UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nikola Konatar

Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela

DOKTORSKA DISERTACIJA

Podgorica, 2022.

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Nikola Konatar

Conservation laws in the framework of stochastic and deterministic models

PHD THESIS

Podgorica, 2022.

Podaci i informacije o doktorandu

Ime i prezime: Nikola Konatar

Datum i mjesto rođenja: 08. 08. 1991. godine, Bijelo Polje, Crna Gora

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka: Matematika i Računarske nauke, 2016.

Podaci i informacije o mentoru

Ime i prezime: Darko Mitrović

Titula: doktor matematičkih nauka

Zvanje: redovni profesor

Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Univerzitet Crne Gore, Prirodno–matematički fakultet

Članovi komisije:

Dr Darko Mitrović, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Oleg Obradović, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr David Kalaj, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Goran Popivoda, docent PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Sanja Konjik, redovni profesor PMF-a, Univerzitet u Novom Sadu

Datum odbrane:

28. 12. 2022. godine

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

Naslov disertacije: Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela

Rezime: Cilj ove disertacije je dobijanje novih rezultata iz oblasti zakona održanja. Preciznije, ispitujemo ponašanje interfejsa između dva nemješljiva fluida, razmatramo skalarne zakone održanja kod kojih fluks ima prekide u odnosu na prostornu promjenljivu i dobijamo uslove egzistencije i jedinstvenosti rješenja, i tražimo uslove egzistencije i jedinstvenosti rješenja stohastičkih skalarnih zakona održanja.

Ključne riječi: skalarni zakon održanja, Darcy-jev zakon, H-mjere, H-distribucije, stohastički skalarni zakon održanja, uslovi dopustivosti, kinetičko rješenje

Naučna oblast: Parcijalne diferencijalne jednačine

Uža naučna oblast: Zakoni održanja

UDK broj: 519.21

INFORMATION ON THE PHD THESIS

Name of the doctoral program: Mathematics, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro

Thesis title: Conservation laws in the framework of stochastic and deterministic models

Summary: The aim of this thesis is obtaining new results in the area of conservation laws. More precisely, we study the behavior of the interface between two immiscible fluids, we consider scalar conservation laws with discontinuous flux with respect to the space variable and we obtain conditions for the existence and uniqueness of solutions in a special case, and we search for conditions for existence and uniqueness of solutions to stochastic scalar conservation laws.

Key words: scalar conservation laws, Darcy's law, H-measures, H-distributions, stochastic scalar conservation laws, admissibility conditions, kinetic solutions

Scientific field: Partial differential equations

Scientific subfield: Conservation laws

UDC: 519.21

Predgovor

Svjedoci smo ubrzanog razvoja u granama zakona održanja, kako determinističkih tako i stohastičkih. Povećano interesovanje za ove oblasti je motivisano konkretnim aplikacijama u raznim granama industrije i nauke (tok saobraćaja, tok u poroznim sredinama, primjene u biologiji, finansijama, itd., vidjeti [3, 10, 77] i reference date u njima). U ovoj disertaciji, bavimo se determinističkim i stohastičkim zakonima održanja, i svojstvima njihovih rješenja.

Budući da je ova disertacija proizvod spoja više matematičkih disciplina, prvu glavu ćemo posvetiti uvođenju potrebnih definicija i pojmova iz nama bitnih matematičkih oblasti. Na početku svake sekcije dajemo literaturu koju smo koristili kao izvor.

U drugoj glavi istražujemo dinamiku interfejsa između dva nemješljiva fluida. Naš metod se bazira na proceduri level skupova [17, 23, 24, 27] u okviru koje pratimo tačke interfejsa. Kretanje interfejsa se opisuje transportnom jednačinom i tačke se kreću duži karakteristika. Iako je brzina koja određuje karakteristike nepoznata, one se mogu izraziti odgovarajućim funkcijama Green-ovog tipa [23, 22].

Važno svojstvo metoda koji dajemo je činjenica da smo uspjeli da izbjegnemo korišćenje funkcije toka (koja ne postoji u prostorima dimenzije veće od dva) tako što smo je, grubo govoreći, zamijenili funkcijom pritiska. Funkcija toka je potencijal koji odgovara dvodimenzionom vektorskom polju bez divergencije (i opisuje nemješljivost tečnosti, vidjeti (2.3)). Igrala je važnu ulogu u, na primjer, [17, 23, 77], gdje je sprovedeno slično istraživanje. Iz istog razloga, u [26], nastup konvekcije na gravitaciono nestabilnom difuzivnom graničnom sloju u poroznoj sredini je opisan samo u dvodimenzionom slučaju. Smatramo da naš metod ima potencijal za primjenu u različitim oblastima istraživanja kada se radi u dimenzijama većim od dva.

U trećoj glavi se bavimo skalarnim zakonima održanja sa prekidnim fluksom. Ovi zakoni su netrivijalna generalizacija skalarnih zakona održanja sa glatkim fluksom, i opisuju razne fizičke fenomene koji se javljaju u jako heterogenim sredinama. Neki od primjera su tok u poroznim sredinama, procesi sedimentacije, tok saobraćaja, itd.

(vidjeti [1, 12, 14, 35] i reference navedene u njima). Dakle, od osamdesetih (vjerovatno od rada [81]) skalarni zakoni održanja sa prekidnim fluksom se intenzivno istražuju.

Za razliku od slučaja kada fluks zavisi regularno od prostorne promjenljive, odgovore na pitanja egzistencije i jedinstvenosti rješenja kao i egzistencija tragova entropijskih rješenja još uvijek nemamo u slučaju kada fluks ima prekid. Zaista, u klasičnom radu [48] možemo naći koncept (poznat kao entropijska rješenja) koji vodi do dobre postavljenosti skalarnih zakona održanja sa regularnim koeficijentima (neprekidno diferencijabilnim u odnosu na sve promjenljive). Ispostavilo se da je veoma teško proširiti ovaj koncept na slučaj kada fluks ima prekid u odnosu na prostornu promjenljivu, i pojavilo se više zanimljivih pristupa tom problemu [2, 4, 49, 66], od kojih većina adaptira pristup iz [48]. Ipak, pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja u slučaju kada je fluks funkcija ograničene varijacije u odnosu na prostornu promjenljivu je još uvijek otvoreno.

Situacija se još više komplikuje kada je fluks samo neprekidan u odnosu na drugu promjenljivu jer u tom slučaju nemamo dobru postavljenost problema. Preciznije, u [65] možemo naći primjer Cauchy-jevog problema za skalarni zakon sa neprekidnim fluksom koji dozvoljava dva različita entropijska rješenja za iste početne vrijednosti. Što se egzistencije tiče, ona važi čak i u slučaju kada je fluks Caratheodory-jev vektor, tj. ograničene varijacije u odnosu na prostornu promjenljivu sa takozvanim uslovima nedegenerisanosti [67]. Sa jačim uslovima nedegenerisanosti, mi ćemo poboljšati i uprostiti rezultat iz [67] (takođe vidjeti [62]).

U četvrtoj glavi istražujemo stohastičke zakone održanja. Budući da je nemoguće uključiti sve parametre koji djeluju na neki proces u prirodi, pri konstrukciji matematičkih modela moramo uzeti u obzir i taj "šum" koji utiče na proces, koji je u jednačinama modela izražen stohastičkim članom. Ovakve jednačine imaju bogatu matematičku strukturu pa su veoma zanimljive i izazovne sa matematičke tačke gledišta. Do sada su dobijeni brojni rezultati, i ova oblast je istraživana u raznim pravcima, počevši od samih stohastičkih zakona održanja [13, 18, 32, 33, 40, 43, 82], zatim usrednjavanja brzine za stohastičke transportne jednačine [19, 57], stohastičke degenerisane paraboličke jednačine [37, 83]. Ovdje smo nabrojali samo neke od mnogobrojnih rezultata. Što se stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina na mnogostrukosti tiče, pomenućemo [11], gdje se razmatra talasna jednačina.

Ovdje ćemo dati prostiji dokaz jedinstvenosti dopustivog (tj. kinetičkog) rješenja Cauchy-jevog problema za stohastički skalarni zakon održanja oblika

$$du + \operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u)dt = \Phi(\mathbf{x}, u)dW_t, \quad \mathbf{x} \in M, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}) \in L^\infty(M) \tag{2}$$

na glatkoj, kompaktnoj, d-dimenzionoj (Hausdorff) Riemann-ovoj mnogostrukosti (M, g). Objekat W je Wiener-ov proces koji može biti konačno ili beskonačno dimenzioni, što ne utiče na srž dokaza.

Dokaz dobre postavljenosti zadatka je skoro dat u [34]. Autori razmatraju kinetičku formulaciju (4.1) i dokazuju jedinstvenost tako što nalaze relaciju između kinetičke funkcije i kvadrata kinetičke funkcije (vidi [34, (4.13)]). Procedura koju su koristili je komplikovana, i mi ćemo dokazati da je moguće dokazati tvrđenje korišćenjem proizvoda kinetičkog rješenja h i funkcije $(1-h)$. Preciznije, naša ideja dokaza ima isti početak kao dokaz u [34] pošto je bazirana na odgovarajućoj kinetičkoj reformulaciji problema (vidjeti jednačinu (4.17)). U [34], autori tada dokazuju da je kinetička funkcija h zadata definicijom 45 zadovoljava $h^2 = h$. Međutim, za razliku od metoda iz [34] gdje autori izvode jednačinu za h^2 i upoređuju je sa jednačinom za h kako bi izveli zaključke, mi dobijamo jednačinu za $h(1-h)$ i koristimo je da bi dokazali jedinstvenost. Iako ovo zvuči kao ista stvar, procedura regularizacije u našem slučaju se lakše prati (jer je približnija Euclid-skom slučaju), pa je metod prostiji od metoda datog u [34]. Osnovni razlog za pojednostavljivanje leži u činjenici da su jednačine za h i $(1-h)$ simetrične, pa možemo lako eliminisati elemente koji se pojavljuju na desnoj strani jednačina i dobiti Kato-ovu jednakost (vidi (4.27)). Štaviše, regularizujući jednačinu korišćenjem konvolucije po promjenljivim $\mathbf{x}$ i ξ dobijamo funkciju koja je po pretpostavci neprekidna u odnosu na vrijeme i možemo direktno koristiti Itô-ovu formulu umjesto korišćenja njenog uopštenja iz [34].

Primijetimo da je jedan od djelova dokaza klasični metod dupliranja promjenljivih (vidi [48]). Metod se može izbjeći pošto regularizujemo jednačinu (što znači da možemo koristiti osnovne elemente Matematičke Analize za glatke funkcije). Međutim, analiza bi tada zahtijevala razne adaptacije Friedrichs-ove leme (posebno sa obzirom da imamo izraze sa Wiener-ovom mjerom), pa dokazi ne bi bili jednostavniji.

Veoma sam zahvalan svom mentoru, profesoru Darku Mitroviću, na vremenu izdvojenom za čitanje mnogih radnih verzija moje disertacije, i sugestijama koji su je uobličili. Želim da mu se zahvalim i na ogromnom strpljenju, odličnoj saradnji, prijateljskim savjetima i pomoći, kako pri izradi disertacije tako i u životu.

Dugujem zahvalnost i Miljanu Bigoviću, Goranu Popivodi i Lazaru Obradoviću i ostalim bliskim prijateljima na bezuslovnoj podršci i pomoći.

Posebno se zahvaljujem profesoru Žarku Pavićeviću i profesoru Olegu Obradoviću, čiji su savjeti podstakli moj razvoj, kako akademski tako i lični.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj majci Luciji, sestrama Mariji i Biljani i sestriću Pavlu, bez kojih ništa od ovoga ne bi bilo moguće.
Disertaciju posvećujem svom ocu, Radošu.

Podgorica, jul 2022. god. Nikola Konatar

Izvod iz teze

U ovoj disertaciji bavimo se determinističkim i stohastičkim zakonima održanja i njihovim svojstvima.

Prvo, opisujemo ponašanje interfejsa između dvije nemješljive tečnosti, koje imaju različite gustine, u trodimenzionoj poroznoj sredini. Generalizujemo prethodno dobijene rezultate, napravljene u dvodimenzionom slučaju, i predstavljamo novi metod koji ne koristi funkciju toka.

Dalje, razmatramo skalarne zakone održanja kod kojih fluks ima prekide u odnosu na prostornu promjenljivu i neprekidan je u odnosu na promjenljivu stanja. Naš pristup koristi varijantu kinetičke formulacije, i koristimo ga kako bi poboljšali postojeće rezultate vezane za egzistenciju rješenja nedegenerisanih skalarnih zakona održanja sa Caratheodory-jevim fluksom, sa varijantom uslova nedegenerisanosti.

Na kraju, bavimo se egzistencijom i jednistvenošću rješenja skalarnog zakona održanja sa stohastičkim forsingom

$$du + \mathrm{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u)dt = \Phi(\mathbf{x}, u)dW_t, \quad \mathbf{x} \in M, \quad t \geq 0,$$

na glatkoj, kompaktnoj on Riemann-ovoj mnogostrukosti (M, g), gdje je W_t Wiener-ov proces i $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \xi)$ vektorsko polje na M za svako $\xi \in \mathbf{R}$. Koristeći uslove dopustivosti i kinetičku formulaciju dokazujemo dobru postavljenost problema, i predstavljamo novi dokaz jedinstvenosti rješenja, koji je jednostavniji od postojećih dokaza.

Abstract

In this thesis, we concern ourselves with deterministic and stochastic conservation laws and their properties.

First, we describe the behavior of the interface between two immiscible fluids, which have different densities, in three-dimensional porous media. We generalize previous results, made in the two-dimensional case, and introduce a new method which does not involve the stream function.

Second, we investigate scalar conservation laws where the flux has discontinuities with respect to the space variable and is continuous with respect to the state variable. Our approach uses a variant of the kinetic formulation, and it is used to improve existing results regarding the existence of solutions for non-degenerate scalar conservation laws with Caratheodory flux, under a variant of non-degeneracy conditions.

Third, we concern ourselves with the existence and uniqueness of solutions for the scalar conservation law with stochastic forcing

$$du + \mathrm{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u)dt = \Phi(\mathbf{x}, u)dW_t, \quad \mathbf{x} \in M, \quad t \geq 0,$$

on a smooth compact Riemannian manifold (M, g), where W_t is a Wiener process and $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \xi)$ is a vector field on M for each $\xi \in \mathbf{R}$. Using the admissibility conditions and the kinetic formulation we prove well-posedness, and present a new proof for the uniqueness of the solutions, which is simpler than the existing ones.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Počećemo sa uvođenjem osnovnih pojmova i tvrđenja koje ćemo kasnije koristiti. Za početak, podsjetimo se dijela gradiva Funkcionalne analize.

1.1 Funkcionalna analiza

U ovom dijelu podsjećamo se pojma Banach-ovih prostora, linearnih operatora i njihovih svojstava, kao i dualnih prostora. Definicije i tvrđenja iz ove sekcije su preuzete iz [76, 16, 74].

1.1.1 Banach-ovi prostori

Kako bi uveli pojam Banach-ovog prostora moramo se upoznati sa pojmovima norme i normiranog prostora.

Definicija 1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Funkcional $p : X \to [0, \infty)$ nazivamo polunormom ili seminormom ako važi*

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

Definicija 2. *Neka je p polunorma takva da važi $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Tada kažemo da je p norma (oznaka $\|\cdot\|$).*

Definicija 3. *Par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo normiranim linearnim prostorom.*

Važi sljedeći odnos između normiranih i metričkih prostora.

Lema 1. *Svaki normiran prostor* $(X, \| \cdot \|)$ *je metrički prostor* (X, d) *gdje je metrika zadana sa* $d(x, y) = \| x - y \|$.

Dalje, potreban nam je pojam kompletnosti prostora.

Definicija 4. *Niz* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *u normiranom prostoru* $(X, \| \cdot \|)$ *nazivamo Cauchy-jevim nizom ako*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n, k \geq N \ \ \| x_n - x_k \| \leq \varepsilon.$$

Definicija 5. *Niz* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *u normiranom prostoru* $(X, \| \cdot \|)$ *konvergira ka* $x \in X$*, u oznaci* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$*, ako važi*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \ \ \| x_n - x \| < \varepsilon.$$

Definicija 6. *Ako svaki Cauchy-jev niz* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *iz prostora* X *konvergira u* X*, tada prostor* $(X, \| \cdot \|)$ *nazivamo kompletnim.*

Konačno, možemo definisati Banach-ov prostor.

Definicija 7. *Kompletan normiran linearni prostor* $(X, \| \cdot \|)$ *nazivamo Banach-ovim prostorom.*

Lema 2. *Neka je* $(X, \| \cdot \|)$ *Banach-ov prostor i* X_1 *zatvoren linearni potprostor* X*. Tada je* $(X_1, \| \cdot \|)$ *Banach-ov prostor.*

Sada navodimo primjere bitnih Banach-ovih prostora.

1. Neka je T metrički prostor i $C_b(T)$ prostor ograničenih neprekidnih funkcija na T. Tada je $(C_b(T), \| \cdot \|_\infty)$ Banach-ov prostor. (Ovdje je $\| x \|_\infty = \sup_{t \in T}\{|x(t)|\}$).

2. Prostor neprekidnih funkcija koje nestaju u beskonačnosti

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}^n) | \lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0 \right\}$$

sa $\| \cdot \|_\infty$ normom.

3. Za $1 \leq p < \infty$, prostor

$$L_p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

klasa ekvivalencije Lebesgue mjerljivih funkcija sa normom

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Prostor
$$L_\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | |f| < \infty\}$$
esencijalno ograničenih funkcija sa normom
$$\| f \|_\infty = \text{esssup}\, |f|.$$

5. Prostori nizova l_p, $1 \leq p < \infty$, koji sadrže sve nizove $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takve da je $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p| < \infty$, sa normom
$$\| x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6. Prostor ograničenih nizova l_∞ sa normom $\| \cdot \|_\infty$, i njegovi potprostori konvergentnih nizova c i nula nizova, odnosno nizova koji konvergiraju na 0 c_0, sa istom normom.

U funkcionalnoj analizi posebno mjesto zauzima Hölder-ova nejednakost.

Lema 3. *Neka je* $1 \leq p < \infty$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Neka je* $f \in L_p(\Omega)$ *i* $g \in L_q(\Omega)$. *Tada* $f \cdot g \in L_1(\Omega)$ *i važi*
$$\| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q .$$

Podsjetimo se i sljedećeg tvrđenja.

Lema 4. *Neka je* $(X, \| \cdot \|)$ *normiran prostor. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1. $(X, \| \cdot \|)$ *je kompletan prostor;*

2. *ako je* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* X *takav da* $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$, *tada postoji* $x \in X$ *takvo da je*
$$\lim_{N\to\infty} \| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \| = 0.$$

1.1.2 Linearni operatori

Sada se upoznajmo sa definicijom i svojstvima linearnih operatora.

Definicija 8. *Neka su $(X, \| \cdot \|_X)$ i $(Y, \| \cdot \|_Y)$ normirani prostori. Prostor svih linearnih, ograničenih operatora $A : X \to Y$ označavamo sa $\mathcal{L}(X, Y)$. Ovdje, operator nazivamo ograničenim ako slika ograničene skupove u ograničene skupove.*

$\mathcal{L}(X, Y)$ je normiran prostor, i norma je definisana sa

$$\| A \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| A(x) \|_Y}{\| x \|_X}.$$

Sljedeća teorema nam daje važno svojstvo linearnih operatora.

Teorema 1.1. *Neka su $(X, \| \cdot \|_X)$ i $(Y, \| \cdot \|_Y)$ normirani prostori i neka je $T : X \to Y$ linearan operator. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

- *T je neprekidan;*
- *T je neprekidan u 0;*
- *postoji $M > 0$ takvo da za svako $x \in X$ važi $\| Tx \|_Y \leq M \| x \|_X$;*
- *T je uniformno neprekidan.*

Lema 5. *U beskonačno dimenzionom Banach-ovom prostoru postoje neograničeni operatori, koji su svuda definisani.*

Važi i sljedeće tvrđenje.

Lema 6. *Neka je $X_1 \subset X$ gust podskup normiranog prostora $(X, \| \cdot \|_X)$ i neka je $(Y, \| \cdot \|_Y)$ Banach-ov prostor. Tada, za svako $T \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ postoji jedinstveno $\overline{T}$ takvo da*

$$\overline{T} : X \to Y, \ \overline{T}|_D = T, \quad i \ \| \overline{T} \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \| T \|_{\mathcal{L}(X_1,Y)} .$$

Teorema 1.2. *Neka je $(Y, \| \cdot \|_Y)$ Banach-ov prostor. Tada je i prostor $(\mathcal{L}(X, Y), \| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ Banach-ov prostor.*

Dakle, da bi prostor linearnih operatora bio Banach-ov dovoljno je da je prostor slika Y Banach-ov. Važi i:

Lema 7. *Neka su X, Y, Z normirani prostori i neka je $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Tada važi*

$$\| T \circ S \|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \| T \|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \| S \|_{\mathcal{L}(Y,Z)} .$$

1.1.3 Dualni prostori i konvergencija

Sada uvedimo pojam dualnih prostora i slabe konvergencije.

Definicija 9. *Neka je $(X, \|\cdot\|_X)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ čiji su elementi linearni, ograničeni funkcionalni definisani na X nazivamo dualom prostora X. Koristi se oznaka X' i X^*.*

Dualni prostor X' je Banach-ov prostor čak i kada X nije Banach-ov prostoe.

Djelovanje funkcionala f iz duala X' na element x prostora X se označava i sa

$$\langle f, x \rangle := f(x).$$

Definicija 10. *Banach-ov prostor nazivamo refleksivnim ako je $(X')' = X$, odnosno ako je svaki ograničeni linearni funkcional na X' oblika $l \to l(x)$ za neko $x \in X$.*

Mnogi bitni prostori su refleksivni, ali to svojstvo ne važi uvijek. Na primjer:

Teorema 1.3. *Važi sljedeće: $c_0' = l_1$, $l_1' = l_\infty$ i $l_1 \subsetneq l_\infty'$.*

Podsjetimo se duala prostora L_p.

Teorema 1.4. *Neka je (X, μ) prostor konačne mjere. Za $1 \leq p < \infty$ važi da je dual prostora $L_p(X)$ prostor $L_q(X)$ gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Tvrđenje 1. *Prostor $L_p(X)$ je refleksivan za $1 < p < \infty$.*

Pređimo sada na pojam slabe i slabe-* konvergencije.

Definicija 11. *Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u prostoru X. Kažemo da ovaj niz slabo konvergira ka nekom x, u oznaci $x_n \rightharpoonup x$, ako za $\forall x' \in X'$ važi:*

$$\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$$

u polju $\mathbb{K}$.

Definicija 12. *Neka je $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u prostoru $Y \cong X'$. Kažemo da ovaj niz slabo-* konvergira ka nekom y, u oznaci $y_n \rightharpoonup^* y$, ako za svako $x \in X$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

u polju $\mathbb{K}$.

Dajemo i sekvencijalnu verziju Banach-Anaglou-ove teoreme.

Teorema 1.5. *Neka je* $(X, \| \cdot \|)_X)$ *separabilan normiran prostor i neka je* $Y \tilde{=} X'$. *Ako je* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz takav da je* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| y_n \|_Y \leq 1$, *tada postoji podniz* $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *i element* $y \in Y$ *takav da*

$$y_{n_k} \rightharpoonup^* y.$$

U nastavku dajemo neka bitna svojstva slabe i slabe-* konvergencije.

