

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Anton Gjokaj

Granična svojstva
kvazikonformnih harmonijskih
preslikavanja u prostoru

DOKTORSKA DISERTACIJA

PODGORICA, 2023.

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Anton Gjokaj

**Boundary behaviour of
quasiconformal harmonic
mappings in space**

PHD THESIS

PODGORICA, 2023

Podaci i informacije o doktorandu

Ime i prezime: Anton Gjokaj

Datum i mjesto rođenja: 13.06.1994. godine, Podgorica

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka:
Matematika, 2019. godine

Podaci i informacije o mentoru

Ime i prezime: David Kalaj

Titula: doktor matematičkih nauka

Zvanje: redovni profesor

Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet.

Članovi komisije:

Dr Darko Mitrović, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr David Kalaj, redovni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Miodrag Mateljević, redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

Dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Dr Marijan Marković, vanredni profesor PMF-a, Univerzitet Crne Gore

Datum odbrane: 07.11.2023. godine

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

Naslov disertacije: Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru

Rezime: Cilj ove disertacije je ispitivanje Lipschitz i Hölder neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja i kvazikonformnih preslikavanja sa "kontrolisanim" Laplasijanom, iz jedinične lopte $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ u prostornu oblast Ω sa granicom određene glatkosti.

Ključne riječi: kvazikonformna preslikavanja, harmonijska preslikavanja, Lipschitz neprekidnost, Hölder neprekidnost, Dirichletov problem, Poissonova diferencijalna jednačina

Naučna oblast: Matematička analiza

Uža naučna oblast: Teorija funkcija

UDK broj: 517.548, 517.57

INFORMATION ON THE PHD THESIS

Name of the doctoral program: Mathematics, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro

Thesis title: Boundary behaviour of quasiconformal harmonic mappings in space

Summary: The aim of this thesis is to investigate the Lipschitz and Hölder continuity of quasiconformal harmonic mappings and quasiconformal mappings with "controlled" Laplacian, from the unit ball $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ to a spatial domain Ω with a certain boundary smoothness.

Key words: quasiconformal mappings, harmonic mappings, Lipschitz continuity, Hölder continuity, Dirichlet problem, Poisson's equation

Scientific field: Analysis

Scientific subfield: Theory of functions

UDC: 517.548, 517.57

Izvod iz teze

U ovom radu se razmatraju osobine kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ u prostornu oblast sa granicom određene glatkosti.

Dobijeni su potvrdni odgovori na pitanje Lipschitz neprekidnosti u slučaju kada prostorna oblast ima granicu glatkosti $C^{1,\alpha}$, za neko $\alpha \in (0, 1)$, i na pitanje uniformne Hölder neprekidnosti kada oblast ima granicu glatkosti C^1 . Dodatno, Lipschitz neprekidnost je dokazana i u slučaju kada se uslov da je preslikavanje harmonijsko zamijeni sa uslovom da Laplasijan funkcije pripada prostoru $L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, za $p > n$.

Značajnu ulogu u dokazivanju ovih rezultata ima i Hardy-Littlewood teorema, koja je u ovom radu uopštena za harmonijske funkcije u jediničnoj lopti \mathbf{B} prostora \mathbf{R}^n . Teorema daje vezu između koeficijenta μ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku $\eta \in S$ harmonijske funkcije $u = u(x)$, tj.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\xi) - u(\eta)\|}{\|\xi - \eta\|^\mu},$$

i vrijednosti

$$\sup_{x \in [0, \eta)} \|\nabla u(x)\| (1 - \|x\|)^{1-\mu}.$$

Abstract

In this thesis, we consider the properties of quasiconformal and harmonic mappings from the unit ball $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ to a spatial domain with boundary of a certain smoothness.

An affirmative answer to the question of Lipschitz continuity is obtained in the case of spatial domains with $C^{1,\alpha}$ boundary, for some $\alpha \in (0, 1)$, and on the question of uniform Hölder continuity when the image is a domain with C^1 boundary. Additionally, Lipschitz continuity is also proven in the case when the condition that the mapping is harmonic is replaced with the condition that the Laplacian of the function belongs to the space $L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, for $p > n$.

A significant role in proving these results plays the Hardy-Littlewood theorem, which in this thesis is generalized for harmonic functions in the unit ball \mathbf{B} of \mathbf{R}^n . The theorem gives the connection between the coefficient of μ -Hölder continuity on sphere at $\eta \in S$ of the harmonic function $u = u(x)$, i.e.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\xi) - u(\eta)\|}{\|\xi - \eta\|^\mu},$$

and of the value

$$\sup_{x \in [0, \eta)} \|\nabla u(x)\| (1 - \|x\|)^{1-\mu}.$$

Predgovor

Istorija razvoja kvazikonformnih preslikavanja

Kvazikonformna preslikavanja se izučavaju od prve polovine prošlog vijeka. Prvi put potreba za određivanjem kvazikonformnog preslikavanja se pojavljuje krajem 1920tih u radovima njemačkog matematičara Herberta Grötzscha, koji je, u nedostatku konformnog preslikavanja između kvadrata i pravougaonika koje tjemena kvadrata slika u tjemena pravougaonika, potražio primjer funkcije koja je "najbliže" konformnom preslikavanju, tako što je uveo mjeru odstupanja funkcije od konformnog preslikavanja. Desetak godina kasnije, ova oblast je privukla pažnju velikog broja istaknutih matematičara: dobitnika Fieldsove medalje L. Ahlforsa (koji je kasnije i uveo termin "kvazikonformno preslikavanje"), O. Teichmüllera, M.A. Lavrentjeva, L. Bersa, itd., koji su u svojim radovima primijenili rezultate teorije kvazikonformnih preslikavanja u problemima iz kompleksne analize i topologije, ali i razmatrali mogućnost uvođenja kvazikonformnih preslikavanja i između Riemannovih površi i u višedimenzionom prostoru.

Dakle, teorija kvazikonformnih preslikavanja je nastala u ravni i u uskoj je vezi sa teorijom konformnih preslikavanja jedne kompleksne promjenljive, odnosno može se reći da ona predstavlja odgovor na pitanje koliko je svojstvo analitičnosti bitno i koliko se može oslabiti u raznim teoremama. Iako je, kao što je rečeno, već od početka bilo pokušaja da se teorija proširi i na višedimenzioni slučaj, to je naišlo na probleme što zbog načina na koji su se tada defnisala kvazikonformna preslikavanja, što i zbog manjkosti konformnih preslikavanja u prostoru. Naime, J. Liouville je 1851. godine dokazao (pod nekim jačim uslovom glatkosti, koji je kasnije eliminisan) da jedina konformna preslikavanja u prostoru \mathbf{R}^n , $n \geq 3$, su restrikcije grupe transformacija koju generišu translacije, homotetije, rotacije i inverzije oko sfere, odnosno takozvane Möbiusove transformacije (u ravni, podsjećamo, Möbiusove transformacije su pravi podskup konformnih preslikavanja). To je istovremeno bio i razlog da se klasi kvazikonformnih preslikavanja u prostoru daje veći značaj, jer se konformna preslikavanja ne mogu generalizovati direktno na prostor dimenzije $n \geq 3$.

Za sistemski pristup toj tematici u višedimenzionom prostoru se čekalo na pojavljivanje modula krivih (ekstremnih dužina). Metod ekstremnih dužina je brzo postao široko upotrijebljen i koristan alat u izučavanju geometrijskih svojstva kvazikonformnih preslikavanja u ravni i prostoru. Prvo je izučavan od Ahlforsa i Beurlinga (vidjeti [2]), a onda proširen u veće dimenzije od strane Fugledea [14]. Par godina kasnije F.W. Gehring i J. Väisälä u radovima [16–18] preko metoda modula krivih ustanovili su geometrijski pristup klasi kvazikonformnih preslikavanja. Dokazom ekvivalencije između geometrijske definicije i metričke definicije (vidjeti [18, 60]) omogućen je nagli razvoj ove oblasti.

Treba reći da se kvazikonformna preslikavanja pojavljuju u neočekivane načine i u drugim oblastima matematika i fizike, kao u harmonijskoj analizi, dinamici, singularnim integralima, diferencijalnim jednačinama, u geometriji, topologiji itd.

Pregled istraživanja i ciljevi disertacije

Imajući u vidu da analitička preslikavanja u ravni su i harmonijska, finski matematičar O. Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja kao generalizaciju analitičkih preslikavanja u ravni. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara.

Bitan trenutak u intenzitetu razvoja ove oblasti predstavlja rad M. Pavlovića [53] iz 2002. godine, gdje je između ostalog dokazano da kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska \mathbf{D} u sebe su bi-Lipschitz neprekidna. Nakon toga, niz matematičara (D. Kalaj, K. Astala, M. Mateljević, D. Partyka, M. Arsenović i ostali) se posvetio radu na ovoj temi i dobijeni su interesantni rezultati kroz generalizaciju rezultata na razne oblasti u ravni ili kroz olakšavanje uslova harmoničnosti funkcije. Zbog opšteg značaja ali i zbog povezanosti sa ciljevima ove disertacije izdvajamo sljedeće rezultate. Kalaj, u radu [29], dokazuje da kvazikonformno harmonijsko preslikavanje između $C^{1,\alpha}$ Jordanovih oblasti je Lipschitz neprekidno. U slučaju da posmatramo oblasti sa C^1 granicom onda Lipschitz neprekidnost ne važi (poznato je da postoji i primjer konformnog preslikavanja između oblasti sa C^1 granicom koje nije Lipschitz neprekidno), ali u radu [33] je dokazano da važi Hölder neprekidnost sa uniformnim Hölder koeficijentom. Za slučaj kada se relaksira uslov harmoničnosti, u radu [39] autori Kalaj i E. Saksman dokazuju da kvazikonformno preslikavanje f iz jediničnog diska u Jordanovu oblast sa C^2 granicom, za koje u slabom smislu važi $\Delta f \in L^p(\mathbf{D}, \mathbf{C})$, $p > 2$, je Lipschitz neprekidno. Drugi rezultati u ravni, sa sličnim postavkama se mogu naći u radovima [10, 20, 30, 31, 34, 36–38, 44–46, 48, 51, 52] i njihovim referencama.

Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u \mathbf{R}^n , za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Neki interesantni rezultati se mogu naći u radovima [5, 6, 9, 32, 35, 41, 47, 49]. U [32] je kao posljedica šireg tvrđenja dokazano da kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz \mathbf{B} u prostornu oblast sa C^2 granicom je Lipschitz neprekidno. I u radu [6] je, drugim pristupom, dobijen isti rezultat i dati su dovoljni uslovi za bi-Lipschitz neprekidnost.

Cilj ove disertacije je uopštavanje rezultata iz ravni u prostor \mathbf{R}^n , a u nekim slučajevima i poboljšanje postojećih oslabljenjem uslova glatkosti na granici slike. Konkretno želimo generalizovati na prostor pomenuti rezultat [29], poboljšavajući

navedene posljedice iz rezultata radova [6, 32] u smislu glatkosti slike - dovoljno je da slika ima $C^{1,\alpha}$ granicu. U vezi sa oslabljenjem uslova harmoničnosti želimo pokazati da se tvrđenje iz rada [39] može uopšiti u prostoru za funkcije čiji Laplasijan u slabom smislu pripada prostoru $L^p(\mathbf{B})$, $p > n$, uz to što je dovoljno da granica bude $C^{1,\alpha}$ glatkosti. Ovo posljednje poboljšava i rezultat iz rada [41]. Takođe, razmatraćemo generalizaciju za prostor rezultata iz rada [33].

Struktura disertacije

Rad se sastoji od tri glave, sadrži 12 slika, spisak specijalnih oznaka i spisak literature od 55 bibliografskih jedinica.

Prve dvije glave imaju uvodni karakter i sadrže poznate rezultate, koji su u nekoj mjeri prikazani na original način, zbog modifikacija koje se odnose na potrebe naših razmatranja.

Glava 1 je posvećena rješenju Dirichletovog problema za loptu \mathbf{B} i odgovarajućeg nehomogenog Dirichletovog problema za loptu, odnosno Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine u slabom smislu. Teme su obrađene u toku koji odgovara složenosti problema, ali i imajući u vidu potrebne matematičke sastojke za glavu 3. Tako, prvo su uvedena harmonijska preslikavanja, zatim dokazana je Greenova reprezentacija za funkcije $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}})$ i poslije razmatran (nehomogeni) Dirichletov problem za loptu (u slabom smislu).

U glavi 2 je izložen pregled osnovnih pojmova iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Najprije je dat geometrijski pristup kroz formulaciju pojma modula krivih, a onda i analitički pristup, uz dokaz nekih osnovnih svojstva i uz neke prikladne primjere za tu definiciju. U drugom dijelu glave, data je prednost geometrijskom pristupu. Naime, izučavajući detaljnije modul krivih, utvrdeći njegova svojstva i posmatrajući neke ekstremalne familije krivih (familiju krivih koje spajaju komponente povezanosti *Grötzschovog*, odnosno, *Teichmüllerovog* prstena) dat je dokaz Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja iz \mathbf{B} u sebe.

Glava 3 je najbitniji dio rada. U njoj su predstavljeni autorski rezultati istraživanja, odnosno dokazi hipoteza doktorske disertacije. Uopštena je Hardy-Littlewood teorema i za prostor, kroz dvije različite verzije. U slučaju kada je slika prostorna oblast sa $C^{1,\alpha}$ granicom, dokazana je Lipschitz neprekidnost i kada posmatramo kvazikonformna preslikavanja koja su harmonijska, i kada uslov harmoničnosti (da je Laplasijan jednak nula), zamijenimo uslovom da je Laplasijan iz L^p prostora. U slučaju kada kodomen je prostorna oblast sa C^1 granicom, ukazali smo na primjere zbog kojih ne važi Lipschitz neprekidnost i dokazali Hölder neprekidnost sa uniformnim koeficijentom za tu familiju preslikavanja. Rezultati ove glave se zasnivaju na autorske radove [23, 24] i rezultatima koji su izlagani na 12. Simpozijumu "Mathematics and Applications" 2022, u Beogradu.

Zahvalnost

"Zahvalnost je sjećanje na srce"

Koristim priliku da se zahvalim svim prijateljima i široj porodici koji su mi svojom velikodušnošću, razumijevanjem i savjetima pomogli u toku studija i obogatili moj život.

Prijatna mi je dužnost da se posebno zahvalim mom izuzetnom mentoru prof. dr **Davidu Kalaju** na neprocjenjivim savjetima, strpljenju, podršci i mentorstvu tokom studija i tokom pisanja naučnih radova i ove disertacije. Njegov bogati naučni rad i široko matematičko znanje, koju je nesebično dijelio sa mnom, za mene su u ovom periodu predstavljali veliku inspiraciju i ohrabrenje da marljivo radim.

U toku pisanja doktorske disertacije, preko Erasmus+ projekta, boravio sam u Università di Camerino, Italija. Dugujem iskrenu zahvalnost rukovodstvu Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici koji su mi omogućili da u toku akademske godine intenzivnije radim na pisanju disertacije, kao i profesorima i kolegama asistentima koji su mi u ovom periodu pomogli sa nastavnim obavezama.

Ovaj rad posvećujem mojoj divnoj porodici, čija ljubav i podrška život znače: roditeljima, **Gjeloshu** i **Elizabeti**, za neizmjerne napore i požrtvovanje da me vode ka instinskim vrijednostima i da mi svojim primjerom pokažu pravi put u životu; braći **Dritonu** i **Artonu** koji čine da se uvijek osjećam podržanim i zaštićenim; **Antoneti** za безусловnu sestrinsku ljubav i za sve trenutke na putu ka istoj tituli - doktora; snahi **Violeti** za pažnju i ljubaznost; i **Altei** za svaki pogled i osmjech koji daruje.

Camerino, maj 2023. godine

Anton Gjokaj

Sadržaj

Izvod iz teze	i
Abstract	ii
Predgovor	iii
Popis slika	ix
Spisak specijalnih oznaka	x
1 Laplaceova i Poissonova jednačina	1
1.1 Harmonijske funkcije	1
1.1.1 Definicija i primjeri	1
1.1.2 Teoreme o srednjim vrijednostima za harmonijske funkcije	3
1.1.3 Princip maksimuma za harmonijske funkcije	7
1.2 Greenova reprezentacija	8
1.3 Dirichletov problem za loptu	13
1.4 Poissonovo parcijalna diferencijalna jednačina	18
1.4.1 Slabi izvodi i Sobolevljevi prostor	20
1.4.2 Rieszova teorema o reprezentaciji	24
1.4.3 Egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja	26
2 Kvizikonformna preslikavanja u prostoru	28
2.1 Konformna preslikavanja u prostoru	28
2.2 Definicija kvazikonformnog preslikavanja u prostoru	32
2.2.1 Geometrijska definicija	32
2.2.2 Analitička definicija	35
2.2.3 Primjeri kvazikonformnih preslikavanja	36
2.3 Svojstva modula krivih i Morijeva teorema	37
3 Modul neprekidnosti kvazikonformnih preslikavanja iz B u prostornu oblast Ω	53
3.1 Osnovni pojmovi	54
3.2 Hardy-Littlewood teoreme za prostor	55
3.3 Lipschitz neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja kada je $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$	63
3.4 Lipschitz neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja sa L^p Laplasi- janom kada je $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$	69

3.4.1	Greenova reprezentacija slabog rješenja nehomogenog Dirichletovog zadatka	69
3.4.2	Dokaz Lipschitz neprekidnosti	82
3.5	Uniformna Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja kada je $\partial\Omega \in C^1$	84
3.5.1	Uvod u problem i formulacija teorema	84
3.5.2	Dokazi teorema	85
	Literatura	92
	Biografija	97

Popis slika

1.1	Lema o simetriji	13
2.1	Ilustracija familije krivih $\Delta(E, F; G)$, gdje je E piramida, F cilindar, a G lopta.	38
2.2	Kriva γ_ξ na sferičnom prstenu	39
2.3	Familije krivih Γ_{11} , Γ_{12} i Γ_{21}	44
2.4	Grötzschov (lijevo) i Teuchmüllerov prsten (desno) i odgovarajuće familije krivih $\Gamma_{G_n(s)}$ i $\Gamma_{T_n(s)}$	46
3.1	Ilustracija nejednakosti (3.20) i (3.21)	62
3.2	Konstrukcija preslikavanja h	64
3.3	”Ispravljanje granice”	65
3.4	Ilustracija smjene i nejednakosti korišćenih u (3.40)	72
3.5	Skica grafika funkcije κ	73
3.6	Skica grafika izgladivača u \mathbf{R}^3	80
3.7	Minimalna vrijednost izraza $\ r\eta - \xi\ $, za $0 \leq r < 1$	90

Spisak specijalnih oznaka

\mathbf{N}	–	skup prirodnih brojeva.
n	–	dimenzija Euklidskog prostora $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbf{R}\}$. Sva razmatranja "žive" u ovom prostoru, osim ako drugačije bude naglašeno.
e_1, \dots, e_n	–	standardna baza u \mathbf{R}^n . Na primjer $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.
\mathbf{B}	–	jedinična lopta u \mathbf{R}^n , sa centrom u 0.
S	–	jedinična sfera u \mathbf{R}^n , sa centrom u 0.
$B(x_0, r)$	–	lopta sa centrom u $x_0 \in \mathbf{R}^n$, poluprečnika $r > 0$.
$S(x_0, r)$	–	sfera sa centrom u $x_0 \in \mathbf{R}^n$, poluprečnika $r > 0$.
$\overline{\mathbf{R}}^n$	–	kompaktifikacija jednom tačkom skupa \mathbf{R}^n , tj. skup $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$.
∂A	–	granica skupa $A \subseteq \mathbf{R}^n$.
\overline{A}	–	zatvorenje skupa $A \subseteq \mathbf{R}^n$.
α_n	–	zapremina jedinične lopte \mathbf{B} , $\alpha_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.
$D_j u$	–	$D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.
$D_{ij} u$	–	$D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Specijalno, $D_j^2 := \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.
$D^\alpha u$	–	$D^\alpha u = \frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, gdje je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $ \alpha = \sum \alpha_j$.
$J(x, f)$	–	Jakobijan funkcije f u tački x .
$C(\Omega)$ ($C(\overline{\Omega})$)	–	skup neprekidnih funkcija u Ω ($\overline{\Omega}$).
$C^k(\Omega)$	–	skup funkcija čiji su svi izvodi do k -tog reda ($k \in \mathbf{N}$ ili $k = \infty$) neprekidne funkcije u Ω .
$C^k(\overline{\Omega})$	–	skup funkcija iz $C^k(\Omega)$, čiji svi izvodi do k -tog reda imaju neprekidno produženje u $\overline{\Omega}$.
$C_0^k(\Omega)$	–	skup funkcija iz $C^k(\Omega)$ sa kompaktnim nosačem u Ω .
$C = C(\cdot, \dots, \cdot)$	–	konstanta koja zavisi samo od vrijednosti u zagradi i koja može mijenjati svoju vrijednost od reda do reda.

Ostale oznake biće pojašnjene na mjestu korišćenja.

Glava 1

Laplaceova i Poissonova jednačina

Laplaceova i Poissonova parcijalna diferencijalna jednačina su klasični prototipovi linearnih eliptičkih jednačina. Sekcije 1.1 i 1.3 čine cjelinu u tematskom smislu i posvećene su harmonijskim funkcijama -rješenjima Laplaceove jednačine, i Dirichletovom problemu za loptu. Sekcija 1.2 može služiti kao dodatni i motivacioni materijal za Dirichletov problem, ali i kao pomoćni materijal za Sekciju 1.4, gdje izučavamo Poissonovu (nehomogenu Laplaceovu) jednačinu.

1.1 Harmonijske funkcije

Harmonijske funkcije igraju značajnu ulogu u raznim oblastima matematike i fizike. Termin "harmonijska" potiče iz harmonijskog kretanja tačke na zategnutoj žici. Ovo kretanje se može predstaviti preko funkcija *sinusa* i *kosinusa*, koje se u ovom kontekstu nazivaju harmonicima. U višedimenzionim prostorima, takvo predstavljanje na sferi je moguće ostvariti preko "sferičnih harmonika" - homogenih polinoma sa nulnim Laplasijanom. Otuda korišćenje termina "harmonijska" za sve funkcije sa Laplasijanom jednakim nula.

U ovoj sekciji dajemo njihovu definiciju i primjere, i izučavamo njihova osnovna svojstva, koje u ravni naslijeđuju iz analognih svojstava analitičkih funkcija. Svi rezultati ove sekcije su zasnovani na knjigama [7] i [22].

1.1.1 Definicija i primjeri

Kroz ovaj rad harmonijske funkcije će se uglavnom pojaviti kao funkcije definisane na jediničnoj lopti \mathbf{B} u \mathbf{R}^n . Međutim, kako većina njihovih osobina važi i za druge skupove, posmatraćemo ih kao funkcije koje su definisane na oblasti (otvorenom i povezanom skupu) $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. U slučaju da se posmatra harmonijska funkcija na nekom proizvoljnom zatvorenom skupu, onda će to podrazumijevati da je funkcija harmonijska u nekoj otvorenoj okolini tog skupa.

Definicija 1.1. *Neka je $u : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Za u kažemo da je harmonijska funkcija ako zadovoljava Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu*

$$\Delta u := D_1^2 u + \dots + D_n^2 u = 0. \quad (1.1)$$

Primijetimo da u jednodimenzionom slučaju jedine harmonijske funkcije su prave, tj. $u(x) = ax + b$, za $a, b \in \mathbf{R}$.

U prostoru $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ harmonijske funkcije u nekoj prostopovezanoj oblasti¹ se pojavljuju (isključivo) kao realni i imaginarni dio analitičkih funkcija. Na primjer²: $u(x, y) = \Re(z^2) = x^2 - y^2$, $v = \Im(z^2) = 2xy$ su harmonijske funkcije u oblasti $\Omega = \mathbf{R}^2$; analitička funkcija ze^z "proizvodi" harmonijske funkcije $u(x, y) = e^x(x \cos y - x \sin(y))$ i $v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin(y))$, itd.

Za \mathbf{R}^3 funkcija $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$ je primjer jedne harmonijske funkcije. Jasno je da u višedimenzionim prostorima harmonijske funkcije čine širu klasu u odnosu na jednodimenzioni slučaj. U prilog tome idu i zapažanja koja slijede.

Linearnost operatora Δ u prostoru $C^2(\Omega)$ povlači da je zbir harmonijskih funkcija, kao i proizvod skalara sa harmonijskom funkcijom takođe harmonijska funkcija. Dalje, primijetimo da za $a \in \mathbf{R}^n$ i $\tilde{u}(x) = u(x - a)$ važi relacija

$$\Delta \tilde{u}(x) = \Delta u(x - a), \quad (1.2)$$

kao i da za $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i $u_r(x) = u(rx)$ važi

$$\Delta u_r(x) = r^2 \Delta u(rx). \quad (1.3)$$

Posljednje dvije relacije povlače sljedeća tvrđenja, na osnovu kojih možemo generisati nove primjere harmonijskih funkcija:

- *Translacija harmonijske funkcije je harmonijska funkcija:*
Ako je $u : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ harmonijska funkcija, tada je \tilde{u} harmonijska funkcija na skupu $\Omega + a = \{x + a : x \in \Omega\}$.
- *Dilatacija harmonijske funkcije je harmonijska funkcija:*
Ako je $u : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ harmonijska funkcija, tada je u_r harmonijska funkcija na skupu $\frac{1}{r}\Omega = \{\frac{1}{r}x : x \in \Omega\}$.

Štaviše, može se pokazati da važi $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$, za $u \in C^2(\Omega)$ i T ortogonalno preslikavanje, što povlači da je $u \circ T$ harmonijska u $T^{-1}(\Omega)$ (vidjeti [7, str.3]). Dakle, *rotacija harmonijske funkcije je harmonijska funkcija*. Zbog

¹Za oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ kažemo da je prostopovezana ako je njena granica povezan skup u $\overline{\mathbf{C}}$.

²U slučaju $n = 2$ za argumente funkcije koristimo prirodnije oznake x i y , umjesto x_1 i x_2

navedenog slijedi da je prirodno da se traže radijalna rješenja, tj. rješenja oblika $u(x) = v(r)$, gdje je $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Odredimo v tako da $\Delta u = 0$. Kako je

$$D_j r = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_j = \frac{x_j}{r},$$

to je

$$D_j u = v'(r) \frac{x_j}{r},$$

i slično

$$D_j^2 u = v''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} + x_j \frac{-1}{r^2} \frac{x_j}{r} \right) = v''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right),$$

za $j = \overline{1, n}$. Prema tome,

$$\Delta u = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n-1}{r} \right) = 0.$$

Rješavanjem date jednačine dobijamo da je

$$v(r) = \begin{cases} a \log(r) + b, & n = 2, \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b, & n \geq 3, \end{cases}$$

odnosno

$$u(x) = \begin{cases} a \log(\|x\|) + b, & n = 2, \\ \frac{a}{\|x\|^{n-2}} + b, & n \geq 3, \end{cases} \quad (1.4)$$

gdje su a, b proizvoljne realne konstante. Navedene funkcije su harmonijske u oblasti $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, i biće značajne u razmatranjima koja slijede.

Ovu subsekciju završavamo sa prirodnom definicijom harmonijske vektorske funkcije.

