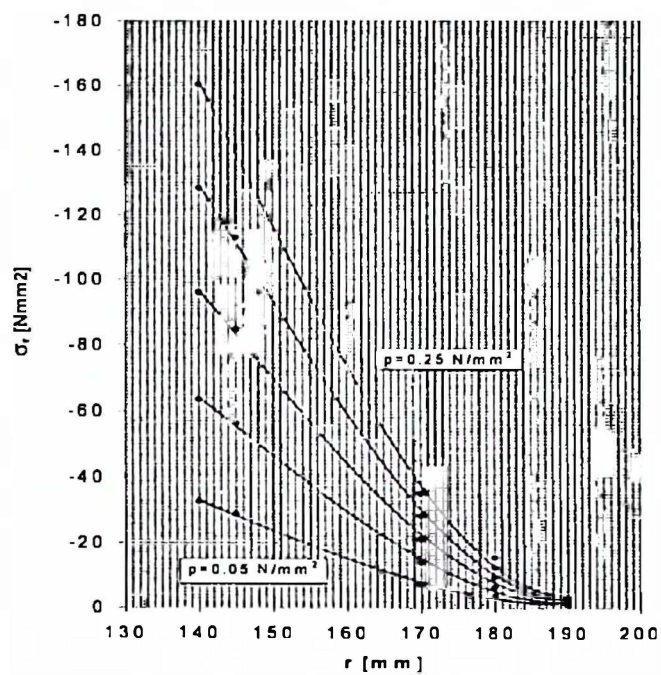
*Slika 7.23 Deformacije u cirkularnom pravcu za model B
(mjerne trake 1÷15)*



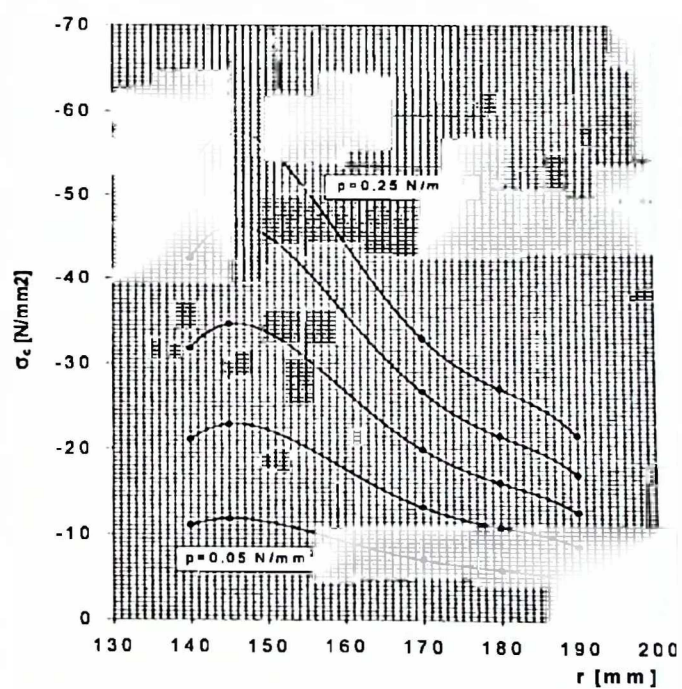
Slika 7.24 Deformacije u radijalnom pravcu za model B
(mjerne trake 16÷30)



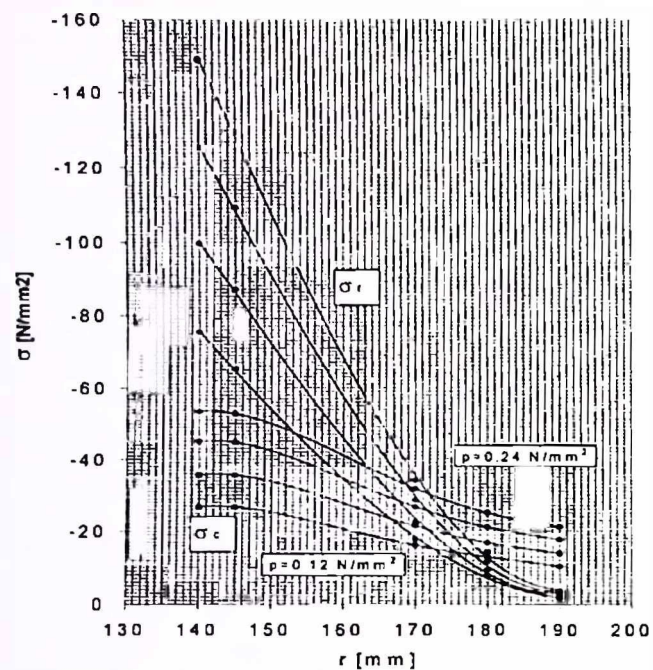
Slika 7.25 Deformacije u cirkularnom pravcu za model B
(mjerne trake 16÷30)



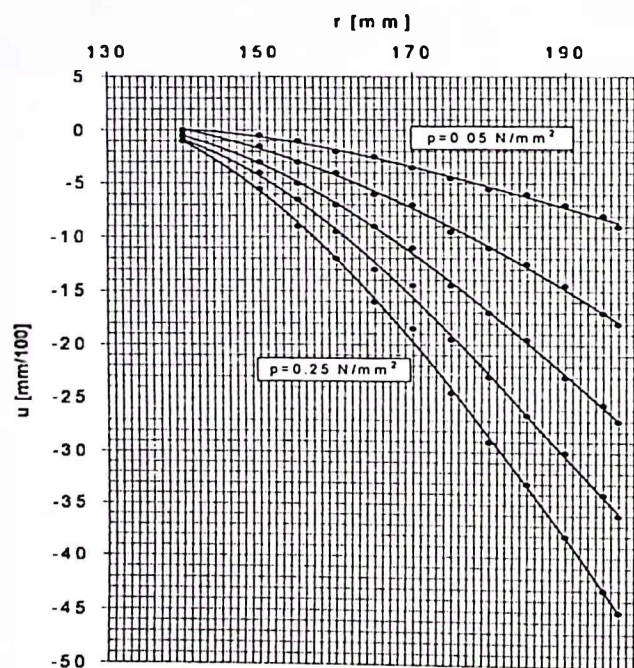
*Slika 7.26 Naponi u radialnom pravcu model B
(mjerne trake 1÷13)*



*Slika 7.27 Naponi u cirkularnom pravcu model B
(mjerne trake 1÷13)*

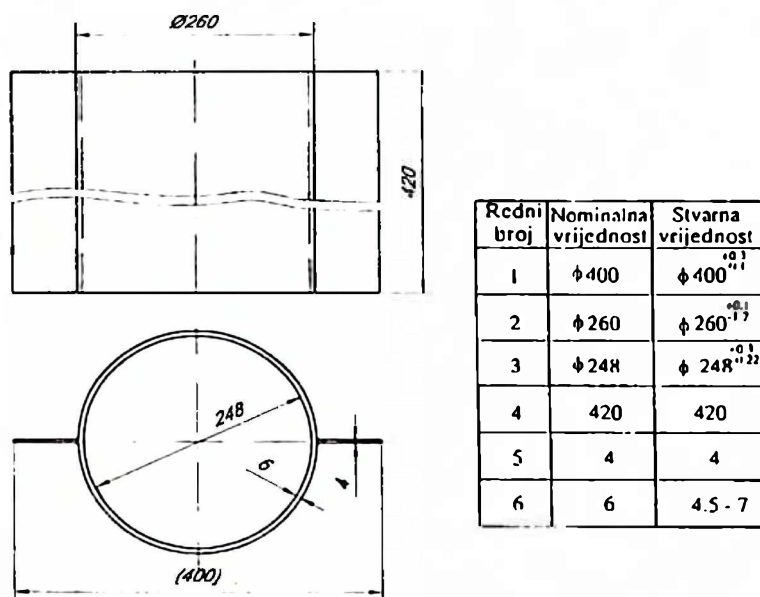


Slika 7.28 Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu model B (mjerne trake 16÷28)



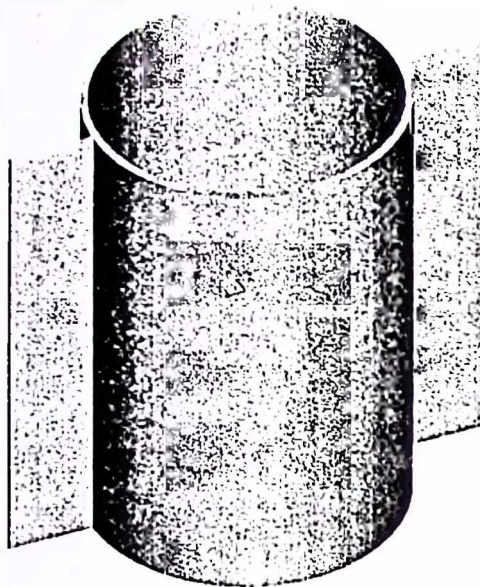
Slika 7.29 Vertikalni pomjeraji prstenaste ploče

7.2.3 Model C - pravougaona ploča na cilindričnoj ljusci, rezultati eksperimenta

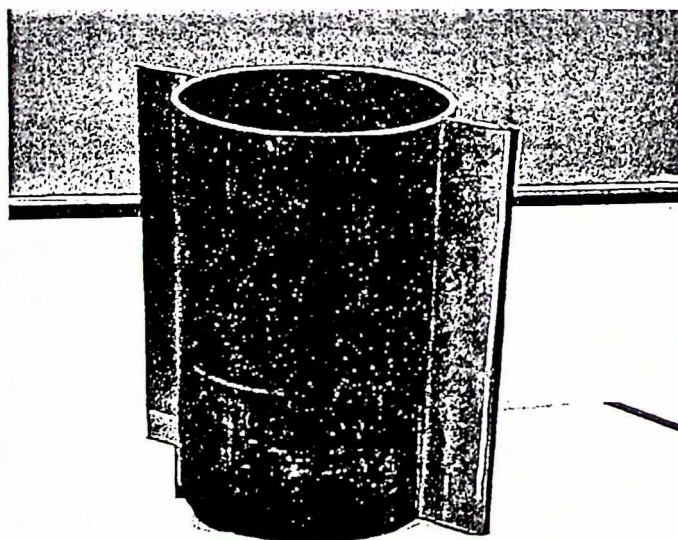


*Slika 7.30 Geometrijski parametri pravougaonih ploča
na cilindričnoj ljusci*

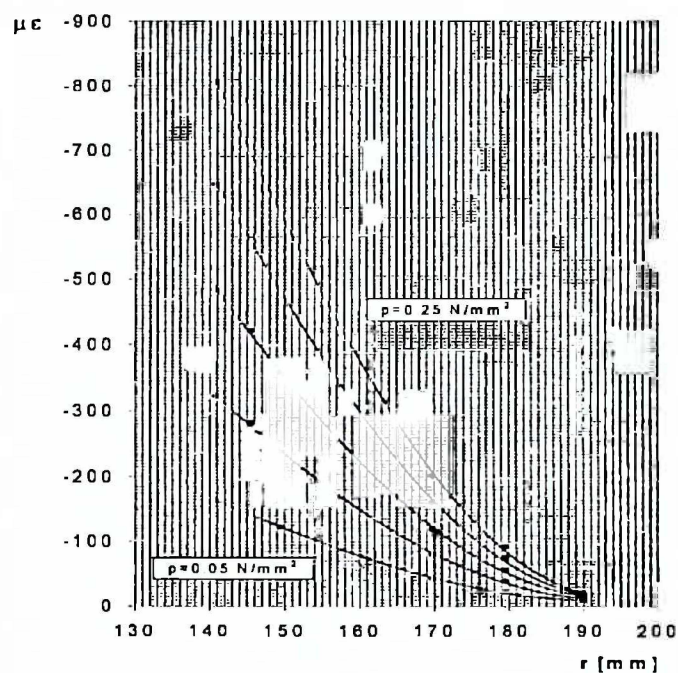
Realizacija eksperimenta se odvijala u optimalnim uslovima pri temperaturi od 19°. Vazduh pod pritiskom je dovođen u komoru modela po inkrementima do pritiska 0.25 N/mm². Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti vršeno je snimanje rezultata sa mjernih traka. Mjerenja ugiba su izvršena po završetku tenzometrijskih ispitivanja u tačkama sa određenom koordinatom r. Početno mjerenje je urađeno na spoljašnjem kraju pravougaonih ploča, a zatim je poluprečnik r mijenjan sa korakom od 5mm u opsegu od 135 do 195 mm. Nakon dovođenja pritiska do određene vrijednosti na živinom stubu, očitavane su vrijednosti ugiba pravougaone ploče.



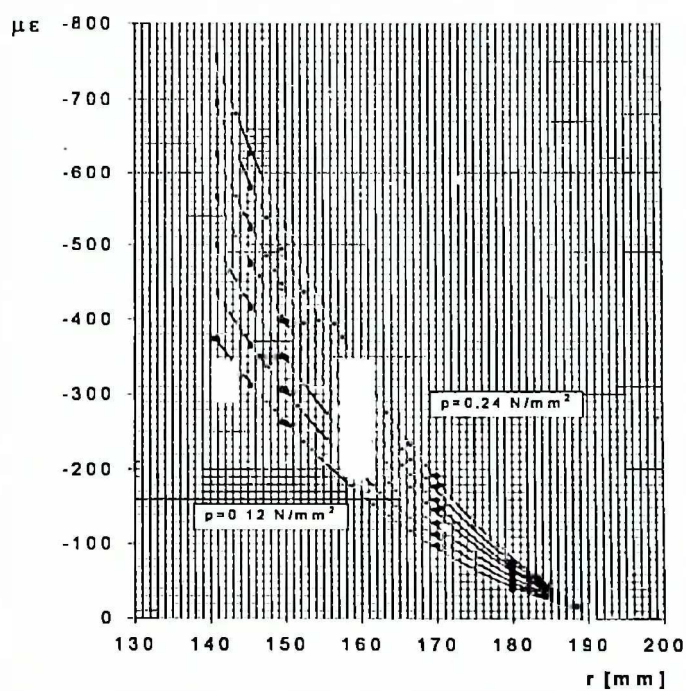
Slika 7.31 Model dvije pravougaone ploče na cilindričnoj ljusci



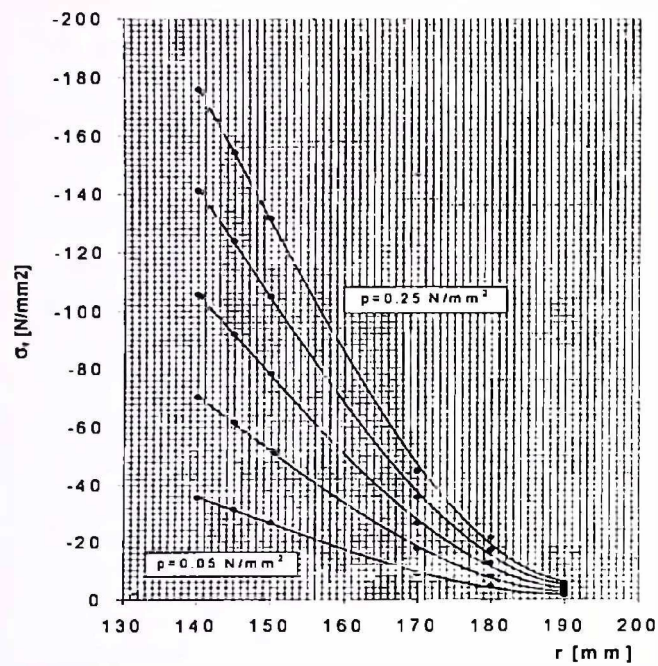
Slika 7.32 Pravougaone ploče sa postavljenim zaptivnim trakama



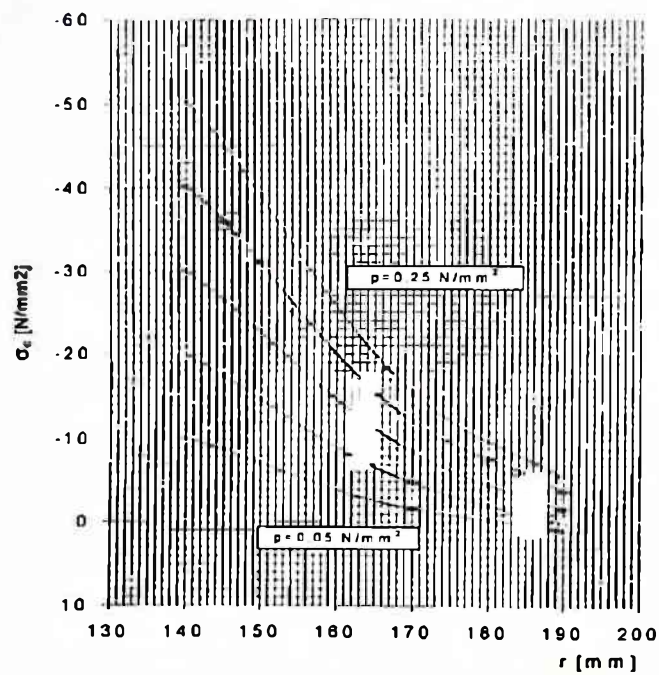
Slika 7.33 Deformacije u radijalnom pravcu za model C (mjerne trake 1÷15)



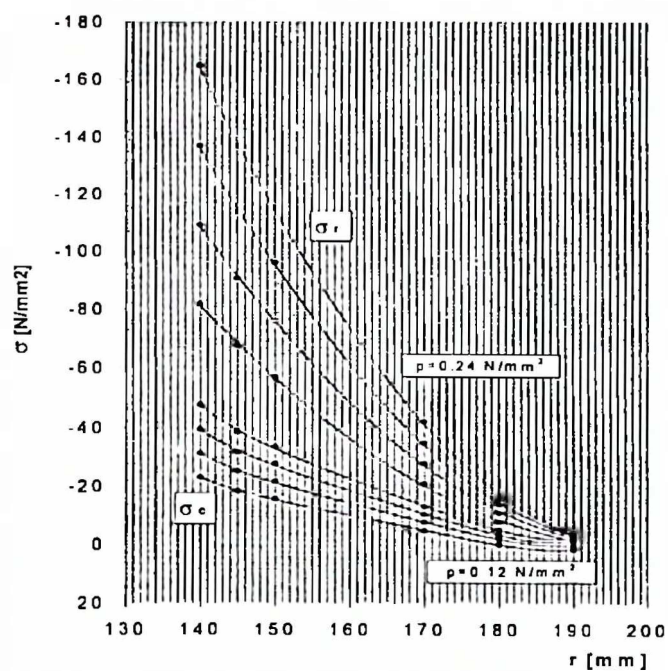
Slika 7.34 Deformacije u radijalnom pravcu za model C (mjerne trake 16÷30)



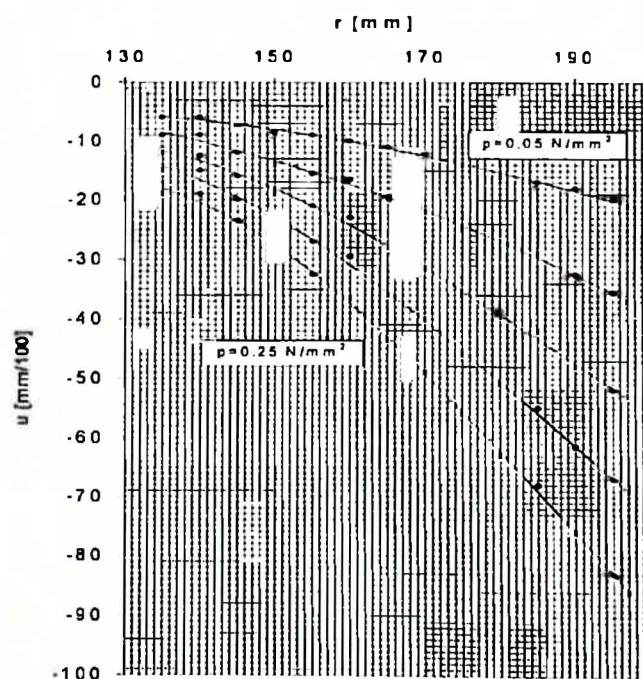
*Slika 7.35 Naponi u radijalnom pravcu model C
(mjerne trake 1÷12)*



*Slika 7.36 Naponi u podužnom pravcu model C
(mjerne trake 1÷12)*



Slika 7.37 Naponi u radialnom i podužnom pravcu model C (mjerne trake 16÷26)



Slika 7.38 Vertikalni pomjeraji pravougaone ploče

7.3 Zaključci na kraju eksperimentalnog istraživanja sa uporednim rezultatima

Eksperimentalno istraživanje na originalnim modelima zavojne ljuske prezentiranim u ovom radu potvrdilo je efikasnost primjenjenih rješenja koja su omogućila da se za konkretne modele metodom tenzometrije izvrše analize napona i deformacija.