Teorema 1.6. *Ako je prostor* X *refleksivan, tada su slaba i slaba-* konvergencija ekvivalentne.*

Definicija 13. 1. *Podskup* M *metričkog prostora* X *je nigdje gust ako je* $int(\overline{M}) = \emptyset$.

2. *Skup* M *je prve kategorije ako je* $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, *gdje su* M_n *nigdje gusti skupovi.*

Dajemo i Baire-ovu teoremu o kategorijama.

Teorema 1.7. *Neprazan, kompletan metrički prostor nije skup prve kategorije.*

Na kraju, imamo sljedeće tvrđenje.

Teorema 1.8. *Neka je* X *Banach-ov prostor i* Y *normiran prostor. Neka su* $T_i \in \mathcal{L}(X, Y)$, *gdje je* $i \in I$. *Ako za svako* $x \in X$ *važi*

$$\sup_{i\in I} \| T_i x \|_Y < \infty$$

tada

$$\sup_{i\in I} \| T_i \|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

1.2 Zakoni održanja

U ovoj sekciji uvodimo osnovne pojmove vezane za zakone održanja i njihova rješenja. Teoreme i definicije iz ove sekcije preuzete su iz [8, 54].

1.2.1 Skalarni zakoni održanja i njihova rješenja

Počećemo sa definisanjem pojma skalarnog zakona održanja, u integralnoj i diferencijalnoj formi.

Definicija 14. *Neka je data funkcija* $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m), f^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \forall i = 1, \ldots m$*(koju nazivamo fluks). Zakon održanja u integralnoj formi je tvrđenje da*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega d\mathbf{x}u(t,\mathbf{x}) = -\int_\Omega d\mathbf{y}\mathbf{n}\cdot f((t,\mathbf{y}))$$

važi za sve otvorene, ograničene podskupove $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *sa Lipschitz-ovom granicom* $\partial\Omega$ *za neku funkciju* $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$.

Definicija 15. *Zakon održanja u diferencijalnoj formi u* d *prostornih dimenzija je sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina oblika*

$$\partial_t u(t,\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(u(t,\mathbf{x})) = 0,$$

za nepoznatu funkciju $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$ *i za zadatu funkciju* $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)$, $f^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \forall i = 1, \ldots, m$. *U slučaju* $m = 1$ *govorimo o skalarnom zakonu održanja.*

U uvodnoj glavi samo ćemo razmatrati slučaj kada je $\mathbf{f}$ barem Lipschitz neprekidna, a ponekad i $f \in C^\infty$. Kasnije, u ostalim glavama, razmotrićemo što se dešava ako fluks ima neke slabija svojstva.

Sada, fokusirajmo se na skalarni zakon održanja:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0,\ u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

i pretpostavimo da je f C^1 (ili barem Lipschitz neprekidna) funkcija. Pretpostavimo i da je funkcija u C^1 funkcija.

Teorema 1.9. *Neka je* u C^1 *rješenje* (1.1), *gdje je fluks* f C^1 *funkcija. Tada je* u *konstantna duž krivih* $\xi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *zadatih sa*

$$\xi'(t) = f'(u(t,\xi(t))).$$

Štoviše, ako su dati početni uslovi $u(0,x) = u_0(x)$ *tada je*

$$u(t,x) = u_0(x_0)$$

gdje x_0 *zadovoljava* $x_0 + f'(u_0(x_0))t = x$.

Definicija 16. *Krive definisane prethodnom teoremom nazivamo karakterističnim krivima, ili karakteristikama.*

Problem kod ovog pristupa nastaje kada se karakteristike sijeku, jer bi u tom slučaju rjesenje moralo biti ista konstanta duž svake od karakteristika koje se sijeku, što zavisi od početnog uslova. Znamo sljedeće:

Teorema 1.10. *Za nelinearne zakone održanja, C^1 rješenja u opštem slučaju postoje samo na nekom konačnom intervalu $[0, T]$, čak i kada je početni uslov C^∞ funkcija.*

1.2.2 Slaba rješenja

Kao što smo rekli, zakoni održanja nemaju glatka rješenja na čitavom $[0, \infty)$, pa uvodimo novi pojam.

Definicija 17. *Slabo rješenje zakona održanja (1.1) sa početnim uslovom $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je funkcija $u \in L_\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ takva da $\forall \varphi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ važi*

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx u \partial_t \varphi + \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx f(u) \partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(0, x) u_0(x) = 0. \tag{1.2}$$

Funkciju u nazivamo jakim rješenjem, ako je ona C^1 funkcija i ako zadovoljava zakon održanja u svakoj tački.

Teorema 1.11. *Svako slabo rješenje $u \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ je jako rješenje i obratno.*

Dajemo neka osnovna tvrđenja vezana za uslove postojanja slabog rješenja zakona održanja (1.1).

Teorema 1.12. *Neka je $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \in L_\infty$ funkcija koja je C^1 svuda osim na konačnom broju krivih $\Gamma_i : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, duž kojih je u prekidna, i neka su*

$$u_+|_{\Gamma_i(t)} = \lim_{x \downarrow \Gamma_i(t)} u(t, x)$$
$$u_-|_{\Gamma_i(t)} = \lim_{x \uparrow \Gamma_i(t)} u(t, x)$$

Tada je u slabo rješenje (1.1) ako je u jako rješenje između prekida i ako zadovoljava Rankine-Higunot-ov oslov

$$(u_+|_{\Gamma_i(t)} - u_-|_{\Gamma_i(t)}) \Gamma_i'(t) = f(u_+|_{\Gamma_i(t)}) - f(u_-|_{\Gamma_i(t)}), \forall i, t \tag{1.3}$$

svuda na krivima prekida.

Jedno od bitnih svojstava slabih rješenja je dato sljedećom teoremom.

Teorema 1.13. *Slaba rješenja zakona održanja nisu jedinstvena.*

Egzistencije rješenja zakona održanja se najčešće dokazuje korišćenjem metoda nestajuće viskoznosti. Umjesto jednačine (1.1) razmatramo familiju paraboličih parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon \tag{1.4}$$

za $\varepsilon > 0$, i nadamo se da kada $\varepsilon \to 0$ jedinstvena rješenja jednačine (1.4) će konvergirati ka slabom rješenju jednačine (1.1).

Sada, moramo uvesti pojam totalne varijacije funkcije kako bi uveli prostor funkcija ograničene varijacije.

Definicija 18. *Neka je $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definišemo totalnu varijaciju $TV_\Omega(g)$ sa*

$$TV_\Omega(g) := \sup_\varphi \left(\int_\Omega g \partial_x \varphi dx \ za \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \| \varphi \|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1 \right).$$

Ako je poznato o kom prostoru se radi indeks Ω se ne piše.

Definicija 19. *Totalna varijacija funkcije $g : I \to \mathbb{R}$ defeinisane na intervalu $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ je*

$$TV(g) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{p-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

gdje je $\mathcal{P}$ skup svih particija, odnosno podjela, intervala I,

Teorema 1.14. *Ako je $g \in W^{1,1}(\Omega)$, tada je njena totalna varijacija zadata sa*

$$TV_\Omega(g) = \int_\Omega |g'(x)| dx \leq \infty,$$

gdje je $W^{m,p}(\Omega)$ prostor Soboleva definisan sa

$$W^{m,p} = \{v \in L_p(\Omega), \partial^\alpha v \in L_p(\Omega) \ \forall \alpha \leq m\}.$$

Definicija 20. *Funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ je funkcija ograničene varijacije na Ω ako je $TV_\Omega(g) < \infty$. Označićemo*

$$BV(\Omega) = \{g \in L^1_{loc}(\Omega) \ takvih \ da \ je \ TV_\Omega(g) < \infty\}.$$

Sljedeće tvrđenje nam daje bitna svojstva slabog rješenja zakona održanja.

Teorema 1.15. *Neka je $u_0 \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Tada (1.4) sa početnim uslovom $u_0(x) = u^\varepsilon(0, x)$ ima C^∞ rješenje koje ima sljedeća svojstva za svako $t \geq 0$:*

1.

$$\| u^\varepsilon(t,\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \| u_0 \|_{L_\infty} (\mathbb{R});$$

2.

$$\int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(t,x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx;$$

3.

$$\| \partial_x u^\varepsilon(t,\cdot) \|_{L_1(\mathbb{R})} \leq TV(u_0);$$

4.

$$\| \partial_t u^\varepsilon(t,\cdot) \|_{L_1(\mathbb{R})} \leq cTV(u_0);$$

5. za neko $t \in [0,T]$

$$\| u^\varepsilon(t,\cdot) \|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \| u_0 \|_{L_1(\mathbb{R})} + cT \cdot TV(u_0)$$

gdje je c *konstanta nezavisna od* ε*.*

1.2.3 Entropijska rješenja

Rekli smo da slaba rješenja zakona održanja nisu jedinstvena. Budući da se zakoni održanja koriste za modeliranje prirodnih procesa, ovo nam nije dovoljno, pa moramo dodatni neke nove uslove koje rješenje skalarnog zakona održanja mora zadovoljavati. Zato uvodimo pojam entropijskog rješenja, koje je predloženo u [48].

Definicija 21. *Slabo rješenje u jednačine* (1.1) *nazivamo entropijskim rješenjem ako ono zadovoljava*

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx\eta(u^\varepsilon)\partial_t\varphi + \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dxg(u^\varepsilon)_\varphi + \int_{\mathbb{R}} dx\eta(u^\varepsilon(0,x))\varphi(0,x) \geq 0 \tag{1.5}$$

za sve glatke konveksne funkcije η *i nenegativne test funkcije* φ*.*

Dajemo i neka bitna svojstva i tvrđenja vezana za entropijska rješenja zakona održanja.

Teorema 1.16. *Neka je* $u_0 \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$*. Tada jednačina* (1.1) *gdje je* f C^1 *funkcija i sa početnim uslovom* u_0 *ima entropijsko rješenje koje za svako* $t \geq 0$ *zadovoljava*

$$\| u(t,\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \| u_0(\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R})} \quad s.s.;$$
$$TV(u(t,\cdot)) \leq TV(u_0).$$

Teorema 1.17. *Dio po dio glatko slabo rješenje u sa prekidima duž krivih $\Gamma_i(\cdot)$ je entropijsko rješenje ako i samo ako je ono jako rješenje gdje je u glatka funkcija, i ako zadovoljava*

$$s(\eta(u_R) - \eta(u_L)) \geq g(u_r) - g(u_L)$$

u svakom prekidu koji se kreće brzinom s.

Teorema 1.18. *Neka je u dio po dio glatko slabo rješenje (1.1) sa strogo konveksnim fluksom f, koje zadovoljava (1.5) za jednu glatku strogo konveksnu funkciju η. Tada u zadovoljava (1.5) za svaku glatku konveksnu funkciju η.*

Tvrđenje 2. *Ako je fluks f strogo konveksan, u tački prekida je zadovoljen uslov entropije ako i samo ako je $u_R < u_L$.*

1.2.4 Jedinstvenost entropijskih rješenja

Sada ćemo dati neka tvrđenja vezana za jedinstvenost entropijskih rješenja skalarnih zakona održanja.

Definicija 22. *Kažemo da ograničena funkcija u zadovoljava Kružkov-ljev uslov entropije ako važi*

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx\,(|u-U|\partial_t\varphi + \operatorname{sgn}(u-U)(f(u)-f(U))\partial_x\varphi) \geq 0 \tag{1.6}$$

za $\forall U \in \mathbb{R}, \forall\varphi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

Teorema 1.19. *Svaka ograničena funkcija u koja zadovoljava Kružkov-ljev uslov entropije je slabo rješenje zakona održanja.*

Teorema 1.20. *Neka su $u, v \in L_1 \cap L_\infty$ entropijska rješenja zakona održanja (1.1). Tada*

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} (|u(t,x)-v(t,x)|\partial_t\psi + \operatorname{sgn}(u(t,x)-v(t,x))(f(u(t,x))-f(v(t,x)))\partial_x\psi) \geq 0$$

za sve nenegativne $\psi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$.

Na kraju, imamo sljedeće tvrđenje.

Teorema 1.21. *Neka su $u, v \in L_1 \cap L_\infty$ entropijska rješenja zakona održanja (1.1) sa početnim uslovima $u_0, v_0 \in L_\infty$. Uzimajući*

$$M = \max\{|f'(m)||m \leq \max\{\| u \|_{L_\infty((0,\infty)} \times\mathbb{R}), \| v \|_{L_\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})}\}\}$$

imamo da za $\forall R > 0$ *i skoro svako* $t > 0$ *važi*

$$\int_{|x|\leq R} |u(t,x) - v(t,x)|dx \leq \int_{|x|\leq R+tM} |u_0(x) - v_0(x)|dx.$$

Odavde je očigledno da, ako dva rješenja u i v imaju isti početni uslov, oni moraju biti isti skoro svuda na oblasti, pa entropijsko rješenje mora biti jedinstveno.

1.3 Stohastika

Sada, budući da se u radu susrijećemo i sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama, moramo se upoznati sa terminologijom i bitnim tvrđenjima iz oblati Teorije vjerovatnoće i Itö-ovom teorijom. Pojmovi definisani u ovom dijelu izvorno se mogu naći u [63, 31, 61].

Počećemo sa osnovnim definicijama Teorije vjerovatnoće.

1.3.1 Vjerovatnosni prostor i slučajne promjenljive

Neka je Ω neprazan skup.

Definicija 23. *Familiju* $\mathcal{F}$ *podskupova skupa* Ω *nazivamo* σ*-algebrom ako važi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. *ako* $A \in \mathcal{F}$*, tada* $A^C \in \mathcal{F}$;
3. *ako* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$*, tada*

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$$

.

Sa A^C smo označili komplement skupa A, odnosno skup $\Omega \setminus A$.

Pređimo na pojam vjerovatnosne mjere.

Definicija 24. *Neka je* $\mathcal{F}$ σ*-algebra podskupova skupa* Ω*. Preslikavanje* $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *nazivamo* vjerovatnosnom mjerom *ako važi:*

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

2. ako $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, tada

$$\mathbf{P}(\cup_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{A_n}) \leq \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A_n});$$

3. ako su $A_1, A_2, \ldots$ u parovima disjunktni elementi skupa $\mathcal{F}$, tada je

$$\mathbf{P}(\cup_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{A_n}) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A_n}).$$

Vidimo da je monotonost jedno od svajstava mjere $\mathbf{P}$.
Dakle, ako su $A, B \in \mathcal{F}$, i ako važi $A \subseteq B$, tada je $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

Sada možemo definisati vjerovatnosni prostor.

Definicija 25. *Trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ nazivamo* vjerovatnosnim prostorom. *Ovaj prostor nazivamo* kompletnim *vjerovatnosnim prostorom ako $\mathcal{F}$ sadrži sve podskupove skupa Ω čija je $\mathbf{P}$-spoljna mjera jednaka nuli, odnosno*

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{A}) = \inf\{\mathbf{P}(\mathbf{B}) | \mathbf{B} \in \mathcal{F}, \mathbf{A} \subset \mathbf{B}\} = \mathbf{0}.$$

Svaki vjerovatnosni prostor možemo kompletirati dodajući u $\mathcal{F}$ sve skupove spoljne mjere nula i proširujući mjeru $\mathbf{P}$ na odgovarajući način. Dalje ćemo pretpostavljati da su vjerovatnosni prostori sa kojima radimo kompletni.

Za zadatu familiju $\mathcal{U}$ podskupova skupa Ω postoji najmanja σ-algebra $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ koja sadrži $\mathcal{U}$, odnosno σ-algebra $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \cap\{\mathcal{H} | \mathcal{H} \text{ je } \sigma - \text{algebra skupa } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}$. Ovu σ-algebru nazivamo σ-algebrom generisanom skupom $\mathcal{U}$.

Specijalno, ako je $\mathcal{U}$ skup svih otvorenih podskupova prostora $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ ćemo nazivati Borelovom σ-algebrom, i označavati sa $\mathcal{B}$. Elemente Borelovoe σ-algebre nazivaćemo Borelovim skupovima.

Pređimo na pojam mjerljivog preslikavanja.

Definicija 26. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mjerljivi prostor, i $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Preslikavanje X nazivamo $\mathcal{F}$-mjerljivim ako $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za Borelov skup $B \in \mathbb{R}^n$.*

Ekvivalentno, kažemo da je X n-dimenziona slučajna promjenljiva.

Sada, imamo tvrđenje koje nam daje vezu između σ-algebri i slučajnih promjenljivih.

Lema 8. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna promjenljiva. Tada je $\mathcal{H}_X := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$ σ-algebra, koju nazivamo σ-algebrom generisanom X. Ovo je najmanja pod-σ-algebra σ-algebre $\mathcal{F}$ u odnosu na koju je X mjerljiva.*

Dakle, svaka slučajna promjenljiva generiše i odgovarajuću σ-algebru. Sada imamo tvrđenje odnosu između dvije slučajne promjenljive.

Lema 9. *Ako su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dvije zadate slučajne promjenljive, tada je Y $\mathcal{H}_X$-mjerljiva ako i samo ako postoji Borel mjerljiva funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je $Y = g(X)$.*

Ranije smo definisali pojam L_p-prostora. Sada ćemo taj pojam proširiti na vjerovatnosni prostor.

Definicija 27. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promjenljiva i $p \in [1, \infty)$ konstanta. L_p normu X deinišemo sa*

$$\|X\|_p = \|X\|_{L_p(\mathbf{P})} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Za $p = \infty$ definišemo

$$\|X\|_\infty = \|X\|_{L_\infty(P)} = \sup\{|X(\omega)| | \omega \in \Omega\}$$

. Odgovarajuće L_p prostore definišemo sa

$$L_p(\mathbf{P}) = \mathbf{L_p(\Omega)} = \{\mathbf{X : \Omega \to \mathbb{R} | \|X\|_p < \infty}\}.$$

Ovi prostori su Banahovi prostori, a $L_2(P)$ je i Hilbertov prostor, sa skalarnim proizvodom definisanim na sljedeći način:

$$\forall X, Y \in L_2(\mathbf{P}) \quad \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbf{L_2(P)}} = \mathbf{E}[\mathbf{XY}]$$

Pređimo na pojam nezavisnosti događaja.

Definicija 28. *Dva skupa $A, B \in \mathcal{F}$ nazivamo nezavisnim ako važi $\mathbf{P(A \cap B)} = \mathbf{P(A)P(B)}$.*
Familiju skupova $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ nazivamo nezavisnom ako je

$$\mathbf{P(\cap_{n=1}^\infty A_n)} = \prod_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{P(A_n)}.$$

Familija slučajnih promjenljivih $X_1, X_2, \ldots$ je nezavisna ako je familija generisanih σ-algebri $\mathcal{H}_{X_1}, \mathcal{H}_{X_2}, \ldots$ nezavisna.

Potrebne su nam i definicije matematičkog očekivanja i disperzije.

Definicija 29. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna promjenljiva.*

1. *Vrijednost $E[X] = \int_\omega X d\mathbf{P}$ nazivamo očekivanom vrijednošću slučajne promjenljive X. Označava se i sa EX.*
2. *Vrijednost $D[X] = \int_\omega |X - EX|^2 d\mathbf{P}$ nazivamo disperzijom slučajne promjenljive X. Označavamo je i sa DX.*

Sa $|\cdot|$ označili smo Euclid-sku normu. Primijetimo da važi $DX = E(|X - EX|^2) = EX^2 - (EX)^2$.

1.3.2 Brown-ovo kretanje ili Wiener-ov proces

Za početak, podsjetićemo se definicije slučajnog procesa.

Definicija 30.

1. *Familiju slučajnih promjenljivih $\{X(t)|t \geq 0\}$ nazivamo slučajnim procesom.*
2. *Za svako $\omega \in \Omega$, preslikavanje $t \to X(t, \omega)$ je odgovarajuća putanja.*

Pojam Brown-ovog kretanja nastao je kada je biolog, Robert Brown, posmatrao kretanje čestica polena u vodi. Primiјećeno je da su kretanja čestica veoma nepravilna, i da je kretanje dvije različite čestice nezavisno. Trebalo je mnogo vremena da se opis ovog kretanja formalizuje. Preciznu formulaciju dao je Norbert Wiener, pa se ovakav tip procesa naziva i Wiener-ovim procesom. Definiciju dajemo u nastavku.

Definicija 31. *Realno vrijednosni slučajni proces $W(\cdot)$ nazivamo Brown-ovim kretanjem ili Wiener-ovim procesom ako*

1. *$W(0) = 0$;*
2. *$W(t) - W(s)$ ima $N(0, t - s)$ raspodjelu za svako $t \geq s \geq 0$;*
3. *za svaki niz $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajne promjenljive $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ su nezavisne.*

U nastavku, pored oznake $W(t)$ koristićemo i oznaku W_t za označavanje Wiener-ovih procesa.

1.3.3 Itö-ov integral

Nastavljamo sa teorijom koju je uveo japanski matematičar Kiyoshi Itö. On je uveo konstrukciju klase stohastičkih integrala koje nazivamo Itö-ovim integralima. Primijetićemo da je konstrukcija stohastičkih integrala analogna konstrukciji Riemann-Stiltjes-voih integrala. Međutim, pri konstrukciji Riemann-Stieltjes-ovih integrala, pri formiranju niza Darboux-ovih suma, odnosno pri formiranju markirane podjele segmenta, izbor tačaka unutar svakog segmenta ne utice na krajnju vrijednosti integrala, i niz Darboux-ovih suma konvergira ka broju koji nazivamo Riemann-Stieltjes-ovim integralom funkcije na segmentu. Kod stohastičkih integrala, izbor tačaka u markiranoj podjeli je bitan, i za različit izbor tačaka dobijamo različite tipove stohastičkih integrala. Najpoznatiji među njima su Itö-ov integral, koji dobijamo ako za izbor tačaka u markiranoj podjeli biramo krajeve intervala, i Stratonovich-ev integral, koji dobijamo ako za tačke u markiranoj podjeli biramo sredine intervala podjele segmenta.

Sada, uvodimo pojmove potebne za konstrukciju Itö-ovog integrala (vidjeti [63]).

Definicija 32. *Neka je W_t n-dimenzioni Wiener-ov proces. Sa $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^{(n)}$ označavaćemo σ-algebru generisanu sluăjnim promjenljvim $\{W_i(s)\}_{1\leq i\leq n, 0\leq s\leq t}$. Dakle, $\mathcal{F}_t$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve skupove oblika*

$$\{\omega | W_{t_1}(\omega) \in F_1 \ldots, W_{t_k}(\omega \in F_k)\},$$

gdje je $t_j \leq t$ i gdje su skupovi $F_j \subset \mathbb{R}^n$ Borel-ovi, $j \leq k = 1, 2, \ldots$. (Pretpostavljamo da su skupovi mjere nula uljučeni u $\mathcal{F}_t$).

Ovaj skup se ponekad naziva i istorijom procesa W_s do trenutka t.

Definicija 33. *Neka je $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geq 0}$ rastuća familija σ-algebri podskupova skupa Ω. Proces $g(t, w) : [0, \infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{N}_t$-adaptiran ako za je svako $t \geq 0$ funkcija*

$$\omega \to g(t, \omega)$$

$\mathcal{N}_t$-mjerljiva.

Definicija 34. *Sa $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$, $S, T \geq 0$, označavaćemo klasu funkcija*

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

takvih da

- *preslikavanje* $(t,\omega) \to f(t,\omega)$ *je* $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$*-mjerljivo, gdje je* $\mathcal{B}$ *Borel-ova* σ*-algebra na* $[0,\infty)$*;*
- $f(t,\omega)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-adaptiran;*
- $E[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt] < \infty$.

Konstrukcija Itö-ovog integrala je analogna konstrukciji Lebesgue-ovog integrala, uz odgovarajuće izmjene koje dolaze iz svojstava date mjere.