Definicija 1.2. *Neka je $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada za f kažemo da je harmonijska ako su sve realno vrijednosne funkcije $f_j : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j = \overline{1, m}$, harmonijske.*

1.1.2 Teoreme o srednjim vrijednostima za harmonijske funkcije

U vezi sa harmonijskim preslikavanjima od opšte koristi su takozvani Greenovi identiteti, jer se preko njih nalazi integralna veza između funkcije, Laplasijana i gradijenta. Kao početno polazište služiće nam dobro poznata teorema o divergenciji u \mathbf{R}^n :

Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ograničen otvoren skup sa glatkom granicom i $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ glatko vektorsko polje u okolini $\overline{\Omega}$. Tada važi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle ds, \quad (1.5)$$

gdje je $\operatorname{div} \mathbf{w} = D_1 \mathbf{w} + \dots + D_n \mathbf{w}$, \mathbf{n} je spoljašnji vektor normale na $\partial\Omega$, a ds je $(n-1)$ dimenzioni površinski element u $\partial\Omega$.

Napominjemo da teorema za takozvane regularne oblasti, kao što je lopta, važi i pod slabijim uslovima glatkosti za vektorsko polje (vidjeti [42, Sekcije 4.3 i 4.10]).

Primijetimo da uzimajući $\mathbf{w} = u \nabla v$ imamo da je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &= D_1(u D_1 v) + \dots + D_n(u D_n v) \\ &= D_1 u D_1 v + u D_1^2 v + \dots + D_n u D_n v + u D_n^2 v \\ &= u \Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \end{aligned}$$

odakle slijedi poznati **Prvi Greenov identitet**

$$\int_{\Omega} u \Delta v dV + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV = \int_{\partial\Omega} u D_{\mathbf{n}} v ds, \quad (1.6)$$

gdje je $D_{\mathbf{n}} v(\xi) := \langle \nabla v(\xi), \mathbf{n}(\xi) \rangle$. Zamijenjujući mjesta funkcijama u i v , i oduzimajući od (1.6) odgovarajući identitet, dobijamo takozvani **Drugi Greenov identitet**

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} (u D_{\mathbf{n}} v - v D_{\mathbf{n}} u) ds, \quad (1.7)$$

za $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Specijalno, ako je u i harmonijska funkcija, uzimajući $v \equiv 1$ iz (1.6) slijedi

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle ds = \int_{\partial\Omega} D_{\mathbf{n}} u ds = 0. \quad (1.8)$$

Dokazujemo sada teoremu o srednjim vrijednostima. Formulisaćemo je i dokazati za slučaj jedinične lopte \mathbf{B} , a posljedično pokazati da tvrdenje važi za proizvoljnu loptu $B(a, r)$, $a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$.

Teorema 1.3. *Neka je u harmonijska funkcija u $\overline{\mathbf{B}}$. Tada je*

$$u(0) = \int_S u(\xi) d\sigma(\xi), \quad (1.9)$$

gdje je σ normalizovana³ mjera na jediničnoj sferi S .

³Tako da je $\mu_{\sigma}(S) = 1$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Posmatramo oblast $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \epsilon < \|x\| < 1\}$ i harmonijsku funkciju $v(x) = \|x\|^{2-n}$ iz (1.4), za $n > 2$. Skup Ω je izabran na ovaj način kako bismo obezbjedili da je funkcija v harmonijska u $\bar{\Omega}$. Zbog toga lijeva strana *Drugog Greenovog identiteta* (1.7) je jednaka nuli. Što se tiče desne strane (1.7) primijetimo da u našem slučaju granica skupa Ω se sastoji od dvije sfere: od jedinične sfere S koja je orjentisana spoljašnjim normalama i od sfere $\epsilon S := S(0, \epsilon)$, poluprečnika ϵ , koja je orjentisana unutrašnjim normalama (spoljašnjost skupa Ω). Dalje, imamo da je $v|_S = 1$ i $v|_{\epsilon S} = \epsilon^{2-n}$. Jednostavnim računom dobijamo da je $\nabla v(x) = (2-n)\|x\|^{-n}x$, pa posljedično $\nabla v(x)|_S = (2-n)x$ i $\nabla v|_{\epsilon S} = (2-n)\epsilon^{-n}x$. Kako je orjentisani jedinični vektor normale \mathbf{n} u tački x sfere S jednak x , a sfere ϵS jednak $-\frac{x}{\epsilon}$, na osnovu (1.7) imamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \left[u(\xi) \langle (2-n)\xi, \xi \rangle - 1 \cdot \langle \nabla u(\xi), \xi \rangle \right] ds(\xi) \\ &+ \int_{\epsilon S} \left[u(\xi) \left\langle (2-n)\epsilon^{-n}\xi, -\frac{\xi}{\epsilon} \right\rangle - \epsilon^{2-n} \cdot \left\langle \nabla u(\xi), -\frac{\xi}{\epsilon} \right\rangle \right] ds(\xi) \\ &= (2-n) \int_S u(\xi) ds(\xi) - \int_S \langle \nabla u(\xi), \xi \rangle ds(\xi) \\ &- (2-n)\epsilon^{1-n} \int_{\epsilon S} u(\xi) ds(\xi) - \epsilon^{2-n} \int_{\epsilon S} \left\langle \nabla u(\xi), -\frac{\xi}{\epsilon} \right\rangle ds(\xi). \end{aligned}$$

Na osnovu (1.8), drugi i četvrti integral su jednaki nuli pa važi

$$\int_S u ds = \epsilon^{1-n} \int_{\epsilon S} u ds = \epsilon^{1-n} \mu_s(\epsilon S) u(\epsilon \xi_\epsilon),$$

za neko $\xi_\epsilon \in S$, na osnovu teoreme o srednjim vrijednostima integrala. Kako je $\epsilon^{1-n} \mu_s(\epsilon S) = \mu_s(S)^4$, to prethodna jednakost postaje

$$\int_S u(\xi) d\sigma(\xi) = u(\epsilon \xi_\epsilon).$$

Puštajući $\epsilon \rightarrow 0$, kako je funkcija u neprekidna u tački $x = 0$, desna strana jednakosti teži ka $u(0)$, što je trebalo dokazati.

U slučaju $n = 2$ za funkciju v treba uzeti radijalnu funkciju $u(x) = \log \|x\|$ iz (1.4). \square

⁴Površinski element sfere poluprečnika r u \mathbf{R}^n je jednak

$$r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}) d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-1}.$$

Navedena teorema se može jednostavno uopštiti i na harmonijske funkcije u na $\overline{B}(a, r)$, posmatrajući u (1.9) funkciju $\tilde{u}(x) = u(a + rx) : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}$ koja se dobija kao translacija i dilatacija harmonijske funkcije, pa je harmonijska na $\overline{\mathbf{B}}$, na osnovu (1.2) i (1.3).

Posljedica 1.4. *Neka je u harmonijska funkcija u $\overline{B}(a, r)$. Tada je*

$$u(a) = \int_S u(a + r\xi) d\sigma(\xi).$$

Dajemo sada i osobinu srednje vrijednosti harmonijskih funkcija i u odnosu na zapreminski integral po \mathbf{B} . Za dokaz nam je potrebno prethodno tvrđenje i smjena promjenljivih preko sfernih koordinata (vidjeti [56, Glava 8, Zadatak 6]:

$$\int_{B(x_0, \rho)} f(x) dx = n\alpha_n \int_0^\rho r^{n-1} \int_S f(x_0 + r\xi) d\sigma(\xi) dr, \quad (1.10)$$

gdje je α_n oznaka koju ćemo kroz rad koristiti za zapreminu jedinične lopte \mathbf{B} .

Teorema 1.5. *Neka je u harmonijska u $\overline{\mathbf{B}}$. Tada*

$$u(0) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} u(x) dx.$$

Dokaz. Na osnovu (1.10) i Teoreme 1.3 o srednjim vrijednostima jednostavno dobijamo

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} u(x) dx = n \int_0^1 r^{n-1} \int_S u(r\xi) d\sigma(\xi) dr = n \int_0^1 r^{n-1} u(0) dr = u(0).$$

□

Slično kao ranije možemo teoremu uopštiti i na harmonijske funkcije na $\overline{B}(a, r)$. Koristeći smjenu promjenljivih $a + rx = y$ i činjenicu da $V(B(a, r)) = r^n \alpha_n$, proizilazi sljedeće tvrđenje.

Posljedica 1.6. *Neka je u harmonijska u $\overline{B}(a, r)$. Tada*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a, r))} \int_{B(a, r)} u(x) dx.$$

1.1.3 Princip maksimuma za harmonijske funkcije

Bitna posljedica teoreme o srednjim vrijednostima je princip maksimuma za harmonijske funkcije. Ispostavlja se da u oblasti Ω harmonijska funkcija u dostiže maksimum i minimum u unutrašnjosti jedino u slučaju konstantnih funkcija.

Teorema 1.7. *Neka je Ω oblast, u realna harmonijska funkcija u u Ω koja dostiže maksimum (minimum) u Ω . Tada je u konstantna.*

Dokaz. Pretpostavimo da u dostiže maksimum $M \in \mathbf{R}$ u unutrašnjoj tački oblasti Ω . Neka je $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Dokazaćemo da je A otvoren i zatvoren, što povlači da je $A = \Omega$ zbog povezanosti skupa Ω^5 .

Zatvorenost skupa A slijedi iz činjenice da je A inverzna slika jednočlanog skupa $\{M\}$ pri neprekidnom preslikavanju u .

Dokazujemo da je A otvoren u Ω . Neka je $a \in A$ i $r > 0$, td. $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Ako bi u nekoj tački $x \in B(a, r)$, važilo $u(x) < M$, tada bi na osnovu neprekidnosti funkcije u i Posljedice 1.6 o srednjim vrijednostima harmonijskih funkcija slijedilo da važi

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a, r))} \int_{B(a, r)} u(x) dx < M,$$

što nije moguće. Dakle, u nekoj maloj okolini tačke a funkcija u uzima konstantnu vrijednost M , što povlači da je $B(a, r) \subset A$. Dakle, A je otvoren u Ω . Konačno $A = \Omega$, pa je $u \equiv M$ u Ω .

Analogno i za minimum, ili koristeći funkciju $-u$ i dokazano tvrđenje za slučaj maksimuma. \square

U slučaju da je harmonijska funkcija u i neprekidna na zatvorenju ograničenog skupa Ω , tada se, na osnovu poznate Weierstrassove teoreme, globalni ekstremumi dostižu u nekoj tački skupa $\overline{\Omega}$. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da za nekonstantne harmonijske funkcije ta tačka se nalazi na granici.

Posljedica 1.8. *Neka je Ω ograničena oblast, u neprekidna funkcija na $\overline{\Omega}$ i harmonijska u Ω . Tada funkcija u svoju najveću i najmanju vrijednost na $\overline{\Omega}$ dostiže na granici, tj.*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Prethodno tvrđenje je naročito važno zbog toga što povlači da u ograničenoj zatvorenoj oblasti harmonijska funkcija je određena vrijednostima na granici. Naime, ako postoje dvije harmonijske funkcije u i v , td. $u \equiv v$ na $\partial\Omega$, tada je $u - v$ harmonijska funkcija koja se anulira na granici, što na osnovu Posljedice 1.8 znači da je $0 \leq u - v \leq 0$ u Ω , odnosno $u \equiv v$.

⁵Skup Ω je povezan ako i samo ako jedini otvoreni i zatvoreni skupovi u Ω su Ω i \emptyset .

Primjedba 1.9. *Primijetimo da uslov povezanosti u Posljedici 1.8 nije neophodan, jer se teorema može primijeniti nad odgovarajućim komponentama povezanosti skupa Ω . Takođe, postoje modifikovane verzije principa maksimuma i za neograničene skupove, ali kako one nijesu značajne za ovaj rad, nećemo ih formulisati. Svakako, primjer funkcija $u(x) = 0$ i $v(x) = x_1$ u $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$ pokazuje da u neograničenoj oblasti harmonijska funkcija nije određena vrijednostima na granici.*

1.2 Greenova reprezentacija

Materijal koji slijedi nije neophodan, ali služiće nam kao motivacija i uvod u sljedeću sekciju. Rezultati ove sekcije su zasnovani na materijalima [12, Sekcija 2.2] i [22, Sekcija 2.4].

Posmatramo Dirichletov problem za loptu:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \mathbf{B}, \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dakle, tražimo harmonijsku funkciju u u \mathbf{B} , koja je neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$, tako da se na S poklapa sa neprekidnom funkcijom f .

Uporedo, materijal koji slijedi je bitan i za rješavanje nehomogenovog Dirichletov problem za loptu:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = g(x), & x \in \mathbf{B}, \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S. \end{cases} \quad (1.12)$$

U našem radu, usmjereni prema dokazivanju rezultata u glavi 3, izučavaćemo takozvano slabo rješenje ovog problema, o čemu ćemo detaljnije u Sekciji 1.4.

Cilj nam je da vrijednost funkcije $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}})$ u proizvoljnoj tački $x \in \mathbf{B}$ predstavimo preko vrijednosti te funkcije na S i preko Laplasijana funkcije u na \mathbf{B} , što će uopštiti u više oblika Teoreme o srednjim vrijednostima. Motivisani pristupom kod Teoreme 1.3, posmatraćemo takođe oblik funkcije iz (1.4), ali tako što ćemo vršiti translaciju, odnosno obezbijediti da singularna tačka bude neka proizvoljna fiksirana tačka $x \in \mathbf{B}$, a ne $x = 0$. Uvodimo *normalizovano fundamentalno rješenje Laplaceove jednačine*:

$$\Gamma(y - x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \|y - x\|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \frac{1}{\|y - x\|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (1.13)$$

Jasno, Γ je harmonijska funkcija po y za $y \neq x$, na osnovu (1.2). Razlog odabira navedenih konstanti kod funkcije Γ biće otkriven kasnije.

Neka je $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}})$, $x \in \mathbf{B}$. Biramo $\epsilon > 0$, tako da $\overline{B}(x, \epsilon) \subset \mathbf{B}$. Primijenjujući

Drugu Greenovu formulu (1.7) na oblast $\Omega_\epsilon = \mathbf{B} \setminus B(x, \epsilon)$, za $v(y) = \Gamma(y - x)$ imamo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon} \left(u(y) \Delta \Gamma(y - x) - \Gamma(y - x) \Delta u(y) \right) dy \\ & \equiv \int_{\partial \Omega_\epsilon} \left(u(\xi) D_{\mathbf{n}} \Gamma(\xi - x) - \Gamma(\xi - x) D_{\mathbf{n}} u(\xi) \right) ds(\xi). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Kako je $\Gamma(y - x)$ harmonijska u datoj oblasti to je $\Delta \Gamma(y - x) = 0$. Puštajući $\epsilon \rightarrow 0$ dobijamo da lijeva strana teži ka $\int_{\mathbf{B}} -\Gamma(y - x) \Delta u(y) dy$, dok za desnu stranu dokazaćemo da važe sljedeće granične vrijednosti

$$\int_{S(x, \epsilon)^-} u(\xi) D_{\mathbf{n}} \Gamma(\xi - x) ds(\xi) \rightarrow -u(x), \quad (1.15)$$

$$\int_{S(x, \epsilon)^-} -\Gamma(\xi - x) D_{\mathbf{n}} u(\xi) ds(\xi) \rightarrow 0, \quad (1.16)$$

gdje je $S(x, \epsilon)$ sfera orjentisana unutrašnjim normalama. Na osnovu navedenog, nalazimo da je

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_S \left(u(\xi) D_{\mathbf{n}} \Gamma(\xi - x) - \Gamma(\xi - x) D_{\mathbf{n}} u(\xi) \right) ds(\xi) \\ &+ \int_{\mathbf{B}} \Gamma(y - x) \Delta u(y) dy. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dokaz za (1.15):

Primijetimo da je

$$\nabla_y \Gamma(y - x) = \frac{1}{n\alpha_n} \frac{y - x}{\|y - x\|^n},$$

kao i da je $\mathbf{n}(y) = -\frac{y-x}{\|y-x\|}$, za $y \in S(x, \epsilon)$. Zato

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}} \Gamma(y - x) &= \langle \nabla_y \Gamma(y - x), \mathbf{n} \rangle \\ &= \frac{-1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|y - x\|^{n+1}} \langle y - x, y - x \rangle \\ &= \frac{-1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|y - x\|^{n-1}}; \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_{S(x, \epsilon)^-} u(\xi) D_{\mathbf{n}} \Gamma(\xi - x) ds(\xi) &= \frac{-1}{n\alpha_n} \int_{S(x, \epsilon)^-} \frac{1}{\|\xi - x\|^{n-1}} u(\xi) ds(\xi) \\ &= \frac{-1}{n\alpha_n \epsilon^{n-1}} \int_{S(x, \epsilon)^-} u(\xi) ds(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{n\alpha_n\epsilon^{n-1}}\mu_s(S(x,\epsilon))u(\xi_\epsilon) = \\
 &= \frac{-1}{n\alpha_n}\mu_s(S)u(\xi_\epsilon) = -u(\xi_\epsilon),
 \end{aligned}$$

za neko $\xi_\epsilon \in S(x,\epsilon)$. Posljednja jednakost sljedi iz poznate veze između zapremine lopte \mathbf{B} i površine sfere S : $n \cdot \alpha_n = \mu_s(S)$ (vidjeti [7, Appendix A1].) Puštajući $\epsilon \rightarrow 0$, iz neprekidnosti funkcije u vidimo da važi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S(x,\epsilon)^-} D_{\mathbf{n}}\Gamma(\xi - x)u(\xi)ds(\xi) = -u(x),$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz za (1.16):

Koristeći Cauchy-Schwarz nejednakost za ocjenu izraza $|D_{\mathbf{n}}u| = |\langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle|$ i činjenicu da je $u \in C^1(\overline{\mathbf{B}})$ proizilazi da važi

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{S(x,\epsilon)^-} \Gamma(\xi - x)D_{\mathbf{n}}u(\xi)ds(\xi) \right| &\leq \frac{1}{n\alpha_n(n-2)} \int_{S(x,\epsilon)^-} \frac{1}{\|\xi - x\|^{n-2}} |D_{\mathbf{n}}u(\xi)| ds(\xi) \\
 &\leq \sup_{c \in S(x,\epsilon)} \|\nabla u(c)\| \frac{1}{n(n-2)\alpha_n\epsilon^{n-2}} \int_{S(x,\epsilon)} ds(\xi) \\
 &\leq C \frac{1}{n(n-2)\alpha_n\epsilon^{n-2}} n\alpha_n\epsilon^{n-1} \\
 &= \frac{C}{n-2}\epsilon \rightarrow 0, \text{ kada } \epsilon \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

čime je dokaz za (1.16) završen.

Imajući u vidu Dirichletov problem (1.11) i nehomogeni Dirichletov problem (1.12), primijetimo da na desnoj strani relacije (1.17):

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_S (u(\xi)D_{\mathbf{n}}\Gamma(\xi - x) - \Gamma(\xi - x)D_{\mathbf{n}}u(\xi))ds(\xi) \\
 &\quad + \int_{\mathbf{B}} \Gamma(y - x)\Delta u(y)dy,
 \end{aligned}$$

su nam poznate vrijednosti $u|_S$ i $\Delta u|_{\mathbf{B}}$. Međutim, nije nam poznata vrijednost $D_{\mathbf{n}}u|_S$. Da bismo taj član izrazili preko poznatih funkcija, potrebno je da se za $x \in \mathbf{B}$ konstruiše funkcija $h_x(y)$, koju nazivamo *korektor funkcijom* i koja zadovoljava sljedeće uslove:

$$\begin{cases} \Delta_y h_x(y) = 0, & y \in \mathbf{B}, \\ h_x(\xi) = \Gamma(\xi - x), & \xi \in S. \end{cases}$$

Koristeći opet *Drugi Greenov identitet*, kao što smo radili za (1.14) osim što sada posmatramo $\Omega = \mathbf{B}$, izvedemo jednakost

$$\int_{\mathbf{B}} \left(u(y) \Delta_y h_x(y) - h_x(y) \Delta u(y) \right) dy = \int_S \left(u(\xi) D_{\mathbf{n}} h_x(\xi) - h_x(\xi) D_{\mathbf{n}} u(\xi) \right) ds(\xi),$$

što kombinujući sa uslovima za korektor funkciju $h_x(y)$ daje

$$0 = \int_S \left(u(\xi) D_{\mathbf{n}} h_x(\xi) - \Gamma(\xi - x) D_{\mathbf{n}} u(\xi) \right) ds(\xi) + \int_{\mathbf{B}} h_x(y) \Delta u(y) dy. \quad (1.18)$$

Oduzimanjem jednačine (1.18) od jednačine (1.17), dobijamo

$$u(x) = \int_S \left(D_{\mathbf{n}} \Gamma(\xi - x) - D_{\mathbf{n}} h_x(\xi) \right) u(\xi) ds(\xi) + \int_{\mathbf{B}} \left(\Gamma(y - x) - h_x(y) \right) \Delta u(y) dy.$$

Označavajući $G(x, y) := \Gamma(y - x) - h_x(y)$, prethodnu relaciju zapisujemo sljedećom formulom

$$u(x) = \int_S D_{\mathbf{n}} G(x, \xi) u(\xi) ds(\xi) + \int_{\mathbf{B}} G(x, y) \Delta u(y) dy. \quad (1.19)$$

Funkciju $G(x, y)$ nazivamo Greenovom funkcijom za loptu \mathbf{B} . Ostaje da se odredi funkcija $h_x(y)$ za \mathbf{B} .

Fiksiramo $x \in \mathbf{B}$. Zbog uslova $h_x(y) = \Gamma(y - x)$ za $y \in S$, a kako $\Gamma(y - x)$ zavisi samo od vrijednosti izraza $\|y - x\|$, transformisaćemo taj izraz za $\|y\| = 1$, kako bismo dobili harmonijsku funkciju po y i tako konstruisali funkciju $h_x(y)$. Jednostavno dobijamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y\|^2 - 2\langle y, x \rangle + \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\langle y, x \rangle + 1 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - 2\langle y, x \rangle + 1 \\ &= \left\| \|x\|y \right\|^2 - 2 \left\langle \|x\|y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 \\ &= \left\| \|x\|y - \frac{x}{\|x\|} \right\|^2, \end{aligned}$$

odnosno

$$\|y - x\| = \left\| \|x\|y - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|, \quad \text{za } \|y\| = 1. \quad (1.20)$$

Primijetimo da za fiksirano $x \in \mathbf{B} \setminus \{0\}$, tačka $\frac{x}{\|x\|^2}$ je van jedinične lopte, pa funkcija

$$h_x(y) = \Gamma \left(\left\| \|x\|y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\| \right) = \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \frac{1}{\|x\|^{n-2} \left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^{n-2}} \quad (1.21)$$

nema singularitet u \mathbf{B} , beskonačno puta je diferencijabilna i harmonijska po y , kao kompozicija harmonijske funkcije, dilatacije i translacije. Dakle,

$$G(x, y) = \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \left(\frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} - \frac{1}{\|x\|^{n-2}\|y-\frac{x}{\|x\|^2}\|^{n-2}} \right). \quad (1.22)$$

Sada smo u mogućnosti da odredimo i izraz $D_{\mathbf{n}}G(x, \xi)$ iz (1.19) i da tako eksplicitno predstavimo funkciju u . Kao što smo i ranije primijetili, važi

$$\nabla_y \Gamma(y-x) = \frac{1}{n\alpha_n} \frac{y-x}{\|y-x\|^n},$$

pa je

$$\begin{aligned} \nabla h_x(y) &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{\|x\|y - \frac{x}{\|x\|}}{\left\| \|x\|y - \frac{x}{\|x\|} \right\|^n} \cdot \|x\| \\ &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{\|x\|^2 y - x}{\left\| \|x\|y - \frac{x}{\|x\|} \right\|^n}, \end{aligned}$$

odnosno za $y = \xi \in S$

$$\nabla h_x(\xi) = \frac{1}{n\alpha_n} \frac{\|x\|^2 \xi - x}{\|\xi - x\|^n},$$

na osnovu (1.20). Kako je $\mathbf{n}(\xi) = \xi$, za $\xi \in S$, nalazimo da za $x \in \mathbf{B}$ važi

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}}G(x, \xi) &= D_{\mathbf{n}}\Gamma(\xi-x) - D_{\mathbf{n}}h_x(\xi) \\ &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|\xi-x\|^n} \langle \xi-x, \xi \rangle - \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|\xi-x\|^n} \langle \|x\|^2 \xi - x, \xi \rangle \\ &= \frac{1}{n\alpha_n \|\xi-x\|^n} \left(\|\xi\|^2 - \langle x, \xi \rangle - \|\xi\|^2 \|x\|^2 + \langle x, \xi \rangle \right) \\ &= \frac{\|\xi\|^2 (1 - \|x\|^2)}{n\alpha_n \|\xi-x\|^n} \\ &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x-\xi\|^n}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Konačno, iz (1.19), (1.22) i (1.23) imamo Greenovu reprezentaciju izraženu formulom

$$u(x) = \int_S P(x, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi) + \int_{\mathbf{B}} G(x, y) \Delta u(y) dy, \quad (1.24)$$

gdje je $P : \mathbf{B} \times S \rightarrow \mathbf{R}$, $P(x, \xi) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x-\xi\|^n}$ takozvano *Poissonovo jezgro*, a σ normalizovana mjera na sferi S .

Primijetimo da ako je funkcija u i harmonijska onda važi sljedeća prezentacija

$$u(x) = \int_S P(x, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi). \quad (1.25)$$

1.3 Dirichletov problem za loptu

Rezultati ove sekcije su klasični, i kao kod prve sekcije baziramo se na pristup iz [7].

Bavimo se rješenjem, već pomenutog, Dirichletovog problema (1.11) za loptu

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \mathbf{B}, \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S. \end{cases}$$

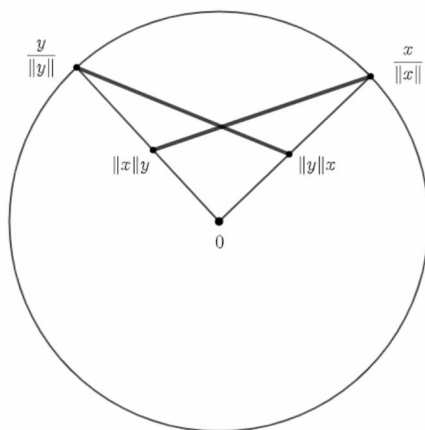
za $u \in C^2(\mathbf{B}) \cap C(\overline{\mathbf{B}})$.

Relacija (1.25) ne daje odgovor na pitanje egzistencije, već u slučaju potvrđnog odgovora daje reprezentaciju tražene harmonijske funkcije u (koja zadovoljava Greenove identitete), što je razlog više da pokušamo dokazati da sa relacijom (1.25) je zaista dato rješenje Dirichletovog zadatka, koje u tom slučaju je jedinstveno, zbog navedene reprezentacije. Svakako, jedinstvenost slijedi i iz Posljedice 1.8 i komentara koji slijedi poslije nje.

Slijedi jedan jednostavan i koristan rezultat, naročito za razmatranja koja se tiču Poissonovog jezgra i Greenove funkcije.

