

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Edin Liđan

**TOPOLOŠKE KARAKTERISTIKE
POPLOČAVANJA GENERALISANIM
POLIOMINIMA**
-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Podgorica, 2022.

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF NATURAL SCIENCES
AND MATHEMATICS

Edin Liđan

**TOPOLOGICAL CHARACTERISTICS
OF GENERALIZED POLYOMINO
TILINGS**

-PHD THESIS-

Podgorica, 2022.

Podaci i informacije o doktorantu

Ime i prezime: Edin Lidan

Datum i mjesto rođenja: 15.12.1986. godine, Cazin, Bosna i Hercegovina

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka:
Matematika i informatika, 2013

Podaci i informacije o mentoru

Ime i prezime: Đorđe Baralić

Titula: doktor matematičkih nauka

Zvanje: viši naučni saradnik

Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Matematički institut SANU,
Beograd, Srbija

Članovi komisije:

Dr Đorđe Baralić, viši naučni saradnik, MI SANU, Beograd, Srbija

Dr Svjetlana Terzić, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Žana Kovijanić Vukićević, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Vladimir Božović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Rade Živaljević, naučni savjetnik MI SANU, Beograd, Srbija

Datum odbrane:

6. maj 2022. godine

Podaci o doktorskoj disertaciji

Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

Naslov disertacije: Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliomina

Rezime: Ova doktorska disertacija je posvećena proučavanju poliomino popločavanja topoloških površi i njihovih osobina. Problemi poliomino popločavanja koji su do sada proučavani uglavnom u ravni su preneseni na topološke površi sa kvadratnim mrežama i razmatrane su opstrukcije za postojanje popločavanja. Specijalno je pokazano da je metod homološke grupe popločavanja koji je uveo Michael Reid primjenljiv u nekim klasama ovih problema na kvadratno prekrivenim površima.

U tezi smo definisali simplicijalne komplekse popločavanja i proučavali njihove topološke i kombinatorne karakteristike kao što su: f i h vektori, povezanost i fundamentalna grupa, homologija i Bettijevi brojevi. Ovi kompleksi su flag kompleksi, a uspostavljeni su i kriterijumi za određene klase ovih kompleksa kada su čisti, balansirani i Cohen–Macaulay kompleksi. Za neke simplicijalne komplekse popločavanja je potvrđena hipoteza da takvi kompleksi imaju homotopski tip buketa sfera, uprkos tome što nisu ni Cohen–Macaulay i time je otvoreno jedno novo područje za dalja istraživanja u topološkoj kombinatorici.

Ključne riječi: poliomino popločavanja površi, grupe homologija popločavanja, simplicijalni kompleksi popločavanja, f vektor, h vektor, čisti, flag, balansirani kompleksi, Cohen–Macaulay kompleksi, fundamentalna grupa, homologija, Bettijevi brojevi, buket sfera.

Naučna oblast: Algebarska topologija; Kombinatorika. Kombinatorna analiza;

Uža naučna oblast: Topološka kombinatorika

UDK broj: 515.14; 519.1;

Information on the PhD thesis

Course of study: Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro

Thesis title: Topological characteristics of generalized polyomino tilings

Summary: This doctoral thesis studies polyomino tilings of topological surfaces and their properties. The problems of polyomino tilings have been extensively studied in plane, so they are transferred to square tiled surfaces. Thesis considers obstructions for existence of a tiling. It is shown that the method of the homology group of tiling, introduced by Michael Reid in planar case, may be effective on surfaces as well for some class of problems.

Simplicial complexes of polyomino tilings are introduced in the thesis. Their topological and combinatorial characteristics such as: \mathbf{f} and \mathbf{h} vectors, the homology groups and the Betti numbers, the fundamental group and connectedness are studied. These complexes are flag and criterions for pure, balanced and Cohen–Macaulay property of these complexes is established for some particular class of polyomino shapes. For some complexes of tilings it is confirmed the conjecture that such complexes have the homotopy type of a wedge of spheres, despite not being a Cohen-Macaulay. The thesis opens a lot of spaces for further investigations in topological combinatorics.

Key words: polyomino tilings (surfaces), homology groups of tilings, simplicial complex of tilings, \mathbf{f} vector, \mathbf{h} vector, pure, flag, balanced complex, Cohen–Macaulay complex, the fundamental group, the homology, the Betti numbers, wedge of spheres.

Scientific field: Algebraic topology; Combinatorics. Combinatorics analysis;

Science topic: Topological combinatorics

UDC: 515.14; 519.1;

Predgovor

Jedan od tradicionalno izučavanih problema u kombinatorici je problem popločavanja. Proučavanje ovog problema seže u daleku prošlost, ali zbog svoje primjene i značaja za arhitekturu, umjetnost, kompjutersku grafiku, optimizaciju i danas je aktuelan. Općenito, izučavanje problema popločavanja je NP-težak problem. Osnovna ideja istraživanja ovog problema u disertaciji je primjena algebarske topologije na proučavanje problema popločavanja na topološkim površima.

Poliomino oblici predstavljaju interesantan alat za istraživanja, a posebno su od značaja proučavanja njihovih višedimenzionalnih analagona. Njihovi analagoni su od posebnog značaja u statističkoj fizici i za njih se koristi poseban termin – životinje rešetke (engl. *animal grids*). Ovi oblici svoju primjenu nalaze i u drugim naučnim disciplinama, tako na primjer se još koriste i kao modeli za polimere u biološkim istraživanjima, te kao objekti u istraživanju prečišćavanja ili filtera klastera u fizikalnom smislu. Proučavanje poliomino oblika u rekreativnoj matematici donijelo je velik broj neriješenih problema, kao što je na primjer problem enumeracije poliomino oblika date veličine.

Poliomini su posebna tema izučavanja i mnogih matematičara. Od posebnog su interesa u proučavanju kombinatornih problema. U kombinatornom smislu matematičarima su okupili pažnju istraživanja slobodnih, fiksnih i jednostranih n -omina ([3], [19], [34], [35], [36], [53], [54], [66]). Kasnija istraživanja su bazirana na izučavanje asimptotskog rasta broja n -omina i određivanje procjene konstante rasta (engl. *growth constante*) ([3], [7], [36], [44], [45], [55]).

Mnoštvo je problema koji se bave prekrivanjem zadanog regiona sa određenim poliomino oblicima. Golomb ([26]) je pokazao da je pitanje da li poliomino oblici iz zadanog skupa mogu prekriti ravan neodlučivo. Najviše je proučavan problem popločavanja pravougaone table pomoću poliomino oblika.

Rad koji su objavili Conway i Lagarias [18] zasigurno predstavlja jedan od najznačajnijih radova u kojem je poliomino oblicima u ravni asocirana

grupa. Njihova ideja se ogleda u tome da se svakom poliomino obliku pridruži odgovarajuća riječ, odnosno njeni konjugati koji proizvode relacije. Drugim riječima, grupa koja je određena datim skupom poliomino oblika je slobodna grupa posječena datim relacijama. Conway i Lagarias su pokazali da netrivialnost riječi asocirane sa regionom koji želimo popločati u nekoj reprezentaciji ove grupe predstavlja opstrukciju za traženo popločavanje. Takva reprezentacija grupe danas se u literaturi naziva homotopskom grupom popločavanja i predstavlja najjači metod za dokazivanje nepostojanja popločavanja.

Međutim, homotopske grupe se teško računaju i ne postoje njihovi analogoni za primjenu na više dimenzije u popločavanjima. S ciljem da olakša generalizaciju u višim dimenzijama popločavanja Reid u svom radu [68] uvodi grupu homologija popločavanja. Ova grupa u odnosu na homotopsku grupu se lakše određuje, ali predstavlja slabiju invarijantu od nje.

Radovi [18] i [68] predstavljaju početke primjene algebarske topologije i kombinatorne teorije grupa u proučavanju problema popločavanja poliomina. U literaturi su poznati neki od problema popločavanja površi [26], [27], [28], [29], a najviše je poslije problema popločavanja površi proučavano popločavanje torusa [52], [68].

U doktorskoj disertaciji uvodimo simplicijalne komplekse asocirane poliomino popločavanjima. Osobine ovih kompleksa su proučavane u skladu sa poznatim svojstvima simplicijalnih kompleksa ([13], [15], [65], [81]).

Sada ćemo izložiti strukturu i dati pregled doktorske disertacije. Disertacija je podijeljena na glave, glave na paragrafe, a neki paragrafi na potparagrafe. Paragrafe smo označili sa dva broja. Prvi broj označava glavu, a drugi broj označava redni broj paragrafa u toj glavi. Potparagraf je označen s tri broja, od kojih prva dva određuju broj paragrafa, a treći označava broj potparagrafa. Numeracije formula, teorema, lema, stavova i definicija su standardne. Doktorska disertacija se sastoji od četiri glave.

Prva glava doktorske disertacije se sastoji od četiri paragrafa i daje pregled topologije površi koji se odnosi na do sada poznate stvari o topologiji površi, a izložena je zbog potpunijeg i sveobuhvatnijeg razumijevanja izučavanja problema poliomino popločavanja površi. Prvi paragraf sadrži pregled osnovnih definicija i potparagraf u kojem smo razmatrali način nastanka novih topoloških površi tzv. povezanih suma. U drugom paragrafu smo se bazirali na istraživanje homomorfizama i dokazivanje topoloških invarijanti površi. Treći paragraf se sastoji od pet potparagrafa u kojima su razmatrane tehnike i svojstva u (re)konstrukcijama novih površi: simbol dijagrama površi, imenovanje vrhova, redukcija na samo jedan vrh, parovi stranica oblika $a-a$, parovi stranica oblika $a-a^{-1}$. U četvrtom potparagrafu dali smo definiciju i pregled osnovnih karakteristika translacijskih površi.

Vežu između grupa homologija i poliomino popločavanja dali smo u drugoj glavi doktorske disertacije. Ova glava se sastoji od tri paragrafa. U prvom paragrafu smo dali pregled do sada poznatih istraživanja i dobijenih rezultata o poliomino popločavanjima u ravni. U drugom paragrafu smo definisali problem poliomino popločavanja na površima sa pregledom do sada istraženih osobina poliomino popločavanja. Problem poliomino popločavanja koji M. Reid definiše za ravan u [68] prenosimo na proučavanje klasa problema na površima. Treći paragraf se sastoji od prikaza dokaza novih teorema o nepostojanosti poliomino popločavanja na topološkim površima. Date probleme smo razmotrili i proučavali sa aspekta topologije, algebre i kombinatorike i dali generalizacije za cijele klase proučavanih problema. Posebno su nam bili zanimljivi za istraživanje problemi na torusu. Pored torusa kreirali smo i nove orijentabilne i neorijentabilne površi na kojima smo primijenili i pokazali funkcionalnost izloženih tvrdnji i metoda.

U trećoj glavi doktorske disertacije uvodimo simplicijalne komplekse asocirane sa poliomino popločavanjima. Treća glava doktorske disertacije se sastoji od devet paragrafa u kojima smo proučavali osobine simplicijalnih kompleksa popločavanja. U prvom paragrafu treće glave dajemo kratak prikaz osnovnih pojmova vezanih sa simplicijalne komplekse koji su opće poznati. Drugi paragraf se sastoji od pojašnjenja i definicije simplicijalnog kompleksa popločavanja. Pored definicije i pojašnjenja pojmova simplicijalnog kompleksa popločavanja u drugom paragrafu dajemo i pojašnjenje uočenog flag svojstva tako definisanih simplicijalnih kompleksa.

Nadalje, u trećem paragrafu se bavimo proučavanjem f i h vektora simplicijalnih kompleksa popločavanja i dajemo opće generalizacije za računanje istih za bilo koju dimenziju simplicijalnog kompleksa koji je asociran postavljanjem datog poliomino oblika. Pored izučavanja datih vektora u potparagrafu trećeg paragrafa dajemo definiciju i teoremu za primjenu operacije spoja simplicijalnih kompleksa popločavanja te njenu primjenu na neke od simplicijalne kompleksa popločavanja.

U četvrtom paragrafu trećeg poglavlja smo se bavili istraživanjem Alexanderove dualnosti simplicijalnih kompleksa popločavanja i prikazali način primjene iste u programskom paketu Sage 9.0. Na osnovu primjene Alexanderove dualnosti u Sage programu smo uspješno testirali konkretne simplicijalne komplekse asocirane sa postavljanjem poliomino oblika na kvadratnu mrežu u ravni i kvadratnu mrežu na torusu. Koristeći se dobijenim rezultatima u petom paragrafu dajemo generalne dokaze osobine čistih kompleksa koji su asocirani postavljanjem nekih konkretnih poliomino oblika.

Šesti paragraf se sastoji od analize i istraživanja balansiranih simplicijalnih kompleksa. Za simplicijalne komplekse popločavanja koji su asocirani postavljanjem I-omina smo dokazali tvrdnje na kvadratnoj mreži u ravni i

na torusu kada su oni balansirani, a kada nisu.

Zatim smo se bavili računanjem grupa homologija i Bettijevih brojeva datih simplicijalnih kompleksa popločavanja te smo dobijene rezultate za neke konkretne komplekse dali u osmom paragrafu.

U osmom paragrafu treće glave smo proučavali Cohen–Macualay svojstvo simplicijalnih kompleksa popločavanja i dali generalne tvrdnje za neke od simplicijalnih kompleksa za koje n su Cohen–Macualay, a za koje nisu.

Nadalje, u četvrtoj glavi doktorske disertacije smo se bavili izučavanjem fundamentalnih grupa datih simplicijalnih kompleksa popločavanja, a dobijene rezultate smo predstavili u prvom paragrafu. Dali smo dokaz generalne tvrdnje da je fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa koji su asocirani postavljanjem nekog poliomino oblika trivijalna.

Četvrta glava doktorske disertacije nudi poveznicu i u istraživanju poliomino popločavanja i njihovih homotopskih tipova. Za neke konkretne simplicijalne komplekse popločavanja dat je pregled njihove povezanosti i homotopskog tipa. U rezultatima prikazanim u ovoj glavi daje se gneralizacija rezultata do kojih je došao Kozlov.

Sadržaji koji su proučavani i predstavljeni u doktorskoj disertaciji čine jednu koherentnu cjelinu. Dio rezultata dat u doktorskoj disertaciji je publikovan u časopisu sa SCI liste u skladu sa Pravilima doktorskih studija Univerziteta Crne Gore:

- E. Liđan, Đ Baralić, *Homology of polyomino tilings on flat surfaces*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2021.
DOI: <https://doi.org/10.2298/AADM210307031L>
<https://arxiv.org/abs/2103.04404>

Dio dobijenih rezultata je prezentovan na:

- Research school on Aperiodicity and Hierarchical structures in tilings, Lyon (Francuska)
- Seminaru za topologiju kombinatornih prostora, Annual meeting, MI SANU, Beograd (Srbija)
- 2nd Croatian Combinatorial Days, Zagreb (Hrvatska)
- Znanstveni seminar: Seminar za kombinatoriku i diskretnu matematiku, Prirodno–matematički fakultet, Zagreb (Hrvatska)
- Heidelberg laureate forum, Heidelberg (Njemačka)
- Studentski seminar, MI SANU, Beograd (Srbija)

Na kraju se želim zahvaliti profesoru Đorđu Baraliću na savjetima, sugestijama, postavljenim zadacima i nesebičnoj pomoći koju je pružio tokom pisanja doktorske disertacije.

Izvod iz teze

Matematika, arhitektura, umjetnost, kompjuterska grafika, optimizacija i druge naučne discipline nude mnoštvo problema koji se svode na rješavanje problema popločavanja. Ovaj problem se uglavnom proučava u ravni i kao takav predstavlja NP-težak problem. U ovoj doktorskoj disertaciji se proučava problem popločavanja topoloških površi polimino oblicima, te se daju rješenja za neke klase proučavanih problema.

Conway i Lagarias su dali novu tehniku koja koristi metod granične invarijante za utvrđivanje postojanosti popločavanja. Njihove rezultate je proširio u svom istraživanju M. Reid. On je dao najuspješniji metod za proučavanje problema popločavanja u ravni radeći sa grupama homotopija. On je pored grupa homotopija uveo grupe homologija popločavanja.

U ovoj tezi proširujemo Reidova razmatranja i na izučavanje popločavanja topoloških površi poliminima radeći sa grupama homologija popločavanja i dajemo dokaze (ne)postojanosti polimino popločavanja za cijele klase razmatranih problema.

Pored razmatranja popločavanja topoloških površi u doktorskoj disertaciji uvodimo simplicijalne komplekse koji su asocirani postavljanjem polimino oblika na kvadratnu tablu ili kvadratnu mrežu na topološkoj površi. Takve simplicijalne komplekse smo nazvali simplicijalnim kompleksima popločavanja. Za uvedene komplekse smo dali razmatranja izučavanja njihovih osobina (flag, čisti, balansirani, Cohen–Macaulay, homologija, Bettijevi brojevi, fundamentalna grupa) i razmatranja određivanja za njih specifičnih vektora (\mathbf{f} i \mathbf{h} vektora).

U četvrtoj glavi doktorske teze smo se bavili izučavanjem povezanosti i homotopskih tipova simplicijalnih kompleksa popločavanja. Određen je homotopski tip za neke od simplicijalnih kompleksa popločavanja i za njih potvrđena hipoteza da su tako definisani simplicijalni kompleksi homotopni buketu sfera.

Abstract

Mathematics, architecture, art, computer graphics, optimization, and other scientific disciplines offer a multitude of problems that come down to solving problems of tilings. This problem is mostly studied in the plane and as such represents an NP-hard problem. This doctoral dissertation studies the problem of tilings on the topological surfaces with polyomino shapes, and solutions for some classes of studied problems are given.

Conway and Lagarias have provided a new technique that uses the boundary invariant method to determine the consistency of tilings. M. Reid expanded their results in his research. He gave the most successful method for studying the problem of surface tilings by working with the homotopy groups of tilings. In addition to the homotopy groups, he introduced the homology groups of tilings.

In this thesis, we extend Reid's considerations to the study of tilings of topological surfaces with polyominoes by working with the homology groups of tilings and give evidence of (in)consistency of polyomino tilings for certain classes of considered problems.

In addition to considering the problem of tilings on the topological surfaces in the doctoral dissertation, we introduce simplicial complexes that are associated with the placement of polyomino shapes on a square grid on a topological surface. We have named such simplicial complexes simplicial complexes of tilings. For the introduced simplicial complexes, we studied their properties (flag, pure, balanced, Cohen–Macaulay, homology, Betti numbers, fundamental group) and calculated their specific vectors (\mathbf{f} and \mathbf{h} vectors). In the fourth chapter of the doctoral dissertation, we also studied the connectedness of homotopic types of simplicial complexes of tilings. The homotopy type of some of the simplicial complexes of tilings was determined, and we confirmed the hypothesis that the simplicial complexes of polyomino tilings have the homotopy type of a wedge of spheres. Particularly, a generalization of the results obtained by Kozlov was given.

Slike

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Lijepljenje torusa u povezanu sumu $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ | 20 |
| 1.2 | Primjer orijentabilne površi roda g | 21 |
| 1.3 | Primjer neorijentabilne površi | 21 |
| 1.4 | Torus u \mathbb{R}^3 | 23 |
| 1.5 | Model \mathbb{T}^2 u \mathbb{R}^2 | 23 |
| 1.6 | Projektivna ravan | 23 |
| 1.7 | Model \mathbb{RP}^2 u \mathbb{R}^2 | 23 |
| 1.8 | Imerzija Kleinove boce u \mathbb{R}^3 | 23 |
| 1.9 | Model \mathbb{K}^2 u \mathbb{R}^2 | 23 |
| 1.10 | Möbiusova traka u \mathbb{R}^3 | 24 |
| 1.11 | Model \mathbb{MB}^2 u \mathbb{R}^2 | 24 |
| 1.12 | Simbol dijagrama poligona $abd^{-1}bda^{-1}$ | 24 |
| 1.13 | Model u ravni torusa sa dvije rupe | 24 |
| 1.14 | Identifikovanje vrhova A u poligonalnom modelu površi | 25 |
| 1.15 | Identifikovanje klasa vrhova B i C u poligonalnom modelu površi | 25 |
| 1.16 | Redukcija na samo jedno pojavljivanje vrha B u modelu | 26 |
| 1.17 | Eliminacija vrha B | 26 |
| 1.18 | Parovi stanica oblika $a-a^{-1}$ | 26 |
| 1.19 | Torus \mathbb{T}_1^2 : $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ | 27 |
| 1.20 | Torus \mathbb{T}_2^2 : $a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ | 27 |
| 1.21 | Shematski prikaz transformacije prvog torusa \mathbb{T}_1^2 | 27 |
| 1.22 | Shematski prikaz transformacije drugog torusa \mathbb{T}_2^2 | 28 |
| 1.23 | Shematski prikaz lijepljenja torusa $\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2^2$ | 28 |
| 1.24 | Prikaz transformacije lijepljenja torusa roda k i torusa \mathbb{T}_1^2 | 28 |
| 1.25 | Shematski prikaz lijepljenja torusa roda k i torusa \mathbb{T}^2 | 29 |
| 1.26 | Projektivna ravan \mathbb{RP}^2 | 29 |
| 1.27 | Shematski prikaz transformacije prve projektivne ravni \mathbb{RP}^2 | 29 |
| 1.28 | Shematski prikaz transformacije druge projektivne ravni \mathbb{RP}^2 | 30 |
| 1.29 | Poligon dobijen lijepljenjem $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ | 30 |
| 1.30 | Poligon dobijen lijepljenjem g povezanih projektivnih ravni | 30 |
| 1.31 | \mathbb{K}^2 | 31 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.32 | $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ | 31 |
| 1.33 | Torus \mathbb{T}^2 | 31 |
| 1.34 | Projektivna ravan \mathbb{RP}^2 | 31 |
| 1.35 | Mjesto lijepljenja na \mathbb{T}^2 | 31 |
| 1.36 | Mjesto lijepljenja na \mathbb{RP}^2 | 31 |
| 1.37 | Kreiranje granice na \mathbb{T}^2 | 31 |
| 1.38 | Kreiranje granice na \mathbb{RP}^2 | 31 |
| 1.39 | Lijepljenje \mathbb{T}^2 i \mathbb{RP}^2 | 32 |
| 1.40 | $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$ | 32 |
| 1.41 | „Rezanje” i novo lijepljenje | 32 |
| 1.42 | Lijepljenje po stranici b | 32 |
| 1.43 | $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ | 32 |
| 1.44 | „Rezanje” po stranici f | 32 |
| 1.45 | Lijepljenje po c | 32 |
| 1.46 | „Rezanje” po stranici g | 32 |
| 1.47 | Lijepljenje po d | 33 |
| 1.48 | $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ | 33 |
| 1.49 | $\mathbb{RP}^2 - a$ | 33 |
| 1.50 | $\mathbb{RP}^2 - f$ | 33 |
| 1.51 | $\mathbb{RP}^2 - g$ | 33 |
| 1.52 | Primjer translacijske površi | 34 |
| 2.1 | Monomino, domino i tromino oblici | 37 |
| 2.2 | Tetromino oblici | 37 |
| 2.3 | Pentomino oblici | 37 |
| 2.4 | Kvadratna mreža na torusu i Kleinovoj boci | 40 |
| 2.5 | Kvadratna torusna mreža dimenzije 3×9 | 44 |
| 2.6 | Kvadratna torusna mreža dimenzije $3 \times (2k + 1)$ | 44 |
| 2.7 | Popločavanje kvadratne torusne mreže 5×5 sa L -pentaminom | 45 |
| 2.8 | Kvadratna torusna mreža dimenzije 5×5 | 45 |
| 2.9 | Fiksirano postavljanje T -pentamina na torusnu mrežu | 47 |
| 2.10 | Slučaj 1 | 48 |
| 2.11 | Slučaj 2 | 48 |
| 2.12 | Slučaj 3 | 48 |
| 2.13 | Slučaj 4 | 48 |
| 2.14 | Mogućnost postavljanja T -pentamina da prekrije ćeliju $a_{5,1}$ u Slučaju 1 | 49 |
| 2.15 | Mogućnost postavljanja T -pentamina da prekrije ćeliju $\bar{a}_{5,1}$ u Slučaju 2 | 49 |
| 2.16 | Postavljanja T -pentamina da prekrije polje $a_{5,1}$ u Slučaju 3 | 50 |
| 2.17 | Torusna mreža dimenzije $(4m + 2) \times (4n + 2)$ | 51 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.18 | Bojanje ekvivalentnih ćelija torusne mreže | 52 |
| 2.19 | Bojanje ekvivalentnih ćelija torusne mreže | 54 |
| 2.20 | X heksomino | 54 |
| 2.21 | Bojanje ekvivalentnih ćelija date kvadratne torusne mreže . . | 55 |
| 2.22 | Torusni model mreže sa jednim uklonjenim poljem | 57 |
| 2.23 | Imenovanje ćelija na torusnoj mreži 9×5 | 57 |
| 2.24 | Postavljanje kvadrata 2×2 na torusnu mrežu 9×5 | 57 |
| 2.25 | Postavljanje krsta na torusnu mrežu 9×5 - slučaj 1 | 58 |
| 2.26 | Postavljanje krsta na torusnu mrežu 9×5 - slučaj 2 | 58 |
| 2.27 | Ekvivalencija ćelija $a_{1,1}$ i ćelije $a_{4,4}$ | 58 |
| 2.28 | Ekvivalencija ćelija i bojanje kvadratne torusne mreže 9×5 . | 59 |
| 2.29 | Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 6 s granicom | 60 |
| 2.30 | Bojanje ekvivalentnih ćelija u kvadratnoj mreži na neorijenta- bilnoj površi roda 6 sa granicom | 61 |
| 2.31 | Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 4 sa tri granične komponente | 63 |
| 2.32 | Ekvivalencija ćelija i bojanje kvadratne torusne mreže na neorijentabilnoj površi roda 4 sa granicom | 64 |
| 2.33 | Kvadratna mreža na orijentabilnoj površi roda 3 sa granicom . | 65 |
| 2.34 | Bojanje ekvivalentnih ćelija u kvadratnoj mreži na orijentabil- noj površi roda 3 sa granicom | 66 |
| 2.35 | Kvadratna mreža na orijentabilnoj površi roda $2k-1$ sa granicom | 67 |
| 3.1 | Primjeri simpleksa | 70 |
| 3.2 | Geometrijska interpretacija simplicijalnog kompleksa koji na- staje postavljanjem domine na tablu 2×3 | 72 |
| 3.3 | Postavljanje I_m poliomina da ne siječe stranicu lijepljenja . . . | 76 |
| 3.4 | Postavljanje poliomina $1 \times m$ da siječe stranicu lijepljenja . . | 77 |
| 3.5 | Postavljanje domina u 1. stupac | 78 |
| 3.6 | Postavljanje domina u 2. stupac | 78 |
| 3.7 | Postavljanja domina horizontalno | 78 |
| 3.8 | L-tromino u orijentaciji 1 | 81 |
| 3.9 | L-tromino u orijentaciji 2 | 81 |
| 3.10 | L-tromino u orijentaciji 3 | 81 |
| 3.11 | L-tromino u orijentaciji 4 | 81 |
| 3.12 | Moguća postavljanja domine na tablu 3×3 | 87 |
| 3.13 | Moguća postavljanja domine na torusnu kvadratnu mrežu 3×3 | 88 |
| 3.14 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ dimenzije $n-1$ za $n = 2k+1$, $k \geq 3$ i dimenzije $\frac{n}{2}$ za $n = 2k$, $k \geq 3$ | 91 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.15 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ dimenzije $n - 5$ | 91 |
| 3.16 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$ | 92 |
| 3.17 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$ | 92 |
| 3.18 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,6})$ dimenzije 2 | 92 |
| 3.19 | Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,6})$ dimenzije 1 | 92 |
| 3.20 | Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n oba neparna | 94 |
| 3.21 | Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n oba neparna | 94 |
| 3.22 | Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n različite parnosti | 94 |
| 3.23 | Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n različite parnosti | 94 |
| 3.24 | Maksimalni simpleks od $K_{I_3}(D_{m,n})$ za $m = 3k$, $k \geq 1$, $n \geq 4$ | 95 |
| 3.25 | Maksimalni simpleks od $K_{I_3}(D_{m,n})$ | 95 |
| 3.26 | Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$ | 97 |
| 3.27 | Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$ | 98 |
| 3.28 | Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$ | 99 |
| 3.29 | Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$ | 100 |
| 3.30 | $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})}\sigma \cong D_{1,6}$ u slučaju kada je n paran | 108 |
| 3.31 | $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})}\sigma \cong D_{1,7}$ u slučaju kada je n neparan | 109 |
| 3.32 | $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong D_{2,3}$ | 109 |
| 3.33 | $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong D_{3,3}$ | 109 |

Tabele

| | | |
|------|---|-----|
| 2.1 | Tabela sa brojem fiksnih, jednostranih i slobodnih n -omina za $n \leq 24$ | 38 |
| 3.1 | Pregled \mathbf{f} -vektora simplicijanlog kompleksa $K_{I_2}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 77 |
| 3.2 | Pregled \mathbf{f} -vektora simplicijanlog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 80 |
| 3.3 | Pregled \mathbf{f} -vektora simplicijanlog kompleksa $K_{L_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 83 |
| 3.4 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 103 |
| 3.5 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 103 |
| 3.6 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 103 |
| 3.7 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 104 |
| 3.8 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 104 |
| 3.9 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(L_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 104 |
| 3.10 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 105 |
| 3.11 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 105 |
| 3.12 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(L_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 105 |
| 3.13 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 106 |
| 3.14 | Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{L_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n | 106 |

Sadržaj

| | |
|---|-----------|
| Predgovor | 4 |
| Izvod iz teze | 9 |
| Abstract | 10 |
| 1 Topologija površi | 18 |
| 1.1 Površi | 19 |
| 1.1.1 Konstrukcije novih površi (Povezane sume) | 19 |
| 1.2 Topološke invarijante površi | 20 |
| 1.3 Rad s poligonima kao modelima površi. Svojstva i tehnike u (re)konstrukcijama površi | 23 |
| 1.3.1 Simbol dijagrama površi | 24 |
| 1.3.2 Imenovanje vrhova | 24 |
| 1.3.3 Redukcija na samo jedan vrh | 25 |
| 1.3.4 Parovi stranica $a-a$ | 26 |
| 1.3.5 Parovi stranica $a-a^{-1}$ | 26 |
| 1.4 Translacijske površi | 34 |
| 2 Grupe homologija poliomino popločavanja površi | 36 |
| 2.1 Problem poliomino popločavanja | 36 |
| 2.2 Problem popločavanja površi | 40 |
| 2.3 Nepostojanje poliomino popločavanja na topološkim površima | 50 |
| 3 Simplicijalni kompleksi popločavanja | 69 |
| 3.1 Simplicijalni kompleksi | 69 |
| 3.2 Simplicijalni kompleksi asocirani poliomino popločavanjima . . | 71 |
| 3.3 f , g i h vektori simplicijalnih kompleksa popločavanja | 73 |
| 3.3.1 Spoj simplicijalnih kompleksa popločavanja | 83 |
| 3.4 Alexanderova dualnost simplicijalnih kompleksa popločavanja | 86 |
| 3.5 Čisti simplicijalni kompleksi popločavanja | 90 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.6 | Balansirani simplicijalni kompleksi popločavanja | 96 |
| 3.7 | Homologija simplicijalnih kompleksa asociranih popločavanjem | 101 |
| 3.8 | Cohen-Macaulay svojstvo simplicijalnih kompleksa polimino popločavanja | 106 |
| 4 | Homotopski tip simplicijalnih kompleksa popločavanja | 115 |
| 4.1 | Fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa popločavanja . | 117 |
| 4.2 | Povezanost simplicijalnih kompleksa popločavanja | 120 |
| 4.3 | Homotopski tip simplicijalnih kompleksa popločavanja | 122 |
| | Literatura | 126 |
| | Biografija | 134 |

Glava 1

Topologija površi

Topologija se kao naučna oblast smatra relativno mladom matematičkom disciplinom u odnosu na ostale jer je zasnovana u XIX vijeku. Pošto je kao matematička disciplina postala prisutna kako u matematici tako i u drugim naukama doživljava ubrzan razvoj. U današnje vrijeme se mnogi aktuelni problemi posmatraju sa aspekta topologije. Motivaciju pronalazimo u tome da nam u proučavanju problema nisu bitne metričke osobine prostora ili objekata, već znanje o njegovim topološkim karakteristikama kao što su na primjer povezanost, oblik, rod i homologija. Kao naučna grana matematike, topologija pokušava da prepozna i klasifikuje topološke prostore. U ovom poglavlju dat ćemo pregled osnovnih (topoloških) osobina površi. Osnovna literatura korištena za pisanje ovog poglavlja je [46], [48], [50], [81] i [84].

Definicija 1.0.1 *Neka je X neprazan skup i \mathcal{T} familija podskupova od X . X je topologija na X ako vrijedi*

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- presjek konačno elemenata iz \mathcal{T} je element iz \mathcal{T} ,
- unija elemenata iz \mathcal{T} je element iz \mathcal{T} .

Ureden par (X, \mathcal{T}) naziva se topološki prostor. Elementi topologije $\mathcal{T} \in X$ se nazivaju otvoreni skupovi.

Primjer. Neka je $\tau = 2^X$, tj. razmotrimo svaki podskup u X kao otvoreni skup, drugim riječima prethodna izjava je ekvivalentna sa tvrdnjom da je svaka tačka $x \in X$ otvoreni skup. Topologija definisana na ovakav način naziva se diskretna topologija.

Definicija 1.0.2 Neka je (X, \mathcal{T}) topološki prostor, i tačka $p \in (X, \mathcal{T})$. Okolina tačke p je skup V koji sadrži otvoren skup U koji sadrži p , tj. $p \in U \subseteq V$.

Napomenimo da skup V može biti otvoren i zatvoren.

Definicija 1.0.3 Neka su (X, \mathcal{U}) i (X, \mathcal{V}) topološki prostori, a $D \subseteq X$. Za preslikavanje $f : D \rightarrow Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in D$ ako za svaku otvorenu okolinu V tačke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U tačke x_0 u X takva da je $f(U \cap V) \subseteq V$. U suprotnom kažemo da je preslikavanje f prekidno ili diskontinuirano u tački $x_0 \in D$. Preslikavanje $f : D \rightarrow Y$ je neprekidno na skupu $A \subseteq D$ ako je f neprekidno u svakoj tački skupa A . Preslikavanje f je neprekidno ako je neprekidno na D .

Definicija 1.0.4 Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ naziva se homeomorfno preslikavanje (homeomorfizam) ako je ono bijekcija i uzajamno neprekidno, tj. f i f^{-1} su neprekidna.

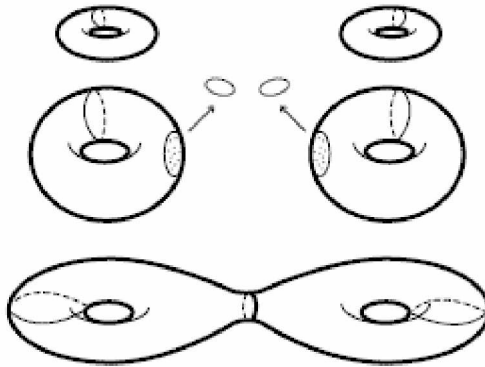
1.1 Površ

Topološka površ (engl. *surface*) ili 2–dimenzionalna topološka mnogostrukost (engl. *2–manifold*) predstavlja topološki prostor S u kojem svaka tačka $s \in S$ ima okolinu homeomorfnu sa \mathbb{R}^2 , za više vidjeti [17] i [46]. U nastavku ćemo dati pregled osnovnih osobina površi, njihove klasifikacije i načina konstrukcija novih površi.

1.1.1 Konstrukcije novih površi (Povezane sume)

Povezana suma ($\#$) je operacija za konstrukciju novih površi od datih površi M i N . Uklonimo li po jedan otvoreni disk D^2 , na svakoj od datih površi M i N , lijepeći homeomorfizmom tako nastale površi na mjestima gdje smo uklonili otvoreni disk D^2 dobijamo novu površ $M \# N$. Na primjer neka su nam data dva torusa \mathbb{T}^2 . Njihovom povezanom sumom dobijamo torus roda 2 ili torus sa dvije rupe (Slika 1.1). Pod lijepljenjem orijentabilnih površi podrazumijevamo homeomorfizam između dvije kružnice koji mijenja orijentaciju kako bi rezultat bio orijentabilna topološka površ.

Napomenimo, da je u općem slučaju proizvoljan odabir diska koji uklanjamo i homeomorfizama koje lijepimo.



Slika 1.1: Lijepljenje torusa u povezanu sumu $T^2 \# T^2$

Koristeći povezanu sumu možemo od nekoliko površi dobiti nove. Tako na primjer, povežemo li sferu S^2 i projektivnu ravan \mathbb{RP}^2 ponovo ćemo dobiti projektivnu ravan, a povezana suma dvije projektivne ravni daje Kleinovu bocu \mathbb{K}^2 . Dokaze ovih tvrdnji dat ćemo u nastavku.

1.2 Topološke invarijante površi

Osnovne osobine koje topološki karakterišu neku površ su dimenzija (engl. *dimension*), granica (engl. *boundary*), orijentacija (engl. *orientability*) i njen rod (engl. *genus*). Pojmovi dimenzije i granice su nam intuitivno jasni. Površ može, ali i ne mora da ima svoju granicu. Ako površ ima granicu, ona se sastoji od konačno mnogo razdvojenih kružnica S^1 . Kompaktne površi bez granice nazivamo zatvorenim. One su topološki određene orijentabilnošću i rodom površi.

Orijentacija predstavlja jedno od važnijih svojstava za neke topološke prostore, kao što su na primjer realni vektorski prostori, euklidski prostori, topološke površi i topološke mnogostrukosti. Općenito možemo reći da je topološki prostor orijentabilan ako u njemu nije moguće kretanje objekata u „smjeru kazaljke na satu” i „suprotnom smjeru od kazaljke na satu” tako da objekti kretnje ne mogu nikada doći u zrcalni položaj pozicija u kojima su se nalazili. Takvi su na primjer realni vektorski prostori, euklidski prostori i sfere. Ukoliko postoji mogućnost kretanja objekta u topološkom prostoru tako da se objekat može vratiti u bilo koji svoj zrcalni položaj u kojem se nalazio, za takav topološki prostor kažemo da je neorijentabilan.

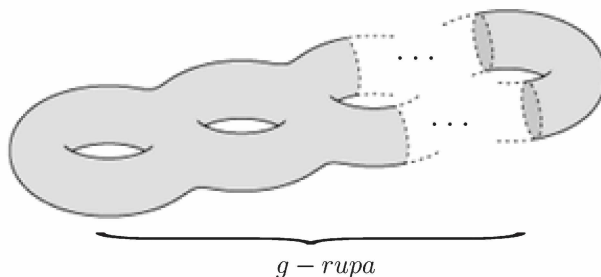
Definicija 1.2.1 *Zatvorena i povezana topološka površ je orijentabilna ako se smjer ne mijenja nakon jednog obilaska površi po bilo kojem putu. Površ*

je neorijentabilna ako nije orijentabilna.