Krećemo od pojma proste funkcije.

Definicija 35. *Funkciju* $\phi \in \mathcal{V}$ *nazivamo prostom ako je oblika*

$$\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

gdje je χ_A *karakteristična funkcija skupa* A.

Primjećujemo da, pošto $\phi \in \mathcal{V}$, to svaka funkcija e_j mora biti $\mathcal{F}_t$-mjerljiva.

Definicija 36. *Neka je* $\phi \in \mathcal{V}$ *prosta funkcija. Itö-ov integral funkcije* ϕ *na intervalu* $[S,T]$ *je zadat sa*

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dW_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega).$$

Sada, analogno ranijem pristupu, definišemo integral funkcije kao graničnu vrijednost niza odgovarajućih prostih funkcija.

Definicija 37. *Neka je* $f \in \mathcal{V}(S,T)$*. Itö integral funkcije* f *na intervalu* $[S,T]$ *je definisan sa*

$$\int_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)dW_t(\omega), \text{ u odnosu na prostor } L_2(P)$$

gdje je $\{\phi_n\}$ *niz elementarnih funkcija takvih da*

$$E\left[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0 \text{ kada } n \to \infty.$$

Važno tvrđenje vezano za pojam Itö-ovog integrala je i Itô-ova izometrija.

Tvrđenje 3. *Neka je $f \in \mathcal{V}(S,T)$. Važi*

$$E\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f(t,\omega)^2 dt\right].$$

Iz ovog možemo dobiti i sljedeće korisno tvrđenje vezano za konvergenciju funkcionalnog niza.

Tvrđenje 4. *Neka $f, f_n \in \mathcal{V}(S,T), \forall n \in \mathbb{N}$, i neka*

$$E\left[\int_S^T (f_n(t,\omega) - f(t,\omega))^2\right] \to 0 \text{ kada } n \to \infty.$$

Tada

$$\int_S^T f_n(t,\omega)dW_t(\omega) \to \int_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega)$$

u $L_2(P)$ kada $n \to \infty$.

Sada ćemo navesti neka stvojstva Itö-ovih integrala.

Teorema 1.22. *Neka su $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$, neka je $0 \leq S < U < T$ i neka je c konstanta. Tada*

1. $\int\limits_S^T f dW_t = \int\limits_S^U f dW_t + \int\limits_U^T f dW_t$ *za skoro svako ω;*
2. $\int\limits_S^T (cf + g) dW_t = c\int\limits_s^t f dW_t + \int\limits_S^T g dW_t$ *za skoro svako ω;*
3. $E[\int\limits_S^T f dW_t] = 0$;
4. $\int\limits_S^T f dW_t$ *je $\mathcal{F}_t$-mjerljiva.*

Jedno od bitnih svojstava koje posjeduje Itö-ov integral je da je on i martingal u odnosu na odogovarajuću filtraciju. Uvedimo pojmove filtracije i martingala.

Definicija 38. *Filtracija na $(\Omega, \mathcal{F})$ je familija σ-algebri $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ takva da*

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t.$$

n-dimenzioni stohastički proces $\{X_{tt\geq 0}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo martingalom *u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ ako*

1. X_t *je* $\mathcal{M}_t$*-mjerljiv za svako* t*;*

2. $E[|X_t|] < \infty$ *za svako* t*;*

3. $E[X_s|\mathcal{M}_t] = X_t$ *za svako* $s \geq t$*.*

Dalje, uvodimo pojam Itö-ovog procesa, i Itö-ovu formulu.

Definicija 39. *Neka je* W_t *jednodimenzioni Wiener-ov proces na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Jednodimenzioni Itö-ov proces je stohastički proces* X_t *na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s,\omega)ds + \int_0^t \sigma(s,\omega)dW_s,$$

gdje je $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ *takvo da*

$$P\left[\forall t \geq 0, \int_0^t \sigma(s,\omega)^2 ds < \infty\right] = 1.$$

Takođe pretpostavljamo da je μ $\mathcal{H}_t$*-adaptirana i da važi*

$$P\left[\forall t \geq 0, \int_0^t |\mu(s,\omega)| ds < \infty\right] = 1.$$

Često se integralna jednačina kojom definišemo Itö-ov proces zapisuje jednostavnije u diferencijalnoj formi kao

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

.

Jedno od najbitnijih svojstava Itö-ovih procesa je Itö-ova formula.

Teorema 1.23. *Neka je* X_t *stohastički proces definisan sa*

$$dX_t = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t. \tag{1.7}$$

Neka je $f = f(t,z)$ *dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na* $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$*. Tada je*

$$Y_t = g(t, X_t)$$

takođe Itoö-ov proces i važi sledeća jednačina:

$$df(X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dt + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial z} dW_t. \tag{1.8}$$

Za dva Itö-ova procesa X_t i Y_t, iskoristićemo prethodnu teoremu kako bi dobili jednačinu koju zadovoljava proces X_tY_t.

Neka je X_t definisan sa

$$dX_t = \mu_1 dt + \sigma_1^2 dW_t.$$

Uzimajući $f(t, X_t) = X_t^2$, dobijamo

$$dX_t^2 = 2\mu_1 X_t dt + \sigma_1^2 dt + 2\sigma_1 X_t dW_t. \tag{1.9}$$

Primijetimo da $2\mu_1 X_t dt + 2\sigma_1 X_t dW_t = 2X_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t) = 2X_t dX_t$, pa (1.9) postaje

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \sigma_1^2 dt. \tag{1.10}$$

Slično, ako je Y_t stohastički proces koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dY_t = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t \tag{1.11}$$

tada

$$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + \sigma_2^2 dt, \tag{1.12}$$

$$d(X_t + Y_t)^2 = 2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 dt. \tag{1.13}$$

Lijeva strana jednakost (1.13) je

$$\begin{aligned} d(X_t + Y_t)^2 &= d(X_t^2 + 2X_tY_t + Y_t^2) = dX_t^2 + 2d(X_tY_t) + dY_t^2 \\ &= 2X_t dX_t + \sigma_1^2 dt + 2d(X_tY_t) + 2Y_t dY_t + \sigma_2^2 dt, \end{aligned} \tag{1.14}$$

a desna

$$\begin{aligned} &2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 dt \\ &\qquad = 2X_t dX_t + 2X_t dY_t + 2Y_t dX_t + 2Y_t dY_t + \sigma_1^2 dt + 2\sigma_1\sigma_2 dt + \sigma_2^2 dt. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Anuliranjem istih članova na lijevoj i desnoj strani jednakosti respektivno, i dijeljenjem jednakosti sa 2 dobijamo

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1\sigma_2 dt. \tag{1.16}$$

Definicije uvedene do sada važe za slučajne procese čije su vrijednosti u $\mathbb{R}^n$. Mi ćemo imati susreta i sa procesima čije su vrijednosti u Hi;bert-ovim prostorima, pa dajemo i odgovarajuće proširenje definicije adaptiranog procesa (ostale definicije i svojstva se analogno prenose).

Definicija 40. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerovatnosni prostor i $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, filtracija σ-algebre $\mathcal{F}$. Neka je V Hilbert-ov prostor sa dualom V^*.*

Kažemo da je stohastički proces $X : \Omega \times [0,T] \to V$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ ako je za svako $\varphi \in V^*$ stohastički proces $\langle X(t), \varphi\rangle$ mjerljiv u odnosu na σ–algebru $\mathcal{F}_t$ za svako $t > 0$.

Primjećujemo da nam je u prethodnoj definiciji potrebna slaba mjerljivost preslikavanja $X : \Omega \times [0,T] \to V$, ako pošto ćemo raditi sa prostorima Soboleva $H^k(M)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ koji su separabilni, pojmovi jake i slabe mjerljivosti se podudaraju (vidjeti na primjer [49]). Zbog toga, koristimo sledeću notaciju za $H^1(M)$ i $L^2(M)$-vrijednosne kvadratno integrabilne stohastičke procese:

$$L^2_{\mathbf{P}}(\Omega; L^2((0,T); H^1(M))) = \left\{u\colon (0,T)\times M\times\Omega \to \mathbf{R} : \int_\Omega \int_0^T \|u(t,\cdot,\omega)\|^2_{H^1(M)} dtd\mathbf{P}(\omega) < \infty\right\}$$
$$L^2_{\mathbf{P}}(\Omega; L^2((0,T) \times M))) = \left\{u\colon (0,T)\times M\times\Omega \to \mathbf{R} : \int_\Omega \int_0^T \|u(t,\mathbf{x},\omega)\|^2_{L^2(M)} dtd\mathbf{P}(\omega) < \infty\right\}$$

U oba slučaja, pretpostavljamo da važe potrebni uslovi mjerljivosti.

1.4 Osnove Riemann-ove geometrije

Sada ćemo uvesti osnovne pojmove i teoreme Riemann-ove geometrije i stohastičkog računa, koje ćemo koristiti kasnije.

Za pojmove iz Riemann-ove i distributivne geometije koristili smo reference [39, 58, 64, 71]. Kao ranije, (M, g) je d-dimenziona Riemann-ova mnogostrukost. Ako je v distribuciono vektorsko polje na M tada je njegov gradijent ∇v vektorsko polje ekvivalentno spoljnom izvodu dv polja v: $\langle \nabla v, X\rangle = dv(X) = X(v)$ za svako $X \in \mathfrak{X}(M)$. U lokalnim koordinatama,

$$\nabla v = g^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^i}\partial_j, \tag{1.17}$$

gdje je g^{ij} inverzna matrica matrici $g_{ij} = \langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j}\rangle$.

Što se Laplace-Beltrami-jevog operatora Δ_g na M, za funkciju $f \in C^2(M)$ u lokalnim koorinatama važi

$$\Delta_g f = \nabla_g^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right)$$

Na kraju, operator divergencije na M je lokalno definisan pomoću Christofel-ovih simbola za C^1 vektorsko polje na $X \in \mathcal{T}_0^1 = \mathfrak{X}(M)$ sa lokalnom reprezentacijom $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^k}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^j X^k. \tag{1.18}$$

U nastavku, potrebi su nam osnovni pojmovi vezani za Sobolev-ljeve prostore na mnogostrukostima.

Pošto je M kompaktna mnogostrukost, za fiksirano $k \in \mathbf{N}$ možemo definisati (imajući u vidu Poincare-ovu nejednakost)

$$f \in H^k(M) \quad \Leftrightarrow \quad \|\nabla_g^k f\|_{L^2(M)} < \infty.$$

Za prostore Sobolev-a sa negativnim indeksima imamo

$$f \in H^{-k}(M) \;\; \text{ako} \;\; \exists F \in H^k(M) \;\; \text{takva da} \;\; \Delta^{2k} F = f$$

i definišemo

$$\|f\|_{H^{-k}(M)} = \|F\|_{H^k(M)}. \tag{1.19}$$

Prostori $H^k(M)$, $k \in \mathbf{Z}$, su Hilbert-ovi prostori i sa $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ označavamo ortogonalnu bazu u $L^2(M)$ koja je data kao skup svojstvenih funkcija koje odgovaraju Laplace-Beltrami-jevom operatoru:

$$\Delta_g e_k(\mathbf{x}) = -\lambda_k e_k(\mathbf{x}).$$

Istovremeno, skup $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je baza u $H^s(M)$, $s \in \mathbf{Z}$, zbog gustine skupa. Napominjemo da je uobičajeno korišćenje svojstvenih funkcija operatora $(1 - \Delta_g)$ ali pošto smo na kompaktnoj mnogostrukosti, možemo koristiti prostiju verziju.

Primijetimo da ako imamo funkciju $g \in H^k(M)$ i ako je zapišemo u bazi $\{e_k/\|e_k\|_{H^k(M)}\}$:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e_k(\mathbf{x})/\|e_k\|_{H^k(M)} \tag{1.20}$$

tada

$$g_k = \int_M g(\mathbf{x}) \frac{e_k(\mathbf{x})}{\|e_k\|_{H^k(M)}} d\mathbf{x} \tag{1.21}$$

što se lako dobija množeći (1.20) sa $e_k/\|e_k\|_{H^k(M)}$, integracijom rezultujućeg izraza nad M i korišćenjem ortogonalnosti baze $\{e_k/\|e_k\|_{H^k(M)}\}$. Štaviše,

$$\|g\|_{H^k(M)} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2. \tag{1.22}$$

nije teško primijetiti da iz definicije e_k i (1.19), imamo

$$\|e_k\|_{L^2(M)} = \sqrt{\lambda_k}\|e_k\|_{H^{-1}(M)}. \tag{1.23}$$

Glava 2

Dinamika trodimenzionog toka u poroznoj sredini

Kao što smo ranije rekli, u ovoj glavi bavićemo se kretanjem interfejsa između dvije nemješljive tečnosti. Predstavićemo metod kojim rigorozno dokazujemo da se vrh interfejsa usmjerenog nadolje kreće ka dnu ako je gušća tečnost iznad tečnosti manje gustine i obratno.

2.1 Darcy-jev zakon

Dinamika interfejsa između dva nemješljiva fluida različitih gustina je opisana Darcy-jevim zakonom, zakonom održanja mase, i nemješljivošću (u trodimenzionom prostoru):

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla P - \rho g), \ \mathbf{u} = (u, v, w), \tag{2.1}$$

$$\partial_t(\Phi\rho) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \tag{2.3}$$

Ovdje, K predstavlja pozitivno definitnu matricu permeabilnosti, μ je viskozitet fluida, i Φ je konstanta poroznosti porozne sredine. Pretpostavićemo da su parametri konstantni, i da mogu biti normalizovani na jedinične vrijednosti. P je pritisak, ρ je gustina tečnosti, i g je vertikalno usmjerena gravitacija. Divergencija se posmatra u odnosu na promjenljive x, y i z.

Dalje, pretpostavićemo da je tok fluida periodičan u odnosu na promjenljive x i y sa periodima $2L_1$ i $2L_2$, respektivno, i da se interfejs između fluida u trenutku t može opisati skupom

$$\Gamma_t = \{(x,y,z) \in [-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times [0,1] |\, \phi^t(x,y,z) = 0\},$$

gdje je $\phi^t : [-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Početni položaj interfejsa je zadan sa $\Gamma_0 = \{(x,y,z)|\, \phi^0(x,y,z) = 0\}$. Pomoću ovoga možemo definisati gustinu fluida (u nastavku, ρ_h i ρ_l su konstante):

$$\rho = \rho_l + (\rho_h - \rho_l) H(\phi^t(x,y,z)), \quad \rho_h > \rho_l. \tag{2.4}$$

gdje ρ_l i ρ_h predstavljaju gustine lakšeg i težeg fluida respektivno, i H je Heaviside-ova funkcija. Iz ove definicije vidimo da je teži fluid u oblasti gdje je $\phi^t > 0$, dok je lakši u oblasti gdje je $\phi^t < 0$.

Pretpostavićemo da brzina kretanja fluida nestaje na granicama

$$\mathbf{u}|_{x=-L_1} = \mathbf{u}|_{x=L_1} = \mathbf{u}|_{y=-L_2} = \mathbf{u}|_{y=L_2} = \mathbf{u}|_{z=0} = \mathbf{u}|_{z=1} = 0 \tag{2.5}$$

Sa ovim pretpostavkama, prirodno je pretpostaviti hidrostatički pritisak na granicama:

$$P|_{x=\pm L_1} = P|_{y=\pm L_2} = \rho_l g(1-z). \tag{2.6}$$

Primijetimo da u stvari pretpostavljamo da nema težeg fluida na granicama.

Jednačine (2.1),(2.2) i (2.3) zapišimo u obliku:

$$u = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$v = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}, \tag{2.8}$$

$$w = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \tilde{\rho} g, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + u\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} + w\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2.11}$$

gdje su u, v i w brzine kretanja fluida u pravcu x, y i z ose respektivno, i $\tilde{P} = P - \rho_l g(1-z)$, $\tilde{\rho} = (\rho_h - \rho_l)H(\phi^t)$. Iz (2.6) možemo vidjeti da je $\tilde{P} = 0$ na bočnim granicama (za $x = \pm L_1$ i $y = \pm L_2$).

Uvrštavajući (2.4) u (2.10) dobijamo

$$\frac{\partial \phi^t}{\partial t} + u|_\Gamma \frac{\partial \phi^t}{\partial x} + v|_\Gamma \frac{\partial \phi^t}{\partial y} + w|_\Gamma \frac{\partial \phi^t}{\partial z} = 0. \tag{2.12}$$

Razmatrajući karakteristike ove jednačine dobijamo $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$ i $\dot{z} = w$, gdje je (x, y, z) pozicija čestica na interfejsu Γ_t. Početni uslovi su zadati sa $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_0$.

Dalje, diferencirajući jednačinu (2.7) po promjenljivoj x, (2.8) po promjenljivoj y, (2.9) po promjenljivoj z i sabirajući dobijene jednaine dobijamo:

$$0 = \mathrm{div}\mathbf{u} = -\Delta \tilde{P} + \frac{\partial \tilde{\rho} g}{\partial z}. \tag{2.13}$$

Sada uvodimo neopadajuću funkciju $\omega \in C^\infty(R)$ takvu da

$$\omega(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi \geq 1 \end{cases}.$$

Poznato je da $H_\varepsilon(x) = \omega(\frac{x}{\varepsilon})$ slabo konvergira ka Heaviside-ovoj funkciji H kada $\varepsilon \to 0$. Takođe, $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} H'_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon}) \rightharpoonup \delta(x)$ kada $\varepsilon \to 0$.

Sada, za funkciju $\tilde{\rho}$ u (2.7)-(2.11) izaberimo

$$\tilde{\rho} = (\rho_h - \rho_l) H_\varepsilon(\phi^t(x, y, z)),$$

i označimo brzinu i pritisak na odgovarajući način. Posebno, umjesto (2.13) imamo

$$\Delta \tilde{P}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z}. \tag{2.14}$$

Uvodimo niz glatkih funkcija $G_\varepsilon : [-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ takvih da:

$$-\Delta G_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x)\delta_\varepsilon(y)\delta'_\varepsilon(z), \tag{2.15}$$

$$G_\varepsilon|_{x=-L_1} = G_\varepsilon|_{x=L_1} = G_\varepsilon|_{y=-L_2} = G_\varepsilon|_{y=L_2} = G_\varepsilon|_{z=-1} = G_\varepsilon|_{z=1} = 0. \tag{2.16}$$

Nije teško vidjeti da je G_ε neparna funkcija u odnosu na promjenljivu z, pa je možemo periodično produžiti na čitav $\mathbb{R}$ u odnosu na z osu tako da produženje ostane rješenje (2.15).

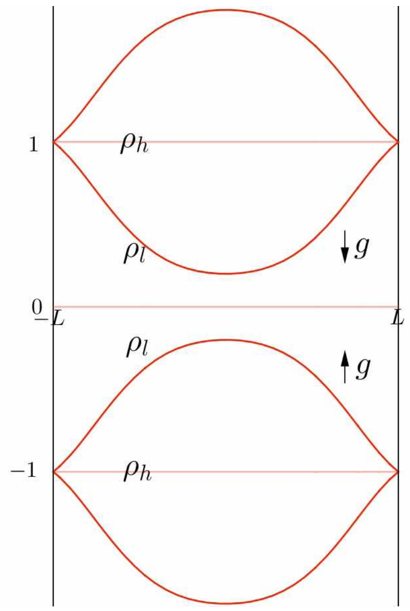
Ovaj niz funkcija konvergira u smislu distribucija ka distribuciji G, koja zadovoljava

$$-\Delta G = \delta(x)\delta(y)\delta'(z), \tag{2.17}$$
$$G|_{x=-L_1} = G|_{x=L_1} = G|_{y=-L_2} = G|_{y=L_2} = G|_{z=\pm k} = 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Lema 10. *Distribucija G (i G_ε) je pozitivna za $z < 0$ i negativna za $z > 0$.*

Dokaz.
Očigledno je $\operatorname{sgn}(\delta_\varepsilon(x)\delta_\varepsilon(y)\delta'_\varepsilon(z)) = -\operatorname{sgn}(z)$, so $\Delta G_\varepsilon > 0$ za $z > 0$ i $\Delta G_\varepsilon < 0$ za $z < 0$. Sada, koristeći princip maksimuma, dobijamo da je G_ε pozitivna za $z < 0$ i negativna za $z > 0$. Pošto je G granična vrijednost G_ε kada $\varepsilon \to 0$, zaključujemo da isto važi i za G. □

Sada, produžićemo sistem jednačina (2.1), (2.2), (2.3) na skup $[-L_1, L_1]\times[-L_2, L_2]\times\mathbb{R}$ na sledeći način (vijdeti dvodimenzionalnu projekciju na Slici 2.1):
a) slikamo oblast Π simetrično na $[-L_1, L_1]\times[-L_2, L_2]\times[-1, 0]$ uvođenjem $\tilde{\rho}(x, y, -z) = \tilde{\rho}(x, y, z)$, $\tilde{P}(x, y, -z) = \tilde{P}(x, y, z)$, $g(-z) = -g$, $(x, y, z) \in \Pi$,
b) periodično produžimo ovo na $[-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times \mathbb{R}$.



Slika 2.1: Produženje sistema sa oblasti $\Pi = [-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times [0, 1]$ na $[-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2] \times \mathbb{R}$

Dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 2.1. *Neka funkcija ϕ^0 ima minimum u tački (x_0, y_0) i neka je $\phi^0(0, 0) = z_0 \in (0, 1)$. Tada je vertikalna komponenta brzine fluida $w(0, 0, z_0)$ u $(0, 0, z_0)$ manja od nule (t.j. fluid se kreće nadolje u vrhu).*

Dokaz: Zbog izbora aproksimacije Heaviside-ove funkcije, u početnom trenutku imamo $\tilde{\rho}_\varepsilon(0,0,z_0)\Big|_{t=0} = 0$. Dakle, iz (2.12) i (2.9) dobijamo sljedeće (u $t = 0$ što impliciramo u nastavku):

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0,0,z_0) = w_\varepsilon(0,0,z_0) &= -\frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon}{\partial z}(0,0,z_0) + \tilde{\rho}_\varepsilon(0,0,z_0) \\
&= -\langle \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon}{\partial z}, \delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)\rangle = \langle \tilde{P}_\varepsilon, \delta(x)\delta(y)\delta'(z-z_0)\rangle \\
&= \langle \tilde{P}_\varepsilon, \Delta G\rangle = \langle \Delta \tilde{P}_\varepsilon, G\rangle = \langle g\frac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z}, G\rangle \\
&\to (\rho_h - \rho_l) g \int_{-L_1}^{L_1}\int_{-L_2}^{L_2} G(x,y,\phi^0(x,y))dxdy \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

gdje smo, pri parcijalnoj integraciji, imali u vidu periodičnost $\tilde{P}$ i G u odnosu na z. Ovdje, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ predstavlja djelovanje distribucije na test funkciju.

Pošto je $(0,0)$ minimum funkcije ϕ, zaključujemo da $\phi(x,y) > 0$ za svako $(x,y) \in [-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2]$. Pošto je $G < 0$ za $z = \phi(x,y) > 0$, integral (2.18) mora biti negativan. Dakle, zaključujemo da $w(0,0,z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon(0,0,z_0)$ mora biti negativan t.j., vrh interfejsa će se kretati nadolje. □

Glava 3

Skalarni zakoni održanja sa Charatheodory-jevim fluksom

U ovom poglavlju razmatramo jednačinu

$$\partial_t u + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathfrak{f}(\mathbf{x}.u) = 0, \tag{3.1}$$

gdje važi

A1. $\mathfrak{f} \in BV(\mathbf{R}^d; C(\mathbf{R}^d))$ i $\max\limits_{\lambda \in [-M,M]} |\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda)| \in L^{1+\sigma}_{loc}(\mathbf{R}^d))$;

A2. $\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ za $\lambda \notin (a, b)$ za neko $a, b \in \mathbf{R}$.