Lema 1.10. [Lema o simetriji] Za nenulte vektore $x, y \in \mathbf{R}^n$ imamo da je

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|.$$



Slika 1.1: Lema o simetriji

Dokaz. Dokazujemo jednakost kvadriranih izraza sa jedne i druge strane. Naime, važi

$$\left\langle \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x, \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\rangle = 1 - 2\langle y, x \rangle + \|y\|^2\|x\|^2$$

$$= \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y, \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\rangle,$$

pa je i tražena jednakost ispunjena. \square

Definišemo sada *Poissonov integral* neprekidne funkcije f na S na sljedeći način

$$P[f](x) := \int_S P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi).$$

Kroz sljedeće dvije leme dajemo osnovna svojstva Poissonovog jezgra.

Lema 1.11. *Neka je $\xi \in S$. Tada je Poissonovo jezgro $P(x, \xi) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-\xi\|^n}$ harmonijska funkcija po x u $\mathbf{R}^n \setminus \{\xi\}$.*

Dokaz. Zapisaćemo Poissonovo jezgro u obliku proizvoda

$$P(x, \xi) = (1 - \|x\|^2) \cdot \|x - \xi\|^{-n},$$

i primijeniti formulu

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u.$$

Primijetimo da za $u(x) = 1 - \|x\|^2$ važi

$$\nabla u(x) = -2x, \quad \Delta u(x) = -2n;$$

dok za $v(x) = \|x - \xi\|^{-n}$ važi

$$\begin{aligned} \nabla_x v(x) &= -n\|x - \xi\|^{-n-2}(x - \xi), \\ \Delta_x v(x) &= n(n+2)\|x - \xi\|^{-n-4}\|x - \xi\|^2 - n^2\|x - \xi\|^{-n-2} \\ &= 2n\|x - \xi\|^{-n-2}. \end{aligned}$$

Prema tome važi

$$\begin{aligned} \Delta_x P(x, \xi) &= (1 - \|x\|^2) \cdot 2n\|x - \xi\|^{-n-2} \\ &\quad + 2n\|x - \xi\|^{-n-2}(2\|x\|^2 - 2\langle x, \xi \rangle) - 2n\|x - \xi\|^{-n} \\ &= 2n\|x - \xi\|^{-n-2} (1 - \|x\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle x, \xi \rangle - \|x - \xi\|^2) \\ &= 2n\|x - \xi\|^{-n-2} (1 + \|x\|^2 - 2\langle x, \xi \rangle - \|x\|^2 + 2\langle x, \xi \rangle - 1) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, Poissonovo jezgro $P(x, \xi)$ je harmonijska funkcija po x , za $x \neq \xi$. \square

Lema 1.12. *Za Poissonovo jezgro $P(x, \xi)$ važe sljedeća svojstva:*

a) *Za svako $\eta \in S$ i svako $\delta > 0$ važi*

$$\int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| > \delta\}} P(x, \xi) d\sigma(\xi) \rightarrow 0, \quad \text{kada } x \rightarrow \eta, x \in \mathbf{B}.$$

b) $\int_S P(x, \xi) d\sigma(\xi) = 1$, za $x \in \mathbf{B}$, odnosno $P[1](x) = 1$.

Dokaz.

a) Neka je $\eta \in S$ i $\delta > 0$. Za x td. $\|x - \eta\| < \delta < \|\xi - \eta\|$ važi sljedeća ocjena

$$\|x - \xi\|^n \geq \|x - \eta + \eta - \xi\|^n \geq (\|\xi - \eta\| - \|x - \eta\|)^n \geq (\delta - \|x - \eta\|)^n,$$

pa je

$$0 \leq \int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| > \delta\}} P(x, \xi) d\sigma(\xi) \leq \frac{1 - \|x\|^2}{(\delta - \|x - \eta\|)^n} \int_S d\sigma(\xi) \rightarrow \frac{0}{(\delta - 0)^n} 1 = 0,$$

za $x \rightarrow \eta$, jer $\|x\| \rightarrow \|\eta\| = 1$.

b) Slijedi direktno iz relacije (1.25), za $u \equiv 1$. Dokazaćemo je i ne koristeći materijal iz prethodne sekcije (budući da funkcija u u tom slučaju mora zadovoljavati uslove glatkosti za Greenove identitete).

Za $x = 0$ imamo da je $P(0, \xi) = 1$, pa je tvrđenje očigledno tačno.

Neka je $x \in \mathbf{B} \setminus \{0\}$. Primijetimo da na osnovu leme simetrije, za $\xi \in S$, imamo da je

$$P(x, \xi) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} = \frac{1 - \|\xi\|^2 \|x\|^2}{\|\|\xi\|x - \frac{\xi}{\|\xi\|}\|^n} = \frac{1 - \|(\|x\|\xi)\|^2}{\|\|x\|\xi - \frac{x}{\|x\|}\|^n} = P\left(\|x\|\xi, \frac{x}{\|x\|}\right).$$

Posmatrajući funkciju $P(\|x\|\xi, \frac{x}{\|x\|})$ kao funkciju po ξ , zaključujemo da je ona harmonijska u \mathbf{B} (kao translacija i dilatacija harmonijske), pa na osnovu Teoreme 1.3 o srednjim vrijednostima zaključujemo da je

$$\int_S P(x, \xi) d\sigma(\xi) = \int_S P\left(\|x\|\xi, \frac{x}{\|x\|}\right) d\sigma(\xi) = P\left(0, \frac{x}{\|x\|}\right) = 1.$$

□

Sljedeća teorema je centralno tvrđenje ove sekcije. Na osnovu rezultata prethodne dvije leme, dajemo potvrđan odgovor na Dirichletov problem za loptu \mathbf{B} .

Teorema 1.13. *Neka je $f \in C(S)$. Definišemo $u : \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{R}$ sa*

$$u(x) = \begin{cases} P[f](x), & x \in \mathbf{B}, \\ f(x), & x \in S. \end{cases} \quad (1.26)$$

Tada je u neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$ i harmonijska u \mathbf{B} .

Dokaz. Funkcija u je harmonijska u \mathbf{B} jer

$$\Delta u(x) = \Delta_x \int_S P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_S \Delta_x P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_S 0 d\sigma(\xi) = 0.$$

Dokazujemo neprekidnost funkcije u na S i pretpostavimo da je $f \not\equiv 0$, u suprotnom $u \equiv 0$ u $\overline{\mathbf{B}}$ i tvrdjenje slijedi trivijalno. Neka $\eta \in S$ i $\epsilon > 0$. Biramo $\delta_1 > 0$ tako da je

$$|f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{za } \xi \in S \cap \{\|\xi - \eta\| \leq \delta_1\},$$

i naknadno biramo $\delta > 0$ tako da

$$\int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| > \delta_1\}} P(x, \xi) d\sigma(\xi) < \frac{\epsilon}{4\|f\|_\infty},$$

za $\|x - \eta\| < \delta$, što je moguće na osnovu Leme 1.12 a). Za $x \in B$ i $\|x - \eta\| < \delta$ imamo

$$\begin{aligned} |u(x) - u(\eta)| &= \left| \int_S P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) - f(\eta) \int_S P(x, \xi) d\sigma(\xi) \right| \\ &= \left| \int_S P(x, \xi) (f(\xi) - f(\eta)) d\sigma(\xi) \right| \\ &\leq \int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| \leq \delta_1\}} P(x, \xi) |f(\eta) - f(\xi)| d\sigma(\xi) \\ &\quad + \int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| > \delta_1\}} P(x, \xi) |f(\eta) - f(\xi)| d\sigma(\xi) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \int_S P(x, \xi) d\sigma(\xi) + 2 \sup_{\eta \in S} |f(\eta)| \int_{S \cap \{\|\xi - \eta\| > \delta_1\}} P(x, \xi) d\sigma(\xi) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. □

Dakle, funkcija u rješava Dirichletov problem (1.11).

Primjedba 1.14. *Poissonov integral u (1.26) se može definisati i u široj klasi funkcija f . Na primjer, za ograničenu Borel mjerljivu funkciju f , funkcija $P[f]$ je (ograničena) harmonijska u \mathbf{B} (vidjeti [7, Glava 2 i 6]).*

Koristeći rezultat prethodne teoreme i jedinstvenost harmonijske funkcije (komentar nakon Posljedice 1.8), ili koristeći relaciju (1.25), jednostavno proizilazi sljedeće korisno tvrdjenje.

Posljedica 1.15. *Neka je u harmonijska u \mathbf{B} i neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$. Tada je*

$$u(x) = P[u|_S](x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(\xi) d\sigma(\xi), \quad x \in B.$$

Dirichletov zadatak se može riješiti i za proizvoljnu loptu $B(a, r)$, sa uslovom na $S(a, r)$. Rješenje se može izvesti analogno kao za jediničnu loptu, ili (u ovom trenutku jednostavnije) kao posljedica rješenja za jediničnu loptu koristeći novu funkciju i smjenu promjenljivih. Naime, neka je u harmonijska u $B(a, r)$ i neprekidna u $\overline{B(a, r)}$. Posmatramo funkciju $\tilde{u}(x) = u(a + rx)$. Tada, kako je \tilde{u} harmonijska u \mathbf{B} i neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$, to je

$$\begin{aligned} u(a + rx) = \tilde{u}(x) &= \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} \tilde{u}(\xi) d\sigma(\xi) \\ &= \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(a + r\xi) d\sigma(\xi) \\ &= r^{1-n} \int_{S(a,r)} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \frac{\xi-a}{r}\|^n} u(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}) \\ &= r \int_{S(a,r)} \frac{1 - \|\frac{(a+rx)-a}{r}\|^2}{\|(a+rx) - \tilde{\xi}\|^n} u(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}) \\ &= \int_{S(a,r)} \frac{r^2 - \|(a+rx) - a\|^2}{r\|(a+rx) - \tilde{\xi}\|^n} u(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}), \end{aligned}$$

tj.

$$u(y) = \int_{S(a,r)} \frac{r^2 - \|y - a\|^2}{r\|y - \tilde{\xi}\|^n} u(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}), \quad (1.27)$$

za $y \in B(a, r)$, gdje je σ površinska mjera normalizovana za jediničnu sferu.

Posljedica 1.16. *Poissonovo jezgro za loptu $B(a, r)$*

$$P_{B(a,r)}(y, \xi) = \frac{r^2 - \|y - a\|^2}{r\|y - \tilde{\xi}\|^n}$$

je harmonijska funkcija po y u $B(a, r)$, što se dokazuje analogno kao za Poissonovo jezgro u Lemi 1.11. Posljedično, sa desnom stranom jednakosti (1.27), za neprekidnu funkciju $u = u(\tilde{\xi})$ definisanu u $S(a, r)$ data je jedna harmonijska funkcija u $B(a, r)$.

Dokazujemo sada jedno bitno svojstvo za harmonijske funkcije, koje će nam biti potrebno u glavi 3.

Teorema 1.17. *Neka je u_m niz harmonijskih funkcija u oblasti Ω koji konvergira ravnomjerno ka funkciji u po kompaktima unutar Ω . Tada je u harmonijska funkcija.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je u harmonijska u nekoj maloj okolini proizvoljne tačke $a \in \Omega$. Neka je $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$. Iz relacije (1.27) imamo da je

$$u_m(y) = \int_{S(a,r)} \frac{r^2 - \|y - a\|^2}{r \|y - \tilde{\xi}\|^n} u_m(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}),$$

za $y \in B(a, r)$. Puštajući $m \rightarrow \infty$ sa obje strane, iz ravnomjerne konvergencije na kompaktu $S(a, r)$ imamo da važi

$$u(y) = \int_{S(a,r)} \frac{r^2 - \|y - a\|^2}{r \|y - \tilde{\xi}\|^n} u(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}),$$

što povlači da je funkcija u harmonijska u $B(a, r)$, na osnovu Posljedice 1.16. \square

Ovu sekciju završavamo sa još jednim opšte poznatim i korisnim rezultatom. Kako je funkcija $P(\cdot, \xi)$ beskonačno puta diferencijabilna u \mathbf{B} , to harmonijska funkcija u \mathbf{B} , koje je i neprekidna u $\bar{\mathbf{B}}$, je beskonačno puta diferencijabilna u \mathbf{B} i važi

$$D^\alpha u = (x) = \int_S D^\alpha P(x, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi),$$

za svaki multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pri čemu $D^\alpha(u) = D_1^{\alpha_1} \dots (D_n^{\alpha_n} u)$.

Prethodno razmatranje se može odnositi na proizvoljne lopte, na osnovu konstrukcije Poissonovog jezgra za $B(a, r)$ i Posljedice 1.16, pa zaključujemo da harmonijska funkcija (bez uslova neprekidnosti na granici) je beskonačno puta diferencijabilna funkcija.

1.4 Poissonovo parcijalna diferencijalna jednačina

Razmatramo Poissonovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, odnosno nehomogeni Dirichletov problem:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = g(x), & x \in B, \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S, \end{cases} \quad (1.28)$$

gdje je f neprekidna.

Ispostavlja se da ni pod uslovom da je g neprekidna u \mathbf{B} ne možemo tvrditi da postoji klasično rješenje problema, odnosno funkcija $u \in C^2(B)$ koja zadovoljava uslove (1.28) (vidjeti [22, Zadatak 4.9] i [26] za detalje). U knjizi [22, Glava 4] su razmatrani dovoljni uslovi za postojanje rješenja (koje je jedinstveno, na

osnovu principa maksimuma za harmonijske funkcije): dokazano je da u slučaju da je funkcija g ograničena i lokalno Hölder neprekidna⁶ tada postoji klasično rješenje. Međutim, mi ćemo rješenje tražiti u takozvanom *generalizovanom ili slabom obliku*, i za dokaz postojanja i jedinstvenosti dovoljno je da g pripada prostoru $L^2(\mathbf{B})$ (za naša razmatranja koja slijede u glavi 3 funkcija g pripada prostoru $L^p(\mathbf{B})$, za $p > n$, koji se nalazi unutar $L^2(\mathbf{B})$). Ukazujemo sada na motivaciju i put ka definiciji *slabog rješenja*, koju ćemo formalizovati nakon što definišemo pojam slabog izvoda i Sobolevljevih prostora.

Neka je u klasično rješenje problema (1.28). Množeći parcijalnu jednačinu iz (1.28) sa $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$, tj. beskonačno diferencijabilnom funkcijom sa kompaktnim nosačem⁷ u \mathbf{B} , i integraljeći po \mathbf{B} imamo da je

$$\int_{\mathbf{B}} \Delta u(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbf{B}} g(x) \phi(x) dx. \quad (1.29)$$

Kako se funkcija ϕ u tačkama "blizu" sfere S anulira, to je na osnovu *Prvog Greenovog identiteta* (1.6)

$$\int_{\mathbf{B}} \Delta u(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbf{B}} \langle \nabla u(x), \nabla \phi(x) \rangle dx.$$

Jednakost (1.29) sada se može zapisati u obliku

$$\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla u(x), \nabla \phi(x) \rangle dx + \int_{\mathbf{B}} g(x) \phi(x) dx = 0. \quad (1.30)$$

Postavlja se prirodno pitanje: da li jednačina (1.30) određuje rješenje za parcijalnu jednačinu iz (1.28)?

Neka je $u \in C^2(\mathbf{B}) \cap C(\overline{\mathbf{B}})$ funkcija koja zadovoljava (1.30), za sve $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$. Opet na osnovu *Prvog Greenovog identiteta* (1.6) imamo da je

$$\int_{\mathbf{B}} (\Delta u(x) - g(x)) \phi(x) dx = 0,$$

za sve $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$. Odavde slijedi da je $\Delta u(x) = g(x)$, za skoro svako $x \in \mathbf{B}$, a ako je funkcija g i neprekidna, što je slučaj kod klasičnih rješenja, tada je $\Delta u(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{B}$. Naime, pretpostavimo da je $\Delta u(x) - g(x)$ pozitivna u tački x_0 zajedno sa nekom njenom okolinom. Tada, funkciju ϕ možemo birati tako da je pozitivna u lopti oko fiksirane tačke $x_0 \in \mathbf{B}$, a van nje da se anulira⁸. U tom slučaju navedeni integral je strogo pozitivan, što nije tačno. Dakle, jednačinu

⁶Vidjeti definiciju u Sekciji 3.1.

⁷Funkcija f ima kompaktni nosač u Ω ako je zatvorenje skupa $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ kompaktni skup unutar Ω .

⁸Vidjeti primjer izgladivača u Teoremi 3.13, Sekcija 3.4.

(1.30) možemo smatrati ekvivalentnom sa definicionom jednačinom iz (1.28), za slučaj kada imamo rješenje određene glatkosti.

Stoga, prirodno je posmatrati jednačinu (1.30) kao uslov, uz evidentnu činjenicu da se može odnositi na širu familiju funkcija koje je mogu zadovoljavati, u odnosu na jednačinu iz (1.28).

Postoji nekoliko načina da se dokaže egzistencija takozvanog slabog rješenja problema (1.28). Jedan način podrazumijeva da se posmatra funkcional

$$Q(\phi) := \int_{\mathbf{B}} (\|\nabla\phi\|^2 + 2g\phi) dx$$

i minimizira za neku prikladnu familiju funkcija h koje se anuliraju na granici. Naime, ako u minimizira Q , tada i funkcija oblika $u + th$ je kandidat te klase funkcija, pa $Q(u + th)$ ima minimum u $t = 0$. Računajući $\frac{dQ}{dt}|_{t=0}$ dobijamo

$$\int_{\mathbf{B}} (\nabla u \nabla h + gh) dx = 0,$$

za sve funkcije h koje se anuliraju na granici. Međutim dokaz činjenice da dati funkcional dostiže svoj infimum u nekoj funkciji nije jednostavan. Mi ćemo u ovom radu predstaviti jedan elegantan pristup koji se zasniva na primijeni Rieszove teoreme o reprezentaciji linearnih funkcionala u Hilbertovom prostoru. Konkretno, radimo sa prostorima $H^1(\mathbf{B})$ i $H_0^1(\mathbf{B})$, pa prije nego što nastavljamo dalje, prikupićemo neke poznate rezultate iz funkcionalne analize, koji se tiču slabih izvoda i Sobolevljevih prostora (vidjeti [22, Glava 5 i 7] i [12, Glava 5]).

1.4.1 Slabi izvodi i Sobolevljevi prostor

Neka je Ω oblast u \mathbf{R}^n . Elemente familije $C_0^\infty(\Omega)$ nazivamo *test funkcijama*. Za test funkciju ϕ i $u \in C^1(\Omega)$ važi

$$\int_{\Omega} u(x) D_j \phi(x) dx = - \int_{\Omega} D_j u(x) \phi(x) dx, \quad \text{za } j = \overline{1, n}. \quad (1.31)$$

na osnovu teoreme o divergenciji (1.5), uzimajući $\mathbf{w} = (0, \dots, 0, u \cdot \phi, 0, \dots, 0)$, i činjenice da se ϕ anulira blizu i na granici skupa Ω . Štaviše, uzastopnom primjenom prethodne formule može se dobiti odgovarajući rezultat i za više izvode: za $u \in C^k(U)$ i multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ takav da $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, važi

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha(\phi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha(u)(x) \phi(x) dx, \quad (1.32)$$

gdje je $D^\alpha(u) = D_1^{\alpha_1} \dots (D_n^{\alpha_n} u)$. Primijetimo da za lijevu stranu u (1.32) je dovoljno da je u lokalno integrabilna u Ω (jer ϕ ima kompaktan nosač), što nam daje motivaciju za definisanje slabog izvoda funkcije $u \in L_{loc}^1(\Omega)$.

Definicija 1.18. Neka su $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ i α multiindeks. Kažemo da je v slabi α -izvod funkcije u , zapisujemo $D^\alpha u = v$, ako

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx,$$

za sve test funkcije $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Naravno, $D^\alpha u$ može da postoji, a da klasični izvod ne postoji. Na primjer funkcija

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

je slabi prvi izvod funkcije

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

što se direktno provjerava. Pokazuje se da, ako postoji, slabi izvod je jedinstven do na skup mjere nula.

Sobolevljevi prostori

Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i neka je k nenegativan cio broj.

Definicija 1.19. Sobolevljevi prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je skup svih integrabilnih funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tako da za svaki multiindeks α , $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha(u)$ postoji u slabom smislu i pripada prostoru $L^p(\Omega)$.

Na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ se može definisati norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.33)$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

gdje je $\|\cdot\|_p$ norma u $L^p(\Omega)$, a $\|\cdot\|_\infty$ esencijalni supremum. Pokazuje se da je $W^{k,p}(\Omega)$ Banahov prostor (slijedi iz kompletnosti prostora $L^p(\Omega)$), dok za $p = 2$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle u, v \rangle_k = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle, \quad (1.34)$$

gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni proizvod u $L^2(\Omega)$.

Familija funkcija $C_0^\infty(\Omega)$ se nalazi unutar skupa $W^{k,p}(\Omega)$ i njegovo zatvorenje u odnosu na prostor $W^{k,p}(\Omega)$ označavamo sa $W_0^{k,p}(\Omega)$, to jeste

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists \{u_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) : \|u - u_m\|_{k,p} \rightarrow 0, \text{ kada } m \rightarrow \infty.$$

Nas će specijalno zanimati prostor $W^{1,2}(\Omega)$ kojeg ćemo označiti sa $H^1(\Omega)$, a zatvorenje skupa $C_0^\infty(\Omega)$ unutar $W^{1,2}(\Omega)$ označićemo sa $H_0^1(\Omega)$. U nastavku dokazujemo nejednakost Friedrichsa za prostor $H_0^1(\Omega)$, kada je Ω ograničena oblast.

Teorema 1.20. *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ograničena oblast i $u \in H_0^1(\Omega)$. Tada*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dokaz. Dokazujemo nejednakost prvo za funkcije $u \in C_0^\infty(\Omega)$, imajući u vidu da je $C_0^\infty(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Neka je

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| \leq a, i = 1, \dots, n\}$$

n -dimenzioni interval takav da $\bar{\Omega} \subset P$. Kako funkcija u ima kompaktan nosač u Ω , to je možemo dodefinisati neprekidno na čitavom skupu P tako da u $P \setminus \Omega$ uzima vrijednost nula.

Označimo "ostatak" (x_2, \dots, x_n) koordinata nakon x_1 -koordinate tačke x sa \tilde{x} , tj. $x = (x_1, \tilde{x})$. Iz Newton-Leibnizove formule i činjenice da u ima kompaktan nosač u Ω , dobijamo

$$u(x_1, \tilde{x}) = \int_{-a}^{x_1} D_t u(t, \tilde{x}) dt.$$

Koristeći Cauchy-Schwarz nejednakost imamo sljedeće ocjene

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_{-a}^{x_1} D_t u(t, \tilde{x}) dt \right|^2 \\ &\leq \int_{-a}^{x_1} 1^2 dt \int_{-a}^{x_1} |D_t u(t, \tilde{x})|^2 dt \\ &\leq \int_{-a}^a 1 dt \int_{-a}^a |D_t u(t, \tilde{x})|^2 dt \\ &= 2a \int_{-a}^a |D_t u(t, \tilde{x})|^2 dt. \end{aligned}$$

Integraljenjem prethodne nejednakosti po $x \in \Omega$, koristeći Fubinijevu teoremu i nejednakost $|D_t u| \leq |\nabla u|$, nalazimo da je

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \int_P |u(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2a \int_{-a}^a \int_{[-a,a]^{n-1}} \int_{-a}^a |D_t u(t, \tilde{x})|^2 dt d\tilde{x} dx_1 \\
 &= 4a^2 \int_{[-a,a]^{n-1}} \int_{-a}^a |D_t u(t, \tilde{x})|^2 dt d\tilde{x} \\
 &\leq 4a^2 \int_{[-a,a]^{n-1}} \int_{-a}^a |\nabla u(x)|^2 dx \\
 &= 4a^2 \int_P \|\nabla u(x)\|^2 dx = 4a^2 \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx \\
 &= 4a^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

odakle slijedi tvrđenje za $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

U opštem slučaju, za $u \in H_0^1(\Omega)$ posmatramo niz $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, tako da $u_m \rightarrow u$ u $H^1(\Omega)$, kada $m \rightarrow \infty$. Na osnovu prvog dijela dokaza, važi

$$\|u_m\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u_m\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Puštajući $m \rightarrow \infty$, imajući u vidu normu (1.33) za prostor $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, dobijamo

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

što je trebalo dokazati. □

Neka je Ω ograničena oblast u \mathbf{R}^n . Primijetimo da se sa

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx,$$

zadaje jedan skalarni proizvod u prostoru $H_0^1(\Omega)$, jer iz $\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = 0$ slijedi da je $\nabla u = 0$, skoro svuda. Otuda, Friedrichsova nejednakost za prostor $H_0^1(\Omega)$, povlači da je $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, odnosno $u = 0$ u $L^2(\Omega)$. Dakle, na prostoru $H_0^1(\Omega)$ možemo definisati normu i sa

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

U prostoru $H^1(\Omega)$, saglasno definiciji (1.34), skalarni proizvod se zadaje sa

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle u(x), v(x) \rangle_2 + \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_2 \\
 &= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx,
 \end{aligned}$$

i posljedično norma sa

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx + \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Međutim, za $u \in H_0^1(\Omega)$, koristeći Friedrichsovu nejednakost, jednostavno dobijamo da važe sljedeće nejednakosti

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C^2(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

što povlači da su norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ i $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ ravnomjerno ekvivalentne u $H_0^1(\Omega)$. Zbog toga prostor $H_0^1(\Omega)$, kao zatvoren u $H^1(\Omega)$, je sam za sebe Hilbertov prostor.

1.4.2 Rieszova teorema o reprezentaciji

Za dokaz Rieszove teoreme o reprezentaciji linearnih neprekidnih (ograničenih) funkcionala iz Hilbertovog prostora H , potrebna nam je lema o razlaganju Hilbertovog prostora H u direktnoj sumi proizvoljnog zatvorenog potprostora M i njegovog ortogonalnog komplementa $M^\perp := \{w \in H : (\forall v \in M) \langle w, v \rangle_H = 0\}$.

Lema 1.21. *Neka je M zatvoren potprostor Hilbertovog prostora H . Tada za svako $u \in H$, postoji $v \in M$ i $w \in M^\perp$, tako da je $u = v + w$.*

Dokaz. Za $u \in M$, uzimamo $v = u$ i $w = 0$. Razmatramo sada slučaj $M \neq H$ i $u \notin M$. Kako je M zatvoren, to je

$$d = d(u, M) = \inf_{v \in M} \|u - v\| > 0,$$

Neka je $\{v_m\}_{m=1}^\infty \subset M$ niz za koji važi da $\|u - v_m\| \rightarrow d$, kada $m \rightarrow \infty$. Koristeći pravilo paralelograma⁹ dobijamo

$$4\|u - \frac{1}{2}(v_m + v_k)\|^2 + \|v_m - v_k\|^2 = 2(\|u - v_m\|^2 + \|u - v_k\|^2).$$

Neka je $\epsilon > 0$ i $m_0 \in \mathbf{N}$, td. za $m \geq m_0$ važi $\|u - v_m\|^2 - d^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4}$. Tada, za $k, m \geq m_0$ važi

$$\begin{aligned} \|v_m - v_k\|^2 &= 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_k\|^2 - 4\|u - \frac{1}{2}(v_m + v_k)\|^2 \\ &\leq 2d^2 + \frac{\epsilon^2}{2} + 2d^2 + \frac{\epsilon^2}{2} - 4d^2 = \epsilon^2, \end{aligned} \tag{1.35}$$

⁹Neka je V prostor sa skalarnim proizvodom. Za $u, v \in V$ važi

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

jer je $\frac{1}{2}(v_m + v_k) \in M$, pa je $\|u - \frac{1}{2}(v_m + v_k)\| \geq d$. Relacija (1.35) povlači da je niz $\{v_m\}$ Cauchyjev, pa i konvergentan zbog kompletnosti prostora H . Kako je $\{v_m\} \subset M$ i M zatvoren to je $v := \lim_{m \rightarrow \infty} v_m \in M$ i važi $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| = \|u - v\|$.