Orijentabilnost odnosno neorijentabilnost je jedno od važnijih svojstava površi. Njemački matematičar i astronom August Ferdinand Möbius je 1858. godine pokazao da postoji topološka površ po kojoj bismo mogli pustiti vektor normale da se kreće od bilo koje tačke do bilo koje druge na toj površi, ali da nikada ne pređe preko granice površi. Postoji velik broj ekvivalentnih definicija za (ne)orijentabilnost površi. Jedna od opće prihvaćenih je i definicija kojom se kaže da je površ orijentabilna ako ne sadrži Möbiusovu traku, a u suprotnom je neorijentabilna.

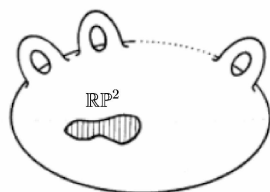
Na osnovu ovog svojstva površi možemo podijeliti na orijentabilne (npr. sfera, ravan, torus) i neorijentabilne (npr. Möbiusova traka, Kleinova boca, projektivna ravan).

Rod orijentabilne topološke površi je cijeli broj koji predstavlja maksimalan broj rezanja duž zatvorenih linija (diskova) koje se ne sijeku, a da preostali dio površi ostane povezan. On je jednak broju ručki ili rupa na toj površi. Na primjer, orijentabilna površ roda g je g -torus (Slika 1.2). g -torus ili torus sa g -ručki je površ dobijena lijepljenjem g torusa u povezanu sumu, na način opisan u prethodnom odjeljku (vidjeti Sliku 1.1).



Slika 1.2: Primjer orijentabilne površi roda g

Rod neorijentabilne povezano i zatvorene topološke površi ili Eulerov rod je pozitivan cijeli broj koji odgovara broju kapa (engl. *cross-caps*) pričvršćenih na sferu.



Slika 1.3: Primjer neorijentabilne površi

Pored prethodno navedenog možemo reći da je topologija nauka koja se bavi izučavanjem neprekidnosti i onim svojstvima neke strukture koja ostaju nepromijenjena (invarijantna) pri njenim neprekidnim transformacijama. Neke od topoloških invarijanti površi su (ne)orijentabilnost, rod i Eulerova karakteristika površi, za više vidjeti [16], [17] i [24].

Neka nam je data površ M . Svaka površ dozvoljava dekompoziciju na konačan broj poligona čije su unutrašnjosti disjunktne i takve da je ivica svakog poligona zalijepljena za najviše jednu ivicu nekog drugog poligona. Ukupan broj vrhova (tjemena) ovih poligona nazivamo skupom vrhova (tjemena) i označavamo sa V . Ivice poligona nazivamo stranicama. Sve stranice čine skup stranica, a označavamo ga sa E . Poligone nazivamo stranama ili licima. Sve strane ili lica čine skup strana u oznaci F . Tada je Eulerova karakteristika data sa

$$\chi(M) = |V| - |E| + |F|.$$

Lema 1.2.1 *Orijentabilna površ roda g ima Eulerovu karakteristiku $2 - 2g$, a neorijentabilna površ roda g ima Eulerovu karakteristiku $2 - g$.*

Za datu površ Eulerova karakteristika i orijentabilnost opisuju njenu topologiju. Eulerova karakteristika za orijentabilne površi roda g je

$$\chi(M) = 2 - 2g - h,$$

a za neorijentabilne površi roda g

$$\chi(M) = 2 - g - k,$$

gdje h i k respektivno predstavljaju broj graničnih komponenti orijentabilne odnosno neorijentabilne površi. Eulerova karakteristika povezane sume $(M \# N)$ površi M i N je data sa

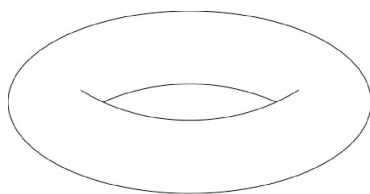
$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2.$$

O Eulerovoj karakteristici površi više se može pronaći u [17], [46], [50] i [74].

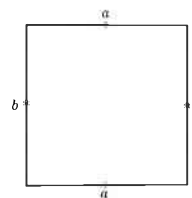
1.3 Rad s poligonima kao modelima površi. Svojstva i tehnike u (re)konstrukcijama površi

Svaku površ možemo predstaviti pomoću njenog modela u ravni sa nekim identifikovanim stranicama poligona, vidjeti [46], [48], [81] i [84]. Na primjer:

- **Torus** (\mathbb{T}^2) (za više vidjeti [50], [81], i [84])

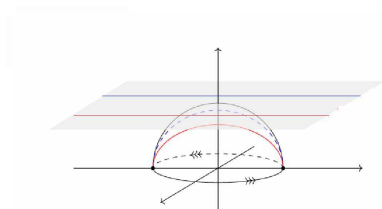


Slika 1.4: Torus u \mathbb{R}^3

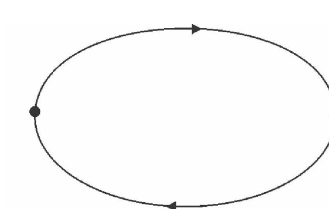


Slika 1.5: Model \mathbb{T}^2 u \mathbb{R}^2

- **Projektivna ravan** (\mathbb{RP}^2) (za više vidjeti [50], [81], i [84])

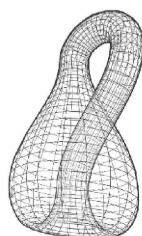


Slika 1.6: Projektivna ravan

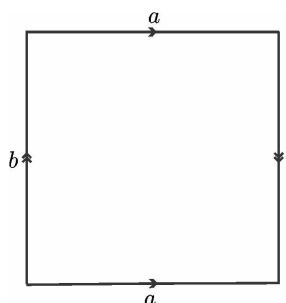


Slika 1.7: Model \mathbb{RP}^2 u \mathbb{R}^2

- **Kleinova boca** (\mathbb{K}^2) (za više vidjeti [50], [81], i [84])



Slika 1.8: Imerzija Kleinove boce u \mathbb{R}^3



Slika 1.9: Model \mathbb{K}^2 u \mathbb{R}^2

- **Möbiusova traka** (\mathbb{MB}^2) (za više vidjeti [50], [81], i [84])



Slika 1.10: Möbiusova traka u \mathbb{R}^3

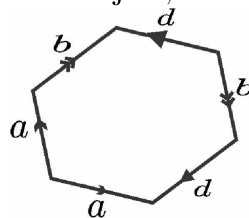


Slika 1.11: Model \mathbb{MB}^2 u \mathbb{R}^2

1.3.1 Simbol dijagrama površi

Pretpostavimo da smo površ prikazali u njenom modelu u ravni, tj. u obliku poligona. Stranice poligona označimo sa a, b, c, \dots . Čitajući u smjeru kazaljke na satu duž granice dobijamo simbol dijagrama, za više vidjeti [48]. Simbol može biti zamijenjen cikličnom permutacijom, bez mijenjanja relativnog poretka stranica poligona.

Tako na primjer posmatramo li Sliku 1.12 čitajući u smjeru kazaljke na satu dobit ćemo da je simbol dijagrama prikazanog poligona $abd^{-1}bda^{-1}$. Dijagram poligona može cikličkom permutacijom biti zamijenjen sa $d^{-1}bda^{-1}ab$.

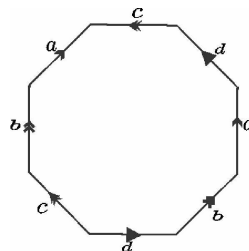


Slika 1.12: Simbol dijagrama poligona $abd^{-1}bda^{-1}$

1.3.2 Imenovanje vrhova

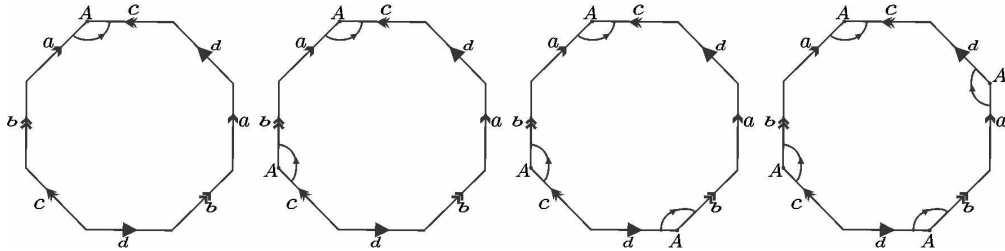
Svaku površ možemo podijeliti na konačan broj poligona. Neka nam je data površ i posmatrajmo proizvoljnu tačku na njoj. Na primjer, neka nam je dat torus roda 2 prikazan u svom modelu u ravni kao na Slici 1.13. Na datom torusu odaberimo proizvoljnu tačku A .

Tačka A na datoj površi može biti spojnica velikog broja poligona (njihovih stranica). Cilj nam je odrediti koje su to stranice. Tačka (vrh ili tjeme) A je zapravo predstavljena brojem stranica koje se u njoj spajaju. Obilazimo oko tačke A da „pokupimo” sve njene susjede dok se ne vratimo u polaznu tačku.



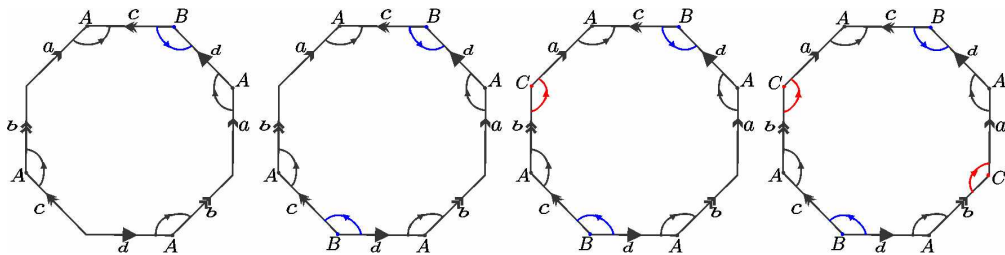
Slika 1.13: Model u ravni torusa sa dvije rupe

Cilj nam je da imenujemo i grupišemo sve vrhove. Neka je spoj stranica a i c vrh A .



Slika 1.14: Identifikovanje vrhova A u poligonalnom modelu površi

Identifikujmo sada klasu vrhova B i C .



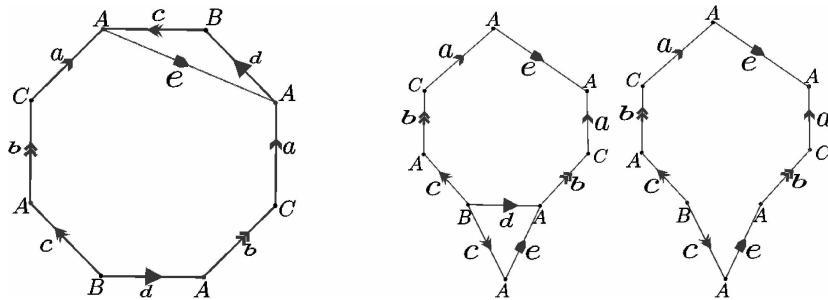
Slika 1.15: Identifikovanje klasa vrhova B i C u poligonalnom modelu površi

1.3.3 Redukcija na samo jedan vrh

Pod poligonalnim modelom površi smatramo poligon čije su neke stranice i vrhovi identifikovani tako da je okolina svake tačke homeomorfna disku. Površni mogu nastati na različite načine identifikacijom stranica poligona, a dva poligona sa propisanim identifikacijama smatramo ekvivalentnim ako datim identifikacijama nastaju iste površi. Ovu definiciju zapravo možemo proširiti na očigledan način i za 2-dimenzionalne površi sa granicom.

Teorema 1.3.1 *Svaki poligon može biti uvijek zamijenjen ekvivalentnim poligonom u kojem je svaki vrh zalijepljen u istu tačku.*

Dokaz Teoreme 1.3.1 može se pronaći u [48]. Posmatrajmo prethodni primjer i izvršimo redukciju na samo jedno pojavljivanje vrha B u poligonalnom modelu.



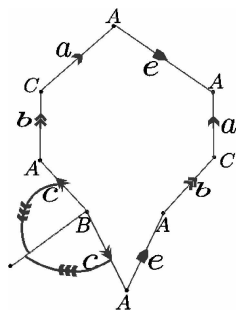
Slika 1.16: Redukcija na samo jedno pojavljivanje vrha B u modelu

1.3.4 Parovi stranica $a-a$

Za dokaz sljedeće teoreme vidjeti [48].

Teorema 1.3.2 *Uvijek možemo reducirati simbol nizova oblikom u kojem svi parovi stranica $a-a$ se pojavljuju jedan za drugim.*

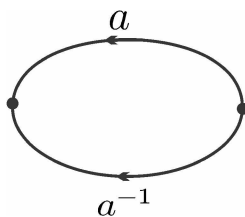
Ovim načinom pojedine vrhove možemo u potpunosti eliminisati.



Slika 1.17: Eliminacija vrha B

1.3.5 Parovi stranica $a-a^{-1}$

Sve parove oblika $a-a^{-1}$ možemo zalijepiti, ako imamo samo dvije stranice. Tada poligon izgleda kao na Slici 1.18.

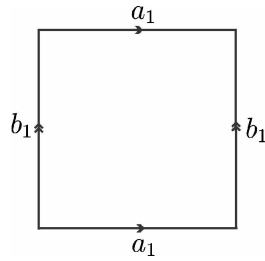


Slika 1.18: Parovi stranica oblika $a-a^{-1}$

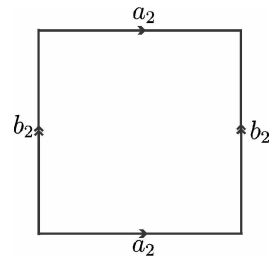
Tada stranice možemo zalijepiti i dobijamo sferu \mathbb{S}^2 . Ako nemamo situaciju da su dvije stranice u istom vrhu kao gore, možemo naći stranice u poligonu koje su iste, ali odvojene. Primjenom gore navedenih tehnika možemo ih svesti na željeni oblik. Dajemo dokaz sljedeće Teoreme slično kao u [48].

Teorema 1.3.3 *Torus sa k -rupa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ može biti predstavljen kao poligon sa $4g$ strana i simbolom $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$.*

Dokaz: Posmatrajmo dva torusa (\mathbb{T}^2) koja trebamo zalijepiti (spojiti) u jednu figuru (objekat). Poznato nam je da ta dva data torusa \mathbb{T}^2 možemo predstaviti u torusnom modelu u ravni kao na Slici 1.19 i Slici 1.20.

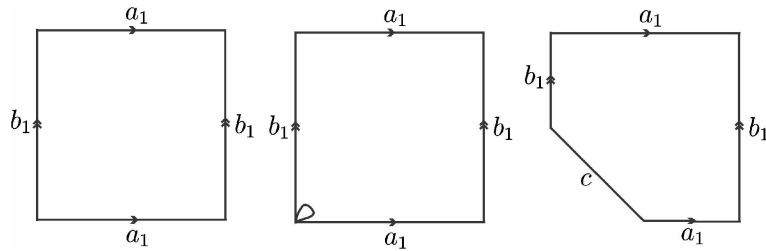


Slika 1.19: Torus \mathbb{T}_1^2 : $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$

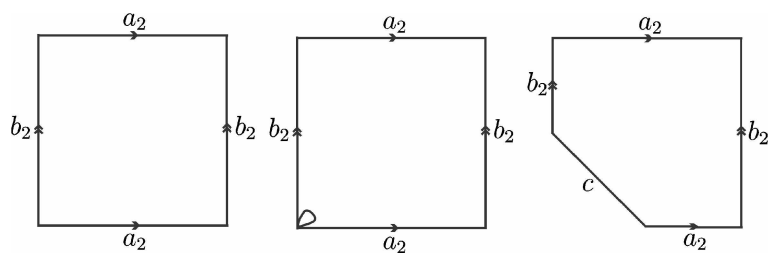


Slika 1.20: Torus \mathbb{T}_2^2 : $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

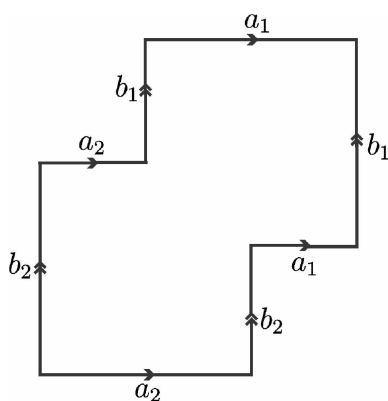
Date toruse ćemo transformisati na način koji je prikazan na Slici 1.21 i Slici 1.22, a lijepljenje datih torusa ćemo izvršiti po stranici c , kao što je prikazano na Slici 1.23.



Slika 1.21: Shematski prikaz transformacije prvog torusa \mathbb{T}_1^2

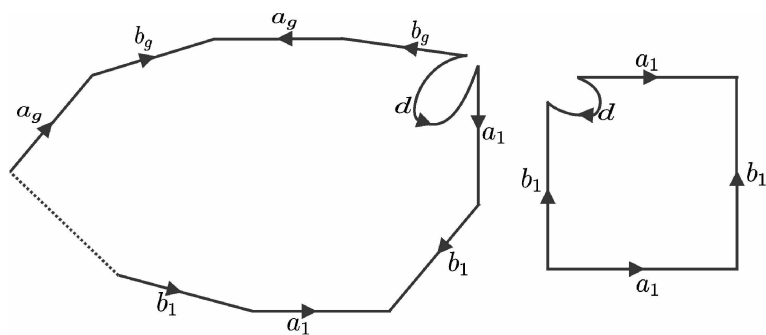


Slika 1.22: Shematski prikaz transformacije drugog torusa \mathbb{T}_2^2

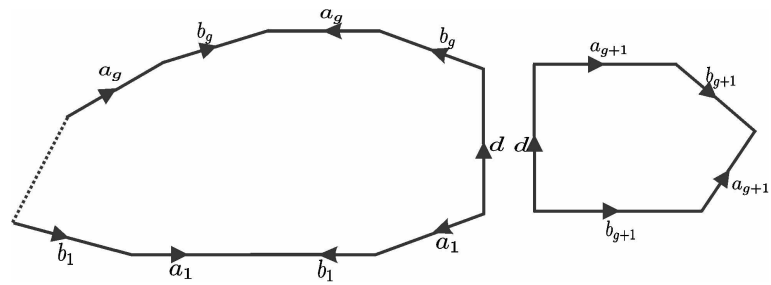


Slika 1.23: Shematski prikaz lijepljenja torusa $\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2^2$

Pretpostavimo da je data tvrdnja tačna za torus roda k . Dodajmo još jedan torus i dokažimo da tvrdnja vrijedi za povezanu sumu dodajući još jedan torus \mathbb{T}^2 . Lijepljenje vršimo po stranici d .



Slika 1.24: Prikaz transformacije lijepljenja torusa roda k i torusa \mathbb{T}_1^2



Slika 1.25: Shematski prikaz lijepljenja torusa roda k i torusa \mathbb{T}^2

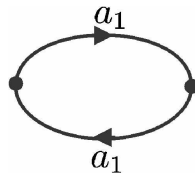
■

Teorema 1.3.4 *Povezana suma od k -kopija projektivnog prostora*

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$$

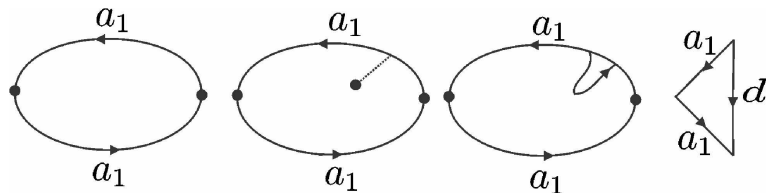
može biti predstavljena poligonom sa $2g$ strana i simbolom $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_k a_k$.

Dokaz: Datu Teoremu dokazat ćemo induktivno, slično kao u [48]. Za $g = 1$ je očito tvrdnja tačna jer tada objekt opisuje standardnu projektivnu ravan.

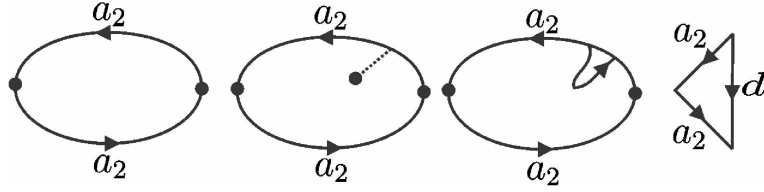


Slika 1.26: Projektivna ravan \mathbb{RP}^2

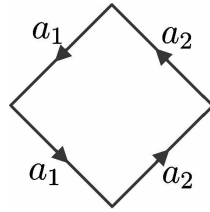
Za $g = 2$ dobijamo



Slika 1.27: Shematski prikaz transformacije prve projektivne ravni \mathbb{RP}^2

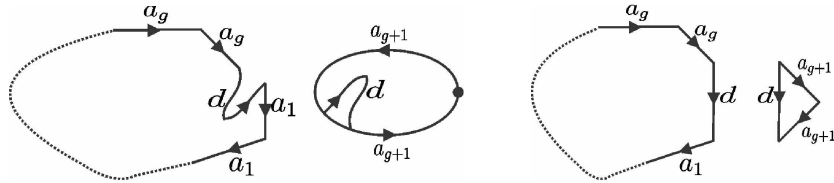


Slika 1.28: Shematski prikaz transformacije druge projektivne ravni \mathbb{RP}^2



Slika 1.29: Poligon dobijen lijepljenjem $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za g povezanih projektivnih ravni i dokažimo da vrijedi za $g + 1$.



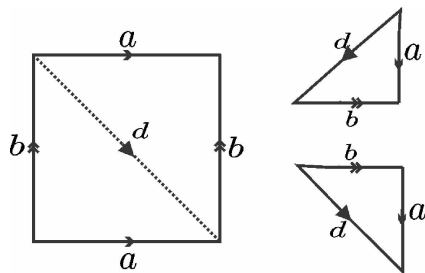
Slika 1.30: Poligon dobijen lijepljenjem g povezanih projektivnih ravni

■

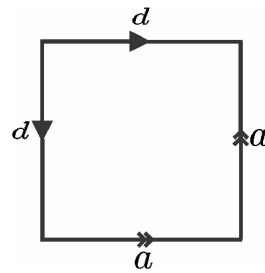
Teorema 1.3.5 *Sljedeći objekti su homeomorfni*

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{K}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Dokaz: Dajemo dokaz ove tvrdnje slično ako u [46] i [48]. Pokažimo prvo da je $\mathbb{K}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Kleinovu bocu u poligonalnom modelu u ravni možemo prikazati kao na Slici 1.31. Izvršimo li „rezanje” po stranici d i lijepljenje po stranici b , uslijedit će dokaz tražene tvrdnje, kao što i prikazuju Slika 1.31 i Slika 1.32.

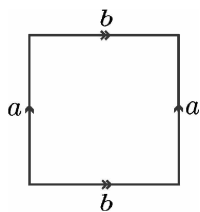


Slika 1.31: \mathbb{K}^2

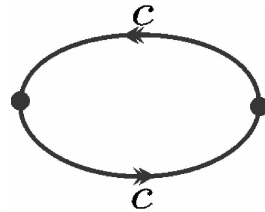


Slika 1.32: $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

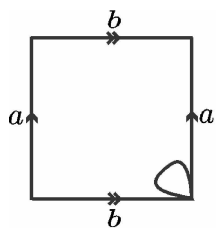
Sada želimo pokazati da je $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Pogledajmo prvo šta dobijemo spajanjem torusa (\mathbb{T}^2) i projektivne ravni (\mathbb{RP}^2).



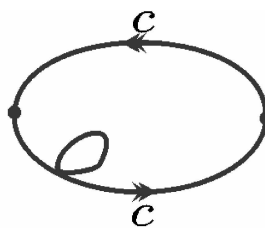
Slika 1.33: Torus \mathbb{T}^2



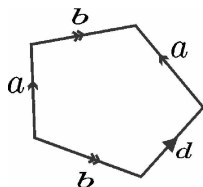
Slika 1.34: Projektivna ravan \mathbb{RP}^2



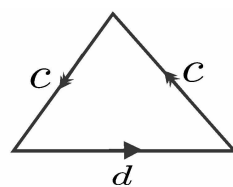
Slika 1.35: Mjesto lijepljenja na \mathbb{T}^2



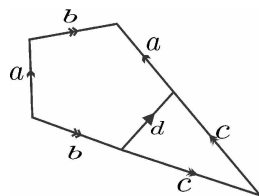
Slika 1.36: Mjesto lijepljenja na \mathbb{RP}^2



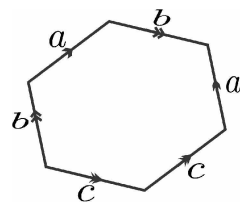
Slika 1.37: Kreiranje granice na \mathbb{T}^2



Slika 1.38: Kreiranje granice na \mathbb{RP}^2

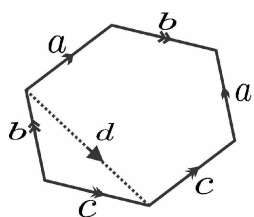


Slika 1.39: Lijepljenje T^2 i \mathbb{RP}^2

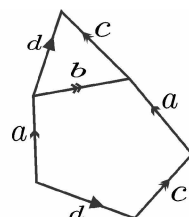


Slika 1.40: $T^2 \# \mathbb{RP}^2$

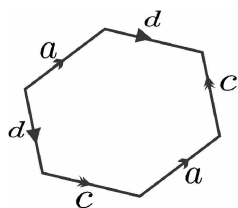
Pokažimo sada da je $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.



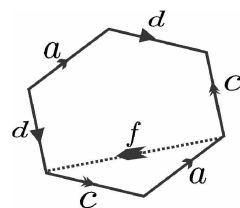
Slika 1.41: „Rezanje” i novo lijepljenje



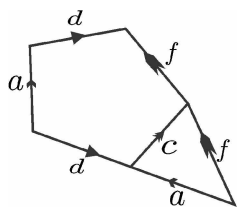
Slika 1.42: Lijepljenje po stranici b



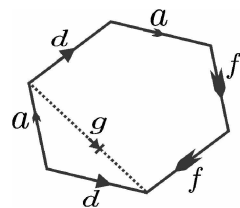
Slika 1.43: $T^2 \# T^2$



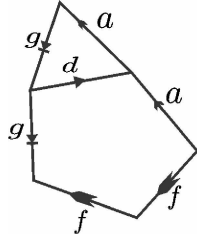
Slika 1.44: „Rezanje” po stranici f



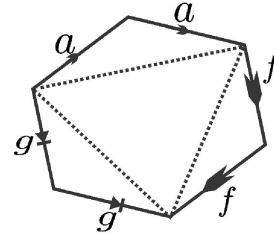
Slika 1.45: Lijepljenje po c



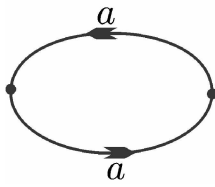
Slika 1.46: „Rezanje” po stranici g



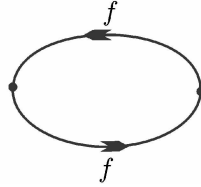
Slika 1.47: Lijepljenje po d



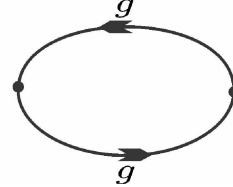
Slika 1.48: $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$



Slika 1.49: $\mathbb{RP}^2 - a$



Slika 1.50: $\mathbb{RP}^2 - f$



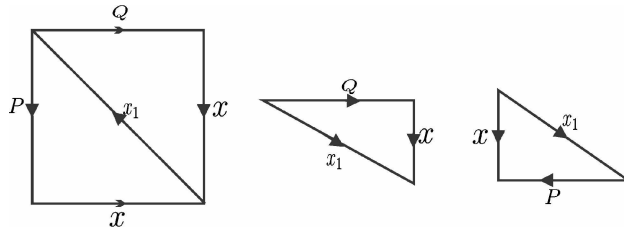
Slika 1.51: $\mathbb{RP}^2 - g$

■

Dokaz sljedeće Leme dajemo prema [48].

Lema 1.3.1 *Ako x predstavlja stranicu i P i Q predstavljaju nizove strana, tada $xxP^{-1}Q \approx x_1Px_1Q$ za odgovarajuću stranicu x_1 .*

Dokaz:



■

Općenito možemo reći da vrijedi:

Teorema 1.3.6 *Neka je S kompaktna površ, formirana iz poligona u ravni lijepeći odgovarajuće stranice tog poligona, stranicu uz stranicu u naznačenom smjeru orijentacije. Tada je S homeomorfna tačno jednoj od površi*

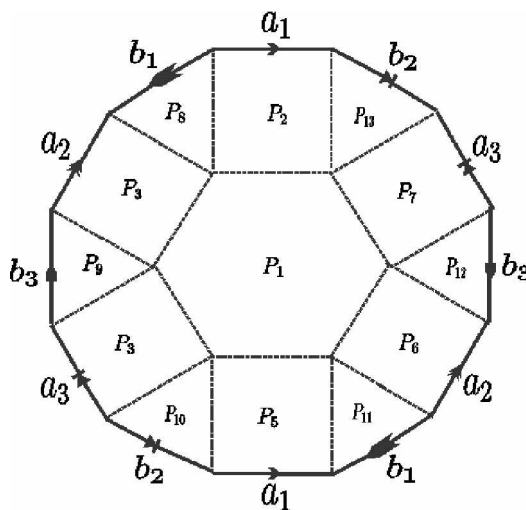
- $T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$, tj. torus sa k rupa.
- $T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2 \# \mathbb{RP}^2$, tj. povezana suma od torusa sa k -rupa i projektivna ravan,

- $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}$ povezana suma od torusa sa k -rupa i Kleinova boca,
- sfera \mathbb{S}^2 .

U daljem istraživanju površi posebno ćemo se bazirati na izučavanje tzv. translacijskih površi.

1.4 Translacijske površi

Proučavanja o ravnim površima se pojavljuju pod različitim nazivima i u različitim pristupima, kao što su, na primjer kvadratni diferencijali, abelovski diferencijali, translacione površi, F-strukture i slično. Kvadratno pokrivene površi i translacijske površi nastaju iz dinamičkih sistema, a mogu biti korištene u bilijskim modelima i Teichmüllerovoj teoriji. One imaju bogatu matematičku strukturu i mogu se proučavati sa različitih aspekata, kao što su: afina geometrija, algebarska geometrija, teorija kombinatornih igara i slično. Nama će od posebnog interesa biti translacijske površi i njihove osobine.



Slika 1.52: Primjer translacijske površi

U kombinatornom smislu translacijsku površ možemo definisati na sljedeći način:

Definicija 1.4.1 Neka P_1, P_2, \dots, P_m čine kolekciju poligona u Euklidskoj ravni i pretpostavimo da za svaki poligon P_k i svaku stranu s_i postoji stranica

s_j za neki P_l , gdje je $i \neq j$ i $s_j = s_i + \vec{v}_i$ za neki vektor $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ i takav da je $\vec{v}_j = -\vec{v}_i$. Prostor dobijen identifikacijom svih s_i sa njima odgovarajućim s_j preslikavanjem $x \rightarrow x + \vec{v}_i$ je translacijska površ.

U doktorskoj tezi objekti koje proučavamo predstavljaju generalizaciju translacijskih površi. U suštini izučavat ćemo površi nastale iz identifikacije granica regiona u ravni koji je izdijeljen na manje poligone, a to je i situacija koju imamo kod translacijskih površi. U klasu površi koje razmatramo spadaju i ravne Riemannove površi, pošto se translacijska površ može definisati i kao 1-holomorfna Riemannova površ. Specijalno, interesuju nas površi koje nastaju od poligona koji su podijeljeni na jedinične kvadrate. Drugim riječima govorimo o pravilnoj kvadratnoj mreži sa konačno mnogo izolovanih singulariteta. Na površima većeg roda pravilna kvadratna mreža se može definisati u svim tačkama, osim njih konačno mnogo izolovanih singulariteta koji se nazivaju i konusne tačke. Uklanjanjem susjeda singularnih tačaka dobijamo ravnu površ sa granicom. Ako iz skupa strana poligona u ravni uparimo stranice iste identifikacije, dobit ćemo površ ravne metrike. Lijepljenjem identifikovanih strana dobit ćemo translacijske površi.

Klasa translacijskih površi poznata pod nazivom kvadratna prekrivena površ (engl. *square-tiled surfaces*) je od velikog interesa za matematičare. Kvadratna prekrivena površ predstavlja orijentabilnu površ dobijenu iz konačne familije jediničnih kvadrata u ravni, nakon identifikacije parova paralelnih stranica sa adekvatnim translacijama. Općenito, ukupan ugao kvadrata kvadratne prekrivene površi M je netrivialni sadržilac od 2π i svaka takva tačka se naziva konusnim singularitetom od M . Mi ćemo proučavati ravne površi sa konusnim singularitetima i konusnim uglom sadržilaca od $\frac{\pi}{2}$.

Glava 2

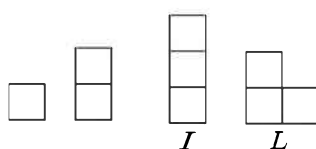
Grupe homologija poliomino popločavanja površi

Problemi koje nudi rekreativna matematika, kao što su kombinatorne igre, puzzle, trikovi sa kartama, problemi popločavanja i drugi interesantni su matematičarima, ali i široj publici. Ovi problemi su generalno jasni široj publici, ali put do njihovih rješenja je, najčešće, izrazito težak. Ideje i problemi iz rekreativne matematike su doveli do razvoja potpuno novih matematičkih disciplina. Na primjer, proučavanje problema sedam Königsbergskih mostova dovelo je do razvoja teorije grafova, a proučavanje magičnih kvadrata do razvoja kombinatornog dizajna. Problem popločavanja predstavlja jedan od tradicionalno proučavanih problema u matematici, odnosno kombinatorici. Iako ovaj problem seže iz daleke matematičke prošlosti, zbog svog značaja za arhitekturu, umjetnost, kompjutersku grafiku, optimizaciju i druge primjene, aktuelan je i danas. Cilj ovog poglavlja doktorske disertacije je razmotriti problem popločavanja na topološkim površima. Osnovna literatura korištena za pisanje ovog poglavlja je [18], [51] i [68].

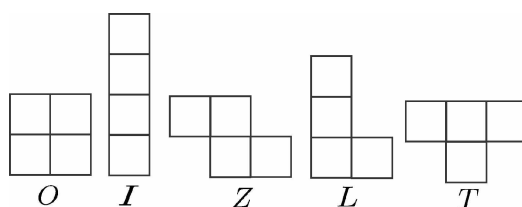
2.1 Problem poliomino popločavanja

Poliomino je geometrijska figura u ravni dobijena spajanjem jednog ili više identičnih kvadrata stranica uz stranicu. Možemo ih posmatrati kao konačan podskup pravilnog kvadratnog popločavanja sa popunjenom unutrašnjosti. Riječ poliomino prvi je upotrijebio Golomb u [25]. Poliomino koji se sastoji od tačno n ćelija nazivamo n -omino. Poliomino oblike za $n \leq 5$ ilustrovali smo na Slikama 2.1, 2.2 i 2.3. Neki poliomino oblici liče na slova alfabeta pa su imena dobili po njima, koja ćemo u nastavku koristiti za njihovo razlikovanje, vidjeti Sliku 2.2 i 2.3. U literaturi su još poznati i kao životinje

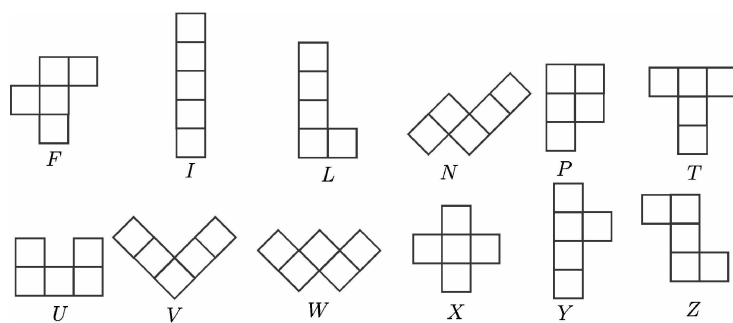
na kvadratnim rešetkama. Za polimino oblik kažemo da je slobodan ako na njemu dozvolimo translacije, rotacije i refleksije. Ako je na polimino obliku zabranjena translacija, a dozvoljena rotacija i refleksija, tada kažemo da je takav polimino oblik fiksni. Različite rotacijske orijentacije kod fiksnih polimino oblika se smatraju jednakim, ali oblici s različitim kiralnostima (engl. *chirality*) ili orijentacijama se smatraju različitim. Polimino oblike zovemo jednostranim kada se posmatraju u istoj kiralnosti ili orijentaciji. Pod pojmom kiralnosti podrazumijevamo da se polimino oblik ne može preslikati u svoju zrcalnu sliku upotrebom translacija i rotacija.



Slika 2.1: Monomino, domino i tromino oblici



Slika 2.2: Tetromino oblici



Slika 2.3: Pentomino oblici

Njih su popularizovali Solomon Golomb koji je napisao prvu monografiju o poliminoima [26] i Martin Gardner u svojoj kolumni Scientific American „Mathematical Games”, vidjeti [23]. Danas predstavljaju jedan od najpopularnijih subjekata rekreativne matematike i od velikog interesa su matematičarima, fizičarima, biologima, kompjuterskim naučnicima i dr. Za više

informacija pogledati [2] i [6]. Redelmeier je 1981. godine u svom radu [67] izračunao broj slobodnih $s(n)$ i fiksnih $t(n)$ n -omina za $n = 1, \dots, 24$. Ovim problemom se kasnije bavi i Mertens u svom radu [57] koji je objavljen 1990. godine. Izučavanjem slobodnih n -omina bavili su se i Lunnon [53], [54], Read [66], Ball i Coxeter [3], Conway i Guttmann [19] te Goodman i O'Rourke [30]. U tabeli 2.1 dajemo prikaz broja slobodnih, fiksnih i jednostranih poliomino oblika $r(n)$ za $n = 1, \dots, 24$. Lako se uočava da vrijednosti od $r(n)$, $t(n)$ i $s(n)$ eksponencijalno rastu i da za svako n vrijedi $\frac{t(n)}{8} \leq s(n) \leq r(n) \leq t(n)$. Jensen i Guttmann [34], [35] i Jensen [36] su računanje nastavili do $n = 56$.