U nastavku, označićemo

$$\mathfrak{f}_\delta = \mathfrak{f} \star \frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) = \int \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \eta)\frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{\lambda - \eta}{\delta}\right) d\eta \ \text{ i } \ \mathfrak{f}'_\delta = \partial_\lambda \mathfrak{f}_\delta.$$

Takođe ćemo pretpostaviti da važe sledeći uslovi nedegenerisanosti.

Definicija 41. *Kažemo da fluks* $\mathfrak{f}$ *zadovoljava uslove nedegenerisanosti ako postoji nenegativna funkcija* $\omega \in C^\infty_c(\mathbf{R})$ *ukupne mase jedan i* $p > 1$ *takvo da za svaki interval* $I \subset\subset \mathbf{R}$, *svako* $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in S^d$, *gdje je* S^d *sfera u* $\mathbf{R}^{d+1}$, *i skoro svako* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, *za svako* $\delta = \delta(\delta_0) < \delta_0$ *i neko* $\sigma(\delta_0) \to 0$ *kada* $\delta_0 \to 0$ *važi:*

$$\liminf_{\delta_0 \to 0} \left\| \frac{\left(\tau + \langle \mathfrak{f}'_\delta(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\right)\left(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\right)}{\left|\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\right|^2 + \sigma(\delta_0)} - 1 \right\|_{L^2(I)} = 0. \tag{3.2}$$

Prethodna definicija nam govori da kada je funkcija $g(\lambda) = \tau + \langle \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi} \rangle$ diferencijabilna, njen izvod mora biti različit od nule na nenula skupovima. Ako ona nije diferencijabilna, tada moramo imati opciju da izaberemo jezgro konvolucije ω takvo da važi (3.2) (govoreći neformalno, za svako $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in S^d$ i skoro svako $(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{d+1}_+$, nejednakost $\limsup\limits_{\delta \to 0} \left| \tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi} \rangle \right| \geq c > 0$ bi trebala važiti skoro svuda za neku fiksnu konstantu c, gdje c može biti i ∞).

U [67], uslovi nedegenerisanosti su mnogo prostiji i neophodno je da za svako $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in S^d$, gdje je S^d sfera u $\mathbf{R}^{d+1}$, i skoro svako $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, preslikavanje

$$\lambda \mapsto \tau\lambda + \langle \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda), \boldsymbol{\xi} \rangle \tag{3.3}$$

je nekonstantno na nedegenerisanim intervalima.

Nije jasno kakva je veza između (3.2) i (3.3), ali ako je $\mathfrak{f}$ neprekidno diferencijabilna tada (3.2) slijedi iz (3.3) (vidjeti na primjer dokaz [52, Teorema 3.4]).

Glavni rezultat ovog poglavlja je zadat sljedećom teoremom.

Teorema 3.1. *Jednačina (3.1) koja zadovoljava A1, A2, i uslove nedegenerisanosti (3.2) uz zadate početne uslove $u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$ takve da $a \leq u_0 \leq b$ ima bar jedno slabo rješenje.*

Metod dokaza se sastoji iz standardne aproksimacije korištenjem nestajuće viskoznosti i dokaza da je dobijena familija približnih rješenja jako L^1_{loc}-prekompaktna. Glavni alat za dokazivanje konvergencije je reformulacija problema, tj. dobijanje kinetičke formulacije problema [56], a nakon toga primjena H-mjera [36, 78] i H-distribucija [2, 52] kako bi dobili prekompaktnost familije aproksimativnih rješenja.

3.1 H-mjere and H-distribucije

Podsjetimo se prvo osnovnih pojmova vezanih za H-mjere i H-distribucije.

Funkcionalima mikro-lokalnih defekata su se prvobitno bavili P.Gerard [36] i L.Tartar [78] u L^2-prostorima (nezavisno jedan od drugog), i generalizacija na L^p-prostore je dobijena dvadeset godina kasnije u [2]. Dalje generalizacije se mogu naći u [5, 6, 50, 51, 52, 53, 60, 68, 79] i u [73] gdje je otkrivena veza između funkcionala mikro-lokalnih defekata i Young-ovih mjera.

H-mjere, kao i bilo koji drugi funkcional mikro-lokalnih defekata opisuju nedostatak L^p-jake konvergencije niza (u_n) za odgovarajuće $p \geq 1$. Preciznije, ako je H-mjera jednaka nuli, tada niz koji je definiše jako konvergira, takođe ka nuli u $L^2_{loc}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^m)$. Slično je sa H-distribucijama.

Sada ćemo se podsjetiti (potencijalno) najsavremenije verzije H-mjera i H-distribucija koja je uvedena u radu [52]. Uvedimo pojmove koje ćemo koristiti.

Označićemo sa s' konjugat s:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1.$$

Dalje, neka je $\bar{s}>s>1$ i $r>1$ takvo da $1/s'+1/\bar{s}=1/r$. Označićemo sa $||\cdot||_{W^{(\bar{s},s)}}$ sljedeći funkcional

$$\|\phi\|_{W^{(\bar{s},s)}}=\sup_{\|\rho\|_{L^{s'}(\mathbf{R}^{d+m})}=1}\left(\int_{\mathbf{R}^d}\|\int_{\mathbf{R}^m}\rho(\mathbf{x},\lambda)\phi(\mathbf{x},\lambda,\boldsymbol{\xi})d\lambda\|^r_{C^d(S^{d-1})}d\mathbf{x}\right)^{1/r} \tag{3.4}$$

$$\|\phi\|_{W_0^{(\bar{s},s)}}=\sup_{\|\rho\|_{L^{s'}(\mathbf{R}^{d+m})}=1}\left(\int_{\mathbf{R}^d}\|\int_{\mathbf{R}^m}\rho(\mathbf{x},\lambda)\phi(\mathbf{x},\lambda,\boldsymbol{\xi})d\lambda\|^r_{C(S^{d-1})}d\mathbf{x}\right)^{1/r}. \tag{3.5}$$

za mjerljivu funkciju ϕ za koju je (3.4) konačna.

Sledeća dva funkcionala definišu vektorske prostore originalno zadate u [52]

$$W^{(\bar{s},s)}:=W^{(\bar{s},s)}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^m,S^{d-1})=\{\phi:||\phi||_{W^{(\bar{s},s)}}<\infty\}$$
$$W_0^{(\bar{s},s)}:=W_0^{(\bar{s},s)}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^m,S^{d-1})=\{\phi:||\phi||_{W_0^{(\bar{s},s)}}<\infty\}.$$

U nastavku, koristićemo notaciju $W^{(\bar{s},s)}$ i $W_0^{(\bar{s},s)}$ kad god je jasno nad kojim skupovima je prostor definisan. Prostor $W^{(\bar{s},s)}$ ima sljedeća svojstva [53](analogna svojstva važe za prostor $W_0^{(\bar{s},s)}$).

- Poistovjećivanjem dvije funkcije $\phi_1,\phi_2\in W^{(\bar{s},s)}$ takve da za skoro svako $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d$, svako $\boldsymbol{\xi}\in S^{d-1}$, i skoro svako $\lambda\in\mathbf{R}^m$ važi $\phi_1-\phi_2=0$, relacija (3.4) definiše normu na $W^{(\bar{s},s)}$.
- Funkcija ϕ je nula u $W^{(\bar{s},s)}$ ako i samo ako za skoro svako $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d$, svako $\boldsymbol{\xi}\in S^{d-1}$ funkcija $\lambda\to\phi(\mathbf{x},\lambda,\boldsymbol{\xi})$ je nula skoro svuda.
- Prostor $L^{\bar{s}}(\mathbf{R}^d;L^s(\mathbf{R}^m;C^d(S^{d-1})))$ je neprekidno uronjen u $W^{(\bar{s},s)}$ jer

$$\left\|\int_{\mathbf{R}^m}\rho(\mathbf{x},\lambda)\phi(\mathbf{x},\lambda,\boldsymbol{\xi})d\lambda\|_{C^d(S^{d-1})}\leq\int_{\mathbf{R}^m}|\rho(\mathbf{x},\lambda)|\,\|\phi(\mathbf{x},\lambda,\cdot)\right\|_{C^d(S^{d-1})}d\lambda. \tag{3.6}$$

- Neka su $\Omega_{\mathbf{x}}$ i Ω_λ relativno kompaktni skupovi u $\mathbf{R}^d$ i $\mathbf{R}^m$, respektivno. Neka je $q>s$ i $1/s'+1/\bar{s}=1/q'+1/\bar{q}=1/r$. Tada važi sljedeće neprekidno uranjanje

[53, Lema 2.3]

$$W^{(\bar{q},q)}(\Omega_x, \Omega_y, S^{d-1}) \hookrightarrow W^{(\bar{s},s)}(\Omega_x, \Omega_y, S^{d-1}). \tag{3.7}$$

- Skup $C_c^d(\mathbf{R}^{d+m} \times S^{d-1}) \cap W^{(\bar{q},q)}$ je gust u $W^{(\bar{q},q)}$.

Sada, uvodimo kompletiranje prostora $W^{\bar{s},s}$ na kojem možemo definisati funkcional mirko-lokalnih defekata koji nam je potreban.

N-particijom, $N \in \mathbf{N}$, nazivamo dekompoziciju prostora $\mathbf{R}^d$ na disjunktnim jednakim hiper-kockama čije su ivice, dužine $1/2^N$, paralelne koordinatnim osama, gdje je jedno tjeme nekih hiper-kocki u koordinatnom početku.

Fiksirajmo relativno kompaktan skup $K \subset\subset \mathbf{R}^m$. Neka je Υ familija funkcija oblika

$$\Upsilon = \left\{ \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \alpha_j(\boldsymbol{\xi}, \lambda)\chi_j^N(\mathbf{x}) : \ \alpha_j^N \in C^d(S^{d-1} \times K), \ N, \tilde{N} \in \mathbf{N} \right\}, \tag{3.8}$$

gdje su χ_j^N karakteristične funkcije odgovarajućih hiper-kocki iz N-particija prostora $\mathbf{R}^d$.

Sa $\tilde{W}^{(\bar{s},s)}$ označićemo zatvorenje Υ u $W^{(\bar{s},s)}$:

$$\tilde{W}^{(\bar{s},s)} = Cl_{\|\cdot\|_{W^{(\bar{s},s)}}}(\Upsilon). \tag{3.9}$$

Sledeće dvije teoreme su blage modifikacije rezultata dobijenih u [53].

Teorema 3.2. *Neka je (u_n) ograničen niz u $L^p(\mathbf{R}^{d+m})$, $p \in (1,2]$, i neka je (v_n) uniformno kompaktno nošen ograničen niz funkcija koje slabo konvergiraju ka nuli u $L^q(\mathbf{R}^d)$ za neko (konačno) $q > p'$. Neka je $r \in (1,p)$ takav da $\frac{1}{p} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{q} = 1$. Tada, prelazeći na podniz (bez mijenjanja oznaka), postoji neprekidan bilinearan funkcional μ na $L^r(\mathbf{R}^d) \otimes L^{p'}(\mathbf{R}^m; C^d(S^{d-1}))$ takav da za svako $\phi \in L^r(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in L^{p'}(\mathbf{R}^m; C^d(S^{d-1}))$, važi*

$$\mu(\phi, \overline{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^{d+m}} \phi(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}, \lambda) \overline{\mathcal{A}_{\psi(\lambda, \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)}(v_n)(\mathbf{x})} d\mathbf{x} d\lambda \,, \tag{3.10}$$

gdje je $\mathcal{A}_{\psi(\lambda,\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)}$ Fourier-ov operator množitelja na $\mathbf{R}^d$ sa simbolom $\psi(\lambda, \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)$.

μ nazivamo H-distribucijom koja odgovara (pod)nizovima (u_n) i (v_n). Neprekidno se proširuje na $\tilde{W}^{(\bar{s},s)}$.

Slično, možemo uvesti kompletiranje prostora $W_0^{\bar{s},s}$ tako što ćemo zamijeniti $\|\cdot\|_{W^{\bar{s},s}}$ sa $\|\cdot\|_{W_0^{\bar{s},s}}$ u (3.9). Ovo je moguće u slučaju kada je niz (u_n) ograničen u $L^p(\mathbf{R}^{d+m})$,

$p \geq 2$, pošto u ovom slučaju ne moramo primijeniti Marcinkiewitz-evu teoremu o množiteljima već samo koristiti činjenicu da je operator množitelja ograničeno $L^2 \to L^2$ preslikavanje ako je simbol ograničen. Dakle, možemo koristiti normu u $C_0(S^{d-1})$ umjesto norme u $C^d(S^{d-1})$. Tada imamo sljedeću teoremu.

Teorema 3.3. *Neka je (u_n) ograničen niz u $L^p(\mathbf{R}^{d+m})$, $p \geq 2$, i neka je (v_n) uniformno kompaktno nošen ograničen niz funkcija koji slabo konvergira ka nuli u $L^q(\mathbf{R}^d)$ za neko konačno $q > p'$. Neka je $r \in (1,p)$ takav da $\frac{1}{p} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{q} = 1$. Tada, prelazeći na podniz (bez preimenovanja), postoji neprekidan bilinearni funkcional μ na $L^r(\mathbf{R}^d) \otimes L^{p'}(\mathbf{R}^m; C(S^{d-1}))$ takav da za svako $\phi \in L^r(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in L^{p'}(\mathbf{R}^m; C(S^{d-1}))$, važi*

$$\mu(\phi, \overline{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^{d+m}} \phi(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}, \lambda) \overline{\mathcal{A}_{\psi(\lambda, \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)}(v_n)(\mathbf{x})} d\mathbf{x} d\lambda\,, \tag{3.11}$$

gdje je $\mathcal{A}_{\psi(\lambda,\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)}$ Fourier-ov operator množitelja na $\mathbf{R}^d$ sa simbolom $\psi(\lambda, \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)$.

Funkcional μ nazivamo H-mjerom koja odgovara (pod)nizovima (u_n) i (v_n). Neprekidno se proširuje na $\tilde{W}_0^{(\bar{s},s)}$.

3.2 Dokaz Teoreme 3.1

Sada možemo dokazati glavnu teoremu. Zato uzimamo familiju milifikatora ω_δ datih u definiciji 41 i razmotrimo sledeću familiju aproksimacija (3.1) sa početnim uslovom u_0:

$$\partial_t u_\delta + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, u_\delta) = 0, \tag{3.12}$$

for $\mathfrak{f}_\delta = \mathfrak{f} \star \frac{1}{\delta}\omega_\delta(\mathbf{x}/\delta)$ gdje $\star$ označava operator konvolucije. Pošto je fluks $\mathfrak{f}_\delta$ gladak, postoji entropijski dopustivo rješenje problema (3.12) u standardnom Kružkov-ljevom smislu [48], $u_\delta\big|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$ koje za svako $\lambda \in \mathbf{R}$ zadovoljava:

$$\partial_t |u_\delta - \lambda| + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \left(\mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda)(\mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, u_\delta) - \mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, \lambda))\right) \leq \mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda) \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, \lambda). \tag{3.13}$$

Štaviše, pošto je $\mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, 2a) = \mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, 2b) = 0$ za dovoljno malo δ, familija rješenja (u_δ) će ostati ograničena, između $2a$ i $2b$ (vidjeti na primjer [67]).

Fiksiramo $\delta_0 > 0$ i, koristeći i Schwartz-ovu lemu za nenegativne distribucije, zapisaćemo jednačinu u obliku

$$\begin{aligned}
&\partial_t |u_\delta - \lambda| + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \left(\mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda)(\mathfrak{f}_{\delta_0}(\mathbf{x}, u_\delta) - \mathfrak{f}_{\delta_0}(\mathbf{x}, \lambda))\right) \\
&= \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \left(\mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda)((\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, u_\delta) - (\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, \lambda))\right) \\
&+ \mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda) \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x}, \lambda) + m_\delta(t, \mathbf{x}, \lambda),
\end{aligned}$$

za nenegativnu Radon-ovu mjeru $m_\delta \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$.

Dalje, tražimo izvod dobijenog izraza po promjenljivoj λ, i dobijamo

$$\begin{aligned}
&\partial_t h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda)h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda)) \\
&= \partial_\lambda \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\left(\operatorname{sgn}(u_\delta-\lambda)((\mathfrak{f}_{\delta_0}-\mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x},u_\delta)-(\mathfrak{f}_{\delta_0}-\mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x},\lambda))\right) \\
&+ \partial_\lambda\big(\operatorname{sgn}(u_\delta-\lambda)\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\mathfrak{f}_\delta(\mathbf{x},\lambda)\big) + \partial_\lambda m_\delta(t,\mathbf{x},\lambda),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

gdje je $\mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda) = \partial_\lambda \mathfrak{f}_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda)$ i $h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda) = \partial_\lambda|u_\delta-\lambda|$.

Kao i obično, kada primjenjujemo funkcionale mikro-lokalnih defekata, moramo prvo dobiti princip lokalizacije iz (3.14). Princip lokalizacije opisuje nosač odgovarajućeg funkcionala mikro-lokalnih defekata. Zato, za fiksirano $\rho \in C_c(\mathbf{R}^m)$ i $\tilde{\varphi} \in C_c(\mathbf{R}^d_+)$, označimo sa V slabu-$*$ $L^\infty(\mathbf{R}^d_+)$ graničnu vrijednost duž nekog podniza niza (bez preimenovanja)

$$V_\delta = \begin{cases} \frac{\tilde{\varphi}(t,\mathbf{x})\int_{\mathbf{R}^m}\rho(\lambda)h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda)d\lambda}{\left|\int_{\mathbf{R}^m}\rho(\lambda)h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda)d\lambda\right|}, & \int_{\mathbf{R}^m}\rho(\lambda)h_\delta(t,\mathbf{x},\lambda)d\lambda \neq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{3.15}$$

Označimo sa $v_\delta = V_\delta - V$ i primijetimo da familija (v_δ) zadovoljava uslov Teoreme 3.2 i Teoreme 3.3.

Neka je

$$U^{\delta_0}_\delta = \operatorname{sgn}(u_\delta-\lambda)((\mathfrak{f}_{\delta_0}-\mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x},u_\delta)-(\mathfrak{f}_{\delta_0}-\mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x},\lambda)),$$

gdje $\tilde{\varphi} \in C^1_c([0,T]\times\Omega)$ za fiksirano $T>0$ i $\Omega \subset\subset \mathbf{R}^d$.

Zbog linearnosti, bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da $h_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} 0$ u $L^\infty(\mathbf{R}^d_+ \times \mathbf{R})$. Primijetimo da odavde slijedi da $m_\delta \rightharpoonup 0$ u prostoru Radon-ovih mjera. Dalje, označimo sa

(HM) μ – H-mjeru koja odgovara nekom podnizu familija (h_δ) i (v_δ);

(HD) μ_{δ_0} – H-distribuciju koja odgovara nekom podnizu familija $(U^{\delta_0}_\delta)$ i (v_δ).

Možemo pretpostaviti da su i μ i μ_{δ_0} definisani na istim podnizovima. Na osnovu Leme 12 znamo da

$$\|\mu_{\delta_0}\| \lesssim \tilde{\sigma}(\delta_0), \tag{3.16}$$

gdje $\tilde{\sigma}(\delta_0) \to 0$ kada $\delta_0 \to 0$.

Izaberimo test funkciju oblika

$$\phi_n(t,\mathbf{x},\lambda) = \varphi_1(t,\mathbf{x})\rho_1(\lambda)(\mathcal{T}_{-1} \circ \mathcal{A}_{\psi((\tau,\boldsymbol{\xi})/|(\tau,\boldsymbol{\xi})|)}(v_n)(t,\mathbf{x}),$$

gdje je $\mathcal{T}_{-1}$ Riesz-ova transformacija [38], t.j. operator mnozitelja sa simbolom $\frac{1}{|(\tau,\boldsymbol{\xi})|}$, koji, kao što je poznato, neprekidno slika $L^p(\mathbf{R}^d) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$. Što se ostalih funkcija tiče, važi $\psi \in C^d(S^d)$, $\varphi_1 \in C_c^1(\mathbf{R}^d)$, $\rho_1 \in C_c^1(\mathbf{R}^m)$. Testiramo (3.14) funkcijom ϕ_n i nakon toga puštamo $n \to \infty$ duž podniza koji definiše H mjeru μ i H-distribuciju μ_{δ_0}. Dobijamo (vidjeti na primjer [52, Teorema 3.4]):

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_1(t,\mathbf{x})\rho_1(\lambda)\psi(\tau,\boldsymbol{\xi})(\tau + \langle \mathfrak{f}_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda),\boldsymbol{\xi}\rangle)),\mu\rangle \\ &= \langle \varphi_1(t,\mathbf{x})\bar{\varphi}(t,\mathbf{x})\rho_1'(\lambda)\psi(\tau,\boldsymbol{\xi})\sum_{k=1}^d \xi_j, \mu_{\delta_0}\rangle. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Zbog gustine skupa, možemo zamijeniti $\varphi_1(t,\mathbf{x})\rho_1(\lambda)\psi(\tau,\boldsymbol{\xi})$ proizvoljnom funkcijom $\phi \in W^{(p,\bar{p})}$. Imajući ovo u vidu, biramo sledeću test funkciju kao zamjenu u (3.17) umjesto $\varphi_1\rho_1\psi$:

$$\phi_{\delta_0}(t,\mathbf{x},\lambda,\tau,\boldsymbol{\xi}) = \varphi(t,\mathbf{x})\rho(\lambda)\psi(\tau,\boldsymbol{\xi})\frac{(\tau + \langle \mathfrak{f}_{\tilde{\delta}}(\mathbf{x},\lambda),\boldsymbol{\xi}\rangle)}{\left|\tau + \langle \mathfrak{f}_{\tilde{\delta}}(\mathbf{x},\lambda),\boldsymbol{\xi}\rangle\right|^2 + \sigma(\delta_0)}.$$

gdje φ je proizvoljna $C_c(\mathbf{R}^d_+)$-funkcija, i biramo

$$\tilde{\delta}(\delta_0) >> \delta_0 \ \text{ i } \ \sigma(\delta_0) >> \delta_0,$$

takve da, za $\tilde{\sigma}(\delta_0)$ iz (3.16) dobijamo

$$\tilde{\sigma}(\delta_0)\|\partial_\lambda \phi_{\delta_0}\|_{W^{(p,\bar{p})}} \to 0.$$

Ovakav izbor je moguć, jer možemo na primjer izabrati $\tilde{\delta}(\delta_0) = \exp(-\frac{1}{\tilde{\sigma}(\delta_0)})$, uzimajući u obzir (3.16) i definiciju $W^{(p,\bar{p})}$. Zamjenom test funkcije ϕ_{δ_0} u (3.17), na osnovu Leme 11 i Leme 12, nakon što pustimo $\delta_0 \to 0$ dobijamo

$$\langle \varphi\rho, \mu\rangle = 0. \tag{3.18}$$

Pošto je φ proizvoljno, zaključujemo da je (težinska) H-mjera $\rho\mu$ jednaka nuli, pa familija $(\int \rho(\lambda)h_\delta d\lambda)$ sadrži L^1_{loc}-jako konvergentan podniz. Koristeći gustoću skupa $C_0(\mathbb{R}^d)$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$, možemo izabrati $\rho(\lambda) = \chi_{[-M,M]}(\lambda)$, gdje je $\chi_{[-M,M]}$ karakteristična funkcija intervala $[-M,M]$. dakle, dobijamo

$$\int \rho(\lambda)h_\delta d\lambda = \int_{-M}^{M} \operatorname{sgn}(u_\delta - \lambda)d\lambda = 2u_\delta$$

što implicira da je (u_δ) L^1_{loc}-jako prekompaktan. Jaka L^1_{loc} granična vrijednost duž bilo kog podniza je rješenje razmatrenog problema (3.1), $u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$. □

3.3 Dodatak

Lema 11. *Pretpostavimo da fluks $\mathfrak{f}$ iz (3.1) zadovoljava uslov nedegenerisanosti. Tada, za svako $\phi \in L^p_c(\mathbf{R}^{d+1}_+; C^d(S^d))$ i ρ definisano u (3.15) važi sljedeće:*

$$\liminf_{\delta_0 \to 0} \left\langle \phi\rho \frac{\Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big) \cdot \Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big)}{\Big|\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big|^2 + \sigma(\delta_0)}, \mu \right\rangle = \langle \phi, \mu\rangle \tag{3.19}$$

gdje je μ H-mjera definisana u HM.