Neka je $w = u - v$. Ostaje da se dokaže da je $w \in M^\perp$. Neka je $v' \in M$, proizvoljan element i $\alpha \in \mathbf{R}$. Kako je $v + \alpha v' \in M$ imamo

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|u - v - \alpha v'\|^2 = \langle w - \alpha v', w - \alpha v' \rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\alpha \langle v', w \rangle + \alpha^2 \|v'\|^2, \end{aligned}$$

odnosno

$$2\alpha \langle v', w \rangle \leq \alpha^2 \|v'\|^2,$$

jer je $\|w\| = d$. Birajući znak broja α tako da $\alpha \langle v', w \rangle \geq 0$ dobijamo nejednakost

$$|\langle v', w \rangle| \leq \frac{|\alpha|}{2} \|v'\|^2.$$

Puštajući $|\alpha| \rightarrow 0^+$, imamo $\langle v', w \rangle = 0$. Dakle, $w \in M^\perp$, što je trebalo dokazati. \square

Dokazujemo sada najavljenju Rieszovu teoremu.

Teorema 1.22. *Neka je H Hilbertov prostor i $F : H \rightarrow \mathbf{R}$ linearan neprekidan operator. Tada postoji jedinstveno $w \in H$, tako da je $F(u) = \langle u, w \rangle$, $\forall u \in H$.*

Dokaz. Neka je $M = \{v \in H : F(v) = 0\}$ jezgro linearnog operatora F .

Ako je $M = H$, tada je tvrdjenje očigledno tačno za $w = 0$.

Neka je $M \neq H$. Potprostor M , kao inverzna slika zatvorenog skupa pri neprekidnom preslikavanju, je zatvoren potprostor u H . Na osnovu prethodne leme, postoji vektor $w_1 \in M^\perp \setminus M$, pa je $w_1 \neq 0$ i $F(w_1) \neq 0$. Dodatno možemo pretpostaviti da je $\|w_1\| = 1$. Neka je $u \in H$, proizvoljan element. Kako

$$F\left(u - \frac{F(u)}{F(w_1)} w_1\right) = F(u) - \frac{F(u)}{F(w_1)} F(w_1) = 0,$$

to je $u - \frac{F(u)}{F(w_1)} w_1 \in M$, odnosno

$$\left\langle u - \frac{F(u)}{F(w_1)} w_1, w_1 \right\rangle = 0. \quad (1.36)$$

Kako je $\|w_1\| = 1$, uzimajući $w = w_1 F(w_1)$, konačno slijedi

$$F(u) = \langle u, w \rangle,$$

što je trebalo dokazati. Vektor w ne zavisi od proizvoljnog vektora $u \in H$ i jedinstven je. Naime, ako postoje vektori w_1 i w_2 koji zadovoljavaju uslove zadatka tada je

$$\langle u, w_1 \rangle = \langle u, w_2 \rangle, \quad \forall u \in H.$$

Specijalno, za $u = w_1 - w_2$ trivijalno slijedi

$$\|w_1 - w_2\|^2 = \langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0,$$

što povlači $w_1 = w_2$. Time je dokaz završen. \square

1.4.3 Egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja

Vratimo se sada problemu (1.28):

$$\begin{cases} \Delta u(x) = g(x), & x \in B \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S. \end{cases}$$

Na osnovu relacije (1.30), definicije slabih izvoda i Sobolevljevih prostora, damo sljedeću definiciju *slabog rješenja problema* (1.28).

Pretpostavka je da postoji funkcija $f \in H^1(\mathbf{B})$, koja se neprekidno produžava na granici S , odnosno da se funkcija f može dobiti kao produženje funkcije f koja pripada prostoru $H^1(\mathbf{B})$. Za funkciju g , kao što je i ranije rečeno, dovoljno je uzeti da pripada prostoru $L^2(\mathbf{B})$.

Definicija 1.23. Za funkciju $u \in H^1(\mathbf{B})$ kažemo da je *slabo rješenje problema* (1.28), gdje je $f \in H^1(\mathbf{B})$, ako je $u - f \in H_0^1(\mathbf{B})$ i važi

$$\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla u(x), \nabla \phi(x) \rangle dx + \int_{\mathbf{B}} g(x)\phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\mathbf{B}).$$

Uslov na granici iz problema (1.28), kod definicije slabog rješenja se predstavlja preko uslova $u - f \in H_0^1(\mathbf{B})$. Naime, na prostoru $W^{1,p}(\Omega)$, gdje je Ω ograničena oblast, se može definisati takozvani *operator traga* T , linearan ograničen operator, koji preslikava funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ u prostor $L^p(\partial\Omega)$. Operator T funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$ koje se mogu neprekidno produžiti u $\partial\Omega$, slika u odgovarajuću restrikciju te funkcije na S . Na taj način, operator T omogućava da se funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$ produžavaju i na $\partial\Omega$. Ispostavlja se da funkcija u pripada potprostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako je $Tu = 0$. Zato, funkcije iz $W_0^{1,p}(\Omega)$ se posmatraju kao funkcije koje se anuliraju "pri" granici, odnosno uslov $u - f \in H_0^1(\mathbf{B})$ treba smatrati kao uslov da na S važi $u = f$ (vidjeti [12, Sekcija 5.5, Teorema 1 i 2]).

Primijetimo da smo sa definicijom slabog rješenja, u odnosu na jednačinu (1.30), proširili klasu funkcija ϕ na $H_0^1(\mathbf{B})$. Međutim, kako se radi o zatvorenom skupu $C_0^\infty(\mathbf{B})$ u $H^1(\mathbf{B})$, to klasična rješenja problema (1.28) zadovoljavaju relaciju (1.30) i za $\phi \in H_0^1(\mathbf{B})$.

Dokazujemo sada postojanje i jedinstvenost slabog rješenja za problem (1.28)

Teorema 1.24. [15, 22] Postoji jedinstveno slabo rješenje problema (1.28) za $f \in H^1(\mathbf{B})$ i $g \in L^2(\mathbf{B})$.

Dokaz. Posmatramo linearni funkcional $F : H_0^1(\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{R}$, definisan sa

$$F(\phi) := - \int_{\mathbf{B}} g(x)\phi(x) dx - \int_{\mathbf{B}} \langle \nabla f(x), \nabla \phi(x) \rangle dx = - \langle g, \phi \rangle_{L^2(\mathbf{B})} - \langle f, \phi \rangle_{H_0^1(\mathbf{B})}.$$

Funkcional F je ograničen. Zaista,

$$|F(\phi)| \leq \|g\|_{L^2(\mathbf{B})} \|\phi\|_{L^2(\mathbf{B})} + \|\nabla f\|_{L^2(\mathbf{B})} \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbf{B})}$$

$$\leq (\|g\|_{L^2(\mathbf{B})}C(\mathbf{B}) + \|f\|_{H^1(\mathbf{B})}) \|\phi\|_{H_0^1(\mathbf{B})}.$$

Kako je $H_0^1(\mathbf{B})$ Hilbertov prostor, a funkcional F ograničen, na osnovu Rieszove teoreme (1.22), postoji jedinstveno $w \in H_0^1(\Omega)$, tako da $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ je ispunjena jednakost

$$F(\phi) = \langle w, \phi \rangle_{H_0^1(B)},$$

tj.

$$-\int_{\mathbf{B}} g(x)\phi(x)dx - \int_{\mathbf{B}} \langle \nabla f(x), \nabla \phi(x) \rangle dx = \int_{\mathbf{B}} \langle \nabla w(x), \nabla \phi(x) \rangle dx,$$

odnosno

$$\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla(w + f)(x), \nabla \phi(x) \rangle dx + \int_{\mathbf{B}} g(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\mathbf{B}).$$

Dakle, $u = w + f$ zadovoljava traženu jednačinu i važi $u - f = w \in H_0^1(\mathbf{B})$, što je trebalo dokazati. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti funkcije w , na osnovu Rieszove teoreme o reprezentaciji. \square

Glava 2

Kvazikonformna preslikavanja u prostoru

Višedimenziona kvazikonformna preslikavanja omogućavaju jednu novu i netrivialnu ekstenziju kompleksne analize u \mathbf{R}^n . Kako bi ukazali na potrebu konstrukcije i uvođenja ove familije, prvu sekciju posvećujemo konformnim preslikavanjima u \mathbf{R}^n i, neizbježno, Möbiusovim transformacijama. Knjige [1,21] su glavni izvor materijala sljedeće sekcije.

2.1 Konformna preslikavanja u prostoru

Dajemo definiciju konformnog preslikavanja u prostoru.

Definicija 2.1. *Neka su Ω i Ω' oblasti u \mathbf{R}^n i $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ homeomorfizam. Kažemo da je f konformno ako*

- i) $f \in C^1(\Omega)$,*
- ii) $J(x, f) \neq 0, \forall x \in \Omega$,*
- iii) $\|f'(x)h\| = \|f'(x)\| \|h\|, \forall x \in \Omega, \forall h \in \mathbf{R}^n$.*

Ako su Ω i Ω' oblasti u $\overline{\mathbf{R}}^n$, tada je preslikavanje f konformno ako je njena restrikcija na $\Omega \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ konformno preslikavanje.

Primijetimo da je kompozicija konformnih preslikavanja konformno preslikavanje i da iz teoreme o inverznom preslikavanju slijedi da je i f^{-1} konformno preslikavanje.

Izučavamo kratko svojstvo *iii)* definicije konformnog preslikavanja. Uzimajući:

– $h = e_j$, za $j = \overline{1, n}$, dobijamo da svaka kolona matrice $f'(x)$ ima istu normu $\|f'(x)\|$.

– prvo $h = e_j + e_k$, a zatim $h = e_j - e_k$, $k \neq j$, i oduzimajući odgovarajuće izraze $\|f'(x)h\|^2$, dobijamo da su kolone matrice $f'(x)$ ortogonalne.

Dakle, $\frac{1}{\|f'(x)\|} f'(x)$ je ortogonalna matrica, pa je

$$\det \left(\frac{1}{\|f'(x)\|} f'(x) \right) = \pm 1,$$

odnosno

$$|J(x, f)| = \|f'(x)\|^n. \quad (2.1)$$

Napominjemo da i relacija (2.1) i svojstvo da je $\frac{1}{\|f'(x)\|} f'(x)$ ortogonalna matrica se mogu uzeti kao uslov *iii*) kod definicije konformnih preslikavanja. Štaviše, ima i drugih načina da se formuliše uslov *iii*), između ostalog geometrijski se može interpretirati kroz uslov da regularno linearno preslikavanje $f'(x)$ čuva uglove. Primijetimo takođe da nevedena definicija konformnog preslikavanja u \mathbf{R}^n dopušta i slučaj da ona čuva orijentaciju (situacija kada $J(x, f) > 0$), ali i slučaj kada mijenja orijentaciju, tj. $J(x, f) < 0$. Navedeno je u suprotnosti sa standardnom definicijom konformnosti u $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$, kada se za drugi slučaj koristi izraz "anti-konformno" preslikavanje.

U nastavku dajemo nekoliko primjera konformnih preslikavanja.

Primjer 2.2.

- *Translacija za vektor $v \in \mathbf{R}^n$:*

$$f_1(x) = x + v, \quad f_1(\infty) = \infty;$$

- *Homotetija (rastezanje) za $k > 0$:*

$$f_2(x) = k \cdot x, \quad f_2(\infty) = \infty;$$

- *Ortogonalni operatori, tj. linearna preslikavanja koja čuvaju normu:*

$$\|f_3(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f_3(\infty) = \infty;$$

- *Inverzija u odnosu na sferu $S(x_0, r)$, za $x_0 \in \mathbf{R}^n, r > 0$:*

$$f_4(x) = x_0 + \frac{r^2(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2}, \quad f_4(x_0) = \infty, \quad f_4(\infty) = x_0;$$

- *Refleksija u odnosu na ravan $\langle v, x \rangle = a$, za $v \in \mathbf{R}^n, a \in \mathbf{R}$:*

$$f_5(x) = x - 2(\langle v, x \rangle - a)v, \quad f_5(\infty) = \infty.$$

Formula za inverziju oko sfere ima jasnu geometrijsku interpretaciju: f_4 preslikava tačku $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{x_0\}$ u jedinstvenu tačku $f_4(x) \in \mathbf{R}^n$ koja zadovoljava jednakost

$$\|f(x) - x_0\| \cdot \|x - x_0\| = r^2,$$

i leži na polupravoj koja je određena sa početnom tačkom x_0 i tačkom x . Primijetimo da se refleksija f_5 u odnosu na ravan može zapisati kao kompozicija translacije i ortogonalnog operatora (operator koji, za neku odgovarajuću bazu, $n - 1$ baznih vektora iz potprostora $\langle v, x \rangle = 0$ fiksira, a vektor v slika u suprotni vektor).

Svi navedeni primjeri su primjeri takozvanih Möbiusovih transformacija, što nije slučajno (Teorema 2.4). U nastavku dajemo definiciju Möbiusovih preslikavanja u prostoru.

Definicija 2.3. Homeomorfizam $f : \overline{\mathbf{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^n$ se naziva Möbiusovom transformacijom ako se f može dobiti kao kompozicija konačnog broja elementarnih transformacija: translacija, homotetija, ortogonalnih operatora i inverzija u odnosu na sferu.

Ovom definicijom za $n = 2$, što se može naslutiti na osnovu komentara poslije definicije konformnih preslikavanja u \mathbf{R}^n , su uključena i preslikavanja oblika

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

za $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $ad - bc \neq 0$.

Može se primijetiti da svaka Möbiusova transformacija je oblika

$$f(x) = kT(x) + v \text{ ili } f(x) = J(kT(x) + v),$$

gdje je $k > 0$, v vektor u \mathbf{R}^n , T ortogonalno preslikavanje, a J inverzija oko neke sfere. U prvoj situaciji imamo $f(\infty) = \infty$ i takva preslikavanja se nazivaju *preslikavanja sličnosti* (grade se kao kompozicija prva tri preslikavanja iz definicije Möbiusovih preslikavanja¹⁰).

Koristeći činjenicu da Möbiusova preslikavanja čuvaju takozvani *dvorazmjerni tačkara* (*cross-ratio*) a, b, c, d

$$[a, b, c, d] := \frac{\|a - c\|}{\|a - d\|} : \frac{\|b - c\|}{\|b - d\|},$$

može se dokazati: da se kružnice preslikavaju u kružnice; da su preslikavanja sličnosti jedine Möbiusove transformacije koje fiksiraju ∞ ; da su ortogonalni linearni operatori jedina Möbiusova preslikavanja koje fiksiraju 0 i slikaju \mathbf{B} u \mathbf{B} , itd. Kroz ove činjenice, koristeći sličan pristup kao u slučaj Möbiusovih preslikavanja iz jediničnog diska $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ dobija se sljedeći rezultat:

¹⁰U nekim literaturama se umjesto preslikavanja f_1, f_2, f_3 iz Primjera 2.2 u definiciji Möbiusovih preslikavanja uzima preslikavanje sličnosti.

Möbiusova transformacija

$$T_{x_0}(x) = \frac{(1 - \|x_0\|^2)(x - x_0) - \|x - x_0\|^2 x_0}{[x, x_0]^2}, \quad (2.2)$$

pri čemu¹¹ $[x, x_0] = \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - x_0 \right\| = \|x_0\| \left\| x - \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\|$, odnosno $[x, x_0]^2 = 1 + \|x\|^2 \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle$, je preslikavanje koje jediničnu loptu $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ slika bijektivno u sebe, a tačku $x_0 \in \mathbf{B}$ slika u 0. Štaviše, preslikavanje T_{x_0} tog oblika je jedinstveno do na prekompoziciju sa ortogonalnim operatorom.

Primijetimo, takođe, da za $x_0 \in \mathbf{B}$ transformacija

$$T_{-x_0}(x) = \frac{(1 - \|x_0\|^2)(x + x_0) + \|x - x_0\|^2 x_0}{[x, -x_0]^2} \quad (2.3)$$

je preslikavanje koje \mathbf{B} slika u sebe i 0 slika u x_0 .

Završavamo ovu sekciju, navodeći Liouvilleovu teoremu za konformna preslikavanja u \mathbf{R}^n , $n \geq 3$. Podsjetimo se da Möbiusova preslikavanja u ravni čine jednu značajnu ali pravu podklasu konformnih preslikavanja u \mathbf{C} . Sredinom XIX vijeka poznati francuski matematičar Joseph Liouville je dokazao da su jedina konformna preslikavanja klase C^3 u prostoru ($n \geq 3$) u stvari restrikcije Möbiusovih preslikavanja. Koliko rezultat ove teoreme iznenađuje (danas i u to vrijeme), ali i izaziva interesovanje, govori činjenica da je već sljedeće godine, u svojoj doktorskoj disertaciji, Bernhard Riemann dokazao *Riemannovu teoremu o preslikavanjima*:

Jednostruko povezana oblast $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, čija granica sadrži više od jedne tačke, je konformno ekvivalentna sa jediničnim diskom \mathbf{D} .

Dakle, sa jedne strane u ravni imamo jako bogatu familiju oblasti koje su konformno ekvivalentne sa diskom, dok u prostoru jedine oblasti koje su konformno ekvivalentne sa loptom \mathbf{B} su same lopte i poluprostori. Dugo je vremena trebalo da se Liouvilleova teorema dokaže pod slabijim uslovom glatkosti. Tek 1958. godine američki matematičar Philip Hartman u svom radu [27] dokazao je teoremu pod uslovom da je preslikavanje C^1 glatko.

Teorema 2.4. *Neka je Ω oblast u \mathbf{R}^n , $n \geq 3$, i $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ konformno preslikavanje. Tada je f restrikcija u Ω nekog Möbiusovog preslikavanja.*

Vrijedi napomenuti da su i nakon dokaza teoreme nastavljena istraživanja na ovu temu, u cilju dokazivanja istog rezultata i bez uslova diferencijabilnosti. U radu [18] je tvrđenje dokazano i u slučaju kada se konformnost definiše preko konformne invarijante, kao što je modul krivih (sekcija koja slijedi), bez dodatnih uslova diferencijabilnosti. Interesantni rezultati su postignuti i u radovima [28, 55], pod slabijim uslovima.

¹¹Ahlforsova zagrada.

2.2 Definicija kvazikonformnog preslikavanja u prostoru

Sam kontrast koji se dobija iz Liouvilleove i Riemannove teoreme prirodno otvara problem pronalaska razumne familije preslikavanja koje zadržavaju u nekoj mjeri svojstvo konformnosti, odnosno koja su "skoro" konformna. Cilj je proizvesti teoriju s bogatom familijom preslikavanja, ali da se ne "udaljimo" toliko daleko od svojstva konformnosti, pa da budu žrtvovana mnoga geometrijska i analitička svojstva teorije konformnih preslikavanja iz ravni. Teorija kvazikonformnih preslikavanja čini se kao vrlo srećan izbor.

Postoji nekoliko potpuno različitih pristupa u definisanju kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. U ovom radu predstavimo *geometrijsku definiciju* i *analitičku definiciju*. Rezultate ove glave ćemo bazirati na geometrijskoj definiciji, dok u glavi 3 će biti korišćen i analitički pristup. Od različitih pristupa i definicija, vrijedi pomenuti i metričku definiciju, kojom se daje način da se kvazikonformnost definiše i u metričkim prostorima, koristeći linearnu dilataciju (vidjeti [60, Definicija 22.2 i Teorema 34.1]), i preko koje se jednostavno vidi lokalno svojstvo kvazikonformnosti. Sve ove definicije su ekvivalentne.

Za zadavanje preciznih definicija koje slijede, služili smo se veoma detaljnim pristupom iz [60], kao i interpretacijama i dodatnim komentarima iz [21].

2.2.1 Geometrijska definicija

Za geometrijsku definiciju, biće neophodno da prvo uvodimo pojam modula krivih. U početku prikazaćemo osnovnu ideju i ukazaćemo (kasnije i dokazati) na činjenicu da je modul krivih konformna invarijanta, što će biti osnov za definisanje preslikavanja koja "malo" odstupaju od konformnih.

Modul krivih

Put u $\overline{\mathbf{R}^n}$ je neprekidno preslikavanje $\gamma : I \rightarrow \overline{\mathbf{R}^n}$, gdje je I interval u \mathbf{R} . Ako je $J \subset I$, tada $\gamma|_J$ zovemo *podputem puta* γ . Put se naziva zatvorenim ako je I zatvoren interval.

Zatvoren put $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ se naziva *rektificijabilnim* ako je

$$l(\gamma) := \sup \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \infty,$$

gdje se supremum uzima po svim podjelama $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, $k \in \mathbf{N}$, zatvorenog intervala $[a, b]$. Za puteve u $\overline{\mathbf{R}^n}$ takve da ∞ pripada krivoj γ kažemo da nijesu rektificijabilni, osim ako je u pitanju konstantan put $\gamma(t) = \infty$, i u tom slučaju uzimamo da je $l(\gamma) = 0$.

Za put (ne mora biti zatvoren) kažemo da je *lokalno rektificijabilan* ako je svaki njegov zatvoreni podput rektificijabilan.

Za svaki rektificijabilan put $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ postoji reparametrizacija pomoću neprekidne, rastuće funkcije *dužine luka* $s(t) = l(\gamma[a, t])$. Navedena parametrizacija se naziva *normalna reprezentacija krive* γ , označavamo je sa $\gamma^0 : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbf{R}^n$ i važi $\gamma = \gamma^0 \circ s$.

Pomoću normalne reprezentacije možemo definisati krivolinijski integral nad zatvorenim rektificijabilnim putem γ sa

$$\int_{\gamma} \rho dl := \int_0^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t)) dt, \quad (2.4)$$

gdje je ρ nenegativna Borel mjerljiva funkcija definisana na Borel mjerljivom skupu koji sadrži sliku puta γ . Navedena definicija se može prirodno uopštiti i na lokalno rektificijabilne puteve, kroz supremum po svim zatvorenim podputevima.

Za skup $J \subset \overline{\mathbf{R}^n}$ kažemo da je *zatvoreni (otvoreni) luk* ako je homeomorfan sa nekim zatvorenim intervalom $[a, b]$ (otvorenim intervalom (a, b)). Dužina luka i posljedično krivolinijski integral po zatvorenom rektificijabilnom (otvorenom lokalno rektificijabilnom) luku se definiše analogno kao za put, preko odgovarajućeg homeomorfizma iz definicije luka i ne zavisi od izbora homeomorfizma.

Pod pojmom *kriva* ćemo smatrati i put i luk. Neka je Γ familija krivih u $\overline{\mathbf{R}^n}$. Sa $\mathcal{F}(\Gamma)$ označavamo familiju nenegativnih Borel-mjerljivih funkcija $\rho : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ tako da je¹²

$$\int_{\gamma} \rho dl \geq 1,$$

za sve lokalno rektificijabilne krive $\gamma \in \Gamma$. Familija $\mathcal{F}(\Gamma)$ se naziva familija dostupnih funkcija za Γ .

Za $p \geq 1$, p -modul familije Γ se definiše sa

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathcal{F}(\Gamma)} \int_{\mathbf{R}^n} \rho^p d\lambda, \quad (2.5)$$

gdje je λ Lebegova mjera u \mathbf{R}^n . Ako je $\mathcal{F}(\Gamma) = \emptyset$, tada se uzima da je $M_p(\Gamma) = \infty$. Kada je p jednak dimenziji prostora, tj. $p = n$, zbog svog značaja $M_n(\Gamma)$ se označava sa $M(\Gamma)$ i naziva se *modul familije krivih* Γ . Jasno je da krive koje nijesu lokalno rektificijabilne ne utiču na familiju $\mathcal{F}(\Gamma)$ pa ni na p -modul. Štaviše, kod slučaja $p = n$ se može dokazati da je dovoljno posmatrati samo familiju rektificijabilnih krivih.

U Teoremi 2.20 dokazaćemo da je modul krivih konformna invarijanta, odnosno da je $M(\Gamma) = M(f\Gamma)$, za konformno preslikavanje f , gdje je Γ proizvoljna familija krivih iz domena funkcije f , a $f\Gamma = \{f \circ \gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Ova teorema, osim

¹²Koristićemo i oznaku $\int_{\gamma} \rho(x) |dx|$.

što ima široku primjenu u izučavanju geometrijskih svojstva modula krivih (u šta ćemo se uvjeriti u nastavku glave 2), naročito je značajna zbog toga što daje prirodan način za definiciju kvazikonformnog preslikavanja.

Neka su Ω i Ω' oblasti u $\overline{\mathbf{R}}^n$. Za homeomorfizam $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, definišemo vrijednosti

$$K_I(f) = \sup \frac{M(f\Gamma)}{M(\Gamma)}, \quad K_O(f) = \sup \frac{M(\Gamma)}{M(f\Gamma)},$$

$$K(f) = \max\{K_I(f), K_O(f)\},$$

gdje se supremum uzima po svim familijama krivih Γ u Ω tako da moduli $M(\Gamma)$ i $M(f\Gamma)$ nijesu istovremeno jednaki 0 ili ∞ . Vrijednosti $K_I(f)$, $K_O(f)$ i $K(f)$ nazivamo redom *unutrašnja dilatacija*, *spoljašnja dilatacija* i *maksimalna dilatacija preslikavanja f* .

Jasno, ako je f konformno preslikavanje tada $K_O(f) = K_I(f) = K(f) = 1$.

Definicija 2.5. *Neka je $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ homeomorfizam oblasti u $\overline{\mathbf{R}}^n$. Ako je $K(f) \leq K < \infty$, za $1 \leq K < \infty$, tada kažemo da je f K -kvazikonformno preslikavanje.*

Dakle, f je K -kvazikonformno preslikavanje ($K \geq 1$) ako važi

$$\frac{M(\Gamma)}{K} \leq M(\Gamma') \leq KM(\Gamma),$$

za sve familije krivih Γ u Ω . Iz prethodne relacije se jasnije ogleda činjenica da konformna preslikavanja su 1-kvazikonformna preslikavanja.

Jednostavno se pokazuje da važe sljedeće relacije. Za dokaz *d*), *e*) treba koristiti činjenicu da je supremum proizvoda manji ili jednak od proizvoda supremuma.

Lema 2.6.

- a) $K_I(f^{-1}) = K_O(f)$;
- b) $K_O(f^{-1}) = K_I(f)$;
- c) $K(f^{-1}) = K(f)$;
- d) $K_I(f \circ g) \leq K_I(f)K_I(g)$;
- e) $K_O(f \circ g) \leq K_O(f)K_O(g)$;
- f) $K(f \circ g) \leq K(f)K(g)$.

Nejednakosti *c*) i *f*) direktno povlače sljedeće dvije korisne činjenice u vezi sa kvazikonformnim preslikavanjima.

Posljedica 2.7.