Korišćenje mjernog mosta novije generacije i renomiranog proizvođača "TML" Japan omogućilo je da se deformacije u različitim pravcima na modelima zavojne ljuske izmjere veoma pouzdano i sa visokom tačnošću. Zbog velikog uticaja parametara geometrije, opterećenja, materijala i dr. razmatranih modela na tačnost rezultata neophodno je u ovakvim istraživanjima koristiti pouzdane i precizne mjerne sisteme kojim će se obezbijediti tačnost mjerenja ulaznih parametara i dobijenih rezultata, što je za provedeno eksperimentalno istraživanje opisano u ovom Poglavlju.

Na osnovu rezultata tenzometrijskih analiza, izvedeni dijagrami za komponente napona pokazuju saglasnost dobijenih rezultata sa analitičkim i MKE analizama. Rezultati eksperimentalnih istraživanja kao i prethodne analitičke i MKE analize potvrđuju da su naponi u radijalnom pravcu u korjenu zavojne ljuske pri cilindričnoj ljusci maksimalni i da je kriterijum dozvoljenih vrijednosti ovih napona relevantan za određivanje geometrijskih parametara zavojne ljuske.

U Tabeli 7.1 date su uporedne vrijednosti za napone u radijalnom pravcu i pomjeraje za eksperimentalne modele A, B i C koji su opisani u ovom Poglavlju. U Tabeli 7.1 su dati i uporedni rezultati analiza za model B¹⁾ prstenaste ploče ukliještene na unutrašnjoj konturi ($a=136\text{mm}$,

$b=200\text{mm}$) razmatran u tačkama 3.7.2 i 6.6, i model B²⁾ prstenaste ploče na cilindričnoj ljusci ($a=130\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, $h_c=12\text{mm}$) razmatran u tačkama 5.2 i 6.7.2. Rezultati analitičkih i MKE analiza za eksperimentalne modele pokazuju saglasnost u uskim granicama koje se imaju za teorijske modele koji su tretirani u Tabeli 6.4 i u vezi sa kojima su dati zaključci u tački 6.9.

Tabela 7.1 Uporedne vrijednosti za napone i pomjeraje za modele A,B i C

Model	H [mm]	h_p [mm]	Napon u radijalnom pravcu [N/mm ²]			Pomjeraj u z pravcu [mm]		
			r=140 [mm]			r=195 [mm]		
			Analitička analiza	MKE analiza Pro/M	Eksperiment. istraživanje	Analitička analiza	MKE analiza Pro/M	Eksperiment. istraživanje
A	140	4	-114.6712	-117.1967		-0.4797	-0.4909	-0.40
A	140	3.6	-141.7820	-144.8671	-141.7030	-0.6438	-0.6578	
B	0	4	-115.3884	-117.0053		-0.4438	-0.4954	-0.26
B	0	4.15	-107.1985	-108.6287		-0.3974	-0.4479	
B ¹⁾	0	4.15	-110.4211	-112.0611		-0.2313	-0.2364	
B ²⁾	0	4.15	-108.3903	-110.2363	-95.0440	-0.3347	-0.3499	
C	∞	4	-100.9882	-101.3476	-103.9010	-0.4474	-0.4734	-0.40

Rezultati eksperimentalnih istraživanja se razlikuju ispod 1% za model A, oko 13% za model B i oko 3% za model C u odnosu na rezultate analitičkih analiza po kriterijumu napona u radijalnom pravcu. Eksperimentalno istraživanje sa većim brojem modela različitih geometrijskih parametara doprinijelo bi potpunijem upoređivanju rezultata eksperimentalnih i drugih analiza. Međutim, i pored razmatranja:

samo tri eksperimentalna modela i odstupanja pojedinih geometrijskih parametara ljuski koja se realno imaju pri izradi ovakvih konstrukcijskih oblika, postignuta je saglasnost rezultata eksperimentálnih istraživanja sa rezultatima analitičkih i MKE analiza. Odstupanja stvarnih geometrijskih parametara ljuski u odnosu na nominalne vrijednosti, (odstupanje debljine ljuske u različitim presjecima i dr.) su od uticaja na saglasnost dobijenih rezultata, što je naročito došlo do izražaja kod eksperimentalnog modela B zbog odstupanja debljina ljuski u zoni presjeka zavojne ljuske sa prstenastom pločom gdje je stvarna vrijednost poluprečnika zaobljenja 8mm.

Dijagram promjene napona u cirkularnom pravcu u eksperimentalnom istraživanju prema slici 7.27 za model B pokazuje da je ovaj napon u presjecima koji su bliži unutrašnjoj konturi sa koordinatom $r=140$ mm manji od istog napona za presjeke sa koordinatom $r=145$ mm za sve inkremente pritiska, što nije u saglasnosti sa oblikom ostalih dijagrama za napon u cirkularnom pravcu u eksperimentalnom istraživanju i drugim analizama. Ovo se može objasniti postojanjem zaostalih napona u ovim presjecima koji su mogli nastati u postupku zavarivanja ove strukture ili na drugi način, što je od uticaja na vrijednosti izmjerenih napona i pomjeraja prstenaste ploče kod modela B.

Veličina pomjeraja u z pravcu dobijena u eksperimentalnom istraživanju modela C data u Tabeli 17 u Prilogu 5 (-0.52 mm) je veća od veličine pomjeraja dobijenog analitičkim analizama (-0.4474 mm). Međutim, ako se uzme u obzir prema istoj tabeli veličina pomjeraja na unutrašnjoj konturi pravougaone ploče za ovaj model (-0.12 mm) nastala zbog pomjeraja cilindrične ljuske, može se smatrati da je postignuta

saglasnost rezultata eksperimentalnih istraživanja sa rezultate analitičkih i MKE analiza.

Dobijene manje vrijednosti pomjeraja u eksperimentalnom istraživanju za model A (-0.40 mm) i za model B (-0.26 mm) u odnosu na vrijednosti rezultata analitičkih analiza za model A (-0.4797 i -0.6438 mm) i za model B (-0.3974 mm) su posledica realnog uticaja odstupanja stvarnih u odnosu na nominalne geometrijske parametre modela. Debljina zavojne ljuske kod modela A se mijenja od 3.6mm na unutrašnjoj konturi do 4mm na spoljašnjoj konturi što bitno utiče na izmjerenu veličinu pomjeraja u z pravcu. Uzimanjem u obzir uticaja odstupanja geometrijskih parametara prstenaste ploče na cilindričnoj ljusci kod razmatranih analitičkih i MKE modela B¹⁾ i B²⁾ pokazuje se saglasnost rezultata analitičkih i MKE analiza sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja.

Uticaj sile trenja, koja se pojavljuje između specijalnog zaptivnog elementa na spoljašnjoj konturi zavojne ljuske i spoljašnje čaure, je kod modela A i B veći nego kod modela C i na samom kraju u tačkama sa koordinatama $r=190$ mm kod modela A i B utiče na pojavu promjene znaka deformacije u radijalnom pravcu (Tabele 3, 4, 8 i 9 u Prilogu 5). Smanjenjem površine kontakta između specijalnog zaptivnog elementa i spoljašnje čaure i smanjenjem koeficijenta trenja između dodirnih površina (podmazivanjem, visokim kvalitetom obrade kontaktnih površina i sl.) moguće je svesti uticaj sile trenja na najmanju mjeru. Uticaj sile trenja na dobijene rezultate napona u radijalnom pravcu u ovom istraživanju se može zanemariti.

Uticaj promjene debljine cilindrične ljuske na pomjeraj zavojne ljuske i prstenaste ploče je izražen ako se uzme u obzir da se debljina cilindričnih ljuski za eksperimentalne modele A i B mijenja od debljine

6.1mm do debljine 6.9mm, a da su kod modela B u zoni veze cilindrične ljuske i prstenaste ploče zbog velikog poluprečnika zaobljenja (8mm) te debljine realno veće.

U ovom istraživanju nije eksperimentalno određivan modul elastičnosti za materijale od kojih su izrađene ljuske, već je ta vrijednost za čelik pretpostavljena (200000 N/mm^2), što u slučaju odstupanja ove mehaničke karakteristike materijala u realnim modelima ima uticaja na tačnost rezultata.

Izmjerene neznatne vrijednosti deformacija u podužnom pravcu kod eksperimentalnog modela C, koje su prema analitičkim analizama jednake nuli su posledica male dužine pravougaonih ploča i činjenice da u ovom eksperimentalnom modelu krajevi ovih ploča nisu slobodni već su zbog potrebe zaptivanja komore pod pritiskom neznatno opterećeni u podužnom pravcu nakon vezivanja ploča sa ostalim elementima sistema. Upoređivanjem vrijednosti izmjerenih deformacija u radijalnom, cirkularnom i pravcu pod uglom od 45° , koje su u eksperimentalnom istraživanju izmjerene za tačke na ljuskama sa istom koordinatom r , zaključuje se da su pravci glavnih napona bliski radijalnim i cirkularnim pravcima što se potvrđuje i izvedenim dijagramima glavnih napona u MKE analizama.

Razvijeni originalni eksperimentalni model omogućava dalja istraživanja zavojnih ljuski promjenljive debljine, ljuski koje su po spoljašnjoj konturi vezane za cijevi sa njihove unutrašnje strane, ljuski oblika konoidnih površi kod kojih izvodnice ne moraju biti paralelne ravni xy , ljuski promjenljivog nagiba zavojne površi i dr.

8. ZAKLJUČCI SA SMJERNICAMA ZA DALJI RAD

Primjena analitičkih analiza sa numeričkim rješenjima , MKE analiza i eksperimentalnih metoda istraživanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske, u ovom radu, omogućila je pouzdano i cjelovito sagledavanje međusobnih uticaja parametara mehaničkog modela ove ljuske i razvoj metodologije automatizovanog projektovanja ovih konstrukcijskih elemenata. Saglasnost analitičkih, MKE i eksperimentalnih rezultata je potvrdila: da je primjena MKE moćan numerički metod u statičkoj analizi i ove složene strukture, efikasnost originalnog modela za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata zavojne ljuske izloženih ravnomjernom pritisku i ispravnost uvedenih pretpostavki i postupaka u analitičkom istraživanju ovog oblika ljuske.

— U analitičkoj analizi zavojne ljuske, korišćenje uobičajenih parametarskih jednačina srednje površi i primjena restriktivne teorije za tanke ljuske pokazala je punu opravdanost. Uvedene pretpostavke da su pomjeraji u tangentnoj ravni kod zavojne ljuske jednaki nuli i da izvedene veličine deformacija ne zavise od koordinate ugla omogućile su da se pogodnim transformacijama izvede diferencijalna jednačina savijanja zavojne ljuske po pomjeraju. Specijalni slučaj ove diferencijalne jednačine su poznate diferencijalne jednačine savijanja kružne i pravougaone ploče. Rješenje diferencijalne jednačine, dobijeno numeričkim metodom konačnih razlika, je saglasno sa rezultatima numeričkih analiza MKE i rezultatima tenzometrijskih analiza u eksperimentalnom istraživanju. Rješavanjem diferencijalne jednačine četvrtog reda sa definisanim graničnim uslovima dobijen je matematički model koji omogućava, da se

polazeći od kriterijuma čvrstoće, efikasno dobijaju optimalni parametri zavojne ljuske za zadate uslove. S obzirom da se ovdje analizira zavojna ljuska koja je ukliještena na unutrašnjoj konturi, ovaj matematički model se može primjenjivati kod zavojnih ljuski na punim cilindričnim profilima ili cjevastim profilima sa velikom debljinom zida, kakvi su zavojni transporter i sl.

Uvođenjem krivolinijskih koordinata, drugačijih od uobičajenih u teoriji cilindričnih ljuski, koje čine dva ugla, tako da su koordinatne linije dvije familije međusobno ortogonalnih zavojnica na cilindru dato je rješenje za savijanje cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji. Uvedena pretpostavka da su pomjeraji duž zavojne linije na cilindru jednaki nuli uz ostale granične uslove omogućila je dobijanje, u zatvorenom obliku, homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima po pomjeraju. Položaj tačaka na cilindričnoj ljusci u kojima je vrijednost pomjeraja maksimalna, prema izvedenom teorijskom rješenju, ne zavisi od intenziteta kontinualnog sprega. Prethodni rezultati su saglasni sa onim koji su dobijeni korišćenjem programskog paketa za MKE Pro/MECHANICA koji ima mogućnost definisanja kontinualnog sprega duž zavojnice. Pokazana je opravdanost uvedenih pretpostavki o pomjerajima i potvrđena efikasnost izložene metodologije analitičkog proračuna ovog modela cilindrične ljuske. Teorijski i praktični značaj rješavanja savijanja cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji, je u činjenici što diferencijalna jednačina ovog savijanja uz diferencijalnu jednačinu savijanja zavojne ljuske omogućava efikasno rješavanje problema savijanja zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Uspostavljeni matematički model putem numeričkog rješavanja diferencijalne jednačine se može koristiti za

dobijanje optimalnih parametara zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci za zahtijevane uslove. Ovaj matematički model se može primjenjivati za automatizovano projektovanje tipičnih konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske na tankoj cilindričnoj ljusci kakvi su radni elementi specijalnih mašina za čišćenje snijega i slični.

— Savremeni programski paketi kao što je Pro/MECHANICA i drugi imaju razvijene predprocesore za generisanje mreže konačnih elemenata zavojne ljuske kao i za generisanje mreže konačnih elemenata više spojenih ljuski u jednom modelu što omogućava efikasne analize deformacija i napona ovakvih ljuski. U daljim istraživanjima zavojnih ljuski bilo bi od značaja razvijati predprocesore za generisanje mreže KE za modele promjenljivog nagiba zavojne površi, zatim modele promjenljivog ugla između izvodnice i direktorne ravni kao i za druge oblike konoidnih površi.

— Originalni model za eksperimentalno istraživanje, je potvrdio efikasnost deformacijskih analiza konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske izloženih ravnomjernom opterećenju normalno na površ. Dobijeni rezultati pokazuju da je konstrukcijom dvostruke zavojne ljuske i korišćenjem predloženog načina zaptivanja na velikoj dužini kontakta, gdje se pritisak u komori istovremeno koristi za prijanjanje zaptivača, moguće istraživati različite geometrijske modele i različite režime eksploatacije ovih ljuski. Uticaj sile trenja, koja se u eksperimentalnim modelima pojavljuje na spoljnoj konturi ljuski zbog potrebe zaptivanja komore pod pritiskom, na dobijene rezultate po kriterijumu napona u radijalnom pravcu se može zanemariti. U eksperimentalnim istraživanjima na tačnost rezultata utiče preciznost izrade modela pri čemu posebno treba istaći debljinu ljuske kao najuticajniji faktor na dobijene vrijednosti

deformacija i pomjeraja. Veoma tačan i pouzdan uređaj za mjerenje nivoa pritiska pri ovakvim istraživanjima je sistem sa živinim stubom.

— Uporedne analitičke, MKE i eksperimentalne analize pokazuju da su naponi u radijalnom pravcu dominantni u odnosu na napone u cirkularnom pravcu za zavojnu ljusku u čitavom polju njenih mogućih oblika od nagiba $k=0$ do nagiba $k \rightarrow \infty$. Vrijednosti složenog napona računatog po kriterijumu Von Mises-a su manji od napona u radijalnom pravcu. Najveće vrijednosti napona u radijalnom pravcu su u unutrašnjim tačkama na mjestima spoja sa cilindričnom ljuskom. Vrijednosti napona u radijalnom pravcu u tim tačkama su relevantne za dimenzionisanje ovih konstrukcijskih oblika. Ove tačke se nalaze na unutrašnjem kraju zavojne ljuske, na početku zaobljenja koje se kod realnih konstrukcija postavlja u cilju eliminisanja negativnih uticaja koncentracije napona. Na osnovu izvedenih dijagrama zavisnosti napona pokazuje se, za većinu modela ljuski, da su naponi u radijalnom pravcu u zavisnosti od nagiba zavojne površi najveći kada $k \rightarrow 0$. Sa povećanjem koraka ovi naponi u početku neznatno opadaju, a zatim sa povećanjem k se smanjuju. Kada $k \rightarrow \infty$ naponi u radijalnom pravcu za većinu modela su najmanji. Za razliku od napona u radijalnom pravcu na osnovu izvedenih dijagrama se zaključuje da vrijednosti ugiba na zavojnoj ljusci mogu biti maksimalni za vrijednosti nagiba helikoidalne površi koje su veće od nule. Zavisnost maksimalnog napona u radijalnom pravcu za većinu modela ljuski ima oblik logističke krive. Ovaj zaključak ima praktični značaj u proračunu konstrukcijskih oblika zavojne ljuske jer omogućava kontrolne proračune korišćenjem jednostavnijih jednačina za savijanje kružne ploče. Međutim ovaj zaključak se ne može odnositi na modele zavojnih ljuski kod kojih je odnos širine ljuske i unutrašnjeg prečnika veliki. Kod ovakvih modela

vrijednosti napona u radijalnom pravcu nisu maksimalne za ljuske sa nagibom $k=0$. Uspostavljeni matematički model omogućava da se analizira uticaj odnosa širine zavojne ljuske i unutrašnjeg prečnika na vrijednosti maksimalnih napona u radijalnom pravcu, za različite vrijednosti nagiba zavojne ljuske.

— Deformacije u podužnom pravcu kod pravougaonih ploča u teorijskom modelu su jednake nuli. Izmjerene neznatne vrijednosti deformacija u podužnom pravcu kod eksperimentalnog modela C su posljedica male dužine pravougaonih ploča i manjih odstupanja eksperimentalnog modela od teorijskih pretpostavki o slobodnim krajevima pravougaonih ploča.

— Pravci glavnih napona su bliski radijalnim i cirkularnim pravcima što se zaključuje i upoređivanjem vrijednosti deformacija u radijalnom, cirkularnom i pravcu pod uglom od 45° , koje su u eksperimentalnom istraživanju izmjerene za tačke na zavojnoj ljusci sa istom koordinatom r .

— Rješenja primijenjena u eksperimentalnom modelu moguće je koristiti i za istraživanja zavojnih ljuski promjenljive debljine koje se mogu izrađivati na savremenim CNC mašinama. S obzirom da su programski paketi za analizu MKE po pravilu orjentisani na modele ljuski konstantne debljine u daljem istraživanju je moguće raditi sa konačnim elementima ljuski različitog oblika interpolacionih funkcija, broja stepeni slobode i dr.

— Prezentirani eksperimentalni model omogućava istraživanje ljuski oblika konoidnih površi kod kojih izvodnice ne moraju biti paralelne ravni xy , zatim ljuski promjenljivog nagiba zavojne površi kao i drugih oblika konoidnih površi.