Dokaz. Možemo transformisati (3.19) u

$$\langle \phi\rho, \mu\rangle + \liminf_{\delta_0 \to 0} \left\langle \phi\rho \left(\frac{\Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big) \cdot \Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big)}{\Big|\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big|^2 + \sigma(\delta_0)} - 1 \right), \mu \right\rangle = \langle \phi, \mu\rangle$$

što očigledno važi jer drugi clan na desnoj strani izraza teži nuli po uslovima nedegenerisanosti i Teoremi 3.3:

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \phi\rho \left(\frac{\Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big) \cdot \Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big)}{\Big|\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big|^2 + \sigma(\delta_0)} - 1 \right), \mu \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| \phi\rho \left(\frac{\Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta_0}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big) \cdot \Big(\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big)}{\Big|\tau + \langle \mathfrak{f}'_{\delta}(\mathbf{x},\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle\Big|^2 + \sigma(\delta_0)} - 1 \right) \right\|_{W_0^{2,\bar{2}}} \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Imajući u vidu definiciju norme $\|\cdot\|_{W_0^{p,\bar{p}}}$ i koristeći Lebesgue-ovu teoremu o dominiranoj konvergenciji, zaključujemo da tvrđenje leme važi. □

Lema 12. *Ako je $|u_\delta| \leq M$, tada je (za dovoljno malo δ) ispunjeno*

$$\|\mu_\delta\| \lesssim C \| \sup_{\lambda,\eta \in [-M,M]} |\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda + \delta\eta) - \mathfrak{f}(\mathbf{x},\lambda)\|_{L^p(\Omega)} = \tilde{\sigma}(\delta) \to 0 \tag{3.20}$$

kada $\delta \to 0$.

Dokaz. Iz [53], znamo da je ograničenje H-distribucije μ_{δ_0} jednako (za interval $I \subset [-M, M]$ kome pripada nosač ρ (3.15))

$$\|\mu_{\delta_0}\| \leq C\|\tilde{\varphi}_1 \mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda)((\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, u_\delta) - (\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, \lambda)\|_{L^p([0,T)\times\Omega\times I)} \|v_\delta\|_{L^{\bar{p}}([0,T)\times\Omega)}.$$

Očigledno, na osnovu definicije konvolucije, imamo

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{\varphi}_1 \mathrm{sgn}(u_\delta - \lambda)((\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, u_\delta) - (\mathfrak{f}_{\delta_0} - \mathfrak{f}_\delta)(\mathbf{x}, \lambda)\|_{L^p([0,T)\times\Omega\times I)} \\
&\leq C(T)\| \sup_{\lambda,\eta\in[-M,M]} |\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda + \delta\eta) - \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda)|\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Pošto je $\mathfrak{f}$ neprekidna funkcija u odnosu na λ, znamo da za skoro svako $\mathbf{x} \in \Omega$ mora važiti

$$\sup_{\lambda,\eta\in[-M,M]} |\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda + \delta\eta) - \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda)| \to 0$$

jer je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu ravnomjerno neprekidna. Sada, na osnovu Lebesgue-ove teoreme o dominiranantnoj konvergenciji, zaključujemo da važi (3.20). $\square$

Glava 4

Jedinstvenost i egzistencija stohastičkih skalarnih zakona održanja na Riemann-ovim mnogostrukostima

U ovoj glavi ćemo dati prostiji dokaz jedinstvenosti dopustivog (t.j. kinetičkog) rješenja Cauchy-jevog problema za stohastički skalarni zakon održanja oblika

$$du + \mathrm{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u)dt = \Phi(\mathbf{x}, u)dW_t, \quad \mathbf{x} \in M, \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}) \in L^\infty(M) \tag{4.2}$$

na glatkoj, kompaktnoj, d-dimenzionoj (Hausdorff) Riemann-ovoj mnogostrukosti (M, g). Objekat W je Wiener-ov proces koji može biti konačno ili beskonačno dimenzioni, što ne utiče na srž dokaza.

Uvedimo precizne pretpostavke o koeficijentima u jednačini. Prvo, pretpostavimo da radimo sa jednodimenzionim Wiener-ovim procesom definisanom na stohastičkoj bazi $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$. Takođe ćemo pretpostaviti da

- fluks $\mathfrak{f} \in C^1(M \times \mathbf{R}; \mathbf{R}^d)$ zadovoljava uslove geometrijske kompatibilnosti i svojstvo nestajanja na sledeći način (respektivno):

$$\mathrm{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \xi) = 0 \ \text{ za svako } \xi \in \mathbf{R} \tag{4.3}$$

$$\|\mathfrak{f}(\cdot, \lambda)\|_{L^\infty(M)} \leq C(1 + |\lambda|); \tag{4.4}$$

- funkcija Φ je neprekidno diferencijabilna i konvergira ka nuli u beskonačnosti t.j. $\Phi \in C_0^1(M \times \mathbf{R})$, i
$$\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |\Phi(\cdot,\lambda)\lambda| \in L^1(M). \tag{4.5}$$

Sada se podsjetimo definicije divergencije na mnogostrukosti. Pretpostavljamo da je preslikavanje $(\mathbf{x},\xi) \mapsto \mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)$, $M \times \mathbf{R} \to TM$ C^1 i da, za svako $\xi \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi) \in \mathfrak{X}(M)$ (prostor vektorskih polja na M).

U lokalnim koordinatama, pišemo

$$\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi) = (f^1(\mathbf{x},\xi),\dots,f^d(\mathbf{x},\xi)).$$

Operator divergencije koji se javlja u jednačini se formira u odnosu na metriku, pa u lokalnim koordinatama imamo:

$$\operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x},u) = \operatorname{div}_g\big(\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{f}(\mathbf{x},u(t,\mathbf{x}))\big) = \frac{\partial}{\partial x_k}(f^k(\mathbf{x},u(t,\mathbf{x})) + \Gamma^j_{kj}(\mathbf{x})f^k(\mathbf{x},u(t,\mathbf{x})) \tag{4.6}$$

gdje su Γ članovi Christoffel-ovi simboli g i važi Einstein-ova konvencija sumacije.

Kao što vidimo, operator divergencije na mnogostrukostima je komplikovaniji nego operator divergencije u Euclid-skom slučaju. Dakle, kako bi dokazali jedinstvenost, moramo pretpostaviti (4.3). Primijetimo da je (4.3) uslov nekompresibilnosti sa stanovišta dinamike fluida, jer, zbog održanja mase nekompresibilnog fluida, gustina se u kontrolisanoj zapremini mijenja u skladu sa stohastičkim forsingom

$$\frac{D\rho}{Dt} = \Phi(\mathbf{x},\rho)\frac{dW_t}{dt} \tag{4.7}$$

gdje je ρ gustina kontrolisane zapremine i $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\nabla\rho$ je materijalni izvod za brzinu toka $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\frac{dx_1}{dt},\dots,\frac{dx_d}{dt})$. Ako pretpostavimo da je funkcija ρ glatka, možemo zapisati jednačinu (4.1) u obliku

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_\xi\big(\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)\big)\big|_{\xi=\rho}\cdot\nabla_g\rho + \operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)\big|_{\xi=\rho} = \Phi(\mathbf{x},\rho)\frac{dW}{dt}. \tag{4.8}$$

Tada, uzimajući $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \partial_\xi\big(\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)\big)\big|_{\xi=\rho}$ i upoređujući (4.8) i (4.7), dolazimo do

$$\operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)\big|_{\xi=\rho} = 0,$$

što nam daje uslov geometrijske kompatibilnosti.

Pošto je jednačina koju razmatramo nelinearna hiperbolička jednačina, njeno rješenje u opštem slučaju sadrži prekide i moramo preći na koncept slabog rješenja. Međutim, ovo indukuje probleme sa jedinstvenošću jer u opštem slučaju možemo konstruisati više slabih rješenja koja zadovoljavaju iste početne uslove. Dakle, kako bi izolovali fizički dopustiva rješenja, moramo uvesti uslove dopustivosti entropijskog tipa [48]. Prvo ćemo ih izvesti lokalno a zatim, koristeći uslov geometrijske kompatibilnosti, dokazaćemo da ovi uslovi važe i globalno.

Uz uslove dopustivosti, izvešćemo kinetičku formulaciju (4.1) (vidi (4.15)). Koristićemo je da dokažemo jedinstvenost rješenja zadatog Cauchy-evog problema. Strategija dokaza je prilagođena iz [18].

4.1 Entropijska dopustivost i kinetička formulacija

Za početak ćemo neformalno izvesti uslove dopustivosti. Kao i obično, počinjemo sa paraboličkom aproksimacijom jednačine (4.1)

$$du_\varepsilon + \mathrm{div}_g(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_\varepsilon))dt = \Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon)dW_t + \varepsilon\Delta_g u_\varepsilon dt, \ \mathbf{x} \in M, \, t \in (0,T) \tag{4.9}$$

gdje je, kao ranije, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \lambda) \in C^1(M \times \mathbf{R})$ i (M, g) d-dimenziona Riemann-ova mnogostrukost sa metrikom g. Pretpostavićemo da je W_t Wener-ov proces i $\Phi \in C^1_0(M \times \mathbf{R})$.

Podsjetimo se definicije slabog rješenja problema (4.9), (4.2).

Definicija 42. *Kažemo da je mjerljiva funkcija $\Omega \ni \omega \mapsto u_\varepsilon(\cdot, \omega) \in L^2([0,T]; H^1(M))$ adaptirana u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ slabo rješenje (4.9), (4.2) ako za test funkciju $\varphi \in C^2_0([0,T] \times M)$ skoro sigurno važi*

$$\int_0^T \int_M (u_\varepsilon \partial_t \varphi + \mathrm{div}_g(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_\varepsilon))\nabla_g \varphi)\, d\mathbf{x}dt = \int_0^T \int_M \varphi\Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon)dW_t - \varepsilon \int_0^T \int_M u_\varepsilon \Delta_g \varphi d\mathbf{x}dt.$$

Egzistencija rješenja problema (4.9), (4.2) se može zaključiti iz argumenata datih u [49].

Korišćenjem Itô-ove formule, iz (4.9) dobijamo (u nastavku, označićemo $\mathfrak{f}'(\mathbf{x}, \xi) = \partial_\xi \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \xi)$):

$$\begin{aligned} d\theta(u_\varepsilon) = \Big(&- \theta'(u_\varepsilon)\mathfrak{f}'(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \cdot \nabla_g u_\varepsilon + \theta'(u_\varepsilon)\mathrm{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x}, \rho)\big|_{\rho = u_\varepsilon} \\ &+ \varepsilon\Delta_g\theta(u_\varepsilon) - \varepsilon\theta''(u_\varepsilon)|\nabla_g u_\varepsilon|^2 + \frac{\Phi^2(\mathbf{x}, u_\varepsilon)}{2}\theta''(u_\varepsilon)\Big)dt + \Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon)\theta'(u_\varepsilon)dW_t \end{aligned} \tag{4.10}$$

za sve dva puta diferencijabilne skalarne funkcije θ.

Korišćenjem standardne procedure aproksimacije i uzimajući u obzir konveksnost funkcije $\theta(u) = |u-\xi|_+ = \begin{cases} u-\xi, & u \geq \xi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, znamo da je možemo uvrstiti u (4.10). Nakon što pustimo da $\varepsilon \to 0$ i pretpostavljajući da $E(|u_\varepsilon(t,\mathbf{x}) - u(t,\mathbf{x})|) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, dobijamo sljedeću distribucionu nejednakost:

$$\begin{aligned} d|u-\xi|_+ &\leq -\mathfrak{f}'(\mathbf{x},u)\nabla_g u \operatorname{sign}_+(u-\xi)dt + \theta'(u)\operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x},\rho)\big|_{\rho=u}dt \\ &+ \frac{\Phi^2(\mathbf{x},u)}{2}\delta(u-\xi)dt + \Phi(\mathbf{x},u)\operatorname{sign}_+(u-\xi)dW_t. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Uzimajući u obzir uslov geometrijske kompatibilnosti (4.3), imamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}'(\mathbf{x},u)\cdot(\nabla_g u)\operatorname{sign}_+(u-\xi) &= \operatorname{div}_g\left(\operatorname{sign}_+(u-\xi)(\mathfrak{f}(\mathbf{x},u)-\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi))\right) \\ + \operatorname{sign}_+(u-\xi)\operatorname{div}_g \mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi) &= \operatorname{div}_g\left(\operatorname{sign}_+(u-\xi)(\mathfrak{f}(\mathbf{x},u)-\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi))\right), \end{aligned} \tag{4.12}$$

i korišćenjem Schwartz-ove leme o nenegativnim distribucijama, zaključujemo da postoji nenegativna stohastička kinetička mjera m (koju ćemo kasnije precizirati) takva da se jednačina (4.11) može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} d|u-\xi|_+ = -\operatorname{div}_g(\operatorname{sign}_+(u-\xi)(\mathfrak{f}(\mathbf{x},u)-\mathfrak{f}(\mathbf{x},\xi)))dt + \frac{\Phi^2(\mathbf{x},u)}{2}\delta(u-\xi)dt \\ +\Phi(\mathbf{x},u)\operatorname{sign}_+(u-\xi)dW_t - dm(t,\mathbf{x},\xi)dt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dalje, tražimo parcijalni izvod izraza datog u (4.13) u odnosu na promjenljivu ξ i dobijamo

$$\begin{aligned} d\partial_\xi|u-\xi|_+ = -\operatorname{div}_g(-\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\operatorname{sign}_+(u-\xi))dt + \partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},u)}{2}\delta(u-\xi)\right)dt \\ +\partial_\xi(\Phi(\mathbf{x},u)\operatorname{sign}_+(u-\xi)dW_t) - \partial_\xi dm. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Uvrštavamo $h(t,x,\xi) = -\partial_\xi|u-\xi|_+ = \operatorname{sign}_+(u-\xi)$ u (4.14) što daje

$$dh + \operatorname{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)h)dt = -\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},u)}{2}\delta(u-\xi)\right)dt - \partial_\xi(\Phi(\mathbf{x},u)hdW_t) + \partial_\xi dm. \tag{4.15}$$

Primijetimo da

$$\begin{aligned} \partial_\xi(\Phi(\mathbf{x},u)hdW_t) &= \partial_\xi(\Phi(\mathbf{x},u)\operatorname{sign}_+(u-\xi))dW_t = -\Phi(\mathbf{x},u)\delta(u-\xi)dW_t \\ &= -\Phi(\mathbf{x},\xi)\delta(u-\xi)dW_t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Korišćenjem $\frac{\Phi^2(\mathbf{x},u)}{2}\delta(u-\xi)=\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\delta(u-\xi)$ i (4.16), i označavajući mjeru $-\partial_\xi h=\delta(u-\xi)$ sa $\nu_{(t,\mathbf{x})}(\xi)$, konačno dobijamo slabi oblik naše jednačine:

$$dh+\mathrm{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)h)dt=-\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu_{(t,\mathbf{x})}(\xi)\right)dt+\Phi(\mathbf{x},\xi)\nu_{(t,\mathbf{x})}(\xi)W_t+\partial_\xi dm\,. \quad (4.17)$$

Prethodnu jednačinu ćemo nazivati *kinetičkom formulacijom* jednačine (4.1).

Važno je primijetiti da funkcija $\overline{h}=1-h$ zadovoljava

$$d\overline{h}+\mathrm{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\overline{h})dt=\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu_{(t,\mathbf{x})}(\xi)\right)dt-\Phi(\mathbf{x},\xi)\nu_{(t,\mathbf{x})}(\xi)dW_t-\partial_\xi dm. \quad (4.18)$$

Sada možemo uvesti definiciju dopustivog rješenja. Prvo ćemo definisati pojam stohastičke mjere.

Definicija 43. *Kažemo da je preslikavanje m iz skupa Ω u prostor Radon-ovih mjera na $[0,T]\times M\times\mathbf{R}$ stohastička kinetička mjera ako:*

- *za svako $\phi\in C_0([0,T]\times M\times\mathbf{R})$ akcija $\langle m,\phi\rangle$ definiše $\mathbf{P}$-mjerljivu funkciju*
$$\langle m,\phi\rangle:\Omega\to R;$$
- *m nestaje za veliko ξ: ako $B_R^c=\{\xi\in\mathbb{R}|\mid\xi\mid\geq R\}$, tada*
$$\lim_{R\to\infty}E[m(C_0([0,T]\times M\times B_R^c))]=0$$
- *za svako $\phi\in C_0(M\times\mathbf{R})$, proces*
$$t\mapsto\int_{[0,t]\times M\times\mathbf{R}}\phi(\mathbf{x},\xi)dm(s,\mathbf{x},\xi)$$

je mjerljiv.

Definicija 44. *Mjerljiva funkcija $u:[0,T]\times M\times\Omega\to\mathbf{R}$ skoro svuda neprekidna u odnosu na vrijeme u smislu da $u(\cdot,\cdot,\omega)\in C(\mathbf{R}^+;H^{-1}(M))$ za $\mathbf{P}$-skoro svako $\omega\in\Omega$, adaptirana u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$, je dopustivo stohastičko rješenje problema (4.1), (4.2) ako*

- *postoji $C_2>0$ takvo da $E(\mathrm{esssup}_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2(M)})\leq C_2$;*
- *kinetička funkcija $h=\mathrm{sign}_+(u-\xi)$ adaptirana u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ zadovoljava (4.13) sa početnim uslovima $h(0,\mathbf{x},\xi)=\mathrm{sign}_+(u_0(\mathbf{x})-\xi)$ u smislu slabih*

tragova i $\overline{h}$ *zadovoljava* (4.18) *sa početnim uslovima* $\overline{h}(0, \mathbf{x}, \xi) = 1 - \mathrm{sign}_+(u_0(\mathbf{x}) - \xi)$ *u smislu slabih tragova.*

Takođe nam je potreban pojam stohastičkog kinetičkog rješenja.

Definicija 45. *Mjerljiva funkcija*

$$\omega \mapsto h(\cdot, \cdot, \cdot, \omega) \in L^2([0, T] \times M \times K)) \cap C_{LR}([0, T]; H^{-k}(M \times K))$$

(gdje $C_{LR}(X)$ *označava prostor lijevo i desno neprekidnih funkcija na* X*), za neko* $k \in \mathbf{N}$ *i svako* $K \subset\subset \mathbf{R}$*, adaptirana u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}$*, ograničena između nule i jedinice i ne strogo opadajuća u odnosu na promjenljivu* $\xi \in \mathbf{R}$ *takva da* $h = -\partial_\xi \nu_{(t,\mathbf{x})}$ *je stohastičko kinetičko rješenje problema* (4.1)*,* (4.2) *ako postoji nenegativna stohastička kinetička mjera* m *takva da* h *zadovoljava* (4.17) *i početne uslove* $h(0, \mathbf{x}, \xi) = \mathrm{sign}_+(u_0(\mathbf{x}) - \xi)$ *u smislu slabih tragova.*

Očigledno, ako imamo dopustivo rješenje problema (4.1), (4.2) imamo i opšte stohastičko kinetičko rješenje. Zanimljivo je da i obratno važi, što slijedi iz standardnih argumenata jedinstvenosti (vidi na primjer [18]). Koncept opšteg rješenja koji koristimo je u suštini isti kao koncept rješenja u [34], sa razlikom što mi ne zahtijevamo ograničenost p-momenata, $p \in [1, \infty)$, mjere $\nu_{t,\mathbf{x}}$ (vidi [34, Definicija 3.3]). Primijetimo da je jednačina koju razmatramo prostija nego jednačina u [34] pošto ne radimo sa cilindričnim Wiener-ovim procesom i zahtijevamo strožije uslove na koeficijentima (uporediti (4.4) i (4.5) u našem radu i [34, (2.1), (2.2), (2.3)]). Iako ne izgleda značajno, oslabljavanje uslova nam dozvoljava da izbjegnemo dodatne zahtjeve za opšte stohastičko kinetičko rješenje u Definiciji 45.

4.2 Neformalni dokaz jedinstvenosti – dupliranje promjenljivih

U ovom dijelu ćemo neformalno dokazati kako se dobija jedinstvenost rješenja. Formalni dokaz se suštinski ne razlikuje od procedure koju sprovodimo u ovom dijelu ali moramo uvesti više procedura "uglačavanja" što značajno komplikuje neke korake u dokazu. Dakle, kako bi olakšali čitaocima, u ovom dijelu ćemo objasniti osnovne ideje dokaza. Takođe naglašavamo da, kako bi pojednostavili notaciju, označićemo sa $d\mathbf{x}$ mjeru na mnogostrukosti umjesto sa uobičajenim $d\gamma(\mathbf{x})$.