- a) *Ako je f K -kvazikonformno preslikavanje, tada je i f^{-1} K -kvazikonformno preslikavanje.*
- b) *Kompozicija kvazikonformnih preslikavanja je kvazikonformno preslikavanje.*

2.2.2 Analitička definicija

Za regularno linearno preslikavanje $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definišemo vrijednosti

$$H_I(\mathcal{A}) = \frac{|\det \mathcal{A}|}{\ell(\mathcal{A})^n}, \quad H_O(\mathcal{A}) = \frac{\|\mathcal{A}\|^n}{|\det \mathcal{A}|}, \quad H(\mathcal{A}) = \frac{\|\mathcal{A}\|}{\ell(\mathcal{A})}$$

koje nazivamo *unutrašnja*, *spoljašnja* i *linearna dilatacija*, pri čemu

$$\ell(\mathcal{A}) = \min_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\|, \quad \|\mathcal{A}\| = \max_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\|.$$

Kako linearno preslikavanje jediničnu loptu \mathbf{B} preslikava u elipsoidu $E = \mathcal{A}(\mathbf{B})$, to je $\|\mathcal{A}\|$ najduža osa elipsoida E , dok je $\ell(\mathcal{A})$ najkraća osa elipsoida. Zato, na osnovu teoreme o smjeni promjenljivih, $H_I(\mathcal{A})$ predstavlja odnos između zapremine elipsoida E i zapremine najveće upisane lopte sa centrom u 0 unutar elipsoida E ; $H_O(\mathcal{A})$ predstavlja odnos između zapremine najmanje opisane lopte sa centrom u 0 oko elipsoida E i zapremine elipsoida, dok je $H(\mathcal{A})$ odnos između dužine najveće i dužine najmanje ose elipsoida E (takozvani ekscentritet elipsoida). Za $n = 2$, važi $H_I(\mathcal{A}) = H_O(\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$.

U slučaju da je f konformno preslikavanje, na osnovu svojstva *iii*) iz definicije konformnih preslikavanja, važi $\|f'(x)\| = \ell(f'(x))$, pa iz jednakosti (2.1) slijedi da je $H(f'(x)) = H_O(f'(x)) = H_I(f'(x)) = 1$. Dakle, $H(f'(x))$ mjeri u tački $x \in \Omega$ odstupanje/devijaciju C^1 homeomorfizma f od konformnog preslikavanja, jer ako je $H(f'(x)) = 1$ onda je preslikavanje konformno. Slično kao i kod geometrijske definicije, navedena činjenica ukazuje na "ponašanje" konformnih preslikavanja u jeziku dilatacija, što predstavlja osnov za definiciju K kvazikonformnih preslikavanja.

U slučaju da je f difeomorfizam (f bijektivno, $f \in C^1$, $f^{-1} \in C^1$), dokazuje se da je

$$K_I(f) = \sup_{x \in \Omega} H_I(f'(x)), \quad K_O(f) = \sup_{x \in \Omega} H_O(f'(x)),$$

što daje vezu između unutrašnje/spoljašnje dilatacije kod geometrijske i analitičke definicije. Važi sljedeća teorema.

Teorema 2.8. *Difeomorfizam $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ je K -kvazikonformno preslikavanje u odnosu na geometrijsku definiciju ako i samo ako važi*

$$\frac{\|f'(x)\|^n}{K} \leq |J(x, f)| \leq K \ell(f'(x))^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.6)$$

Međutim, kvazikonformno preslikavanje ne mora biti difeomorfizam, pa u opštem slučaju, ako je f diferencijabilna skoro svuda (što i jeste) tada posmatramo

$$H_I(f) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} H_I(f, x), \quad H_O(f) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} H_O(f, x), \quad H_L(f) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} H_L(f, x).$$

ACL neprekidnost

Neka je $Q = \{x \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ interval u \mathbf{R}^n . Za preslikavanje $f : Q \rightarrow \mathbf{R}^m$ kažemo da je *apsolutno neprekidno po linijama (ACL)* ako je f neprekidno i ako je f apsolutno neprekidno u skoro svakom segmentu unutar Q , paralelnom sa nekom koordinatnom osom, tj. ako je E_j , $j = \overline{1, n}$, skup tačaka $x \in p_j Q$ za koje preslikavanje $t \rightarrow f(x + te_j)$ nije apsolutno neprekidno u $[a_j, b_j]$, tada je njena $(n - 1)$ -dimenziona mjera jednaka nuli, za $1 \leq j \leq n$.

Ako je Ω otvoren skup u \mathbf{R}^n , tada kažemo da je $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ ACL preslikavanje ako je $f|_Q$ ACL u svakom zatvorenom intervalu $Q \subset \Omega$.

Ako su Ω i Ω' oblasti u $\overline{\mathbf{R}^n}$, tada za homeomorfizam $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ kažemo da je ACL ako je $f|_{D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}}$ ACL neprekidno.

Dokazuje se da kod ACL neprekidnih preslikavanja parcijalni izvodi postoje skoro svuda i da su Borel mjerljive funkcije [60, Teorema 26.4].

Familiju $ACL^p(\Omega)$, $p \geq 1$, čine ACL neprekidne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ za koje dodatno važi da su parcijalni izvodi lokalno L^p integrabilne funkcije.

Teorema 2.9. *Neka je $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ homeomorfizam. Tada je f kvazikonformno preslikavanje ako i samo ako f je ACL neprekidno, diferencijabilno, $J(x, f) \neq 0$, skoro svuda u Ω i $H_I(f)$, $H_O(f)$ i $H_L(f)$ su konačni. Štaviše,*

$$K_I(f) = H_I(f), \quad K_O(f) = H_O(f).$$

Teorema 2.10. *(Analitička definicija) Homeomorfizam $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ je K -kvazikonformno preslikavanje ako i samo ako su ispunjeni sljedeći uslovi*

- i) f je ACL,
- ii) f je diferencijabilno skoro svuda,
- iii) Za skoro svako $x \in \Omega$ važi

$$\frac{\|f'(x)\|^n}{K} \leq |J(x, f)| \leq K \ell(f'(x))^n. \quad (2.7)$$

2.2.3 Primjeri kvazikonformnih preslikavanja

Dajemo par jednostavnih primjera kvazikonformnih preslikavanja, koji ilustruju prethodne dvije definicije. Izbjegavamo već date primjere konformnih preslikavanja, koje smo naveli kroz Möbiusova preslikavanja.

Primjer 2.11. *Linearno bijektivno preslikavanje $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ je kvazikonformno preslikavanje.*

Kako je $\mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, to je relacija (2.6) očigledno zadovoljena.

Primjer 2.12. *Bi-Lipschitz neprekidno preslikavanje¹³ je kvazikonformno preslikavanje.*

¹³Za $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ kažemo da je L bi-Lipschitz neprekidno preslikavanje ako je

$$\frac{1}{L} \|x - y\|_n \leq \|f(x) - f(y)\|_m \leq L \|x - y\|_n, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Bi-Lipschitz preslikavanja su apsolutno neprekidna i diferencijabilna skoro svuda (Rademacherova teorema, vidjeti [12, Subsekcija 5.8.3]). U tačkama diferencijabilnosti važi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = f'(x)h,$$

pa iz neprekidnosti norme i definicije bi-Lipschitz neprekidnih preslikavanja slijedi

$$\frac{1}{L} \|h\| \leq \|f'(x)h\| \leq L \|h\|,$$

za skoro svako x i svako $h \in \mathbf{R}^n$. Odavde slijedi ograničenost za $\|f'(x)\|$ i $\ell(f'(x))$, nezavisno od x , što povlači da je relacija (2.7) zadovoljena.

Primjer 2.13. Za nenulti realan broj a , definišemo $f(x) = |x|^{a-1}x$. Preslikavanje f se može dodefinisati u $\overline{\mathbf{R}}^n$, tako da $f(0) = 0$ i $f(\infty) = \infty$, za $a > 0$ i $f(0) = \infty$ i $f(\infty) = 0$, za $a < 0$. Tada je $K_I(f) = |a|$, $K_O(f) = |a|^{n-1}$ za $|a| \geq 1$ i $K_I(f) = |a|^{1-n}$, $K_O(f) = |a|^{-1}$, za $|a| \leq 1$.

Iz simetričnosti može se dokazati da su poluose elipsoida koji se dobija kao slika \mathbf{B} pri preslikavanju $f'(x)$ jednake $|a|\|x\|^{a-1}$, $\|x\|^{a-1}, \dots, \|x\|^{a-1}$, odakle slijede navedene jednakosti.

2.3 Svojstva modula krivih i Morijeve teorema

Ova sekcija je posvećena dokazu Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja jedinične lopte \mathbf{B} . Počecemo izučavanjem nekih svojstva modula krivih i dokazati konformnu invarijantnost. Zatim ćemo razmatrati razne familije krivih, posebno izučavati dvije ekstremalne familije krivih i kroz nejednakosti za njihove module dobiti Hölder neprekidnost za familiju kvazikonformnih preslikavanja koje slikaju \mathbf{B} u \mathbf{B} i fiksiraju centar. Koristićemo geometrijsku definiciju kvazikonformnog preslikavanja, jer je ona u ovom slučaju pogodnija.

Rezultati ove sekcije su uglavnom reprodukcija materijala iz knjiga [60, 61]. U ostalim slučajevima literatura biće navedena na mjestu korišćenja.

Svojstva modula krivih i konformna invarijantnost

Kažemo da familija krivih Γ_2 je *minorizovana* familijom krivih Γ_1 , ako svaka kriva $\gamma \in \Gamma_2$ sadrži neku podkrivu koja pripada familiji Γ_1 , u oznaci $\Gamma_2 > \Gamma_1$.

Jednostavno je primijetiti da važi implikacija $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \implies \mathcal{F}(\Gamma_2) \subseteq \mathcal{F}(\Gamma_1)$. Odavde i iz same definicije p -modula slijede sljedeća svojstva za p -modul, $p \geq 1$, definisanog u (2.5).

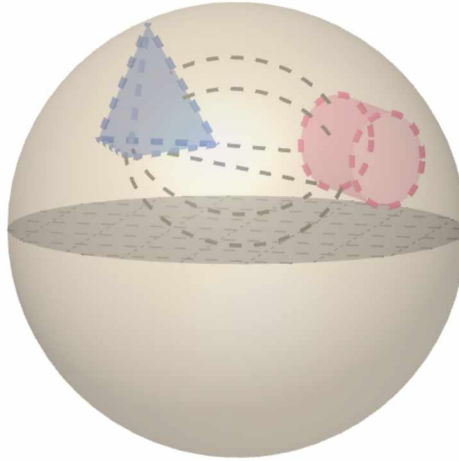
Lema 2.14. Za p -modul krivih važi:

- a) $M_p(\emptyset) = 0$.
- b) Ako je $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, tada $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$.

$$c) M_p \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} M_p(\Gamma_j).$$

d) Ako je $\Gamma_2 > \Gamma_1$, tada $M_p(\Gamma_2) \leq M_p(\Gamma_1)$.

Za $E, F, G \subset \overline{\mathbf{R}^n}$ označavamo sa $\Delta(E, F; G)$ familiju svih zatvorenih nekonstantnih krivih koje spajaju E sa F u G , tj. $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbf{R}^n}$ pripada familiji $\Delta(E, F; G)$ ako je $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ i $\gamma(t) \in G, \forall t \in (a, b)$ (slika 2.1). U slučaju da je $G = \overline{\mathbf{R}^n}$ ili $G = \mathbf{R}^n$ zapisujemo samo $\Delta(E, F)$.



Slika 2.1: Ilustracija familije krivih $\Delta(E, F; G)$, gdje je E piramida, F cilindar, a G lopta.

Primijetimo da na osnovu Leme 2.14 (b), (d), za $F \subset D$, D otvoren, važi

$$M_p(\Delta(F, \partial D)) = M_p(\Delta(F, \partial D; D)) = M_p(\Delta(F, \partial D); D \setminus F). \quad (2.8)$$

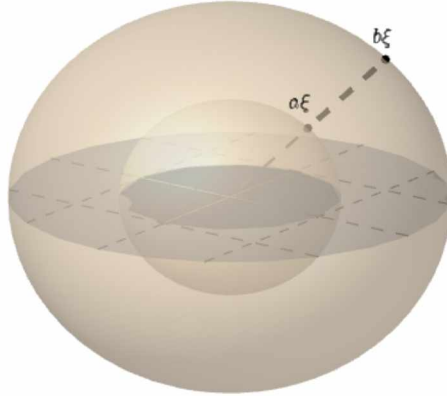
Određivanje modula neke familije krivih je prilično komplikovan zadatak. Potrebno je naći "dobro" donje ograničenje izraza $\int_{\mathbf{R}^n} \rho^n d\lambda$ za sve dopustive funkcije ρ , a onda dokazati da se to ograničenje i dostiže za neku konkretnu dopustivu funkciju ρ_0 . Pokazaćemo to u sljedećem primjeru sfernog prstena.

Primjer 2.15. Neka je $\Omega_{a,b} = \overline{B}(0, b) \setminus B(0, a)$, za $0 < a < b$. Tada je

$$M(\Gamma_{\Omega_{a,b}}) = n\alpha_n \left(\log \frac{b}{a} \right)^{1-n}, \quad (2.9)$$

gdje je $\Gamma_{\Omega_{a,b}} = \Delta(S(0, a), S(0, b), \Omega_{a,b})$.

Dokaz. Neka je $\rho \in \mathcal{F}(\Gamma_{\Omega_{a,b}})$. Za $\xi \in S$ posmatramo zatvorenu krivu $\gamma_\xi \in \Gamma_{\Omega_{a,b}}$ i njenu normalnu reprezentaciju $\gamma_\xi(t) = (t+a)\xi, t \in [0, b-a]$ (slika 2.2).


 Slika 2.2: Kriva γ_ξ na sferičnom prstenu

Koristeći definiciju (2.4), Hölderovu nejednakost i Fubinijevu teoremu vidimo da važe sljedeće nejednakosti

$$\begin{aligned}
 1 &\leq \left(\int_{\gamma_\xi} \rho dl \right)^n = \left(\int_0^{b-a} \rho((t+a)\xi) dt \right)^n \\
 &= \left(\int_a^b \rho(r\xi) r^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{n-1}{n}} dr \right)^n \\
 &\leq \left(\int_a^b \rho^n(r\xi) r^{n-1} dr \right) \left(\int_a^b \frac{1}{r} dr \right)^{n-1} \\
 &= \left(\log \frac{b}{a} \right)^{n-1} \int_a^b \rho^n(r\xi) r^{n-1} dt.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Integraljeći nejednakost (2.10) po svim $\xi \in S$, na osnovu formule (1.10), dobijamo

$$n\alpha_n \leq \left(\log \frac{b}{a} \right)^{n-1} \int_{\Omega_{a,b}} \rho^n d\lambda. \tag{2.11}$$

Kako je ρ proizvoljna dopustiva funkcija, to je

$$n\alpha_n \leq \left(\log \frac{b}{a} \right)^{n-1} M(\Gamma_{D_{a,b}}). \tag{2.12}$$

Ostaje da se odredi najavljenja funkcija ρ_0 , za koju se dostiže jednakost u (2.12). Imajući u vidu korišćene nejednakosti u (2.10), zaključujemo da se jednakost

dostiže za

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\| \log \frac{b}{a}}, & x \in \Omega_{a,b}, \\ 0, & x \notin \Omega_{a,b}. \end{cases}$$

Možemo se uvjeriti u istinitost naše pretpostavke, računskom provjerom koristeći opet (1.10). \square

Primjedba 2.16. Sa neznatnim razlikama u zapisu, prethodni rezultat važi i u slučaju kada posmatramo sfere sa centrom u nekoj proizvoljnoj fiksiranoj tački $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Posljedica 2.17. Primijetimo da, na osnovu (2.8), rezultat (2.9) važi i za familiju krivih $\Delta(S(0, a), S(0, b), \mathbf{R}^n)$, to jeste kada se $\Omega_{a,b}$ zamjenjuje sa čitavim prostorom \mathbf{R}^n . Koristeći Lemu 2.14 d) dobijamo da je

$$M(\Delta(\{0\}, S(0, b))) \leq n\alpha_n \left(\log \frac{b}{a} \right)^{1-n}, \text{ za } 0 < a < b,$$

pa puštajući $a \rightarrow 0^+$, slijedi

$$M(\Delta(\{0\}, S(0, b))) = 0, \text{ za } b > 0.$$

Lema 2.18. Neka je $x_0 \in \overline{\mathbf{R}^n}$ i neka je Γ familija nekonstantnih krivih koje prolaze kroz tačku x_0 . Tada je $M(\Gamma) = 0$.

Dokaz. Ako je $x_0 = \infty$, tada je tvrdjenje očigledno tačno, jer je jedina lokalno rektificijabilna kriva (jedino one ulaze u razmatranje) koja sadrži ∞ u stvari konstantna kriva. Dakle, možemo smatrati da je $\Gamma = \emptyset$, pa rezultat slijedi iz Leme 2.14 a).

Neka je $x_0 \in \mathbf{R}^n$ i neka je Γ_k skup svih krivih γ u Γ koje sijeku sferu $S(x_0, \frac{1}{k})$. Tada je $\Gamma_k \supset \Delta(\{x_0\}, S(x_0, \frac{1}{k}))$, pa je $M(\Gamma_k) = 0$, na osnovu Posljedice 2.17 i Leme 2.14 d). Kako je $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, to je $M(\Gamma) \leq \sum_k M(\Gamma_k) = 0$, na osnovu Leme 2.14 c). \square

Značaj prethodnog rezultat se ogleda u tome da, za računanje modula neke familije krivih, možemo zanemariti sve krive iz te familije koje prolaze kroz jednu fiksiranu tačku. Naime, važi $M(\Gamma \cup \Gamma_0) = M(\Gamma)$, ako je $M(\Gamma_0) = 0$, što proizilazi iz Leme 2.14 b), c).

Želimo dokazati da je modul familije krivih Γ konformna invarijanta. Biće nam potreban rezultat sljedeće teoreme, čiji dokaz se može naći u [60, Teorema 5.6].

Teorema 2.19. *Neka je Ω otvoren skup, $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ konformno preslikavanje i γ lokalno rektificijabilna kriva u Ω . Tada je $f \circ \gamma$ lokalno rektificijabilna kriva i važi*

$$\int_{f \circ \gamma} \rho dl = \int_{\gamma} \rho(f(x)) \|f'(x)\| |dx|,$$

za nenegativnu Borel mjerljivu funkciju ρ definisanu na skupu koji sadrži sliku krive $f \circ \gamma$.

Teorema 2.20. *Neka je $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ konformno preslikavanje između oblasti u $\overline{\mathbf{R}}^n$. Tada je $M(\Gamma) = M(f\Gamma)$, za svaku familiju krivih Γ u Ω , gdje je $f\Gamma = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da krive iz familija Γ i Γ' ne prolaze kroz tačku ∞ , na osnovu Leme 2.18 i paragrafa koji slijedi nakon dokaza.

Neka je $\rho_0 \in \mathcal{F}(f\Gamma)$. Definišemo Borel mjerljivu funkciju $\rho(x) = \rho_0(f(x)) \|f'(x)\|$, za $x \in \Omega$; $\rho(x) = 0$ inače. Iz Teoreme 2.19 slijedi da je

$$\int_{\gamma} \rho dl = \int_{f \circ \gamma} \rho_0 dl \geq 1,$$

za svaku lokalno rektificijabilnu krivu $\gamma \in \Gamma$. Dakle, funkcija ρ je dopustiva za familiju Γ . Na osnovu jednakosti (2.1) i teoreme o smjeni promjenljivih imamo

$$M(\Gamma) \leq \int_{\Omega} \rho^n d\lambda = \int_{\Omega} (\rho_0(f(x)))^n |J(x, f)| d\lambda(x) = \int_{f\Omega} \rho_0^n d\lambda \leq \int_{\mathbf{R}^n} \rho_0^n d\lambda.$$

Kako nejednakost važi za svako $\rho_0 \in \mathcal{F}(f\Gamma)$, to slijedi $M(\Gamma) \leq M(f\Gamma)$. Analogno se dokazuje da važi $M(f\Gamma) \leq M(\Gamma)$, jer je i f^{-1} konformno preslikavanje. \square

Dokazaćemo sada jednu korisnu teoremu, koja se odnosi na kolekciju razdvojenih familija krivih. Za familije krivih $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, kažemo da su *razdvojene familije krivih* ako postoje disjunktni Borel mjerljivi skupovi $E_j \subset \mathbf{R}^n$, $j = 1, 2, \dots$, tako da za svaku rektificijabilnu krivu $\gamma_j \in \Gamma_j$, $j = 1, 2, \dots$, važi

$$\int_{\gamma_j} \chi_j dl = 0,$$

gdje je χ_j karakteristična funkcija skupa $\mathbf{R}^n \setminus E_j$. Dakle, grubo rečeno dio krive γ_j koji se nalazi van E_j ima dužinu nula, odnosno γ_j "skoro čitava" je u E_j .

Teorema 2.21. *Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ razdvojene familije krivih u $\overline{\mathbf{R}}^n$ i $\Gamma_j < \Gamma$, za $j = \overline{1, m}$. Za $p > 1$ važi nejednakost*

$$M_p(\Gamma)^{\frac{1}{1-p}} \geq \sum_{j=1}^m M_p(\Gamma_j)^{\frac{1}{1-p}}. \quad (2.13)$$

Dokaz. Neka je $\{E_j\}_{j=1}^m$ disjunktna familija Borel mjerljivih skupova iz definicije razdvojenih familija krivih Γ_j . Posmatramo skup $E = \bigcup_{j=1}^m E_j$ i odgovarajuće karakteristične funkcije χ_{E_j} skupova E_j , za $j = \overline{1, m}$. Za proizvoljnu funkciju $\rho_j \in \mathcal{F}(\Gamma_j)$ konstruišemo njeno "siječenje" po skupu E_j , tj. funkciju $\sigma_j = \rho_j \cdot \chi_{E_j}$. U tom slučaju $\sigma_j \in \mathcal{F}(\Gamma_j)$. Naime,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{\gamma_j} \rho_j dl = \int_{\gamma_j \cap E_j} \rho_j dl + \int_{\gamma_j \cap E_j^c} \rho_j dl \\ &= \int_{\gamma_j \cap E_j} \rho_j dl = \int_{\gamma_j} \sigma_j dl, \end{aligned}$$

za svako $\gamma \in \Gamma_j$, zbog navedene činjenice da je γ_j "skoro čitava" u E_j .

Neka su $\{a_1, \dots, a_m\}$ realni brojevi za koje važi $0 \leq a_j \leq 1$ i $\sum_{j=1}^m a_j = 1$.

Definišemo Borel mjerljivu funkciju ρ sa

$$\rho = \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j,$$

gdje su funkcije σ_j , za $j = \overline{1, m}$, konstruisane kao gore. Dokazujemo da $\rho \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Neka je $\gamma \in \Gamma$ lokalno rektificijabilna kriva i neka su γ_j njene odgovarajuće podkrive iz familije krivih Γ_j , respektivno, za $j = \overline{1, m}$. Kako su funkcije σ_j dopustive za familije Γ_j , to je

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho dl &= \int_{\gamma} \sum_{j=1}^m a_j \sigma_j dl = \sum_{j=1}^m a_j \int_{\gamma_j} \sigma_j dl \\ &\geq \sum_{j=1}^m a_j \int_{\gamma_j} \sigma_j dl \geq \sum_{j=1}^m a_j \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Stoga $\rho \in \mathcal{F}(\Gamma)$, pa imamo

$$\begin{aligned} M_p(\Gamma) &\leq \int_{\mathbf{R}^n} \rho^p d\lambda = \int_E \rho^p d\lambda = \sum_{k=1}^m \int_{E_k} \left(\sum_{j=1}^m a_j \rho_j \chi_{E_j} \right)^p d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{E_k} a_k^p \rho_k^p d\lambda \leq \sum_{k=1}^m \int_{E_k} \sum_{j=1}^m a_j^p \rho_j^p d\lambda \quad (2.14) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j=1}^m a_j^p \rho_j^p d\lambda = \sum_{j=1}^m a_j^p \int_{\mathbf{R}^n} \rho_j^p d\lambda. \end{aligned}$$

Kako su funkcije ρ_j izabrane kao proizvoljne dopustive funkcije za familije Γ_j , respektivno za $j = \overline{1, n}$, uzimajući infimume sa desne strane nejednakosti (2.14),

dobijamo

$$M_p(\Gamma) \leq \sum_{j=1}^m a_j^p M_p(\Gamma_j). \quad (2.15)$$

Ostaje da se prikladnim odabirom konstanti a_j dobija tražena nejednakost. Prvo, eliminišemo trivijalne slučajeve. Ako je $M_p(\Gamma) = 0$, tada je lijeva strana nejednakosti (2.13) jednaka ∞ , pa nejednakost vrijedi. Takođe, slučaj kada je neko $M_p(\Gamma_j) = \infty$ se može zanemariti, budući da se tada odgovarajući član anulira i ne utiče na desnu stranu nejednakosti (2.13). Iz navedenog i na osnovu Leme 2.14 (d), možemo smatrati da je $M_p(\Gamma_j) \geq M_p(\Gamma) > 0$. Definišemo konstante

$$\lambda = \left(\sum_{j=1}^m M_p(\Gamma_j)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{-1} \quad \text{i} \quad a_j = M_p(\Gamma_j)^{\frac{1}{1-p}} \cdot \lambda,$$

za $j = \overline{1, m}$. Kako za naše odabrane vrijednosti a_j zaista važi $\sum_{j=1}^m a_j = 1$, iz nejednakosti (2.15) slijedi

$$M_p(\Gamma) \leq \lambda^p \sum_{j=1}^k M_p(\Gamma_j)^{\frac{p}{1-p}} M_p(\Gamma_j) = \left(\sum_{j=1}^k M_p(\Gamma_j)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p},$$

što je i trebalo dokazati. □

Za dokaz sljedeća dva rezultata je potrebno uvesti pojam sferne simetrizacije i modula krivih na sferi. Formulisaćemo ih bez dokaza. Dokaz Leme 2.22 se može naći u [17, str. 514-515], dok za dokaz Leme 2.23 vidjeti [60, Teorema 10.12].

Oznake $[u, v]$, za $u, v \in \mathbf{R}^n$, i $[u, \infty]$ označavaju, respektivno, skup $\{u + t(v - u) : 0 \leq t \leq 1\}$ i skup $[u, \infty] = \{tu : t \geq 1\}$.

Lema 2.22. *Za $s > 1$ neka je*

$$\Gamma_1 = \Delta\left([0, \frac{1}{s}e_1], S, \mathbf{B}\right) \quad \text{i} \quad \Gamma_2 = \Delta\left([0, \frac{1}{s}e_1], [se_1, \infty); \mathbf{R}^n\right).$$

Tada je $M_p(\Gamma_1) = 2^{p-1}M_p(\Gamma_2)$, za $p > 1$.

Lema 2.23. *Neka je $0 < a < b$ i neka su E i F skupovi u \mathbf{R}^n i $x_0 \in \mathbf{R}^n$, tako da je*

$$E \cap S(x_0, t) \neq \emptyset \neq F \cap S(x_0, t),$$

$\forall t \in (a, b)$. Tada je

$$M(\Delta(E, F, B(x_0, b) \setminus B(x_0, a))) \geq c_n \log \frac{b}{a},$$

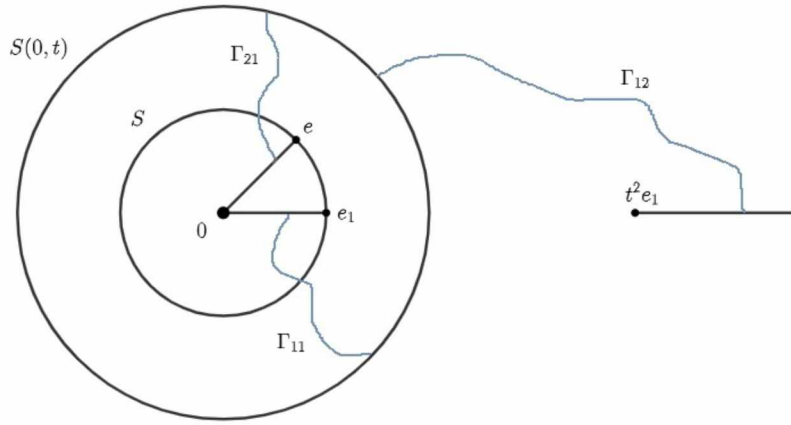
gdje je c_n konačan pozitivan realan broj koji zavisi samo od dimenzije prostora.