- Osnovna rješenja eksperimentalnog modela moguće je primijeniti na istraživanje zavojnih ljuski koje su po spoljašnjoj konturi vezane za cijevi sa njihove unutrašnje strane. U ovom slučaju zaptivanje dvostruke zavojne ljuske specijalnim zaptivnim elementima bi se realizovalo po unutrašnjoj konturi, a u modelu za ispitivanje nalazila bi se i čaura čije dimenzije odgovaraju unutrašnjoj graničnoj krivoj helikoidalne površi.
- Analiza napona i deformacija zavojnih ljuski izloženih tangentnom opterećenju predstavlja istraživački izazov u budućem radu. U slučaju kada je zavojna ljuska ovako opterećena u teorijskoj analizi je potrebno uzeti u obzir zavisnost membranskih sila od pomjeraja u tangentnoj ravni i u sistemu diferencijalnih jednačina izračunavati pomjeraje $u_{<1>}$ i $u_{<2>}$ koji su u slučaju savijanja zavojne ljuske zanemareni. Postavljanje matematičkog modela savijanja zavojne ljuske i numeričko rješavanje diferencijalne jednačine sprovedeno u ovom radu, ukazuje na obim i složenost postupka koji bi se mogao očekivati u analizi modela zavojne ljuske opterećene u tangentnoj ravni, a koja podrazumijeva rješavanje sistema diferencijalnih jednačina sa većim brojem graničnih uslova. Rješavanje ovog sistema bi omogućilo razvijanje metodologije dobijanja optimalnih parametara konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske izloženih tangentnom opterećenju. Primjena programskih paketa za analizu MKE zavojnih ljuski izloženih tangentnom opterećenju zahtijeva razvoj predprocesora za pripremu tih modela jer su u postojećim programskim paketima ovi razvijeni za koncentrisana opterećenja u tački, duž linije i sl. ili ravnomjerna opterećenja normalna na površ ljuske. Eksperimentalno istraživanje modela ljuske izložene tangentnim opterećenjima zahtijeva u daljem radu rješavanje veoma složenog problema realizacije ovakvog opterećenja kod zavojne ljuske.

LITERATURA

- [1] ALGOR Interactive Systems, User's Manual, Pittsburgh 1997.god.
- [2] Anđelić T., Tenzorski račun, Naučna knjiga, Beograd, 1991.god.
- [3] Bahvalov N.S., Numeričke metode I dio, Moskava 1973.god.
- [4] Bathe K.J., Wilson E., Numerical Methods in Finite Elements Analysis, Prentice-Hall 1976. god.
- [5] Bazjanac D., Nauka o čvrstoći, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.god.
- [6] Berezin I.S., Žitkov N.P., Metode računanja I dio, Moskva, 1950.god.
- [7] Berković Mladen, Računarska i programska oprema za CAE/CAD/CAM sisteme, Međunarodni CIM seminar, Niš, 1987.god.
- [8] Brčić V., Čukić R., Eksperimentalne metode u projektovanju konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.god.
- [9] Brčić V., Otpornost Materijala, Građevinska knjiga, Beograd 1982.god.
- [10] Chernykh K.F., Some Aspects of the Linear Theory of Shells, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Theory, Tbilisi, 1978.god., 225-240
- [11] Cohen J.W., On Stress Calculations in Helicoidal Shells and Propeller Blades, Waltman, Delft, 1955.god.
- [12] Cohen J.W., The Inadequacy of the Classical Stress-Strain Relations for the Right Helicoidal Shell, Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland, Delft, 1959.god., 415-433

- [13] Coserrat E., Coserrat F., Sur la theorie des corps minces, Compt. Rend. 146, 1908, 169-172
- [14] Dajcik M.L., Pigorovskij N.I., Hursudov G.H., Metodi i sredstva naturnoj tenzometri, Masinostroenie, Moskva, 1989.god.
- [15] Den Hartog P., Strength of Materials, Dover, New York, 1961.god.
- [16] Domazet D., Trajanović M., Manić M., Uvod u računarski integrisane proizvodne sisteme, Naučna knjiga, Beograd 1989.god.
- [17] Dulić S., Merne trake i njihova primena, Mašinski fakultet, Beograd, 1987.god.
- [18] Ericksen J.L., Truesdell C., Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, Arch. Rational Mech. Anal. 1, 1958.god., 295-323
- [19] Ernst L.J., A Finite Element Approach to Shell Problems, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Thoery, Tbilisi, 1978.god., 241-262
- [20] Feodoseev V.I., Soprotivljenje materialov, Nauka, Moskva, 1973.god.
- [21] Filolenko M.-Borodič i dr., Kurs soprotivljenija materialov, Gos. Izd., Moskva, 1955. god.
- [22] Fiolenko-Borodič, Teorija oprugosti, FIZMATGIZ, Moskva 1959.god.
- [23] Gol'denveizer A.L., A Theory of Thin Elastic Shells (in Russian), Mir, Moskva, 1953.god.
- [24] Gol'denveizer A.L., Equations of the Theory of Thin Shells (in Russian), Prikl. Mat. Mekh. 4, 1940.god., 35-42
- [25] Gol'denveizer A.L., Lur'e A.I., On the Mathematical Theory of the Equilibrium of Elastic Shells (in Russian), Prikl. Mat. Mekh. 11, 1947.god., 565-592

- [26] Gol'denveizer A.L., Problems in the Rigorous Deduction of the Theory of Thin Elastic Shells, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 31-38
- [27] Gol'dveizer A.L., The Role of Surface Bendings in the Shell Theory, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Thoery, Tbilisi, 1978.god., 315-323
- [28] Green A.E., Naghdi P.M., Shells in the Light of Generalized Continua, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 39-58
- [29] Green A.E., Naghdi P.M., The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory, Interantional Journal of Solids and Structures 4, 1968.god, 585-592
- [30] Green A.E., Naghdi P.M., The Linear Theory of an Elastic Cosserat Plate, Proc. Cambridge Phil. Soc. 63, 1967.god., 537-550
- [31] Green A.E., Wainwright W.L., General Theory of a Cosserat Surface, Arch. Rational Mech. Anal. 20, 1965.god., 287-308
- [32] Hellen T., User's Guide to BERSAFE phase II, Nuclear Laboratories, Berkeley, Glos, England 1983. god.
- [33] Irons B., Ahmad S., Techniques of Finite Elements, Ellis Horwood Limited. John Wiley, New York 1980. god.
- [34] Jakovljević K.P., Matematička obrada rezultata mjerenja, Moskva, 1950.god.
- [35] Jezernik A., Računalniki pri konstruiranju in v proizvodnji, DZS, Ljubljana 1978. god.
- [36] Josifović Mirko, Izabrana poglavlja iz elastičnosti i plastičnosti, Mašinski fakultet, Beograd 1976. god.

- [37] Jojić K., Teorija ploča i ljuski. Metode proračuna konstrukcija, Predavanja na poslijediplomskim studijama, Mašinski fakultet, Beograd šk 1986/87. god.
- [38] Jovanović Lj.M., Teorija projektovanja konstrukcija računarom, Mašinski fakultet, Niš, 1994.god.
- [39] Kalajdžić M., Metod konačnih elemenata, Institut za alatne mašine i alate, Beograd 1978. god.
- [40] Kalajdžić M., Metod konačnih elemenata u BASIC-u, Građevinska knjiga, Beograd 1988. god.
- [41] Kalajdžić M., Teorijske osnove metoda konačnih elemenata, I Međunarodni CIM seminar, Niš, 1987.god., 197-212
- [42] Kildegaard A., Bending of Cylindrical Shell Subject to Axial Loading, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 301-315
- [43] Kobayashi S.A. ed., Handbook on experimental mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1981. god.
- [44] Koiter W.T., A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells, Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland, Delft, 1959.god., 12-33
- [45] Koiter W.T., A Systematic Simplification of the General Equations in the Linear Theory of Thin Shells, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., ser. B 64, 1961.god., 612-619
- [46] Koiter W.T., Foundations and Basic Equations of Shell Theory. Survey of Recent Progress, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 93-105

- [47] Koiter W.T., On the Foundations of the Linear Theory of Thin Elastic Shells I and II, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Ser. B 73, 1970.god., 169-195
- [48] Kosel F. B., Pertot B., Proračun ljuski korišćenjem metoda konačnih elemenata, Međunarodni seminar CAD/CAM/ i MKE u mašinstvu, Maribor 1985. god.
- [49] Ladeveze P., On the Validity of Linear Shell Theories, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Thoery, Tbilisi, 1978.god., 369-392
- [50] Love A.E.H., A treatise on the mathematical teory of elasticity I and II, Cambridge, 1927.god.
- [51] Lukić Lj., Kalajdžić M., Spasić Ž., Savremene metode projektovanja i CIM modeli, INFOFEST, 1996.god.
- [52] Lur'ie A.I., On the Equations of General Theory of Elastic Shells (in Russian), Prikl. Mat. Mekh. 14, 1950.god., 558-560
- [53] Maneski T., Prilog razvoju sistema projektovanja primjenom računara nosećih struktura mašina alatki, Doktorska disertacija, Beograd 1991. god.
- [54] Mićunović M., Primenjena mehanika kontinuuma, Naučna knjiga, Beograd, 1990.god.
- [55] Mikhlin S.G., Estimate of the Error in the Computation of an Elastic Shell as a Flat Plate, Akademija nauka SSSR, Prikladnaja matematika 16, Moskva, 1952, 399
- [56] Miller J.J.H., Computational Method for Boundary and Interior Layers in Several Dimensions, Boole Press, Dublin, 1991.god.
- [57] Morozov E. M., Nikiškov G. P., Method konačnih elementov v mehanike razrušenija, Nauka, Moskva 1980. god.

- [58] Naghdi P.M., On the Differential Equations of the Linear Theory of Elastic Shells, Proceedings of Interantional Congress of Applied Mechanics, Munich, 1965.god., 20-30
- [59] Naghdi P.M., On the Theory of Thin Elastic Shells, Quart. Apl. Math. 14, 1957.god., 369-380
- [60] Naghdi P.M., The Theory of Shells and Plates. Mechanics of Solids. Springer-Verlag, Berlin, 1984.god.
- [61] Naghdi P.M., Theory of Deformabile Surface and Elastic Shell Theory, Proceedings of Symposium on the Theory of Shells to Honor L.H. Donnell, Houston, 1966.god., 25-43
- [62] Novacki W., Teoria uprugosti, Izdaeljstvo Mir, Moskva, 1975.god.
- [63] Novozhilov V.V., New Method for the Analysis of Thin Shells (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Tekhn. Nauk, No 1, 1946.god.
- [64] Novozhilov V.V., The Theory of Thin Shells (translation from the 1951. Russian edition), Noordhoof, Groningen, 1959.god.
- [65] Obolashvili E.I., Some Generalizations of the Plane Theory of Elasticity and Their Relation to the Shell Theory, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Thoery, Tbilisi, 1978.god., 407-416
- [66] Oden J.T., A General Theory of Finite Elements, JNME, No3, 1969.god
- [67] Oden J.T., Mechanics of Elastics Structures, McGaw-Hill Book Company, New York, 1967,god.
- [68] Ogibalov P. M., Anđelić T. P., Mehanika ljuski i ploča, ŠIP "Srbija", Beograd 1975. god.

- [69] Prelog Ervin, Metod konačnih elementov, Fakultet za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana 1975. god.
- [70] Pro/ENGINEER, Drawing User's Guide, Parametric Technology Corporation, 1996.god.
- [71] Pro/MECHANICA, Model Reference for Structure and Thermal, Parametric Technology Corporation, 1996.god.
- [72] Pro/MECHANICA, Using Structure with Pro/ENGINEER, Parametric Technology Corporation, 1996.god.
- [73] Reissner E., A new Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells, American Journal of Mathematics 63, 1941.god., 177-184
- [74] Reissner E., Knowles J.K., Note on Stress-strain Relations for Thin Elastic Shells, Journal of Mathematics and Physics 37, 1958.god., 269-282
- [75] Reissner E., On the Foundation of Generalized Linear Shell Theory, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 15-30
- [76] Reissner E., On Twisting and Stretching of Helicoidal Shells, Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland, Delft, 1959.god., 434-466
- [77] Rekach V.G., Static Theory of Thin-walled Space Structures, Mir Publishers, Moskow, 1978.god.
- [78] Richtmyer R.D. Difference Methods for Initial-value problems, New York, 1957.god.
- [79] Samarskii A.A., Gulin A.V., Stability of Difference Schemes, Nauka, Moskva, 1989.god.

- [80] Samarskii A.A., Theory of Difference Schemes, Nauka, Moskva, 1989.god.
- [81] Savićević S., Vukasojević R., Čulafić Z., Kalajdžić M., Model za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske, 26. JUPITER konferencija, Beograd, 2000.god., 2.47-2.54
- [82] Savićević S., Vukasojević R., Batljan R., Analiza napona i deformacija u konstrukcijskim elementima oblika zavojne ljuske, 26. SPMJ, Budva, 1996.god., 719-726
- [83] Savićević S., "Analiza napona i deformacija u konstrukcijskim elementima oblika zavojne ljuske", Magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 1995.god.
- [84] Savićević S., Đogović V., Bending of Structural Elements of the Helical Shell Shape, 23. Jugoslovenski kongres teorijske i primjenjene mehanike, 1999.god. (kongres odložen)
- [85] Savićević S., Đogović V., Šaletić S., O savijanju cilindrične ljuske opterećene kontinualnim spregom po zavojnoj liniji, IRMES 2000, Kotor, 2000.god., 461-466
- [86] Sekulić Miodrag, Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd 1982. god.
- [87] Simić D., Teorija i primena mernih traka, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1972.god.
- [88] Solomon L.A., A one Dimensional Problem for a Helicoid Shell, Akademija nauka SSSR, Prikladnaja matematika 18, Moskva, 1954, 43
- [89] Synge J.L., Schild A., Tensor Calculus, University of Toronto Press, Toronto, 1949.god.

- [90] Szilard R., Theory and Analysis of Plates. Classical and Numarical Methods, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.god.
- [91] Šalman D. A., Snegoočistiteli, "Mašinostroenie", Lenjingrad 1973.god.
- [92] Šmelter J., Dacko M., Metod konačnih elemenata v statike sooruzeni, Stroizdat, Moskva 1986. god.
- [93] Tehnička dokumentacija rotacionog čistača snijega RS-2, Holding kompanija "Radoje Dakić", Podgorica 1992. god.
- [94] Timošenko S., Vojnovski-Kriger, Teorija ploča i ljuski, prevod sa engleskog, Građevinska knjiga, Beograd 1962. god.
- [95] Timoshenko S., Goodier J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1952. god.
- [96] Timoshenko S., Young D.H., Elements of Streingth of Materials, D. Van Nostrand Company, New York, 1968.god.
- [97] Tošić S., Transportni uređaji-neprekidni transport, Mašinski fakultet, Beograd, 1990.god.
- [98] Trajanović M., Ekspertni sistem za modeliranje elemenata nosećih struktura alatnih mašina za statičku analizu metodom konačnih elemenata, INFOFEST, 1996.god.
- [99] Truesdell C. ed., Mechanics of Solids. Volume II, Springer-Verlag, Berlin, 1984.god.
- [100] Van Czi De, Teorija uprugosti, FIZMATGIZ, Moskva 1959. god.
- [101] Vekua I.N., On one Version of the Consistent Theory of Elastic Shells, Second Symposium on Theory of Thin Shells, Copenhagen, 1967.god., 59-84
- [102] Vlasov D.Z., Basic Differential Equations in General Theory of Elastic Shells (in Russian), Prikl. Mat. Mekh. 8, 1944.god., 109-140

- [103] Vlasov V. Z., Obščaja teorija oboloček, Gosstroizdat, Moskva 1949. god.
- [104] Wlassow W.S. Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Akademie-Verlag, Berlin, 1958.god.
- [105] Voljmir A. S., Ustojčivost uprugih sistem, FIZMATGIZ, Moskva 1963. god.
- [106] Vukelić S., Radenković G., Tanke elastične ljuske: Teorija i specijalna poglavlja, Gros knjiga, Beograd, 1995.god.
- [107] Vulićević B. i grupa autora, Metod aproksimacije krive na osnovu geometrijskih karakteristika površine, Jugoslovenski kongres matematičara, Budva, 1980.god.
- [108] Vulićević B., Savićević S., O nekim metodama aproksimacije funkcionalnih zavisnosti, časopis "Tehnika" br. 5/1984.god, 593-600
- [109] Vulićević B., Burić M., Filipović V., Savićević S. i dr. Ponašanje sredstava vertikalnog transporta u uslovima zemljotresa, Simpozijum o konstruisanju mašina u građevinarstvu, Budimpešta, 26 - 28 novembar 1984. god.
- [110] Wundellich W., On Consistent Shell Theory in Mixed Tensor Formulation, Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Shell Thoery, Tbilisi, 1978.god., 607-634
- [111] Zenkov R.L., Ivaškov I.I., Mašini neprerivnog transporta, Mašinostroenie, Moskva, 1987.god.
- [112] Zienkiewicz O., The Finite Elements Method In Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971. god.