Neka su $h^1(t,\mathbf{x},\xi)$ i $h^2(t,\mathbf{y},\zeta)$ dva različita opšta kinetička rješenja problema (4.1), (4.2) (vidi Definiciju 45). Tada

$$dh^1 + \operatorname{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)h^1)dt = -\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu^1\right)dt + \Phi(\mathbf{x},\xi)\nu^1 dW_t + \partial_\xi dm_1, \tag{4.19}$$

$$d\overline{h^2} + \operatorname{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta)\overline{h^2})dt = \partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{y},\zeta)}{2}\nu^2\right)dt - \Phi(\mathbf{y},\zeta)\nu^2 dW_t - \partial_\zeta dm_2. \tag{4.20}$$

Na osnovu (1.16), zaključujemo da važi:

$$d(h^1\overline{h^2}) = h^1 d\overline{h^2} + \overline{h^2}dh^1 - \Phi(\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{y},\zeta)\nu^1\otimes\nu^2 dt. \tag{4.21}$$

Množenjem (4.19) sa $\overline{h^2} = \overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)$, (4.20) sa $h^1 = h^1(t,\mathbf{x},\xi)$, sabiranjem ih i korišćenjam uslova geometrijske kompatibilnosti (4.3), dobijamo

$$\begin{aligned}
&\overline{h^2}dh^1 + h^1 d\overline{h^2} + \overline{h^2}\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_{g,\mathbf{x}}h^1 dt + h^1\mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta)\cdot\nabla_{g,\mathbf{y}}\overline{h^2}dt\\
&= -\overline{h^2}\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu^1\right)dt + h^1\partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{y},\zeta)}{2}\nu^2\right)dt + \overline{h^2}\Phi(\mathbf{x},\xi)\nu^1 dW_t - h^1\Phi(\mathbf{y},\zeta)\nu^2 dW_t\\
&+ \overline{h^2}\partial_\xi dm_1(t,\mathbf{x},\xi) - h^1\partial_\zeta dm_2(t,\mathbf{y},\zeta)dt.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Uvrštavanjem (4.21) u (4.22), dobijamo

$$\begin{aligned}
&d(h^1\overline{h^2}) + \Phi(\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{y},\zeta)\nu^1\otimes\nu^2 dt + \overline{h^2}\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_{g,\mathbf{x}}h^1 dt + h^1\mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta)\cdot\nabla_{g,\mathbf{y}}\overline{h^2}dt\\
&= -\overline{h^2}\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu^1\right)dt + h^1\partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{y},\zeta)}{2}\nu^2\right)dt + (\overline{h^2}\Phi(\mathbf{x},\xi)\nu^1 - h^1\Phi(\mathbf{y},\zeta)\nu^2)dW_t\\
&+ \overline{h^2}\partial_\xi dm_1(t,\mathbf{x},\xi)dt - h^1\partial_\zeta dm_2(t,\mathbf{y},\zeta)dt.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Sada biramo nenegativnu test funkciju $\varphi(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\xi,\zeta) = \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)$, gdje su ρ i ψ glatke nenegativne funkcije definisane na dogovarajućim Euclid-skim prostorima. Množenjem (4.23) sa φ i integracijom nad $(0,T)\times M^2\times\mathbb{R}^2$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathrm{M}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\
&-\int\limits_{\mathrm{M}^2}\int\limits_{\mathbf{R}^2} h_0^1\overline{h_0^2}\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}\\
&+\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_{\mathrm{M}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)\Phi(\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{y},\zeta)d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta)d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi)d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_{g,\mathbf{x}}h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta)\cdot\nabla_{g,\mathbf{y}}\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)h^1(t,\mathbf{x},\xi)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&=\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi'(\xi-\zeta)d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi)d\zeta d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi^2(\mathbf{y},\zeta)}{2}h^1(t,\mathbf{x},\xi)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi'(\xi-\zeta)d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta)d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)\Phi(\mathbf{x},\xi)d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi)d\zeta d\mathbf{y}d\mathbf{x}dW_t\\
&-\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)h^1(t,x,\xi)\Phi(\mathbf{y},\zeta)d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta)d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dW_t\\
&-\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi'(\xi-\zeta)\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)dm_1(t,\mathbf{x},\xi)d\zeta d\mathbf{y}\\
&-\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi'(\xi-\zeta)h^1(t,\mathbf{x},\xi)dm_2(t,\mathbf{y},\zeta)d\xi d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Korišćenjem parcijalne integracije u odnosu na promjenljive ζ i ξ u prva i posljednja dva člana na desnoj stani u (4.24), i koristeći $\partial_\xi h^1 = -\nu^1$ i $\partial_\zeta \overline{h^2} = \nu^2$, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x} \qquad (4.25)\\
&-\int_{M^2}\int_{\mathbf{R}^2} h^1_0(\mathbf{x},\xi)\overline{h^2_0}(\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)\Phi(\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{y},\zeta)d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta)d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi)d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_{g,\mathbf{x}}h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_{M^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta)\cdot\nabla_{g,\mathbf{y}}\overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta)h^1(t,\mathbf{x},\xi)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi^2(\mathbf{y},\zeta)}{2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) \overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta) \Phi(\mathbf{x},\xi) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\zeta d\mathbf{y} d\mathbf{x} dW_t \\
&- \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) h^1(t,\mathbf{x},\xi) \Phi(\mathbf{y},\zeta) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} dW_t \\
&- \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) \nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) dm_1(t,\mathbf{x},\xi) d\zeta d\mathbf{y} \\
&- \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) \nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) dm_2(t,\mathbf{y},\zeta) d\xi d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Na kraju, prebacivanjem trećeg člana na lijvoj strani jednačine (4.25) na desnu stranu i koristeći nenegativnost mjera m_1 i m_2 dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} h^1(T,\mathbf{x},\xi) \overline{h^2}(T,\mathbf{y},\zeta) \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\zeta d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&- \int_{M^2} \int_{\mathbf{R}^2} h^1_0(\mathbf{x},\xi) \overline{h^2_0}(\mathbf{y},\zeta) \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\zeta d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&+ \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi) \cdot \nabla_{g,\mathbf{x}} h^1(t,\mathbf{x},\xi) \overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta) \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\zeta d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{f}'(\mathbf{y},\zeta) \cdot \nabla_{g,\mathbf{y}} \overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta) h^1(t,\mathbf{x},\xi) \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\zeta d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi(\mathbf{x},\xi) - \Phi(\mathbf{y},\zeta))^2 \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) \overline{h^2}(t,\mathbf{y},\zeta) \Phi(\mathbf{x},\xi) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\zeta d\mathbf{y} d\mathbf{x} dW_t \\
&- \int_0^T \int_{M^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\xi-\zeta) h^1(t,\mathbf{x},\xi) \Phi(\mathbf{y},\zeta) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\xi d\mathbf{y} d\mathbf{x} dW_t.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Označićemo $\psi(\xi) = \delta(\xi)$ i $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$. Preuređivanjem elemenata u posljednjoj jednačini dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x} \\
&\leq \int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h_0^1\overline{h_0^2}d\xi d\mathbf{x} - \int\limits_0^T\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_{g,\mathbf{x}}(h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{x},\xi))d\xi d\mathbf{x}dt \\
&- \int\limits_0^T\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(\mathbf{x},\xi)\partial_\xi(h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{x},\xi))d\xi d\mathbf{x}dW_t. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Još jedna parcijalna integracija nam daje

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x} \qquad (4.28) \\
&\leq \int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h_0^1\overline{h_0^2}d\xi d\mathbf{x} + \int\limits_0^T\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi'(\mathbf{x},\xi)h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x}dW(t)
\end{aligned}$$

gdje smo koristili uslov geometrijske kompatibilnosit kako bi eliminisali član sa fluksom.

Korišćenjem nenegativnosti h^1 i $\overline{h^2}$, nakon računanja očekivane vrijednosti kvadrata (4.28) imamo (imajući u vidu Itô-ovu izometriju)

$$\begin{aligned}
&E\left[\Big(\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h^1(T,x,\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x}\Big)^2\right] \qquad (4.29) \\
&\lesssim E\left[\Big(\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h_0^1\overline{h_0^2}d\xi d\mathbf{x}\Big)^2\right] + \|\Phi'\|_\infty^2 E\left[\int\limits_0^T\Big(\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h^1(t,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(t,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x}\Big)^2 dt\right].
\end{aligned}$$

Odavde, korišćenjem Gronwall-ove nejednakosti dobijamo

$$E\left[\Big(\int\limits_{M}\int\limits_{\mathbb{R}} h^1(T,x,\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)d\xi d\mathbf{x}\Big)^2\right] \lesssim E\left[\Big(\int\limits_{M} |u_{10}(\mathbf{x}) - u_{20}(\mathbf{x})|d\mathbf{x}\Big)^2\right]. \qquad (4.30)$$

Dalje, ako pretpostavimo da je $u_{10} = u_{20}$, dobijamo skoro sigurno za skoro svako $(t,\mathbf{x},\xi) \in [0,\infty) \times M \times \mathbf{R}$:

$$h^1(t,\mathbf{x},\xi)\,(1 - h^2(t,\mathbf{x},\xi)) = 0.$$

Ovo implicira da je ili $h^1(t,\mathbf{x},\xi) = 0$ ili $h^2(t,\mathbf{x},\xi) = 1$. Pošto možemo zamijeniti uloge h^1 i h^2, zaključujemo da su 1i 0 jedine vrijednosti koje h^1 ili h^2 mogu uzeti i da je $h^1 = h^2 = h$. Pošto je h takođe nerastuća u odnosu na promjenljivu ξ na $[0,\infty)$, zaključujemo da (uzimajući u obzir početne uslove $h_0 = \mathrm{sign}_+(u_0(\mathbf{x}) - \xi)$) postoji funkcija $u : [0,\infty) \times M \to \mathbf{R}$ takva da

$$h(t,\mathbf{x},\xi) = \mathrm{sign}_+(u(t,\mathbf{x}) - \xi). \tag{4.31}$$

Odavde dobijamo sledeću posljedicu koju ćemo kasnije dokazati.

Opšte stohastiško kinetičko rješenje problema (4.1), (4.2) je oblika (4.31). Ako funkcija u zadovoljava drugi uslov Definicije 44, tada je ona dopustivo stohastičko rješenje problema (4.1), (4.2).

4.3 Jedinstvenost – rigorozni dokaz

U ovoj sekciji ćemo formalizovati argumente iz prethodne sekcije. Da bi to uradili, potrebno je izraziti (4.17) u lokalnim koordinatama. Dakle, pretpostavimo da nam je zadato opšte stohastičko kinetičko rješenje h. Kako bi dokazali jedinstvenost uzećemo mapu (U,κ) za M i pretpostavićemo, bez smanjenja opštosti, da $\kappa(U) = \mathbf{R}^d$. Definišimo lokalni izraz h kao sliku (kako bi izbjegli umnožavanje simbola, koristićemo iste oznake za globalne i lokalne veličine ali ćemo pisati $\tilde{\mathbf{x}}$ za označavanje lokalne varijable)

$$h : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}, \quad h(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi,\omega) = h(t,\kappa^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),\xi,\omega)G(\tilde{\mathbf{x}}),$$

gdje je $G(\tilde{\mathbf{x}})$ Gramijan koji odgovara karti (U,κ). Slično, za $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^d$ definišemo

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi) &= \Phi(\kappa^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),\xi),\\
\mathfrak{f}(\tilde{\mathbf{x}},\xi) &= \mathfrak{f}(\kappa^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),\xi), \quad \mathfrak{f}'(\tilde{\mathbf{x}},\xi) = \mathfrak{f}'(\kappa^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),\xi) = a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\\
\nu_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\lambda) &= \nu_{(t,\kappa^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}))}(\lambda)G(\tilde{\mathbf{x}}),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

i $m(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)$ će biti pushforward mjera m u odnosu na preslikavanje κ.

Sa ovakvim notacijama, zapisaćemo (4.17) lokalno u mapi (U,κ) kao jednačinu koja zavisi od $h_1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)$ i $\overline{h_2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)$, koji predstavljaju dva opšta kinetička rješenja Cauchy-jevih problema koji odgovaraju (4.1) sa početnim uslovima u_{10} i u_{20}, respektivno. Dalje ćemo koristiti Einstein-ovu konvenciju o sumaciji i podsjećamo da $a = (a_1,\dots,a_d) = \mathfrak{f}' = (f_1',\dots,f_d')$. Takođe, pošto jednačine treba razumjeti u slabom smislu, moramo dodati Gramijan svakom od članova u sljedećoj jednačini osim m_1 i m_2, pošto se odgovarajući dio u ovim članovima podrazumijeva iz definicije pushforward mjere. Zato uvodimo konvencije iz (4.32).

$$
\begin{aligned}
& dh^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) + \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1)dt + h^1\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)dt && (4.33)\\
& = -\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)dt + \Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)dW_t + \partial_\xi dm_1, \\
& d\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) + \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2})dt + \overline{h^2}\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{y}})a_k(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)dt && (4.34)\\
& = \partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{2}\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\right)dt - \Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)dW_t - \partial_\zeta dm_2
\end{aligned}
$$

Uvodimo dvije molifikujuće funkcije $\omega_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\omega_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gdje je d dimenzija mnogostrukosti $\mathbf{M}$, takva da $\omega_i \geq 0$, $i = 1,2$ i $\int_{\mathbb{R}^d}\omega_1 = \int_{\mathbb{R}}\omega_2 = 1$. Uzimajući $\omega_{\delta,r}(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t) = \frac{1}{r\delta^d}\omega_1\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\delta}\right)\omega_2\left(\frac{\xi}{r}\right)$, za neko $\delta, r > 0$, i koristeći konvoluciju, (4.33) i (4.34) daju (dalje, indeksi δ i r označavaju konvoluciju po odgovatrajućim promjenljivim):

$$
\begin{aligned}
& dh^1_{\delta,r} + \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1_{\delta,r})dt + g^1_{\delta,r}dt + \left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1\right)_{\delta,r}dt && (4.35)\\
& = -\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)dt\right)_{\delta,r} + (\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi))_{\delta,r}dW_t + \partial_\xi dm_{1,\delta,r}, \\
& d\overline{h^2_{\delta,r}} + \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2_{\delta,r}})dt + g^2_{\delta,r}dt + \left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{y}})a_k(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2}\right)_{\delta,r}dt && (4.36)\\
& = \partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)dt\right)_{\delta,r} - (\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta))_{\delta,r}dW_t - \partial_\zeta dm_{2,\delta,r}
\end{aligned}
$$

gdje

$$
\begin{aligned}
g^1_{\delta,r} &= \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1)_{\delta,r} - \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1_{\delta,r})\\
g^2_{\delta,r} &= \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2})_{\delta,r} - \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2_{\delta,r}}).
\end{aligned}
$$

Ovi izrazi konvergiraju ka nuli kada $\delta, r \to 0$ po Friedrichs-ovoj lemi [72].

Sada, množeći (4.35) i (4.36) sa $\overline{h^2_{\delta,r}} = \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\mathbf{y},\zeta)$ i $h^1_{\delta,r} = h^1_{\delta,r}(t,\mathbf{x},\xi)$, respektivno, i koristeći (1.16), dobijamo

$$
\begin{aligned}
& d(h^1_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}) + (\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi))_{\delta,r}(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta))_{\delta,r}dt && (4.37)\\
& + \overline{h^2_{\delta,r}}\operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1_{\delta,r})dt + h^1_{\delta,r}\operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2_{\delta,r}})dt \\
& + \left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1\right)_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}dt + \left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{y}})a_k(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2}\right)_{\delta,r}h^1_{\delta,r}dt = \\
& - g^1_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}dt - g^2_{\delta,r}h^1_{\delta,r}dt + \overline{h^2_{\delta,r}}(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi))_{\delta,r}dW_t - h^1_{\delta,r}(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta))_{\delta,r}dW_t \\
& + h^1_{\delta,r}\partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{2}\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\right)_{\delta,r}dt - \overline{h^2_{\delta,r}}\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)_{\delta,r}dt \\
& + \overline{h^2_{\delta,r}}\partial_\xi dm_{1,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)dt - h^1_{\delta,r}\partial_\zeta dm_{2,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)dt.
\end{aligned}
$$

Dalje, biramo nenegativne funkcije $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takve da $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = \int_{\mathbb{R}} \psi = 1$. Koristeći test funkciju $\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi - \zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)$, gdje je $\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\varepsilon}\right)$, $\psi_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$, za neko $\varepsilon > 0$, i integracijom (4.37) nad $(0, T)$, jednačina se zapisuje u varijacionoj formulaciji (sjetimo se da su h^1 i h^2 neprekidne u odnosu na promjenljivu $t \in \mathbf{R}^+$):

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2} h^1_{\delta,r}(T,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(T,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}} \tag{4.38}$$

$$-\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2} h^1_{0,\delta,r}(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{0,\delta,r}}(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}} \tag{4.39}$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(\overline{h^2_{\delta,r}}\operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{x}}}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1_{\delta,r}) + h^1_{\delta,r}\operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}}(a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2_{\delta,r}})\right)\times \tag{4.40}$$

$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}}dW_t$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(\left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1\right)_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}} + \left(\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{y}})a_k(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\overline{h^2}\right)_{\delta,r}h^1_{\delta,r}\right)\times \tag{4.41}$$

$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}}$$

$$=-\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(g^1_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}} + g^2_{\delta,r}h^1_{\delta,r} - \overline{h^2_{\delta,r}}(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi))_{\delta,r} + h^1_{\delta,r}(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta))_{\delta,r}\right)\times \tag{4.42}$$

$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}}dW_t$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(h^1_{\delta,r}\partial_\zeta\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{2}\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\right)_{\delta,r} - \overline{h^2_{\delta,r}}\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)_{\delta,r}\right. \tag{4.43}$$

$$\left.-\,(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi))_{\delta,r}(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta))_{\delta,r}\right)\times$$

$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}}dt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{R}^{2d}}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\partial_\xi m_{1,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) - h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi)\partial_\zeta m_{2,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\right)\times \tag{4.44}$$

$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}}d\tilde{\mathbf{y}}dt.$$

Analiziraćemo ovu jednakost član po član. Počećemo sa članovima iz (4.38)–(4.40). Imamo:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} h^1_{\delta,r}(T,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(T,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}} \qquad (4.45)\\
&-\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} h^1_{\delta,r}(0,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(0,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}\\
&-\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\cdot\Big[\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)\nabla\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\nabla\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)\Big]d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\cdot\Big[\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)\nabla\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\nabla\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)\Big]d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt\\
&=\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} h^1_{\delta,r}(T,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(T,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}-\\
&-\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2} h^1_{\delta,r}(0,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(0,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}\\
&-\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)-a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta))\cdot\nabla\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\times\\
&\times\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt\\
&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)+a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta))\cdot\nabla\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\times\\
&\times\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt
\end{aligned}
$$

Pretposljednji član u (4.45) se može zapisati kao (dalje je $dV=d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt$):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}(a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)-a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta))\cdot\nabla\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\times \qquad (4.46)\\
&\times\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)dV=
\end{aligned}
$$

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} (a(\tilde{\mathbf{x}},\xi) - a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)) \cdot \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^d} \rho \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}}{\varepsilon} \right) \right) h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) \times$$
$$\times \psi_\varepsilon(\xi - \zeta) \varphi \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}}{2} \right) dV =$$
$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} (a(\tilde{\mathbf{x}},\xi) - a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)) \cdot \frac{1}{\varepsilon^d} \nabla \rho(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z} = \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}}{\varepsilon}} h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) \times$$
$$\times \psi_\varepsilon(\xi - \zeta) \varphi \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}}{2} \right) dV =$$
$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a(\tilde{\mathbf{x}},\xi) - a(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon^d} \nabla \rho(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z} = \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}}{\varepsilon}} h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) \times$$
$$\times \psi_\varepsilon(\xi - \zeta) \varphi \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}}{2} \right) dV =$$
$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a_k(\varepsilon \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{y}},\xi) - a_k(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{\varepsilon z_k} z_k \partial_{z_k} \rho(\mathbf{z}) h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}} + \varepsilon \mathbf{z},\xi) \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) \times$$
$$\times \psi_\varepsilon(\xi - \zeta) \varphi \left(\tilde{\mathbf{y}} + \frac{\varepsilon \mathbf{z}}{2} \right) dV$$

gdje je $\mathbf{z} = \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}}{\varepsilon}$. Primjećujemo da, kada $r, \delta, \varepsilon \to 0$ (u bilo kom redosljedu), ovaj izraz postaje

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \partial_{\tilde{y}_k} a_k(\tilde{\mathbf{y}},\xi) h^1(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \varphi(\tilde{\mathbf{y}}) \int_{\mathbf{R}^d} z_k \partial_{z_k} \rho(\mathbf{z}) d\mathbf{z}\, d\xi d\tilde{\mathbf{y}} dt \tag{4.47}$$
$$= - \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{y}}} a(\tilde{\mathbf{y}},\xi) h^1(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \varphi(\tilde{\mathbf{y}}) d\xi d\tilde{\mathbf{y}} dt$$
$$\overset{(4.3)}{=} \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} \Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{y}}) a_k(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) h^1(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi) d\xi d\tilde{\mathbf{y}} dt. \tag{4.48}$$

zbog svojstava molifikatora ρ. Dakle, iz (4.47) i (4.45) zaključujemo da kada $r, \delta, \varepsilon \to 0$ u bilo kom redosljedu

$$(4.38) + (4.39) + (4.40) \underset{r,\delta,\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \tag{4.49}$$
$$\int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} (h^1 \overline{h^2})(T,\tilde{\mathbf{y}},\xi) \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) d\xi d\tilde{\mathbf{x}} - \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} (h^1_0 \overline{h^2_0})(\tilde{\mathbf{x}},\xi) \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) d\xi d\tilde{\mathbf{x}}$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)(h^1\overline{h^2})(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nabla\varphi(\tilde{\mathbf{x}})d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dt \tag{4.50}$$
$$-\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}} \Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dt.$$

Član (4.41) se može lako srediti. Pustimo da $r,\delta,\varepsilon\to 0$ i dobijamo

$$(4.41)\underset{r,\delta,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} 2\Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1\overline{h^2}\varphi(\tilde{\mathbf{x}})d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dt. \tag{4.51}$$

Za sređivanje članova (4.42) i (4.43), moramo koristiti regularnost funkcije Φ (sjetimo se da $\Phi\in C^1_0(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R})$). Imamo

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)_{\delta,r}\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}}),\delta,r}(\zeta)-\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}}),\delta,r}(\xi)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}}),\delta,r}(\zeta)\right]\times \tag{4.52}$$
$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\Big(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\Big)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}\underset{r,\delta\to 0}{\longrightarrow}0,$$

i slično

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r}\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r}- \tag{4.53}$$
$$-\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}}),\delta,r}(\xi)\big)\,\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}}),\delta,r}(\zeta)\big)\Big]\times$$
$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\Big(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\Big)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt\underset{r,\delta\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Na sličan način imamo

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)-\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r}h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\right]\times$$
$$\times\,\rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dW_t$$
$$=\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}}),\delta,r}(\xi)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)-\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}}),\delta,r}(\zeta)h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\right]\times$$

$$\times \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dW_t+\int_0^T g_{3,\delta,r,\varepsilon}dW_t$$

gdje

$$g_{3,\delta,r}=\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\Big(\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r}-\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\left(\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)_{\delta,r}\Big)\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)$$
$$-\Big(\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r}-\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\left(\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\right)_{\delta,r}\Big)h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\Big]\times$$
$$\times \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}$$

i $g_{3,\delta,r,\varepsilon}\to 0$ as $\delta,r\to 0$ skoro sigurno. Odavde, koristeći $\frac{dh^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{\partial\xi}=-\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}}),\delta,r}(\xi)$ i $\frac{d\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{\partial\zeta}=\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}}),\delta,r}(\zeta)$, parcijalnu integraciju, izvodimo sljedeći zaključak za (4.42)

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)-\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r}h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\Big]\times \tag{4.54}$$
$$\times \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dW_t$$
$$\underset{\varepsilon,r,\delta\to 0}{\longrightarrow}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}}\Phi'(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}})\,d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dW_t$$

gdje smo koristili proceduru kojom smo dobili (4.47).