Tabela 2.1: Tabela sa brojem fiksnih, jednostranih i slobodnih n -omina za $n \leq 24$

| n | $t(n)$ | $r(n)$ | $s(n)$ |
|-----|---------------|---------------|--------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 6 | 2 | 2 |
| 4 | 19 | 7 | 5 |
| 5 | 63 | 18 | 12 |
| 6 | 216 | 60 | 35 |
| 7 | 760 | 196 | 108 |
| 8 | 2725 | 704 | 369 |
| 9 | 9910 | 2500 | 1285 |
| 10 | 36446 | 9189 | 4655 |
| 11 | 135268 | 33896 | 17073 |
| 12 | 505861 | 126759 | 63600 |
| 13 | 1903890 | 476270 | 238591 |
| 14 | 7204874 | 1802312 | 901971 |
| 15 | 27394666 | 6849777 | 3426576 |
| 16 | 104592937 | 26152418 | 13079255 |
| 17 | 400795844 | 100203194 | 50107909 |
| 18 | 1540820542 | 385221143 | 192622052 |
| 19 | 5940738676 | 1485200848 | 742624232 |
| 20 | 22964779660 | 5741256764 | 2870671950 |
| 21 | 88983512783 | 22245940545 | 11123060678 |
| 22 | 345532572678 | 86383382827 | 43191857688 |
| 23 | 1344372335524 | 336093325058 | 168047007728 |
| 24 | 5239988770268 | 1309998125640 | 654999700403 |

Madras u svom radu [55] dokazuje postojanje asimptotskog omjera rasta broja n -omina koji iskazuje u sljedećoj teoremi:

Teorema 2.1.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n+1)}{t(n)} \text{ postoji (i jednaka je } \lambda \text{)}.$$

Rezultati koje su dali Eden [21], Klarner [44], Klarner i Rivest [45], te Ball i Coxeter [3] u svojim radovima uveliko su pomogli u procjeni konstante (λ) koja govori o broju poliomino oblika za proizvoljan broj n . Trenutno najbolja poznata donja granica konstante λ data je u [7] i iznosi 4.0025, a najbolja gornja u [45] s vrijednošću 4.6496. Pored granica koje su dokazane, najboljom nedokazanom ocjenom se uzima ona koju je dao Jensen [36], a iznosi 4.0625696 ± 0.0000005 . Ova konstanta (engl. *growth constant*) se često još naziva i Klarnerova konstanta.

Mi ćemo poliomino oblike koristiti kao objekte pomoću kojih ćemo prekrivati ili popločavati željeni region M . Problem poliomino popločavanja postavlja pitanje da li je moguće pravilno prekriti konačan region M koji se sastoji od ćelija sa datim skupom \mathcal{T} poliomino oblika. Pod pravilnim popločavanjem podrazumijevat ćemo popločavanje pravilnim mnogouglovima pri čemu svi mnogouglovi i sva čvorišta (mjesto gdje se spajaju vrhovi susjednih mnogouglova) moraju biti podudarni. Postoji velik broj generalizacija ovog problema u odnosu na simetrična i asimetrična popločavanja, analogone viših dimenzija, poliomino oblike u drugim pravilnim rešetkama (trouglovi, hexagonalne i dr). Međutim, ovaj problem je generalno NP-težak i možemo dati odgovor samo u konačnom broju slučajeva. Ovaj problem privlači pažnju matematičara, ali i onih koji to nisu. Postoji velik broj rezultata za neki specifičan poliomino oblik (vidjeti [27], [28], [29], [69] i [70]).

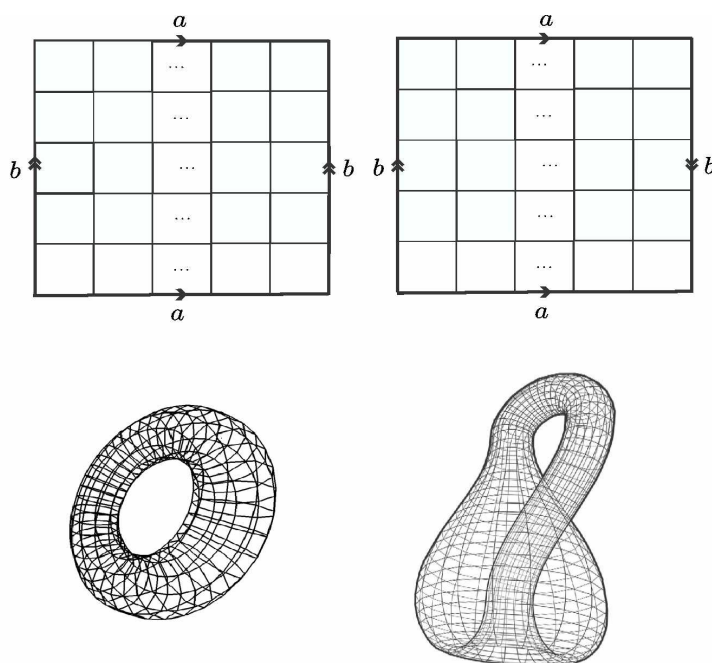
Conway i Lagarias su istražili u [18] metod zvan granična riječ (engl. *boundary word*) za rješavanje ovog problema. Koristeći se idejom koju su dali Conway i Lagarias istraživanje ovog problema nastavlja Reid u [68]. Reid je u svom istraživanju dodijelio svakom skupu dijelova \mathcal{T} grupu homologija i grupu homotopija popločavanja. On je dao potrebne uvjete za postojanje željenog popločavanja konačnog regiona M u ravni. Ova ideja omogućila je generalizaciju velikog broja klasa kombinatornih popločavanja. U ovom poglavlju bavit ćemo se problemom popločavanja površi S koja je podijeljena u konačne „kombinatorne mreže” koje ne mogu biti pravilno popločane konačnim skupom \mathcal{T} poliomino oblika i definisat ćemo grupu homologija $H_S(\mathcal{T})$.

U istraživanju popločavanja površi mi smo se bazirali isključivo na istraživanje specijalnih popločavanja translacijskih površi. U sljedećem odjeljku uvest ćemo grupu homologija popločavanja za konačne kvadratne mreže na površima sa granicom u skladu sa [68]. Dat ćemo ilustracije primjera i dokaze tvrdnjih nekoliko teorema u kojima se dokazuje (ne)postojanost traženih

popločavanja, a čiji dokazi su provedeni u skladu sa grupama homologija popločavanja.

2.2 Problem popločavanja površi

Standardna kvadratna mreža u ravni je karakteristična svojstvom da se tačno četiri stranice susreću u jednom vrhu, tj. svaki vrh je zajednički za četiri kvadrata u mreži. Pretpostavljamo da je svaka stranica mreže osim ako nije dio granične komponente, zajednička za tačno dva kvadrata. Ovo lokalno svojstvo će biti sačuvano za definisano polimino popločavanje na površi kao što je slučaj u ravni. Takvu strukturu ćemo zvati kvadratna mreža na površi. Na primjer, neka je data kvadratna površ sa granicom $m \times n$. Identifikacijom paralelnih stranica granice date kvadratne površi u istom smjeru, kako je i prikazano na Slici 2.4, dobijamo primjer kvadratne mreže na torusu. Slično, identifikacijom od dva para susjednih stranica granice kvadratne površi kao na Slici 2.4 $m \times m$, gdje je $m \geq 3$ dobijamo primjer kvadratne mreže na Kleinovoj boci. Za ostale topološke strukture je nemoguće dati takve primjere, osim ako ne dozvolimo da površi imaju granice.



Slika 2.4: Kvadratna mreža na torusu i Kleinovoj boci

Propozicija 2.2.1 *Neka je M topološka površ koja nema granice i pretpostavimo da je na njoj data konačna mreža. Tada je M torus ili Kleinova boca.*

Dokaz: Ako na površi M nema graničnih komponenti, svaki vrh je incidentan sa tačno četiri kvadrata i svaka stranica je incidentna tačno sa dva kvadrata na mreži. Ako je n konačan broj kvadrata na mreži, tada Eulerova karakteristika od M je

$$\chi(M) = V - E + F = F - 2F + F = 0.$$

Nadalje, M je torus ili Kleinova boca. ■

Topološke površi sa granicom koje se mogu izdijeliti na konačan broj kvadrata u kojima je svaki vrh najviše stepena četiri nije rijetka struktura. Takvu strukturu na primjer imaju „kvadratne” površi. Jedan od načina za njihovo dobijanje je identifikacijom regiona u kvadratnoj mreži na način opisan u glavi jedan.

Problem popločavanja za konačan podskup od pravilne kvadratne mreže u ravni sa konačnim skupom protudijelova poliomino oblika je bio česta tema izučavanja u zadnjim dekadama. Međutim, postoji mnogo drugih topoloških 2–mnogostrukosti koje zadovoljavaju podjelu na konačan broj kvadrata koji čuvaju strukturu pravilne kvadratne mreže za koju je i definisan problem popločavanja. Neki rezultati i primjeri poliomino popločavanja u literaturi su poznati pod notacijom topološka popločavanja. Specijalno slučajevi valjka, torusa, Möbiusove trake, Kleinove boce i projektivne ravni su proučavani u [26], [73] i [52].

Poznato je nekoliko tehnika za traženje opstrukcija popločavanja regiona M , a najzanimljivija je tehnika generalizacije bojanja šahovske ploče. Ova tehnika se zasniva na činjenici da se šahovska tabla sa uklonjenim suprotnim poljima ne može popločati dominama, a njen dokaz se zasniva na razlici između broja bijelih i crnih polja, vidjeti [25]. Općenito, ideja se sastoji u tome da se sa nekoliko boja oboje sva polja datog regiona. Takvo bojanje daje specijalan slučaj bojanja (engl. *pattern*), koje nam daje teorijske uslove za postojanje popločavanja, ali koji daleko od toga da moraju da budu i dovoljni uslovi.

Međutim, nije lako pronaći argument bojanja za dokazivanje nepostojanja popločavanja. Reid je u [68] uveo grupu homologija popločavanja i dokazao netrivialnost specijalnog elementa u ovoj grupi koji je dodijeljen konačnom podskupu od pravilne kvadratne rešetke proizvedene generalizacijom argumenta bojanja šahovske ploče. Metod popločavanja grupe homologija koji je dao Reid je snažniji od argumenta bojanja. U istom radu Reid daje neke

primjere gdje poznavanje popločavanja grupe homologija nije dovoljno za dokazivanje nepostojanja popločavanja.

Problem poliomino popločavanja su proučavali Conway i Lagarias u [18] gdje su uveli novu tehniku koja koristi granične invarijante za formulaciju potrebnih uvjeta za postojanje popločavanja. Bazirajući se na ideju koju su dali Conway i Lagarias, Reid je predstavio u [68] novu strategiju za pristup problemu popločavanja radeći sa konačnim grupama homotopija. Reidov metod popločavanja u grupi homotopija je najuspješniji u uspostavljanju potrebnih kriterija za postojanje popločavanja.

Naša glavna opservacija je da se Reidov metod istraživanja problema popločavanja u grupi homologija može primijeniti za istraživanje topoloških popločavanja. Klasični model za dobijanje topoloških površi je identifikacija strana poligona, vidjeti [48] i [81].

Neka je M topološka površ sa granicom dobijena lijepeći stranice od nekog konačnog podskupa R pravilne kvadratne mreže u ravni i neka je \mathcal{T} konačan skup poliomino dijelova. Lijepeći strane dobijamo više načina za postavljanje dijela iz \mathcal{T} na M nego u slučaju od R , tako M može biti popločan iako R ne dozvoljava popločavanje sa dijelovima iz \mathcal{T} . Mi uvodimo grupu homologija popločavanja $H(M, \mathcal{T})$ u [51] na isti način kao i Reid.

Zadržat ćemo konvenciju za označavanje ćelija (jediničnih kvadrata) koju je uveo Reid u svom radu [68]. Drugim riječima ćelija odnosno jedinični kvadrat u ravni čiji je donji lijevi ugao tačka (i, j) jednostavno će označavati ćeliju (i, j) .

Neka je A slobodna Abelova grupa generirana sa skupom ćelija od M . Pretpostavimo da su sve ćelije od M zadržale oznaku (i, j) iz regiona R . Generator od A koji odgovara ćeliji (i, j) je označen sa $a_{i,j}$. Neka je $B(M, \mathcal{T})$ podgrupa od A generisana sa svim elementima koji odgovaraju svim mogućim postavljanjima dijelova u \mathcal{T} , tj. sumi elemenata dodijeljenih ćelijama od M koji mogu biti prekriveni dijelovima iz \mathcal{T} .

Definicija 2.2.1 *Grupa homologija (M, \mathcal{T}) je količnička grupa*

$$H(M, \mathcal{T}) = A/B(M, \mathcal{T}).$$

Neka je sa $\bar{a}_{i,j}$ označena slika od $a_{i,j}$ u $H(M, \mathcal{T})$. Kao u slučaju u ravni, tu je element $\Theta \in H(M, \mathcal{T})$ dodijeljen od M

$$\Theta := \sum_{(i,j) \in M} \bar{a}_{i,j}$$

koji je nula kada postoji popločavanje od M sa poliomинима iz \mathcal{T} .

Nadalje, Θ je opstrukcija za popločavanje. Pored navedenog Michael Reid u svom radu [68] je razmotrio i takozvana označena popločavanja (engl. *signed tiling*), gdje dozvoljava da poliomino popločavanje ima pozitivan i negativan znak. Jasno, znak popločavanja od M sa \mathcal{T} postoji ako i samo ako je Θ trivijalan u $H(M, \mathcal{T})$.

Grupe homologija popločavanja u ravni koje je definisao Reid su koristeći Gröbnerove baze proučavali u svojim radovima Muzika-Dizdarević, Timotijević i Živaljević, vidjeti [63] i [64].

Propozicija 2.10 koju Reid daje u radu [68] za popločavanja sa poliomini-
nima u ravni je također zadovoljena i za topološka popločavanja sa poliomini-
nima. U navedenoj propoziciji se ističe da netrivialni element Θ proizvodi
specijalno pridruživanje racionalnih brojeva ćelijama u M koje daju gene-
ralizaciju argumenta bojanja šahovske table. U nastavku dajemo Propozici-
ciju 2.2.2 koja predstavlja prilagodbu Propozicije 2.10 iz [68] za topološka
popločavanja.

Propozicija 2.2.2 *Neka je M topološka površ sa granicom, sa konačnom kvadratnom mrežom i konačnim skupom poliomino oblika \mathcal{T} te da je Θ netrivialan u $H(M, \mathcal{T})$. Tada postoji bojanje ćelija racionalnim brojevima u M takvo da*

i) za svako postavljanje dijela iz \mathcal{T} ukupna suma prekrivenih brojeva je cijeli broj, i

ii) ukupan zbir svih brojeva u ćelijama u M nije cijeli broj.

Dokaz: Neka je data ciklička podgrupa $\langle \Theta \rangle \subset H(\mathcal{T})$ generirana sa Θ . Definišimo homomorfizam $\varphi : \langle \Theta \rangle \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sa $\varphi(\Theta) \neq 0$. Ako Θ ima beskonačan red tada uzimamo $\varphi(\Theta) = \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$, a ako Θ ima konačan red $n > 1$, tada definišemo $\varphi(\Theta) = \frac{1}{n} \bmod \mathbb{Z}$. Kako je \mathbb{Q}/\mathbb{Z} djeljiva Abelova grupa, a homomorfizam φ proširen do homomorfizma $H(M, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ također zovemo φ . Ovdje koristimo ekvivalentne tvrdnje i osobine od injektivnih i djeljivih grupa za Ablove grupe ([13], Propozicija 6.2) Nadalje, A je slobodna Abelova grupa, kompozicija preslikavanja

$$A \twoheadrightarrow A/B(M, \mathcal{T}) = H(M, \mathcal{T}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dozvoljava homomorfizam $\psi : A \rightarrow \mathbb{Q}$, takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

gdje je vertikalna surjekcija količničko preslikavanje. Željeno bojanje ćelija je definisano sa ψ , i jednostavno $B(M, \mathcal{T})$ je jezgro od $A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, gdje svako postavljanje dijela prekriva ukupno cijeli broj. Ali, $\varphi(\Theta) \neq 0$ i ukupan broj ćelija u M nije cijeli broj. ■

Razmatranje popločavanja je posebno interesantno na toploškim površima jer mnogobrojni primjeri koji se ne mogu riješiti u ravni na površima nude lijepa i jednostavna rješenja. Na primjer, posmatramo li u ravni tablu dimenzije $3 \times (2k + 1)$ podijeljenu u kvadratnu mrežu istu ne možemo popločati sa L-trominima, dok istu kvadratnu mrežu dimenzije $3 \times (2k + 1)$ na torusu sa istim oblikom možemo popločati za svako $k \in \mathbb{N}$. Dokaz tvrdnje za torusnu kvadratnu mrežu $3 \times (2k + 1)$ i postojanost popločavanja sa L-trominima za svaki prirodan broj k dajemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.2.3 *Kvadratna torusna mreža dimenzije $3 \times (2k + 1)$ može se popločati sa L-trominima za svako $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Posmatrajmo torusne mreže 3×9 i 3×11 . Neka je sa brojevima od 1, 2, ..., označeno postavljeno L-tromina na datu kvadratnu torusnu mrežu. Uočimo da L-tromino u prvi stupac moramo postaviti tako da jedno polje od L-tromina prelazi donju stranicu lijepljenja (postavljanje prikazano brojem 1), a drugi L-tromino prelazi desnu vertikalnu stranicu lijepljenja (postavljanje prikazano brojem 2). Zatim naizmjenično postavljajmo L-tromino na datu tablu u položajima prikazanim pod brojem 4 i 5, redom kako dolaze.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 | 2 |

Slika 2.5: Kvadratna torusna mreža dimenzije 3×9

Analogno, vrijedi za kvadratne torusne mreže dimenzije $3 \times (2k + 1)$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|--|-----|--|--|--|---|---|
| 1 | 4 | 4 | | | ... | | | | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 5 | | | ... | | | | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 5 | 5 | | ... | | | | | 2 |

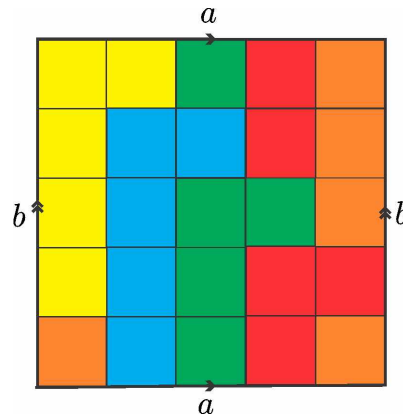
Slika 2.6: Kvadratna torusna mreža dimenzije $3 \times (2k + 1)$

■

U sljedećem primjeru dajemo prikaz postojanja popločavanja kvadratne torusne mreže dimenzije 5×5 sa L -pentaminima, a da je pri tome element θ trivijalan u homološkoj grupi popločavanja.

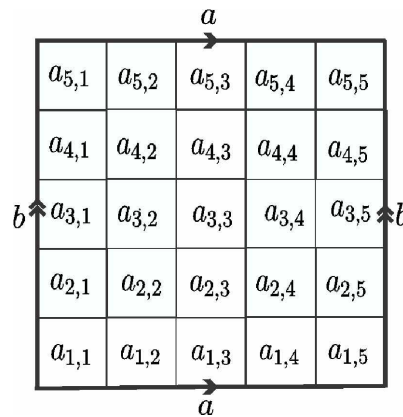
Primjer 1 *Kvadratna torusna mreža dimenzija 5×5 može se popločati L pentaminima.*

Rješenje: Na Slici 2.7 je dato moguće popločavanje kvadratne torusne mreže 5×5 sa L pentaminima.



Slika 2.7: Popločavanje kvadratne torusne mreže 5×5 sa L -pentaminom

Dokažimo da je homološka grupa popločavanja \mathbb{Z}_5 , a da je element opstrukcije popločavanja θ trivijalan. Neka je data torusna mreža dimenzije 5×5 predstavljena u torusnom modelu mreže u ravni i sa datim imenima ćelija kao na Slici 2.8.



Slika 2.8: Kvadratna torusna mreža dimenzije 5×5

Razmotrimo moguća postavljanja našeg dijela na dati model torusne mreže u ravni. Svako postavljanje zadovoljava neku od relacija (2.1):

$$\bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j+3} = 0, \quad (2.1)$$

gdje i ($i = 1, \dots, 5$) predstavlja datu vrstu, a j ($j = 1, \dots, 5$) dati stupac na datoj torusnoj mreži i vrijedi da je $5+i = i$ za svako $i \in \{1, \dots, 5\}$ i $5+j = j$ za svako $j \in \{1, \dots, 5\}$. Indeksi u relaciji (2.1) se uzimaju po modulu 5 u potpunom sistemu ostataka $\{1, \dots, 5\}$. Posmatrajući relaciju (2.1) i relaciju

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+3,j} + \bar{a}_{i+4,j} = 0,$$

dobijamo da u grupi homologije ovog popločavanja za svako $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ vrijedi da je

$$\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+1} = \bar{a}_{i+1,j},$$

na osnovu čega slijedi da su sva polja na torusnoj mreži ekvivalentna. Postavimo li dati poliomino oblik na torusnu mrežu sa ekvivalentnim ćelijama dobijamo da vrijedi relacija $5\bar{a}_{1,1} = 0$, odakle slijedi da je naša grupa homologija izmorfna grupi

$$G\langle \bar{a}_{1,1} | 5\bar{a}_{1,1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_5.$$

Razmotrimo li datu torusnu mrežu na njoj imamo 25 ćelija $\bar{a}_{1,1}$, drugim riječima slijedi da je element koji odgovara ovoj tabli

$$\Theta = 25\bar{a}_{1,1} = 5(5\bar{a}_{1,1}) = 0,$$

trivijalni element naše grupe. ◆

Sljedeći primjer pokazuje da element koji odgovara mreži popločavanja u grupi homologija može biti trivijalan, a da popločavanje nije moguće.

Primjer 2 *Kvadratna torusna mreža dimenzija 5×5 ne može se popločati T-pentaminima.*

Rješenje: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije 5×5 predstavljena u torusnom modelu mreže u ravni i sa datim imenima ćelija kao na Slici 2.8. Razmotrimo moguća postavljanja T-pentamina na dati model torusne mreže u ravni. Svako postavljanje zadovoljava neku od relacija:

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+2,j+2} + \bar{a}_{i+2,j+3} = 0, \quad (2.2)$$

gdje i ($i = 1, \dots, 5$) predstavlja datu vrstu, a j ($j = 1, \dots, 5$) dati stupac na datoj torusnoj mreži i vrijedi da je $5+i = i$ za svako $i \in \{1, \dots, 5\}$ i $5+j = j$

za svako $j \in \{1, \dots, 5\}$. Indeksi u relacijama ovog primjera se uzimaju po modulu 5 u potpunom sistemu ostataka $\{1, \dots, 5\}$. Posmatrajući relaciju (2.2) i relaciju

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i+2,j+1} = 0,$$

dobijamo da u grupi homologije ovog popločavanja za svako $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ vrijedi da je

$$\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+1} = \bar{a}_{i+1,j}.$$

Odakle slijedi da su sva polja na torusnoj mreži ekvivalentna. Postavimo li T pentamino na torusnu mrežu sa ekvivalentnim ćelijama dobijamo da vrijedi relacija $5\bar{a}_{1,1} = 0$, na osnovu čega slijedi da je naša grupa homologija izmorfna grupi

$$G\langle \bar{a}_{1,1} | 5\bar{a}_{1,1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_5.$$

Razmotrimo li datu torusnu mrežu na njoj imamo 25 ćelija $\bar{a}_{1,1}$, drugim riječima slijedi da je element koji odgovara ovoj tabli

$$\Theta = 25\bar{a}_{1,1} = 5(5\bar{a}_{1,1}) = 0,$$

trivijalni element naše grupe.

Ispitajmo sada koje sve mogućnosti postoje u postavljanju T-pentamina na datu torusnu mrežu i provjerimo da li popločavanje postoji ili ne postoji. Možemo fiksirati prvo postavljanje T-pentamina kao na Slici 2.9.

| | | | | | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | a | | | | |
| | $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| | $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| b | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |
| | a | | | | |

Slika 2.9: Fiksirano postavljanje T pentamina na torusnu mrežu

Pretpostavimo da je traženo popločavanje moguće i razmotrimo kako bismo mogli postaviti T-pentamino tako da prekrije ćeliju $a_{1,1}$ na torusnom modelu mreže u ravni. Tada dobijamo sljedeće slučajeve.

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |

Slika 2.10: Slučaj 1

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |

Slika 2.11: Slučaj 2

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |

Slika 2.12: Slučaj 3

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |

Slika 2.13: Slučaj 4

Jasno je da Slučaj 4 nema smisla razmatrati zbog neprekrivene ćelije $a_{2,2}$. Analizirajmo preostala tri slučaja i mogućnost njihovog daljeg popločavanja. Posmatrajmo prvo Slučaj 1 i razmotrimo mogućnosti prekrivanja ćelije $a_{5,1}$.

| | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|-------------------------|
| | | | \xrightarrow{a} | | |
| | $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| | $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| $b \rightarrow$ | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5} \rightarrow b$ |
| | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |
| | | | \xrightarrow{a} | | |

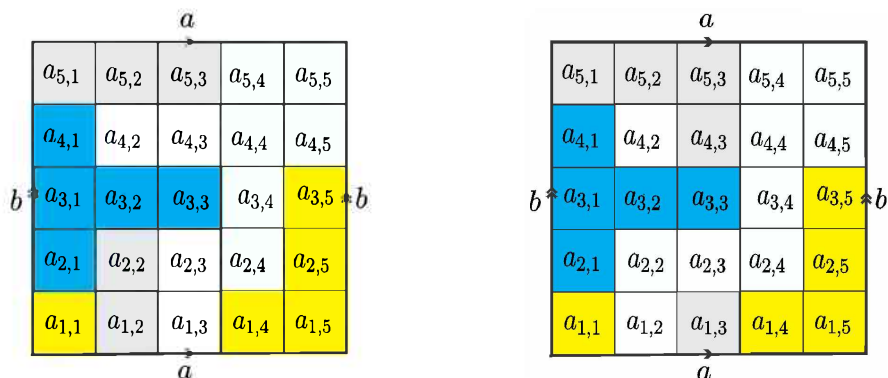
Slika 2.14: Mogućnost postavljanja T -pentamina da prekrije ćeliju $a_{5,1}$ u Slučaju 1

Nakon postavljanja T -pentamina uočavamo da u Slučaju 1 popločavanja nije moguće. Drugih mogućnosti u prvom slučaju nemamo. Razmotrimo Slučaj 2. Prvo razmotrimo moguća postavljanja T -pentamina na torusnu mrežu tako da prekriva ćeliju $\bar{a}_{5,1}$. Tada T -pentamino možemo postaviti na način prikazan na Slici 2.15.

| | | | | | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | | a | | |
| | $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ |
| | $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ |
| b | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | $a_{3,5}$ |
| | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ |
| | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ |
| | | | a | | |

Slika 2.15: Mogućnost postavljanja T -pentamina da prekrije ćeliju $\bar{a}_{5,1}$ u Slučaju 2

Tada uočavamo da nam polja $\bar{a}_{1,3}$ i $\bar{a}_{2,3}$ ostaju zatvorena, što nas dovodi do zaključka da traženo popločavanje nije moguće. Preostaje nam još razmotriti da li je popločavanje moguće u Slučaju 3. U ovom slučaju T -pentamino možemo postaviti na torusnu ploču kao na sljedećim slikama.



Slika 2.16: Postavljanja T -pentamina da prekrije polje $a_{5,1}$ u Slučaju 3

Za drugu mogućnost je očigledno da popločavanje ne postoji, a postavljanje još jednog T -pentamina na torusnu mrežu u prvoj mogućnosti vodi nas istom zaključku da popločavanje nije moguće. Na osnovu prethodno rečenog zaključili smo da popločavanje kvadratne torusne mreže dimenzije 5×5 sa T -pentaminima nije moguće. ♦

Na osnovu Primjera 1 i Primjera 2 možemo zaključiti da u slučaju kada je element Θ u traženoj grupi homologija jednak nuli, ne možemo sa sigurnošću tvrditi da popločavanje postoji ili ne postoji, u takvim slučajevima treba izvršiti dodatnu analizu pomoću koje bismo mogli utvrditi da li je takvo popločavanje moguće ili nemoguće.

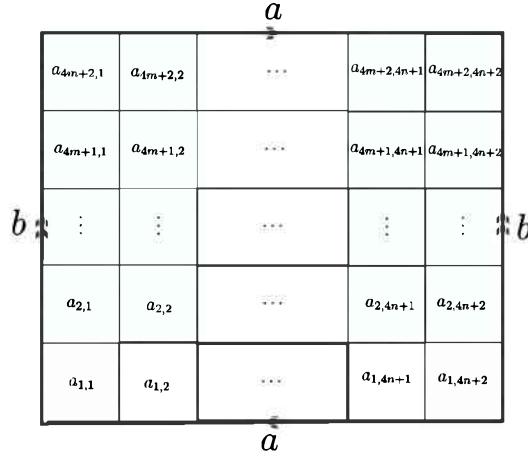
2.3 Nepostojanje poliomino popločavanja na topološkim površima

U ovom dijelu dat ćemo prikaz nekih rezultata nepostojanja poliomino popločavanja na topološkim površima. Proučavat ćemo popločavanje površi različitog roda sa granicom, sa odabranim skupom poliomino oblika za ilustraciju računanja grupe homologija popločavanja površi.

Prvo ćemo dati pregled tri rezultata poliomino popločavanja na kvadratnoj torusnoj mreži. Ovakva popločavanja su i ranije razmatrana [73] kao zatvoreni dijelovi u ravni. Rezultati dati u Teoremi 2.3.1, Teoremi 2.3.2 i Teoremi 2.3.3 su rezultati zajedničkog istraživanja Edina Lidana i Đorđa Baralića publikovani u radu [51].

Teorema 2.3.1 *Kvadratna torusna mreža dimenzije $(4m+2) \times (4n+2)$ ne može se popločati sa I -tetrominima.*

Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije $(4m+2) \times (4n+2)$ u torusnom modelu mreže u ravni sa označenim ćelijama kao na Slici 2.17.



Slika 2.17: Torusna mreža dimenzije $(4m + 2) \times (4n + 2)$

Razmotrimo sva moguća postavljanja datog polinomno oblika na dati torusni model mreže. Svako postavljanje zadovoljit će neku od sljedeće dvije relacije:

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j+3} = 0 \quad \text{ i } \quad \bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+3,j} = 0$$

gdje $i = 1, \dots, 4m + 2$ označava redove, a $j = 1, \dots, 4n + 2$ označava kolone datog modela torusne mreže. Pretpostavimo da su indeksi redova predstavljeni po modulu $4m + 2$, a indeksi kolona po modulu $4n + 2$. Razmotrimo li sljedeće relacije

$$\bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j+3} + \bar{a}_{i,j+4} = 0$$

dobijamo da u grupi homologija traženog popločavanja vrijedi

$$\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+4}$$

za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, 4k + 2\}$. Analogno, $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i+4,j}$.

Iz relacija koje odgovaraju postavljanjima preko identificiranih strana pravougaonika kojim je predstavljen naš torusni model mreže dobijamo odgovarajuće ćelije mreže koje su jednake odgovarajućim generatorima u traženoj grupi homologija popločavanja. Koristeći

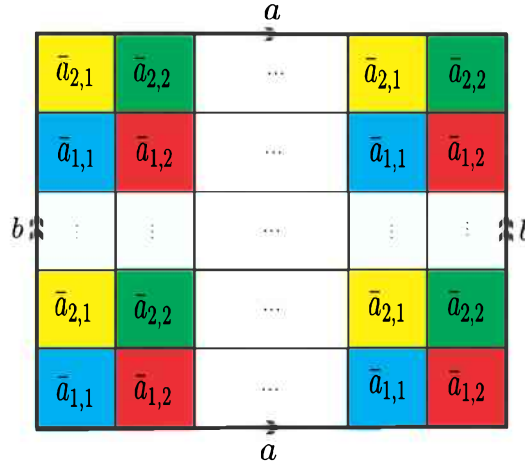
$$\begin{aligned} \bar{a}_{i,4m-1} + \bar{a}_{i,4m} + \bar{a}_{i,4m+1} + \bar{a}_{i,4m+2} &= 0 \quad \text{ i } \\ \bar{a}_{i,4m} + \bar{a}_{i,4m+1} + \bar{a}_{i,4m+2} + \bar{a}_{i,1} &= 0 \end{aligned}$$

zaključujemo da $\bar{a}_{i,1} = \bar{a}_{i,4m-1}$. Na isti način zaključujemo da vrijedi $\bar{a}_{i,2} = \bar{a}_{i,4m}$, $\bar{a}_{1,i} = \bar{a}_{4n-1,i}$ i $\bar{a}_{2,i} = \bar{a}_{4n,i}$ za svako i . Kombinirajući dobijene

jednakosti, dobijamo

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{1,1}, & \text{ako je } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{1,2}, & \text{ako je } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{2,1}, & \text{ako je } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{2,2}, & \text{ako je } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

kao što je prikazano na Slici 2.18.



Slika 2.18: Bojanje ekvivalentnih ćelija torusne mreže

Postavimo li I-tetromino na torusnu mrežu sa dobijenim ekvivalentnim ćelijama dobijamo da vrijede sljedeće relacije

$$\begin{aligned} 2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{1,2} &= 0, & 2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{2,1} &= 0, \\ 2\bar{a}_{2,1} + 2\bar{a}_{2,2} &= 0, & 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,2} &= 0. \end{aligned}$$

Nadalje, naša grupa homologija je izomorfna sa količničkom grupom slobodne Abelove grupe generirane sa četiri generatora i gore navedene četiri relacije. Razmotrimo li njihovu reprezentaciju koristeći sljedeća četiri generatora $a = \bar{a}_{1,1}$, $b = \bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2}$, $c = \bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{2,1}$ i $d = \bar{a}_{2,2} - \bar{a}_{1,1}$. Tada slijedi da je

$$2b = 2c = 2d = 0,$$

odakle slijedi da je naša grupa homologija popločavanja izomorfna sa

$$G\langle a, b, c, d | 2b = 2c = 2d = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2)^3.$$

Torusna mreža ima $2k + 1$ ćelija $\bar{a}_{1,1}$, $\bar{a}_{1,2}$, $\bar{a}_{2,1}$ i $\bar{a}_{2,2}$, gdje je $k = 2mn + m + n$. Drugim riječima slijedi da je element koji odgovara datoj torusnoj

mreži

$$\begin{aligned}\Theta &= (2k+1)\bar{a}_{1,1} + (2k+1)\bar{a}_{1,2} + (2k+1)\bar{a}_{2,1} + (2k+1)\bar{a}_{2,2} \\ &= \bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{2,2} = b + c + d\end{aligned}$$

netrivijalan u traženoj grupi homologija, pa traženo popločavanje nije moguće. ■

Napomena 2.3.1 *Do istog zaključka možemo doći bojanjem torusne ploče kao na Slici 2.18. Svaki dio prekriva 2 plave i 2 žute ćelije, ili 2 plave i 2 crvene, ili 2 žute i 2 zelene, ili 2 crvene i 2 zelene. Broj ćelija u svakoj boji je paran, a svaki dio prekriva neparan broj ćelija, pa na osnovu toga možemo zaključiti da traženo popločavanje nije moguće.*

Razmotrimo sada popločavanja kvadratne torusne mreže dimenzije $(4m+2) \times (4n+2)$ sa T-tetrominima [[51], Teorema 3.1] i sa heksominima [[51], Teorema 3.2].

Teorema 2.3.2 *Kvadratna torusna mreža dimenzije $(4m+2) \times (4n+2)$ ne može se popločati s T-tetrominima.*

Dokaz: Razmotrimo torusnu mrežu predstavljenu kao na Slici 2.17. Razmotrimo sva moguća postavljanja T-tetromina na datu torusnu mrežu. Svako postavljanje zadovoljava neku od sljedećih relacija:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i\pm 1,j+1} &= 0 \quad \text{i} \\ \bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+1,j\pm 1} &= 0\end{aligned}$$

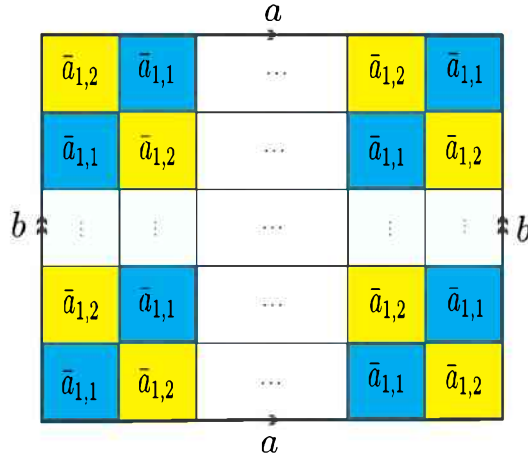
gdje koristimo iste oznake kao i u dokazu Teoreme 2.3.1. Iz navedenih relacija direktno možemo zaključiti da u traženoj grupi homologija popločavanja vrijedi

$$\bar{a}_{i+2,j} = \bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+2}$$

za svako i i j . Nadalje,

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{1,1}, & \text{ako je } i-j \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{1,2}, & \text{ako je } i-j \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

kao što je prikazano na Slici 2.19.



Slika 2.19: Bojanje ekvivalentnih ćelija torusne mreže

Postavljajući T-tetromino oblik na datu torusnu mrežu sa ekvivalentnim ćelijama, dobijamo jednu od sljedeće dvije relacije

$$\begin{aligned} 3\bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} &= 0 \quad \text{i} \\ 3\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,1} &= 0. \end{aligned}$$

Nadalje, tražena grupa homologija je izomorfna sa grupom

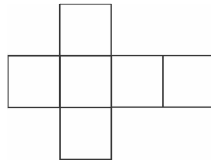
$$G\langle \bar{a}_{1,1} | 8\bar{a}_{1,1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_8.$$

Naša mreža ima $2m$ ćelija $\bar{a}_{1,1}$ i $\bar{a}_{1,2}$, gdje je $k = (2m + 1)(2n + 1)$. Element koji odgovara našoj mreži

$$\Theta = 2k\bar{a}_{1,1} + 2k\bar{a}_{1,2} = -4k\bar{a}_{1,1} = 4\bar{a}_{1,1}$$

je netrivialni element grupe homologija popločavanja, to traženo popločavanje ne postoji. ■

Teorema 2.3.3 *Kvadratna torusna mreža dimenzije $(4m + 2) \times (4n + 2)$ ne može se popločati s X-heksominima.*



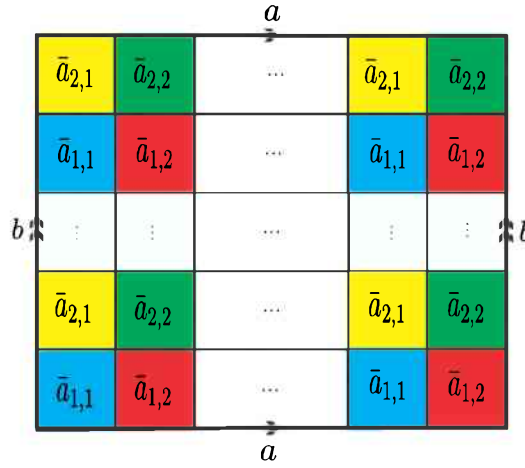
Slika 2.20: X heksomino

Dokaz: Razmotrimo kvadratnu torusnu mrežu modela u ravni dimenzije $(4m+2) \times (4n+2)$ kao što je prikazano na Slici 2.17. Ispitajmo sva moguća horizontalna postavljanja X-heksomina na datu torusnu mrežu. Svako od njih zadovoljava jednu od sljedećih relacija

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j+3} + \bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i-1,j+1} = 0, \quad (2.3)$$

gdje su redovi i kolone imenovani analogno kao i u dokazu Teoreme 2.3.1. Iz (2.3) dobijamo da su u grupi homologija traženog popločavanja zadovoljene jednakosti $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+4}$ za svako i i j . Odnosno $\bar{a}_{i,4n-1} = \bar{a}_{i,1}$, $\bar{a}_{i,4n} = \bar{a}_{i,2}$, $\bar{a}_{i,4n+1} = \bar{a}_{i,3}$ i $\bar{a}_{i,4n+2} = \bar{a}_{i,4}$ nadalje dobijamo da za svako i i j je također zadovoljeno $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+2}$.