PRILOG 1

**IZVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SAVIJANJA PO
POMJERAJU IZ DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PO
KONTRAVARIJANTNIM KOMPONENTAMA PRESJEČNIH SILA ZA
ZAVOJNU LJUSKU**

**IZVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SAVIJANJA PO POMJERAJU IZ
DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PO KONTRAVARIJANTNIM
KOMPONENTAMA PRESJEČNIH SILA ZA ZAVOJNU LJUSKU**

Polazimo od diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 \hat{M}^{11}}{dr^2} + \frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d\hat{M}^{11}}{dr} \left(-r \frac{d\hat{M}^{22}}{dr} - 2\hat{M}^{22} \right) - \frac{2k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} \hat{N}^{12} - P = 0$$

Koristimo relacije za kontravarijantne komponente presječnih sila izražene preko pomjeraja u_3

$$\hat{M}^{11} = -B \left[\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{vr}{r^2 + k^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(v+1)}{(r^2 + k^2)^2} u_3 \right]$$

$$\hat{M}^{22} = -B \left[\frac{v}{r^2 + k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r}{(r^2 + k^2)^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(v+1)}{(r^2 + k^2)^3} u_3 \right]$$

$$\hat{N}^{12} = C(1-v) \frac{k}{(r^2 + k^2)^{3/2}} u_3$$

Određujemo vrijednost prvog izvoda kontravarijantne komponente momenta \hat{M}^{11}

$$\frac{d\hat{M}^{11}}{dr} = -B \left[\frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{vr}{r^2 + k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{v(r^2 + k^2) - 2vr^2}{(r^2 + k^2)^2} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(v+1)}{(r^2 + k^2)^2} \frac{du_3}{dr} + \right]$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{k^2(v+1)2(r^2+k^2)2r}{(r^2+k^2)^4} u_3 \Big] = \\
 & = -B \left[\frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{v(k^2-r^2)-k^2(v+1)}{(r^2+k^2)^2} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)r}{(r^2+k^2)^3} u_3 \right] = \\
 & = -B \left[\frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{vr^2+k^2}{(r^2+k^2)^2} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)r}{(r^2+k^2)^3} u_3 \right]
 \end{aligned}$$

Određujemo vrijednost drugog izvoda kontravarijantne komponente momenta \hat{M}^{11}

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \hat{M}^{11}}{dr^2} & = -B \left[\frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{v(k^2-r^2)}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \frac{vr^2+k^2}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \right. \\
 & - \frac{2vr(r^2+k^2)^2 - (vr^2+k^2)^2 2(r^2+k^2)2r}{(r^2+k^2)^4} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)r}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \\
 & + 4k^2(v+1) \frac{(r^2+k^2)^2 - r3(r^2+k^2)^2 2r}{(r^2+k^2)^6} u_3 \Big] = -B \left[\frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} + \right. \\
 & + \frac{-2vr^2+k^2(v-1)}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r(-2vr^2-2vk^2+4vr^2+4k^2+4vk^2+4k^2)}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \\
 & + 4k^2(v+1) \frac{r^2+k^2-6r^2}{(r^2+k^2)^4} u_3 \Big] = -B \left\{ \frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{vr}{r^2+k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \right. \\
 & - \frac{2vr^2+k^2(1-v)}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{r[2vr^2+k^2(8+2v)]}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)(k^2-5r^2)}{(r^2+k^2)^4} u_3 \Big\}
 \end{aligned}$$

Određujemo vrijednost prvog izvoda kontravarijantne komponente momenta \hat{M}^{22}

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{M}^{22}}{dr} &= -B \left[\frac{v}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \frac{2vr}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \frac{r}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \right. \\ &+ \frac{(r^2 + k^2)^2 - r^2(r^2 + k^2)2r}{(r^2 + k^2)^4} \frac{du_3}{dr} - \frac{k^2(1+v)}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{k^2(1+v)3(r^2 + k^2)^2 2r}{(r^2 + k^2)^6} u_3 \left. \right] = \\ &= -B \left[\frac{v}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{(1-2v)r}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{k^2 - 3r^2 - k^2(1+v)}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \right. \\ &+ \frac{6k^2(1+v)r}{(r^2 + k^2)^4} u_3 \left. \right] = -B \left[\frac{v}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} + \frac{(1-2v)r}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \right. \\ &- \frac{3r^2 + vk^2}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{6k^2(1+v)r}{(r^2 + k^2)^4} u_3 \left. \right] \end{aligned}$$

Uvrštavanjem vrijednosti kontravarijantnih komponenti presječnih sila i određenih vrijednosti njihovih izvoda u razmatranu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} &-B \left[\frac{d^4 u_3}{dr^4} + \frac{vr}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \frac{2vr^2 + k^2(1-v)}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \right. \\ &+ \frac{r[2vr^2 + k^2(8+2v)]}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{4k^2(v+1)(k^2 - 5r^2)}{(r^2 + k^2)^4} u_3 \left. \right] - B \left[\frac{2r}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} + \right. \\ &+ \frac{2vr}{(r^2 + k^2)^2} \frac{d^2 u_3}{dr^2} - \frac{2r(vr^2 + k^2)}{(r^2 + k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \frac{8k^2(v+1)r^2}{(r^2 + k^2)^4} u_3 \left. \right] - B \left[-\frac{vr}{r^2 + k^2} \frac{d^3 u_3}{dr^3} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(1-2\nu)r^2}{(r^2+k^2)} \frac{d^2u_3}{dr^2} + \frac{r(3r^2+\nu k^2)}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} - \frac{6k^2(1+\nu)r^2}{(r^2+k^2)^4} u_3 \Big] - B \Big[-\frac{2\nu}{r^2+k^2} \frac{d^2u_3}{dr^2} - \\
 & -\frac{2r}{(r^2+k^2)^2} \frac{du_3}{dr} + \frac{2k^2(1+\nu)}{(r^2+k^2)^3} u_3 \Big] - C(1-\nu) \frac{2k^2}{(r^2+k^2)^2} u_3 - P = 0 \quad /: (-B) \\
 & \frac{d^4u_3}{dr^4} + \frac{2r}{r^2+k^2} \frac{d^3u_3}{dr^3} + \frac{-2\nu r^2 - k^2(1-\nu) + 2\nu r^2 - (1-2\nu)r^2 - 2\nu(r^2+k^2)}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2u_3}{dr^2} + \\
 & + \frac{r[2\nu r^2 + k^2(8+2\nu) - 2\nu r^2 - 2k^2 + 3r^2 + \nu k^2 - 2(r^2+k^2)]}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \\
 & + \left[\frac{4k^2(\nu+1)(k^2-5r^2) + 8k^2(\nu+1)r^2 - 6k^2(1+\nu)r^2 + 2k^2(1+\nu)(r^2+k^2)}{(r^2+k^2)^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{C(1-\nu)}{B} \frac{2k^2}{(r^2+k^2)^2} \right] u_3 + \frac{P}{B} = 0
 \end{aligned}$$

Na kraju dobijamo diferencijalnu jednačinu savijanja helikoidalne ljuske po pomjeraju u_3 u obliku

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 & \frac{d^4u_3}{dr^4} + \frac{2r}{r^2+k^2} \frac{d^3u_3}{dr^3} - \frac{r^2+k^2(\nu+1)}{(r^2+k^2)^2} \frac{d^2u_3}{dr^2} + \frac{r[r^2+k^2(3\nu+4)]}{(r^2+k^2)^3} \frac{du_3}{dr} + \\
 & + \left[\frac{2k^2(\nu+1)(3k^2-8r^2)}{(r^2+k^2)^4} + \frac{24(1-\nu)k^2}{h^2(r^2+k^2)^2} \right] u_3 + \frac{P}{B} = 0
 \end{aligned}
 }$$

PRILOG 2

PROGRAM ZA AUTOMATIZOVANO ODREĐIVANJE PARAMETARA ZAVOJNE LJUSKE

PROGRAM ZA AUTOMATIZOVANO ODREĐIVANJE PARAMETARA ZAVOJNE LJUSKE

Program je instaliran na PC računarima Pentium II u 3D centru Mašinskog fakulteta u Podgorici.

Funkcija za obavljanje proračuna

Ova funkcija služi za proračun pomjeraja u za zadate parametre:

- hod zavojne ljuske, H [mm],
- debljina zavojne ljuske h_h [mm],
- ravnomjerno raspoređeni pritisak p [N/mm²],
- broj tačaka na razmatranom intervalu (širini ljuske) N ,
- prečnik cilindra unutrašnje zavojne linije a [mm],
- prečnik cilindra spoljašnje zavojne linije b [mm],
- Poisson-ov koeficijent ν ,
- modul elastičnosti E [N/mm²].

Podaci se navode kao argumenti funkcije $srfn$ u navedenom redosledu. Na osnovu ovih podataka, računa se pomjeraj u [mm] u svim tačkama razmatranog intervala. Pomjeraj u je izlazna veličina funkcije $srfn$.

Navedena funkcija se koristi u programima koji će biti navedeni u nastavku priloga.

Funkcija za računanje momenta po jedinici dužine (napona)

Koristeći pomjeraje dobijene primjenom funkcije $srfn$, ova funkcija računa vrijednost momenta po jedinici dužine u zadatim tačkama. Njeni ulazni argumenti su:

- pomjeraj u sračunat u svim tačkama [mm],
- polarne koordinate odgovarajućih tačaka u kojima je računat pomjeraj r [mm],
- redni broj tačke u kojoj se određuje moment po jedinici dužine M (može se zadati i više tačaka)
- hod zavojne ljuske, H [mm],
- debljina zavojne ljuske h_h [mm],
- Poisson-ov koeficijent ν ,
- modul elastičnosti E [N/mm²].

Izlazni argument funkcije je moment po jedinici dužine M [N mm/mm] sračunat u zadatoj tački (tačkama). Na osnovu njega se računa vrijednost napona u radijalnom pravcu.

Funkcija za automatizovano računanje debljine ljuske

Ova funkcija se koristi za automatizovano određivanje debljine zavojne ljuske prema zadatom kriterijumu dozvoljene vrijednosti napona u radijalnom pravcu za zavojnu ljusku. Ulazni argumenti funkcije su:

- hod zavojne ljuske, H [mm],
- ravnomjerno raspoređeni pritisak p [N/mm²],
- broj tačaka na razmatranom intervalu (širini ljuske) N ,
- prečnik cilindra unutrašnje zavojne linije a [mm],
- prečnik cilindra spoljašnje zavojne linije b [mm],
- Poisson-ov koeficijent ν ,
- modul elastičnosti E [N/mm²],
- dozvoljeni napon u radijalnom pravcu SigmaDoz [N/mm²].

Korišćen je iterativni metod, pri čemu se kao početna iteracija uzima debljina dobijena na osnovu poznatih relacija za slučaj pravougaone ploče. Izlazni argument funkcije je debljina zavojne ljuske h_h [mm].

Programi za obavljanje proračuna

U nastavku priloga navedeni su programi pomoću kojih se obavljaju proračuni:

1. pomjeraja za različite vrijednosti hoda zavojne ljuske H ,
2. pomjeraja za različite vrijednosti debljine zavojne ljuske h_h ,
3. pomjeraja za različite vrijednosti ravnomjernog pritiska p ,
4. momenta po jedinici dužine (napona) u funkciji koordinate r za različite vrijednosti parametara zavojne ljuske,
5. momenta po jedinici dužine (napona) u definisanoj tački u funkciji hoda zavojne ljuske H za različite vrijednosti parametara zavojne ljuske,

Ovi programi koriste prethodno opisane funkcije za obavljanje proračuna, i grafički prikazuju dobijene rezultate. U svakom od njih možemo izdvojiti tri cjeline: prvi dio u kojem se zadaju parametri zavojne ljuske, drugi dio u kojem se vrši proračun pozivanjem odgovarajućih funkcija i završni dio u kojem se interpretiraju rezultati. Sam način zadavanja parametara jasan je iz samih programa i opisa funkcija za vršenje proračuna.

Funkcija za obavljanje proračuna

```
function u=srfrn(H,hh,p,N,a,b,ni,E)
% u=srfrn(H,hh,p,N,a,b,ni,E)
%
%N          broj tacaka
%hh         debljina zavojne ljske
%H          visina hoda zavojne linije
%p          pritisak
%a i b      precnici
%ni         Puasonov koeficijent
%E          modul elasticnosti
%

% konstante
B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));
K=H/(2*pi);

r=linspace(a,b,N);
h=r(2)-r(1);

D3=zeros(N,1);
D2=zeros(N-1,1);D4=D2;
D1=zeros(N-2,1);D5=D1;

i=3:N-2;
rik=r(i).^2+K^2;
D3(i)=6/h^4+ ...
    (2*r(i).^2+2*K^2*(ni+1))./(rik.^2*h^2)- ...
    r(i).*(r(i).^2+K^2*(3*ni+4))./(h*rik.^3)+ ...
    2*K^2*(ni+1)*(3*K^2-8*r(i).^2)./rik.^4+ ...
    24*(1-ni)*K^2./(hh^2*rik.^3);
D2(i-1)=-4/h^4+ ...
    2*r(i)./(h^3*rik)- ...
    (r(i).^2+K^2*(ni+1))./(h^2*rik.^2);
D4(i)=-4/h^4- ...
    2*r(i)./(h^3*rik)- ...
    (r(i).^2+K^2*(ni+1))./(h^2*rik.^2)+ ...
    r(i).*(r(i).^2+K^2*(3*ni+4))./(h*rik.^3);
D1(i-2)=1/h^4-r(i)./(h^3*rik);
D5(i)=1/h^4+r(i)./(h^3*rik);

S=-ones(N,1)*p/B;

% koeficijenti dodatnih jednacina
i=N;
a1=(-1/(h^3)-2*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)+1/3*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a2=(3*1/(h^3)+8*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)-3/2*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a3=(-3*1/(h^3)-10*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)+3*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a4=(1/(h^3)+4*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)-
    11/6*1/((r(i)^2+K^2)*h)+4*K^2*(ni+1)*r(i)/((r(i)^2+K^2)^3));
b2=(1/(h^2)+1/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h));
b3=(-2*1/(h^2)-2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h));
b4=(1/(h^2)+3/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h)-K^2*(ni+1)/((r(i)^2+K^2)^2));

% Dodavanje dodatnih jednacina
D1(N-3)=a1;
D2(N-2)=a2;
```

```
D3(N-1)=a3;
D4(N-1)=a4;
D1(N-2)=b2;
D2(N-1)=b3;
D3(N)=b4;
S(N-1)=0;
S(N)=0;
D3(1)=1;S(1)=0;
D2(1)=-11/(6*h);
D3(2)=3/h;
D4(2)=-3/(2*h);
D5(2)=1/(3*h);
S(2)=0;
S1=S;

% rjesavanje sistema jednacina

f1=flops;

for i=1:N-2
    f=D2(i)/D3(i);
    D3(i+1)=D3(i+1)-f*D4(i);
    D4(i+1)=D4(i+1)-f*D5(i);
    S(i+1)=S(i+1)-f*S(i);

    f=D1(i)/D3(i);
    D2(i+1)=D2(i+1)-f*D4(i);
    D3(i+2)=D3(i+2)-f*D5(i);
    S(i+2)=S(i+2)-f*S(i);
end

f=D2(N-1)/D3(N-1);
S(N)=S(N)-f*S(N-1);
D3(N)=D3(N)-f*D4(N-1);

for i=N:-1:3
    f=D4(i-1)/D3(i);
    S(i-1)=S(i-1)-f*S(i);
    f=D5(i-2)/D3(i);
    S(i-2)=S(i-2)-f*S(i);
end

f=D4(1)/D3(1);
S(1)=S(1)-f*S(2);

u=S./D3;
f1=flops-f1;
```


Funkcija za računanje momenta po jedinici dužine

```
function M=mom(u,r,i,H,hh,ni,E)
% M=mom(u,r,i,H,hh,ni,E)
%
% racunanje momenta u tacki i
%

B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));
K=H/(2*pi);
h=r(2)-r(1);

M=(-1/12*1/(h^2)+1/12*ni*r(i)./((r(i).^2+K^2)*h)).*u(i-2);
M=M+(4/3*1/(h^2)-2/3*ni*r(i)./((r(i).^2+K^2)*h)).*u(i-1);
M=M+(-5/2*1/(h^2)-K^2*(1+ni)./((r(i).^2+K^2).^2)).*u(i);
M=M+(4/3*1/(h^2)+2/3*ni*r(i)./((r(i).^2+K^2)*h)).*u(i+1);
M=M+(-1/12*1/(h^2)-1./12*ni*r(i)./((r(i).^2+K^2)*h)).*u(i+2);
M=M*B;
```

Funkcija za automatizovano računanje debljine ljuske

```
function hh=nadjihh(H,p,N,a,b,ni,E,SigmaDoz)
% pronalazenje debljine hh tako da budu zadovoljeni
% SigmaDozvoljeno

r=linspace(a,b,N)';
% pocetna iteracija
hh0=sqrt(3*p*(b-a)^2/SigmaDoz);

SigmaT=0;
hh=hh0;
while abs(SigmaT-SigmaDoz)/SigmaDoz>1e-5
    u=srfrn(H,hh,p,N,a,b,ni,E);
    indl=round(N*hh0/(b-a)+1);
    M=-mom(u,r,indl,H,hh,ni,E);
    SigmaT=6*M/hh^2;
    hh=sqrt(6*M/SigmaDoz);
end
```

Programi za obavljanje proračuna

```
% test na variranje H-a
Hh=[0, 140, 1e10];          % vrijednosti parametra H

hh=4; p=0.15; N=1500; a=130; b=200; ni=0.3; E=200000;

r=linspace(a,b,N)';
B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));

U=zeros(N,length(Hh));
for k=1:length(Hh)
    u=srfn(Hh(k),hh,p,N,a,b,ni,E);
    U(:,k)=u;
end

plot(r,U);

% test na varijaciju debljine hh
Hhh=[2, 3, 4, 5, 6];       % vrijednosti debljine

H=140; p=0.15; N=1500; a=130; b=200; ni=0.3; E=200000;

r=linspace(a,b,N)';
B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));

U=zeros(N,length(Hhh));
for k=1:length(Hhh)
    u=srfn(H,Hhh(k),p,N,a,b,ni,E);
    U(:,k)=u;
end

plot(r,U);

% test na varijacije pritiska
Pp=[0.1, 0.12, 0.15, 0.18, 0.20, 0.25];    % vrijednosti pritiska

H=140; hh=4; N=1500; a=130; b=200; ni=0.3; E=200000;

r=linspace(a,b,N)';
B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));

U=zeros(N,length(Pp));
for k=1:length(Pp)
    u=srfn(H,hh,Pp(k),N,a,b,ni,E);
    U(:,k)=u;
end

plot(r,U);
```


PROGRAM ZA AUTOMATIZOVANO ODREĐIVANJE PARAMETARA ZAVOJNE LJUSKE NA CILINDRIČNOJ LJUSCI

Program je instaliran na PC računarima Pentium II u 3D centru Mašinskog fakulteta u Podgorici.

Funkcija za obavljanje proračuna

Ova funkcija služi za proračun pomjeraja u za zadate parametre:

- hod zavojne ljuske, H [mm],
- debljina zavojne ljuske h_h [mm],
- ravnomjerno raspoređeni pritisak p [N/mm^2],
- broj tačaka na razmatranom intervalu (širini ljuske) N ,
- prečnik cilindra unutrašnje zavojne linije a [mm],
- prečnik cilindra spoljašnje zavojne linije b [mm],
- Poisson-ov koeficijent ν ,
- modul elastičnosti E [N/mm^2],
- debljina cilindrične ljuske h_c [mm].

Podaci se navode kao argumenti funkcije $srfn$ u navedenom redosledu. Na osnovu ovih podataka, računa se pomjeraj u [mm] u svim tačkama razmatranog intervala. Pomjeraj u je izlazna veličina funkcije $srfn$.

Funkcije za računanje momenta po jedinici dužine i automatizovano računanje debljine ljuske, kao i programi za obavljanje proračuna su identični onima navedenim u Prilogu 2, s tim što se prilikom poziva funkcije $srfn$ treba navesti i debljina cilindrične ljuske kao parametar.