Imajući u vidu (4.52), (4.53), i (4.54), zaključujemo da (4.43) ima sljedeću asimptotiku:

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{x}},\xi)}{2}\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\right)_{\delta,r}\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\times \tag{4.55}$$
$$\times \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi'_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt+$$
$$+\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Phi^2(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)}{2}\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\right)_{\delta,r}h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\times$$
$$\times \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi'_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right)d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}}d\tilde{\mathbf{x}}dt-$$
$$-\int_0^T\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^2}\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r}\big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r}\times$$

$$\times\, \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right) d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}} d\tilde{\mathbf{x}} dt-$$

$$-\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\big(\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\nu^1_{(t,\tilde{\mathbf{x}})}(\xi)\big)_{\delta,r} \overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta) - \big(\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\nu^2_{(t,\tilde{\mathbf{y}})}(\zeta)\big)_{\delta,r} h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\Big)\times$$

$$\times\, \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right) d\zeta d\xi d\tilde{\mathbf{y}} d\tilde{\mathbf{x}} dW_t \underset{\varepsilon,r,\delta\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbf{R}^2} (\Phi(\tilde{\mathbf{x}},\xi)-\Phi(\tilde{\mathbf{y}},\zeta))^2 \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\times$$

$$\times\, \psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right) d\nu^2_{(t,\mathbf{y})}(\zeta) d\nu^1_{(t,\mathbf{x})}(\xi) d\mathbf{y} d\mathbf{x} dt$$

$$-\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} \Phi'(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) d\xi d\tilde{\mathbf{x}} dW_t$$

$$= -\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}} \Phi'(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) d\xi d\tilde{\mathbf{x}} dW_t. \tag{4.56}$$

Konačno, želimo da se oslobodimo mjera entropijskog defekta iz (4.44). Koristimo činjenicu da su h^1 i h^2 opadajući u odnosu na promjenljivu ξ (t.j. ζ) i da su mjere m_1 i m_2 nenegativne. Nakon dvije parcijalne integracije imamo (imajući u vidu da $\partial_\xi\psi(\xi-\zeta) = -\partial_\zeta\psi(\xi-\zeta)$)

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbf{R}^2} \Big(\overline{h^2_{\delta,r}}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\partial_\xi m_{1,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) - h^1_{\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\xi)\partial_\zeta m_{2,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\Big)\times \tag{4.57}$$

$$\times\, \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right) d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{y}}$$

$$= -\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{2d}} \int_{\mathbf{R}^2} \Big(\nu^2_{(t,\mathbf{y}),\varepsilon,\delta}(\zeta) m_{1,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi) + \nu^1_{(t,\mathbf{x}),\varepsilon,\delta}(\xi) m_{2,\delta,r}(t,\tilde{\mathbf{y}},\zeta)\Big)\times$$

$$\times\, \rho_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{y}})\psi_\varepsilon(\xi-\zeta)\varphi\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}{2}\right) d\xi d\zeta d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{y}} \le 0.$$

Na kraju, iz (4.49), (4.51), (4.54), (4.55), i (4.57), zaključujemo da nakon sto pustimo da $r,\delta,\varepsilon\to 0$ (prvo $r,\delta\to 0$ a zatim $\varepsilon\to 0$) članovi (4.38)–(4.44) postaju:

$$\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} h^1(T,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(T,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) d\xi d\tilde{\mathbf{x}} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} \Gamma^j_{kj}(\tilde{\mathbf{x}})a_k(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}})d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dt\\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} h^1_0\overline{h^2_0}\varphi(\tilde{\mathbf{x}})d\xi d\tilde{\mathbf{x}} + \int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} a(\tilde{\mathbf{x}},\xi)\cdot\nabla\varphi(\tilde{\mathbf{x}})(h^1\overline{h^2})(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbb{R}} \Phi'(\tilde{\mathbf{x}},\xi)h^1(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\overline{h^2}(t,\tilde{\mathbf{x}},\xi)\varphi(\tilde{\mathbf{x}})d\xi d\tilde{\mathbf{x}}dW_t.
\end{aligned}
$$

Odavde, koristeći definiciju integrala na mnogostrukosti i (4.32), vidimo da važi

$$
\begin{aligned}
&\int_M\int_{\mathbb{R}} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x})d\xi d\mathbf{x} \qquad (4.58)\\
&\leq \int_M\int_{\mathbb{R}} h^1_0(\mathbf{x},\xi)\overline{h^2_0}(\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x})d\xi d\mathbf{x}-\\
&-\int_0^T\int_M\int_{\mathbb{R}} (h^1\overline{h^2})(t,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))a(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_g\varphi(\mathbf{x})d\xi d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_M\int_{\mathbb{R}} \Phi'(\mathbf{x},\xi)(h^1\overline{h^2})(t,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x})d\xi d\mathbf{x}dW_t.
\end{aligned}
$$

Pošto smo na kompaktnoj mnogostrukosti, možemo izabrati $\varphi \equiv 1$ što daje:

$$
\begin{aligned}
&\int_M\int_{\mathbb{R}} h^1(T,\mathbf{x},\xi)\overline{h^2}(T,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))d\xi d\mathbf{x} \qquad (4.59)\\
&\leq \int_M\int_{\mathbb{R}} h^1_0(\mathbf{x},\xi)\overline{h^2_0}(\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))d\xi d\mathbf{x}-\\
&-\int_0^T\int_M\int_{\mathbb{R}} (h^1\overline{h^2})(t,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))a(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_g 1\, d\xi d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_M\int_{\mathbb{R}} \Phi'(\mathbf{x},\xi)(h^1\overline{h^2})(t,\mathbf{x},\xi)G(\kappa(\mathbf{x}))d\xi d\mathbf{x}dW_t.
\end{aligned}
$$

Došli smo do (4.28) plus član koji ne utiče na korišćenje Gronwall-ove nejednakosti i Itô-ove izometrije koje nam daju jedinstvenost u (4.29). Napominjemo da Gramijan nema uticaja na proceduru pošto je Gramijan pozitivna ograničena funkcija.

4.4 Egzistencija

Sledeći cilj je da dokažemo da za zadate po cetne uslove $u_0 \in L^\infty(M)$ postoji stohastičko kinetičko rješenje χ u smislu Definicije 45, sa odgovarajučom kinetičkom mjerom m. Zato razmatramo aproksimaciju nestajućom viskoznošću jednačine (4.9) sa početnim uslovima (4.2). Važi sljedeća teorema.

Teorema 4.1. *Za svako $\varepsilon > 0$ zadatak (4.9), (4.2) sa $u_0 \in L^2(M) \cap L^\infty(M)$ ima stohastičko rješenje $u_\varepsilon \in L^2([0,T); H^2(M))$. Ovo rješenje, za svaku konveksnu funkciju $\theta \in C^2(\mathbf{R})$ takvu da $|\theta'(\lambda)| \leq C$, $\lambda \in \mathbf{R}$, zadovoljava*

$$
\begin{aligned}
d\theta(u_\varepsilon) \leq \Big(- \operatorname{div}_g \int_0^{u_\varepsilon} \theta'(v)\mathfrak{f}'(\mathbf{x}, v)dv + \varepsilon\Delta_g\theta(u_\varepsilon) + \frac{\Phi^2(\mathbf{x}, u_\varepsilon)}{2}\theta''(u_\varepsilon)\Big)dt \\
+\Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon)\theta'(u_\varepsilon)dW.
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

Dokaz. Koristićemo Galerkin-ovu aproksimaciju kako bi dobili približna rješenja (4.9), (4.2), a zatim ćemo dokazati da niz približnih rješenja konvergira duž nekog podniza ka rješenju (4.9), (4.2) koje zadovoljava (4.60). Za početak, fiksiramo ortonormiranu bazu $\{e_k\}_\mathbf{N}$ u $L^2(M)$ koja se sastoji od svojstvenih funkcija Laplace-Beltrami-jevog operatora,

Zatim tražimo aproksimativna rješenja oblika (nakon sljedeće formule, nećemo pisati stohastičku promjenljivu kako bi pojednostavili notaciju)

$$
u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n(t,\omega)e_k(\mathbf{x}), \quad t \in [0,T), \quad \mathbf{x} \in M, \quad \omega \in \Omega. \tag{4.61}
$$

Tražimo funkcije α_k, $k = 1, \ldots, n$, takve da je (4.9) zadovoljena na potprostoru prostora $L^2([0,T) \times \mathbf{R}^n)$ u smislu da skoro sigurno važi

$$
\begin{aligned}
\int_M du_n\varphi d\gamma(\mathbf{x}) = \int_M \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_n)\nabla_g\varphi\, d\gamma(\mathbf{x})dt \\
+ \varepsilon \int_M u_n\, \Delta_g\varphi d\gamma(\mathbf{x})dt + \int_M \Phi(\mathbf{x}, u_n)\varphi d\gamma(\mathbf{x})dW_t, \quad \varphi \in Span\{e_k\}_{k=1,\ldots,n}.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Ako uvrstimo $\varphi = e_j$, $j = 1, \dots, n$, iz ortogonalnosti sistema $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ dobijamo sljedeći sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} d\alpha_j &= \int_M \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_n)\nabla_g e_j(\mathbf{x})\, d\gamma(\mathbf{x}) dt \\ &+ \varepsilon\lambda_j \alpha_j^n \int_M |e_j|^2 d\gamma(\mathbf{x}) dt + \int_M \Phi(\mathbf{x}, u_n) e_j(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) dW_t. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Pošto smo u (4.4) pretpostavili da $\|\mathfrak{f}(\cdot,\lambda)\|_{L^\infty(M)} \leq C|\lambda|$ i $\Phi \in C_0^1(M\times\mathbf{R})$, znamo da (4.63) sa konačnim početnim uslovima ima globalno definisano rješenje [63]. Uzmimo

$$\alpha_j(0,\omega) = \alpha_{j0}(\omega), \tag{4.64}$$

za koeficijente α_{j0}, $j \in \mathbf{N}$ početnih uslova u_0 u bazi $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$:

$$u_0(\mathbf{x},\omega) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \alpha_{j0}(\omega) e_j(\mathbf{x}).$$

Ovako smo dobili niz (u_n) koji za svako $n \in \mathbf{N}$ zadovoljava relaciju (4.63). Uzimajući $\varphi = u_n$ u (4.62) i koristeći proceduru kojom iz (4.9) dobijamo (4.10) sa $\theta(u) = u^2/2$, zaključujemo da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_M d|u_n|^2 d\gamma(\mathbf{x}) &= \int_M \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_n)\cdot\nabla_g u_n d\gamma(\mathbf{x}) dt \\ &- \varepsilon\int_M |\nabla_g u_n|^2 d\gamma(\mathbf{x}) dt + \int_M \Phi^2(\mathbf{x}, u_n) d\gamma(\mathbf{x}) dt \\ &+ 2\int_M \Phi(\mathbf{x}, u_n) u_n d\gamma(\mathbf{x}) dW_t. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Zapisujući ovaj izraz u integralnoj formi, kvadrirajući dobijeni izraz, i koristeći Young-ovu nejednakost i Itô-ovu izometriju, za konstantu $C > 0$ dobijamo:

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_M\int_0^T \frac{d|u_n|^2(t,\mathbf{x})}{2} dt d\gamma(\mathbf{x})\right)^2\right] + \varepsilon^2 E\left[\left(\int_0^T\int_M |\nabla u_n|^2 d\gamma(\mathbf{x}) dt\right)^2\right] \\ &\lesssim \Big(E\left[\left(\int_0^T\int_M \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u_n)\cdot\nabla_g u_n d\gamma(\mathbf{x}) dt\right)^2\right] + E\left[\int_0^T\int_M \Phi^2(\mathbf{x}, u_n)|u_n|^2(t,\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) dt\right]\Big). \end{aligned} \tag{4.66}$$

Sada, pošto je

$$E\left[\left(\int_M\int_0^T \frac{d|u_n|^2(t,\mathbf{x})}{2} dt d\gamma(\mathbf{x})\right)^2\right] = E\left[\left(\int_M \frac{|u_n|^2(T,\mathbf{x})}{2} d\gamma(\mathbf{x}) - \int_M \frac{|u_0|^2(\mathbf{x})}{2} d\gamma(\mathbf{x})\right)^2\right]$$

i

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}|\Phi^2(\mathbf{x},\lambda)||\lambda|^2\in L^1(M)$$

na osnovu (4.5), iz (4.66), koristeći Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost i (4.4) zaključujemo da:

$$E\left[\left(\int_M\frac{|u_n|^2(T,\mathbf{x})}{2}d\gamma(\mathbf{x})\right)^2\right]+\varepsilon E\left[\int_M|\nabla u_n|^2d\gamma(\mathbf{x})\right]\leq C. \tag{4.67}$$

Sada, moramo ocijeniti t-varijaciju (u_n). Standardni postupak je da nalaženje ocjene tipa $H^\alpha([0,T);H^{-s}(M))$ za neko $s>0$, a zatim interpolacija dobijenom $L^2([0,T);H^1(M))$ ocjenom. Prvo, uzimamo u obzir integralnu formulaciju stohastičke diferencijalne jednačine (4.62) zadatu sa (4.63). U slabom smislu u prostoru $\mathcal{D}'(M)\cap Span\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ imamo da (opet ne pišemo stohastičku promjenljivu):

$$\begin{aligned}&\int_M(u_n(t+\Delta t,\mathbf{x})-u_n(t,\mathbf{x}))\,\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_t^{t+\Delta t}\int_M\mathfrak{f}(\mathbf{x},u_n)\nabla_g\varphi(\mathbf{x})\,d\gamma(\mathbf{x})dt\\&-\varepsilon\int_t^{t+\Delta t}\int_M\nabla_g u_n\,\nabla_g\varphi(\mathbf{x})d\gamma(\mathbf{x})dt+\\&+\int_M\int_t^{t+\Delta t}\Phi(\mathbf{x},u_n)\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}dW_t,\quad\varphi\in Span\{e_k\}_{k=1,\dots,n}.\end{aligned}$$

Primijetimo da, ako je $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ ortonormirana baza u $L^2(M)$, tada je $\{\sqrt{\lambda_k}e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ ortonormirana baza u $H^{-1}(M)$. Ovo dalje implicira da, ako je $u_n=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k^n e_k(\mathbf{x})$, tada

$$\|u_n\|_{H^{-1}(M)}=\left(\sum_{k=1}^n\frac{(\alpha_k^n)^2}{\lambda_k}\right)^{1/2}. \tag{4.68}$$

Dakle, biramo $\varphi(t,\mathbf{x})=e_k(\mathbf{x})/\sqrt{\lambda_k}$ i dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_k^n(t+\Delta t)-\alpha_k^n(t)}{\sqrt{\lambda_k}}&=-\int_t^{t+\Delta t}\int_M\mathrm{div}_g\mathfrak{f}(\mathbf{x},u_n)\frac{e_k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}}d\gamma(\mathbf{x})dt'\\&+\varepsilon\int_t^{t+\Delta t}\int_M\Delta_g u_n\frac{e_k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}}d\gamma(\mathbf{x})dt'+\\&+\int_t^{t+\Delta t}\int_M\Phi(\mathbf{x},u_n)\frac{e_k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}}d\mathbf{x}dW_{t'},\quad\varphi\in Span\{e_k\}_{k=1,\dots,n}.\end{aligned}$$

Kvadriranje ovog izraza, traženje očekivane vrijednosti, i kosrišćenje Cauchy-Schwartz-ove i Jensen-ove nejednakosti nam daje:

$$E\left[\frac{(\alpha_k^n(t+\Delta t)-\alpha_k^n(t))^2}{\lambda_k}\right]\lesssim\Delta tE\left[\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_M\mathrm{div}_g f(\mathbf{x},u_n)\frac{e_k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}}d\gamma(\mathbf{x})\right)^2dt'\right]$$

$$+\varepsilon^2 \Delta t E\left[\int_t^{t+\Delta t}\left(\Delta_g u_n(t,\mathbf{x})\frac{e_k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 dt'\right]+$$
$$+E\left[\left(\int_t^{t+\Delta t}\int_M \Phi(\mathbf{x},u_n)\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}d\gamma(\mathbf{x})dW_{t'}\right)^2\right].$$

Podijelimo izraz sa Δt, iskoristimo Itô-ovu izometriju i sumirajmo izraz po $k=1,\dots,n$. Uzimajući u obzir (4.68), imamo:

$$\begin{aligned}&E\big[\|u_n\|^2_{C^{1/2}([0,T);H^{-1}(M)}\big]\\ &\lesssim \Big(E\big[\int_t^{t+\Delta t}\|\mathrm{div}_g f(\cdot,u_n(t',\cdot))\|^2_{H^{-1}(M)}dt'\big]+\varepsilon^2 E\big[\int_t^{t+\Delta t}\|\Delta_g u_n(\cdot,t')\|^2_{H^{-1}(M)}dt'\big]\\ &+E\big[\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|\phi(\cdot,u_n(t,\cdot))\|_{H^{-1}(M)}dt'\big]\Big),\end{aligned}$$

i odavde $E\big[\|\Delta_g u_n\|_{H^{-1}(M)}\big]=E\big[\|\nabla_g u_n\|_{L^2(M)}\big]\le c<\infty$ po (4.67),

$$E\big[\|u_n\|^2_{C^{1/2}([0,T);H^{-1}(M)}\big]\le c<\infty. \tag{4.69}$$

Dalje, iz (4.67) i (4.69) i iz generalizacije leme Aubin-Lions iz [75, Teorema 5] gdje uzimamo $X=H^{-1}(M)$, $B=L^2(M)$ i $Y=H^{-1}(M)$, znamo da za $\mathbf{P}$-s.s. $\omega\in\Omega$ niz $(u_n,\cdot,\omega))$ jako konvergira u prostoru $L^2([0,T)\times M)$ ka $u(\cdot,\omega)$ duž podniza (koji ćemo označiti istom oznakom kao niz):

$$\|u_n(\cdot,\omega)-u(\cdot,\omega)\|_{L^2([0,T)\times M)}\to 0 \ \text{ kada } \ n\to\infty.$$

Ovdje naglašavamo da ovaj podniz ne mora biti isti za različite $\omega\in\Omega$. Međutim, koristeći činjenicu da je u jedinstveno rješenje zadatka 4.1, 4.2, možemo pokazati da konvergencija ne važi samo duž podniza već da čitav niz $(u_n(\cdot,\omega))$ konvergira ka $u(\cdot,\omega)$ u $L^2([0,T)\times M)$. Granična funkcija u je takva da $\|u(\cdot,\omega)\|_{L^2([0,T)\times M}$ je P-mjerljiva na osnovu (4.65) i generalizovane Gronwall-ove nejednakosti [42], pa je funkcija u slabo rješenje (4.9), (4.2) u smislu Definicije 42. Pošto je jednačina (4.9) lokalno strogo parabolička, korišćenjem njene lokalne formulacije možemo zaključiti (vidjeti na primjer [40] za stohastički slučaj) da je u $L^2([0,T);H^2(M))$-s.s. regularna. Ovo implicira (4.72) (vidjeti izvođenje (4.10); pošto je jednačina linearna u odnosu na du, nije nam potrebno više od regularnosti u u odnosu t). □

Iz (4.60) nije teško izvesti kinetičku formulaciju za (4.9). Tada, nakon što pustimo da parametar aproksimacije $\varepsilon\to 0$, dobijamo kinetičko rješenje (Definicija 45) jednačine (4.1). Stvarno, uzimajući $\theta(u_\varepsilon)=|u_\varepsilon-\xi|_+$ u (4.60) (kao u prethodnoj sekciji i imajući u vidu Schwatz-ovu lemu za nenegativne distribucije, dobijamo da, nakon nalaženja izvoda po promjenljivoj ξ, za neku nenegativnu stohastičku mjeru m_ε, važi:

$$\begin{aligned} &d\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon-\xi)+\mathrm{div}_g(\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon-\xi))dt \\ &=\varepsilon\Delta_g(\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon-\xi))dt-\partial_\xi\left(\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}\nu_\varepsilon\right)dt+\Phi(\mathbf{x},\xi)\nu_\varepsilon dW_t+\partial_\xi m_\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.70}$$

gdje je $\nu_\varepsilon=-\partial_\xi\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon-\xi)$. Konačno, nalazeći slabu-$\star$ graničnu vrijednost $(\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon-\xi))$ duž podniza (označenog sa h), dobijamo (4.17). Na osnovu standardnog postupka datog u [20], predstavljenog u dokazu Teoreme 4.2, zaključujemo da postoji u takvo da $h(t,\mathbf{x},\xi)=\mathrm{sign}_+(u-\xi)$ za jedinstveno entorpijski dopustivo rješenje u zadatka (4.1), (4.2). Dakle, imamo osnovne korake dokaza teoreme o egzistenciji. Prije nego je dokažemo, potrebna nam je sljedeća jednostavna lema.

Lema 13. *Neka je $E(\|u_\varepsilon\|_{L^2(U)})\leq C$, $U\subset\subset\mathbf{R}^+\times M$. Definišimo*

$$U_n^l=\{(t,\mathbf{x})\in U:\ E(|u_n(t,\mathbf{x},\cdot)|)>l\}.$$

Tada

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{meas}(U_n^l)=0. \tag{4.71}$$

Dokaz. Pošto je $(E(|u_n|^2))$ ograničeno i $U\subset\subset\mathbf{R}^+\times M$, takođe važi da je $(E(|u_n|))$ ograničen. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} &\sup_{n\in\mathbf{N}}\int_\Omega E(|u_n(t,\mathbf{x},\cdot)|)dtd\mathbf{x}\geq\sup_{n\in\mathbf{N}}\int_{\Omega_n^l}l\,dtd\mathbf{x}\implies \\ &\implies\frac{1}{l}\sup_{k\in\mathbf{N}}\int_\Omega|E(u_n(t,\mathbf{x}))|d\mathbf{x}\geq\sup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{meas}(\Omega_n^l), \end{aligned}$$

i odakle slijedi (4.36). □

Prije nego pređemo na dokaz teoreme, definišimo operator trunkacije [21]

$$T_N(z)=\begin{cases} z, & |z|<N,\\ N, & z\geq N,\\ -N, & z\leq -N.\end{cases}$$

Poznato je da ako je niz (u_n) ograničen u L^p, $p>1$ i niz njegovih trunkacija $(T_N(u_n))$ konvergira u L^1_{loc} za svako $N\in\mathbf{N}$, tada i sam niz konvergira u L^1_{loc} ([21]).

Teorema 4.2. *Za svako $u_0\in L^\infty(M)$ postoji jedinstveno dopustivo stohastičko rješenje zadatka (4.1), (4.2).*

Dokaz. Prvo, dokažimo da je familija (m_ε) familija uniformno ograničenih funkcionala na $L^2_{loc}(\Omega; C_0([0,T] \times M \times [-R,R]))$ za proizvoljno $R > 0$. Uzimamo test funkciju $\varphi \in C^2_c([0,T] \times M \times [-R,R])$ i koristimo je u (4.70). Dobijamo

$$\int\limits_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \left(-\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon - \xi)\partial_t\varphi - \mathrm{sign}_+(u_\varepsilon - \xi)\right)\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_g\varphi\Big)\, dtd\mathbf{x}d\xi$$
$$- \int\limits_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \varepsilon(\mathrm{sign}_+(u_\varepsilon - \xi))\Delta_g\varphi dtd\mathbf{x}d\xi - \int\limits_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \partial_\xi\varphi(t,\mathbf{x},\xi)\,\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}d\nu_\varepsilon dtd\mathbf{x}$$
$$- \int\limits_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \varphi(t,\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{x},\xi)d\nu_\varepsilon dW_t d\mathbf{x} = -\int\limits_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \partial_\xi\varphi(t,\mathbf{x},\xi)dm_\varepsilon,$$

Kvadriranjem dobijenog izraza, korišćenjem osnovne Young-ove nejednakosti (koju ponekad nazivaju i nejdnakošću Peter-Paul) i Itô-ovu izometriju, dobijamo

$$E\Big(\Big|\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \partial_\xi\varphi(t,\mathbf{x},\xi)dm_\varepsilon\Big|^2\Big) \le 5\Big(E\Big(\Big|\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} |\partial_t\varphi|dtd\mathbf{x}d\xi\Big|^2\Big)$$
$$+ E\Big(\Big|\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} |\mathfrak{f}'(\mathbf{x},\xi)\cdot\nabla_g\varphi|dtd\mathbf{x}d\xi\Big|^2\Big) + E\Big(\Big|\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}\times[-R,R]} \varepsilon|\Delta_g\varphi|dtd\mathbf{x}d\xi\Big|^2\Big)$$
$$+ E\Big(\Big|\sup_{\xi\in[-R,R]}\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathrm{M}} \partial_\xi\varphi(t,\mathbf{x},\xi)\frac{\Phi^2(\mathbf{x},\xi)}{2}dtd\mathbf{x}\Big|^2\Big)$$
$$+ E\Big(\Big|\sup_{\xi\in[-R,R]}\int_{[0,\mathrm{T}]}\Big|\int_{\mathrm{M}} |\varphi(t,\mathbf{x},\xi)\Phi(\mathbf{x},\xi)d\mathbf{x}|dt\Big|^2\Big)\Big).$$

Zatim biramo $\int_{-R}^{\xi}\varphi(t,x,\eta)d\eta$ za fiksirano $\varphi \in C^2_c([0,T] \times M; C^2([-R,R]))$ i dobijamo da je familija (m_ε) familija ograničenih funkcionala na Bochner-ovom prostoru $L^2_{loc}(\Omega; C^2([0,T] \times M \times [-R,R]))$. Pošto su m_ε nenegativne, na osnovu Schwartz-ove leme o nenegativnim distribucijama, znamo da je m ograničena $L^2_{loc}(\Omega; C^2([0,T] \times M \times [-R,R]))$. Fiksirajući $K \subset\subset M$, znamo da su (m_ε) ograničeni funkcionali na Bochner-ovom prostoru $L^2(\Omega; C_0([0,T] \times K \times [-R,R]))$ pa zato i na $L^2_{w\star}(\Omega; C_0([0,T] \times K \times [-R,R]))$. Koristeći Kantor-ovu proceduru dijagonalizacije, zaključujemo da postoji podniz $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ of (m_ε) koji slabo konvergira ka m.