Dokazujemo sada jednu bitnu, i sa geometrijske tačke gledišta interesantnu, nejednakost između modula familija krivih, koja će nam biti potrebna u daljem radu.

Lema 2.24. *Neka je $\Gamma_1 = \Delta([0, e_1], [t^2 e_1, \infty))$ i $\Gamma_2 = \Delta([0, e], [t^2 e_1, \infty))$, gdje je $e \in S$ i $t > 1$. Tada je $M(\Gamma_2) \leq M(\Gamma_1)$.*

Dokaz. Posmatramo sljedeće familije krivih (slika 2.3):

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= \Delta([0, e_1], S(0, t)), \\ \Gamma_{21} &= \Delta([0, e], S(0, t)), \\ \Gamma_{12} &= \Delta(S(0, t), [t^2 e_1, \infty)).\end{aligned}$$



Slika 2.3: Familije krivih Γ_{11} , Γ_{12} i Γ_{21} .

Na osnovu Teoreme 2.20 o konformnoj invarijantnosti važi

$$M(\Gamma_{11}) = M(\Gamma_{21}),$$

jer se Γ_{11} preslikava u Γ_{21} preko rotacije.

Dalje, familija krivih Γ_{11} preko inverzije oko sfere $S(0, t)$ se preslikava u familiju krivih Γ_{12} , jer se sfera fiksira pri inverziji oko nje, a duž $[0, e_1]$ se slika u duž $[t^2 e_1, \infty)$. Na osnovu konformne invarijantnosti imamo

$$M(\Gamma_{11}) = M(\Gamma_{12}).$$

Na osnovu prethodnih jednakosti, i Teoreme 2.21 dobijamo nejednakost

$$M(\Gamma_2)^{\frac{1}{1-n}} \geq M(\Gamma_{21})^{\frac{1}{1-n}} + M(\Gamma_{12})^{\frac{1}{1-n}} = 2M(\Gamma_{11})^{\frac{1}{1-n}}, \quad (2.16)$$

jer se $\Gamma_{21} = \Delta([0, e], S(0, t))$, $\Gamma_{12} = \Delta(S(0, t), [t^2 e_1, \infty))$, na osnovu jednakosti (2.8), mogu posmatrati kao razdvojene familije krivih.

Konačno, iz Leme 2.22 (koristeći homotetiju $x \rightarrow \frac{1}{t}x$) slijedi da je

$$M(\Gamma_{11}) = 2^{n-1}M(\Gamma_1),$$

što uvrštavajući u (2.16) daje traženu nejednakost. \square

Primijetimo da za spajanje komponenti kod familije Γ_1 su nam potrebne "kraće" krive nego kod Γ_2 . To grubo rečeno, povlači da za Γ_2 funkcija je dopustiva i ako uzima manje vrijednosti (nadoknađuje integral sa dužinom krive) i zbog toga je prirodno da modul te familije bude manji.

Prsteni u \mathbf{R}^n

Motivisani sfernim prstenom iz Primjera 2.15, definišimo pojam prstena u $\overline{\mathbf{R}}^n$.

Definicija 2.25. *Oblast $\Omega \subset \overline{\mathbf{R}}^n$ se naziva prstenom ako $\overline{\mathbf{R}}^n \setminus \Omega$ ima dvije komponente povezanosti i koristimo oznaku $\Omega = \mathcal{R}(C_0, C_1)$, gdje su C_0 i C_1 navedene komponente povezanosti.*

Poznata je činjenica iz topologije da pod uslovima prethodne definicije i $\partial\Omega$ ima dvije komponente povezanosti, i to $B_0 = \overline{\Omega} \cap C_0$ i $B_1 = \overline{\Omega} \cap C_1$. Prirodno je svakom prstenu $\Omega = \mathcal{R}(C_0, C_1)$ pridružiti familiju krivih $\Gamma_{\mathcal{R}} = \Delta(C_0, C_1; \overline{\mathbf{R}}^n)$, tj. familiju krivih koje spajaju komponente povezanosti komplementa prstena. Napomenimo da se za modul familije $\Delta(C_0, C_1; \overline{\mathbf{R}}^n)$ koristi termin *kapacitet prstena* $\mathcal{R}(C_0, C_1)$, dok se vrijednost

$$\text{mod}\mathcal{R}(C_0, C_1) = \left(\frac{M(\Delta(C_0, C_1))}{n\alpha_n} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

naziva (*konformni*) *modul prstena* $\mathcal{R}(C_0, C_1)$. *Modul prstena* je naročito značajan u dimenziji $n = 2$. Naime, $\text{mod}\mathcal{R} = t$ ako i samo ako se prsten \mathcal{R} može konformno preslikati u kružni prsten $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < e^t\}$. Naravno, u dimenzijama $n \geq 3$ nema takve interpretacije zbog manjkosti konformnih preslikavanja (Teorema 2.4). Svakako modul prstena ima bitnu ulogu, naročito u izučavanju svojstva takozvanog Grötzschovog prstena.

Kapacitet prstena \mathcal{R} ne zavisi od toga da li posmatramo krive koje pripadaju prstenu \mathcal{R} , \mathbf{R}^n ili $\overline{\mathbf{R}}^n$, ni od toga da li krive spajaju komponente povezanosti (C_0 i C_1) komplementa prstena ili komponente povezanosti (B_0 i B_1) granice prstena. Konkretno, familije krivih

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{R}} &= \Delta(C_0, C_1; \overline{\mathbf{R}}^n), & \Gamma_{\mathcal{R}}^1 &= \Delta(C_0, C_1; \mathcal{R}), & \Gamma_{\mathcal{R}}^2 &= \Delta(C_0, C_1; \mathbf{R}^n), \\ \Gamma_{\mathcal{R}}^3 &= \Delta(B_0, B_1; \overline{\mathbf{R}}^n), & \Gamma_{\mathcal{R}}^4 &= \Delta(B_0, B_1; \mathcal{R}), & \Gamma_{\mathcal{R}}^5 &= \Delta(B_0, B_1; \mathbf{R}^n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

imaju isti modul. Naime, koristeći Lemu 2.14 (b), (d), izvedemo sljedeće zaključke:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{R}}^4 \subset \Gamma_{\mathcal{R}}^1 &> \Gamma_{\mathcal{R}}^4 && \text{povlači} && M(\Gamma_{\mathcal{R}}^4) = M(\Gamma_{\mathcal{R}}^1); \\ \Gamma_{\mathcal{R}}^1 \subset \Gamma_{\mathcal{R}} &> \Gamma_{\mathcal{R}}^1 && \text{povlači} && M(\Gamma_{\mathcal{R}}^1) = M(\Gamma_{\mathcal{R}}); \\ \Gamma_{\mathcal{R}}^4 \subset \Gamma_{\mathcal{R}}^3 &> \Gamma_{\mathcal{R}}^4 && \text{povlači} && M(\Gamma_{\mathcal{R}}^4) = M(\Gamma_{\mathcal{R}}^3). \end{aligned}$$

Krive koje prolaze kroz fiksiranu tačku ∞ nemaju uticaj na modul, pa je $M(\Gamma_{\mathcal{R}}) = M(\Gamma_{\mathcal{R}}^2)$ i $M(\Gamma_{\mathcal{R}}^3) = M(\Gamma_{\mathcal{R}}^5)$.

Pojam *prstena* u \mathbf{R}^n je bitan zbog nekoliko razloga. Ispostavlja se da je moguće definisati kvazikonformna preslikavanja preko modula familija krivih oblika $\Gamma_{\mathcal{R}}$, gdje je \mathcal{R} prsten. Iako su prsteni nastali kao generalizacija sfernih prstena, ipak dvije klase prstena imaju veliki značaj u izučavanju modula krivih, u rješavanju raznih ekstremalnih problema kao i u teoriji kvazikonformnih preslikavanja.

Grötzschov prsten, u oznaci $\mathcal{R}_{G_n}(s)$, je $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{B}}, [se_1, \infty))$, za $s > 1$.

Teichmüllerov prsten, u oznaci $\mathcal{R}_{T_n}(s)$, je $\mathcal{R}([-e_1, 0], [se_1, \infty))$, $s > 0$.

U vezi sa time definišemo i sljedeće funkcije

$$\gamma_n(s) := M(\Delta(\overline{\mathbf{B}}, [se_1, \infty)), s > 1,$$

$$\tau_n(s) := M(\Delta([-e_1, 0], [se_1, \infty)), s > 0,$$

respektivno funkciju *Grötzschovog* i *Teichmüllerovog kapaciteta*, tj. funkcije koje u zavisnosti od promjenljive s daju modul familije krivih koje spajaju komponente povezanosti komplementa Grötzschovog, odnosno Teichmüllerovog prstena (slika 2.4).



Slika 2.4: Grötzschov (lijevo) i Teichmüllerov prsten (desno) i odgovarajuće familije krivih $\Gamma_{G_n(s)}$ i $\Gamma_{T_n(s)}$

Radi pojednostavnosti označićemo familiju:

$$\Delta(\overline{\mathbf{B}}, [se_1, \infty)), s > 1, \text{ sa } \Gamma_{G_n(s)};$$

i

$$\Delta([-e_1, 0], [se_1, \infty)), s > 0, \text{ sa } \Gamma_{T_n(s)}.$$

Sljedećom teoremom pokazujemo monotonost funkcije γ_n , ispitujemo granično ponašanje i dajemo direktnu vezu između Grötzschovog i Teichmüllerovog kapaciteta.

Lema 2.26. *Funkcija γ_n je strogo opadajuća i važi*

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \gamma_n(s) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_n(s) = 0. \quad (2.18)$$

Grötzschov i Teichmüllerov kapacitet su povezani relacijom

$$\gamma_n(s) = 2^{n-1} \tau_n(s^2 - 1), \quad \forall s \in (1, \infty). \quad (2.19)$$

Dokaz.

γ_n je strogo opadajuća funkcija.

Neka je $1 < s < t$. Posmatramo prstene

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \left(\mathbf{B}, B^C \left(0, \frac{t}{s} \right) \right) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \left(B \left(0, \frac{t}{s} \right), [te_1, \infty) \right).$$

Prsten \mathcal{R}_1 je sferni, pa na osnovu Primjera 2.15 i jednakosti modula (2.17) imamo $M(\Gamma_{\mathcal{R}_1}) = n\alpha_n (\log \frac{t}{s})^{1-n}$. Iz konformne invarijantnosti modula krivih pri homotetiji slijedi $M(\Gamma_{\mathcal{R}_2}) = \gamma_n(s)$. Zbog jednakosti (2.17) za kapacitete prstena možemo smatrati da su familije krivih $\Gamma_{\mathcal{R}_1}$ i $\Gamma_{\mathcal{R}_2}$ razdvojene i da važi $\Gamma_{\mathcal{R}_1}, \Gamma_{\mathcal{R}_2} < \Gamma_{G_n(t)}$, pa na osnovu Teoreme 2.21 važi

$$\begin{aligned} (\gamma_n(t))^{\frac{1}{1-n}} &= M(\Gamma_{G_n(t)})^{\frac{1}{1-n}} \geq M(\Gamma_{\mathcal{R}_1})^{\frac{1}{1-n}} + M(\Gamma_{\mathcal{R}_2})^{\frac{1}{1-n}} \\ &= (n\alpha_n)^{\frac{1}{1-n}} \log \frac{t}{s} + (\gamma_n(s))^{\frac{1}{1-n}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

odakle slijedi $(\gamma_n(t))^{\frac{1}{1-n}} > (\gamma_n(s))^{\frac{1}{1-n}}$, odnosno $\gamma_n(t) < \gamma_n(s)$.

Dokaz za (2.18).

Za $t \in (s-1, 2)$ sfera $S(e_1, t)$ ima neprazan presjek sa S i neprazan presjek sa $[se_1, \infty)$, pa na osnovu Leme 2.23 slijedi

$$\gamma_n(s) \geq c_n \log \frac{2}{s-1}.$$

Puštajući $s \rightarrow 1^+$, dobijamo da je $\lim_{s \rightarrow 1^+} \gamma(s) = +\infty$.

Za drugu graničnu relaciju, primijetimo da je familija $\Gamma_{G_n(s)}$ minorizovana familijom $\Delta(S, S(s), \Omega_{1,s})$, pa na osnovu Leme 2.14 (d) slijedi

$$\gamma_n(s) \leq M(\Delta(S, S(0, s), \Omega_{1,s})) = n\alpha_n (\log s)^{1-n}.$$

Puštajući $s \rightarrow \infty$ dobijamo da je $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = 0$.

Dokaz za (2.19).

Neka je $\Gamma_1 = \Delta([0, \frac{1}{s}e_1], S)$ i $\Gamma_2 = \Delta([0, \frac{1}{s}e_1], [se_1, \infty))$. Iz konformne invarijantnosti (inverzija oko S) slijedi da je $M(\Gamma_1) = M(\Gamma_{G_n(s)}) = \gamma_n(s)$, pa je

$$\gamma_n(s) = 2^{n-1} M(\Gamma_2), \quad (2.21)$$

na osnovu Leme 2.22. Primijetimo da se familija krivih Γ_2 , preko konformnog preslikavanja $f(x) = sx - e_1$ preslikava u familiju $\Gamma_{T_n(s^2-1)}$. Tražena jednakost sada slijedi iz konformne invarijantnosti i (2.21). \square

Na osnovu dobijene veze između kapaciteta Grötzschovog i Teichmüllerovog prstena, i ostalih dokazanih svojstva funkcije $\gamma_n(s)$, trivijalno dobijamo da važe sljedeće relacije za funkciju Teichmüllerovog kapaciteta $\tau_n(s)$, $s \in (0, \infty)$.

Posljedica 2.27. *Funkcija $\tau_n(s)$ je strogo opadajuća i važi*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \tau_n(s) = +\infty \quad i \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau_n(s) = 0.$$

Dajemo sada dvije korisne nejednakosti koje ukazuju na ekstremalna svojstva Teichmüllerovog prstena. Svojstvo ekstremalnosti za neki prsten podrazumjeva da je njen kapacitet najmanji/najveći u odnosu na neku familiju prstena sa datom geometrijom, kojoj taj prsten pripada. Za dokaz prve leme se koristi konformna invarijantnost i pojam sferne simetrizacije. Njen dokaz se može naći u [61, Lema 7.34].

Lema 2.28. *Neka je $\mathcal{R} = \mathcal{R}(E, F)$ prsten u \mathbf{R}^n , tako da su $a, b \in E$ i $c, \infty \in F$ različite tačke. Tada*

$$M(\Delta(E, F)) \geq \tau_n \left(\frac{\|a - c\|}{\|a - b\|} \right).$$

Lema 2.29. *Neka je $E = [0, e_1]$ i $F = [x, \infty)$ za $x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}$. Tada*

$$M(\Delta(E, F)) \leq \tau_n(\|x\| - 1).$$

Dokaz. Koristeći konformnu invarijantnost modula pri rotaciji slijedi da je

$$M(\Delta(E, F)) = M(\Gamma_2),$$

gdje je $\Gamma_2 = \Delta([0, e_1], \|x\|e_1, \infty)$, za neko $e \in S$. Na osnovu Leme 2.24, imamo da je

$$M(\Gamma_2) \leq M(\Gamma_1),$$

gdje je $\Gamma_1 = \Delta([0, e_1], [\|x\|e_1, \infty))$. Translacijom za vektor $-e_1$ dobijamo da je $M(\Gamma_1) = \tau_n(\|x\| - 1)$, pa je tražena nejednakost dokazana. \square

U nastavku ćemo izučavati jednu specijalnu funkciju, koja je usko povezana sa Grötzschovim kapacitetom.

Za $0 < r < 1$ i $K > 0$ definišemo funkciju

$$\varphi_{K,n}(r) = \frac{1}{\gamma_n^{-1} \left(K \gamma_n \left(\frac{1}{r} \right) \right)}. \quad (2.22)$$

Primijetimo da pošto je funkcija γ_n strogo opadajuća to postoji γ_n^{-1} , koja je takođe opadajuća funkcija. Koristeći Lemu 2.26 slijedi sljedeći niz implikacija

$$0 < r_1 < r_2 < 1 \Rightarrow \gamma_n \left(\frac{1}{r_1} \right) < \gamma_n \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow \gamma_n^{-1} \left(K \gamma_n \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) > \gamma_n^{-1} \left(K \gamma_n \left(\frac{1}{r_2} \right) \right) \Rightarrow \varphi_{K,n}(r_1) < \varphi_{K,n}(r_2),$$

što povlači da je funkcija $\varphi_{K,n}$ strogo rastuća u $(0, 1)$. Imajući u vidu granično ponašanje kapaciteta Grötzschovog prstena $\gamma_n(s)$ iz Leme 2.26, funkciju $\varphi_{K,n}$ možemo dodefinisati neprekidno u $[0, 1]$, tako da je $\varphi_{K,n}(0) = 0$ i $\varphi_{K,n}(1) = 1$. Zato funkciju $\varphi_{K,n}$ ćemo posmatrati kao bijektivno preslikavanje iz $[0, 1]$ u $[0, 1]$. Definišemo sada funkciju $\Phi : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ tako da je

$$\log(\Phi(s)) = \text{mod}(\mathcal{R}_{G_n(s)}) = \left(\frac{\gamma_n(s)}{n\alpha_n} \right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Na osnovu relacije (2.20) imamo da za $t > s > 1$ važi

$$\log(\Phi(t)) \geq \log \frac{t}{s} + \log(\Phi(s)), \quad (2.23)$$

odnosno

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq \frac{\Phi(s)}{s},$$

što znači da je funkcija $\frac{\Phi(t)}{t}$ rastuća. Pokazuje se da je data funkcija i ograničena odozgo pa postoji granična vrijednost

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \lambda_n.$$

Konstanta λ_n se u literaturi naziva Grötzschova konstanta. Njena tačna vrijednost je jedino poznata za $n = 2$ i iznosi $\lambda_2 = 4$ (vidjeti [43, str. 61]). U većim dimenzijama poznate su razne procjene koje proizilaze iz nejednakosti

$$0 \leq \log \frac{\lambda_n}{4} \leq \int_1^\infty \frac{1}{t} \left(\left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \right) dt.$$

Između ostalog, važi $\lambda \in [4, 2e^{n-1})$ i $\lambda_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow e$, kada $n \rightarrow \infty$ (vidjeti [17, str. 518], [11, str. 239-241], [4]).

Dokazujemo sada neke jednostavne, a korisne nejednakosti u vezi sa funkcijom $\varphi_{K,n}(r)$ i konstantom λ_n . Potrebno je definisati funkciju

$$M(r) = \log \left(\Phi \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \text{mod}(\mathcal{R}_{G_n(\frac{1}{r})}) = \left(\frac{\gamma_n(\frac{1}{r})}{n\alpha_n} \right)^{\frac{1}{1-n}},$$

za $r \in (0, 1)$. Na osnovu već dokazanog za funkciju γ_n , funkcija $M(r)$ je opadajuća.

Lema 2.30. Za $n \geq 2$, $K \geq 1$ i $0 \leq r \leq 1$ važi

$$\Phi_{K,n}(r) \leq \lambda_n^{1-\alpha} r^\alpha,$$

gdje je $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$.

Dokaz. Za $r = 0$ i $r = 1$ nejednakost je trivijalno tačna.

Neka je $r \in (0, 1)$ i $\varphi_{K,n}(r) = r'$. Na osnovu (2.22) imamo da je $\gamma_n\left(\frac{1}{r'}\right) = K\gamma_n\left(\frac{1}{r}\right)$, što povlači da je

$$M(r') = K^{\frac{1}{1-n}} M(r) = \alpha M(r). \quad (2.24)$$

Kako je $\alpha \leq 1$, to je $M(r') \leq M(r)$ i posljedično $r' \geq r$. Iz $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{r'}$ i nejednakosti (2.23) slijedi

$$\log \left(\Phi \left(\frac{1}{r} \right) \right) \geq \log \left(\frac{r'}{r} \right) + \log \left(\Phi \left(\frac{1}{r'} \right) \right),$$

odnosno

$$M(r) + \log r \geq M(r') + \log r'. \quad (2.25)$$

Kako je

$$M(r) + \log(r) = \log \left(\Phi \left(\frac{1}{r} \right) \right) - \log \frac{1}{r} \leq \log \lambda_n,$$

to koristeći (2.25) vidimo da važi

$$0 \leq \log \frac{\lambda_n}{r} - M(r) \leq \log \frac{\lambda_n}{r'} - M(r'),$$

odnosno

$$\alpha \log \frac{\lambda_n}{r} - \alpha M(r) \leq \log \frac{\lambda_n}{r'} - M(r'),$$

jer je $\alpha \in (0, 1]$. Iz prethodne nejednakosti i relacije (2.24) konačno slijedi

$$r' \leq \lambda_n^{1-\alpha} r^\alpha,$$

što je trebalo dokazati. □

Formulišemo sada princip refleksije koji omogućava da se kvazikonformno preslikavanje u \mathbf{B} produži u $\overline{\mathbf{R}}^n$, koristeći inverziju oko sfere S , koje je konformno preslikavanje. Za dokaz nešto opštijeg tvrdjenja vidjeti [60, Teorema 35.2].

Lema 2.31. Neka je $f : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ K -kvazikonformno preslikavanje tako da je $f(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ i $f(0) = 0$ i neka je $J : \overline{\mathbf{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^n$, inverzija oko sfere S , tj. $J(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $J(\infty) = 0$ i $J(0) = \infty$ i definišemo $g : \overline{\mathbf{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^n$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbf{B}, \\ J(f(J(x))), & x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}, \\ \lim_{z \rightarrow x} f(z), & x \in S. \end{cases}$$

Tada je g K -kvazikonformno preslikavanje u $\overline{\mathbf{R}}^n$.

Svi neophodni "sastojci" su sada dostupni za dokaz Morijeve teoreme o kvazikonformnim preslikavanjima. Morijeva teorema obezbijuje Hölder neprekidnost kvazikonformnog preslikavanja koje slika \mathbf{B} u \mathbf{B} i fiksira tačku 0. Svojstvo Hölder neprekidnosti za ova preslikavanja u ravni prvi je dokazao Z. Ÿjjba u radu [63]. Kasnije ćemo objasniti razloge zašto teorema nosi ime japanskog matematičara Akira Morija. Dokaz koji ćemo ovdje prikazati se zasniva na radu [3].

Teorema 2.32. [*Morijeva teorema*] *Neka je f K -kvazikonformno preslikavanje iz \mathbf{B} u \mathbf{B} , tako da je $f(0) = 0$. Tada*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 4\lambda_n^{2(1-\alpha)} \|x - y\|^\alpha,$$

za $x, y \in \mathbf{B}$, gdje je $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$.

Dokaz. Na osnovu Leme 2.31 preslikavanje f možemo produžiti do K -kvazikonformnog preslikavanja u $\overline{\mathbf{R}}^n$, tako da je $f(\infty) = \infty$. Kako je nejednakost trivijalno tačna za $x = y$, pretpostavimo da je $x \neq y$ i $x \neq 0$.

Ako je $\|x - y\| \geq 1$, tada je

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \leq 2\|x - y\|^{\frac{1}{K}} \leq 2\|x - y\|^\alpha,$$

jer je $\frac{1}{K} \leq \alpha$.

Neka je $\|x - y\| < 1$. Posmatramu familiju krivih $\Gamma = \Delta([x, y], [z, \infty])$ i $\Gamma' = f(\Gamma)$, gdje je $z = -\frac{x}{\|x\|}$. Na osnovu Leme 2.29, kvazikonformnosti preslikavanja f i Leme 2.28 imamo da je

$$\tau_n \left(\frac{\|f(x) - f(z)\|}{\|f(x) - f(y)\|} \right) \leq M(\Gamma') \leq KM(\Gamma) \leq K\tau_n \left(\frac{\|z - x\|}{\|x - y\|} - 1 \right).$$

Kod posljednje nejednakosti je korišćena konformna invarijantnost pri Möbiusovom transformacijom $w \rightarrow \frac{w-x}{\|x-y\|}$. Iz osnovne veze (2.19) između Grttschovog i Teichmllerovog kapaciteta prethodna nejednakost dobija oblik

$$\begin{aligned} \gamma_n \left(\left(\frac{\|f(z) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\|}{\|f(x) - f(y)\|} \right)^{\frac{1}{2}} \right) &\leq K\gamma_n \left(\left(\frac{1 + \|x\|}{\|x - y\|} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq K\gamma_n \left(\frac{1}{\|x - y\|^{\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned}$$

jer je $\|z - x\| = \left\| -\frac{x}{\|x\|} - x \right\| = 1 + \|x\|$.

Djelovanjem opadajućom funkcijom γ_n^{-1} , zatim posmatrajući recipročnu vrijednost i kvadrirajući, dobijamo nejednakost

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|f(z) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\|} \leq \Phi_{K,n}^2(\|x - y\|^{\frac{1}{2}}).$$

Kako je $\|f(x) - f(y)\| + \|f(x) - f(y)\| \leq 4$, to je

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 4\Phi_{K,n}^2(\|x - y\|^{\frac{1}{2}}).$$

Koristeći Lemu 2.30 konačno imamo

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 4\lambda_n^{2(1-\alpha)}\|x - y\|^\alpha,$$

što je trebalo dokazati. □

Najmanja konstanta $M(n, K)$ za koju nejednakost

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M(n, K)\|x - y\|^\alpha, \text{ za } x, y \in \mathbf{B}, \alpha = K^{\frac{1}{1-n}},$$

važi za sva K kvazikonformna preslikavanja f iz \mathbf{B} u \mathbf{B} , $f(0) = 0$, se naziva Morijeva konstanta. Za slučaj ravni, A. Mori u radu [50] objavljenom 1956¹⁴, je dokazao da je nejednakost tačna sa Hölder koeficijentom 16 i da se ta konstanta ne može zamijeniti sa manjom konstantom, koja ne zavisi od K . Međutim, odrediti najmanju konstantnu $M(2, K)$ u zavisnosti od K , je i dalje otvoren problem. Do danas, najbolji postignuti rezultat za ravan je konstanta $46^{1-\frac{1}{K}}$ u radu [59]. Sa druge strane, postoji i donje ograničenje: $M(2, K) \geq 16^{1-\frac{1}{K}}$, dato u knjizi [43]. Kako nije dokazana Hölder neprekidnost sa koeficijentom $16^{1-\frac{1}{K}}$ za sva razmatrana preslikavanja, ali nije pronađen ni primjer funkcije koje nije Hölder neprekidno sa koeficijentom $16^{1-\frac{1}{K}}$ (već većim), ostaje otvoreno pitanje da li je $M(2, K) = 16^{1-\frac{1}{K}}$, što je poznato i kao Morijeva konjektura.