Analogno, razmatranjem svih vertikalnih postavljanja slijedi da je $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i+2,j}$ za svako i i j . Ekvivalencija ćelija na datoj torusnoj mreži u grupi homologija traženog popločavanja prikazana je na Slici 2.21.



Slika 2.21: Bojanje ekvivalentnih ćelija date kvadratne torusne mreže

Nadalje, zaključujemo da je grupa homologija traženog popločavanja količnička grupa slobodne Abelove grupe sa četiri generatora $G\langle \bar{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,2}, \bar{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,2} \rangle$ i sa zadovoljenim sljedećim relacijama

$$\begin{aligned} 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,1} + 2\bar{a}_{2,2} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{2,1} + 2\bar{a}_{2,2} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,2} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,1} &= 0. \end{aligned}$$

Razmotrimo sada prezentaciju grupe homologija od traženog popločavanja koristeći sljedeće generatore $\bar{a}_{1,1}$, $\bar{a}_{1,2}$, $b = \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{2,2}$ i $c =$

$\bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1}$. Gore navedene relacije s novim generatorima daju

$$2b = 2c = 2\bar{a}_{1,2} = 2\bar{a}_{1,1}.$$

Odnosno, slijedi da je tražena grupa homologija našeg popločavanja

$$G(\bar{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,2}, c, b | 2c = 2b = 2\bar{a}_{1,1} = 2\bar{a}_{1,2} = 0) \cong (\mathbb{Z}_2)^4.$$

Odavde slijedi da je element koji odgovara ovoj mreži

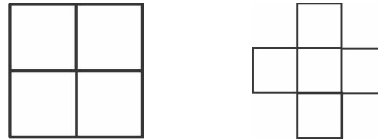
$$\begin{aligned} \Theta &= (2k+1)\bar{a}_{1,1} + (2k+1)\bar{a}_{1,2} + (2k+1)\bar{a}_{2,1} + (2k+1)\bar{a}_{2,2} \\ &= 2m(\bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{2,2}) + \bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{2,2} \\ &= \bar{a}_{1,1} + b \end{aligned}$$

netrivijalni element u traženoj grupi homologija, prema tome traženo popločavanje ne postoji. ■

Napomena 2.3.2 *Do istog zaključka možemo doći bojanjem torusne ploče kao na Slici 2.21. Svaki dio prekriva 2 plave ćelije, 2 crvene i 2 zelene ili 2 plave, 2 žute i 2 zelene ili 2 crvene, 2 žute i 2 zelene ili 2 plave, 2 crvene i 2 zelene ćelije. Broj ćelija u svakoj boji je neparan, i svaki dio prekriva paran broj ćelija u svakoj boji, pa na osnovu toga možemo zaključiti da je popločavanje nemoguće.*

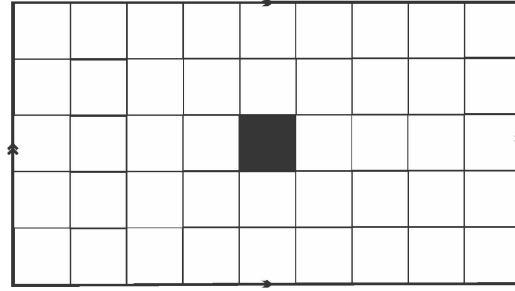
Razmotrimo sada neke od rezultata na površima sa granicom. Kao što smo već mogli vidjeti, topološka svojstva su značajna za grupe homologija traženog popločavanja.

Primjer 3 *Kvadratna torusna mreža dimenzije 9×5 sa jednim uklonjenim poljem na mreži se ne može popločati sa kvadratom dimenzije 2×2 i krstom prikazanim na slici.*



Sve orijentacije postavljanja poliomino oblika su dozvoljene.

Rješenje: Neka je dat kvadratni model torusne mreže dimenzije 9×5 sa jednim uklonjenim poljem na datoj torusnoj mreži. Na primjer, neka je to ćelija kao što je prikazano na Slici 2.22.



Slika 2.22: Torusni model mreže sa jednim uklonjenim poljem

Imenujemo li ćelije na način prikazan na Slici 2.23 zaključujemo da smo proizvoljno uklonili ćeliju $a_{3,5}$.

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ | $a_{5,6}$ | $a_{5,7}$ | $a_{5,8}$ | $a_{5,9}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ | $a_{4,6}$ | $a_{4,7}$ | $a_{4,8}$ | $a_{4,9}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | | $a_{3,6}$ | $a_{3,7}$ | $a_{3,8}$ | $a_{3,9}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ | $a_{2,6}$ | $a_{2,7}$ | $a_{2,8}$ | $a_{2,9}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ | $a_{1,6}$ | $a_{1,7}$ | $a_{1,8}$ | $a_{1,9}$ |

Slika 2.23: Imenovanje ćelija na torusnoj mreži 9×5

Postavimo dva kvadrata dimenzije 2×2 na datu torusnu mrežu kao što je prikazano na Slici 2.24. Tada vrijede sljedeće relacije

$$a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} = 0, \quad (2.4)$$

$$a_{3,3} + a_{3,4} + a_{4,3} + a_{4,4} = 0. \quad (2.5)$$

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ | $a_{5,6}$ | $a_{5,7}$ | $a_{5,8}$ | $a_{5,9}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ | $a_{4,6}$ | $a_{4,7}$ | $a_{4,8}$ | $a_{4,9}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | | $a_{3,6}$ | $a_{3,7}$ | $a_{3,8}$ | $a_{3,9}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ | $a_{2,6}$ | $a_{2,7}$ | $a_{2,8}$ | $a_{2,9}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ | $a_{1,6}$ | $a_{1,7}$ | $a_{1,8}$ | $a_{1,9}$ |

Slika 2.24: Postavljanje kvadrata 2×2 na torusnu mrežu 9×5

Zatim postavimo oblik krsta kao što je prikazano na Slici 2.25 i Slici 2.26. Na osnovu postavljanja oblika krsta kao na datim slikama slijedi da vrijede sljedeće relacije:

$$a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,2} = 0, \quad (2.6)$$

$$a_{2,3} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{4,3} = 0. \quad (2.7)$$

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ | $a_{5,6}$ | $a_{5,7}$ | $a_{5,8}$ | $a_{5,9}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ | $a_{4,6}$ | $a_{4,7}$ | $a_{4,8}$ | $a_{4,9}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | | $a_{3,6}$ | $a_{3,7}$ | $a_{3,8}$ | $a_{3,9}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ | $a_{2,6}$ | $a_{2,7}$ | $a_{2,8}$ | $a_{2,9}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ | $a_{1,6}$ | $a_{1,7}$ | $a_{1,8}$ | $a_{1,9}$ |

Slika 2.25: Postavljanje krsta na torusnu mrežu 9×5 - slučaj 1

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ | $a_{5,6}$ | $a_{5,7}$ | $a_{5,8}$ | $a_{5,9}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ | $a_{4,6}$ | $a_{4,7}$ | $a_{4,8}$ | $a_{4,9}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | | $a_{3,6}$ | $a_{3,7}$ | $a_{3,8}$ | $a_{3,9}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ | $a_{2,6}$ | $a_{2,7}$ | $a_{2,8}$ | $a_{2,9}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ | $a_{1,6}$ | $a_{1,7}$ | $a_{1,8}$ | $a_{1,9}$ |

Slika 2.26: Postavljanje krsta na torusnu mrežu 9×5 - slučaj 2

Iz relacija (2.4), (2.5), (2.6) i (2.7) slijedi da su ćelije $a_{1,1}$ i $a_{4,4}$ ekvivalentne u traženoj grupi homologija, tj. vrijedi da je $a_{1,1} = a_{4,4}$ (Slika 2.3).

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{5,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{5,4}$ | $a_{5,5}$ | $a_{5,6}$ | $a_{5,7}$ | $a_{5,8}$ | $a_{5,9}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{4,3}$ | $a_{4,4}$ | $a_{4,5}$ | $a_{4,6}$ | $a_{4,7}$ | $a_{4,8}$ | $a_{4,9}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{3,4}$ | | $a_{3,6}$ | $a_{3,7}$ | $a_{3,8}$ | $a_{3,9}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | $a_{2,4}$ | $a_{2,5}$ | $a_{2,6}$ | $a_{2,7}$ | $a_{2,8}$ | $a_{2,9}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{1,5}$ | $a_{1,6}$ | $a_{1,7}$ | $a_{1,8}$ | $a_{1,9}$ |

Slika 2.27: Ekvivalencija ćelija $a_{1,1}$ i ćelije $a_{4,4}$

Analogno dobijamo da vrijedi: $a_{4,4} = a_{2,7} = a_{5,1} = a_{3,4}$, $a_{1,1} = a_{4,7} = a_{2,1} = a_{5,4} = a_{3,7}$, $a_{5,1} = a_{2,4} = a_{4,1}$, $a_{4,1} = a_{1,4} = a_{5,7}$, $a_{4,1} = a_{1,7}$. Zaključivanjem na isti način slijedi da su ćelije $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, $a_{3,2}$, $a_{4,2}$, $a_{5,2}$, $a_{1,4}$, $a_{2,4}$, $a_{3,4}$, $a_{4,4}$, $a_{5,4}$, $a_{1,7}$, $a_{2,7}$, $a_{3,7}$, $a_{4,7}$ i $a_{5,7}$ međusobno ekvivalentne, odnosno da su sve generisane generatorom $a_{1,2}$ u traženoj grupi homologija. Analogno slijedi da su ćelije $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$, $a_{4,3}$, $a_{5,3}$, $a_{1,6}$, $a_{2,6}$, $a_{3,6}$, $a_{4,6}$, $a_{5,6}$, $a_{1,9}$, $a_{2,9}$, $a_{3,9}$, $a_{4,9}$ i $a_{5,9}$ međusobno ekvivalentne, odnosno da su sve generisane generatorom $a_{1,3}$ u traženoj grupi homologija. Zamjenjujući ćelije njihovim generatorima dobijamo ekvivalenciju ćelija i bojanje kvadratne torusne mreže 9×5 kao što je prikazano na Slici 2.28.

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |

Slika 2.28: Ekvivalencija ćelija i bojanje kvadratne torusne mreže 9×5

Postavimo li date poliomino oblike na tako dobijenu kvadratnu torusnu mrežu dobijamo da su u traženoj grupi homologija zadovoljene sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} 2a_{1,1} + 2a_{1,2} &= 0, & 3a_{1,2} + a_{1,1} + a_{1,3} &= 0, \\ 2a_{1,2} + 2a_{1,3} &= 0, & 3a_{1,3} + a_{1,1} + a_{1,2} &= 0, \\ 2a_{1,1} + 2a_{1,3} &= 0, & 3a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} &= 0. \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih relacija slijedi da je tražena grupa homologija izomorfna sa grupom $G\langle a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3} | 2a_{1,1} = 2a_{1,2} = 2a_{1,3} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = 0 \rangle$. Data torusna mreža sadržana je od 15 ćelija $a_{1,1}$, 15 ćelija $a_{1,2}$ i 14 ćelija $a_{1,3}$. Element koji odgovara datoj torusnoj mreži

$$\Theta = 15a_{1,1} + 14a_{1,2} + 15a_{1,3} = a_{1,1} + a_{1,3} \quad (2.8)$$

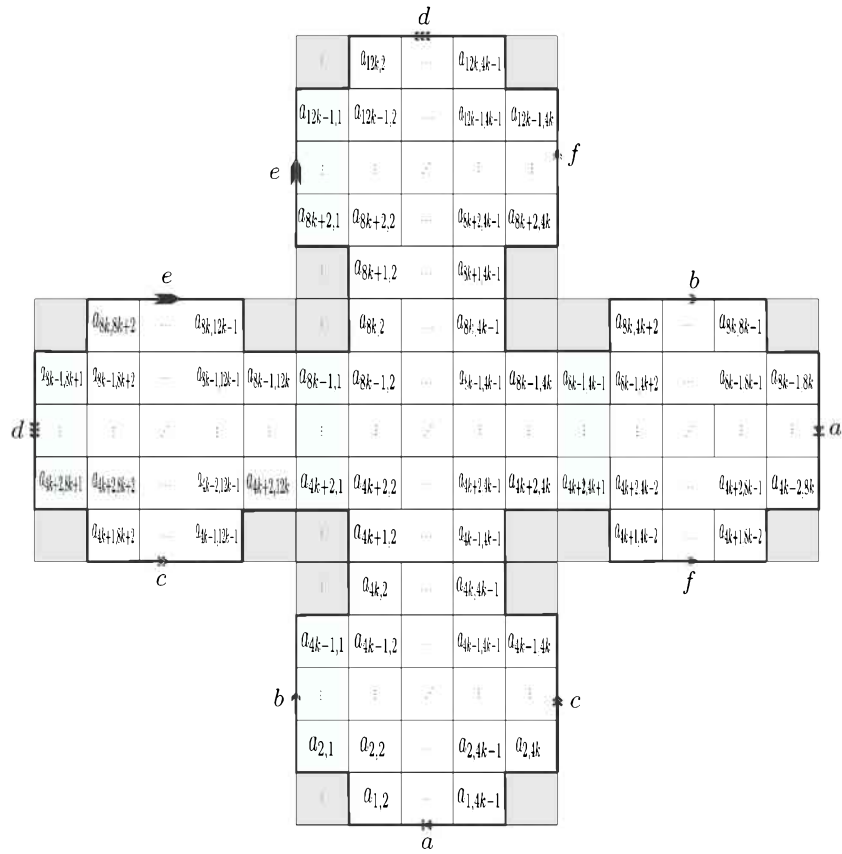
je netrivialan element grupe homologija popločavanja, to traženo popločavanje ne postoji. \blacklozenge

Sada ćemo dati prikaz nekoliko rezultata dobijenih za popločavanja na kompleksnijim površima sa granicom. Rezultati koji su dobijeni predstavljaju

rezultat autorovog istraživanja i Đorđa Baralića. Neke od dobijenih rezultata dajemo u Teoremi 2.3.4, Teoremi 2.3.5, Teoremi 2.3.6 i Teoremi 2.3.7.

Razmotrimo prvo popločavanje sa I i Z-tetrominima na neorijentabilnoj površi roda 6. Sada ćemo dati prikaz dobijenih rezultata objavljenih u [51], Teorema 2.3.4.

Teorema 2.3.4 *Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 6 sa granicom formirana identifikacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrži po pet $4k \times 4k$ kvadrata sa uklonjenim ugaonim poljima kao na Slici 2.29 ne može se popločati sa I-tetrominima i Z-tetrominima.*



Slika 2.29: Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 6 s granicom

Dokaz: Neka su ćelije na kvadratnoj mreži date površi označene kao na Slici 2.29. Identifikacijom vrhova na poligonalnom modelu date površi zaključujemo da su ćelije $a_{1,1}$, $a_{1,4k}$, $a_{4k,1}$, $a_{4k,4k}$, $a_{4k+1,8k+1}$, $a_{4k+1,12k}$, $a_{4k+1,1}$, $a_{4k+1,4k}$, $a_{4k+1,4k+1}$, $a_{4k+1,8k}$, $a_{8k,8k+1}$, $a_{8k,12k}$, $a_{8k,1}$, $a_{8k,4k}$, $a_{8k,4k+1}$, $a_{8k,8k}$, $a_{8k+1,1}$, $a_{8k+1,4k}$, $a_{12k,1}$ i $a_{12k,4k}$ obrisane, u topološkom smislu, nakon

lijepljenja one zajedno čine jedan disk, tj. date ćelije su predstavnici iste klase vrhova. Stoga, razmotrimo datu neorijentabilnu površ roda 6 sa datim lijepljenjem i sa jednom graničnom komponentom.

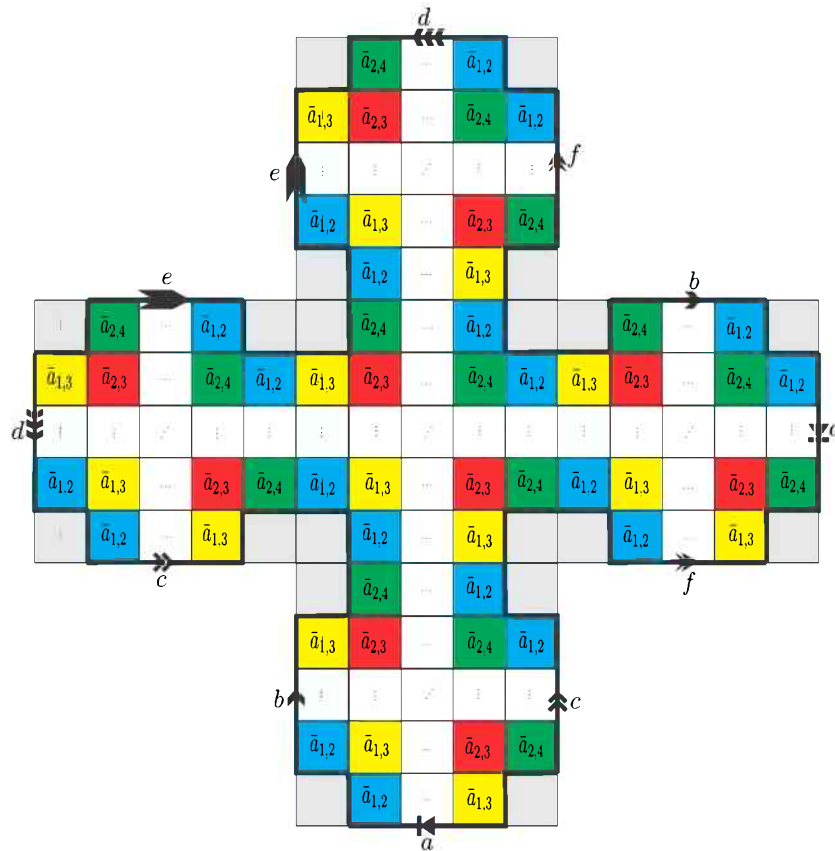
Koristeći I-tetromino je lako zaključiti da u grupi homologija traženog popločavanja vrijedi $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i+4,j}$ i $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+4}$.

Postavljanjem Z-tetromina bit će zadovoljena jedna od sljedeće dvije relacije

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i+2,j+1} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i+2,j+1} + \bar{a}_{i+2,j+2} = 0.$$

Odakle slijedi $\bar{a}_{i+2,j+2} = \bar{a}_{i,j}$.

Razmotrimo li postavljanje I-tetromina na presjek stranice d lako se vidi da vrijedi $\bar{a}_{4k+2,8k+1} = \bar{a}_{12k-3,2}$, $\bar{a}_{4k+2,8k+2} = \bar{a}_{12k-2,2}$, $\bar{a}_{4k+2,8k+3} = \bar{a}_{12k-1,2}$ i $\bar{a}_{4k+2,8k+4} = \bar{a}_{12k,2}$. Sa gore datim relacijama dobijamo ekvivalencije u grupi homologija traženog popločavanja kao što su prikazane na Slici 2.30.



Slika 2.30: Bojanje ekvivalentnih ćelija u kvadratnoj mreži na neorijentabilnoj površi roda 6 sa granicom

Nadalje, grupa homologija popločavanja je količnička slobodna Abelova grupa sa četiri generatora $\bar{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,3}, \bar{a}_{2,3}, \bar{a}_{2,4}$ određena sa sljedećim relacijama

$$\begin{aligned}\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,3} + \bar{a}_{2,3} + \bar{a}_{2,4} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{1,3} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,3} + 2\bar{a}_{2,3} &= 0, \\ 2\bar{a}_{2,3} + 2\bar{a}_{2,4} &= 0, \\ 2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,4} &= 0.\end{aligned}$$

Eliminacijom generatora $\bar{a}_{2,4}$ iz date prezentacije i razmatranjem generatora $\bar{a}_{1,3}$, $b = \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,3}$ i $c = \bar{a}_{1,3} + \bar{a}_{2,3}$, dobijamo da naša grupa homologija je izomorfna sa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^2$.

Naša kvadratna mreža sadrži $20k^2$ ćelija $\bar{a}_{1,2}$, $5(4k^2 - 1)$ ćelija $\bar{a}_{1,3}$ i $\bar{a}_{2,4}$, kao i $10(2k^2 - 1)$ ćelija $\bar{a}_{2,3}$. Element koji odgovara datoj mreži

$$\begin{aligned}\Theta &= 20k^2\bar{a}_{1,2} + 5(4k^2 - 1)\bar{a}_{1,3} + 10(2k^2 - 1)\bar{a}_{2,3} + 5(4k^2 - 1)\bar{a}_{2,4} \\ &= 20k^2(\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,3} + \bar{a}_{2,3} + \bar{a}_{2,4}) - 5\bar{a}_{1,3} - 10\bar{a}_{2,3} - 5\bar{a}_{2,4} \\ &= 5\bar{a}_{1,2} - 5\bar{a}_{1,3} = b - 10\bar{a}_{1,3}\end{aligned}$$

je netrivialan element tražene grupe homologija i traženo popločavanje nije moguće. ■

Teorema 2.3.5 *Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 4 sa granicom formirana identifikacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrži po pet $4k \times 4k$ kvadrata sa uklonjenim ugaonim ćelijama kao na Slici 2.31 ne može se popločati sa L-tetrominima.*

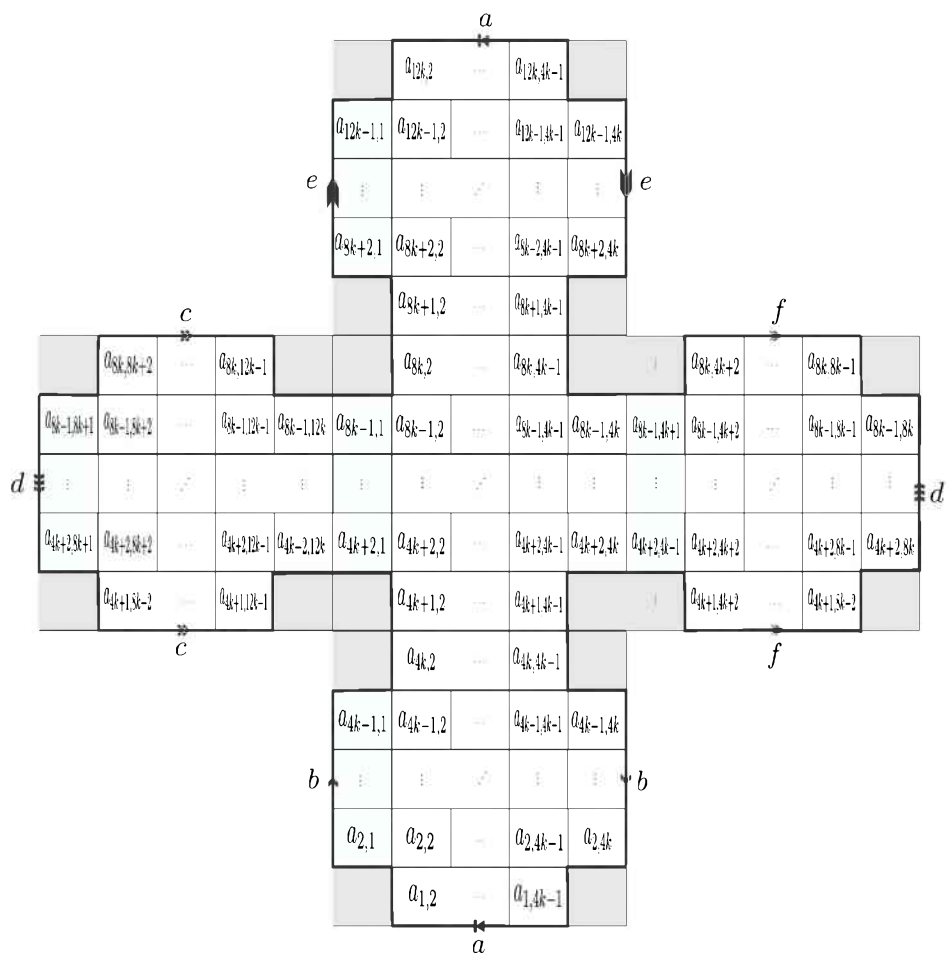
Dokaz: Model na Slici 2.31 poslije lijepljenja duž označenih strana i brisanja 20 ugaonih ćelija daje neorijentabilnu površ roda 4 sa tri granične komponente. Označimo ćelije u mreži kao u prethodnom primjeru.

Postavljajući L-tetromino u dati model u vertikalnom položaju uzimanja u obzir identifikaciju granice topološke površi dobijamo sljedeće dvije relacije

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+2,j-1} = 0 \quad \text{i} \quad (2.9)$$

$$\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i+2,j} + \bar{a}_{i+2,j+1} = 0 \quad (2.10)$$

u grupi homologija popločavanja. Iz (2.9) i (2.10) dobijamo da su u grupi homologija ovog popločavanja ćelije $\bar{a}_{i,j-1}$ i $\bar{a}_{i,j+1}$ ekvivalentne. Analogno, slijedi da su ćelije $\bar{a}_{i-1,j}$ i $\bar{a}_{i+1,j}$ ekvivalentne u grupi homologija ovog popločavanja.



Slika 2.31: Kvadratna mreža na neorijetabilnoj površi roda 4 sa tri granične komponente

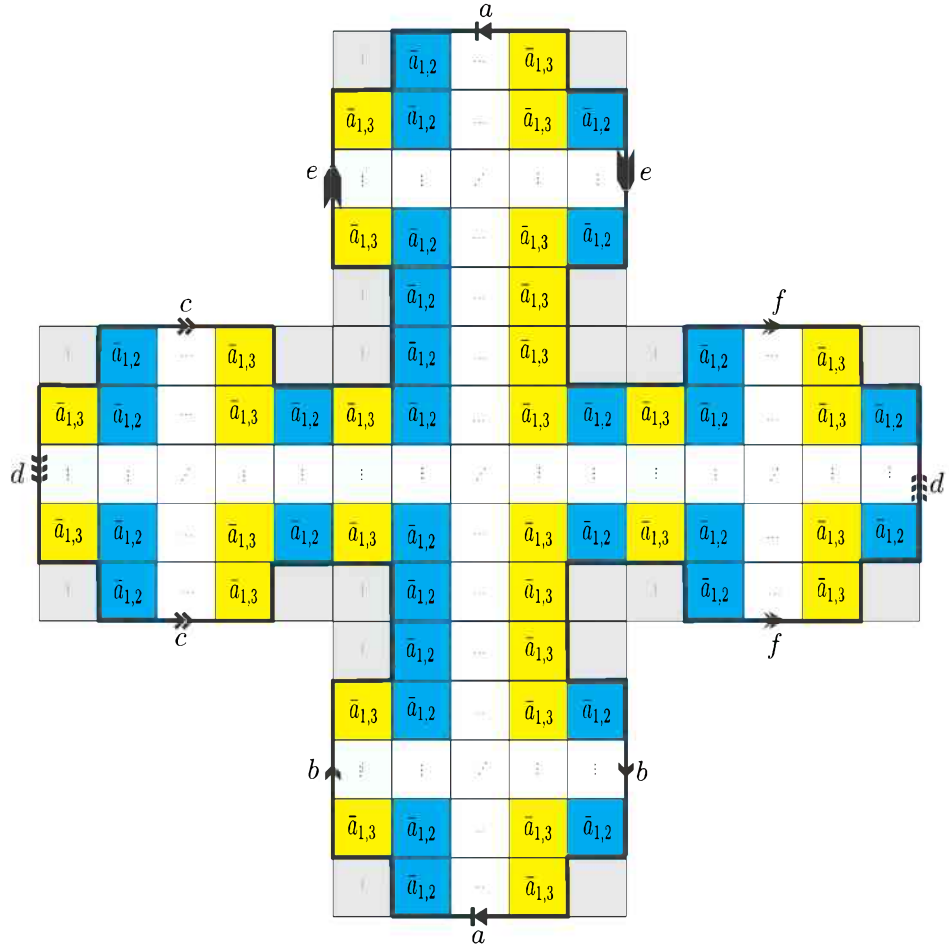
Sažmimo sve gornje jednakosti ćelija u

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{1,1}, & \text{ako je } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{1,2}, & \text{ako je } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{2,1}, & \text{ako je } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{2,2}, & \text{ako je } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Razmotrimo postavljanje L-tetromina duž stranice označene sa e na Slici 2.31 i odgovarajućih jednačina u grupi homologija popločavanja

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{1,2} &= 0 \quad \text{i} \\ \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,1} + \bar{a}_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

Iz prethodnih relacija zaključujemo da je $\bar{a}_{1,1} = \bar{a}_{2,1}$. Na sličan način dobijamo da je $\bar{a}_{1,2} = \bar{a}_{2,2}$. Dobijene ekvivalencije su date na Slici 2.32.



Slika 2.32: Ekvivalencija ćelija i bojanje kvadratne torusne mreže na neorijentabilnoj površi roda 4 sa granicom

Postavljajući L -tetromino na mrežu sa ekvivalentnim ćelijama, uključujući preklapanja gdje se lijepe strane, dobijamo jednu od sljedećih relacija

$$\begin{aligned} 3\bar{a}_{1,1} + \bar{a}_{1,2} &= 0 \quad \text{i} \\ 3\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,1} &= 0. \end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je $8\bar{a}_{1,1} = 0$. Nadalje, grupa homologija je izomorfna grupi

$$G\langle \bar{a}_{1,1} | 8\bar{a}_{1,1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_8.$$

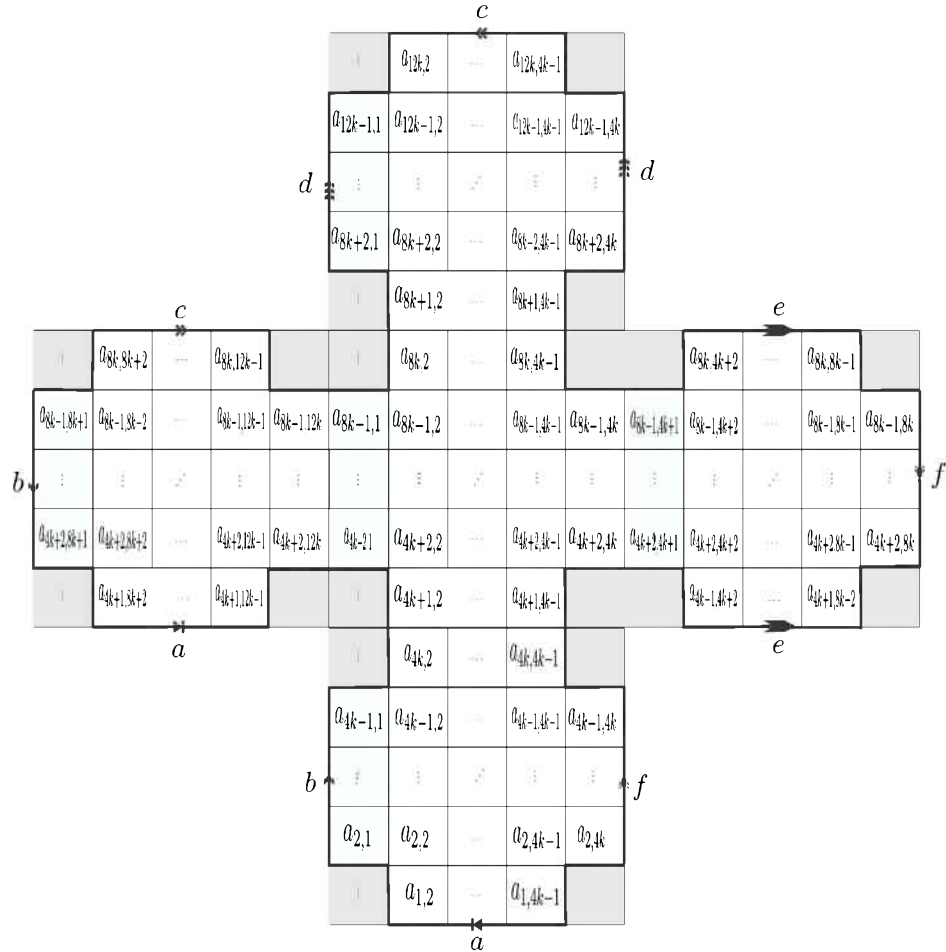
Naša kvadratna mreža sadrži $10(4k^2 - 1)$ ćelija $a_{1,2}$ i $a_{1,3}$, to je dodijeljeni element na ovoj mreži

$$\Theta = 10(4k^2 - 1)\bar{a}_{1,1} + 10(4k^2 - 1)\bar{a}_{1,2} = 4\bar{a}_{1,2}$$

netrivijalan element u traženoj grupi homologija popločavanja, pa popločavanje nije moguće na datoj mreži sa L-tetrominima. ■

Teorema 2.3.6 *Kvadratna mreža na neorijentabilnoj površi roda 3 sa granicom formirana identifikacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrži po pet $4k \times 4k$ kvadrata sa uklonjenim ugaonim poljima kao na Slici 2.33 ne može se popločati sa T-tetrominima.*

Dokaz:

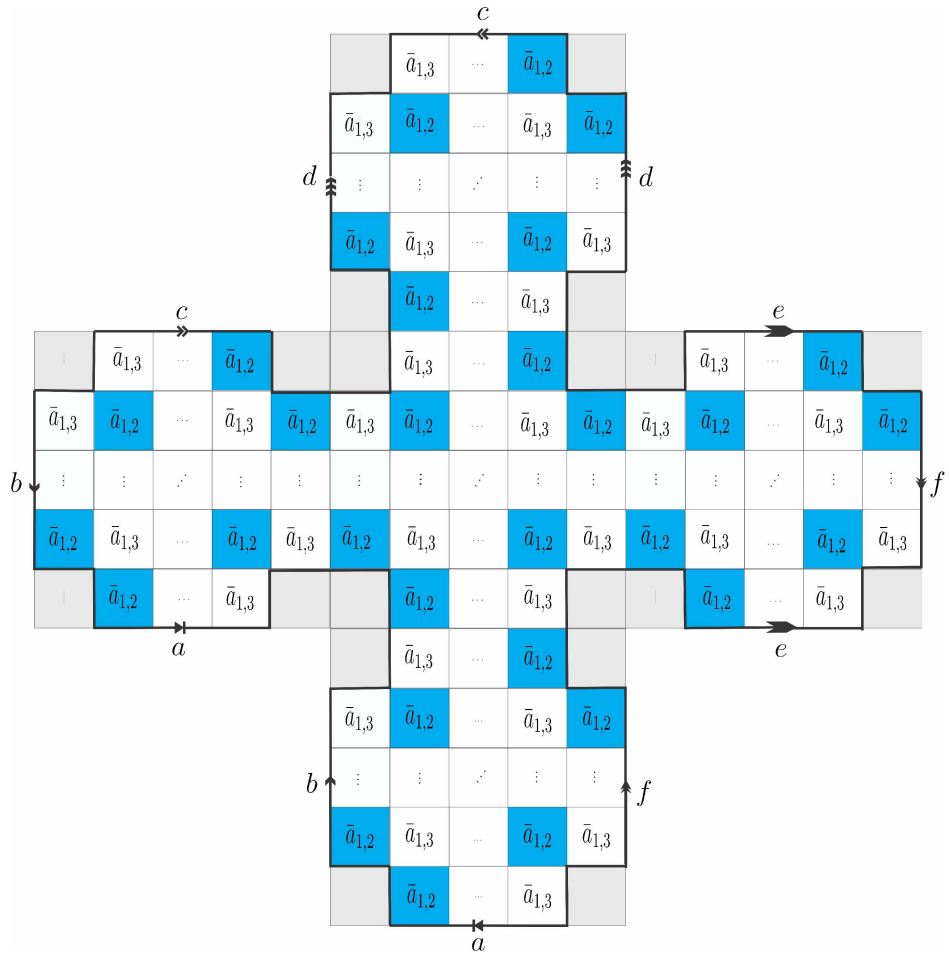


Slika 2.33: Kvadratna mreža na orijentabilnoj površi roda 3 sa granicom

Lako je provjeriti da model na Slici 2.33 poslije lijepljenja duž označenih stranica i brisanja 20 ugaonih ćelija daje površ sa graničnim komponentama. Označimo ćelije kao u prethodnom teoremu. Sljedeće jednakosti je lako dobiti

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{1,1}, & \text{ako je } i - j \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{a}_{1,2}, & \text{ako je } i - j \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

kao što je prikazano i na Slici 2.34.