Funkcija za obavljanje proračuna

```
function u=srfrn(H,hh,p,N,a,b,ni,E,hc)

% u=srfrn(H,hh,p,N,a,b,ni,E,hc)
%N      broj tacaka
%hh      debljina zavojne ljuske
%H      visina hoda zavojne linije
%p      pritisak
%a i b  precnici
%ni      Puasonov koeficijent
%E      modul elasticnosti
%hc      debljina cilindricne ljuske
%

% konstante
B=E*hh^3/(12*(1-ni^2));
K=H/(2*pi);

r=linspace(a,b,N);
h=r(2)-r(1);

D3=zeros(N,1);
D2=zeros(N-1,1);D4=D2;
D1=zeros(N-2,1);D5=D1;

i=3:N-2;
rik=r(i).^2+K^2;

D3(i)=6/h^4+(2*r(i).^2+2*K^2*(ni+1))./(rik.^2*h^2)- ...
      r(i).*(r(i).^2+K^2*(3*ni+4))./(h*rik.^3)+ ...
      2*K^2*(ni+1)*(3*K^2-8*r(i).^2)./(rik.^4+ ...
      24*(1-ni)*K^2./(hh^2*rik.^3);
D2(i-1)=-4/h^4+2*r(i)./(h^3*rik)- ...
      (r(i).^2+K^2*(ni+1))./(h^2*rik.^2);
D4(i)=-4/h^4-2*r(i)./(h^3*rik)- ...
      (r(i).^2+K^2*(ni+1))./(h^2*rik.^2)+ ...
      r(i).*(r(i).^2+K^2*(3*ni+4))./(h*rik.^3);
D1(i-2)=1/h^4-r(i)./(h^3*rik);
D5(i)=1/h^4+r(i)./(h^3*rik);

S=-ones(N,1)*p/B;

% koeficijenti dodatnih jednacina
i=N;

a1=(-1/(h^3)-2*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)+1/3*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a2=(3*1/(h^3)+8*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)-3/2*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a3=(-3*1/(h^3)-10*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)+3*1/((r(i)^2+K^2)*h));
a4=(1/(h^3)+4*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h^2)- ...
      11/6*1/((r(i)^2+K^2)*h)+4*K^2*(ni+1)*r(i)/((r(i)^2+K^2)^3));

b2=(1/(h^2)+1/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h));
b3=(-2*1/(h^2)-2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h));
b4=(1/(h^2)+3/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h)-K^2*(ni+1)/((r(i)^2+K^2)^2));

teta=2*pi*K^2/(a^2+K^2);
```

```
eta=a*(a^2+K^2)*sqrt(12)/(K^2*hc);
P=(K^2+ni*a^2)/(2*K^2);
so=sqrt((eta+P)/2);
to=sqrt((eta-P)/2);

Kf=1/(4*so*to)*(hh/hc)^3*a*sqrt(a^2+K^2)/K*(to*sinh(so*teta)- ...
    so*sin(to*teta))/(cosh(so*teta)-cos(to*teta));

c1=(-3/2*1/h-Kf*(1/(h^2)-3/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h)- ...
    K^2*(ni+1)/((r(i)^2+K^2)^2)));
c2=(2*1/h-Kf*(-2*1/(h^2)+2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h)));
c3=(-1/2*1/h-Kf*(1/(h^2)-1/2*ni*r(i)/((r(i)^2+K^2)*h)));

% Dodavanje dodatnih jednacina
D1(N-3)=a1;
D2(N-2)=a2;
D3(N-1)=a3;
D4(N-1)=a4;
D1(N-2)=b2;
D2(N-1)=b3;
D3(N)=b4;
S(N-1)=0;
S(N)=0;
D3(1)=1;S(1)=0;
D2(1)=c1;
D3(2)=c2;
D4(2)=c3;
D5(2)=0;
S(2)=0;
S1=S;

% rjesavanje sistema jednacina
fl=flops;

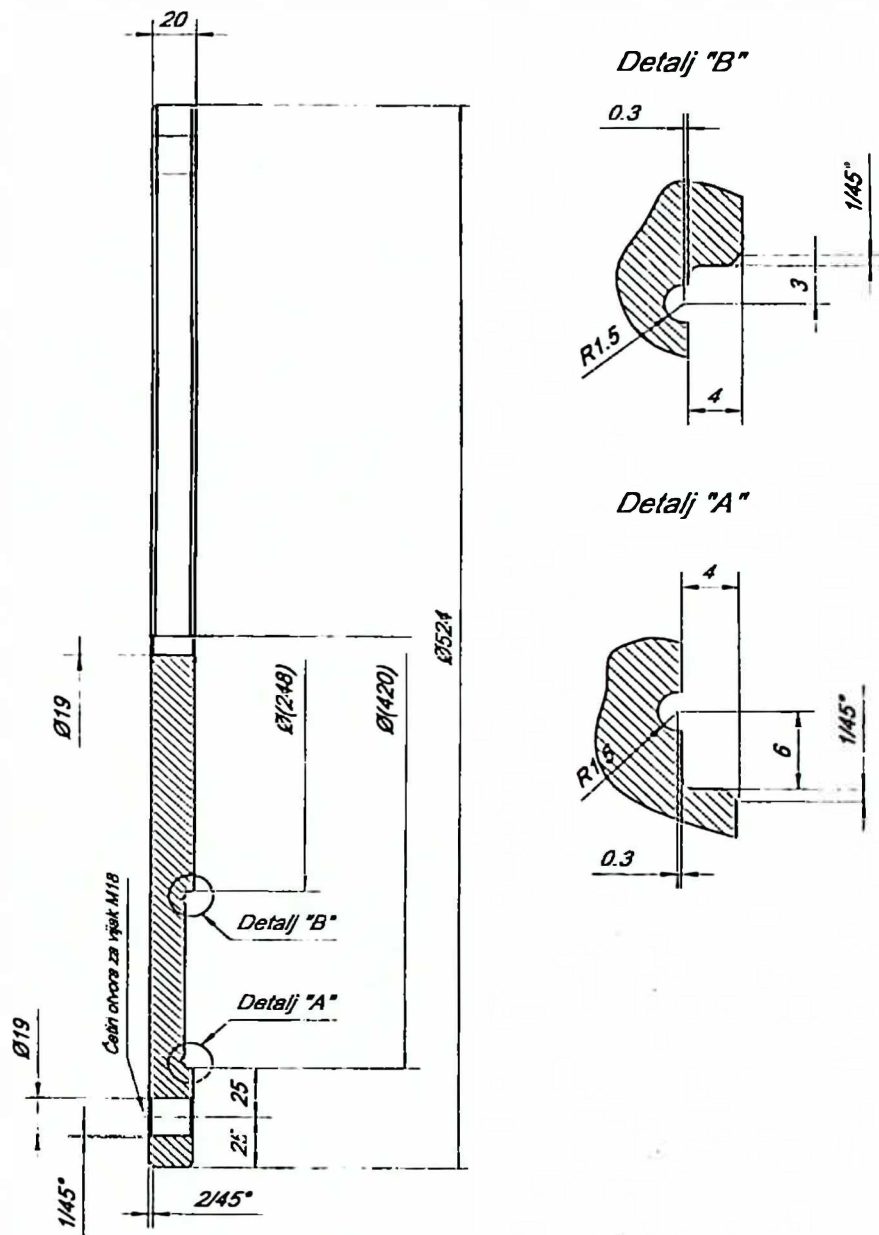
for i=1:N-2
    f=D2(i)/D3(i);
    D3(i+1)=D3(i+1)-f*D4(i);
    D4(i+1)=D4(i+1)-f*D5(i);
    S(i+1)=S(i+1)-f*S(i);

    f=D1(i)/D3(i);
    D2(i+1)=D2(i+1)-f*D4(i);
    D3(i+2)=D3(i+2)-f*D5(i);
    S(i+2)=S(i+2)-f*S(i);
end
f=D2(N-1)/D3(N-1);
S(N)=S(N)-f*S(N-1);
D3(N)=D3(N)-f*D4(N-1);

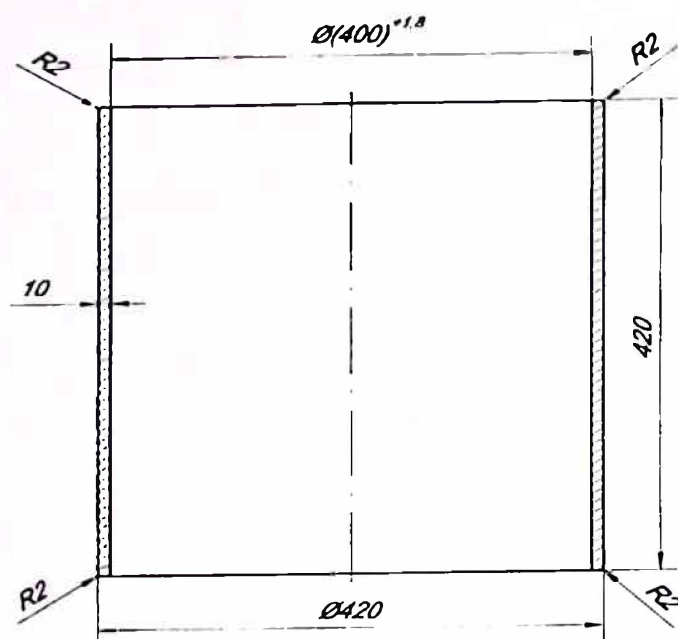
for i=N:-1:3
    f=D4(i-1)/D3(i);
    S(i-1)=S(i-1)-f*S(i);
    f=D5(i-2)/D3(i);
    S(i-2)=S(i-2)-f*S(i);
end
f=D4(1)/D3(1);
S(1)=S(1)-f*S(2);
u=S./D3;
fl=flops-fl;
```


PRILOG 4

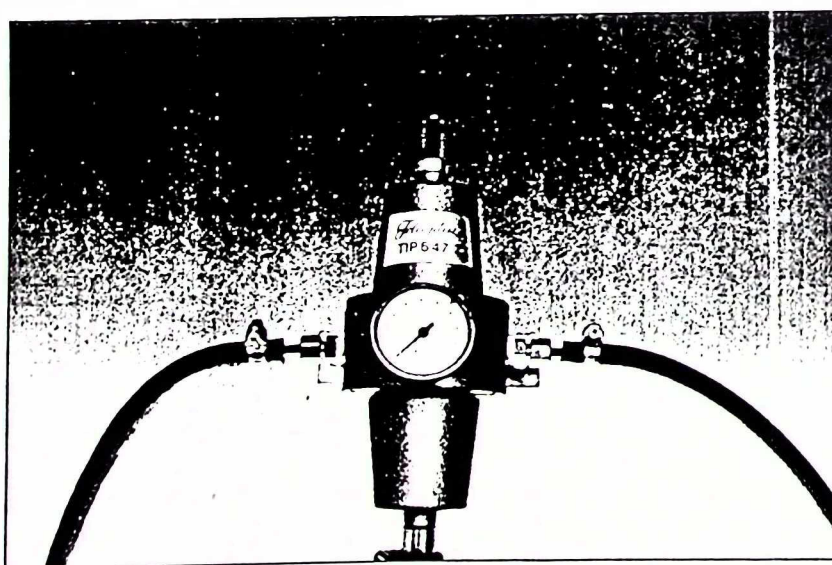
EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE MODELI A, B, C - SLIKE



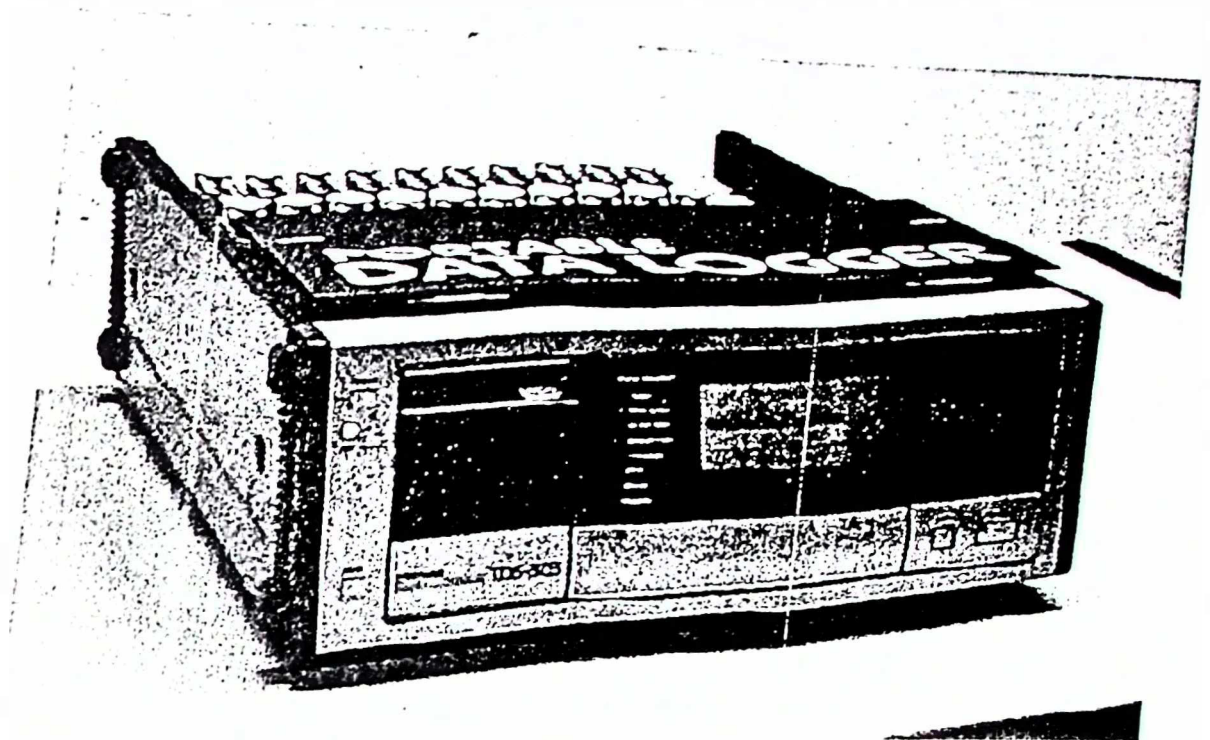
Slika 1 Gornja i donja ploča za modele A, B i C



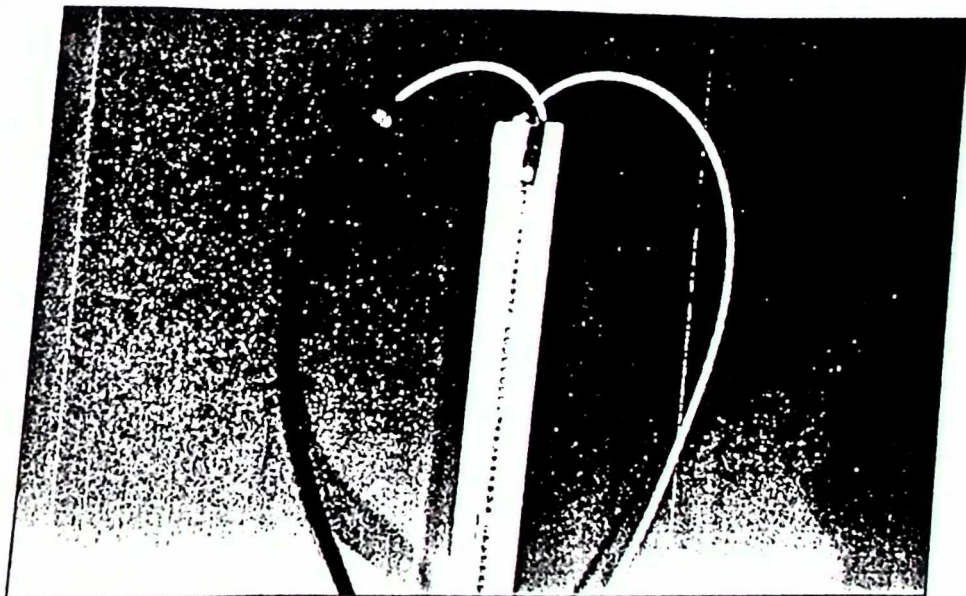
Slika 2 Spoljašnja čaura za modele A, B i C



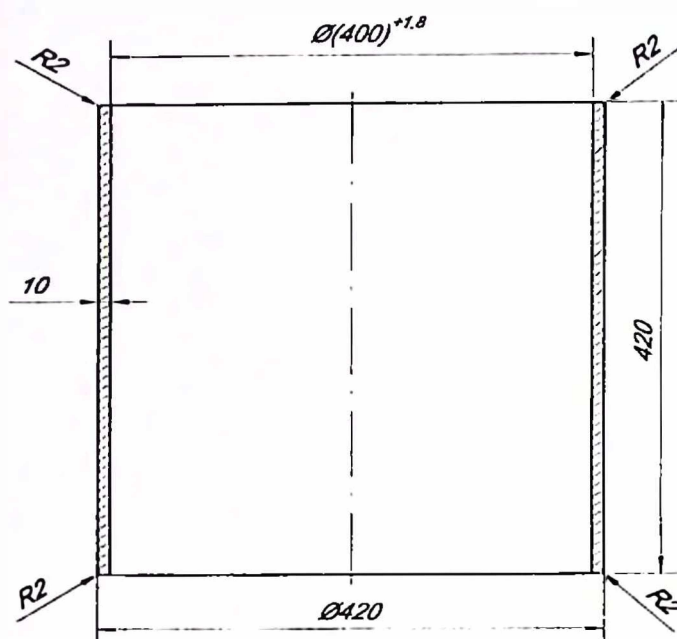
Slika 3 Regulator pritiska tip 647.2 proizvođač "Teleoptik"



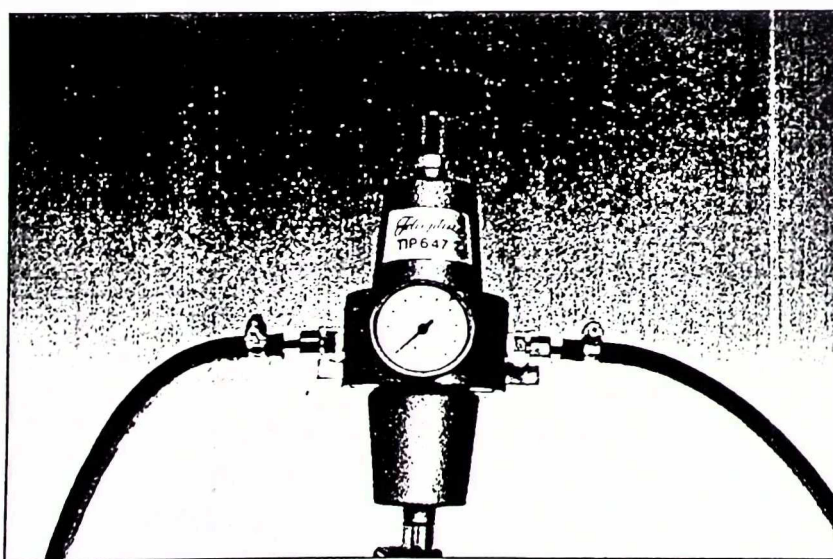
Slika 4 Mjerni most za tenzometrijske analize proizvođač TML Japan



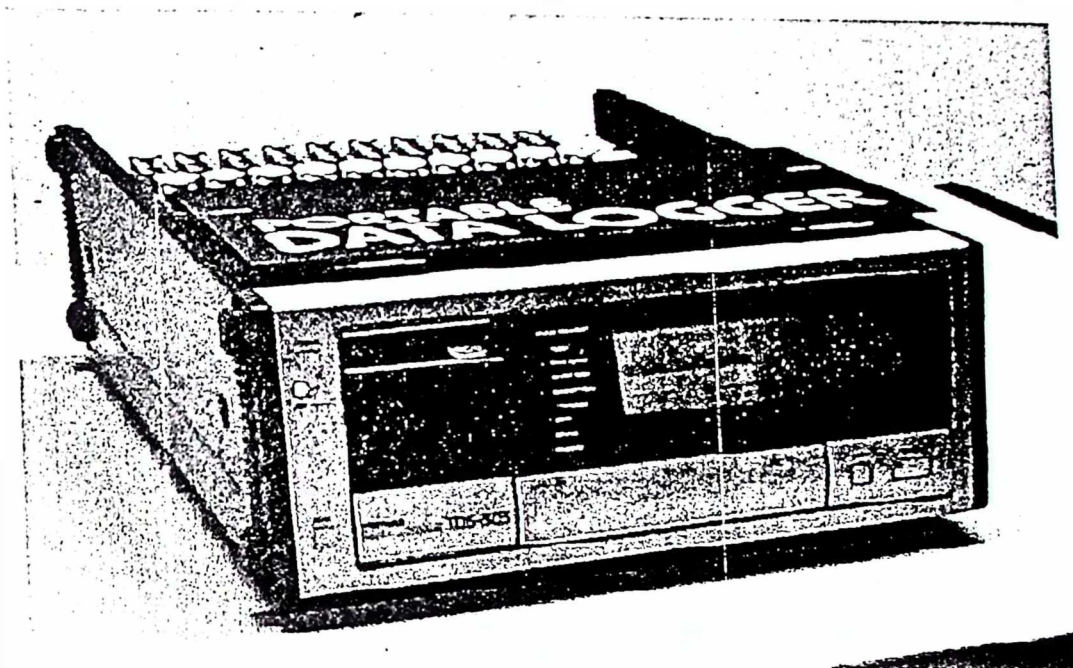
Slika 5 Uređaj sa živinim stubom za precizno mjerenje pritiska