Sada, moramo naći ocjene za u_ε. Procedura je u srži ista kao procedura dobijanja ocjena za (m_ε). Zaista, u (4.60) izaberimo entropiju $\theta(z) = z^2$ i integralimo na $[0,T] \times M$. Dobijamo

$$\int\limits_{\mathrm{M}} u_\varepsilon^2(T,\mathbf{x})d\gamma(\mathbf{x}) - \int\limits_{\mathrm{M}} u_0^2(T,\mathbf{x})d\gamma(\mathbf{x}) \tag{4.72}$$

$$\leq \int_0^T \int_M \Phi^2(\mathbf{x}, u_\varepsilon) d\gamma(\mathbf{x}) dt + \int_0^T \int_M 2\Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon) u_\varepsilon d\gamma(\mathbf{x}) dW$$

gdje smo koristili kompaktnost mnogostrukosti M što nam daje

$$\int_M \Big(-\operatorname{div}_g \int_0^{u_\varepsilon} \theta'(v) \mathfrak{f}'(\mathbf{x}, v) dv \Big) d\gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{i} \quad \int_M \Delta_g u_\varepsilon d\gamma(\mathbf{x}) = 0.$$

Sada, prebacimo $\int_M u_0^2(T, \mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x})$ na desnu stranu jednakosti, kvadrirajmo obje strane dobijenog izraza i iskoristimo Itô-ovu isometriju u posljednjem koraku kako bi dobili

$$E\left(\left(\int_M u_\varepsilon^2(T, \mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) - \int_M u_0^2(T, \mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) \right)^2 \right) \leq \tag{4.73}$$
$$2E\left(\left(\int_0^T \int_M \Phi^2(\mathbf{x}, u_\varepsilon) d\gamma(\mathbf{x}) dt \right)^2 + \int_0^T \left(\int_M 2\Phi(\mathbf{x}, u_\varepsilon) u_\varepsilon d\gamma(\mathbf{x}) \right)^2 dt \right).$$

Odavde, koristeći pretpostavljena ograničenja funkcije Φ, zaključujemo da je očekivana vrijednost $L^2(M)$-norme niza $(u_\varepsilon(T, \cdot))$ ograničena t.j., nakon integracije svega nad skupom $T \in [0, t]$, $t > 0$, zaključujemo da je očekivana vrijednost $L^2([0, t] \times M)$-norme niza (u_ε) takođe ograničena.

Označimo sa h slabu-$\star$ graničnu vrijednost u $L^\infty([0, T] \times M \times \mathbf{R} \times \Omega)$ duž nekog podniza familije $(h_\varepsilon) = \operatorname{sign}_+(u_\varepsilon - \lambda)$. Ona zadovoljava (4.17) kao i Definiciju 45. Dakle, ona je jednistveno kinetičko rješenje zadatka (4.1), (4.2). Na osnovu Posljedice 4.2, ona je oblika $h = \operatorname{sign}_+(u - \xi)$. Konačno, treba dokazati da je ispunjen i drugi uslov Definicije 44. On slijedi iz činjenice da

$$\operatorname{sign}_+(u_\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \lambda) \underset{L^\infty - \star}{\rightharpoonup} \operatorname{sign}_+(u(t, \mathbf{x}) - \lambda), \quad \varepsilon \to 0,$$

odakle, pošto važi $\operatorname{sign}(z) = \operatorname{sign}_+(z) - (1 - \operatorname{sign}_+(z))$, takođe slijedi

$$\operatorname{sign}(u_\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \lambda) \underset{L^\infty - \star}{\rightharpoonup} \operatorname{sign}(u(t, \mathbf{x}) - \lambda), \quad \varepsilon \to 0.$$

Fiksirajmo $N > 0$ i pomnožimo ovaj izraz prvo sa karakterističnom funkcijom intervala $(-N, N)$ označenom sa $\chi_{(-N,N)}(\lambda)$ a zatim sa $\lambda \chi_{(-N,N)}(\lambda)$. Dobijamo da za operator trunkacije T_N važi:

$$T_N(u_\varepsilon) \underset{L^\infty-\star}{\rightharpoonup} T_N(u) \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0$$
$$(u_\varepsilon^2 - N^2)\chi_{|u_\varepsilon|<N} = T_N(u_\varepsilon)^2 - N^2 \underset{L^\infty-\star}{\rightharpoonup} (u_\varepsilon^2 - N^2)\chi_{|u|<N} = T_N(u)^2 - N^2 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.74}$$

Sada, posmatrajmo fiksiranu nenegativnu test funkciju $\phi \in C_c([0,T] \times M)$. Važi

$$\begin{aligned} &E\Big(\int\limits_{[0,T]\times M} \phi(t,\mathbf{x})\big(T_N(u_\varepsilon) - T_N(u)\big)^2 dt d\gamma(\mathbf{x})\Big) \\ &= E\Big(\int\limits_{[0,T]\times M} \phi(t,\mathbf{x})\big[T_N(u_\varepsilon)^2 - T_N(u)^2 \\ &+ 2T_N(u)(T_N(u) - T_N(u_\varepsilon))\big] dt d\gamma(\mathbf{x})\Big) \to 0 \end{aligned}$$

na osnovu (4.74). Odavde, zaključujemo da očekivanja trunkacije $(T_N(u_\varepsilon))$ niza (u_ε) jako konvergiraju u $L^2_{loc}([0,T] \times M)$ ka $E(T_N(u)) = E(u^N)$.

Odavde, možemo izvesti zaključke o konvergenciji $(E(|u_\varepsilon - u|^2)$. Prvo, dokazujemo da dobijeni niz (u^N) jako konvergira u $L^1_{loc}([0,T] \times M)$ kada $N \to \infty$.

Zato, neka je $U \subset\subset [0,T] \times M$. važi

$$\lim_l \sup_n E(\|T_l(u_n) - u_n\|_{L^1(U)}) \to 0\,. \tag{4.75}$$

Označimo sa
$$U_n^l = \{(t,\mathbf{x}) \in U :\ E(u_n(t,\mathbf{x},\cdot)) > l\}.$$

Pošto je $(E(\|u_n^2\|_{L^2(U)}))$ ograničen, imamo

$$E\Big(\int_U |u_n - T_l(u_n)| dt d\mathbf{x}\Big) \le E\Big(\int_{U_n^l} |u_n| dt d\mathbf{x}\Big) \le \text{meas}(U_n^l)^{1/2}\, E(\|u_n\|_{L^2([0,T]\times M)}) \underset{l\to\infty}{\to} 0$$

uniformno u odnosu na n po (4.36). Dakle, (4.75) je dokazana.

Dalje, imamo

$$\begin{aligned} E(\|u^{l_1} - u^{l_2}\|_{L^1(U)}) &\le E(\|u^{l_1} - T_{l_1}(u_{n_k})\|_{L^1(U)} + \|T_{l_1}(u_{n_k}) - u_{n_k}\|_{L^1(U)}) \\ &+ E(\|T_{l_2}(u_{n_k}) - u_{n_k}\|_{L^1(U)} + \|T_{l_2}(u_{n_k}) - u^{l_2}\|_{L^1(U)})\,, \end{aligned}$$

što zajedno sa (4.75) implicira da je (u^l) Cauchy-jev niz u odnosu na očekivanje L^1-norme. Dakle, postoji mjerljiva funkcija u takva da

$$E(\|u^l - u\|_{L^1(U)}) \to 0 \quad \text{as} \quad l \to \infty. \tag{4.76}$$

Sada, nije teško vidjeti da čitav (u_{n_k}) konvergira ka u u istoj normi. Naime, važi

$$\begin{aligned} E(\|u_{n_k} - u\|_{L^1(U)}) &\leq E(\|u_{n_k} - T_l(u_{n_k})\|_{L^1(U)}) + \\ &+ E(\|T_l(u_{n_k}) - u^l\|_{L^1(U)}) + E(\|u^l - u\|_{L^1(U)}), \end{aligned}$$

što po definiciji funkcija u^l, i konvergencije (4.75) i (4.76) implicira naše tvrđenje. Štaviše, pošto je u_n ograničen u očekivanju L^2-normi, i funkcija u mora biti takva. □

Literatura

[1] Adimurthi, S. Mishra, G.D.V. Gowda, *Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux*, J.Hyperbolic Differ. Equ. **2** (2005), 783–837.

[2] B. Andreianov, D. Mitrovic, *Entropy conditions for scalar conservation laws with discontinuous flux revisited*, Ann. Inst. H. Poincaré C Analyse Non Linéaire, 32 (2015), 1307-1335.

[3] E. J. Allen, Derivation of stochastic partial differential equations for size- and age- structured populations, Journal of Biological Dynamics **3** (2009), 73–86.

[4] B. Andreianov, K. H. Karlsen and N. H. Risebro, *A theory of L^1-dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux*, Arch. Ration. Mech. Anal., **201** (2011), 27–86.

[5] N. Antonić, M. Erceg, M. Lazar: *Localization principle for one-scale H-measures*, J. Funct. Anal. **272** (2017) 3410–3454.

[6] N. Antonić, M. Lazar: *Parabolic H-measures*, J. Funct. Anal. **265** (2013) 1190–1239.

[7] N. Antonić, D. Mitrović: *H-distributions: An Extension of H-Measures to an $L^p - L^q$ Setting*, Abstr. Appl. Anal. (2011), Article ID 901084, 12 pages.

[8] E. Barsukow, Introduction to Conservation Laws: Theory and Numerics, TUM, Lecture notes

[9] M. Ben Artzi, P. LeFloch, Well-posedness theory for geometry-compatible hyperbolic conservation laws on manifolds, Ann. I. H. Poincaré **24** (2007), 989–1008.

[10] F.E. Benth, K.H. Karlsen, K Reikvam, Optimal portfolio selection with consumption and nonlinear integro-differential equations with gradient constraint: a viscosity solution approach, Finance and Stochastics **5** (2001), 275–303.

[11] Z. Brzezniak, M. Ondrejat, Weak solutions to stochastic wave equations with values in Riemannian manifolds, Comm. Partial Differential Equations 36 (2011), no. 9, 1624–1653.

[12] R. Bürger, K. H. Karlsen, H. Torres, J. Towers, *Second-order schemes for conservation laws with discontinuous flux modelling clarifier-thickener units*, Numer. Math. **116** (2010), 579–617.

[13] G.-Q Chen, Q. Ding, K.H. Karlsen, On nonlinear stochastic balance laws, Arch. Ration. Mech. Anal. 204, no. 3, 707–743 (2012).

[14] R. Colombo, K. .H. Karlsen, F. Lagoutiere, A. Marson, *Special issue on contemporary topics in conservation laws.* Netw. Heterog.Media **11** (2016).

[15] A.-L. Dalibard, *Kinetic formulation for heterogeneous scalar conservation laws*, Ann. I. H. Poincaré **23** (2006), 475–498.

[16] D. Daners, Introduction to Functional Analysis, University of Sidney, NSW 2006, Australia

[17] V.G. Danilov, G.A.Omel'yanov, *Dynamics of the interface between two immiscible liquids with nearly equal densities under gravity.* Eur. J. Appl. Math. **13** (2002), 497–516.

[18] A. Debussche, J. Vovelle, Scalar conservation laws with stochastic forcing, Journal of Functional Analysis **259** (2010), 1014–1042.

[19] A. Debussche, J. Vovelle, Diffusion limit for a stochastic kinetic problem, Comm. Pure Appl. Anal. **11** (2012), 2305–2326.

[20] R. DiPerna, Measure-valued solutions to conservation laws, Archive Rat. Mech. Anal. **88** (1985), 223–270.

[21] G. Dolzmann, N. Hungerbuhler, S. Müller, Nonlinear elliptic systems with measure valued right-hand side, Math. Zeitschrift, **226** (1997), 545–574.

[22] H. Kalisch, D. Mitrovic, J.M. Nordbotten, *Rayleigh-Taylor instability of immiscible fluids in porous media*, Continuum Mech. Thermodyn. **28** (2016), 721–731.

[23] M. Marohnic, D. Mitrovic, A. Novak, *On a front evolution in porous media with a source – analysis and numerics*, Bull. Braz. Math. Soc. **47** (2016), 521–532.

[24] D. Mitrovic, J. M. Nordboten, H. Kalisch, *Dynamics of the interface between immiscible liquids of different densities with low Froude number*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **15** (2014), 361–366.

[25] M. Orlic, M. Lazar, *Cyclonic versus Anticyclonic Circulation in Lakes and Inland Seas*, Journal of Physical Oceanography **39** (2009), 2247–2263

[26] A. Riaz, M. Hesse, H. A. Tchelepi, F. M. Orr, *Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media*, J. Fluid Mech. **548** (2006), 87–111.

[27] J. A. Sethian, P. Smereka, *Level set methods for fluid interfaces*, Annu. Rev. Fluid Mech. **35** (2003), 341–372.

[28] A. Tartakovsky, S. Neuman, R. Lenhard, *Immiscible front evolution in randomly heterogeneous porous media*, Phys. Fluids **15** (2003), 3331–3341 .

[29] R. E. Edwards, Functional Analysis, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[30] L. C. Evans, Weak convergence method in partial differential equations, Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society Providence, Rhode Island, Number 74, 1988.

[31] L. C. Evans, An introduction to stochastic differential equations, UC Berkeley, lecture notes.

[32] P. K. Friz, B. Gess, Stochastic scalar conservation laws driven by rough paths, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **33** (2016), 933–963.

[33] J. Feng, D. Nulart, Stochastic scalar conservation laws, **255** (2008), 313–373

[34] L.Galimberti, K.H.Karlsen, Stochastic scalar conservation laws on manifolds, J.Hyperbolic Diff.Eq. **16** (2019), 519–593.

[35] M. Garavello, R. Natalini, B. Piccoli, A. Terracina, *Conservation laws with discontinuous flux*, Netw. Heter. Media **2** (2007), 159–179.

[36] P. Gérard: *Microlocal Defect Measures*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1761–1794.

[37] B. Gess, M. Hofmanová, Well-posedness and regularity for quasilinear degenerate parabolic-hyperbolic SPDE, Annals of Probability **46** (2018), 2495–2544

[38] L. Grafakos: *Classical Fourier Analysis*, Springer, 2008.

[39] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer, Geometric theory of generalized functions, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[40] M. Hofmanova, Strong solutions of semilinear stochastic partial differential equations, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 20 (3) (2013) 757–778.

[41] K. H. Karlsen, N. H. Risebro and J. Towers, *L^1-stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic connection-diffusion equations with disc. coeff.*, Skr. K. Nor. Vid. Selsk, **3** (2003), 1–49.

[42] A. Kazuo, A Stochastic Gronwall inequality and its applications, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics **6** (2005), 1–5.

[43] J.U.Kim, On a stochastic scalar conservation law, Indiana Univ. Math. J. bf 52 (2003), 227–256.

[44] N. Konatar, UNIQUENESS FOR STOCHASTIC SCALAR CONSERVATION LAWS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS REVISITED, Filomat 36:5 (2022), 1615–1634,

[45] N. Konatar, SCALAR CONSERVATION LAWS WITH CHARATHEODORY FLUX REVISITED, Glasnik Matematicki, Vol. 55, No. 1 (2020), 101-111.

[46] N. Konatar, Dynamics of three dimensional flow in porous media, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 191, pp. 1-5., https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/191/konatar.pdf

[47] D. Kröner, T. Müller, L. M. Strehlau, *Traces for functions of bounded variation on manifolds with applications to conservation laws on manifolds with boundary*,

[48] S. N. Kruzhkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Mat. Sb., **81** (1970), 217–243.

[49] N. V. Krylov, B. L. Rozovskii, Stochastic Evolution Equations, Translated from Itogi Nauki i Tehniki, Seriya Sovremennye Problemy Matematiki, **14** (1979), 71–146.

[50] M. Lazar, D. Mitrović: *Velocity averaging – a general framework*, Dynamics of PDEs **9** (2012) 239–260.

[51] M. Lazar, D. Mitrović: *On an extension of a bilinear functional on $L^p(\mathbf{R}^n) \times E$ to Bôchner spaces with an application to velocity averaging*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 261–264.

[52] M. Lazar, D. Mitrović: *Existence of solutions for a scalar conservation law with a flux of low regularity*, Electronic J. Diff. Eq. **2016** (2016), 1–18.

[53] M. Lazar, D. Mitrović: *On a new class of functional spaces with application to the velocity averaging*, Glasnik Matematički 52 (2017), 115–130.

[54] P. Le Floch, Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[55] D. Lengeler, T. Müller, Scalar conservation laws on constant and time-dependent Riemannian manifolds, J. Differential Equations **254** (2013), 1705–1727.

[56] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor: *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation law and related equations*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 169–191.

[57] P.-L. Lions, B. Perthame, P.Souganidis, Stochastic averaging lemmas for kinetic equations, Seminaire Equations Aux Derivee Partielles (Ecole Polytechnique) 2011-2012, no. 1.

[58] J. E. Marsden, Generalized Hamiltonian mechanics, Arch. Rat. Mech. Anal., 28(4) (1968) 323–361.

[59] D. Mitrovic, A. Novak, *Transport-collapse scheme for scalar conservation laws – initial-boundary value problem*, Comm. Math. Sciences **15** (2017), 1055–1071.

[60] M. Mišur, D. Mitrović: *On a generalization of compensated compactness in the $L^p - L^q$ setting*, Journal of Functional Analysis **268** (2015) 1904–1927.

[61] P.M.M. Monserrat: Stochastic differential equations and applications, University of Barcelona, Faculty of Mathematics and Informatics, Final thesis.

[62] W. Neves, E.Yu.Panov, J.Silva, *Strong traces for conservation laws with general nonautonomous flux*, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), 6049–6081.

[63] B. $\emptyset$ksendal, Stochastic differential equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[64] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry. With Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics 103. Academic Press, New York, 1983.

[65] E. Yu. Panov, *Generalized solutions of the Cauchy problem for quasilinear conservation laws*, Dissertation Can. Phys.–Math. Sci., Mosk. Gos. Univ., Moscow 1991 (Russian).

[66] E.Yu.Panov, *On existence and uniqueness of entropy solutions to the Cauchy problem for a conservation law with discontinuous flux*, J.Hyperbolic Differ. Equ. bf 6 (2009), 2821–2870.

[67] E.Yu. Panov: *Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux*, Arch. Rational Mech. Anal. **195** (2010) 643–673.

[68] E.Yu. Panov: *Ultraparabolic H-measures and compensated compactness*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **28** (2011) 47–62.

[69] E. Yu. Panov, The Cauchy problem for the first order quasi-linear equation on manifold, Differential Equations **33** (1997), 257–266.

[70] E. Yu. Panov, On the Dirichlet Problem for First Order Quasilinear Equations on a Manifold, *Trans. AMS* **363** (2011), 2393–2446.

[71] P. Petersen, Riemannian geometry. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, New York, 2006.

[72] J.-P. Puel and M.-C. Roptin, Lemme de Friedrichs, théoréme de densité résultant du lemme de Friedrichs , Rapport de stage dirigé par C. Goulaouic, Diplome d'Etudes Approfondies, Université de Rennes, 1967.

[73] F. Rindler: *Directional oscillations, concentrations, and compensated compactness via microlocal compactness forms*, Arch. Ration. Mech. Anal. **215** (2015) 1–63.

[74] J. Schenker, Functional Analysis, Lecture notes fos spring '08, Michigan State University, Lecture notes.

[75] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Mat. Pure ed Appl. **CXLVI** (1986, 65–96.

[76] A. Świerczewska-Gwiazda, Lecture notes on Functional Analysis, University of Warsaw, Lecture notes

[77] A. Tartakovsky, S. Neuman and R. Lenhard, Immiscible front eveolution in randomly heteroge-neous porous media, Phys. Fluids **15** (2003), 3331—3341.

[78] L. Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillation and concentration effects in PDEs*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115** (1990) 193–230.

[79] L. Tartar: *Multi-scale H-measures*, Discrete and Continuous Dynamical Systems S **8** (2015) 77–90.

[80] M. Taylor, Pseudo-differential operators, 160 pages, 1974, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[81] B. Temple, *Global solution of the Cauchy problem for a class of 2x2 nonstrictly hyperbolic conservation laws*, Adv. in Appl. Math., **3** (1982), 335–375.

[82] Weinan E, K. Khanin, A. Mazel, and Ya. Sinai, Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing, Ann. of Math. (2) **151** (2000), 877–960.

[83] Xiaoshan Chen, Yu-Jui Huang, Qingshuo Song, Chao Zhu, The stochastic solution to a Cauchy problem for degenerate parabolic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications **451** (2017), 448–472.

Biografija

Nikola Konatar je rođen u Bijelom Polju, 8. avgusta 1991. godine. Osnovnu školu i gimnaziju završio je u rodnom gradu. Dobitnik je diplome „Luča" za odličan uspjeh u svim razredima osnovnog i srednjeg školovanja.

Završio je Bachelor studije na Prirodno-matematičko fakultetu Univerziteta Crne Gore, smjer Matematika i računarske nauke, 2013. godine, sa prosječnom ocjenom 9,76. Specijalističke studije je završio na istom smjeru 2014. godine, a 2016. godine i master studije odbranom rada Elementi teorije stabilnosti i bifurkacija i primjene u zadacima sinhronizacije nelinearnih oscilacija, pod mentorstvom prof. dr Vladimira Jaćimovića. Iste godine upisuje doktorske studije na smjeru Matematika.

U toku studiranja bio je dobitnik stipendije koju Vlada Republike Crne Gore, kao i Decembarske nagrade koju dodjeljuje grad Podgorica.

Na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta Crne Gore, zaposlen je na mjestu saradnika u nastavi od septembra 2014. godine. Izvodio je vježbe na predmetima: Analiza 1, Analiza 2, Parcijalne jednačine, Algebra, Algebra 2, Metode optimizacije, Jednačine matematičke fizike...

Oblasti njegovog naučnog interesovanja su: Analiza i Parcijalne diferencijalne jednačine.

Izjava o autorstvu

Potpisani Nikola Konatar

Broj indeksa/upisa 1/2016

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom **„Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela "**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

Potpis doktoranda

U Podgorici, 28.11.2022. Konatar

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Nikola Konatar

Broj indeksa/upisa: 1/2016

Studijski program: Matematika

Naslov rada: „Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela"

Mentor: prof. dr Darko Mitrović

Potpisani Nikola Konatar

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

Potpis doktoranda

U Podgorici, 18.11.2022.

Konatar

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **"Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela "**, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilozima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

U Podgorici, 28.12.2022.