Slika 2.34: Bojanje ekvivalentnih ćelija u kvadratnoj mreži na orijentabilnoj površi roda 3 sa granicom

Postavimo li T -tetromino na mrežu sa ekvivalentnim ćelijama, jednako postavljajući i na mjestima na kojima se lijepe stranice, dobijamo sljedeće

relacije

$$\begin{aligned} 3\bar{a}_{1,3} + \bar{a}_{1,2} &= 0 \quad \text{i} \\ 3\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{1,3} &= 0. \end{aligned}$$

Nadalje, dobijamo da je tražena grupa homologija izomorfna sa grupom

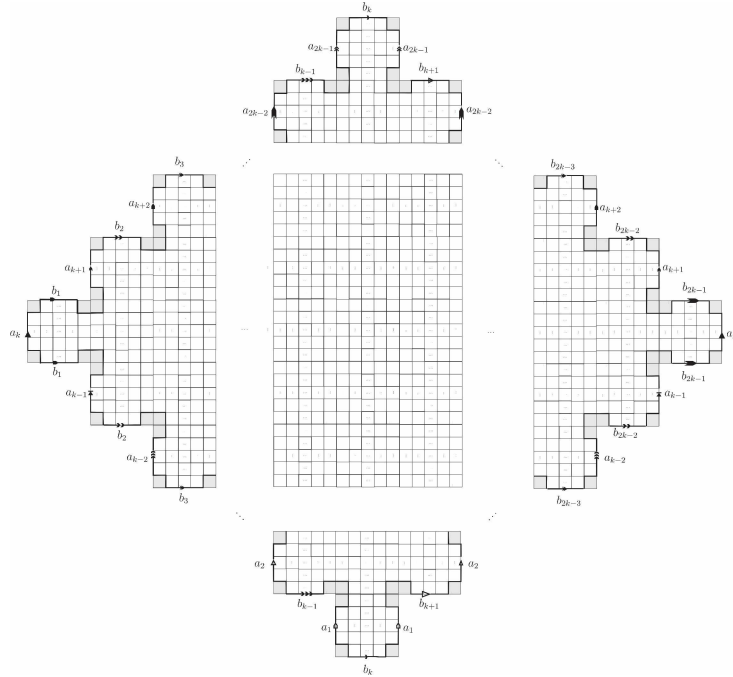
$$G\langle \bar{a}_{1,2} | 8\bar{a}_{1,2} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_8.$$

Naša kvadratna mreža sadrži $10(4k^2 - 1)$ ćelija $\bar{a}_{1,2}$ i $10(4k^2 - 1)$ ćelija $\bar{a}_{1,3}$, to znak elementa ovog popločavanja na datoj mreži je

$$\begin{aligned} \Theta &= 10(4k^2 - 1)\bar{a}_{1,2} + 10(4k^2 - 1)\bar{a}_{1,3} \\ &= 40k^2\bar{a}_{1,2} - 10\bar{a}_{1,2} - 120k^2\bar{a}_{1,2} + 30\bar{a}_{1,2} = 4\bar{a}_{1,2}. \end{aligned}$$

Θ je netrivialan element u traženoj grupi homologija popločavanja, i nadalje zaključujemo da je popločavanje nemoguće na datoj kvadratnoj mreži koristeći T-tetromino. ■

Teorema 2.3.7 *Kvadratna mreža na orijentabilnoj površi roda $2k - 1$ sa granicom formirana identifikacijom strana $(8k - 4)$ -ugaonika i koja sadrži $2k^2 - 2k + 1$ kvadrata od $(4k - 3)d$ strana, gdje je d pozitivan cijeli broj, sa uklonjenim ugaonim ćelijama kao na Slici 2.35 ne može se popločati sa $1 \times (4k - 3)$ poliomino oblikom.*



Slika 2.35: Kvadratna mreža na orijentabilnoj površi roda $2k - 1$ sa granicom

Dokaz: Sa Slike 2.35 je jasno da je data površ orijentabilna. Kao i sa drugim I -minima jednostavno slijedi da je

$$\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+4k-3} = \bar{a}_{i+4k-3,j}.$$

Koristeći ove relacije dobijamo da postoji $(4k-3)^2$ tipova ćelija $\bar{a}_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 4k-3$ u traženoj grupi homologija popločavanja. Uočimo da dobijamo $8k-6$ relacija

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4k-3} \bar{a}_{i,j} &= 0 \quad \text{za } i = 1, \dots, 4k-3 \quad \text{i} \\ \sum_{i=1}^{4k-3} \bar{a}_{i,j} &= 0 \quad \text{za } j = 1, \dots, 4k-3 \end{aligned}$$

dodijeljenih postavljanjima $1 \times (4k-3)$ poliomino dijela na tablu (uključujući postavljanja preko zalijepljenih strana). Nadalje, naša grupa homologija popločavanja je izomorfna sa

$$G\langle a_{i,j} | 1 \leq i, j \leq 4k-4 \rangle \cong \mathbb{Z}^{16(k-1)^2}.$$

Element Θ dodijeljen datoj mreži je

$$\Theta = -(2k-1) \sum_{i=2}^{4k-4} \sum_{j=2}^{4k-4} \bar{a}_{i,j}.$$

On predstavlja netrivialan element u traženoj grupi homologija popločavanja, te na osnovu toga slijedi dokaz date tvrdnje. ■

Glava 3

Simplicijalni kompleksi popločavanja

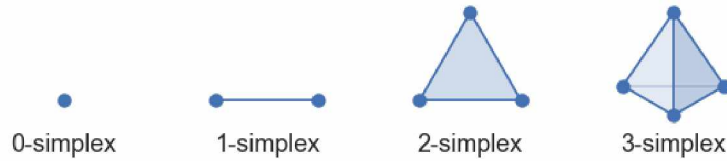
Proučavanjem simplicijalnih kompleksa napravljena je neraskidiva veza između geometrije i kombinatorike kao matematičkih grana. U geometrijskom smislu simplicijalni kompleksi u različitim dimenzijama čine: tačke, duži, trouglove, tetraedre, itd. Kao takvi objekti skupa čine jednu familiju koju nazivamo simplicijalni kompleksi. Geometrijski simplicijalni kompleksi predstavljaju homeomorfne objekte kompaktnim potprostorima Euklidskih prostora, pa predstavljaju interesantnu temu istraživanja u algebarskom, topološkom i kombinatornom smislu.

U ovom poglavlju dat ćemo pregled osnovnih svojstava simplicijalnih kompleksa, te povezati simplicijalne komplekse sa polinomima popločavanjima. Izlaganje datih osobina bazirano je na [4], [13], [15], [31], [65], [60], [61] i [62].

3.1 Simplicijalni kompleksi

U ovom odjeljku dat ćemo pregled osnovnih definicija i tvrdnji koje se odnose na simplicijalne komplekse.

Definicija 3.1.1 *n -simpleks* Δ^n je konveksan omotač skupa od $n + 1$ tačaka koje ne leže u istoj hiperravni u \mathbb{R}^n .



Slika 3.1: Primjeri simpleksa

Definicija 3.1.2 *Apstraktni simplicijalni kompleks na skupu \mathcal{S} je kolekcija K podskupova od \mathcal{S} takva da za svako $\sigma \in K$ važi da svi podskupovi od σ (uključujući i \emptyset) pripadaju K . Podskup $\sigma \in K$ nazivamo (apstraktni) simpleks od K . Jednoelementni podskupovi se nazivaju vrhovi od K . Ukoliko K sadrži sve jednoelementne podskupove od \mathcal{S} kažemo da je K simplicijalni kompleks na skupu vrhova \mathcal{S} . Dimenzija apstraktnog simpleksa $\sigma \in K$ je $\dim \sigma = |\sigma| - 1$, dimenzija apstraktnog simplicijalnog kompleksa je maksimalna dimenzija od dimenzija njegovih simpleksa.*

Definicija 3.1.3 Kolekcija L koja je podskup apstraktnog simplicijalnog kompleksa K koja je sama za sebe simplicijalni kompleks naziva se *simplicijalni potkompleks* od K .

Definicija 3.1.4 *Ulaganje simplicijalnog kompleksa K u \mathbb{R}^d je injektivno preslikavanje $i : |K| \rightarrow \mathbb{R}^d$.*

Pljosan ili *maksimalni simpleks* je strana simplicijalnog kompleksa K koja nije strana simpleksa veće dimenzije.

Geometrijska realizacija apstraktnog simplicijalnog kompleksa K na \mathcal{S} je poliedar $|K|$ za koji postoji bijekcija između skupa \mathcal{S} i skupa vrhova od $|K|$ koja simplekse iz K šalje na strane iz $|K|$. Prostor X također zovemo *poliedrom* ukoliko postoji simplicijalni kompleks K i homeomorfizam $h : |K| \rightarrow X$. Za K kažemo da je *triangulacija* prostora X .

Označimo sa $[m]$ skup $\{1, 2, \dots, m\}$.

Definicija 3.1.5 *Geometrijski simplicijalni kompleks* ili *poliedar* je podskup tačaka $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ koji predstavlja konačnu uniju U simpleksa bilo koje dimenzije takvu da su ispunjeni sljedeći uslovi:

- (1) Svaka strana simpleksa iz U pripada U ;
- (2) Presjek bilo koja dva simpleksa iz U je strana svakog od njih.

Simpleks iz U se naziva stranom od \mathcal{P} , 0-dimenzionalne stranice zovemo vrhovima, a 1-dimenzionalne stranice ivicama. Dimenzija geometrijskog simplicijalnog kompleksa \mathcal{P} je maksimalna dimenzija od dimenzija njegovih strana.

Propozicija 3.1.1 *Apstraktni simplicijalni kompleks K na skupu vrhova $[m]$ posjeduje geometrijsku realizaciju.*

3.2 Simplicijalni kompleksi asocirani poliomino popločavanjima

U ovom odjeljku uvest ćemo simplicijalne komplekse asocirane sa poliomino popločavanjima, te ispitati osnovna svojstva tako dobijenih simplicijalnih kompleksa popločavanja.

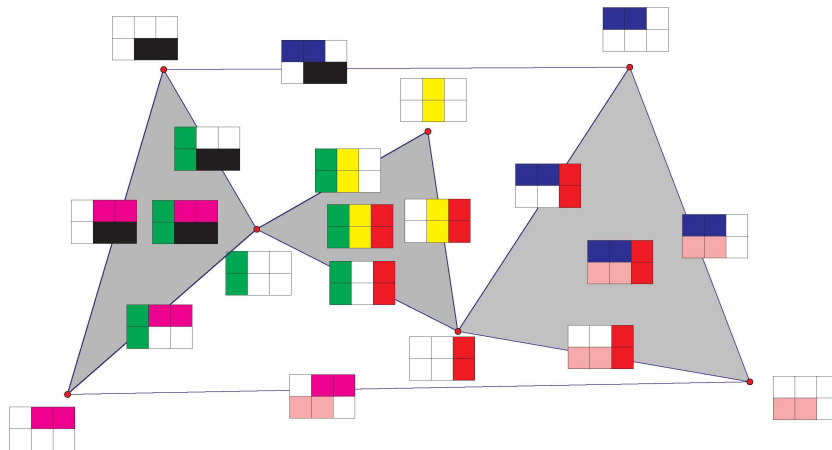
Definicija 3.2.1 *Postavljanje k poliomina na mrežu M bez preklapanja ili izlazaka van mreže nazivamo pravilnim.*

Sva pravilna postavljanja imaju strukturu simplicijalnog kompleksa gdje $(k - 1)$ -simpleksi odgovaraju pravilnom postavljanju k poliomina. Ova struktura je jasno zatvorena za podskupove jer uklanjanjem nekog broja pravilno postavljenih domina iz pravilnog postavljanja i dalje imamo domine koje se ne preklapaju. Ova opservacija važi generalno za skup poliomina oblika Σ koji postavljamo na region sa mrežom M .

Definicija 3.2.2 *$K(M; \Sigma)$ je simplicijalni kompleks čiji vrhovi odgovaraju pravilnom postavljanju jednog poliomina na M , a k -simpleksi odgovaraju pravilnom postavljanju $k + 1$ poliomino oblika na region M .*

Primjer 4 *Geometrijska interpretacija simplicijalnog kompleksa asociranog popločavanjem table dimenzije 2×3 sa dominom.*

Rješenje: Neka je data tabla dimenzije 2×3 . Razmotrimo moguća postavljanja domine (I_2 poliomino oblika) na datu tablu.



Slika 3.2: Geometrijska interpretacija simplicijalnog kompleksa koji nastaje postavljanjem domine na tablu 2×3

Svako moguće postavljanje domine predstavljat će jedan vrh simplicijalnog kompleksa popločavanja ili drugim riječima 0-simpleks. Ukoliko pored prvog postavljenog polimino oblika možemo dodati još jedan takav dobijamo 1-simpleks ili ivicu simplicijalnog kompleksa popločavanja. Nastavimo li sa dodavanjem polimino oblika dobivat ćemo simplekse veće dimenzije. Na Slici 3.2 dajemo prikaz geometrijske interpretacije simplicijalnog kompleksa popločavanja asociranog popločavanjem table 2×3 sa dominom. ♦

Ovi simplicijalni kompleksi nose važne informacije o odnosu M i Σ . Sljedeća osobina je očigledna iz definicije $K(M; \Sigma)$.

Propozicija 3.2.1 *Maksimalni broj polimino iz skupa Σ koji se može postaviti na M jednak je $\dim K(M; \Sigma) + 1$.*

Dokaz: Prema definiciji $K(M; \Sigma)$ na region M se može postaviti $\dim K(M; \Sigma) + 1$ polimino oblika bez preklapanja. Sa druge strane ako bi bilo moguće postaviti $n > \dim(K(M; \Sigma)) + 1$ polimino oblika iz Σ u M tada bi maksimalni simpleks bio bar dimenzije $n - 1$. Drugim riječima vrijedilo bi da je $n - 1 > \dim(K(M; \Sigma)) + 1$, što predstavlja kontradikciju sa definicijom dimenzije simplicijalnog kompleksa. ■

Na osnovu definicije simplicijalnog kompleksa popločavanja ivice datog simplicijalnog kompleksa popločavanja odgovaraju postavljanjima polimino oblika koji se međusobno ne sijeku. Međutim, ako uzmemo skup postavljanja polimino oblika koji se međusobno ne sijeku oni po definiciji razapinju simpleks u $K(M; \Sigma)$ pa je on po definiciji flag. Flag svojstvo simplicijalnih kompleksa je proučavano u [22] i [37].

Propozicija 3.2.2 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K(M; \Sigma)$ su flag kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat konačan skup polimino oblika Σ kojima popločavamo region M i neka je $K(M; \Sigma)$ njemu asocirani kompleks popločavanja. Na osnovu definicije simplicijalnog kompleksa popločavanja ivice datog simplicijalnog kompleksa odgovaraju postavljajima polimino oblika koji se međusobno ne sijeku. Međutim, ako posmatramo skup polimino oblika od kojih se nikoja dva polimina ne sijeku, tada oni po definiciji razapinju simpleks u $K(M; \Sigma)$, pa je on po definiciji flag. ■

3.3 f, g i h vektori simplicijalnih kompleksa popločavanja

Sada ćemo definisati neke od invarijanti simplicijalnih kompleksa.

Definicija 3.3.1 *f-vektor od $(n - 1)$ dimenzionalnog simplicijalnog kompleksa K^{n-1} je cjelobrojni vektor*

$$\mathbf{f}(K^{n-1}) = (\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-1}),$$

gdje je $f_{-1} = 1$ i $f_i = f_i(K^{n-1})$ označava broj strana dimenzije i -lica od K^{n-1} za svako $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Definicija 3.3.2 *Neka je dat simplicijalni kompleks K^{n-1} . h-vektorom od K^{n-1} zovemo cjelobrojni vektor $\mathbf{h}(K^{n-1}) = (\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1})$, gdje su \mathbf{h}_i definisani jednačinom*

$$\mathbf{h}_0 t^n + \dots + \mathbf{h}_{n-1} t + \mathbf{h}_n = (t - 1)^n + \mathbf{f}_0 (t - 1)^{n-1} + \dots + \mathbf{f}_{n-1},$$

gdje je $\mathbf{f}(K^{n-1}) = (\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-1})$.

Definicija 3.3.3 *Neka je dat simplicijalni kompleks K^{n-1} . Niz $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$, gdje*

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i-1}, i > 0,$$

a \mathbf{h}_i predstavljaju vrijednosti h-vektora, se naziva g-vektorom simplicijalnog kompleksa K^{n-1} .

Za više o g-vektoru pogledati [80].

f-vektori simplicijalnih kompleksa opisuju broj načina da postavimo k različitih polimina iz Σ u M bez preklapanja. Svakom postavljanju k različitih polimino oblika iz Σ u M odgovara jedan simpleks dimenzije

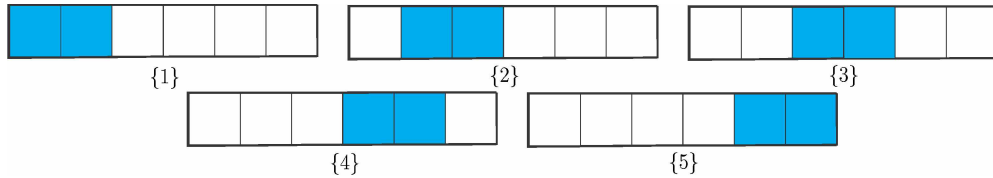
$k - 1$. Odakle proizilazi da je koordinata f_{k-1} vektora opisala broj različitih postavljanja poliomino oblika na datu mrežu. Generalno, ovi kompleksi su komplikovani i za jednostavne primjere, a mi ćemo u ovom istraživanju da se baziramo najviše na najjednostavnijim slučajevima kada je skup Σ skup domina i/ili jednostavnijih poliomino oblika, a region M ploča (mreža) dimenzija $m \times n$ u ravni ili na torusu. Odgovarajuće simplicijalne komplekse u ravni obilježavat ćemo sa $K_{P_s}(D_{m \times n})$, a na torusu sa $K_{P_s}(\mathbb{T}_{m \times n})$, gdje P predstavlja ime poliomino oblika koji postavljamo, a s broj jediničnih kvadrata od kojih se dati poliomino oblik sastoji.

Razmotrimo prvo simplicijalne komplekse koji se mogu razapeti na tabli $1 \times n$ u ravni. U sljedećem primjeru ilustrirat ćemo ideju i način razapinjanja simplicijalnog kompleksa na datoj tabli.

Primjer 5 f -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{1 \times 6})$ dat je sa

$$f(K_{I_2}(D_{1 \times 6})) = (5, 6, 1).$$

Rješenje: Neka je data kvadratna tabla dimenzije 1×6 . Razmotrimo sva moguća postavljanja domine (I_2 poliomino oblika) na datu tablu. Broj različitih postavljanja domine na datu tablu predstavljat će vrhove simplicijalnog kompleksa koji se na datoj tabli razapinje postavljajući dominu, tj. $f_0 = 5$.



Stranice simplicijalnog kompleksa predstavljat će mjesta gdje se dvije domine mogu postaviti bez presijecanja. Dvije domine bez presijecanja možemo postaviti u sljedećim slučajevima: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ i $\{3, 5\}$, tj. $f_1 = 6$. Stranice simplicijalnog kompleksa ili 2-simplekse predstavljat će moguća postavljanja tri domine na datu tablu bez presijecanja. Uočimo takva moguća postavljanja domine na datu tablu. Analizom svih mogućih slučajeva dobijamo da je moguće samo jedno takvo postavljanje $\{1, 3, 5\}$, tj. $f_2 = 1$. ♦

Prisjetimo se Lema 3.3.1

Lema 3.3.1 Broj rješenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \tag{3.1}$$

u skupu nenegativnih cijelih brojeva je $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dokaz Leme može se pronaći u [5].

Teoremom 3.3.1 dajemo generalnu tvrdnju i njen dokaz za određivanje \mathbf{f} vektora simplicijalnog kompleksa koji se razapinje na tabli dimenzije $1 \times n$ postavljanjem na nju m jediničnih kvadrata.

Teorema 3.3.1 \mathbf{f} -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_m}(D_{1 \times n})$ dat je sa

$$\mathbf{f}_k(K_{I_m}(D_{1 \times n})) = \binom{n - m(k + 1) + k + 1}{k + 1}.$$

Dokaz: Neka je data tabla $1 \times n$. Razmotrimo sva moguća postavljanja poliomino oblika $1 \times m$ na datu tablu. Jedan poliomino oblik na datu tablu možemo postaviti na $n - (m - 1)$ različitih načina. Postavljanje $k + 1$ $1 \times m$ poliomina na tablu indukuje $k + 2$ negativnih cijelih brojeva a_1, a_2, \dots, a_{k+2} koji zadovoljavaju jednačinu (3.2), gdje je a_i broj neprekrivenih polja između i -tog i $(i + 1)$ -og poliomina gledano s lijeva na desno. Tada vrijedi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k+2} = n - mk - m. \quad (3.2)$$

Broj različitih k -simpleksa od $K_{I_m}(D_{1 \times n})$ jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednačine (3.2). Na osnovu Leme 3.3.1 slijedi da je broj različitih rješenja prethodne jednačine jednak

$$\mathbf{f}_k(K_{I_m}(D_{1 \times n})) = \binom{n - m(k + 1) + k + 1}{k + 1}.$$

■

Za $m = 2$ i $m = 3$ dobijamo da je

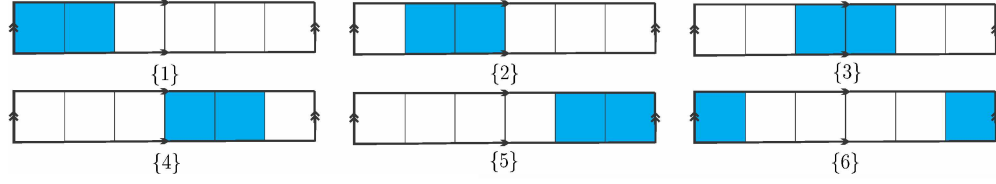
$$\mathbf{f}_k(K_{I_2}(D_{1 \times n})) = \binom{n - k - 1}{k + 1} \quad \text{i} \quad \mathbf{f}_k(K_{I_3}(D_{1 \times n})) = \binom{n - 2k - 2}{k + 1}.$$

Razmotrimo sada slučaj kada dominu postavljamo na kvadratnu torusnu mrežu dimenzije $1 \times n$. U tu svrhu razmotrimo prvo na primjeru razapinjanja takvog simplicijalnog kompleksa na kvadratnu torusnu mrežu dimenzije 1×6 .

Primjer 6 \mathbf{f} -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1 \times 6})$ dat je sa

$$\mathbf{f}(K_{I_2}(\mathbb{T}_{1 \times 6})) = (6, 9, 2).$$

Rješenje: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije 1×6 . Analogno primjeru razapinjanja simplicijalnog kompleksa na tablu odredimo vrhove simplicijalnog kompleksa na torusu, tj. $\mathbf{f}_0 = 6$.



1-simpleksi traženog simplicijalnog kompleksa su: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 6\}$ i $\{4, 5\}$, a 2-simpleksi su dati sa $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 4, 5\}$. ♦

Sljedećom teoremom dajemo tvrdnju i dokaz određivanja \mathbf{f} -vektora simplicijalnog kompleksa $K_{I_m}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ za I -omino sa m jediničnih kvadrata.

Teorema 3.3.2 \mathbf{f} -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_m}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ dat je sa

$$\mathbf{f}_k(K_{I_m}(\mathbb{T}_{1 \times n})) = (m-1) \binom{n + (1-m)k - m}{k} + \binom{n - (m-1)(k+1)}{k+1}.$$

Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije $1 \times n$. Razmotrimo moguća postavljanja polimino oblika $1 \times m$ na datu torusnu mrežu. Razmotrit ćemo dva slučaja. U prvom slučaju razmotrimo postavljanje polimino oblika tako da ne siječe stranicu lijepljena.



Slika 3.3: Postavljanje I_m polimino da ne siječe stranicu lijepljenja

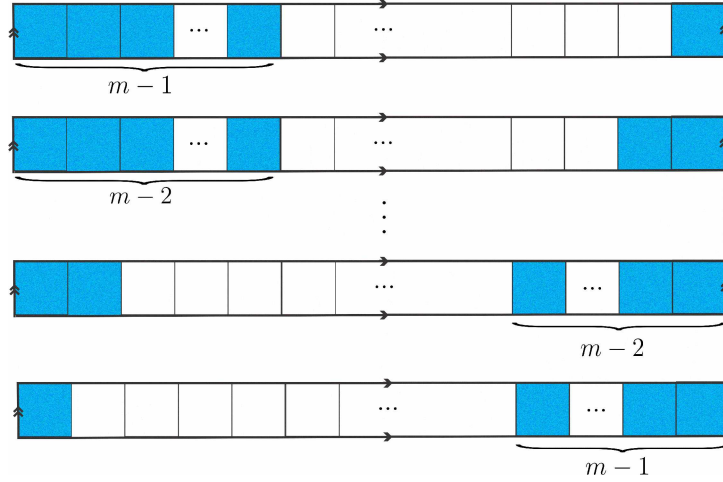
Postavljanje $k+1$ $1 \times m$ polimino na torusnu mrežu indukuje $k+2$ negativnih cijelih brojeva a_1, a_2, \dots, a_{k+2} koji zadovoljavaju jednačinu (3.3), gdje je a_i broj neprekrivenih polja između i -tog i $i+1$ polimino gledano s lijeva na desno. Tada vrijedi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k+2} = n - mk - m. \quad (3.3)$$

Broj različitih $k+1$ postavljanja domina na datu torusnu mrežu jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednačine (3.3). Na osnovu Leme 3.3.1 slijedi da je broj različitih rješenja prethodne jednačine jednak $\binom{n-(m-1)(k+1)}{k+1}$.

U drugom slučaju razmotrit ćemo situacije kada polimino siječe stranicu lijepljenja kao što je to prikazano na Slici 3.4. To možemo uraditi na $m-1$ način i faktički nam ostaje postavljanje k polimino oblika $1 \times m$ na tablu $1 \times (n-m)$, što indukuje jednačinu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1} = n - mk - m. \quad (3.4)$$



Slika 3.4: Postavljanje poliomina $1 \times m$ da siječe stranicu lijepljenja

Analogno, kao u prvom slučaju na osnovu Leme 3.3.1 dobijamo da je broj različitih cjelobrojnih rješenja jednačine (3.4) jednak $\binom{n+(1-m)k-m}{k}$. Na osnovu rješenja prvog i drugog slučaja slijedi

$$f_k(K_m(\mathbb{T}_{1 \times n})) = (m-1) \binom{n+(1-m)k-m}{k} + \binom{n-(m-1)(k+1)}{k+1}.$$

■

Razmotrimo sada tablu $2 \times n$ i simplicijalne komplekse koji se razapinju postavljenjem domine na datu tablu, tj. $K_{I_2}(D_{2 \times n})$. U sljedećoj tabeli dajemo prikaz f -vektora za neke konkretne vrijednosti broja n .

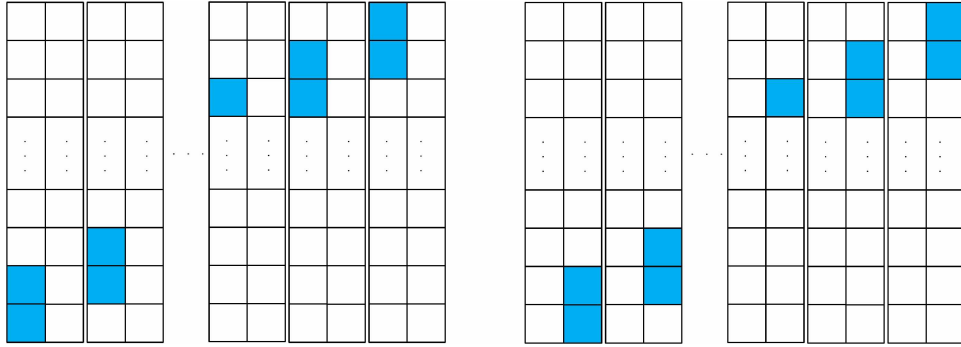
Tabela 3.1: Pregled f -vektora simplicijanlog kompleksa $K_{I_2}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4 | 2 | | | | | | |
| 3 | 7 | 11 | 3 | | | | | |
| 4 | 10 | 29 | 26 | 5 | | | | |
| 5 | 13 | 56 | 94 | 56 | 8 | | | |
| 6 | 16 | 92 | 234 | 263 | 114 | 13 | | |
| 7 | 19 | 137 | 473 | 815 | 667 | 223 | 21 | |
| 8 | 22 | 191 | 838 | 1982 | 2504 | 1577 | 424 | 34 |

Propozicija 3.3.1

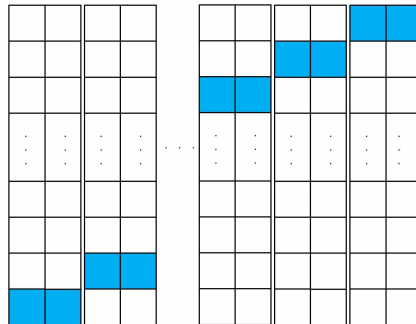
$$\begin{aligned} f_0(D_{2 \times n}) &= 3n - 2, \\ f_1(D_{2 \times n}) &= \frac{9n^2 - 27n + 22}{2} \\ f_{n-1}(D_{2 \times n}) &= \prod_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i} + 2 \prod_{0 \leq i < j \leq n-1}^{n-2} a_i a_{n-1-j} \end{aligned}$$

Dokaz: Razmotrimo moguća postavljanja domina na datu tablu dimenzija $2 \times n$. Svaka mogućnost postavljanja domina na tablu $2 \times n$ predstavlja jedan vrh simplicijalnog kompleksa. Domine možemo postaviti u prvom ili drugom stupcu kao što je prikazano na sljedećim slikama.



Slika 3.5: Postavljanje domina u 1. stupac Slika 3.6: Postavljanje domina u 2. stupac

Unutar svakog stupca uspravno dominu možemo postaviti na $n-1$ načina, tj. uspravno dominu možemo postaviti na $2(n-1)$ načina. U vodoravnom postavljanju dominu možemo postaviti na n načina.



Slika 3.7: Postavljanja domina horizontalno

Na osnovu čega možemo zaključiti da je ukupan broj vrhova simplicijalnog kompleksa koji možemo razapeti na tabli $2 \times n$ jednak

$$2(n-1) + n = 2n - 2 + n = 3n - 2.$$

Odredimo broj ivica simplicijalnog kompleksa koji se može razapeti na tabli $2 \times n$. U tu svrhu razmatrat ćemo postavljanja domina na tablu uspravno-uspravno (UU), uspravno-vodoravno (UV), vodoravno-vodoravno (VV). Posmatramo li moguće kombinacije postavljanja domina UU, tada u svaki stupac možemo postaviti $n-1$ dominu. Odnosno, na cijelu tablu možemo postaviti $(n-1)^2$ načina. Horizontalno dominu na tabli $2 \times n$ možemo postaviti na $\binom{n}{2}$ načina. Preostaje nam još razmotriti mogućnosti kombinacija UV. U prebrojavanju UV kombinacija možemo razmotriti dvije situacije, kada se domina postavi vertikalno da prekriva prvo ili zadnje polje u stupcu i kada se nalazi u sredini vertikalno postavljena domina. U slučaju kada se domina vertikalno postavi tako da prekrije prvo ili zadnje polje u stupcu na tablu možemo staviti $4(n-2)$ domina. Ako se vertikalno postavljena domina nalazi negdje u sredini tada dominu možemo postaviti na $2(n-2)(n-3)$ načina. Saberemo li sve dobijene kombinacije dobijamo:

$$\begin{aligned} f_1 &= \binom{n}{2} + (n-1)^2 + 4(n-2) + 2(n-2)(n-3) \\ &= \frac{9n^2 - 27n + 22}{2}. \end{aligned}$$

Razmotrimo bojanje table $D_{2 \times n}$. Postavimo li na tablu $(n-1)$ dominu tako da se domine međusobno ne preklapaju, tada nam ostaje jedno crno i jedno bijelo polje neprekriveno. Ukoliko obje leže u $(i+1)$ koloni tada na tablu $2 \times i$ možemo postaviti i domina, a na tablu $2 \times (n-i-1)$ možemo postaviti $n-i+1$ dominu. Ako jedna neprekrivena ćelija leži u $(i+1)$ -oj, a druga u $(j+1)$ koloni, primijetimo da dio koji počinje u $(i+1)$ a završava u $(j+1)$ koloni se može na jedinstven način prekriti. Takvim prekrivanjem nam ostaju table $2 \times i$ i $2 \times (n-j-1)$ čime je dokazana navedena rekurentna relacija. ■

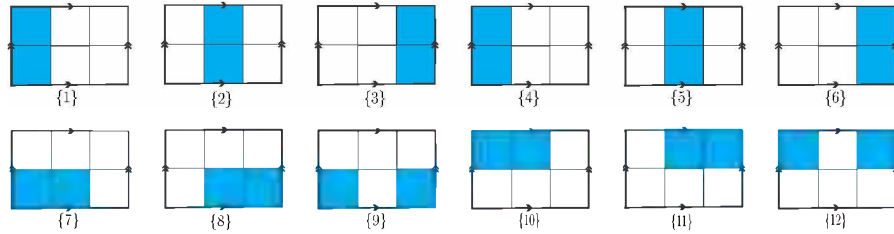
Razmotrimo sada simplicijalne komplekse popločavanja koji su asocirani postavljanjem domine na kvadratnu torusnu mrežu. U tu svrhu razmotrimo simplicijalni kompleks $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times 3})$.

Primjer 7 f -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times 3})$ dat je sa

$$f(K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,3})) = (12, 33, 14).$$

Rješenje: Razmotrimo moguća postavljanja domine na kvadratnu torusnu mrežu dimenzije 2×3 . Dominu možemo postaviti uspravno $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$,

vodoravno ($\{7\}, \{8\}, \{10\}, \{11\}$), uspravno kada domina prelazi stranicu lijepljenja ($\{4\}, \{5\}, \{6\}$) i vodoravno kada domina prelazi stranicu lijepljenja ($\{9\}, \{12\}$).



Moguća postavljanja domine na datu kvadratnu torusnu mrežu predstavljaju 0-simplekse u traženom simplicijalnom kompleksu, odnosno dobijamo da je $f_0 = 12$. Analogno kao u prethodnim primjerima dobijamo sljedeće 1-simplekse: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,8\}, \{1,11\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,9\}, \{2,12\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{3,10\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{4,8\}, \{4,11\}, \{5,6\}, \{5,9\}, \{5,12\}, \{6,7\}, \{6,10\}, \{7,10\}, \{7,11\}, \{7,12\}, \{8,10\}, \{8,11\}, \{8,12\}, \{9,10\}, \{9,11\}, \{9,12\}$. Na osnovu čega slijedi da je $f_1 = 33$. Nadalje, dobijamo 2-simplekse: $\{1,2,3\}, \{1,2,6\}, \{1,3,5\}, \{1,5,6\}, \{1,8,11\}, \{2,3,4\}, \{2,4,6\}, \{2,9,12\}, \{3,4,5\}, \{3,7,10\}, \{4,5,6\}, \{4,8,11\}, \{5,9,12\}, \{6,7,10\}$. Odakle slijedi da je $f_2 = 14$. ♦

U sljedećoj tabeli dajemo pregled f -vektora simplicijalnih kompleksa popločavanja asociranih postavljanjem domina na kvadratnu torusnu mrežu dimenzije $2 \times n$ za neke konkretne vrijednosti n .

Tabela 3.2: Pregled f -vektora simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | 12 | 33 | 14 | | |
| 4 | 16 | 76 | 112 | 36 | |
| 5 | 20 | 136 | 371 | 376 | 102 |

Propozicija 3.3.2

$$\begin{aligned} f_0(\mathbb{T}_{2 \times n}) &= 4n, \\ f_1(\mathbb{T}_{2 \times n}) &= 8n^2 - 13n. \end{aligned}$$

Razmotrimo sada simplicijalni kompleks asociran popločavanjem table $2 \times n$, kada popločavanje vršimo sa L -tromino poliomino oblikom. Dobijeni rezultat dajemo u sljedećoj teoremi.

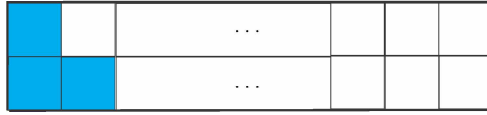
Teorema 3.3.3 f -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{L_3}(D_{2 \times n})$ dat je rekurzivnom relacijom

$$f_0 = 4(n - 1)$$

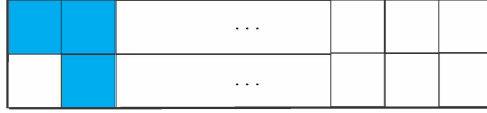
$$f_1 = 8n^2 - 38n + 44$$

$$f_k = f_k(K_{L_3}(D_{2 \times (n-1)})) + 4f_{k-1}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-2)})) + 2f_{k-2}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-3)})).$$

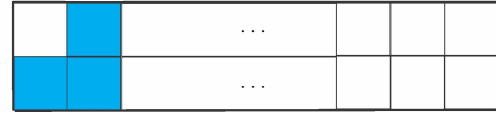
Dokaz: Neka je data kvadratna tabla $2 \times n$. L-tromino na datu tablu možemo postaviti na $(n - 1)$ različit način. Budući da L-tromino možemo postaviti obzirom na četiri različite orijentacije slijedi da je $f_0 = 4(n - 1)$.



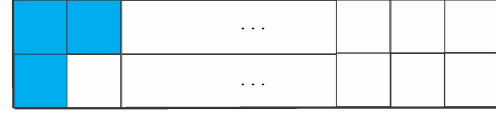
Slika 3.8: L-tromino u orijentaciji 1



Slika 3.10: L-tromino u orijentaciji 3



Slika 3.9: L-tromino u orijentaciji 2



Slika 3.11: L-tromino u orijentaciji 4

Odredimo sada f_1 , tj. razmotrimo broj različitih mogućnosti postavljanja dva L-tromina na datu tablu. U prvom slučaju razmotrimo postavljanje dva L-tromina postavljena u istoj orijentaciji. Neka je fiksirano prvo postavljanje L-tromina u orijentaciji 1 kao što je prikazano na Slici 3.8. Tada novi L-tromino na datu tablu u istoj orijentaciji možemo postaviti na $n - 3$ različita načina. Fiksiramo li postavljanje L-tromina u drugi stupac tada novi L-tromino možemo postaviti na $n - 4$ različita načina. Pomjeranjem i fiksiranjem L-tromina u naredni stupac broj različitih kombinacija u svakom takvom koraku se smanjuje za 1. Stoga možemo zaključiti da je ukupan broj postavljanja L-tromina u orijentaciji 1, jednak sumi prvih $n - 3$ prirodnih brojeva, tj. $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$. U svakoj od prikazanih orijentacija vrijedi ista zakonitost zaključivanja. Stoga možemo zaključiti da je broj kombinacija postavljanja L-tromina u istoj orijentaciji

$$4 \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{2} = 2(n-3)(n-2).$$

Nadalje, razmotrimo postavljanje L-tromina u kombinaciji datih orijentacija. Prvo razmotrimo postavljanje dva L-tromina u kombinaciji prve i druge

orijentacije, kao što je prikazano na Slici 3.8 i Slici 3.9. Tada sa prvim i zadnjim postavljenim L-trominom možemo postaviti $2(n - 3)$ L-tromina. Kod preostalih $(n - 3)$ različitih oblika L-tromina možemo postaviti $(n - 4)$ različita L-tromina. Odnosno, ukupno u kombinaciji prve i druge orijentacije možemo postaviti

$$2(n - 3) + (n - 3)(n - 4)$$

različitih kombinacija L-tromina. Analognim razmatranjem slijedi da u kombinaciji prve i treće, te druge i četvrte kombinacije možemo postaviti po

$$(n - 2) + (n - 2)(n - 3)$$

različitih kombinacija dva L-tromina. U prvoj i četvrtoj, drugoj i trećoj, te u trećoj i četvrtoj kombinaciji možemo postaviti po

$$2(n - 3) + (n - 3)(n - 4)$$

različitih kombinacija L-tromina. Sabiranjem svih mogućih kombinacija slijedi da je

$$\mathbf{f}_1(K_{L_3}(D_{2 \times n})) = 8n^2 - 38n + 44.$$

Dokažimo sada općenito tvrdnju za $\mathbf{f}_k(K_{L_3}(D_{2 \times n}))$. Pretpostavimo da su dva uspravna polja date table ostala neprekrivena. Tada nam je ostao dio table dimenzije $2 \times (n - 1)$ neprekriven. Preostali dio ćemo prekrivati sa k L-tromino oblika. Broj takvih prekrivanja je određen sa $\mathbf{f}_k(K_{L_3}(D_{2 \times (n-1)}))$. U sljedećem slučaju razmotrimo tablu $2 \times n$ tako da su prva dva uspravna polja na tabli prekrivena. Tada je jedno od polja do prekrivenog uspravnog stupca također prekriveno (Slika 3.8 i Slika 3.11), a jedno prazno. Tada nam ostaje tabla dimenzije $2 \times (n - 2)$ prazna i prazni dio table popunjavamo sa $k - 1$ L-tromino oblika, a broj takvih prekrivanja jednak je $2\mathbf{f}_{k-1}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-2)}))$ (simetrija). Razmotrimo sada slučaj kad su popunjena prva dva stupca date table $2 \times n$. Tada nam neprekriveno ostaje $2 \times (n - 3)$ table, a broj takvih prekrivanja određen je sa $2\mathbf{f}_{k-2}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-3)}))$ (simetrija). Preostaje nam još razmotriti slučaj kada je jedno polje u prvom stupcu date table $2 \times n$ prazno (Slika 3.9 i Slika 3.10). Tada nam preostaje da prekrijemo $2 \times (n - 2)$ polja date table, broj takvih prekrivanja jednak je $2\mathbf{f}_{k-1}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-2)}))$ (simetrija). Sabirajući sve navedene slučajeve dobijamo traženu rekursiju $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k(K_{L_3}(D_{2 \times (n-1)})) + 4\mathbf{f}_{k-1}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-2)})) + 2\mathbf{f}_{k-2}(K_{L_3}(D_{2 \times (n-3)}))$. ■

U sljedećoj tabeli dajemo pregled \mathbf{f} -vektora simplicijalnog kompleksa za neke konkretne n .