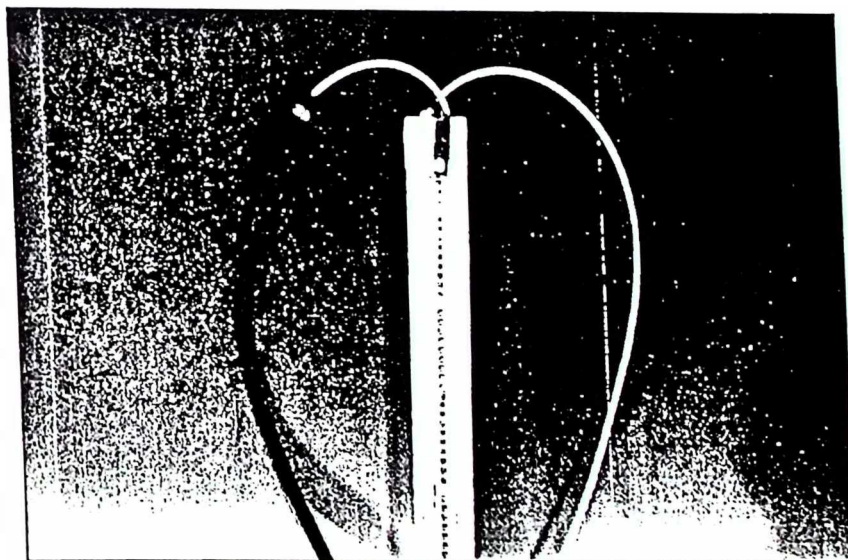
Slika 2 Spoljašnja čaura za modele A, B i C



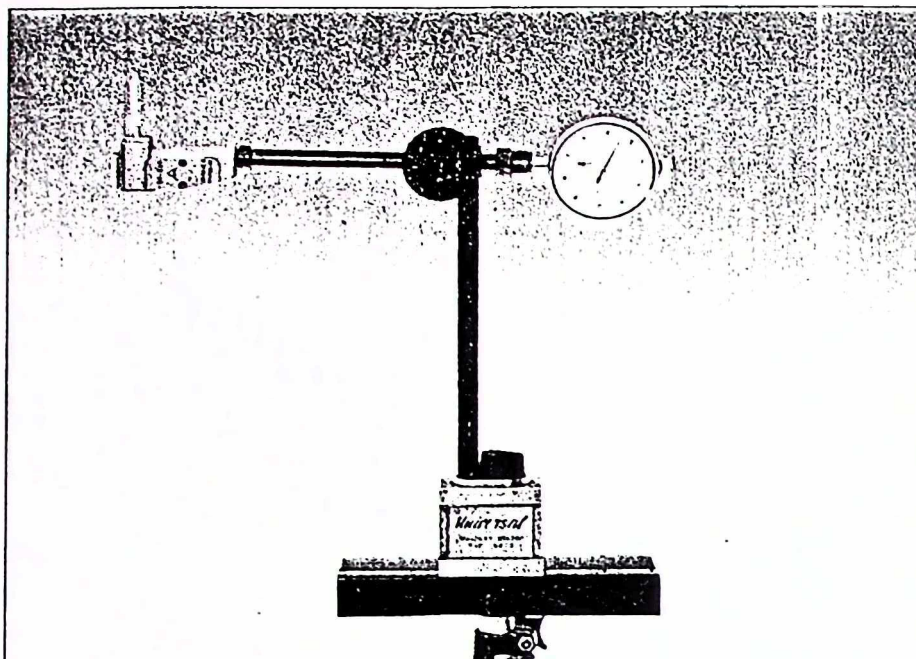
Slika 3 Regulator pritiska tip 647.2 proizvođač "Teleoptik"



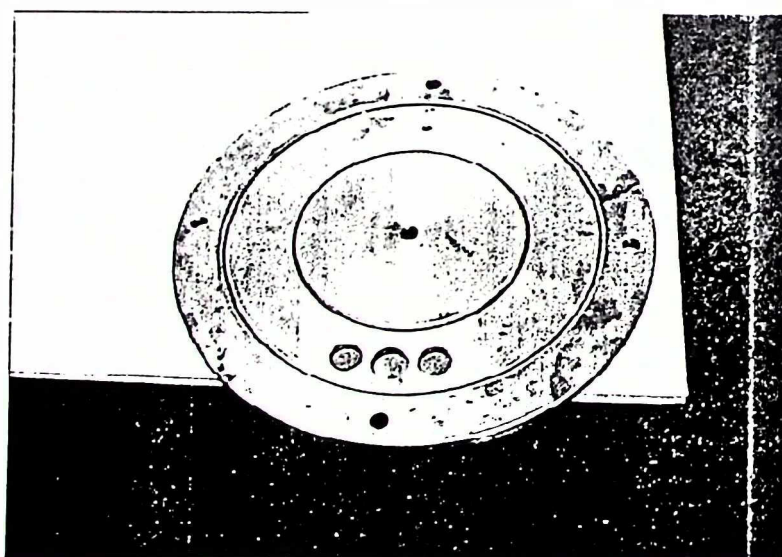
Slika 4 Mjerni most za tenzometrijske analize proizvođač TML Japan



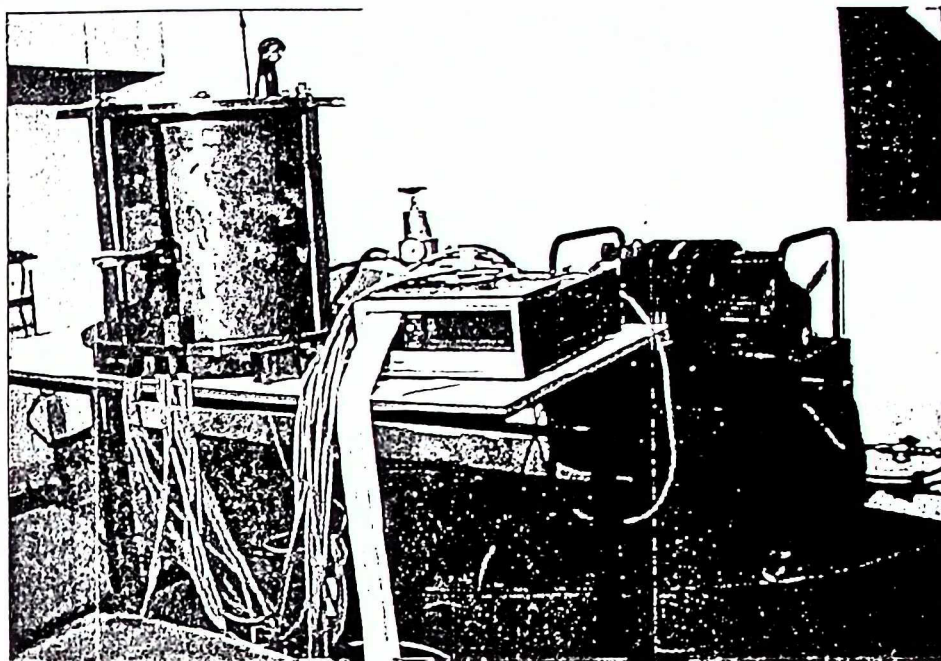
Slika 5 Uređaj sa živinim stubom za precizno mjerenje pritiska



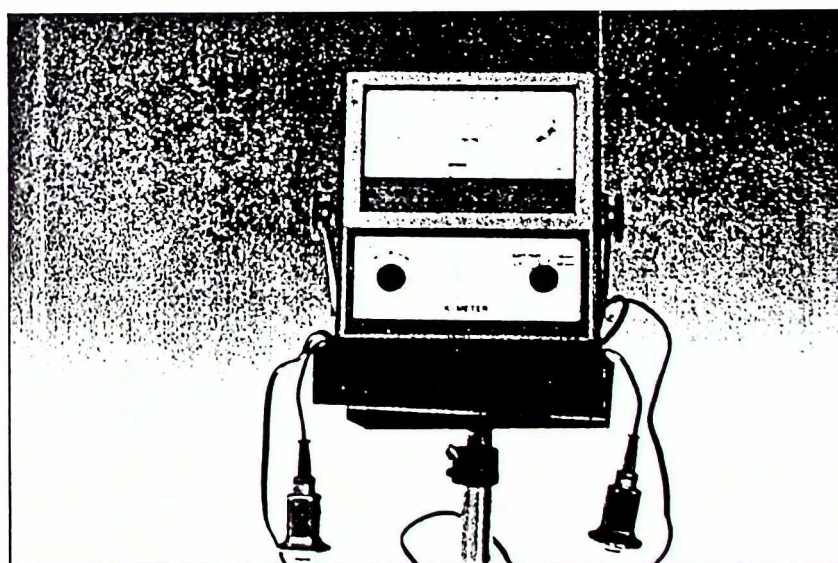
Slika 6 Uređaj sa komparaterom za mjerenje ugiba ljuski



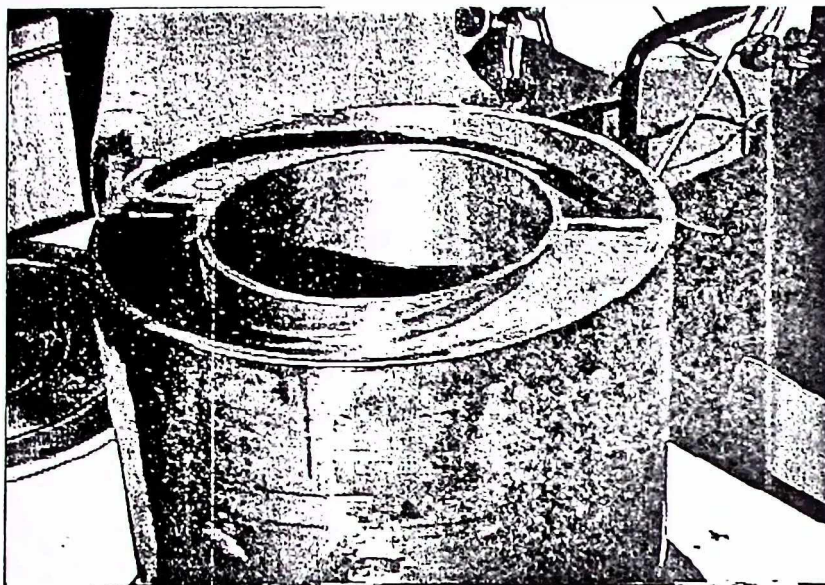
Slika 7 Ploča modela sa otvorima za postavljanje kablova



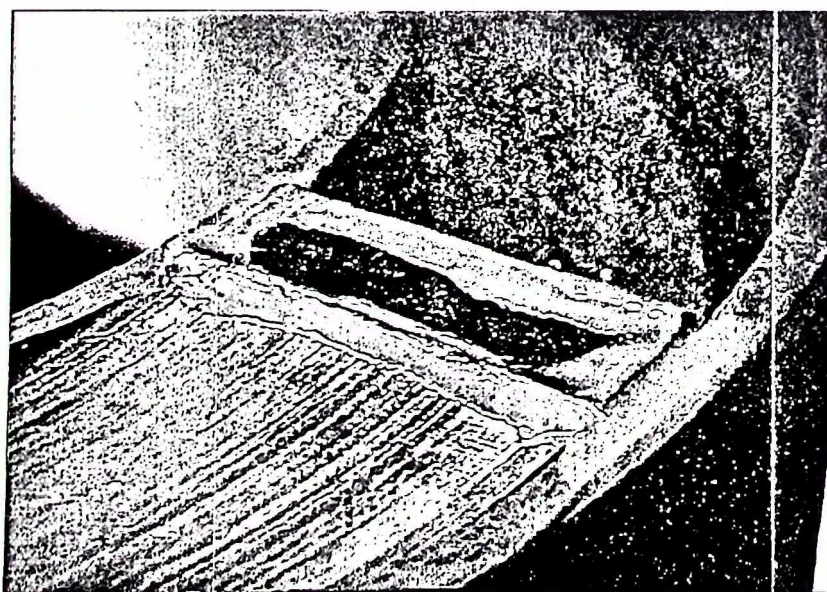
Slika 8 Kompletan model pripremljen za ispitivanje



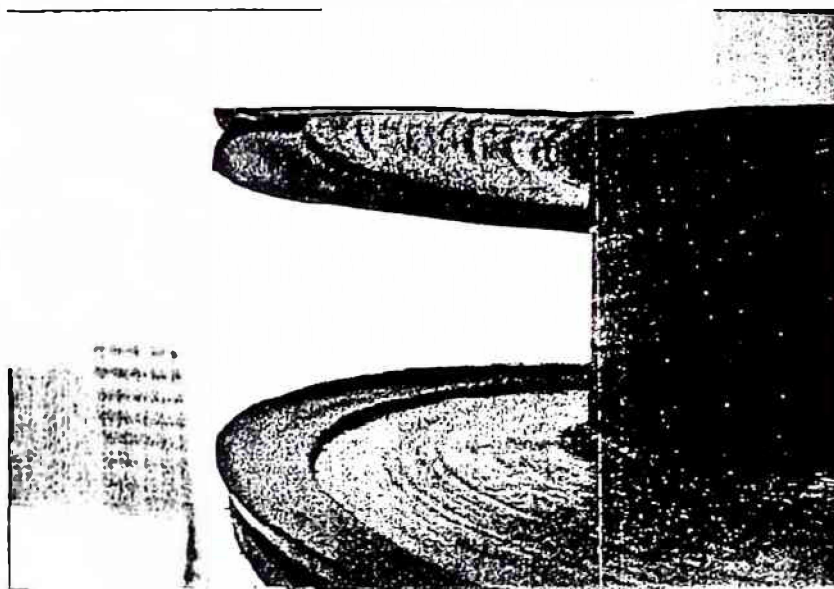
Slika 9 K-metar uređaj za ultrazvučno mjerenje debljine ljuske



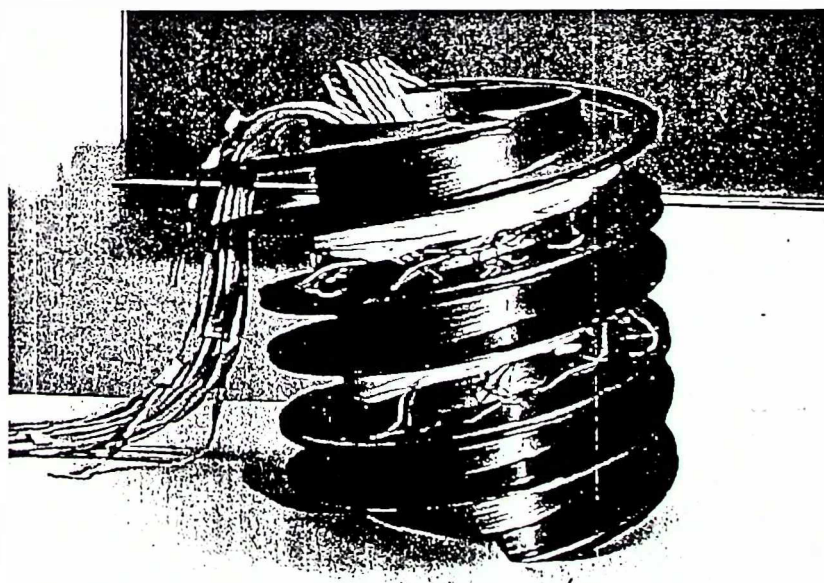
Slika 10 Zavojna ljuska postavljena u čauru



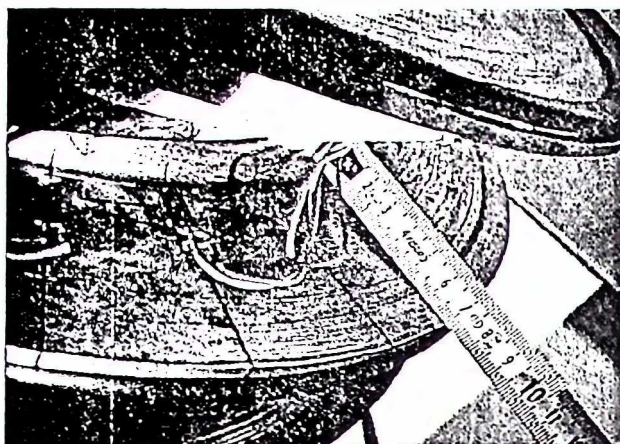
Slika 11 Zaptivanje krajeva zavojne ljuske postavljene u čauru



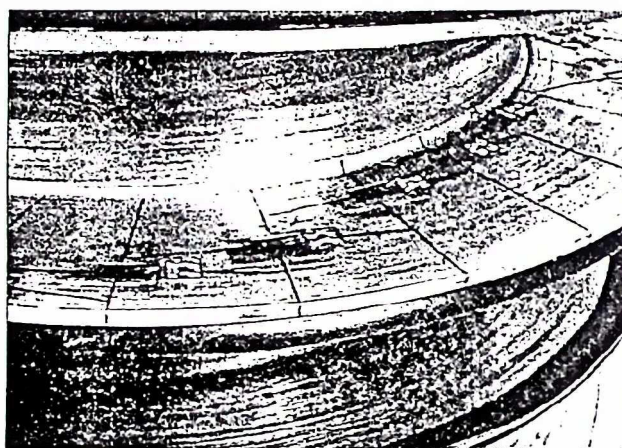
Slika 12 Detalj sa zaptivnim L trakama kod dvostruke zavojne ljuske



Slika 13 Zavojna ljuska sa postavljenim i povezanim mjernim trakama pripremljena za ispitivanje



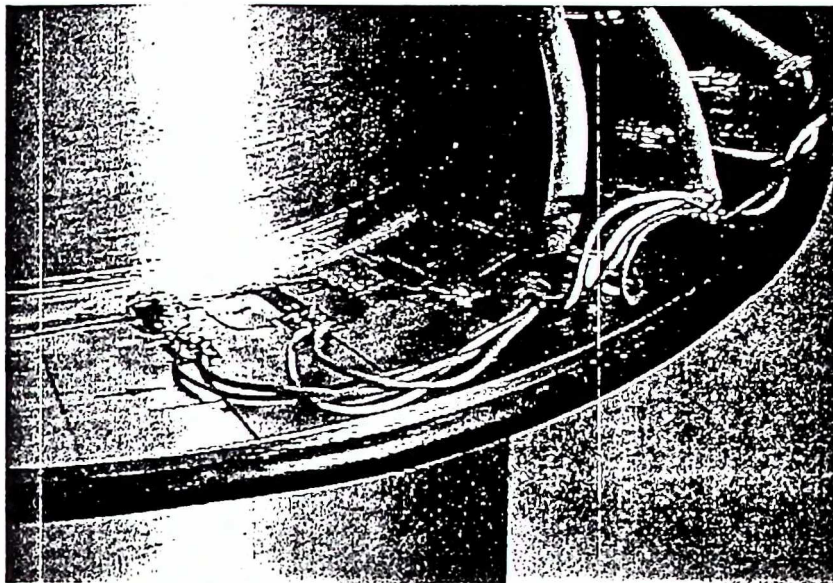
Slika 14 Mjerne trake postavljene u radijalnom pravcu kod zavojne ljuske



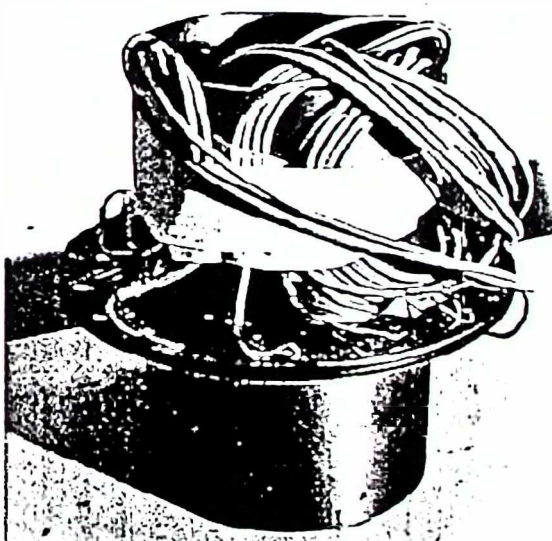
Slika 15 Mjerne trake postavljene u cirkularnom pravcu kod zavojne ljuske