Za opšte n ima još manje konkretnih rezultata oko tačne vrijednosti $M(n, K)$, ali je dokazano da $M(n, K) \rightarrow 1$, kada $K \rightarrow 1$. Jedan od značajnih gornjih ograničenja je ovo koje smo mi pokazali, a drugi rezultati se mogu naći u radovima [3, 8, 13, 19, 58].

¹⁴Rad je objavljen godinu nakon njegove smrti, na osnovu pronađenih njegovih rukopisa.

Glava 3

Modul neprekidnosti kvazikonformnih preslikavanja iz \mathbf{B} u prostornu oblast Ω

U centru razmatranja ove glave je sljedeći problem: pod kojim dodatnim uslovima kvazikonformno preslikavanje iz jedinične lopte \mathbf{B} u prostornu oblast je Lipschitz ili Hölder neprekidno? Uslove koje ćemo odabrati su prirodni, jer dolaze iz već dokazanih rezultata u ravni i odnose se na glatkost kodomena, kao i na harmoničnost ili "kontrolisan" Laplasijan našeg preslikavanja. Protoprimjer ovih problema je sljedeći rezultat iz kompleksne analize: konformna preslikavanja iz jediničnog diska $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ u sebe, tj. Möbiusove transformacije oblika

$$f(z) = e^{it} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad t \in [0, 2\pi), a \in \mathbf{D},$$

su Lipschitz neprekidna u \mathbf{D} .

U prvoj sekciji ove glave dajemo neke osnovne definicije, koje se tiču rezultata i postavke problema. U Sekciji 3.2 uopštavamo Hardy-Littlewood teorem u prostoru. Centralni rezultati su sadržani:

- u Sekciji 3.3, gdje dokazujemo Lipschitz neprekidnost za kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom;
- u Sekciji 3.4, gdje dokazujemo Lipschitz neprekidnost za kvazikonformno preslikavanje čiji Laplasijan pripada prostoru $L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, za $p > n$, iz \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom;
- u Sekciji 3.5, gdje dokazujemo uniformnu Hölder neprekidnost za kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa C^1 granicom.

Svi ovi rezultati i sadržaj ove glave, osim Sekcije 3.1, su zasnovani na autorskim radovima [23, 24]

3.1 Osnovni pojmovi

U ovoj sekciji definišemo osnovne pojmove koji se tiču postavke zadatka.

Hölder i Lipschitz neprekidnost

Neka je $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ i $0 < \alpha < 1$. Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ kažemo da je α -Hölder neprekidna u tački x_0 , ako je vrijednost izraza

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \{x_0\}} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|^\alpha} \quad (3.1)$$

konačna. Ako se u (3.1) dobija konačna vrijednost u slučaju $\alpha = 1$, tada kažemo da je f Lipschitz neprekidna u tački x_0 . Primijetimo da Lipschitz neprekidnost povlači α -Hölder neprekidnost, za svako $\alpha \in (0, 1)$, kao i da α -Hölder neprekidnost u tački x_0 povlači α_1 -Hölder neprekidnost u toj tački, za $0 < \alpha_1 < \alpha < 1$. Ako je funkcija Hölder neprekidna u tački x_0 (za neki eksponent α) tada je funkcija f neprekidna u toj tački.

Navedene definicije se prirodno proširuju i u ravnomjernom obliku za čitav skup Ω . Kažemo da je f (uniformno) α -Hölder neprekidna u Ω ako je vrijednost izraza

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} \quad (3.2)$$

konačna, i f je (uniformno) Lipschitz neprekidna u Ω ako je vrijednost izraza u (3.2) konačna za $\alpha = 1$. Za funkciju kažemo da je lokalno α -Hölder neprekidna u Ω ako je f uniformno α -Hölder neprekidna na svakom kompaktu u Ω .

Analogno, kao i kod Hölder neprekidnosti u fiksiranoj tački, (uniformna) Hölder neprekidnost sa većim eksponentom povlači (uniformnu) Hölder neprekidnost sa manjim eksponentom, i Lipschitz neprekidnost povlači (uniformnu) α -Hölder neprekidnost, za svako $\alpha \in (0, 1)$.

Neka je k nenegativan cio broj i $\alpha \in (0, 1]$. Hölderov prostor $C^{k, \alpha}(\Omega)$ se definiše kao potprostor prostora $C^k(\Omega)$ koji se sastoji od funkcija čiji su parcijalni izvodi k -tog reda α -Hölder neprekidne funkcije u Ω .

Glatkost granice prostorne oblasti

U našim razmatranjima posmatramo preslikavanja iz jedinične lopte \mathbf{B} u prostornu oblast Ω , sa granicom određene glatkosti. Konkretno, zanimaju nas oblasti koji imaju C^1 i $C^{1, \alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, glatku granicu.

Definicija 3.1. Oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ima granicu C^k glatkosti, $k \in \mathbf{N}$, ako postoji C^k difeomorfizam g iz neke okoline zatvorene jedinične lopte $\overline{\mathbf{B}}$, tako da $g(\overline{\mathbf{B}}) = \overline{\Omega}$.

Analogno se definiše i oblast sa $C^{k,\alpha}$ granicom, pri čemu $\alpha \in (0, 1)$. Ovakva definicija nam omogućava da napravimo vezu između lopte i prostorne oblasti Ω , što u slučaju kvazikonformnog preslikavanja povlači Hölder neprekidnost, na osnovu Morijeve teoreme. Štaviše, značaj ovih oblasti se ogleda u tome što se njihova granica može "ispravljati", tj. da se lokalno, nakon dejstva neke izometrije, može predstaviti kao grafik funkcije odgovarajuće glatkosti.

3.2 Hardy-Littlewood teoreme za prostor

U ovoj sekciji uopštavamo rezultat Hardy-Littlewood teoreme iz ravni u prostor. U slučaju ravni dokaz za analitičke funkcije se može naći u [25, Sekcija 9.5, Teorema 3]. U prostoru teoremu dokazujemo za harmonijske funkcije u \mathbf{B} . Za proizvoljno $\mu \in (0, 1)$, teoremom se daje veza između μ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku $\eta \in S$ harmonijskog preslikavanja u i jednog oblika ograničenosti parcijalnog izvoda funkcije u duž radijus vektora koji spaja centar sfere sa tačkom η . Naime, za $\mu = 1$, navedena ograničenost se svodi na običnu ograničenost parcijalnog izvoda duž radijus vektora, što je prirodno na osnovu Lagrangeove teoreme o srednjim vrijednostima. Dakle, teorema donosi ekvivalenciju između dva uslova, pri čemu jedan se odnosi na sferu, a drugi na unutrašnjost lopte \mathbf{B} , i ta veza će i obilježiti dokaze centralnih rezultata ove glave.

Teorema 3.2. *Neka je $u : \overline{\mathbf{B}} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $n \geq 3$, harmonijska funkcija u \mathbf{B} i neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$, i $\eta \in S$. Pretpostavimo da $|u(\xi) - u(\eta)| \leq M\|\xi - \eta\|^\mu$, $\forall \xi \in S$, za neko $\mu \in (0, 1)$. Tada postoji $C = C(M, \mu, n)$ tako da*

$$\|\nabla u(x)\|(1 - \|x\|)^{1-\mu} \leq C,$$

gdje je $x = r\eta$, $r \in [0, 1)$.

Dokaz. Kroz dokaz, konstanta C može mijenjati vrijednost i zavisi eventualno od dimenzije prostora n , konstanti M i μ . Koristeći predstavljanje harmonijske funkcije preko Poissonovog integrala (Posljedica 1.15) imamo

$$u(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}}} u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Primijetimo da važi

$$\nabla u(x) = \int_S Q(x, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi), \quad (3.3)$$

gdje je

$$\begin{aligned}
 Q(x, \xi) &= \frac{(-2x)(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}} - n(1 - \|x\|^2)(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}-1}(x - \xi)}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^n} \\
 &= \frac{(-2x)(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle) - n(1 - \|x\|^2)(x - \xi)}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}+1}} \quad (3.4) \\
 &= \frac{(-2x)(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle) - n(1 - \|x\|^2)(x - \xi)}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)} \cdot \frac{1}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Neka je $h \in \mathbf{R}^n$ proizvoljan vektor. Tada

$$\langle \nabla u(x), h \rangle = \int_S \langle Q(x, \xi), h \rangle u(\xi) d\sigma(\xi). \quad (3.5)$$

Kako je relacija (3.5) tačna za sve harmonijske funkcije $u : \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{R}$, uzimajući konstantnu funkciju $u(\eta)$, dobijamo jednakost

$$0 = \int_S \langle Q(x, \xi), h \rangle u(\eta) d\sigma(\xi), \quad (3.6)$$

što, zajedno sa (3.5), daje

$$\langle \nabla u(x), h \rangle = \int_S \langle Q(x, \xi), h \rangle (u(\xi) - u(\eta)) d\sigma(\xi). \quad (3.7)$$

Sa druge strane

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{-2\langle x, h \rangle(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle) - n(1 - \|x\|^2)\langle x - \xi, h \rangle}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)} \right| \\
 & \leq 2\|x\|\|h\| + n \frac{(1 - \|x\|^2)\|x - \xi\|\|h\|}{\|x - \xi\|^2} \quad (3.8) \\
 & \leq 2\|x\|\|h\| + 2n\|h\| \frac{1 - \|x\|}{\|x - \xi\|} \leq (2 + 2n)\|h\|.
 \end{aligned}$$

Posljednja relacija slijedi iz Cauchy–Schwarz nejednakosti jer za $x \in \mathbf{B}$ važi $1 - \|x\| \leq \|x - \xi\|$, za $x \in \mathbf{B}$, ako i samo ako je $\langle \xi, x \rangle \leq \|x\|$. Svakako, navedena nejednakost je očigledna i iz geometrijske tačke gledišta: najmanje rastojanje tačke $x \in \mathbf{B}$ do neke tačke iz jedinične sfere je $1 - \|x\|$.

Iz (3.4), (3.7), (3.8) dobijamo

$$|\langle \nabla u(x), h \rangle| \leq (2n + 2)\|h\| \int_S \frac{|u(\xi) - u(\eta)|}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}}} d\sigma(\xi).$$

Kako je vektor h proizvoljan, to je

$$\|\nabla u(x)\| \leq (2n+2) \int_S \frac{|u(\xi) - u(\eta)|}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}}} d\sigma(\xi),$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} \|\nabla u(r\eta)\| &\leq (2n+2) \int_S \frac{|u(\xi) - u(\eta)|}{(1 + r^2 - 2r\langle \xi, \eta \rangle)^{\frac{n}{2}}} d\sigma(\xi) \\ &= (2n+2) \int_S \frac{|u(\xi) - u(\eta)|}{((1-r)^2 + r\|\xi - \eta\|^2)^{\frac{n}{2}}} d\sigma(\xi), \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdje je $x = r\eta$, $r = \|x\| \in [0, 1)$.

Koristeći uslove teoreme slijedi nejednakost

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq M(2n+2) \int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\mu}{((1-r)^2 + r\|\xi - \eta\|^2)^{\frac{n}{2}}} d\sigma(\xi). \quad (3.10)$$

Primijetimo da integrand u (3.10) zavisi samo od rastojanja tačke $\xi \in S$ do fiksirane tačke η . Koristeći pogodnu rotaciju, u (3.10) možemo uzeti da je $\eta = (1, 0, \dots, 0)$. U tom slučaju

$$\|\xi - \eta\| = ((\xi_1 - 1)^2 + \dots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}} = (\|\xi\|^2 + 1 - 2\xi_1)^{\frac{1}{2}} = (2 - 2\xi_1)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Kako se imenilac kod integranda u (3.10), kada je r blizu 1 približava ka nuli za $\|\xi - \eta\|$ malo, a u slučaju kada je r blizu 0 imenilac je ograničen sa donje strane, u nastavku dokaza razlikovaćemo dva slučaja, pri čemu drugi će biti trivijalan.

Prvi slučaj $r = \|x\| \geq \frac{1}{2}$.

Imajući u vidu (3.11), pogodno je da se nad integralom u (3.10) primjeni dekompozicija $n-1$ dimenzione sfere S u sfere dimenzije $n-2$, presijecanjem sfere S sa ravnima koje su ortogonalne na ξ_1 koordinatnu osu (*eng. slice integration on sphere*, vidjeti [7, str. 242, Appendix A5]). Otuda, pomenuti integral se može zapisati u sljedećoj formi

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq M(2n+2) \frac{(n-1)\alpha_{n-1}}{n\alpha_n} \int_{-1}^1 \int_{S_{n-2}} \frac{(2 - 2\xi_1)^{\frac{\mu}{2}} (1 - \xi_1^2)^{\frac{n-3}{2}}}{((1-r)^2 + r(2 - 2\xi_1))^{\frac{n}{2}}} d\sigma_{n-2}(\zeta) d\xi_1,$$

gdje σ_{n-2} označava odgovarajuću normalizovanu površinsku mjeru na jediničnoj

sferi S_{n-2} u \mathbf{R}^{n-1} . Iz posljednjeg, sređivanjem dobijamo

$$\begin{aligned} \|\nabla u(r\eta)\| &\leq C \int_{S_{n-2}} d\sigma_{n-2}(\zeta) \int_{-1}^1 \frac{(2-2\xi_1)^{\frac{\mu}{2}}}{((1-r)^2 + r(2-2\xi_1))^{\frac{n}{2}}} (1-\xi_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi_1 \\ &\leq C \int_{-1}^1 \frac{(2-2\xi_1)^{\frac{\mu}{2}}}{((1-r)^2 + r(2-2\xi_1))} \frac{2^{\frac{n-3}{2}} (1-\xi_1)^{\frac{n-3}{2}}}{((1-r)^2 + r(2-2\xi_1))^{\frac{n-2}{2}}} d\xi_1 \\ &= C 2^{\frac{\mu}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi_1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \left(\frac{1-\xi_1}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \right)^{\frac{n-2}{2}} d\xi_1. \end{aligned}$$

Za $r \geq \frac{1}{2}$ je ispunjeno

$$\frac{1-\xi_1}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \leq \frac{1-\xi_1}{(1-r)^2 + (1-\xi_1)} \leq 1,$$

što povlači

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq C \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi_1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1-r)^2 + (1-\xi_1)} d\xi_1. \quad (3.12)$$

Koristeći prvo smjenu $1-\xi_1 = t^2$, a zatim $s = \frac{t}{1-r}$, dobijamo

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq C \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^\mu}{(1-r)^2 + t^2} dt = C \frac{(1-r)^\mu}{(1-r)^2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{1-r}} \frac{2s^\mu}{1+s^2} (1-r) ds,$$

što povlači

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq C(1-r)^{\mu-1} \int_0^\infty \frac{s^\mu}{1+s^2} ds.$$

Kako posljednji integral konvergira, konačno dobijamo

$$\|\nabla u(r\eta)\| (1-r)^{1-\mu} \leq C, \quad (3.13)$$

za $r \in [\frac{1}{2}, 1)$, gdje C zavisi samo od M, μ i n .

Drugi slučaj $r = \|x\| < \frac{1}{2}$.

U ovom slučaju, kao što je i najavljeno u paragrafu pred prvi slučaj, dokaz je jednostavniji. Naime, kako je

$$\frac{\|\xi - \eta\|^\mu (1-r)^{1-\mu}}{((1-r)^2 + r\|\xi - \eta\|^2)^{\frac{n}{2}}} < \frac{2^\mu \cdot 1}{(\frac{1}{2})^n} = 2^{n+\mu}, \quad (3.14)$$

koristeći (3.10), dobijamo

$$\|\nabla u(r\eta)\| (1-r)^{1-\mu} \leq M(2n+2)2^{n+\mu}. \quad (3.15)$$

Zaključujemo da je nejednakost tačna za sve $r \in [0, 1)$, gdje je konačna konstanta C veća od dobijenih konstanti na desnim stranama u (3.13) i (3.15). \square

U nastavku dajemo i verziju prethodne teoreme za $\mu > 1$. Naime, u dokazu Teoreme 3.6, iterativnim postupkom povećajući eksponent Hölder neprekidnosti funkcije f na sferi u odnosu na fiksiranu tačku η , dobijamo μ -Hölder neprekidnost funkcije f u odnosu na η , za $\mu > 1$. Zato potrebno je da verziju prethodne teoreme damo i za $\mu > 1$. Dokaz tvrdjenja je veoma sličan dokazu prethodne teoreme.

Teorema 3.3. *Neka je $u : \overline{\mathbf{B}} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, realno harmonijska funkcija u \mathbf{B} i neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$, i $\eta \in S$. Pretpostavimo da $\|u(\xi) - u(\eta)\| \leq M\|\xi - \eta\|^\mu$, $\forall \xi \in S$, za neko $\mu > 1$. Tada postoji $C = C(M, \mu, n)$ tako da*

$$\|\nabla u(r\eta)\| \leq C,$$

za svako $r \in [0, 1)$.

Dokaz. Dokaz teoreme za $r \in [\frac{1}{2}, 1)$ je identičan prethodnom sve do (3.12). Za kraj dokaza je dovoljno samo primijetiti da je

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi_1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1-r)^2 + (1-\xi_1)} dx \leq \int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^{\frac{\mu-3}{2}} d\xi_1 = \frac{2^{\frac{\mu+1}{2}}}{\mu-1}.$$

Za $r \in [0, \frac{1}{2})$, slično kao i u (3.14) imamo da je vrijednost

$$\frac{\|\xi - \eta\|^\mu}{((1-r)^2 + r\|\xi - \eta\|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ograničena, pa opet iz (3.10) slijedi naša nejednakost. \square

Ostaje da se dokaže i drugi smjer pomenute Hardy-Littlewood teoreme, odnosno dokazujemo da je uslov

$$\|\nabla u(x)\| \leq C(1 - \|x\|)^{\mu-1}, \quad \forall x \in \mathbf{B},$$

dovoljan da funkcija bude μ -Hölder neprekidna na čitavoj lopti \mathbf{B} . Na ovaj način, uspostavlja se uska veza između ove dvije veličine i otvara prostor da se kroz navedenu ekvivalenciju (i glatkost granice kodomena) povećava eksponent Hölder neprekidnosti funkcije. Koristićemo ideju sa dokaza [57, Lema 6.4.8], gdje je dokaz izveden za kompleksno vrijednosne funkcije, pa je potrebno neznatno modifikovati dokaz.

Lema 3.4. *Neka je u realna harmonijska funkcija u $\overline{\mathbf{B}}$ i $\mu \in (0, 1)$ tako da*

$$\|\nabla u(x)\| \leq C(1 - \|x\|)^{\mu-1}, \quad \forall x \in \mathbf{B},$$

gdje C ne zavisi od x . Tada je u μ -Hölder neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbf{B}$, tako da je $0 \leq \|x\| \leq \|y\| \leq 1$. Na osnovu Lagrangeove teoreme i uslova imamo

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u(z)\| \|x - y\| \leq C(1 - \|z\|)^{\mu-1} \|x - y\|,$$

za $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Jasno, $\|z\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq (\lambda + 1 - \lambda)\|y\| = \|y\|$. U nastavku razlikujemo tri slučaja.

Prvi slučaj: $\|x - y\| \leq 1 - \|y\|$.

Kako je $\|x - y\| \leq 1 - \|y\| \leq 1 - \|z\|$ to je,

$$|u(x) - u(y)| \leq C(1 - \|z\|)^{\mu-1} \|x - y\| \leq C\|x - y\|^{\mu-1} \|x - y\| = C\|x - y\|^\mu.$$

Drugi slučaj: $1 - \|y\| \leq \|x - y\| \leq 1 - \|x\|$.

Posmatramo element $y' = \frac{y}{\|y\|}(1 - \|x - y\|) \in \mathbf{B}$. Dokazaćemo da nad parom (x, y') možemo primijeniti prvi slučaj, odnosno da važi nejednakost

$$\|x - y'\| \leq \|x - y\| = 1 - \|y'\|.$$

Naime, nejednakost $\|x - y'\| \leq \|x - y\|$ je ekvivalentna sa

$$-2\langle x, y' \rangle + \|y'\|^2 \leq -2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

odnosno

$$2\langle x, y - y' \rangle \leq (\|y\| - \|y'\|)(\|y\| + \|y'\|), \quad (3.16)$$

što ćemo i dokazati. Na osnovu Cauchy-Schwarz nejednakosti imamo da je

$$2\langle x, y - y' \rangle \leq 2\|x\|\|y - y'\| = 2\|x\|(\|y\| - \|y'\|). \quad (3.17)$$

Posljednja jednakost važi jer su y i y' kolinearni vektori sa pozitivnim koeficijentom kolinearnosti i $\|y'\| \leq \|y\|$. Konačno, kako je

$$2\|x\| = \|x\| + \|x\| \leq \|y\| + 1 - \|x - y\| = \|y\| + \|y'\|,$$

to iz (3.17) slijedi tražena nejednakost (3.16).

Sada koristeći nejednakost trougla

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(y')| + |u(y') - u(y)|, \quad (3.18)$$

dolazimo do situacije da umjesto para (x, y) posmatramo parove (x, y') i (y', y) . Za prvi par, postupajući kao u prvom slučaju, imamo da je

$$|u(x) - u(y')| \leq C\|x - y'\|^\mu \leq C\|x - y\|^\mu.$$

Za drugi par sa desne strane u (3.18) imamo

$$u(y) - u(y') = \int_{[y', y]} D_1 u dx_1 + \dots + D_n u dx_n.$$

Koristeći odgovarajuću parametrizaciju $t \rightarrow \frac{y}{\|y\|}t$, $t \in [\|y'\|, \|y\|]$, i Cauchy-Schwarz nejednakost proizilazi

$$\begin{aligned} |u(y') - u(y)| &\leq \int_{\|y'\|}^{\|y\|} \left\| \left\langle \nabla u \left(\frac{y}{\|y\|}t \right), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right\| dt \\ &\leq C \int_{1-\|x-y\|}^{\|y\|} (1-t)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{C}{\mu} (\|x-y\|^\mu - (1-\|y\|)^\mu) \\ &\leq \frac{C}{\mu} \|x-y\|^\mu. \end{aligned}$$

Iz dobijenih nejednakosti za oba člana desne strane relacije (3.18), konačno slijedi

$$|u(x) - u(y)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \|x-y\|^\mu.$$

Treći slučaj: $1 - \|y\| \leq 1 - \|x\| \leq \|x-y\|$.

Analogno kao u drugom slučaju, posmatramo i $x' = \frac{x}{\|x\|}(1 - \|x-y\|)$ (jasno, u ovom slučaju važi $x \neq 0$). Koristićemo nejednakost

$$\|x' - y'\| \leq \|x-y\|, \quad (3.19)$$

koju ćemo kasnije i dokazati. Kroz nejednakost trougla

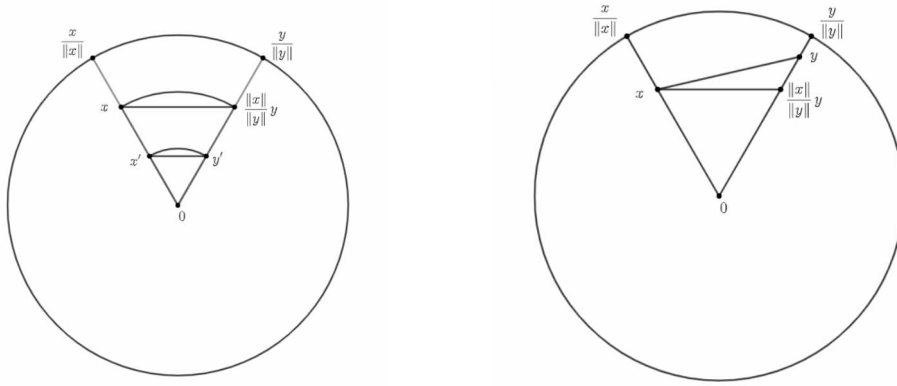
$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(x')| + |u(x') - u(y')| + |u(y') - u(y)|,$$

svedemo dokaz naše nejednakosti na tri nejednakosti već razmotrenog oblika. Za prvi i treći član situacija je ista kao kod drugog izraza u drugom slučaju sa kolinearnim vektorima x i x' , odnosno y i y' . Za drugi član, kao što smo naveli, dokazaćemo da je $\|x' - y'\| \leq \|x-y\| = 1 - \|y'\|$, pa se nejednakost dobija koristeći ideju sa prvog slučaja (koju smo primijenili i kod prvog para u drugom slučaju).

Ostaje da se dokaže nejednakost (3.19), što ćemo izvesti kroz dokaz dvije nejednakosti (slika 3.1):

$$\|x' - y'\| \leq \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|, \quad (3.20)$$

$$\left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \leq \|x - y\|. \quad (3.21)$$



Slika 3.1: Ilustracija nejednakosti (3.20) i (3.21)

Dokaz za (3.20) : Važi da je $\|x'\| = |1 - \|x - y\|| = \|y'\|$, i $\|x\| = \left\| \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|$ i $\angle(x', y') = \angle\left(x, \frac{\|y\|}{\|x\|} y\right) = \gamma \in [0, \pi]$. Za $\gamma = 0$ nejednakost je očigledna. Neka je $\gamma \in (0, \pi)$. Kako je, na osnovu kosinus teoreme, dužina osnovice jednakokrakog trougla sa krakom b i uglom prvi vrhu γ jednaka $2b \sin \frac{\gamma}{2}$, to je naša nejednakost ekvivalentna sa

$$2|1 - \|x - y\|| \sin \frac{\gamma}{2} \leq 2\|x\| \sin \frac{\gamma}{2},$$

odnosno

$$|1 - \|x - y\|| \leq \|x\|. \quad (3.22)$$

Posljednja nejednakost slijedi iz $1 - \|x - y\| \leq \|x\|$ na osnovu uslova zadatka, i nejednakosti $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x\| + 1$. I za $\gamma = \pi$ treba dokazati (3.22), pa je i u ovom slučaju tražena nejednakost ispunjena.

Dokaz za (3.21): Kvadrirajući obje strane i koristeći skalarni proizvod, dobijamo da je data nejednakost ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - 2 \frac{\|x\|}{\|y\|} \langle x, y \rangle + \|x\|^2 &\leq \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \Leftrightarrow 2 \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right) \langle x, y \rangle &\leq \|y\|^2 - \|x\|^2. \end{aligned}$$

Dokazujemo posljednju nejednakost iz ekvivalencije. Važi

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right) \langle x, y \rangle &\leq 2 \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right) \|x\| \|y\| \\ &= 2\|x\| \|y\| - 2\|x\|^2 \\ &\leq \|y\|^2 - \|x\|^2, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da je $2\|x\| \|y\| \leq \|y\|^2 + \|x\|^2$. \square

Napomena: Osim jasne geometrijske interpretacije nejednakosti (3.20), i nejednakost (3.21) se može utvrditi kroz jednostavne geometrijske činjenice: za $y_1 = \frac{\|x\|}{\|y\|}y$ trougao Oxy_1 je jednakokraki (osim kad je trougao degenerisan, a tada je nejednakost očigledna), što povlači da je $\angle Oxy_1 = Oy_1x < \frac{\pi}{2}$, odnosno $\angle xy_1y > \frac{\pi}{2}$, pa je stranica xy najduža stranica trougla xy_1y .