Tabela 3.3: Pregled \mathbf{f} -vektora simplicijanlog kompleksa $K_{L_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | 8 | 2 | | | | | | |
| 4 | 12 | 20 | | | | | | |
| 5 | 16 | 54 | 16 | | | | | |
| 6 | 20 | 104 | 112 | 4 | | | | |
| 7 | 24 | 170 | 352 | 108 | | | | |
| 8 | 28 | 252 | 800 | 664 | 48 | | | |
| 9 | 32 | 350 | 1520 | 2280 | 704 | 8 | | |
| 10 | 36 | 464 | 2576 | 5820 | 4064 | 416 | | |
| 11 | 40 | 594 | 4032 | 12404 | 14784 | 4560 | 128 | |
| 12 | 44 | 740 | 5952 | 23408 | 41104 | 25376 | 3200 | 16 |

3.3.1 Spoj simplicijalnih kompleksa popločavanja

Definicija 3.3.4 *Neka su K i L simplicijalni kompleksi na skupu vrhova S i S' , gdje su S i S' međusobno disjunktni. Simplicijalni kompleks*

$$K * L = \{A \cup B : A \in K, B \in L\}$$

nazivamo spajanje (engl. join) kompleksa K i L .

Propozicija 3.3.3 *Neka su K i L simplicijalni kompleksi. Tada vrijedi*

$$\mathbf{f}(K * L) = \mathbf{f}(K) * \mathbf{f}(L). \quad (3.5)$$

Dokaz: Neka su dati simplicijalni kompleksi K i L , te neka je $\dim K = n_1 - 1$, a $\dim L = n_2 - 1$. Na osnovu definicije \mathbf{f} -polinoma od $(n - 1)$ -dimenzionalnog simplicijalnog kompleksa K slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_K(t) &= t^{n_1} + \mathbf{f}_0 t^{n_1-1} + \cdots + \mathbf{f}_{n_1-1}, \\ \mathbf{f}_L(t) &= t^{n_2} + \mathbf{f}'_0 t^{n_2-1} + \cdots + \mathbf{f}'_{n_2-1}. \end{aligned}$$

Tada vrijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_K(t) * \mathbf{f}_L(t) &= (t^{n_1} + \mathbf{f}_0 t^{n_1-1} + \cdots + \mathbf{f}_{n_1-1}) \cdot (t^{n_2} + \mathbf{f}'_0 t^{n_2-1} + \cdots + \mathbf{f}'_{n_2-1}) \\ &= t^{n_1+n_2} + (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}'_0) t^{n_1+n_2-1} + \cdots + \mathbf{f}_{n_1-1} \mathbf{f}'_{n_2-1} \\ &= \sum_{r=0}^{n_1+n_2} a_r t^r, \end{aligned}$$

gdje je

$$a_r = \sum_{\substack{-1 \leq i \leq n_1-1 \\ -1 \leq j \leq n_2-1 \\ i+j=n_1+n_2-r-2}} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_j.$$

U zavisnosti od slučajevea, pobliže za koeficijente vrijedi:

i) Za $n_1 > n_2$ i $r \geq n_1$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=-1}^{n_1+n_2-r-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{n_1+n_2-r-2-i}.$$

ii) Za $n_1 > n_2$ i $r < n_1$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=n_1-r-1}^{n_1-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{n_1+n_2-r-2-i}.$$

iii) Za $n_1 = n_2$ i $r \geq n_1$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=-1}^{2n_1-r-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{2n_1-r-2-i}.$$

iv) Za $n_1 = n_2$ i $r < n_1$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=n_1-r-1}^{n_1-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{2n_1-r-2-i}.$$

v) Za $n_2 > n_1$ i $r \geq n_2$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=-1}^{n_1+n_2-r-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{2n_1-r-2-i}.$$

vi) Za $n_2 > n_1$ i $r < n_2$ vrijedi

$$a_r = \sum_{i=n_2-r-1}^{n_2-1} \mathbf{f}_i \mathbf{f}'_{2n_1-r-2-i}.$$

Nadalje, slijedi da je

$$\mathbf{f}_K(t) * \mathbf{f}_L(t) = \mathbf{f}(K * L).$$

■

Primijetimo da u izučavanju simplicijalnih kompleksa asociranih postavljanjem I-tromina na kvadratnu tablu dimenzije $2 \times n$ zapravo razmatramo join operaciju simplicijalnog kompleksa popločavanja, jer ne postoje vertikalne mogućnosti postavljanja I-tromina na datu tablu.

Teorema 3.3.4 *f-vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2 \times n})$ dat je sa*

$$\mathbf{f}_k(K_{I_3}(D_{2 \times n})) = \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-2}{j+1} \binom{n-2k+2j-4}{k-j+2}.$$

Dokaz: Neka je data kvadratna tabla $D_{2 \times n}$. Razmotrimo simplicijalan kompleks koji je asociran postavljanjem I-tromina na datu tablu. Uočimo da je $\mathbf{f}_{K_{I_3}(D_{2 \times n})}(t)$ spoj od $\mathbf{f}_{K_{I_3}(D_{1 \times n})}(t)$ sa samim sobom, tj.

$$\mathbf{f}_{K_{I_3}(D_{2 \times n})}(t) = \mathbf{f}_{K_{I_3}(D_{1 \times n})}(t) * \mathbf{f}_{K_{I_3}(D_{1 \times n})}(t).$$

Primjenom Teoreme 3.3.1 za $n_1 = n_2$ i Propozicije 3.3.3 direktno slijedi dato tvrđenje. ■

Primijetimo da ista opservacija vrijedi i za simplicijalni kompleks koji je asociran postavljanjem I-tromina na kvadratnoj torusnoj mreži.

Teorema 3.3.5 *f-vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ dat je sa*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})) &= 4 \sum_{j=0}^k \binom{n-j-2}{j} \binom{n-k+j-3}{k-j+1} \\ &+ 2 \sum_{j=0}^k \binom{n-j-2}{j} \binom{n-k+j-3}{k-j+2} \\ &+ 2 \sum_{j=0}^k \binom{n-j-2}{j+1} \binom{n-k+j+3}{k-j+1} \\ &+ \sum_{j=0}^k \binom{n-j-2}{j+1} \binom{n-k+j+3}{k-j+2}. \end{aligned}$$

Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije $2 \times n$. Na datoj kvadratnoj torusnoj mreži razmotrimo simplicijalan kompleks asociran

postavljanjem I–tromino oblika. Tada vrijedi da je $\mathbf{f}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})}(t)$ spoj od $\mathbf{f}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1 \times n})}(t)$ sa samim sobom, tj.

$$\mathbf{f}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})}(t) = \mathbf{f}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1 \times n})}(t) * \mathbf{f}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1 \times n})}(t).$$

Nadalje, primjenom Teoreme 3.3.2 za $n_1 = n_2$ i Propozicije 3.3.3 slijedi dato tvrđenje. ■

3.4 Alexanderova dualnost simplicijalnih kompleksa popločavanja

U ovom odjeljku ćemo uvesti pojam Alexanderovog duala simplicijalnog kompleksa. Alexanderov dual \hat{K} simplicijalnog kompleksa K je definisan na istom skupu vrhova kao i K , a njegovi simpleksi (strane) su komplementi ne-simpleksa (ne-strana) kompleksa K . Neka je dat simplicijalni kompleks $K \subset \mathcal{P}([n])$. Dati simplicijalni kompleks K dijeli partitivni skup (u oznaci $\mathcal{P}([n])$) skupa $[n]$ na disjunktne podskupove K i $\mathcal{P}([n]) \setminus K$.

Definicija 3.4.1 *Neka je dat simplicijalni kompleks K na skupu vrhova $[n]$. Alexanderov dual ili dual od K , u oznaci \hat{K} , dat je sa*

$$\hat{K} = \{[n] \setminus A : [n] \supset A \notin K\},$$

gdje $A = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ predstavlja simplicijalni kompleks u kojem postoji jedinstven poredak tako da vrijedi $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

\hat{K} također predstavlja simplicijalni kompleks koji zadovoljava sljedeća svojstva:

Lema 3.4.1 *Neka je $K \subseteq \mathcal{P}([n])$ simplicijalni kompleks tada je i $\hat{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ simplicijalni kompleks.*

Dokaz Leme 3.4.1 može se pronaći u [43].

Lema 3.4.2 *Neka je $K \subseteq \mathcal{P}([n])$ simplicijalni kompleks, tada vrijedi*

$$\hat{K} = D[n] \setminus \{[n] \setminus A : A \in K\},$$

gdje $D[n]$ za konačan skup $[n]$, predstavlja skup svih podskupova skupa $[n]$ prikazan kao simplicijalni kompleks.

Dokaz Leme 3.4.1 može se pronaći u [43].

Lema 3.4.3 Neka su $K, L \subseteq \mathcal{P}([n])$ simplicijalni kompleksi. Tada vrijedi:

i) Ako je $K \subseteq L$ tada je $\widehat{K} \subseteq \widehat{L}$.

ii) $\widehat{(\widehat{K})} = K$.

Lema 3.4.4 Kompleksi $K \subseteq \mathcal{P}([n])$ i $L \subseteq \mathcal{P}([m])$ su izomorfni ako su njihovi Alexanderovi duali $\widehat{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ i $\widehat{L} \subseteq \mathcal{P}([m])$ izomorfni.

Dokaz Leme 3.4.4 može se pronaći u [43].

Alexanderov dual daje poveznicu između homologije i kohomologije, a ista je iskazana u sljedećoj tvrdnji:

Teorema 3.4.1 (Alexanderov dual) Za simplicijalni kompleks $K \subseteq \mathcal{P}([n])$, sa $|[n]| - 1 = N$ zadovoljeno je sljedeće svojstvo

$$\tilde{H}_i(K) \cong \tilde{H}^j(\widehat{K}),$$

kad god je $i + j = N - 2$.

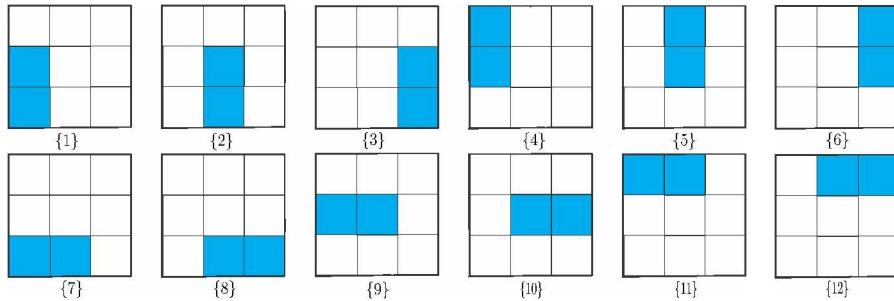
Dokaz Teoreme 3.4.1 može se pronaći u [43].

Ponekad je kombinatorna reprezentacija Alexanderovog duala jednostavnija od kombinatorne reprezentacije simplicijalnog kompleksa K . Ovu činjenicu iskoristili smo za istraživanje složenijih i kompleksnijih primjera.

Primjer 8 \mathbf{f} -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{3 \times 3})$ dat je sa

$$\mathbf{f}(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = (12, 44, 56, 18).$$

Rješenje: Razmotrimo sva moguća postavljanja domine na tablu dimenzije 3×3 . Tada imamo sljedeće mogućnosti:



Slika 3.12: Moguća postavljanja domine na tablu 3×3

Odredimo sada sve moguće minimalne ne-simplekse na datoj tabli: $\{1,4\}$, $\{1,7\}$, $\{1,9\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, $\{2,9\}$, $\{2,10\}$, $\{3,6\}$, $\{3,8\}$, $\{3,10\}$, $\{4,9\}$, $\{4,11\}$, $\{5,9\}$, $\{5,10\}$, $\{5,11\}$, $\{5,12\}$, $\{6,10\}$, $\{6,12\}$, $\{7,8\}$, $\{9,10\}$, $\{11,12\}$.

U programski paket Sage 9.0 unesimo kod kroz skup svih vrhova, eliminišući maksimalne nesimplicijalne komplekse, kako slijedi:

```
K=SimplicialComplex([[2,3,5,6,7,8,9,10,11,12],[2,3,4,5,6,8,9,10,11,12],[2,3,4,5,6,7,8,10,11,12],[1,3,4,6,7,8,9,10,11,12],[1,3,4,5,6,8,9,10,11,12],[1,3,4,5,6,7,9,10,11,12],[1,3,4,5,6,7,8,10,11,12],[1,3,4,5,6,7,8,9,11,12],[1,2,4,5,7,8,9,10,11,12],[1,2,4,5,6,7,9,10,11,12],[1,2,4,5,6,7,8,9,11,12],[1,2,3,5,6,7,8,10,11,12],[1,2,3,5,6,7,8,9,10,12],[1,2,3,4,6,7,8,10,11,12],[1,2,3,4,6,7,8,9,11,12],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,12],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,11],[1,2,3,4,5,7,8,9,11,12],[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11],[1,2,3,4,5,6,9,10,11,12],[1,2,3,4,5,6,7,8,11,12],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]])
```

Nadalje, u Sageu 9.0 odredimo Alexanderov dual datog simplicijalnog kompleksa K . Alexanderov dual određujemo na osnovu naredbe $Y=K.alexander_dual()$, a pomoću naredbe $Y.f_vector()$ dobijamo traženi f -vektor simplicijalnog kompleksa Y , odnosno simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{3 \times 3})$, dat sa

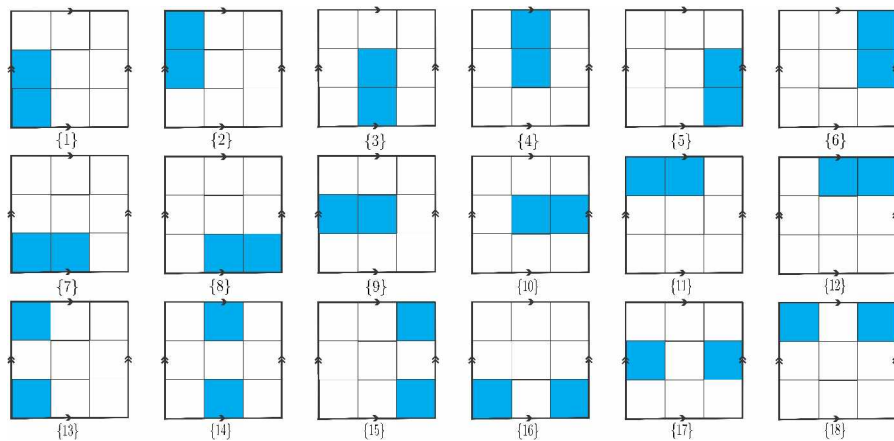
$$f(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = (12, 44, 56, 18).$$



Primjer 9 f -vektor simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{3 \times 3})$ dat je sa

$$f(K_{I_2}(\mathbb{T}_{3 \times 3})) = (18, 99, 180, 72).$$

Rješenje: Neka je data kvadratna torusna mreža dimenzije 3×3 . Na datoj mreži razmotrimo sva moguća postavljanja domine (Slika 3.4).



Slika 3.13: Moguća postavljanja domine na torusnu kvadratnu mrežu 3×3

Razmatranjem mogućih postavljanja domine na datu torusnu mrežu odredimo sve minimalne ne-simplekse, tj. sve moguće presjeke postavljanja domine na datoj kvadratnoj torusnoj mreži. Minimalni ne-simpleksi su: $\{1,2\}$, $\{1,7\}$, $\{1,9\}$, $\{1,13\}$, $\{1,16\}$, $\{1,17\}$, $\{2,9\}$, $\{2,11\}$, $\{2,13\}$, $\{2,17\}$, $\{2,18\}$, $\{3,4\}$, $\{3,7\}$, $\{3,8\}$, $\{3,9\}$, $\{3,10\}$, $\{3,14\}$, $\{4,9\}$, $\{4,10\}$, $\{4,11\}$, $\{4,12\}$, $\{4,14\}$, $\{5,6\}$, $\{5,8\}$, $\{5,10\}$, $\{5,15\}$, $\{5,16\}$, $\{5,17\}$, $\{6,10\}$, $\{6,12\}$, $\{6,15\}$, $\{6,17\}$, $\{6,18\}$, $\{7,8\}$, $\{7,13\}$, $\{7,14\}$, $\{7,16\}$, $\{8,14\}$, $\{8,15\}$, $\{8,16\}$, $\{9,10\}$, $\{9,17\}$, $\{10,17\}$, $\{11,12\}$, $\{11,13\}$, $\{11,14\}$, $\{11,18\}$, $\{12,14\}$, $\{12,15\}$, $\{12,18\}$, $\{13,16\}$, $\{13,18\}$, $\{15,16\}$, $\{15,18\}$.

U Sageu 9.0 definišimo gore opisani simplicijalni kompleks:

```
K=SimplicialComplex([[3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],
[2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[2,3,4,5,6,7,8,10,11,
12,13,14,15,16,17,18],[2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,17,18],
[2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18],[2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,
12,13,14,15,16,18],[1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,
3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18],[1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
14,15,16,17,18],[1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18],[1,3,4,
5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17],[1,2,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,
15,16,17,18],[1,2,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,4,5,
6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,
15,16,17,18],[1,2,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,4,5,6,
7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16,
17,18],[1,2,3,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,5,6,7,8,9,
10,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18],
[1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,
13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,
3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,
14,16,17,18],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18],[1,2,3,4,6,
7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18],[1,2,3,4,5,7,8,9,11,12,13,14,15,16,
17,18],[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,7,8,9,
10,11,12,13,14,16,17,18],[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18],
[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17],[1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,
13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,14,15,16,17,18],[1,2,
3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,
14,15,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,
6,7,9,10,11,12,13,14,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,
17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,
10,11,12,13,14,15,16,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,18],
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,
14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,
5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16,
```

$17, 18], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17]]$)

Nadalje, odredimo Alexanderov dual simplicijalnog kompleksa K , naredbom $Y=K.\text{alexander_dual}()$ i f -vektor sa $Y.f_vector()$. Dobijeni f -vektor predstavlja vektor traženog simplicijalnog kompleksa

$$f(K_{I_2}(\mathbb{T}_{3 \times 3})) = (18, 99, 180, 72).$$

◆

3.5 Čisti simplicijalni kompleksi popločavanja

U ovom odjeljku definisat ćemo svojstvo čistog (engl. *pure*) simplicijalnog kompleksa popločavanja i dati pregled uočenih i dokazanih tvrdnji simplicijalnih kompleksa popločavanja u odnosu na dato svojstvo čisti simplicijalni kompleks.

Definicija 3.5.1 *Maksimalna strana simplicijalnog kompleksa je svaki simpleks u kompleksu koji nije strana nijednog većeg simpleksa.*

Definicija 3.5.2 *Simplicijalni kompleks K je čist (engl. *pure*) ako su sve maksimalne strane (engl. *facet*) u njemu iste dimenzije.*

Primjer 10 *Simplicijalan kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ za $n = 5$ je čist kompleks.*

Rješenje: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{1,5})$. U $K_{I_2}(D_{1,5})$ su svi maksimalni simpleksi dimenzije 1. ◆

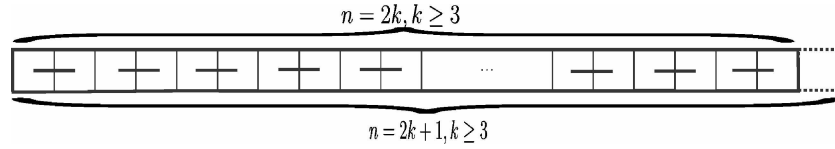
Simplicijalni kompleksi koje proučavamo u ovoj tezi su rijetko kada čisti kompleksi. Ipak, čisti kompleksi u kontekstu poliomino popločavanja regiona M sa skupom poliomino oblika Σ imaju jedno lijepo svojstvo koje slijedi iz definicije $K(M, \Sigma)$ i osobine biti čist.

Propozicija 3.5.1 *Ako je $K(M; \Sigma)$ čist kompleks, tada za bilo koje postavljanje $i \leq \dim K(M, \Sigma)$ oblika iz Σ na M bez preklapanja možemo postaviti još $\dim K(M; \Sigma) + 1 - i$ oblika iz Σ u M tako da i dalje nema preklapanja.*

Svojstvo iskazano prethodnom Propozicijom sugerše da ima smisla razmišljati samo o onim simpleksima koji odgovaraju popločavanjima sa maksimalnim brojem poliomina iz Σ . Takav simplicijalni kompleks je podkompleks našeg kompleksa $K(M; \Sigma)$ koji odgovara uniji simpleksa maksimalne dimenzije i njihovih strana. Oni zaslužuju da budu posebno proučeni.

Propozicija 3.5.2 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$, $n \geq 6$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$, $n \geq 6$. Razmotrimo maksimalne simplekse datog kompleksa prikazane na Slici 3.14 i Slici 3.15.



Slika 3.14: Maksimalan simplex simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ dimenzije $n - 1$ za $n = 2k + 1$, $k \geq 3$ i dimenzije $\frac{n}{2}$ za $n = 2k$, $k \geq 3$



Slika 3.15: Maksimalan simplex simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ dimenzije $n - 5$

Sa prikazanih slika je očigledno da dati maksimalni simpleksi nemaju istu dimenziju, stoga zaključujemo da $K_{I_2}(D_{1,n})$, $n \geq 6$ nisu čisti kompleksi. ■

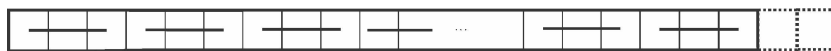
Primjer 11 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n = 5$ i $n = 8$ su čisti kompleksi.*

Rješenje: Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{1,5})$ ima sve maksimalne simplekse dimenzije 0, a simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{1,8})$ ima sve maksimalne simplekse dimenzije 1. Stoga zaključujemo da su dati kompleksi čisti kompleksi. ♦

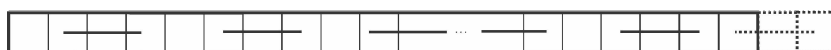
Propozicija 3.5.3 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$, $n \geq 9$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$, $n \geq 9$. Razmotrimo sljedeće maksimalne simplekse datog simplicijalnog kompleksa popločavanja. U slučaju kada je $n = 3k$, $k \geq 3$ tada I-tromino možemo postaviti tako da je svako polje date table potpuno prekriveno. Kada je $n = 3k + 1$, $k \geq 3$ ostat će nam jedno polje date table nepokriveno, a u slučaju kada je $n = 3k + 2$, $k \geq 3$ ostaju nam dva polja nepokrivena. Svaki

od navedenih slučajeve predstavlja maksimalni simpleks datog simplicijalnog kompleksa popločavanja dimenzije $k - 1$.



Slika 3.16: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$



Slika 3.17: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$

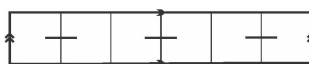
Kako dati maksimalni simpleksi nemaju iste dimenzije to zaključujemo da isti nisu čisti kompleksi. ■

Primjer 12 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 4$, $n = 5$ i $n = 7$ su čisti kompleksi.*

Rješenje: Dati simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,4})$, $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,5})$ imaju sve maksimalne simplekse dimenzije 1, a $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,7})$ dimenzije 2, pa za date komplekse kažemo da su čisti kompleksi. ♦

Primjer 13 *Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 6$ nije čist kompleks.*

Rješenje: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,6})$. Uočimo maksimalne simplekse prikazane na Slici 3.18 i Slici 3.19 koji su dimenzije 2 i 1 respektivno.



Slika 3.18: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,6})$ dimenzije 2



Slika 3.19: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,6})$ dimenzije 1

♦

Propozicija 3.5.4 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$, $n \geq 8$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.2. ■

Propozicija 3.5.5 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$, $n \geq 9$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.3. ■

Primjer 14 *Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,2})$ je čist kompleks.*

Rješenje: U datom simplicijalnom kompleksu svi maksimalni simpleksi su dimenzije 1. ♦

Posljedica 3.5.1 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{2,n})$, $n \geq 6$ nisu čisti kompleksi.*

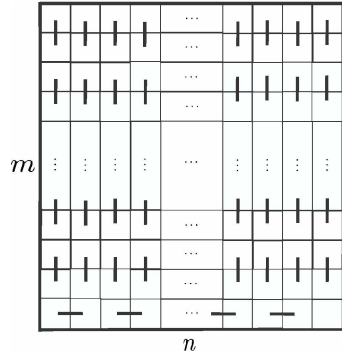
Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{2,n})$, $n \geq 6$ su spoj kompleksi sa samim sobom, za koje smo u Propoziji 3.5.3 pokazali da nisu čisti kompleksi.

Posljedica 3.5.2 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{2,n})$, $n \geq 6$ nisu čisti kompleksi.*

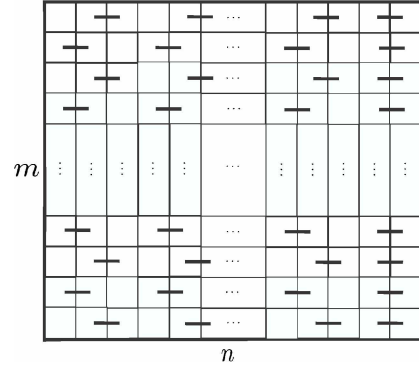
Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{2,n})$, $n \geq 6$ su spoj kompleksi sa samim sobom, za koje smo prethodno pokazali da nisu čisti kompleksi.

Propozicija 3.5.6 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$, $m \geq 2$, $n \geq 3$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$, gdje su $m \geq 2$, $n \geq 3$. Razmotrimo prvo slučaj kada su m i n oba neparna. Uočimo da tada maksimalne simplekse datog simplicijalnog kompleksa možemo prikazati kao na Slici 3.20 i Slici 3.21. Kako dati maksimalni simpleksi nisu iste dimenzije zaključujemo da $K_{I_2}(D_{m,n})$ za neparne m i n nisu čisti kompleksi.

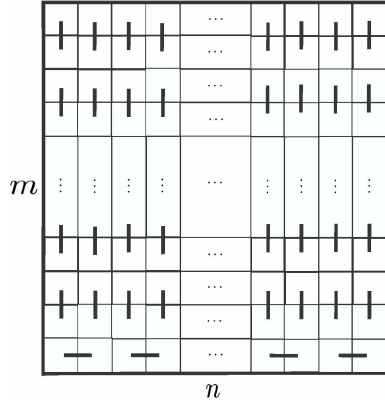


Slika 3.20: Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n oba neparna

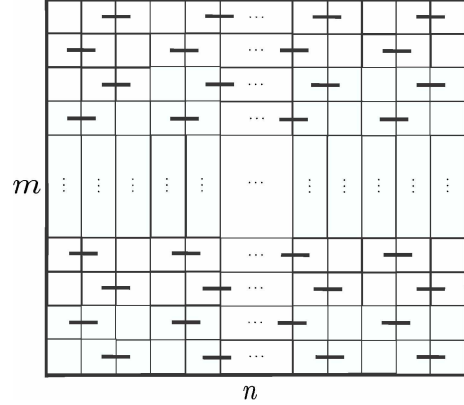


Slika 3.21: Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n oba neparna

Neka su sada m i n različite parnosti, bez smanjenja općenitosti neka je m neparan. Uočimo da tada maksimalne simplekse možemo prikazati kao na Slikama 3.22, 3.23 i 3.21. Kako prikazani simpleksi nemaju iste dimenzije zaključujemo da ni u ovom slučaju $K_{I_2}(D_{m,n})$ nisu čisti kompleksi.



Slika 3.22: Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n različite parnosti



Slika 3.23: Maksimalni simpleks od $K_{I_2}(D_{m,n})$ kada su m i n različite parnosti

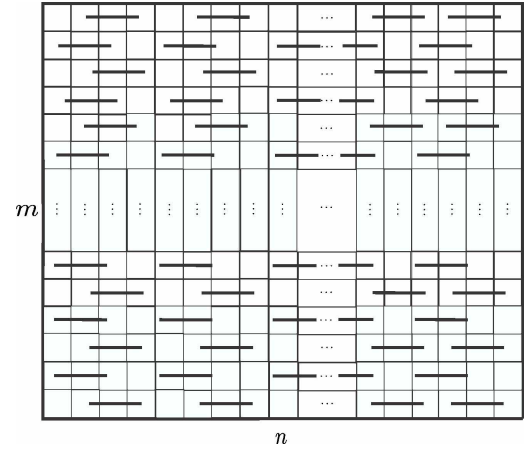
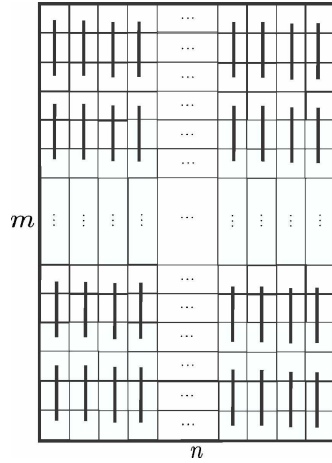
U slučaju kada su m i n oba parna lako je uočiti da možemo jedan maksimalan simpleks dobiti postavljajući domine uspravno, a drugi na način koji je prikazan na Slici 3.23. Stoga zaključujemo da $K_{I_2}(D_{m,n})$ za $m \geq 2$, $n \geq 3$ nisu čisti kompleksi. ■

Propozicija 3.5.7 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{m,n})$, $m \geq 2$, $n \geq 3$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Dokaz date tvrdnje je analogan dokazu Teoreme 3.5.6. Uočimo da će maksimalni simpleksi prikazani na Slikama 3.20 i 3.22 biti maksimalni simpleksi i na torusnoj kvadratnoj mreži, a da simpleksima prikazanim na Slikama 3.21 i 3.23 moramo dodati dominu na horizontalnoj stranici lijepljenja u praznim poljima prvog, odnosno zadnjeg reda da bi bili maksimalni simpleksi na torusnoj kvadratnoj mreži. Međutim, tako dobijeni maksimalni simpleksi nemaju iste dimenzije to slijedi da $K_{I_2}(\mathbb{T}_{m,n})$, $m, n \geq 3$ nisu čisti kompleksi. ■

Propozicija 3.5.8 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{m,n})$, $m, n \geq 4$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{m,n})$, $m, n \geq 4$. Uočimo da tada maksimalne simplekse kompleksa $K_{I_3}(D_{m,n})$, $m, n \geq 4$ možemo uočiti u jednom od sljedećih oblika. Ako je $m = 3k$ i $n \geq 4$. Tada možemo uočiti maksimalne simplekse simplicijalnog kompleksa popločavanja $K_{I_3}(D_{m,n})$ u oblicima prikazanim na Slici 3.24 i Slici 3.25.



Slika 3.24: Maksimalni simpleks od $K_{I_3}(D_{m,n})$ za $m = 3k$, $k \geq 1$, $n \geq 4$ Slika 3.25: Maksimalni simpleks od $K_{I_3}(D_{m,n})$

Očigledno je da dati maksimalni simpleksi nemaju istu dimenziju pa stoga nisu ni čisti kompleksi. Dokaz analogno provodimo i u slučajevima kada je $m = 3k + 1$ i $m = 3k + 2$, $k \geq 1$, $n \geq 4$. ■

Propozicija 3.5.9 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{m,n})$ za $m, n \geq 4$ nisu čisti kompleksi.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.8. ■

3.6 Balansirani simplicijalni kompleksi popločavanja

U ovom odjeljku razmotrit ćemo balansirane simplicijalne komplekse poliomino popločavanja.

Definicija 3.6.1 *Neka je K simplicijalan kompleks dimenzije d na skupu vrhova V . Kažemo da je K balansiran ili uravnotežen (engl. *balanced*) ako postoji preslikavanje $k : V \mapsto [d+1]$ takvo da ako je $\{x, y\}$ ivica u K onda je $k(x) \neq k(y)$.*

Prethodnu definiciju možemo zamišljati i u smislu bojenja. Ako pretpostavimo da je K bojenje od skupa vrhova V sa bojama $\{1, 2, \dots, d\}$ tada svaka strana od K ima sve vrhove obojene različitim bojama. Uvijek možemo pretpostaviti da je K dio strukture uravnoteženog kompleksa čak ako i nije eksplicitno naglašeno. Drugim riječima kažemo da je simplicijalni kompleks dimenzije d balansiran ako je $(d+1)$ obojiv. Za više o balansiranim simplicijalnim kompleksima pogledati [12], [38], [39], [40], [41], [47], [79], [82] i [83].

Balansirani simplicijalni kompleksi imaju dodatna ograničenja za f-vektore. Sljedećom propozicijom dajemo grubu ocjenu veze između broja poliomino popločavanja čiji je simplicijalni kompleks popločavanja balansiran.

Propozicija 3.6.1 *Neka je $K(M; \Sigma)$ balansiran simplicijalni kompleks popločavanja dimenzije $d = \dim(K(M; \Sigma))$, čiji je broj vrhova m . Tada vrijedi*

$$f_{k-1}(K(M; \Sigma)) \leq \frac{m^k \binom{d+1}{k}}{(d+1)^k}.$$

Dokaz: Neka je $\nu : V \rightarrow [d+1]$ jedno pravilno bojenje vrhova V od $K(M; \Sigma)$ i neka je $V_i = \nu^{-1}(i)$ za $1 \leq i \leq d+1$. Tada je $V = V_1 \cup \dots \cup V_{d+1}$. Simpleks dimenzije $k-1$ ima k različito obojenih vrhova pa je

$$\begin{aligned} f_{k-1}(K(M; \Sigma)) &\leq \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subset [d+1]} |V_{i_1}| |V_{i_2}| |V_{i_3}| \cdots |V_{i_k}| \leq \\ &\frac{\binom{d+1}{k}}{(d+1)^k} (|V_1| + |V_{12}| + \cdots + |V_{d+1}|)^k = \frac{m^k \binom{d+1}{k}}{(d+1)^k}. \end{aligned}$$

Prethodna nejednakost slijedi iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine. ■

Prije nego što formulišemo glavna tvrđenja ovog paragrafa odredit ćemo $\dim K_{I_p}(D_{m,n})$. Iz rada sa homološkim grupama popločavanja znamo da su popločavanja sa I p -ominima senzitivna na dijagonalna bojenja u p boja, pa ćemo tablu označiti brojevima $1, 2, \dots, p$ kao na Slici 3.26. Kako god da postavimo oblik on pokriva p različitih brojeva, te svakako ne možemo postaviti više od d_i oblika gdje je d_i broj polja označenih sa i na Slici 3.26.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | ... |
| | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... |
| | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | $p-4$ | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... |
| m | $p-4$ | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $p-5$ | $p-4$ | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... |
| | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| | p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| | n | | | | | | | | | | | | | | | | |

Slika 3.26: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$

Lema 3.6.1 $\dim K_{I_p}(D_{m,n}) = d_{a+1}$ za $m, n \geq p$.

Dokaz: Ukoliko $p \mid m$ ili $p \mid n$ očigledno je da odgovarajuće horizontalno odnosno vertikalno redanje proizvodi potpuno prekrivanje table sa $\frac{mn}{p}$ oblika. U ovim specijalnim slučajevima broj za svako polje se na tabli pojavljuje isti broj puta, pa tvrđenje važi. No, stvari nisu očigledne u ostalim slučajevima i potrebno ih je detaljnije analizirati.