Slika 16 Mjerne trake postavljene pod uglom od 45° kod zavojne ljuske

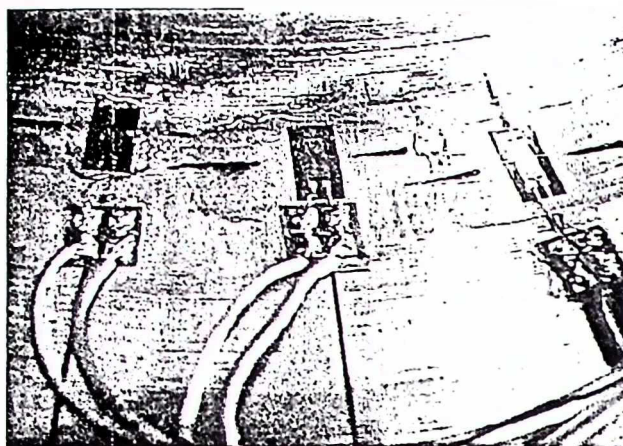


Slika 17 Detalj prstenaste ploče sa gumenim zaptivačem i povezanim mjernim trakama

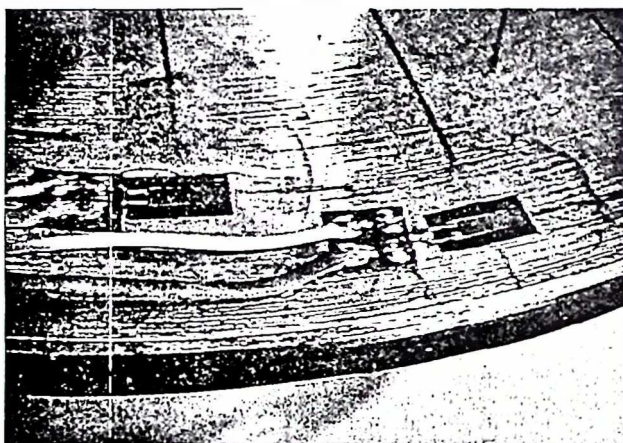


Slika 18 Prstenasta ploča sa povezanim mjernim trakama pripremljena za ispitivanje

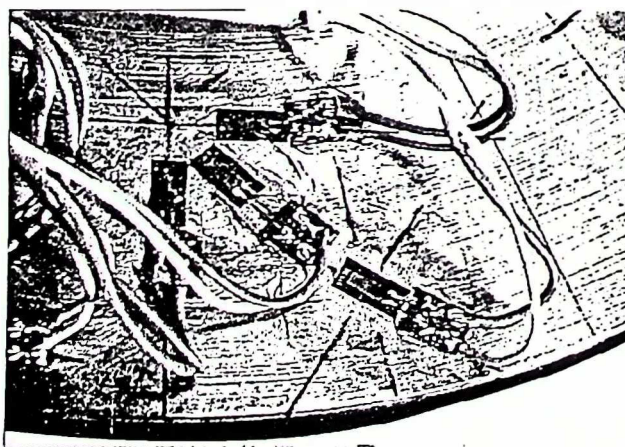




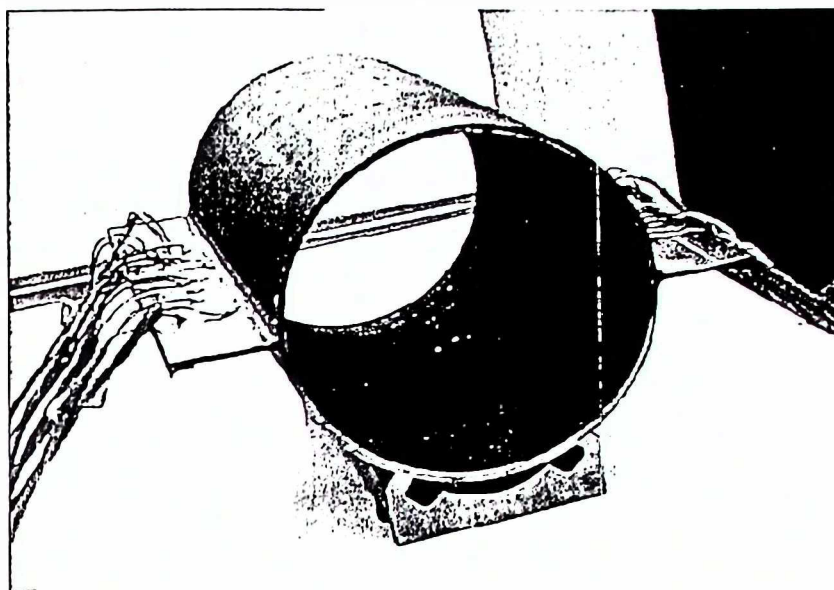
Slika 19 Mjerne trake postavljene u radijalnom pravcu kod prstenaste ploče



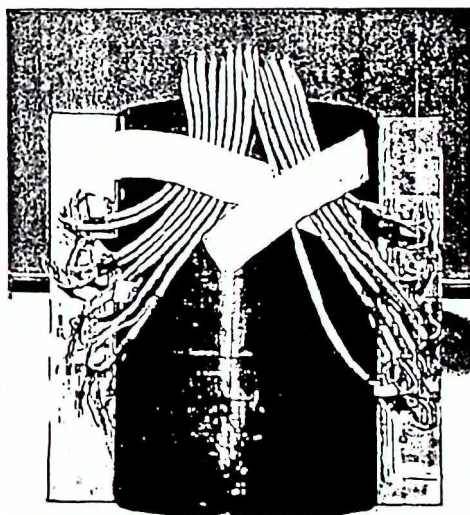
Slika 20 Mjerne trake postavljene u cirkularnom pravcu kod prstenaste ploče



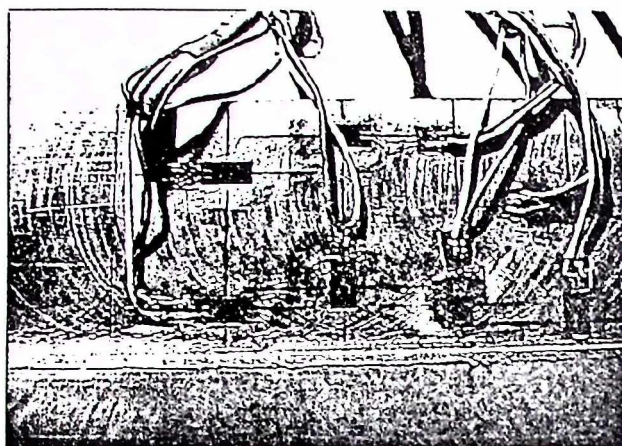
Slika 21 Mjerne trake postavljene pod uglom od 45° kod prstenaste ploče



Slika 22 Pravougaone ploče sa postavljenim i povezanim mjernim trakama



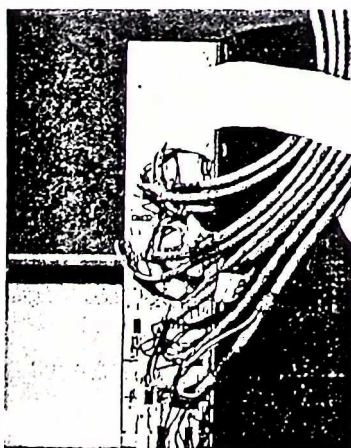
Slika 23 Pravougaone ploče na cilindričnoj ljusci pripremljene za ispitivanje



Slika 24 Mjerne trake postavljene u radijalnom i podužnom pravcu na pravougaonoj ploči



Slika 25 Mjerne trake pod uglom od 45° na pravougaonoj ploči



Slika 26 Pravougaona ploča sa postavljenim mjernim trakama

PRILOG 5

EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE MODELI A, B, C - TABELE

Tabela 1

Hemijska analiza upotrijebljenih čelika za elemente modela A, B i C

			ANALIZA U %											
			C	Si	Mn	P	S	Cu	Cr	Ni	Mo	Ti	Al	Kvalitet
NAZIV UZORKA	1	Zavojna ljska	0.44	0.24	0.61	0.012	0.026							Č.1531
	2	Cilindrična ljska B	0.21	0.56	0.61	0.018	0.010	0.20	0.17	0.10	0.03		0.066	Č.0300
	3	Prstenasta ploča	0.15	0.11	1.20	0.016	0.016	0.04					0.046	Č.0561
	4	Cilindrična ljska C	0.21	0.56	0.60	0.016	0.008	0.20	0.16	0.10	0.03		0.065	Č.0300
	5	Pravougaona ploča	0.18	0.11	1.20	0.015	0.015	0.04					0.046	Č.0561
	6	Spoljašnja čaura	0.22	0.42	0.59	0.016	0.040	0.23	0.27	0.28	0.14		0.075	Č.0300
	7	Gornja i donja ploča	0.14	0.23	0.46	0.012	0.009	0.03	0.03				0.042	Č.1221
	8	Zavrtanj M 18	0.46	0.26	0.62	0.016	0.025	0.39	0.05	0.12	0.03	0.051	0.024	Č.1531

Tabela 2

Mehaničke osobine i hemijski sastav čistog zavara kod modela B i C

OSOBINE ZAVARENOG SPOJA						
ELEKTRODA PIVA 150 B						
MEHANIČKE OSOBINE				HEMIJSKI SASTAV		
GRANICA RAZVLAČENJA (MPa)	ZATEZNA ČVRSTOĆA (MPa)	IZDUŽENJE ($l_0=5d_0$) (%)	ŽILAVOST ISO-V (J)	C	Mn	Si
440+510	510-560	26+30	100 min (-20°C) 47 min (-40°C)	8,08	1,0	0,45

Tabela 3

Čitanja sa mjernih traka, model A

		MJERNE TRAKE														
		RADIJALNI PRAVAC						CIRKULARNI PRAVAC						POD UGLOM OD 45°		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r (mm)		140,5	144,6	150,5	169,9	179,8	190	140,2	145,2	151	170,2	180	190	144,9	149,4	179,5
Pritisak (N/mm²)	0.05	-208	-176	-128	-37	-9	+5	-18	-27	-28	-35	-33	-33	-98	-82	-21
	0.10	-406	-343	-247	-70	-18	+11	-36	-51	-55	-70	-65	-67	-192	-159	-40
	0.12	-488	-413	-298	-93	-21	+14	-44	-61	-66	-85	-79	-90	-231	-192	-50
	0.14	-570	-483	-348	-98	-24	+16	-51	-72	-77	-100	-93	-96	-271	-225	-58
	0.15	-605	-513	-369	-104	-27	+17	-55	-76	-82	-106	-98	-102	-287	-239	-63
	0.16	-654	-555	-399	-113	-30	+17	-59	-83	-91	-114	-107	-111	-312	-259	-68
	0.18	-736	-623	-450	-127	-33	+20	-67	-93	-101	-128	-121	-126	-350	-290	-77
	0.20	-823	-697	-502	-142	-36	+23	-74	-105	-114	-144	-137	-142	-390	-325	-86
	0.22	-903	-765	-551	-155	-39	+26	-82	-114	-124	-159	-150	-156	-428	-356	-95
	0.24	-985	-834	-600	-169	-42	+28	-88	-124	-135	-174	-165	-172	-468	-388	-103
	0.25	-1029	-871	-625	-175	-44	+29	-93	-129	-141	-182	-172	-180	-487	-404	-108

Tabela 4

Čitanja sa mjernih traka, model A (nastavak)

		MJEŠTANJE TRAKE														
		RADIJALNI PRAVAC						CIRKULARNI PRAVAC						POD UGLOM OD 45°		
		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r (mm)		139,5	144,5	149,4	170	180,8	189,9	140,7	146	150	169,5	179,9	190	144,7	150,2	169,6
Pritisak (N/mm²)	0.05	-223	-186	-143	-36	-7	+5	-17	-27	-27	-36	-34	-33	-108	-83	-37
	0.10	-439	-363	-276	-72	-13	+12	-33	-53	-55	-71	-68	-66	-210	-159	-72
	0.12	-526	-436	-331	-94	-16	+15	-40	-63	-65	-86	-83	-80	-252	-191	87
	0.14	-615	-509	-387	-104	-18	+18	-47	-74	-76	-101	-98	-95	-295	-223	-101
	0.15	-653	-540	-411	-	-19	+18	-50	-79	-81	-107	-104	-102	-313	-238	-108
	0.16	-704	-583	-443	-	-21	+19	-55	-86	-89	-116	-114	-111	-338	-258	-117
	0.18	-793	-656	-498	-	-23	+22	-62	-97	-100	-131	-129	-125	-380	-289	-132
	0.20	-885	-731	-556	-	-25	+24	-68	-107	-111	-146	-144	-141	-423	-321	-147
	0.22	-971	-801	-610	-	-27	+28	-75	-118	-121	-161	-159	-156	-465	-353	-161
	0.24	-1060	-873	-663	-	-28	+31	-81	-128	-133	-176	-175	-172	-506	-384	-175
	0.25	-1108	-909	-690	-	-29	+32	-84	-133	-139	-183	-183	-180	-527	-400	-183

Tabela 5

Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu, model A (na osnovu deformacija sa traka 1÷12)

		NAPON (N/mm ²)											
		RADIJALNI PRAVAC						CIRKULARNI PRAVAC					
r (mm)		140	145	150	170	180	190	140	145	150	170	180	190
Pritisak (N/mm ²)	0.05	-46.901	-40.461	-29.978	-10.440	-4.154	-1.077	-17.670	-17.538	-14.593	-10.132	-7.846	-6.923
	0.10	-91.604	-78.747	-57.912	-20.000	-8.242	-2.000	-34.681	-33.824	-28.374	-20.000	-15.473	-14.000
	0.12	-110.154	-94.791	-69.846	-26.044	-9.824	-2.857	-41.846	-40.637	-34.154	-24.813	-18.747	-18.857
	0.14	-128.637	-110.901	-81.560	-28.132	-11.407	-2.813	-48.791	-47.670	-39.868	-28.440	-22.022	-20.044
	0.15	-136.593	-117.758	-86.505	-29.846	-12.396	-2.989	-51.978	-50.527	-42.352	-30.154	-23.319	-21.297
	0.16	-147.626	-127.450	-93.692	-32.352	-13.648	-3.582	-56.088	-54.835	-46.308	-32.505	-25.494	-23.275
	0.18	-166.176	-143.055	-105.560	-36.352	-15.231	-3.912	-63.253	-61.516	-51.868	-36.505	-28.769	-26.374
	0.20	-185.758	-160.110	-117.846	-40.703	-16.945	-4.308	-70.527	-69.033	-58.154	-41.011	-32.483	-29.692
	0.22	-203.868	-175.648	-129.275	-44.549	-18.462	-4.571	-77.560	-75.494	-63.582	-45.165	-35.538	-32.571
	0.24	-222.285	-191.472	-140.769	-48.615	-20.110	-5.187	-84.286	-82.242	-69.231	-49.385	-39.033	-35.956
	0.25	-232.285	-199.934	-146.659	-50.461	-21.011	-5.495	-88.286	-85.780	-72.198	-51.538	-40.703	-37.648

Tabela 6

Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu, model A (na osnovu deformacija sa traka 16÷27)

		NAPON (N/mm ²)											
		RADIJALNI PRAVAC						CIRKULARNI PRAVAC					
r (mm)		140	145	150	170	180	190	140	145	150	170	180	190
Pritisak (N/mm ²)	0.05	-50.132	-42.659	-33.209	-10.286	-3.780	-1.077	-18.440	-18.198	-15.363	-10.286	-7.934	-6.923
	0.10	-98.659	-83.275	-64.286	-20.505	-7.341	-1.714	-36.198	-35.582	-30.286	-20.352	-15.802	-13.714
	0.12	-118.242	-99.978	-77.033	-26.330	-8.989	-1.978	-43.472	-42.593	-36.110	-25.099	-19.297	-16.593
	0.14	-138.264	-116.747	-90.066	-29.516	-10.418	-2.308	-50.879	-49.824	-42.220	-29.055	-22.725	-19.692
	0.15	-146.813	-123.890	-95.670	-	-11.033	-2.769	-54.044	-52.967	-44.901	-	-24.110	-21.231
	0.16	-158.351	-133.802	-103.231	-	-12.132	-3.143	-58.505	-57.341	-48.769	-	-26.440	-23.143
	0.18	-178.373	-150.571	-116.044	-	-13.560	-3.407	-65.912	-64.571	-54.813	-	-29.868	-26.022
	0.20	-198.989	-167.714	-129.516	-	-14.989	-4.022	-73.297	-71.714	-61.055	-	-33.297	-29.407
	0.22	-218.351	-183.824	-142.044	-	-16.418	-4.132	-80.505	-78.747	-66.813	-	-36.725	-32.440
	0.24	-238.307	-200.307	-154.483	-	-17.692	-4.527	-87.692	-85.692	-72.945	-	-40.308	-35.758
	0.25	-249.055	-208.549	-160.813	-	-18.440	-4.835	-91.516	-89.165	-76.044	-	-42.132	-37.451

Tabela 7

Čitanja sa ugibomjera, model A

IZMJERENI UGIBI [mm/100]												
MJERNA MJESTA												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	197	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150	140
0.05	15	13	12	11	9	7.5	7	5.5	4	3	2	0
0.10	28	26	24	21	17	14	12	9	6	4.5	3	0.5
0.12	34	31	29	25	21	16.5	14.5	11	8	5.5	3.5	0.5
0.14	39	37	33	29	24	20	17	13	10	6.5	4	1
0.15	42	40	36	31	26	21	18	14	10.5	7	4	1
0.16	45	42	38	33	27.5	23	19.5	15	11.5	7.5	4.5	1
0.18	51	47.5	43	37	31.5	25.5	22	16.5	13	8.5	5	1
0.20	57	52.5	48	41.5	35	28.5	25	19	15	10	6	1.5
0.22	63	58	53	46	38	31.5	27	21	16.5	11	7	1.5
0.24	67	61.5	58	50	42.5	35	29	23	18	12	7.5	2
0.25	72	67	61	52	44	36	31	24	19	13	8	2

Tabela 8

Čitanja sa mjernih traka, model B

MJERNE TRAKE																
RADIJALNI PRAVAC									CIRKULARNI PRAVAC					UGAO 45°		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
BRZINA (mm/min)	139,6	143,7	148,2	157,5	159	169,5	180,3	189,8	140	145,1	169,3	179,8	189,4	144	178,2	
PRITISAK (N/mm²)	0.05	-147	-126	-101	-64	-57	-26	-9	+3	-6	-16	-24	-24	-21	-65	-15
	0.10	-286	-247	-196	-121	-109	-50	-15	+6	-10	-30	-45	-45	-41	-126	-29
	0.12	-345	-296	-236	-145	-130	-60	-18	+8	-12	-37	-54	-55	-49	-152	-35
	0.14	-403	-344	-274	-169	-152	-70	-21	+9	-14	-43	-64	-63	-57	-176	-40
	0.15	-432	-371	-296	-182	-164	-75	-23	+9	-15	-46	-68	-66	-60	-189	-43
	0.16	-459	-393	-315	-192	-175	-81	-24	+10	-16	-49	-71	-70	-65	-201	-46
	0.18	-519	-446	-356	-218	-197	-91	-27	+12	-18	-55	-82	-80	-73	-227	-52
	0.20	-578	-496	-396	-243	-218	-101	-29	+13	-19	-61	-91	-89	-81	-252	-57
	0.22	-634	-545	-435	-265	-240	-111	-32	+14	-21	-68	-99	-98	-90	-275	-61
	0.24	-689	-591	-473	-288	-261	-121	-34	+16	-23	-73	-107	-106	-98	-297	-66
0.25	-722	-619	-494	-303	-272	-126	-36	+17	-24	-76	-112	-112	-103	-311	-70	

Tabela 9

Čitanja sa mjernih traka, model B (nastavak)