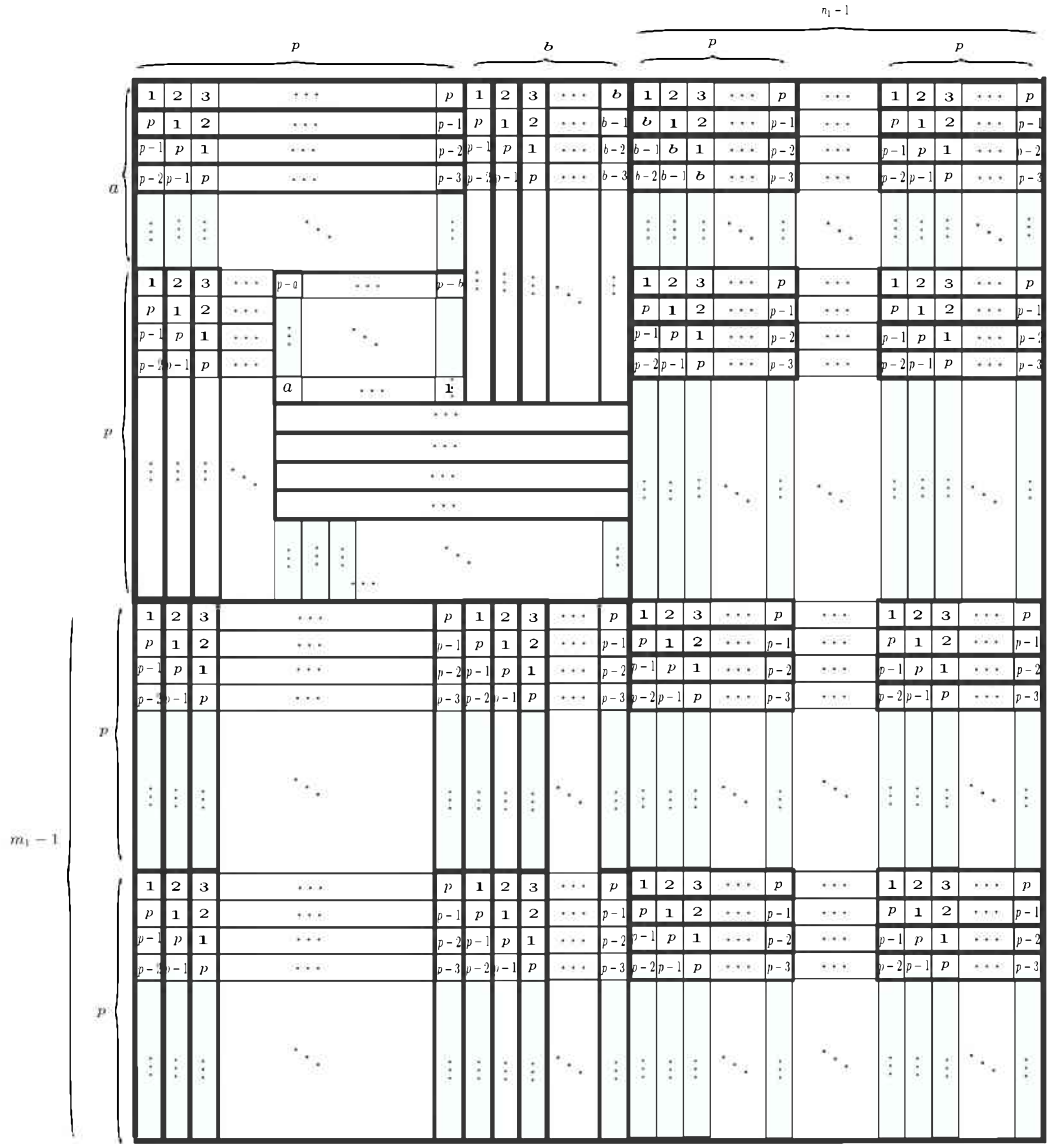
Neka je $m = m_1p + a$ i $n = n_1p + b$. Razlikovat ćemo dva slučaja $a + b \leq p - 1$ i $a + b \geq p$.

Ako je $a + b \leq p - 1$, možemo zaključiti da je $d_{a+1} = m_1n_1p + an_1 + bm_1$, a na Slici 3.27 je dato jedno postavljanje $m_1n_1p + an_1 + bm_1$ I p -omina bez preklapanja na tablu u ovom slučaju.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|-------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|-----|-----|-------|-----|-------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|-----|-----|-------|
| | | m_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | p | | | | | p | | | | | p | | | | | a | | | | | |
| p | { | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| p | { | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| p | { | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| p | { | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| p | { | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| b | { | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| b | { | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| b | { | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| b | { | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| b | { | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| b | { | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| b | { | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| b | { | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| b | { | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| b | { | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| b | { | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| b | { | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| b | { | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| | | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| b | { | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $a-3$ |
| | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | p | ... | 1 | 2 | 3 | ... | p | 1 | 2 | 3 | ... | a |
| | | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | ... | p | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | 1 | 2 | ... | $a-1$ |
| b | { | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | ... | $p-1$ | p | 1 | ... | $p-2$ | $p-1$ | p | 1 | ... | $a-2$ |
| | | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | $p-2$ | $p-1$ | p | ... | $p-3$ | ... | $p-2$ | | | | | | | | | |

Slika 3.27: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$

Razmotrimo sada slučaj $a + b \geq p$. Primijetimo da je svakako $a + b \leq 2p - 2$.



Slika 3.28: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$

U ovom slučaju Slika 3.28 nam može pomoći da sračunamo da je $d_{a+1} = m_1 n_1 p + a n_1 + b m_1 + a + b - p$, kao i da imamo prekrivanje takvo da su prekrivena sva polja označena sa $a + 1$, čime je dokaz završen. ■

Teorema 3.6.1 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_p}(D_{m,n})$, $m, n \geq p$ su balansirani kompleksi.*

Dokaz: Posmatrajmo polja označena sa $a + 1$ u Slici 3.26 i označimo ih redom sa $x_1, x_2, \dots, x_{d_{a+1}}$ kao na Slici 3.29. Pravilno bojenje simplicijalnog

[illegible]

Slika 3.29: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_b}(D_{m,n})$

Razmotrimo sada svojstvo balansiranosti na simplicijalnom kompleksu koji je asociran postavljanjem I-omina na kvadratnu torusnu mrežu $K_{I_p}(\mathbb{T}_{m,n})$.

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja asociran postavljanjem I p -omina na kvadratnu torusnu mrežu dimenzije $m \times n$. Jasno je da je $\dim K_{I_p}(\mathbb{T}_{m,n}) \leq \lfloor \frac{mn}{p} \rfloor - 1$. Primijetimo da se na svako polje table na torusu može postaviti p uspravnih i p vodoravnih I p -omina, pa ovaj simplicijalni kompleks ima $2mn$ vrhova. Analizirajmo ovo bojenje. Dva vrha mogu biti obojena istom bojom ako se odgovarajući vrhovi preklapaju. Staviše i za tri vrha obojena istom bojom važi opservacija—sva tri odgovarajuća postavljanja moraju imati zajednički vrh koji preklapaju, jer bar dva položaja moraju biti u istoj koloni ili vrsti. Ovo povlači zapravo da sva polja obojena istom bojom moraju prekrivati zajedničko polje iz Helijeve teoreme. Dakle, jednom bojom je obojeno najviše $2p$ vrhova od $K_{I_p}(\mathbb{T}_{m,n})$. Na datoj torusnoj mreži imamo $m \cdot n$ polja. Razmotrimo dati kompleks u sljedećim slučajevima:

- 1) Neka $p|m$ i $p|n$. Ako vrijedi da su m i n djeljivi sa p možemo upotrijebiti bojenje korišćeno u dokazu Teoreme 3.6.1 i uvjeriti da je kompleks balansiran.

- 2) Bez smanjenja općenitosti neka $p \nmid m$ i $p \mid n$. Očigledno tada $p \mid m \cdot n$. Tada je iskorišćeno $\frac{m \cdot n}{p}$ boja pa je svakom bojom obojano $2p$ vrhova. Za svaku od $\frac{m \cdot n}{p}$ boja postoji zajedničko polje za svako postavljanje I_p -omino oblika i uzmimo da su ta polja označena na torusnoj tabli. Staviše, bojenje je i zadato tako da su vrhovi koji odgovaraju pločicama koje prekrivaju isto označeni i jednobojni. Kako svaka pločica pokriva jedno polje, u jednoj vrsti možemo imati najviše $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ obojenih polja da neka pločica ne bi prekrila dva označena polja. To povlači da je ukupan broj označenih polja $n \cdot \lfloor \frac{m}{p} \rfloor < n \cdot \frac{m}{p} = \frac{mn}{p}$, što je kontradikcija.
- 3) Neka $p \nmid m$ i $p \nmid n$. Na kvadratnu torusnu mrežu tada možemo staviti najviše $\lfloor \frac{mn}{p} \rfloor - 1$ I_p -omino oblika, odakle slijedi da je

$$\left\lfloor \frac{mn}{p} \right\rfloor - 1 \geq \dim(K_{I_p}(\mathbb{T}_{m \times n})).$$

Ukoliko bi dozvolili da koristimo $\lfloor \frac{mn}{p} \rfloor$, imali bi najviše $2p \cdot \lfloor \frac{mn}{p} \rfloor < 2p \cdot \frac{mn}{p} = 2mn$ vrhova, što je kontradikcija.

Na osnovu razmotrenih slučajeva slijedi dato tvrđenje. ■

3.7 Homologija simplicijalnih kompleksa asoci-ranih popločavanjem

Definicija 3.7.1 Niz abelovskih grupa i homomorfizama

$$\mathfrak{C} \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

takav da je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ za svaki prirodan broj n naziva se lančani kompleks.

Elemente podgrupe $\text{Ker } \partial_n \subseteq C_n$ nazivat ćemo n -ciklusi, a elemente podgrupe $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n$ n -rubovi, a kako vrijedi da je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ slijedi da je $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n$.

Definicija 3.7.2 Kvocijentna grupa $H_n := \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ naziva se n -ta homološka grupa lančanog kompleksa \mathcal{C} . Elementi od H_n nazivaju se homološke klase, oznaka $[z]$, $z \in \text{Ker } \partial$, a za dva ciklusa x i y koji pripadaju istoj klasi kaže se da su homologni, i pišemo $x \sim y$.

Definicija 3.7.3 Za simplicijalni kompleks K , homološke grupe lančanog kompleksa

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nazivamo simplicijalnim homološkim grupama od simpleksa K , i označavamo sa $H_n(K)$ ili jednostavnije samo homološkim grupama od K .

Definicija 3.7.4 Rang $r(H_n(K))$ naziva se n -ti Bettijev broj kompleksa K .

Homologija i Bettijevi brojevi simplicijalnih kompleksa su proučavani u [10], [31], [41], [60], [61], [62] i [72].

Primjer 15 Homologija simplicijalnog kompleksa

$$H_i(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = 0, \text{ za } i = 0, 1, 3, \text{ i } H_2(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = \mathbb{Z}^5.$$

Rješenje: Razmotrimo sva moguća postavljanja domine na torusnu kvadratnu mrežu, odredimo maksimalne nesimplekse i definišimo simplicijalni kompleks K u Sageu 9.0 analogno kako je prikazano u Primjeru 8. Za definisani simplicijalni kompleks popločavanja K odredit ćemo Alexanderov dual, pomoću naredbe `Y=K.alexander_dual()`. Zatim koristeći naredbu `Y.homology()` određujemo traženu homologiju i dobijamo

$$H_i(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = 0, \text{ za } i = 0, 1, 3, \text{ i } H_2(K_{I_2}(D_{3 \times 3})) = \mathbb{Z}^5.$$

◆

Homologija nam daje i neke informacije o postojanju parcijalnih popločavanja, iako su ocjene koje iskazujemo sljedećim stavom generalno slabe.

Stav 3.7.1 Ukoliko je $H_i(K(M, \Sigma)) \neq 0$ tada je $f_j(K(M; \Sigma)) \geq \binom{i+1}{j+1}$.

Dokaz: Predstavnik i -te homološke klase je dat sumom nekih i simpleksa. Kako je homološka grupa netrivialna sigurno možemo postaviti $i + 1$ poliomino oblik iz Σ u M bez preklapanja. Na osnovu čega slijedi tražena nejednakost. ■

Za određene simplicijalne komplekse popločavanja dajemo pregled njihovih homologija izračunatih u programu Sage 9.0.

Tabela 3.4: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 5 | $\{0 : 0, 1 : 0\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0, 4 : 0\}$ |
| 10 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0, 4 : 0\}$ |
| 11 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0\}$ |
| 12 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |

Tabela 3.5: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 4 | $\{0 : \mathbb{Z}, 1 : 0\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 10 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0, 4 : 0\}$ |
| 11 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}, 4 : 0\}$ |
| 12 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |

Tabela 3.6: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|--|
| 5 | $\{0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 6 | $\{0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 1 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : \mathbb{Z}, 1 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 4 : 0\}$ |
| 10 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 11 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 12 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |

Tabela 3.7: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|--|
| 4 | $\{0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 5 | $\{0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 6 | $\{0 : \mathbb{Z}, 1 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^5\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^7, 2 : 0\}$ |
| 10 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^6, 2 : 0\}$ |

Tabela 3.8: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|--|
| 2 | $\{0 : \mathbb{Z}, 1 : 0\}$ |
| 3 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 4 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 3 : 0, 4 : 0\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}^5, 4 : 0, 5 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 5 : 0, 6 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 5 : \mathbb{Z}, 6 : 0, 7 : 0\}$ |

Tabela 3.9: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(L_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 3 | $\{0 : 0, 1 : 0\}$ |
| 4 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}, 4 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : \mathbb{Z}^8, 5 : 0, 6 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0, 5 : \mathbb{Z}^5, 6 : 0, 7 : 0\}$ |

Tabela 3.10: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|--|
| 2 | $\{0 : \mathbb{Z}, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 3 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^9, 2 : \mathbb{Z}\}$ |
| 4 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}^{16}, 3 : \mathbb{Z}\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}^{21}, 4 : \mathbb{Z}\}$ |

Tabela 3.11: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 3 | $\{0 : 0, 1 : 0\}$ |
| 4 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0, 3 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0, 5 : 0, 6 : 0, 7 : 0\}$ |

Tabela 3.12: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(L_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|--|
| 5 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0, 3 : 0\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : \mathbb{Z}, 3 : 0\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 4 : 0\}$ |

Tabela 3.13: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 4 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^9\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^{16}\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : 0, 3 : 0\}$ |
| 7 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}\}$ |
| 8 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}^{25}\}$ |
| 9 | $\{0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : \mathbb{Z}^{49}, 4 : 0, 5 : 0\}$ |

Tabela 3.14: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa $K_{L_3}(D_{2 \times n})$ za neke konkretne vrijednosti n

| n | homologija |
|-----|---|
| 3 | $\{0 : \mathbb{Z}^5, 1 : 0\}$ |
| 4 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^9\}$ |
| 5 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z}^{23}, 2 : 0\}$ |
| 6 | $\{0 : 0, 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2 : \mathbb{Z}^{27}, 3 : 0\}$ |

3.8 Cohen-Macaulay svojstvo simplicijalnih kompleksa poliomino popločavanja

U ovom odjeljku bavit ćemo se izučavanjem Cohen–Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa poliomino popločavanja. Ovo svojstvo simplicijalnih kompleksa je jedno od najviše proučavanih svojstava simplicijalnih kompleksa. Jedan od najpoznatijih primjera Cohen–Macaulay kompleksa je zasigurno primjer koji je dao Stanley 1975. godine u svom radu [77], a isti se uzima kao rođenje Cohen–Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa. Definicija koju je dao Stanley je algebarska, dok je Reisner u svom radu [71] koristeći se rezultatima Höchstera, vidjeti [33], pokazao da je svojstvo Cohen–Macaulay čisto topološko svojstvo. Za više o istraživanjima Cohen–Macaulay svojstva pogledati [10], [14], [20], [41], [60], [71], [77], [78] i [80]. Sada ćemo dati formalnu definiciju Cohen–Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa. U tu svrhu prvo ćemo uvesti (Krull) dimenziju i regularne nizove.

U topološkoj kombinatorici je dobro poznata činjenica da Cohen–Macaulay kompleksi imaju homotoksi tip buketa sfera ([11]). Simplicijalni kompleksi poliomino popločavanja u općem slučaju nisu Cohen–Macaulay, što ćemo u nastavku i pokazati. Međutim, u narednom poglavlju pokazat

ćemo da uprkos tome velika klasa kompleksa koje izučavamo također ima homotopski tip buketa sfera što je čini veoma interesantnom za izučavanje sa stanovišta topološke kombinatorike.

Definicija 3.8.1 *Neka je P prost ideal prstena R , $P \subsetneq R$, takav da kad god je $ab \in P$, tada $a \in P$ ili $b \in P$. Lanac (engl. chain) prostog ideala je strogo rastući niz prostih ideala*

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \cdots \subsetneq P_n \subset R.$$

Za n kažemo da je dužina lanca.

Definicija 3.8.2 *Krull dimenzija od R , označena sa $\dim R$, je*

$$\dim R = \sup\{n \mid P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \cdots \subsetneq P_n \text{ lanac ideala u } R\}. \quad (3.6)$$

Nula djelitelj prstena R je element $a \in R$ takav da je $a \neq 0$ i postoji $b \neq 0 \in R$ takav da je $ab = 0$.

Definicija 3.8.3 *Neka je $I \subset R = \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Element $F \in R$ je regularan element na R/I ako $\overline{F} = (F + I)$ nije djelitelj nule od R/I . Ekvivalentno, F je regularan na R/I ako kadgod je $FG \in I$, tada je $G \in I$.*

Definicija 3.8.4 *Niz F_1, F_2, \dots, F_m od R se naziva regularan niz od R/I ako je*

- 1) \overline{F}_1 je regularan na R/I i
- 2) \overline{F}_i je regularan na $R/(I, F_1, F_2, \dots, F_{i-1})$.

Teorema 3.8.1 *Svi maksimalni regularni nizovi imaju iste dužine i svaki regularni niz može biti proširen do maksimalnog regularnog niza.*

Definicija 3.8.5 *Dubina (engl. depth) u oznaci depth , od R/I je dužina najdužeg maksimalnog niza na R koji je sadržan u $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Teorema 3.8.2 *Za svaki ideal $I \subset \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] = R$ vrijedi da je dubina $\text{depth}(R/I) \leq \dim(R/I)$.*

Definicija 3.8.6 *Prsten R/I je Cohen–Macaulay ako je $\text{depth}(R/I) = \dim(R/I)$.*

Konačan simplicijalan kompleks K je *Cohen-Macaulay* nad prstenom \mathbf{k} ako za svaki simpleks $\sigma \in K$, redukovana homologija $\tilde{H}^i(\text{link}_K \sigma; \mathbf{k}) = 0$ za svako $0 \leq i < \dim(\text{link}_K \sigma)$, gdje je

$$\text{link}_K(\sigma) = \{\tau \in K : \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ i } \tau \cup \sigma \in K\}.$$

Za dokaze navedenih tvrdnji i detaljniji pregled svojstva Cohen-Macaulay kompleksa vidjeti [80].

Primjer 16 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$ za $n = 3$, $n = 4$ i $n = 5$ su Cohen-Macaulay kompleksi.*

Rješenje: Posmatramo li $K_{I_2}(D_{1,n})$ za $n = 3$, $n = 4$ ili $n = 5$ uočiti ćemo da nije moguće izdvojiti potkompleks, tj. nije moguće pronaći $\sigma \in K_{I_2}(D_{1,n})$ da se preostali dio datih tabli može popločati dominama. Link σ je ili prazan skup ili tačka pa su njihove redukovane homologije trivijalne. Odakle zaključujemo da su navedeni kompleksi Cohen-Macaulay kompleksi. ♦

U nastavku ćemo dati dokaz teoreme kojom se dokazuje da $K_{I_2}(D_{1,n})$ za $n \geq 6$ nisu Cohen-Macaulay kompleksi.

Teorema 3.8.3 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$, $n \geq 6$ nisu Cohen-Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{1,n})$, gdje je $n \geq 6$. Razmotrimo prvo slučaj kada je $n = 2k$ za neko $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(D_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,6}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{1,n})$ možemo popločati dominama. Primijetimo da je tada $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})} \sigma \cong K_{I_2}(D_{1,6})$, dimenzije 1. Kompleks koji smo uočili ima netrivialnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_2}(D_{1,6})) = \mathbb{Z}$. Zbog toga zaključujemo da $K_{I_2}(D_{1,n})$ za $n = 2k$, $k \geq 3$ nije Cohen-Macaulay kompleks.



Slika 3.30: $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})} \sigma \cong D_{1,6}$ u slučaju kada je n paran

Sada razmotrimo slučaj kada je $n = 2k + 1$ za neko $k \geq 3$. Neka je $\sigma \in K_{I_2}(D_{1,n})$ dio koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,7}$, analogno kao u prvom slučaju. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})} \sigma \cong K_{I_2}(D_{1,7})$, dimenzije 2. Uočeni kompleks $K_{I_2}(D_{1,7})$ ima netrivialnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_2}(D_{1,7})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_2}(D_{1,n})$, $n \geq 6$ i $n = 2k + 1$ za neko $k \geq 3$ nije Cohen-Macaulay kompleks.



Slika 3.31: $\text{link}_{K_{I_2}(D_{1,n})}\sigma \cong D_{1,7}$ u slučaju kada je n neparan

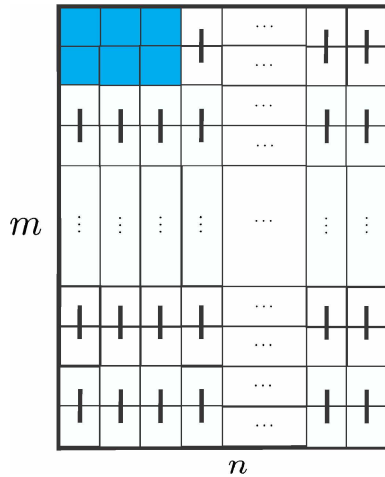
■

Teorema 3.8.4 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{2,n})$, $n \geq 2$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

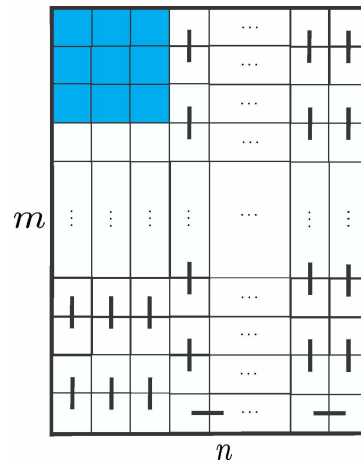
Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{2,n})$, gdje je $n \geq 2$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(D_{2,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{2,2}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{2,n})$ možemo popločati dominama. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_2}(D_{2,n})}\sigma \cong K_{I_2}(D_{2,2})$, dimenzije 2. Uočeni kompleks $K_{I_2}(D_{2,2})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_2}(D_{2,2})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_2}(D_{2,n})$, $n \geq 2$ nije Cohen–Macaulay kompleks. ■

Teorema 3.8.5 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$, $m, n \geq 3$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$, $m, n \geq 3$. Razmotrimo prvo slučaj kada je m ili n parno, bez smanjenja općenitosti neka je $m = 2k$, za neko $k \geq 2$.



Slika 3.32: $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong D_{2,3}$



Slika 3.33: $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong D_{3,3}$

Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(D_{m,n})$, koji će nam predstavljati dio razmatranog simplicijalnog kompleksa koji se može popločati dominama, tj. posmatrat

ćemo simpleks koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg smo izuzeli tablu 2×3 . Primijetimo da se u linku od σ nalaze samo domine koje popunjavaju preostali 2×3 dio table kao na Slici 3.8, pa je link $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong K_{I_2}(D_{2,3})$, čija je dimenzija $\dim(\text{link}_{K_{I_2}(D_{2,3})}\sigma) = 2$. $K_{I_2}(D_{2,3})$ ima netrivialnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_2}(D_{2,3})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ to zaključujemo da dati simplicijalni kompleks $K_{I_2}(D_{m,n})$ za $m = 2k$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

Razmotrimo sada slučaj kada su m i n neparni. Nadalje, posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(D_{m,n})$ koji dobijamo izuzimanjem table $D_{3,3}$ tako da se preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{m,n})$ može popločati sa dominama. Primijetimo da je tada $\text{link}_{K_{I_2}(D_{m,n})}\sigma \cong K_{I_2}(D_{3,3})$, a čija je dimenzija 3. Uočeni potkompleks ima netrivialnu drugu kohomologiju $\tilde{H}^2(K_{I_2}(D_{3,3})) = \mathbb{Z}^5$, koju smo izračunali upotrebom Sage programa, a što je prikazano u Primjeru 15. Na osnovu navedenog zaključujemo da $K_{I_2}(D_{m,n})$ nije Cohen–Macaulay kompleks. ■

Primjer 17 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n \leq 7$ su Cohen–Macaulay kompleksi.*

Rješenje: Posmatramo li $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n \leq 7$ uočiti ćemo da nije moguće izdvojiti potkompleks, tj. nije moguće pronaći $\sigma \in K_{I_3}(D_{1,n})$ da se preostali dio datih tabli može popločati I–trominima. Link σ je ili prazan skup ili tačka pa su njihove redukovane kohomologije trivijalne. Odakle zaključujemo da su navedeni kompleksi Cohen–Macaulay kompleksi. ♦

Teorema 3.8.6 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$, $n \geq 8$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{1,n})$, za $n \geq 8$. Dokaz date tvrdnje ćemo provesti kroz razmatranje sljedeća tri slučaja:

- 1) Neka je $n = 3k - 1$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,5}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{1,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{1,5})$, a čija je dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(D_{1,5})$ ima netrivialnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_3}(D_{1,5})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n = 3k - 1$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.
- 2) Neka je $n = 3k$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,6}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{1,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{1,6})$, a čija je

dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(D_{1,6})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(D_{1,6})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n = 3k$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

- 3) Neka je $n = 3k + 1$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,7}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{1,n})$ možemo popločati I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{1,7})$, a čija je dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(D_{1,7})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(D_{1,7})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{1,n})$ za $n = 3k + 1$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

Na osnovu prvog, drugog i trećeg slučaja slijedi tvrđenje dato u iskazu teoreme. ■

Primjer 18 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{2,n})$ za $n = 3$, $n = 4$ i $n = 5$ su Cohen–Macaulay kompleksi.*

Rješenje: Posmatramo li $K_{I_3}(D_{2,n})$ za $n = 3$, $n = 4$ ili $n = 5$ uočiti ćemo da nije moguće izdvojiti potkompleks, tj. nije moguće pronaći $\sigma \in K_{I_3}(D_{1,n})$ da se preostali dio datih tabli može popločati I–trominima. Link σ je ili prazan skup ili tačka pa su njihove redukovane homologije trivijalne. Odakle zaključujemo da su navedeni kompleksi Cohen–Macaulay kompleksi. ♦

Teorema 3.8.7 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{2,n})$, $n \geq 6$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{2,n})$, za $n \geq 6$. Dokaz date tvrdnje ćemo provesti kroz razmatranje sljedeća tri slučaja:

- 1) Neka je $n = 3k$ za $k \geq 2$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{2,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{1,6}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{2,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{1,6})$, a čija je dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(D_{1,6})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(D_{1,6})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{2,n})$ za $n = 3k$, $k \geq 2$ nije Cohen–Macaulay kompleks.
- 2) Neka je $n = 3k + 1$ za $k \geq 2$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{2,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{2,4}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2,n})$ možemo popločati I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{2,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{2,4})$, a čija je dimenzija 2. Kompleks $K_{I_3}(D_{2,4})$ ima netrivialnu prvu kohomologiju

$\tilde{H}^1(K_{I_3}(D_{2,4})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{2,n})$ za $n = 3k + 1$, $k \geq 2$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

- 3) Neka je $n = 3k + 2$ za $k \geq 2$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{2,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{2,5}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{2,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{2,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{2,5})$, a čija je dimenzija 2. Kompleks $K_{I_3}(D_{2,5})$ ima netrivialnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_3}(D_{2,5})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{2,n})$ za $n = 3k + 2$, $k \geq 2$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

Na osnovu prvog, drugog i trećeg slučaja slijedi tvrđenje dato u iskazu teoreme. ■

Teorema 3.8.8 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{3,n})$, $n \geq 3$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks popločavanja $K_{I_3}(D_{3,n})$, gdje je $n \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(D_{3,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla $D_{3,3}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(D_{3,n})$ možemo popločati I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(D_{3,n})}\sigma \cong K_{I_3}(D_{3,3})$, dimenzije 3. Uočeni kompleks $K_{I_3}(D_{3,3})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(D_{3,3})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(D_{3,n})$, $n \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks. ■

Teorema 3.8.9 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(D_{m,n})$, $m, n \geq 4$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Dokaz ove tvrdnje slijedi direktno na osnovu Teoreme 3.8.7 i Teoreme 3.8.8. ■

Razmotrimo sada svojstvo Cohen–Macaulay i kod simplicijalnih kompleksa na torusnoj kvadratnoj mreži.

Teorema 3.8.10 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$, $n \geq 6$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$, gdje je $n \geq 6$. Razmotrimo prvo slučaj kada je $n = 2k$ za neko $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{1,4}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ možemo popločati dominama. Primijetimo da je tada $\text{link}_{K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})}\sigma \cong K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,4})$, dimenzije 1. Kompleks koji smo uočili ima

netrivijalnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,4})) = \mathbb{Z}$. Zbog toga zaključujemo da $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 2k$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

Sada razmotrimo slučaj kada je $n = 2k + 1$ za neko $k \geq 3$. Nadalje, neka je $\sigma \in K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{1,5}$, analogno kao u prvom slučaju. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})}\sigma \cong K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,5})$, dimenzije 2. Uočeni kompleks $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,5})$ ima netrivijalnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,5})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_2}(\mathbb{T}_{1,n})$, $n \geq 6$ i $n = 2k + 1$ za neko $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks. ■

Teorema 3.8.11 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})$, $n \geq 2$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks popločavanja $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})$, gdje je $n \geq 2$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{2,2}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})$ možemo popločati dominama. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})}\sigma \cong K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,2})$, dimenzije 2. Uočeni kompleks $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,2})$ ima netrivijalnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,2})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_2}(\mathbb{T}_{2,n})$, $n \geq 2$ nije Cohen–Macaulay kompleks. ■

Teorema 3.8.12 *Simplicijalni kompleksi popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$, $n \geq 9$ nisu Cohen–Macaulay kompleksi.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$, za $n \geq 9$. Dokaz date tvrdnje ćemo provesti kroz razmatranje sljedeća tri slučaja:

- 1) Neka je $n = 3k$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{1,6}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,6})$, a čija je dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,6})$ ima netrivijalnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,6})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 3k$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.
- 2) Neka je $n = 3k + 1$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{1,7}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ možemo popločati sa I–trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,7})$, a čija je dimenzija 2. Kompleks $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,7})$ ima netrivijalnu prvu kohomologiju $\tilde{H}^1(K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,7})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 3k + 1$, $k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

- 3) Neka je $n = 3k + 2$ za $k \geq 3$. Posmatrajmo $\sigma \in K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ koji odgovara popločavanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreže $\mathbb{T}_{1,5}$ tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ možemo popločati I-trominima. Tada vrijedi da je $\text{link}_{K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})}\sigma \cong K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,5})$, a čija je dimenzija 1. Kompleks $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,5})$ ima netrivialnu nultu kohomologiju $\tilde{H}^0(K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,5})) = \mathbb{Z}$, pa zaključujemo da $K_{I_3}(\mathbb{T}_{1,n})$ za $n = 3k + 2, k \geq 3$ nije Cohen–Macaulay kompleks.

Na osnovu prvog, drugog i trećeg slučaja slijedi tvrđenje dato u iskazu teoreme. ■

Glava 4

Homotopski tip simplicijalnih kompleksa popločavanja

Pronalazeći različite klase homotopija petlji možemo bolje i preciznije dati neke informacije o tom topološkom prostoru. Značaj proučavanja homotopije se ogleda u činjenici da proučavani prostor možemo zamijeniti njemu homotopnim prostorom koji je jednostavniji za proučavanje. U ovom poglavlju dat ćemo uvod u homotopiju simplicijalnih kompleksa popločavanja.

Definicija 4.0.1 *Neka je $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ i neka je X topološki prostor. Neprekidna funkcija $f : I \rightarrow X$ se naziva put u X . $f(0)$ nazivamo početak puta, a $f(1)$ kraj puta.*

Definicija 4.0.2 *Neka je $f : I \rightarrow X$ put takav da je $f(0) = f(1) = x_0$. Tada f zovemo petlja sa baznom tačkom x_0 .*

Definicija 4.0.3 *Neka su $f : X \rightarrow Y$ i $g : X \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja. Reći ćemo da je preslikavanje f homotopno sa g ako postoji neprekidno preslikavanje $F : X \times I \rightarrow Y$ tako da za svako $x \in X$, $F(x, 0) = f(x)$ i $F(x, 1) = g(x)$. Funkcija F se naziva homotopija između f i g , i pišemo $f \simeq g$.*

Definicija 4.0.4 *Neka su f i g putevi sa zajedničkom početnom tačkom x_0 i krajnjom tačkom x_1 . Ako postoji homotopija F iz f do g takva da je za svako $t \in I$, $F(0, t) = x_0$ i $F(1, t) = x_1$ tada su f i g homotopni putevi. Tada pišemo $f \simeq_p g$.*

U preciznijoj terminologiji mogli bismo reći da je funkcija f_t generirana sa putem homotopije F put iz x_0 do x_1 . Drugim riječima, fiksiramo li $t \in I$ i

zadamo funkciju $f_t(x) : I \rightarrow X$ tako da $f_t(x) = F(x, t)$. Tada je f_t put od x_0 do x_1 .

Lema 4.0.1 (Pasting lemma) *Neka je $f : X \rightarrow Y$. Neka je $A \cup B = X$, gdje su A i B , oba otvorena ili oba zatvorena podskupa od X . Ako su $f|_A$ i $f|_B$ obje neprekidne, tada je i f neprekidna.*

Dokaz Leme može se pronaći u [61] i [62].

Neka je f put. Neka $[f]$ označava klasu ekvivalencije svih puteva koji su homotopni sa f .

Propozicija 4.0.1 *Neka su $f : X \rightarrow Y$ i $g : X \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja. Neka je Y konveksan podskup od \mathbb{R}^n . To znači da je za svako $a, b \in Y$, linija segmenta između a i b sadržana u Y . Tada postoji homotopija između f i g koju nazivamo homotopijom ravne linije $F : X \times I \rightarrow Y$, gdje je $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Ako su f i g putevi sa zajedničkom početnom tačkom tada je F put homotopija.*

Dokazi se mogu pronaći u [61] i [62].

Neka je K simplicijalni kompleks i neka $\sigma \in K$. Definišemo sljedeći potkompleks od K

$$\text{del}(\sigma, K) := \{\tau \in K : \sigma \not\subseteq \tau\},$$

koji se naziva deletion od σ u K . Slično, potkompleks

$$\text{st}_K(\sigma) := \{\tau \in K : \sigma \cup \tau \in K\},$$

nazivamo zvijezda (engl. *star*) od σ u K . Primijetimo da je $\text{link}_K(\sigma) \subset \text{st}_K(\sigma)$. Pod pojmom linka zadržavamo smisao i datu definiciju datu u glavi dva odjeljka 3.8.

Spoj simpleksa K i tačke v koje nije njegov vrh, tj. sa simplicijalnim kompleksom $\{\emptyset, \{v\}\}$ nazivamo konus i označavamo sa

$$\text{cone}K := K * \{\emptyset, \{v\}\}.$$

Spoj simpleksa K i dvotačke $\{\emptyset, \{u\}, \{v\}\}$ pri čemu u i v nisu vrhovi od K se naziva suspenzija od K , i važi

$$\Sigma(K) := K * \{\emptyset, \{u\}\} \cup K * K * \{\emptyset, \{v\}\}.$$

Geometrijski gledano suspenzija je unija dva konusa nad K , polijepljena po K . Očigledno je da je $\text{cone}K$ kontraktibilan topološki prostor, dok je klasična činjenica da je $H_{i+1}(\Sigma K) = H_i(K)$ za svako i .

U ostatku poglavlja često ćemo koristiti naredne dvije leme čiji se dokazi mogu naći u [31] i [49].

Lema 4.0.2 Neka je K simplicijalan kompleks i v vrh od K . Ako je $\text{link}_K v$ kontraktibilan u $\text{del}_K v$ tada vrijedi

$$K \simeq \text{del}_K v \vee \Sigma(\text{link}_K v).$$

Lema 4.0.3 Neka je K simplicijalan kompleks i $\{u, v\}$ ivica od K . Ako je $\text{link}_K \{u, v\}$ kontraktibilan u $\text{del}_K \{u, v\}$ tada vrijedi

$$K \simeq K' \vee \Sigma(\text{link}_K \{u, v\}),$$

gde je K' potkompleks od K koji se sastoji od svih $\tau \in K$ takvih da $\{u, v\} \not\subset \tau$.

4.1 Fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa popločavanja

Definicija 4.1.1 Neka je $f : I \rightarrow X$ put iz x_0 do x_1 i neka je $g : I \rightarrow X$ put iz x_1 do x_2 . Definirajmo operaciju $*$ sa

$$f * g = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$f * g$ je neprekidno preslikavanje na osnovu Leme 4.0.1 pa je to put iz x_0 do x_2 .

Ovako definisan put zovemo još kompozicijom ili produktom puteva f i g . Prethodno definisana operacija $*$ može biti primijenjena i na klase homotopija.

Definicija 4.1.2 Neka je $f : I \rightarrow X$ put iz x_0 do x_1 i neka je $g : I \rightarrow X$ put iz x_1 do x_2 . Definirajmo $[f] * [g] = [f * g]$.

Propozicija 4.1.1 Operacija $*$ između klasa homotopija je dobro definisana.

Za dokaz Propozicije 4.1.1 vidjeti [61] i [62].

Propozicija 4.1.2 Neka je $f : I \rightarrow X$ put iz x_0 do x_1 . Neka je $g : I \rightarrow X$ put iz x_1 do x_2 . Neka je $h : I \rightarrow X$ put iz x_2 do x_3 , te neka je $\bar{f} : I \rightarrow X$ neprekidna funkcija takva da je $\bar{f}(s) = f(1 - s)$. Operacija $*$ između klasa homotopije ima sljedeća svojstva:

1. postoji neutralni element: $[e_{x_0}] * [f] = [f]$ i $[f] * [e_{x_0}] = [f]$,
2. postoji inverzni element: $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ i $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_0}]$,

3. vrijedi zakon asocijativnosti: $([f] * [g]) * h = [f] * ([g] * [h])$.

Dokaz Propozicije 4.1.2 može se pronaći u [61] i [62].

Definicija 4.1.3 *Neka je X topološki prostor. Neka je $\pi_1(X, x_0)$ označava skup svih klasa ekvivalencije $[f]$ od petlji u X u odnosu na tačku x_0 . $\pi_1(X, x_0)$ kada se opskrbi sa operacijom $*$ čini grupu. Takvu grupu nazivamo fundamentalna grupa.*

Propozicija 4.1.3 $(\pi_1(X, x_0), *)$ je grupa.

Dokaz Propozicije 4.1.3 može se pronaći u [31], [61] i [62].

Definicija 4.1.4 *Topološki prostor X je putno povezan ako za svako $x, y \in X$ postoji neprekidan put f takav da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$.*

Definicija 4.1.5 *Prostor X je jednostavno povezan ako skup X čine povezani putevi i za neko $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ sadrži samo jedan element e_{x_0} . Fundamentalna grupa se tada naziva trivijalna.*

Može se lako vidjeti da fundamentalna grupa prostora ne zavisi od izbora početne tačke, za više vidjeti [31], [61] i [62].

U nastavku ovog dijela proučavamo fundamentalne grupe kompleksa popločavanja. Kao što ćemo pokazati, kompleksi koji odgovaraju „velikim“ regionima imaju trivijalne fundamentalne grupe. Koristit ćemo se opisom fundamentalne grupe simplicijalnog kompleksa sa stranica–putem grupom (vidjeti [75]).