MODERNE TRAKE																
RADIJALNI PRAVAC								CIRKULARNI PRAVAC						UGAO 45°		
r (mm)		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		140,1	144,7	149	159,3	168,8	180	190	139	144,3	145	169,3	179,3	188,8	154,5	179,2
Pritisak (N/mm²)	0.05	-142	-121	-104	-58	-29	-10	+2	-8	-13	-16	-24	-24	-22	-51	-17
	0.10	-279	-238	-194	-109	-54	-16	+6	-18	-26	-30	-45	-43	-41	-98	-32
	0.12	-337	-286	-232	-130	-65	-20	+7	-21	-31	-36	-54	-53	-49	-117	-38
	0.14	-393	-334	-268	-151	-74	-22	+8	-26	-36	-42	-63	-61	-58	-137	-44
	0.15	-420	-358	-285	-160	-77	-21	+8	-28	-39	-45	-68	-65	-62	-147	-48
	0.16	-445	-381	-302	-171	-82	-22	+8	-29	-42	-48	-73	-70	-66	-156	-51
	0.18	-504	-431	-340	-192	-92	-24	+9	-34	-47	-54	-82	-79	-75	-176	-58
0.20	-560	-479	-376	-214	-103	-27	+11	-37	-53	-60	-91	-88	-84	-196	-65	
0.22	-613	-525	-410	-236	-113	-31	+11	-40	-57	-65	-99	-96	-91	-215	-70	
0.24	-665	-569	-443	-256	-123	-34	+13	-44	-62	-70	-108	-104	-100	-233	-77	
0.25	-698	-598	-464	-269	-129	-35	+13	-45	-65	-74	-114	-109	-105	-245	-81	

Tabela 10

Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu, model B (na osnovu deformacija sa traka 1÷13)

		NAPON (N/mm ²)									
		RADIJALNI PRAVAC					CIRKULARNI PRAVAC				
r (mm)		140	145	170	180	190	140	145	170	180	190
Pritisak (N/mm ²)	0.05	-32.703	-28.747	-7.297	-3.560	-0.725	-11.011	-11.824	-6.989	-5.868	-4.418
	0.10	-63.516	-56.264	-13.956	-6.264	-1.385	-21.055	-22.879	-13.187	-10.879	-8.615
	0.12	-76.615	-67.494	-16.747	-7.582	-1.473	-25.385	-27.648	-15.824	-13.275	-10.242
	0.14	-89.494	-78.439	-19.604	-8.769	-1.780	-29.648	-32.132	-18.681	-15.231	-11.934
	0.15	-95.934	-84.571	-20.967	-9.407	-1.978	-31.780	-34.571	-19.890	-16.022	-12.593
	0.16	-101.934	-89.604	-22.483	-9.890	-2.088	-33.780	-36.681	-20.945	-16.967	-13.626
	0.18	-115.253	-101.648	-25.407	-11.209	-2.176	-38.176	-41.494	-24.022	-19.363	-15.253
	0.20	-128.286	-113.033	-28.198	-12.242	-2.484	-42.286	-46.110	-26.659	-21.473	-16.945
	0.22	-140.725	-124.264	-30.923	-13.494	-2.857	-46.418	-50.879	-29.077	-23.648	-18.857
	0.24	-152.945	-134.703	-33.648	-14.462	-2.945	-50.483	-55.011	-31.494	-25.538	-20.483
	0.25	-160.264	-141.055	-35.077	-15.297	-3.055	-52.879	-57.516	-32.923	-26.989	-21.516

Tabela 11

Naponi u radijalnom i cirkularnom pravcu, model B (na osnovu deformacija sa traka 16÷28)

		NAPON (N/mm ²)									
		RADIJALNI PRAVAC					CIRKULARNI PRAVAC				
Pritisak (N/mm ²)		140	145	170	180	190	140	145	170	180	190
Pritisak (N/mm ²)	0.05	-31.736	-27.648	-7.956	-3.780	-1.011	-11.121	-11.494	-7.187	-5.934	-4.703
	0.10	-62.505	-54.286	-14.835	-6.352	-4.022	-22.352	-22.286	-13.451	-10.505	-9.407
	0.12	-75.450	-65.231	-17.846	-7.890	-1.692	-26.835	-26.769	-16.154	-12.967	-10.308
	0.14	-88.088	-76.176	-20.418	-8.857	-2.066	-31.626	-31.253	-18.725	-14.857	-12.220
	0.15	-94.154	-81.648	-21.407	-8.901	-2.330	-33.846	-33.494	-20.022	-15.670	-13.099
	0.16	-99.714	-86.901	-22.835	-9.451	-2.593	-35.714	-35.670	-21.451	-16.835	-13.978
	0.18	-113.011	-98.286	-25.626	-10.484	-2.967	-40.703	-40.286	-24.088	-18.945	-15.890
	0.20	-125.516	-109.231	-28.637	-11.736	-3.121	-45.055	-44.769	-26.791	-21.121	-17.736
	0.22	-137.363	-119.670	-31.363	-13.143	-3.582	-49.209	-48.901	-29.209	-23.143	-19.275
	0.24	-149.055	-129.670	-34.154	-14.330	-3.736	-53.516	-52.901	-31.846	-25.099	-21.121
	0.25	-156.373	-136.308	-35.868	-14.879	-4.066	-55.912	-55.692	-33.560	-26.264	-22.220

Tabela 12

Čitanja sa ugibomjera, model B

		IZMJERENI UGIBI [mm/100]											
		MJERNA MJESTA											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u _g (mm)		197	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150	140
Pritisak (N/mm ²)	0.05	9	8	7	6	5.5	4.5	3.5	2.5	2	1	0.5	0
	0.10	18	17	14.5	12.5	11	9.5	7	6	4	3	1.5	0
	0.12	21.5	20.5	18	15.5	13	11	8.5	7	5	4	2	0.5
	0.14	25	24	20.5	18	15.5	13.5	10	8.5	6	4.5	2.5	0.5
	0.15	27	25.5	23	19.5	17	14.5	11	9	7	5	3	0.5
	0.16	29	27	24	21	18	15	11.5	10	7.5	5.5	3	0.5
	0.18	32	30.5	27	23.5	20.5	17.5	13	11.5	8	6	3.5	0.5
	0.20	36	34	30	26.5	23	19.5	14.5	13	9.5	6.5	4	1
	0.22	39	38	33	29	25	21.5	16	14	10	7.5	4.5	1
	0.24	43	41.5	36.5	32	28	23.5	18	15	11.5	8.5	5	1
	0.25	45	43	38	33	29	24.5	18.5	16	12	9	5.5	1

Tabela 13

Čitanja sa mjernih traka, model C

		MJERNE TRAKE														
		RADIJALNI PRAVAC						PODUŽNI PRAVAC						POD UGLOM OD 45°		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
The Prusa i3 3.0	0.00	140,8	145,5	149,5	169,8	179,5	190	139,7	145	150	170,2	180,1	189,9	145,2	149,2	179,7
	0.05	-163	-144	-122	-42	-22	-9	+3	+3	+4	+5	+5	+7	-72	-58	-8
	0.10	-322	-282	-238	-80	-38	-12	+6	+5	+5	+2	+2	+4	-141	-114	-17
	0.12	-387	-338	-286	-96	-46	-13	+7	+6	+4	+1	0	+1	-168	-137	-21
	0.14	-451	-394	-334	-112	-53	-14	+8	+6	+4	-1	-2	-1	-197	-160	-26
	0.15	-483	-421	-357	-119	-56	-15	+8	+6	+4	-3	-4	-3	-210	-171	-28
	0.16	-516	-450	-381	-127	-60	-15	+9	+6	+3	-4	-6	-5	-225	-183	-30
	0.18	-587	-512	-433	-145	-68	-16	+10	+6	+3	-6	-9	-8	-255	-208	-35
	0.20	-646	-565	-478	-160	-74	-17	+11	+6	+3	-7	-13	-12	-282	-231	-40
	0.22	-717	-626	-532	-177	-81	-17	+11	+7	+3	-9	-13	-15	-313	-254	-43
	0.24	-774	-678	-576	-193	-88	-18	+13	+7	+3	-10	-16	-18	-340	-276	-48
	0.25	-805	-704	-599	-201	-92	-19	+12	+7	+2	-10	-17	-20	-353	-288	-50

Tabela 14

Čitanja sa mjernih traka, model C (nastavak)

		MJERNE TRAKE														
		RADIJALNI PRAVAC						PODUŽNI PRAVAC						POD UGLOM OD 45°		
		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Pritisak (N/mm ²)	r (mm)	140.9	145.5	150	170	179.9	189.4	140.9	144.5	150.2	170	180	189.8	145.2	150	170
	0.05	-155	-130	-108	-44	-20	-8	+3	+5	+5	+8	+11	+12	-63	-52	-18
	0.10	-310	-258	-215	-82	-33	-10	+6	+9	+6	+8	+12	+13	-123	-103	-39
	0.12	-373	-311	-261	-98	-39	-12	+6	+9	+6	+7	+11	+11	-148	-123	-46
	0.14	-436	-363	-304	-113	-45	-13	+7	+9	+6	+5	+9	+8	-172	-143	-54
	0.15	-467	-388	-326	-121	-49	-13	+7	+9	+6	+4	+8	+6	-183	-154	-58
	0.16	-499	-415	-348	-128	-52	-14	+7	+9	+5	+3	+6	+5	-195	-164	-62
	0.18	-567	-472	-396	-146	-59	-15	+7	+9	+5	+1	+5	+2	-222	-186	-71
	0.20	-626	-521	-439	-159	-64	-16	+8	+11	+5	0	+3	-1	-244	-206	-78
	0.22	-695	-578	-485	-177	-69	-16	+9	+12	+6	-1	1	-3	-270	-228	-87
	0.24	-753	-626	-526	-191	-76	-17	+9	+12	+5	-3	-1	-5	-293	-247	-95
	0.25	-783	-652	-547	-199	-79	-18	+9	+12	+5	-4	-1	-7	-305	-256	-98

Tabela 15

Naponi u radijalnom i podužnom pravcu, model C (na osnovu deformacija sa traka 1÷12)

		NAPON (N/mm ²)											
		RADIJALNI PRAVAC						PODUŽNI PRAVAC					
r (mm)	P (N/mm ²)	140	145	150	170	180	190	140	145	150	170	180	190
	0.05	-35.626	-31.451	-26.549	-8.901	-4.505	-1.516	-10.088	-8.835	-7.165	-1.670	-0.352	0.945
	0.10	-70.374	-61.648	-51.978	-17.451	-8.220	-2.374	-19.912	-17.494	-14.593	-4.835	-2.066	0.088
	0.12	-84.593	-73.890	-62.593	-21.033	-10.110	-2.791	-23.978	-20.967	-17.978	-6.110	-3.033	-0.637
	0.14	-98.593	-86.198	-73.143	-24.681	-11.780	-3.143	-27.978	-24.659	-21.143	-7.604	-3.934	-1.143
	0.15	-105.626	-92.132	-78.198	-26.352	-12.571	-3.495	-30.088	-26.440	-22.659	-8.505	-4.571	-1.648
	0.16	-112.813	-98.505	-83.538	-28.176	-13.582	-3.626	-32.044	-28.352	-24.462	-9.253	-5.275	-2.088
	0.18	-128.352	-112.132	-94.967	-32.264	-15.538	-4.044	-36.505	-32.440	-27.890	-10.879	-6.462	-2.813
	0.20	-141.253	-123.780	-104.857	-35.626	-17.121	-4.527	-40.176	-35.934	-30.857	-12.088	-7.736	-3.758
	0.22	-156.857	-137.121	-116.725	-39.494	-18.659	-4.725	-44.857	-39.736	-34.418	-13.648	-8.198	-4.418
	0.24	-169.253	-148.549	-126.395	-43.077	-20.396	-5.143	-48.176	-43.165	-37.319	-14.923	-9.319	-5.143
	0.25	-176.132	-154.264	-131.516	-44.835	-21.341	-5.495	-50.440	-44.879	-39.055	-15.451	-9.802	-5.648

Tabela 16

Naponi u radijalnom i podužnom pravcu, model C (na osnovu deformacija sa traka 16÷27)

		NAP (N/mm ²)											
		RADIJALNI PRAVAC						PODUŽNI PRAVAC					
r (mm)		140	145	150	170	180	190	140	145	150	170	180	190
Prisak (N/mm ²)	0.05	-33.868	-28.242	-23.407	-9.143	-3.670	-0.967	-9.560	-7.473	-6.022	-1.143	1.099	2.110
	0.10	-67.736	-56.110	-46.857	-17.494	-6.462	-1.341	-19.121	-15.033	-12.857	-3.648	0.462	2.198
	0.12	-81.582	-67.758	-56.967	-21.077	-7.846	-1.912	-23.275	-18.527	-15.890	-4.923	-0.154	1.626
	0.14	-95.363	-79.187	-66.418	-24.505	-9.297	-2.330	-27.209	-21.956	-18.725	-6.352	-0.989	0.901
	0.15	-102.176	-84.681	-71.253	-26.330	-10.242	-2.462	-29.253	-23.604	-20.176	-7.099	-1.473	0.462
	0.16	-109.209	-90.615	-76.154	-27.934	-11.033	-2.747	-31.363	-25.385	-21.846	-7.780	-2.110	0.176
	0.18	-124.154	-103.143	-86.703	-32.022	-12.637	-3.165	-35.846	-29.143	-25.011	-9.407	-2.791	-0.549
	0.20	-137.055	-113.780	-96.154	-34.945	-13.868	-3.582	-39.516	-31.934	-27.846	-10.484	-3.560	-1.275
	0.22	-152.154	-126.242	-106.198	-38.967	-15.099	-3.714	-43.846	-35.472	-30.659	-11.890	-4.330	-1.714
	0.24	-164.901	-136.791	-115.275	-42.176	-16.769	-4.066	-47.670	-38.637	-33.582	-13.253	-5.231	-2.220
	0.25	-171.494	-142.505	-119.890	-44.000	-17.429	-4.418	-49.648	-40.352	-34.967	-14.000	-5.429	-2.725

Tabela 17

Čitanja sa ugibomjera, model C

		IZMJERENJE UGIBI [mm/100]													
		MJERNA MJESTA													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E (mm)		197	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150	145	140	135
Pritisak (N/mm ²)	0.05	21	20	18	17	16	14	12	11	10	9	8.5	7.5	6	6
	0.10	37	35.5	32.5	29	27	25	22	19.5	16.5	15.5	14	12	9	9
	0.12	43.5	42	38.5	34	32	29.5	25.5	23	19	17.5	16	14	10	10
	0.14	50.5	48.5	44.5	39.5	37	34	29.5	26.5	22	20	18	15	11	12
	0.15	53	52	48	42	39.5	36	31.5	28	23	21	19	16	12.5	12
	0.16	57	55.5	50	45	42	38	33	30	24.5	22	20	17	13	13
	0.18	63	61	56	50	46	42	36.5	33	26.5	24.5	22	18	14	14
	0.20	69	67	61.5	55	51	46	40	36	29.5	27	24	20	15	15
	0.22	76	73.5	67	60	56	50	44	39	32	29	25.5	21	17	17
	0.24	83	80	73	65.5	61	54	47	42.5	34	31.5	27.5	23	18	18
	0.25	86	83	76	68	63	56	49	43.5	36.5	32.5	28.5	23.5	19	19

PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: prof. dr Sreten Savićević

Godina rođenja: 1956

E-mail: sreto@ucg.ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore: Mašinski fakultet

Naslov doktorske disertacije: „Razvoj automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske“

Prevod naslova na engleski jezik: „The Development of Automated Design of Structural Elements of Helicoidal Shell Shape“

Datum odbrane: 16.02.2001.

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci¹

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos)

doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne

Gore) Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

¹ Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

**PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI
ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE**

Prevod naslova disertacije na engleski jezik: The Development of Automatized Design of Saturated Structural Elements of Helicoidal Shell Shape

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu):

Mentor: dr. Milisav Kalajdžić, red. prof.

Članovi Komisije:

dr. Kosara Jojić, red. prof. Mašinski fakultet, Beograd

dr. Milisav Kalajdžić, red. prof. Mašinski fakultet, Beograd

dr. Radomir Vukasojević, red. prof. Mašinski fakultet, Podgorica

dr. Zoran Čulafić, red. prof. Mašinski fakultet, Podgorica

dr. Milan Vukčević, vanr. prof. Mašinski fakultet, Podgorica

Sažetak*

Izvedena je diferencijalna jednačina po pomjeraju za savijanje zavojne ljuske izložene ravnomjerno raspoređenom pritisku. Korišćena je restirktivna teroija ljuski jer je mješoviti koeficijent druge fundamentalne forme površi različit od nule, tj. koordinantne linije kod ove ljuske nisu linije krivine. U specijalnim slučajevima diferencijalna jednačina se svodi na jednačine savijanja kružne i pravougaone ploče. Diferencijalna jednačina je riješena numeričkim korišćenjem programskog paketa MATLAB. Dat je postupak proračuna cilindrične ljuske izložene savijanju kontinualnim spregom po zavojnoj liniji. Uvedene su koordinantne linije na cilindričnoj ljusci koje čine dvije familije međusobno ortogonalnih zavojnica. Riješena je diferencijalna jednačina po pomjeraju u pravcu normale na cilindar. Određen je položaj tačaka na cilindričnoj ljusci u kojima je vrijednost pomjeraja maksimalna kao i veličina tog pomjeraja. Korišćenjem izvedenih analitičkih rješenja dat je program za automatizovano određivanje geometrijskih parametara zavojne ljuske na cilindričnoj ljusci. Razvijen je originalni model za eksperimentalno istraživanje konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske. Konstrukcijom dvostruke zavojne ljuske i korišćenjem specijalnog zaptivnog elementa realizovan je normalni pritisak na površi ljuske. Eksperimentalni model je potvrdio opravdanost predloženih rješenja i omogućio efikasne analize napona i deformacija. U radu su dati uporedni rezultati korišćenjem programskog paketa za analizu MKE Pro/MECHANICA.

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku:

It is derived differential equation in displacement for bending of a helicoidally shell subjected to a uniform pressure. It is employed restricted shell theory because the mixed coefficient of second fundamental form is not equal to zero, i.e. the coordinate lines here are not lines of curvature. In special cases the differential equation is simplified in ones for bending circular and rectangular plate respectively. The differential equation is solved numerically by using software MATLAB. It is given a bending theory for cylindrical shell loaded by uniformly distributed couple along helix. Two families of orthogonal helices on cylinder are introduced for the coordinate lines. The differential equation in displacement along normal is solved. The location of points on cylindrical shell with maximum displacement is found as well as magnitude of this displacement. It is given a computer program for automatized determination of the geometric characteristics of helicoidal shell on cylindrical one by using derived analytical solution. It is developed on unique model for experimental research of structural elements of helicoidal shell shape. A pressure on the shell is realized by making dual helicoidal shell and with special airtight element. Experimental model is justified proposed technical solutions and assured effective strain measurement. In the thesis are given comparable results by using FEA software code Pro/MECHANICA.

Ključne riječi: ljuska, zavojna, konstrukcijski, ploča, cilindrična, diferencijalna, tenzor, veličina deformacije, presječna sila, kontinualni spreg, numerički element, konačni, mreža.

Ključne riječi na engleskom jeziku: shell, helicoidal, structural, plate, cylindrical, differential, tensor, strains, force per unit length, couple per unit length, numerical, finite element, mesh.

Naučna oblast/uža naučna oblast: Mašinstvo/Projektovanje mašinskih sistema

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku: Mechanical Engineering/Design of Mechanical Systems

Ostali podaci:

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore unese doktorsku disertaciju pod naslovom:

„Razvoj automatizovanog projektovanja konstrukcijskih elemenata oblika zavojne ljuske“

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

prof. dr Sreten Sayićević



¹ Odabрати (čekiirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.