Teorema 4.1.1 *Za $m, n \geq 4$ fundamentalna grupa $\pi_1(K_{I_2}(D_{m,n}))$ je trivijalna.*

Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$ i neka su sa P_1, P_2, \dots, P_k označena postavljanja domine na tablu $D_{m,n}$. Svako postavljanje nam predstavlja jedan vrh simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{m,n})$. Unutar datog simplicijalnog kompleksa posmatrat ćemo petlje (puteve) koje su prezentovane sa nekim skupom vrhova datog simplicijalnog kompleksa i koji čine neki cikl $P_1 P_2 \dots P_k P_1$, pri čemu stranica $P_i P_{i+1} \in K_{I_2}(D_{m,n})$. Dokazat ćemo da su sve petlje kontraktibilne unutar kompleksa pomoću principa matematičke indukcije po dužini cikla k .

U slučaju kada je cikl dužine jedan, direktno slijedi da je $P_1 \simeq \bullet$. Za $k = 2$ tvrdnja je i dalje očigledna i vrijedi da je $P_1 P_2 P_1 \simeq \bullet$. Posmatrajmo sada cikl dužine 3, tj. $P_1 P_2 P_3 P_1$. Nadalje, i u ovom slučaju kada je $k = 3$ i dalje imamo trivijalan slučaj, tj. kako je takav simplicijalan kompleks flag

to trougao možemo sažeti u tačku, tj. $P_1P_2P_3P_1 \simeq \bullet$. Neka je sada dat cikl dužine $n = 4$, tj. $P_1P_2P_3P_4P_1$. Uočimo da dati cikl možemo izdijeliti na međusobno homotopne dijelove, tj. dati cikl svodimo na jedan od trivijalnih slučajeva, pa zaključujemo da je cikl $P_1P_2P_3P_4P_1 \simeq \bullet$.

Pretpostavimo sada da data tvrdnja vrijedi za sve ciklove čija je dužina manja od k . Dokažimo da data tvrdnja vrijedi i za dužinu cikla k . Neka je dat cikl $P_1P_2P_3 \dots P_kP_1$. U datom ciklom posmatrajmo neka četiri uzastopna vrha P_i, P_{i+1}, P_{i+2} i P_{i+3} . Ukoliko se parovi domina P_i i P_{i+2} ne sijeku, očigledno je da se ciklus homotopan sa $P_1P_2P_3 \dots P_iP_{i+2} \dots P_kP_1$ zbog postojanja trougla $P_iP_{i+1}P_{i+2}$, a koji je po induktivnoj hipotezi kontraktibilan unutar kompleksa. Analogno važi i za par domina na pozicijama P_{i+1} i P_{i+3} . Ostaje nam da razmotrimo slučaj kad se parovi domina P_i i P_{i+2} , i P_{i+1} i P_{i+3} sijeku. Oni prekrivaju najviše 6 polja table $D_{m,n}$ na kojoj se van njih moraju naći bar dva susjedna slobodna polja. Unutar simplicijalnog kompleksa $K_{I_2}(D_{m,n})$ uočimo da uvijek možemo pronaći vrh P_j koje je disjunktno sa odabranom četiri uzastopna vrha datog cikla. Zbog toga je dio cikla $P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ homotopan sa $P_iP_jP_{i+3}$. Odakle zaključujemo da se dati cikl homotopno može smanjiti na cikl manje dužine od k . Kako su svi ciklovi po induktivnoj pretpostavci čija je dužina manja od k homotopni sa tačkom to je i dati cikl homotopan sa tačkom, tj. $P_1P_2P_3 \dots P_kP_1 \simeq \bullet$. Na osnovu čega zaključujemo da je fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa popločavanja $K_{I_2}(D_{m,n})$ trivijalna. ■

Dokaz prethodne teoreme vrijedi u mnogo generalnijem slučaju kompleksa. Neka je zadat neki konačan skup poliomino oblika \mathcal{T} i $K_{\mathcal{T}}(D_{m,n})$ simplicijalni kompleks popločavanja table $m \times n$ sa \mathcal{T} . Najprije ćemo pokazati sljedeći stav.

Propozicija 4.1.4 *Postoji cijeli broj $l(\mathcal{T})$ takav da je broj vrhova u $K(M; \mathcal{T}) \setminus \text{link}_{K(M; \mathcal{T})}v$ nije veći od $l(\mathcal{T})$ za svaki region M u ravni i svaki vrh od $K(M; \mathcal{T})$.*

Dokaz: Očigledno, za proizvoljan poliomino u ravni postoji konačno mnogo postavljanja poliomina iz \mathcal{T} u ravni tako da ga sijeku. Time je i površina unije svih poliomina koji ga prekrivaju konačna. Odavde slijedi dato tvrđenje. ■

Teorema 4.1.2 *Postoji cijeli broj $p(\mathcal{T})$ takav da je $\pi_1(K_{P_s}(D_{m \times n}))$ trivijalno za svako $m, n \geq p(\mathcal{T})$.*

Dokaz: Dokaz ćemo provesti na osnovu principa matematičke indukcije po dužini ciklova da dokažemo da je simplicijalni kompleks nulhomotopan u $K_{P_s}(D_{m \times n})$. Cikl dužine jedan i dva su očigledno nulhomotopni. Pretpostavimo da su svi ciklovi dužine k nulhomotopni. Razmotrimo cikl

$\alpha = V_0 V_1 \dots V_k$ gdje je V_i neki vrh u kompleksu $K_{P_s}(D_{m \times n})$. Iz Propozicije 4.1.4, slijedi da u $K_{P_s}(D_{m \times n}) \setminus L$ gdje je

$$L = (\text{link}_{K_{P_s}(D_{m \times n})} V_{k-1} \cup \text{link}_{K_{P_s}(D_{m \times n})} V_k \cup \text{link}_{K_{P_s}(D_{m \times n})} V_0 \cup \text{link}_{K_{P_s}(D_{m \times n})} V_1)$$

nema više od $l(\mathcal{T})$ vrhova, to je put $V_{k-1} V_k V_0 V_1$ sadržan od zvijezda vrhova V za sve dovoljno velike brojeve m i n . Nadalje, α je homotopan sa ciklom $V V_1 \dots V_{k-1}$, koji je po indukcijskoj hipotezi nulhomotopan. ■

Argument prethodne teoreme zapravo važi u najgeneralnijem slučaju:

Teorema 4.1.3 *Postoji prirodni broj $s(\mathcal{T})$ takav da je za sve $m, n \geq s(\mathcal{T})$ fundamentalna grupa $\pi_1(K_{\mathcal{T}}(D_{m,n}))$ trivijalna.*

Dokaz: U dokazu Teoreme 4.1.1 ključni argument je da na tabli obezbijemo dovoljno prostora za postavljanje petog oblika u induktivnom koraku. Zaista, kako radimo sa poliomino oblicima koji imaju konačan broj polja ukoliko je tabla dovoljno velika, ona će posjedovati svojstvo da kako god postavili konačan broj r oblika iz \mathcal{T} uvijek možemo dodati $(r + 1)$ -vi oblik koji je disjunktan sa svima njima. ■

Posljedica ove opservacije je da tvđenje važi i za tablu $m \times n$ na torusu.

Teorema 4.1.4 *Postoji prirodni broj $t(\mathcal{T})$ takav da je za sve $m, n \geq t(\mathcal{T})$ fundamentalna grupa $\pi_1(K_{\mathcal{T}}(T_{m,n}))$ trivijalna.*

Teoreme 4.1.3 i 4.1.4 zapravo impliciraju da su simplicijalni kompleksi popločavanja asocirani tablama $m \times n$ netrivialne samo za konačno mnogo vrijednosti, a brojevi $s(\mathcal{T})$ i $t(\mathcal{T})$ su invarijante datog skupa poliomino oblika \mathcal{T} . Bilo bi zanimljivo pokušati o ovim brojevima nešto više reći za neke specijalne klase k -omina.

Problem 1 *Ocijeniti $s(\mathcal{T})$ i $t(\mathcal{T})$ za I i L k -omino u funkciji od k .*

4.2 Povezanost simplicijalnih kompleksa popločavanja

U ovom paragrafu disertacije dat ćemo uvodna razmatranja u povezanost simplicijalnih kompleksa popločavanja. Kompleksi $K_{P_s}(D_{m \times n})$ i $K_{P_s}(\mathbb{T}_{m \times n})$ teže da imaju trivijalnu fundamentalnu grupu i da budu 2-povezani za dovoljno velike m i n . Za prostor X kažemo da je n -povezan ako za svako $0 \leq k \leq n$, vrijedi da je $\pi_k(X) = 0$, ili ekvivalentno kažemo X je neprazan i svako neprekidno preslikavanje $S^k \rightarrow X$ je nulhomotopno.

Primijetimo da je ovaj rezultat specijalni slučaj [8, Propozicije 7]. Simplicijalni kompleks $K_{P_s}(\mathbb{T}_{m \times n})$ je primjer r -konusnog kompleksa koji je uveo Jonathan Barmak u [8] za dovoljno velike m i n .

Neka je $r \geq -1$ cijeli broj.

Definicija 4.2.1 *Simplicijalni kompleks K se naziva r -konusan ako bilo koji podkompleks od K na r vrhova leži u zvijezdi $\text{st}_K v$ nekog vrha $v \in K$.*

Sljedeći stav karakteriše bitno homotopsko svojstvo simplicijalnih kompleksa popločavanja.

Propozicija 4.2.1 *Postoji cijeli broj $r(\mathcal{T})$ takav da je $K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})$ r -konusan za sve $m, n \geq r(\mathcal{T})$.*

Dokaz: Prema stavu 4.1.4 za bilo kojih r vrhova v_1, \dots, v_r od $K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})$ postoji najviše $r \cdot l(\mathcal{T})$ vrhova koji leže izvan

$$\text{link}_{K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})} v_1 \cup \dots \cup \text{link}_{K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})} v_r$$

pa za dovoljno velike m i n postoji vrh v takvo da $v_1, \dots, v_r \in \text{link}_{K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})} v$. Pošto je $K(m, n; \mathcal{T})$ flag kompleksbilo koji potkompleks od $K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})$ na v_1, \dots, v_r je sadržan u $\text{st}_{K(m, n; \mathcal{T})} v$, pa je $K(m, n; \mathcal{T})$ r -konusan. ■

Zapravo, ovaj argument možemo primijeniti u mnogo širem kontekstu. Neka je M_n niz regiona u ravni ili na torusu takav da broj vrhova u $K(M_n; \mathcal{T})$ raste kako $n \rightarrow \infty$. Ovakav niz regiona nazivamo *rastućim*. Važi da je

Lema 4.2.1 *Postoji $m(\mathcal{T})$ takav da je $K(M_n; \mathcal{T})$ r -konusan za sve $n \geq m(\mathcal{T})$.*

U [8, Theorem 12], Barmak je dokazao da je 6^n -konusni kompleks n -povezan. Prema tome, ovaj rezultat sa našom Lemom 4.2.1 kaže:

Posljedica 4.2.1 *Za rastući niz regiona M_i i zadati skup poliomino oblika \mathcal{T} , postoji niz prirodnih brojeva $p_k(M_i, \mathcal{T})$ takav da je $\pi_k K(M_n; \mathcal{T})$ trivijalan za svako $n \geq p_k(M_i; \mathcal{T})$.*

Brojevi $p_k(M_i, \mathcal{T})$ povezuju kombinatoriku od \mathcal{T} i regiona M_i sa topologijom od $K(M_i; \mathcal{T})$. Poznato je da je na primjer $p_0(K(1, n; 2)) = 5$, $p_1(K(1, n; 2)) = 8$, $p_0(K(n, n; 2)) = 3$, $p_1(K(n, n; 2)) = 2$ i još neke vrijednosti koje bi slijedile iz naših eksperimenata i primjena Hurevičeve teoreme. No, odrediti tačnu vrijednost od $p_k(M_n, \mathcal{T})$ u općem slučaju je teško; čak i u jednostavnijim slučajevima za koje znamo da $K(M_i; \mathcal{T})$ imaju homotopski tip buketa sfera.

Problem 2 *Dati ocjenu $p_k(M_n, \mathcal{T})$ u zavisnosti od n za dati rastući niz regiona M_n i skup poliomino oblika \mathcal{T}*

4.3 Homotopski tip simplicijalnih kompleksa popločavanja

U ovom paragrafu razmotrit ćemo homotopski tip simplicijalnih kompleksa asociranih sa postavljanjem I_k -omina na kvadratnoj tabli i na kvadratnoj torusnoj mreži $1 \times n$. Ovaj problem je originalno razmatrao Kozlov u [49] u kontekstu kompleksa nezavisnosti grafa koji je pokazao da je za $n \geq 1$

$$K_{I_2}(D_{1 \times n}) = \begin{cases} \mathbb{S}^{k-1} & \text{ako je } n = 3k, \\ pt & \text{ako je } n = 3k + 1, \\ \mathbb{S}^k & \text{ako je } n = 3k + 2. \end{cases}$$

i da je za $n \geq 3$

$$T_{I_2}(D_{1 \times n}) = \begin{cases} \mathbb{S}^{k-1} \vee \mathbb{S}^{k-1} & \text{ako je } r = 3k, \\ \mathbb{S}^{k-1} & \text{ako je } r = 3k \pm 1. \end{cases}$$

Matsushita je pokazao u [56] da je $K_{I_2}(D_{2 \times n})$ homotopan buketu sfera, a nedavno je u [74] isti rezultat pokazan i za $K_{I_2}(D_{3 \times n})$. No, ovi rezultati su razmatrani u kontekstu grafovskih kompleksa, tematike koja privlači posebnu pažnju naučne javnosti, oblasti u kojoj je lijep doprinos dala i Marija Jelić Milutinović u svojoj doktorskoj disertaciji [58] i radovima [9] i [59].

Veza sa grafovskim kompleksima sparivanja i kompleksima popločavanja je evidentna i kompleksi koje mi razmatramo se mogu smatrati uopćenjem ovih objekata. Naredni rezultati su dobijeni sličnim metodama, najčešće primjenom Lema 4.0.2 i 4.0.3.

Propozicija 4.3.1 *Za $n \geq i_1 + i_k$ vrijedi*

$$K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times n}) \simeq \bigvee_{j=2}^k \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-1)}) \vee \bigvee_{r=2}^{i_1} \bigvee_{l=1}^k \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_l-r)})$$

Dokaz: Označimo $K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times n})$ sa K . Primijenimo Lemu 4.0.2 nekoliko puta. Neka je u_j vrh koji odgovara postavljanju od $1 \times I_j$ I-omina na prvu ćeliju i_j ćelija od $1 \times n$ table. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $\text{link}_K u_j \cong K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_j)})$ za svako $1 \leq j \leq k$
2. $u_1 \in \text{del}_K u_j$ za svako $2 \leq j \leq k$
3. $\text{link}_K u_{j'} \subsetneq \text{link}_K u_{j''}$ za svako $1 \leq j' < j'' \leq k$

Prethodne tvrdnje impliciraju da $\text{link}_K u_2$ leži u linku od u_1 u $\text{del}_K u_2$ to možemo primijeniti Lemu 4.0.2 na u_2 . Primjenom prethodno navedne Leme dobijamo da vrijedi da je

$$K \simeq \text{del}_K u_2 \vee \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_2)}).$$

Za svako $j \geq 3$ slijedi da je $\text{link}_K u_j \cong \text{link}_{\text{del}_K u_2} u_j$. Nastavimo li primjenjivati Lemu 4.0.2 za u_3, \dots, u_k , redom kao rezultat primjene dobit ćemo

$$K \simeq X \vee \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_k)}) \vee \dots \vee \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_2)}),$$

gdje je X simplicijal kompleks dobijen iz K kada se obrišu svi simpleksi koji sadrže jedno od vrhova u_2, \dots, u_k .

Nastavimo primjenjivanje Leme 4.0.2 na X . Sa u_j^r označimo vrh koji odgovara postavljanju od $1 \times I_j$ I-omina na $1 \times n$ tablu tako da prva $r-1$ i $n-i_j-r+1$ ćelija nisu pokrivena. Tada slijedi da

$$\text{link}_X u_j^r \cong K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_j-r+1)})$$

i $\text{link}_X u_j^r$ leže u linku od u_1 u $\text{del}_X u_j^r$. Primijenimo li Lemu 4.0.2 $u_1^2, \dots, u_k^2, u_1^3, \dots, u_k^3, \dots, u_1^{i_1}, \dots, u_k^{i_1}$, respektivno. Slijedi da je

$$X \simeq Y \vee \bigvee_{r=1}^{i_1} \bigvee_{j=1}^k \Sigma K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_j-r+1)}),$$

gdje je Y dobijen iz X brisanjem svih simpleksa koji sadrže jedan od vrhova u_j^r gdje je $1 \leq j \leq k$, i $2 \leq r \leq i_1$. Međutim, kako smo već uklonili sve vrhove izvan $\text{link}_K u_1$, Y je simpleks cone sa vrhom u u_1 i kontraktibilan je. Odakle slijedi tvrđenje. ■

Na osnovu Propozicije 4.3.1 direktno slijedi tvrđenje Teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.1 *Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_1, \dots, I_k}(D_{1 \times n})$ ima homotopski tip buket sfera.*

U nastavku ćemo dati dokaz sličnog rezultata, ali u slučaju kada se razmatra simplicijalni kompleks asociran postavljanjem I-omino oblika na torusnu kvadratnu mrežu dimenzije $1 \times n$. Neka su $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ pozitivne cjelobrojne vrijednosti i \mathcal{T} se sastoji od $1 \times I_j$ I-omina za svaki $1 \leq j \leq k$ i neka je sa $K_{I_1, I_2, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{m \times n})$ označen simplicijalni kompleks popločavanja na kvadratnoj torusnoj mreži $m \times n$.

Propozicija 4.3.2 *Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_1}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ ima homotopski tip buket sfera.*

Dokaz: Neka su ćelije na tabli označene sa $1, \dots, n$ i vrh koji odgovara postavljanju $1 \times I_1$ I -omina na tablu tako da prekriva ćelije $i, \dots, i+i_1$ označen sa u_i . Primijenimo li Lemu 4.0.3 nekoliko puta na stranice $\{u_1, u_{i_1+1}\}, \dots, \{u_{i_1}, u_{2i_1}\}$ dobijamo da

$$K_{I_1}(\mathbb{T}_{1 \times n}) \simeq \vee_{I_1} \Sigma K_{I_1}(D_{1 \times (n-2i_1)}) \vee K'.$$

K' je potkompleks od K koji se sastoji od $\tau \in K$ tako da $\{u_j, u_{i_1+j}\} \not\subset \tau$ za svako $1 \leq j \leq i_1$.

Primijenimo sada Lemu 4.0.2 redom na u_1, \dots, u_{i_1} tada dobijamo

$$K' \simeq \vee_{I_1} \Sigma K(D_{1 \times (n-i_1-1)})_{I_1} \vee K_{I_1}(D_{1 \times (n-1)}).$$

Tvrđenje slijedi iz Teoreme 4.3.1. ■

Teorema 4.3.2 *Simplicijalni kompleks popločavanja $K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ ima homotopski tip buket sfera.*

Dokaz: Neka je u_i vrh simplicijalnog kompleksa $K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ koji odgovara postavljanju $1 \times I_k$ I -omina na tablu tako da prekriva ćelije $i, \dots, i+i_k$ i v_i vrh od $K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ koji odgovara postavljanju $1 \times I_1$ I -omina na tablu tako da prekriva ćelije $i, \dots, i+i_1$. Vrijedi da je $\text{link}_{\mathbb{T}} u_i \subset \text{link}_{\mathbb{T}} v_i$. Primijenimo li Lemu 4.0.2 na vrh u_1 dobit ćemo da vrijedi

$$K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n}) \simeq \Sigma K_{I_1, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_k)}) \vee \text{del}_{\mathbb{T}} u_1.$$

Primijenimo li nekoliko puta uzastopno Lemu 4.0.2 na u_2, \dots, u_{i_k} dobijamo da

$$K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n}) \simeq \vee_{i_k} \Sigma K_{I_1, \dots, I_k}(D_{1 \times (n-i_k)}) \vee T',$$

gdje je T' potkompleks od \mathbb{T} koji sadrži sve simplekse $\sigma \in K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ tako da $\sigma \cap \{u_1, \dots, u_{i_k}\}$. Nadalje, ponovno imamo da vrijedi $\text{link}_{T'} u_i \subset \text{link}_{T'} v_i$ to možemo primijeniti Lemu 4.0.2 na vrh u_{i_k+1} . Odakle, slijedi da je

$$T' \simeq \Sigma \text{link}_{T'} u_{i_k+1} \vee \text{del}_{T'} u_{i_k+1}.$$

U oba linka $\text{link}_{T'} u_{i_k+1}$ i $\text{del}_{T'} u_{i_k+1}$ možemo primjenjivati Lemu 4.0.2 na pomenuti vrh u_j sve dok ne iscrpimo sve vrhove koji nastaju iz postavljanja $1 \times I_1$ I -omina na kvadratnu torusnu ploču. Odakle slijedi da buket simpleksi tipa $K_{I_1, \dots, I_{k-1}}(D_{1 \times m})$ koji se pojavljuju iz suspenzije linkova, i $K_{I_1, \dots, I_{k-1}}(\mathbb{T}_{1 \times n})$ kao deletion od vrhova u posljednjoj primjeni Leme 4.0.2. Tvrđnja Teoreme slijedi iz Teoreme 4.3.1, Propozicije 4.3.2 i indukcije po k . ■

Ovi simplicijalni kompleksi su interesantni sa kombinatorne strane, pošto nisu Cohen-Macaulay kompleksi, a imaju homotopski tip buketa sfera. Takvi primjeri su već poznati u literaturi, ali klasa kompleksa koje smo proučili sigurno zaslužuje dalju analizu.

Primijetimo da ako je $m < i_1$ zbog nemogućnosti vertikalnog postavljanja I-omina na tablu važi

$$K_{I_1, \dots, I_k}(D_{m \times n}) \cong \underbrace{K_{I_1, \dots, I_k}(D_{1 \times n}) * \dots * K_{I_1, \dots, I_k}(D_{1 \times n})}_m$$

kao i odgovarajuća dekompozicija u torusnom slučaju

$$K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{m \times n}) \cong \underbrace{K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n}) * \dots * K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{1 \times n})}_m.$$

Zbog toga imamo

Posljedica 4.3.1 *Ako je $m < i_1$ $K_{I_1, \dots, I_k}(D_{m \times n})$ i $K_{I_1, \dots, I_k}(\mathbb{T}_{m \times n})$ imaju homotopski tip buketa sfera.*

Ovi rezultati zajedno sa primjerima koji su urađeni uz pomoć računara sugerišu sljedeću hipotezu

Hipoteza 4.3.1 *Za prirodne brojeve m i n i konačni skup poliomino oblika \mathcal{T} simplicijalni kompleksi $K_{\mathcal{T}}(D_{m \times n})$ i $K_{\mathcal{T}}(\mathbb{T}_{m \times n})$ imaju homotopski tip buketa sfera.*

Literatura

- [1] E. T. AKHMEDOV, S. R. SHAKIROV, *Gluing of Surfaces with Polygonal Boundaries*, Functional Analysis and Its Applications (2009), Volume **43**, Issue 4, Pages 3–13.
- [2] F. ARDILA, R. P. STANLEY, *Tilings*, The Mathematical Intelligencer (2010), Volume **32**, Issue 4, Pages 32–43.
- [3] W. W. R. BALL, H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, 13th edition, New York: Dover Publications, 1987.
- [4] Đ. BARALIĆ, *Topologija i kombinatorika kvazitorusnih mnogostrukosti k stepena*, Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2013.
- [5] Đ. BARALIĆ, *300 pripremnih zadataka za juniorske matematičke olimpijade–Iskustvo Srbije*, Klet, Beograd, 2016.
- [6] G. BAREQUET, S. W. GOLOMB, D. A. KLARNER, *Polyominoes, Chapter 14 in Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 3rd edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018.
- [7] G. BAREQUET, G. ROTE, M. SHALAH, $\lambda > 4$: *An improved lower bound on the growth constant of polyominoes*, Communications of the ACM (2016), Volume **59**, Issue 7, Pages 88–95.
- [8] J. A. BARMAK, *Connectivity of ample, conic and random simplicial complexes*, preprint
<https://arxiv.org/pdf/2103.03952.pdf>
- [9] M. BAYER, B. GOECKNER, M. JELIĆ MILUTINOVIĆ, *Manifold Matching Complexes*, Mathematika (2020), Volume **66**, Issue 4, Pages 973–1002.

- [10] A. BJÖRNER, G. KALAI, *On f -vectors and homology*, Annals New York Academy of Sciences (1989), Volume **555**, Issue 1, Pages 63–80.
- [11] A. BJÖRNER, M. L. WACHS, *Shellable Nonpure Complexes and Posets. I*, Transactions of the American Mathematical Society (1996), Volume **348**, Issue 4, Pages 1299–1327.
- [12] A. BJÖRNER, P. FRANKL, R. STANLEY, *The number of faces of balanced Cohen–Macaulay complexes and a generalized Macaulay theorem*, Combinatorica (1987), Volume **7**, Issue 1, Pages 23–34.
- [13] G. BREDON, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1993.
- [14] W. BRUNS, J. HERZOG, *Cohen–Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [15] V. BUCHSTABER, T. PANOV, N. RAY, *Spaces of polytopes and cobordisms of quasitoric manifolds*, Moscow Mathematical Journal (2007), Volume **7**, Issue 2, Pages 219–242.
- [16] S. S. CAIRNS, *Introductory Topology*, The Roland Press Company, New York, 1961.
- [17] S. C. CARLSON, *Topology of surfaces, knots and manifolds*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [18] J. H. CONWAY, J. C. LAGARIAS, *Tilings with polyominoes and combinatorial group theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A (1990), Volume **53**, Issue 2, Pages 183–208.
- [19] A. R. CONWAY, A. J. GUTTMANN, *On Two-Dimensional Percolation*, Journal of Physics A: Mathematical and General (1995), Volume **28**, Issue 4, Pages 891–904.
- [20] D. COOK II, U. NAGEL, *Cohen–Macaulay Graphs and Face Vectors of Flag Complexes*, SIAM Journal on Discrete Mathematics (2010), Volume **26**, Issue 1, Pages 89–101.
- [21] M. EDEN, *A Two-Dimensional Growth Process*, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability University of California Press (1961), Volume **4**, Pages 223–239.

- [22] A. FROHMADER, *Face Vectors of Flag Complexes*, Israel Journal of Mathematics (2008), Volume **164**, Issue 1, Pages 153–164.
- [23] M. GARDNER, *Hexaflexagons and other mathematical diversions: the first Scientific American book of puzzles & games*, University of Chicago Press, 1988.
- [24] N. D. GILBERT, T. PORTER, *Knots and Surfaces*, Oxford University Press, 1994.
- [25] S. W. GOLOMB, *Checker Boards and Polyominoes*, American Mathematical Monthly (1954), Volume **61**, Issue 10, Pages 675–682.
- [26] S. W. GOLOMB, *Polyominoes*, Scribners, New York, 1965.
- [27] S. W. GOLOMB, *Tiling with Polyominoes*, Journal of Combinatorial Theory (1966), Volume **1**, Issue 2, Pages 280–296.
- [28] S. W. GOLOMB, *Tiling with Sets of Polyominoes*, Journal of Combinatorial Theory (1970), Volume **9**, Issue 1, Pages 60–71.
- [29] S. W. GOLOMB, *Polyominoes Which Tile Rectangles*, Journal of Combinatorial Theory, Series A (1989), Volume **51**, Issue 1, Pages 117–124.
- [30] J. E. GOODMAN, J. O’ROURKE, *Handbook of Discrete & Computational Geometry*, Chapman & HALL/CRC, Boca Raton, 2004.
- [31] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [32] J. HARER, D. ZAGIER, *The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves I*, Inventiones Mathematicae (1986), Volume **85**, Issue 1, Pages 457–485.
- [33] M. HÖCHSTER, *Rings of invariants of tori, Cohen–Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, Annals of Mathematics (1972), Volume **96**, Issue 2, Pages 318–337.
- [34] I. JENSEN, A. J. GUTTMANN, *Statistics of lattice animals (polyominoes) and polygons*, Journal of Physics A: Mathematical and General (2000), Volume **33**, Issue 29, Pages L257–L263.

- [35] I. JENSEN, *Enumerations of lattice animals and trees*, Journal of Statistical Physics (2001), Volume **102**, Issue 3, Pages 865–881.
- [36] I. JENSEN, *Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing*, Proceedings of the ICCS: International Conference on Computational Science (2003), Volume **2659**, Part III, Pages 203–212.
- [37] D. JOJIĆ, *O nekim kombinatornim i algebarskim metodama u enumeraciji politopa i poseta*, Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2005.
- [38] M. JUHNKE-KUBITZKE, S. MURAI, *Balanced generalized lower bound inequality for simplicial polytopes*, In: Selecta Mathematica (2018), Volume **24**, Issue 2, Pages 1677–1689.
- [39] M. JUHNKE-KUBITZKE, L. VENTURELLO, *A balanced non-partitionable Cohen–Macaulay complex*, Algebraic Combinatorics (2019), Volume **2**, Issue 6, Pages 1149–1157.
- [40] M. JUHNKE-KUBITZKE, L. VENTURELLO, *Balanced shellings and moves on balanced manifolds*, Advances in Mathematics (2021), Volume **379**, Issue 2, Pages 107571.
- [41] M. JUHNKE-KUBITZKE, L. VENTURELLO, *Graded Betti numbers of balanced simplicial complexes*, In: ArXiv e-prints (November, 2018).
<https://arxiv.org/abs/1811.03892.pdf>.
- [42] M. JUHNKE-KUBITZKE, S. MURAI, I. NOVIK, C. SAWASKE, *A generalized lower bound theorem for balanced manifolds*, In: Math. Z. 289.3–4 (2018), pp. 921–942. issn: 0025–5874.
- [43] J. J. KJAER, *Duality theorems for simplicial complexes*, Bachelor thesis in mathematics (Advisor: Jesper Michael Møller), Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, June 4th, 2011.
- [44] D. A. KLARNER, *Cell Growth Problems*, Canadian Journal of Mathematics (1967), Volume **19**, Issue 1, Pages 851–863.
- [45] D. A. KLARNER, R. L. RIVEST, *A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes*, Canadian Journal of Mathematics, Volume **25**, Issue 3, Pages 585–602.

- [46] L. C. KINSEY, *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [47] S. KLEE, I. NOVIK, *Lower Bound Theorems and a Generalized Lower Bound Conjecture for balanced simplicial complexes*, *Mathematika* (2016), Volume **62**, Issue 2, Pages 441–477.
- [48] R. KOCH, *Classification of Surfaces*, Lecture notes:
<https://pages.uoregon.edu/koch/math431/Surfaces.pdf>
- [49] D. N. KOZLOV, *Complexes of directed trees*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* (1999), Volume **88**, Issue 1, Pages 112–122.
- [50] J. M. LEE, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2011.
- [51] E. LIÐAN, Ð. BARALIĆ, *Homology of polyomino tilings on flat surfaces*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* (2021),
<https://doi.org/10.2298/AADM210307031L>
- [52] F. S. LIMA IMPELLIZIERI, *Domino Tilings of the Torus*, Master thesis, Pontifica Universidade Catolica do Rio de Janerio, 2016.
- [53] W. F. LUNNON, *Counting Polyominoes*, In *Computers in Number Theory* (Ed. A. O. L. Atkin, B. J. Brich). London: Academic Press, Pages 347–372, 1971.
- [54] W. F. LUNNON, *Counting Hexagonal and Triangular Polyominoes*. In *Graph Theory and Computing* (Ed. R. C. Read). New York: Academic Press, 1972.
- [55] N. MADRAS, *A pattern theorem for lattice clusters*, *Annals of Combinatorics* (1999), Volume **3**, Issue 2, pp. 357–384.
- [56] T. MATSUSHITA, *Matching Complexes of Small Grids*, *The Electronic Journal of Combinatorics* (2019), Volume **26**, Issue 3
- [57] S. MERTENS, *Lattice Animals—A Fast Enumeration Algorithm and New Perimeter Polynomials*, *Journal of Statistical Physics* (1990), Volume **58**, Issue 5, Pages 1095–1108.

- [58] M. JELIĆ MILUTINOVIĆ, *Kombinatorna topologija i grafovski kompleksi*, Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2021.
- [59] M. JELIĆ MILUTINOVIĆ, , H. JENNE, A. McDONOUGH, AND J. VEGA, *Matching complexes of trees and applications of the matching tree algorithm*, preprint
<https://arxiv.org/pdf/1905.10560.pdf>
- [60] J. R. MUNKRES, *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., California, 1984.
- [61] J. R. MUNKRES, *Topology; a First Course*, Englewood Cliffs, Prentice–Hall, Inc., New Jersey, 1974.
- [62] J. R. MUNKRES, *Topology*, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [63] M. MUZIKA–DIZDAREVIĆ, R. ŽIVALJEVIĆ, *Symmetric polyomino tilings, tribones, ideals, and Gröbner bases*, Publications de l’Institut Mathématique (2015), Volume **98**, Issue 112, Pages 1–23.
- [64] M. MUZIKA–DIZDAREVIĆ, M. TIMOTIJEVIĆ, R. ŽIVALJEVIĆ, *Signed polyomino tilings by n -in-line polyominoes and Gröbner bases*, Publications de l’Institut Mathématique (2016), Volume **99**, Issue 113, Pages 31–42.
- [65] G. L. NABER, *Topological Methods in Euclidean Spaces*, Dover Publications, Inc., New York, 2000.
- [66] R. C. READ, *Some Applications of Computers in Graph Theory*, In Selected Topics in Graph Theory (Ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson). New York: Academic Press, Pages 417–444, 1978.
- [67] D. H. REDELMEIER, *Counting polyominoes: Yet another attack*, Discrete Mathematics (1981), Volume **36**, Issues 2, Pages 191–203.
- [68] M. REID, *Tile homotopy groups*, L’Enseignement Mathématique (2003), Volume **49**, Issues 1, Pages 123–155.
- [69] M. REID, *Tiling with Similar Polyominoes*, Journal of Recreational Mathematics (2002), Volume **31**, Issues 1, Pages 15–24.

- [70] M. REID, *Many L-Shaped Polyominoes Have Odd Rectangular Packings*, Annals of Combinatorics (2014), Volume **18**, Issues 2, Pages 341–357.
- [71] G. A. REISNER, *Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Mathematics (1976), Volume **21**, Issues 1, Pages 30–49.
- [72] J. ROKSVOLD, H. VERDURE, *Betti numbers of skeletons*, In: ArXiv e-prints 1502.05670 (Feb. 2015).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150205670R>
- [73] E. RÉMILA, *On the tiling of a torus with two bars*, Theoretical Computer Science (1994), Volume **134**, Issues 2, Pages 415–426.
- [74] S. GOYAL, S. SHUKLA, A. SINGH, *Matching complexes of $3 \times n$ grid graphs*, In: ArXiv e-prints 2106.09915 (June 2021).
<https://arxiv.org/pdf/2106.09915.pdf>
- [75] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [76] R. P. STANLEY, *Enumerative combinatorics*, Cambridge University Press, 1999.
- [77] R. P. STANLEY, *The upper bound conjecture and Cohen–Macaulay rings*, Studies in Applied Mathematics (1975), Volume **54**, Issues 2, Pages 135–142.
- [78] R. P. STANLEY, *Cohen–Macaulay complexes*, Higher Combinatorics. NATO Advanced Study Institutes Series (Series C - Mathematical and Physical Sciences) (1977), Volume **31**, Issues 1, Pages 51–62.
- [79] R. STANLEY, *Balanced Cohen–Macaulay complexes*, Transactions of the American Mathematical Society (1979), Volume **249**, Issues 1, Pages 139–157.
- [80] R. STANLEY, *Combinatorics and Commutative Algebra*, 2nd edition, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [81] J. STILLWEL, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer–Verlag, New York, 1993.

- [82] THE SAGE DEVELOPERS, *SageMath*, the Sage Mathematics Software System (Version 9.0).
<http://www.sagemath.org>
- [83] H. ZHENG, *Ear Decomposition and Balanced 2-neighborly Simplicial Manifolds*, The Electronical Journal of Combinatorics (2020), Volume **27**, Issue 1, Pages 1–17.
- [84] J. R. WEEKS, *The Shape of Spaces*, 3th Edition, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2020.

Biografija

Edin Liđan rođen je 15.12.1986. godine u Cazinu. Stalno nastanjen u Gradini–Cazin. Oženjen. Otac jednog djeteta. Osnovnu školu je završio u JU OŠ „Ostrožac” u Ostrošcu, a potom opću gimnaziju JU „Gimnazija” Cazin s odličnim uspjehom.

Studij Matematike i informatike je upisao 2005. godine na Pedagoškom fakultetu Univerziteta u Bihaću. Studij završava 2009. godine s prosječnom ocjenom 8,36.

U 2010. godini se upisuje na magistarski studij na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zenici, smjer Matematika i informatika. Magistarski studij završava 2013. godine s prosječnom ocjenom 8,86 i stiče akademsko zvanje magistar matematike i informatike. Magistarski rad pod nazivom „Kriptosistemi s javnim ključem u funkciji rješavanja problema autentifikacije i nepobitnosti” je odbranio pod mentorstvom profesora dr. sc. Bernadina Ibrahimpašića.

Od decembra 2015. godine je student doktorskih studija Matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, gdje je počeo saradnju sa dr. sc. Đorđem Baralićem.

Prvo radno iskustvo stekao je u „II srednjoj školi” u Cazinu gdje je radio kao profesor matematike. Od juna 2010. godine zaposlen je na Pedagoškom fakultetu Univerziteta u Bihaću, gdje je izabran u zvanje asistenta, a kasnije višeg asistenta, na oblast Algebra i metodika nastave matematike.

Koautor je univerzitetskog udžbenika. Ima nekoliko objavljenih naučnih/stručnih radova. Učestvovao je na konferencijama iz oblasti kombinatorike, algebre i metodike nastave matematike. Istraživanja rađena u okviru doktorske disertacije predstavljao je u Lyonu (Francuska), Zagrebu (Hrvatska), Beogradu (Srbija), Podgorici (Crna Gora), Berlinu i Heidelbergu (Njemačka).

Izjava o autortstvu

Potpisan Edin Lidan
Broj indeksa/upisa: 1/2015

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom **“Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliominima ”**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u dijelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nisam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

U Podgorici, 17.12.2021.

Potpis doktoranta

Edin Lidan - Prdan

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Edin Liđan

Broj indeksa/upisa: 1/2015

Studijski program: Matematika

Naslov rada: "Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliominima "

Mentor: dr. sc. Đorđe Baralić

Potpisan Edin Liđan

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

Potpis doktoranta

U Podgorici, 17.12.2021.



Izjava o korištenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **“Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliominima”**, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilogima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

U Podgorici, 17.12.2021.

Potpis doktoranta