3.3 Lipschitz neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja kada je $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$

Ova sekcija je posvećena dokazu pomenute teoreme. Prije toga, formulisaćemo i dati ideju dokaza za jedan opšte koristan rezultat, koji će biti upotrijebljen za transformisanje nejednakosti (2.7) kod analitičke definicije kvazikonformnih preslikavanja, iz $f'(x)$ u $f'(x)^T$, za $x \in \mathbf{B}$.

Lema 3.5. *Neka je $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ linearno preslikavanje. Tada je*

$$\max_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\| = \max_{\|k\|=1} \|\mathcal{A}^T k\|$$

i

$$\min_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\| = \min_{\|k\|=1} \|\mathcal{A}^T k\|.$$

Dokaz. Tvrđenje je neposredna posljedica dvije činjenice:

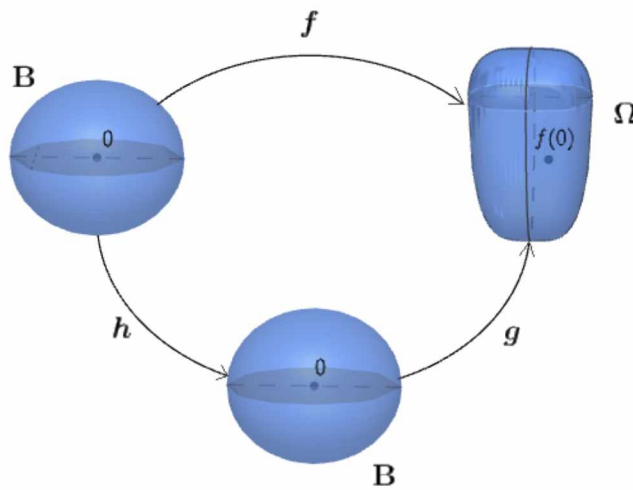
- 1) Vrijednosti $\max_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\|$ i $\min_{\|h\|=1} \|\mathcal{A}h\|$ su, respektivno, korjen najveće i najmanje svojstvene vrijednosti operatora $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ (ideja dokaza: $\|\mathcal{A}h\|^2 = \langle \mathcal{A}^T \mathcal{A}h, h \rangle$, operator $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ ima nenegativne svojstvene vrijednosti i bazu od svojstvenih vektora).
- 2) U opštem slučaju, za dva operatora \mathcal{A} i \mathcal{B} važi da $\mathcal{A}\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}\mathcal{A}$ imaju iste svojstvene vrijednosti (ideja dokaza: ako je $\lambda = 0$ svojstvena vrijednost operatora $\mathcal{A}\mathcal{B}$ onda je jedan od operatora singularan, pa je $\lambda = 0$ svojstvena vrijednost i operatora $\mathcal{B}\mathcal{A}$; ako je $\lambda \neq 0$ i $\mathcal{A}\mathcal{B}v = \lambda v$, $v \neq 0$, tada je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathcal{B}\mathcal{A}$ sa svojstvenim vektorom $\mathcal{B}v \neq 0$).

Dakle, iz 2) slijedi da operatori $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}\mathcal{A}^T$ imaju iste svojstvene vrijednosti, pa iz 1) dobijamo tražene jednakosti. \square

Početna ideja za dokaz Lipschitz neprekidnosti leži na sljedećem jednostavnom pristupu. Neka je $\eta \in S$ i $f(\eta) = q \in \partial\Omega$. Možemo pretpostaviti da je $q = 0$ i da je tangentna ravan površi $\partial\Omega$ u $q = 0$ ravan $x_n = 0$. Ovo se može dobiti na sljedeći način: Neka je L_q izometrija, koja preslikava $\bar{\Omega}$ u $\bar{\Omega}'$, tako da $L_q(q) = 0$ i tako da je tangentna ravan površi $\partial\Omega'$ u tački $L_q(q)$ ravan $x_n = 0$. Ovakva konstrukcija se često naziva "ispravljanje granice". Tada $\tilde{f} = L_q \circ f$ je takođe harmonijsko i kvazikonformno preslikavanje. Naime, rotacija i translacija čuvaju harmoničnost (vidjeti Subsekciju 1.1.1), a za kvazikonformnost primijetiti da se vrijednosti u (2.7) kod analitičke definicije kvazikonformnog preslikavanja u Subsekciji 2.2.2 ne mijenjaju pri izometriji. Lipschitz neprekidnost za funkciju \tilde{f} povlači Lipschitz neprekidnost i za funkciju f , jer izometrija čuva rastojanja. Zato, u dokazu možemo smatrati da za fiksiranu tačku $\eta \in S$, važi $f(\eta) = 0$ i tangentna ravan u toj tački je $x_n = 0$. Slijedi formulacija i dokaz teoreme.

Teorema 3.6. *Neka je f kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom. Tada je f Lipschitz neprekidno preslikavanje u \mathbf{B} .*

Dokaz. Prvo dokazujemo Hölder neprekidnost funkcije f . Naime, neka je g difeomorfizam iz $\bar{\mathbf{B}}$ na $\bar{\Omega}$, iz definicije $C^{1,\alpha}$ granice oblasti Ω . Naravno, g je bi-Lipschitz neprekidno (jer je izvod ograničen), pa i kvazikonformno preslikavanje na osnovu Primjera (2.12) iz glave 2. Dodatno, možemo pretpostaviti da je $g(0) = f(0)$, koristeći Möbiusovo preslikavanje određeno sa relacijom (2.3) iz Sekcije 2.1, tako što umjesto g , posmatramo preslikavanje $g \circ T_{-x_0}$, gdje je $x_0 = g^{-1}(f(0))$. Tada preslikavanje $h = g^{-1} \circ f$ je K' kvazikonformno preslikavanje (vidjeti Lemu 2.7, Glava 2) iz \mathbf{B} u \mathbf{B} i važi $g(0) = 0$ (slika 3.2).



Slika 3.2: Konstrukcija preslikavanja h

Iz Morijeve teoreme slijedi da postoji konstanta $M_1 = M_1(n, K')$ tako da je

$$\|h(x) - h(y)\| \leq M_1 \|x - y\|^{K'^{\frac{1}{1-n}}},$$

za $x, y \in \overline{\mathbf{B}}$. Kako je $f = g \circ h$, to i preslikavanje f , kao kompozicija Lipschitz i Hölder neprekidne funkcije, je Hölder neprekidno, tj.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_1 \|x - y\|^\beta, \quad (3.23)$$

za $x, y \in \overline{\mathbf{B}}$, gdje je $\beta = K'^{\frac{1}{1-n}} \in (0, 1)$, a konstanta C_1 je proizvod konstante M_1 i Lipschitz konstante preslikavanja g . Primijetimo da Hölder neprekidnost omogućava da se preslikavanje f neprekidno produžava na granici S , tako da za $\xi \in S$ definišemo

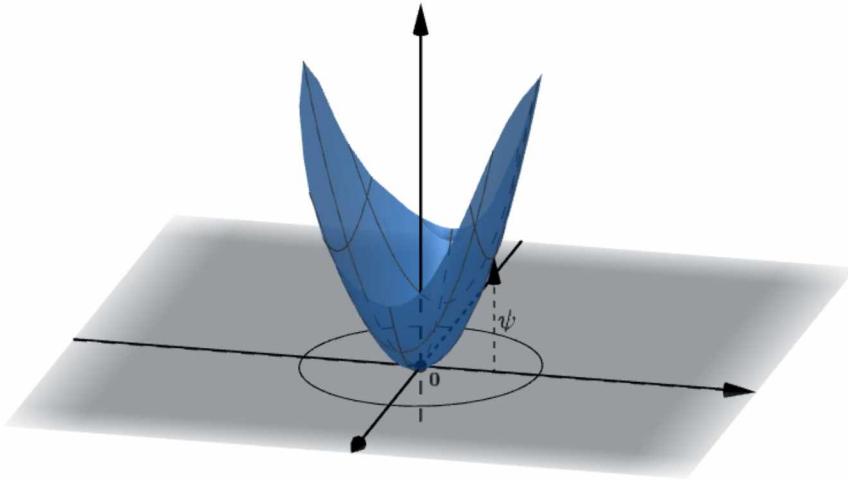
$$f(\xi) = \lim_{x \in \mathbf{B}, x \rightarrow \xi} f(x).$$

Sa $f = (f_1, \dots, f_n)$ ćemo označiti i produženje naše funkcije u $\overline{\mathbf{B}}$.

Neka je $\eta \in S$, fiksirana tačka iz paragrafa prije formulacije teoreme. Cilj nam je da iterativnim postupkom, koristeći glatkost granice Ω , povećamo eksponent Hölder neprekidnosti preslikavanja f . Kako Ω ima $C^{1,\alpha}$ granicu, postoji okolina \mathcal{O} koordinatnog početka u \mathbf{R}^{n-1} koja je projekcija od $\partial\Omega \cap B(0, \rho)$ u \mathbf{R}^{n-1} i postoji $C^{1,\alpha}$ funkcija $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}$ tako da se $\partial\Omega \cap B(0, \rho)$ može predstaviti kao grafik funkcije ψ , tj. tačke $\partial\Omega \cap B(0, \rho)$ su oblika:

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \psi(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})), \quad \text{za } (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathcal{O}. \quad (3.24)$$

Za funkciju ψ važi $\psi(0, \dots, 0) = 0$, $D_j \psi(0, \dots, 0) = 0$, $j = \overline{1, n-1}$ (slika 3.3),



Slika 3.3: "Ispravljanje granice"

kao i svojstvo Hölder neprekidnosti za njen izvod, tj.

$$\|\nabla\psi(\zeta) - \nabla\psi(\omega)\| \leq C_2 \|\zeta - \omega\|^\alpha. \quad (3.25)$$

za $\zeta, \omega \in \mathcal{O}$. Konstanta C_2 je ista za sve tačke $q \in \partial\Omega$, zbog $C^{1,\alpha}$ uslova granice skupa Ω . Dalje, na osnovu Lagrangeove teoreme, imamo

$$\|\psi(\zeta) - \psi(\omega)\| = \|\langle \nabla\psi(c), \zeta - \omega \rangle\| \leq \|\nabla\psi(c)\| \|\zeta - \omega\|, \quad (3.26)$$

gdje c pripada duži $[\zeta, \omega]$. Koristeći (3.25) vidimo da važi

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi(c)\| &\leq \|\nabla\psi(\zeta)\| + \|\nabla\psi(c) - \nabla\psi(\zeta)\| \\ &\leq C_2(\|\zeta\|^\alpha + \|c - \zeta\|^\alpha) \leq C_2(\|\zeta\|^\alpha + \|\zeta - \omega\|^\alpha), \end{aligned}$$

i analogno

$$\|\nabla\psi(c)\| \leq C_2(\|\omega\|^\alpha + \|\zeta - \omega\|^\alpha),$$

što zajedno daju

$$\|\nabla\psi(c)\| \leq C_2(\min\{\|\zeta\|^\alpha, \|\omega\|^\alpha\} + \|\zeta - \omega\|^\alpha).$$

Otuda i iz relacije (3.26) slijedi nejednakost

$$\|\psi(\zeta) - \psi(\omega)\| \leq C_2 \|\zeta - \omega\| (\min\{\|\zeta\|^\alpha, \|\omega\|^\alpha\} + \|\zeta - \omega\|^\alpha), \quad (3.27)$$

za sve $\zeta, \omega \in \mathcal{O}$.

Koristićemo oznaku $\tilde{f}(\xi) = (f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi))$. Preslikavanje \tilde{f} , kao i f , je takođe Hölder neprekidno. Imajući u vidu relaciju (3.24) imamo da se f_n na sferi u nekoj dovoljno maloj okolini tačke $\eta \in S$, dobija kao slika \tilde{f} pri preslikavanju ψ , tj.

$$f_n(\xi) = \psi(f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi)). \quad (3.28)$$

Možemo pretpostaviti da ova okolina tačke η je oblika $V(\eta) = B(\eta, \delta) \cap S$, gdje je δ dovoljno mala pozitivna konstanta, uniformna za sve tačke $q \in \partial\Omega$. Naime, neka je $\tilde{U}(q) = B(q, r_q) \cap \partial\Omega$ okolina tačke q iz $\partial\Omega$ tako da je $L_q(\tilde{U}(q))$ okolina tačke 0, koja se može predstaviti kao grafik funkcije, gdje je L_q izometrija koja preslikava q u 0 tako da je ravan $x_n = 0$ tangenta ravan za $L_q(\partial\Omega)$ u tački 0. Poluprečnik r_q možemo izabrati dovoljno malim, tako da za svaku tačku $p \in \tilde{U}(q)$, slika okoline $\tilde{U}(q)$ pri odgovarajućoj izometriji L_p je takođe grafik funkcije. Posmatramo sada okoline $U(q) = B(q, \frac{r_q}{2}) \cap \partial\Omega$, za $q \in \Omega$. Kolekcija $\{U(q)\}_{q \in \partial\Omega}$ je pokrivač za $\partial\Omega$. Kako je $\partial\Omega$ kompaktan skup, to postoji konačan potpokrivač $\{U(q_k)\}_{k=1}^m$ skupa $\partial\Omega$. Neka je $\rho = \min\{r_{q_1}, \dots, r_{q_m}\}$. Iz neprekidnosti preslikavanja f na kompaktu S , postoji $\delta > 0$ tako da iz $\|\xi_1 - \xi_2\| < \delta$, $\xi_1, \xi_2 \in S$, slijedi $\|f(\xi_1) - f(\xi_2)\| < \frac{\rho}{2}$. Ovo osigurava da je slika svake okoline $V(\xi) = B(\xi, \delta) \cap S$, $\xi \in S$, pri preslikavanju f sadržana u neki od skupova $B(q_j, r_{q_j}) \cap \partial\Omega = \tilde{U}(q_j)$, pa zatim, poslije dejstva pomenute izometrije $L_{f(\xi)}$, slika je grafik funkcije kao u (3.24). Na taj način smo konstruisali pomenutu konstantu δ . Ova činjenica je bitna, jer δ ne zavisi od tačke $\eta \in S$ koju smo fiksirali u početku, u odnosu na koju ćemo izvesti neke polazne nejednakosti. To

znači da konstante dobijene kod tih nejednakosti ne zavise od tačke η , već su iste i za ostale tačke iz sfere.

Vratimo se našoj fiksiranoj tački η , za koju je $f(\eta) = 0$. Koristeći prezentaciju (3.28), Hölder neprekidnost preslikavanja f_n i nejednakost (3.27) za ψ izvedemo sljedeću nejednakost za f_n :

$$\begin{aligned} |f_n(\xi) - f_n(\eta)| &= \|\psi(\tilde{f}(\xi)) - \psi(0)\| \\ &\leq C_2 \|\tilde{f}(\xi)\| (\min\{\|\tilde{f}(\xi)\|^\alpha, 0\} + \|\tilde{f}(\xi) - 0\|^\alpha) \\ &= C_2 \|\tilde{f}(\xi)\|^{1+\alpha} \leq C_1^{1+\alpha} C_2 \|\xi - \eta\|^{(1+\alpha)\beta}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

za $\xi \in V(\eta) = B(\eta, \delta) \cap S$. Dakle, dobili smo $(1 + \alpha)\beta$ - Hölder neprekidnost funkcije f_n u odnosu na tačku η u njenoj okolini. Međutim, Hölder neprekidnost u odnosu na tačku η važi i na čitavom skupu S , jer je f ograničena na S , tj. $\|f(\xi)\| \leq \widetilde{M}$, za sve $\xi \in S$. Naime, za $\xi \in S \setminus V(\eta)$ važi

$$|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leq 2\widetilde{M} \leq \frac{2\widetilde{M}}{\delta^{(1+\alpha)\beta}} \|\xi - \eta\|^{(1+\alpha)\beta}. \quad (3.30)$$

pa uzimajući $M = \max\{C_1^{1+\alpha} C_2, \frac{2\widetilde{M}}{\delta^{(1+\alpha)\beta}}\}$ zaključujemo da je

$$|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leq M \|\xi - \eta\|^{(1+\alpha)\beta}, \quad (3.31)$$

za sve $\xi \in S$. Dakle, koristeći početnu β -Hölder neprekidnost i glatkost granice, dokazali smo veći stepen Hölder neprekidnosti za jednu koordinatnu funkciju na S , jer je $(1 + \alpha)\beta > \beta$. Ostaje da se navedena nejednakost prenosi na sve koordinatne funkcije, što ćemo uraditi prelazeći na ekvivalentne nejednakosti za radijus vektor koristeći Hardy-Littlewood teoremu 3.2 i koristeći kvazikonformnost preslikavanja f . Dakle, iz Teoreme 3.2, imamo

$$\|\nabla f_n(r\eta)\| \leq C(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1).$$

Kombinujući svojstvo kvazikonformnosti preslikavanja f i rezultat Leme 3.5 imamo

$$\frac{\max_{\|h\|=1} \|f'(x)^T h\|}{\min_{\|k\|=1} \|f'(x)^T k\|} \leq K < \infty, \quad \forall x \in \mathbf{B}.$$

Uzimajući $h = e_j$, za $j = \overline{1, n-1}$, i $k = e_n$, za $x = r\eta$ imamo

$$\|\nabla f_j(r\eta)\| \leq K \|\nabla f_n(r\eta)\| \leq K \cdot C(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1},$$

za $j = \overline{1, n-1}$. Ovo povlači da je

$$\|\nabla f_j(r\eta)\| \leq C(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.32)$$

gdje je C nova globalna konstanta.

Želimo da dokažemo nejednakost (3.32) u čitavoj lopti \mathbf{B} . Neka je $\tilde{\eta} \neq \eta$ proizvoljna tačka na S i $f(\tilde{\eta}) = \tilde{q} \in S$. Sa $L_{\tilde{q}}$ označavamo izometriju koja preslikava \tilde{q} u 0, tako da je $x_n = 0$ tangentna ravan za površ $L_{\tilde{q}}(\partial\Omega)$ u tački $L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) = 0$.

Neka je $L_{\tilde{q}} \circ f = \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$. Tada \tilde{f} ima sva svojstva koje je imala funkcija f u odnosu na tačku $\tilde{\eta}$ umjesto tačke η : u $\tilde{f}(\tilde{\eta}) = 0$ tangentna ravan površi $L_{\tilde{q}}(\partial\Omega)$ je $x_n = 0$ i $\tilde{f}(\tilde{\eta})$ ima okolinu u $L_{\tilde{q}}(\partial\Omega)$ koja se može predstaviti kao grafikon funkcije. Koristeći isti rezon kao ranije, zaključujemo da je

$$\|\nabla \tilde{f}_j(r\tilde{\eta})\| \leq C(1-r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.33)$$

Konstanta C ne zavisi od tačke $\tilde{\eta}$, jer δ i M ne zavise od izbora tačke $\eta \in S$, na osnovu paragrafa koji slijedi poslije relacije (3.27). Kako je $f = L_{\tilde{q}}^{-1} \circ \tilde{f}$, pri čemu $L_{\tilde{q}}^{-1}$ je takođe izometrija, to je

$$f_j(x) = b_j + \sum_{k=1}^n a_{j,k} \tilde{f}_k(x), \quad \forall x \in \mathbf{B}, \quad j = \overline{1, n},$$

gdje je $\{a_{j,k}\}_{j,k=1}^n$ ortogonalna matrica. Odatle, koristeći ortogonalnost matrice i Cauchy-Schwarz nejednakost imamo sljedeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned} \|\nabla f_j(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n a_{j,k} \nabla \tilde{f}_k(x) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{j,k}| \|\nabla \tilde{f}_k(x)\| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \|\nabla \tilde{f}_k(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Uzimajući $x = r\tilde{\eta}$, iz nejednakosti (3.33) za funkcije \tilde{f}_j , dobijamo

$$\|\nabla f_j(r\tilde{\eta})\| \leq \sqrt{n} C (1-r)^{(1+\alpha)\beta-1}.$$

Kako je tačka $\tilde{\eta} \in S$ birana proizvoljno, zaključujemo da je

$$\|\nabla f_j(x)\| \leq C(1-\|x\|)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall x \in \mathbf{B}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Dakle, dobili smo odgovarajuće nejednakosti za gradijent u unutrašnjosti, ali većeg eksponenta $(1+\alpha)\beta$. Preko Leme 3.4 slijedi da su f_j $(1+\alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u $\overline{\mathbf{B}}$, za $j = \overline{1, n}$, pa je i $f \in C^{(1+\alpha)\beta}(\overline{\mathbf{B}})$. Time smo dokazali jednu iteraciju našeg postupka: iz $f \in C^\beta(\overline{\mathbf{B}})$ dobili smo da je $f \in C^{(1+\alpha)\beta}(\overline{\mathbf{B}})$.

Eksponent β Hölder neprekidnosti možemo i smanjiti (za $\beta_1 < \beta_2$ ako je preslikavanje β_2 -Hölder neprekidno, tada je i β_1 Hölder neprekidno), pa da obezbijedimo da je $(1+\alpha)^k \beta \neq 1$, za svako $k \in \mathbf{N}$. Potrebno je obezbijediti navedeni

uslov, kako bi u iteracijama koristili ili Teoremu 3.2 za slučaj kada je eksponent manji od 1 ili Teoremu 3.3 za $\mu > 1$. Kako je $1 + \alpha > 1$ to postoji prirodan broj m tako da $(1 + \alpha)^m \beta < 1$ i $(1 + \alpha)^{m+1} \beta > 1$. Ponavljajući postupak, iterativno dobijamo da je $f \in C^{(1+\alpha)^2 \beta}(\overline{B}), \dots, C^{(1+\alpha)^m \beta}(\overline{B})$.

Potpuno analogno kao u (3.29) slijedi da za $\eta \in S$ fiksirano imamo

$$|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leq M \|\xi - \eta\|^{(1+\alpha)^{m+1} \beta}, \quad \forall \xi \in S.$$

U ovom slučaju, koristeći Teoremu 3.3, nejednakost prenosimo u unutrašnjost kroz ograničenost gradijenta, tj.

$$\|\nabla f_n(r\eta)\| \leq C, \quad \forall r \in [0, 1).$$

Koristeći isti redosljed implikacija, prvo dobijamo istu nejednakost za sve koordinatne funkcije $f_j, j = \overline{1, n}$ u tačkama $r\eta, r \in [0, 1)$. Zatim, koristeći izometrije dokazujemo da je nejednakost ispunjena i za sve ostale tačke lopte \mathbf{B} za neku globalnu konstantu C . Na osnovu teoreme o konačnom priraštaju, zaključujemo da je f Lipschitz neprekidno preslikavanje u $\overline{\mathbf{B}}$. Dokaz je završen. \square

3.4 Lipschitz neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja sa L^p Laplasijanom kada je $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$

U ovoj sekciji uopštavamo rezultat iz prethodne sekcije, tako što uslov da je f harmonijska funkcija oslabimo i umjesto toga posmatramo (kvazikonformne) funkcije f koje zadovoljavaju Poissonovu parcijalnu jednačinu $\Delta f = g$ u slabom smislu, pri čemu $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)^{15}$, za $p > n$. Potrebno je prije toga, uz uslov kvazikonformnosti, dodatno ispitati ponašanje slabog rješenja nehomogenog Dirichletovog problema za loptu i da, koristeći rezultate Sekcija 1.2-1.4, dobijamo reprezentaciju te funkcije.

3.4.1 Greenova reprezentacija slabog rješenja nehomogenog Dirichletovog zadatka

U ovoj sekciji dokazujemo da u slučaju kada imamo kvazikonformno preslikavanje koje zadovoljava Poissonovu jednačinu, tada se ono može predstaviti preko Greenove reprezentacije.

¹⁵Vektorska funkcija $g : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ pripada prostoru $L^p(\Omega, \mathbf{R}^m)$ ako njena norma $\|g\|_{\mathbf{R}^m}$ pripada prostoru $L^p(\Omega, \mathbf{R})$, tj. $\int_{\Omega} \|g(x)\|_{\mathbf{R}^m}^p dx < \infty$. To je ekvivalentno sa činjenicom da je svaka koordinatna funkcija g_j iz prostora $L^p(\Omega, \mathbf{R})$.

Kvazikonformna preslikavanja iz \mathbf{B} u Ω su Hölder neprekidna u \mathbf{B} , pa se mogu neprekidno produžiti na $\overline{\mathbf{B}}$ (argument iz početka dokaza Teoreme 3.6 sa Morijevom teoremom). To znači da kvazikonformno rješenje jednačine $\Delta f = g$, možemo posmatrati kao rješenje nehomogenog Dirichletovog problema 1.28:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = g(x), & x \in B, \\ u(\xi) = f(\xi), & \xi \in S, \end{cases}$$

koji smo razmotrili u Sekciji 1.4. Tamo smo dokazali da rješenje datog problema postoji i jedinstveno je, ako se f , koje je definisano na S , može dobiti kao produženje preslikavanja $f \in H^1(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$. U našem slučaju f je neprekidno u $\overline{\mathbf{B}}$, pa jasno da pripada prostoru $L^2(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$. Ostaje da se dokaže da i $f' \in L^2(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, odnosno $\|f'\| \in L^2(\mathbf{B})$. Za K -kvazikonformno preslikavanje $f : \mathbf{B} \rightarrow \Omega$, iz analitičke definicije 2.7 i teoreme o smjeni promjenljivih, važi nejednakost

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}} \|f'(x)\|^n dx &\leq K \int_{\mathbf{B}} |J(x, f)| dx \\ &= K \lambda(\Omega), \end{aligned} \quad (3.34)$$

gdje je $\lambda(\Omega)$ Lebegova mjera skupa. Kako je Ω ograničen skup, to je $\|f'\| \in L^n(\mathbf{B}) \subset L^2(\mathbf{B})$. Ovo povlači da $f \in H^1(\mathbf{B})$, što smo htjeli pokazati. U Sekciji 1.2 sa formulom (1.24) smo dali reprezentaciju klasičnog rješenja (kada postoji) nehomogenog Dirichletovog problema (1.28). Međutim, ispostavlja se da je ta formula validna i kada tražimo slabo rješenje, što ćemo dokazati u našem slučaju. Podsjetimo se da se takozvano normalizovano fundamentalno rješenje Laplace-ove jednačine zadaje sa

$$\Gamma(y-x) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \|y-x\|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log \|y-x\|, & n = 2. \end{cases}$$

Direktnim računom dobijamo sljedeće izvode:

$$\begin{aligned} D_{y_j} \Gamma(y-x) &= \frac{1}{n\alpha_n} (y_j - x_j) \|y-x\|^{-n}, \\ D_{y_j y_k}^2 \Gamma(y-x) &= -\frac{1}{\alpha_n} (y_j - x_j)(y_k - x_k) \|y-x\|^{-n-2}, \quad j \neq k; \\ D_{y_j^2}^2 \Gamma(y-x) &= \frac{1}{n\alpha_n} \left(\frac{1}{\|y-x\|^n} - n \frac{(y_j - x_j)^2}{\|y-x\|^{n+2}} \right), \end{aligned}$$

odakle slijede nejednakosti

$$\|D_j \Gamma(y-x)\| \leq \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|y-x\|^{n-1}}; \quad (3.35)$$

$$\|D_{jk}^2 \Gamma(y-x)\| \leq \frac{1}{\alpha_n} \frac{1}{\|y-x\|^n}, \quad j \neq k; \quad (3.36)$$

$$\|D_j^2 \Gamma(y-x)\| \leq \frac{n+1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|y-x\|^n}. \quad (3.37)$$

U slučaju da tražimo izvode po x koordinatama, onda se prvi parcijalni izvodi razlikuju za predznak. Jasno, i u tom slučaju važe ocjene (3.35 – 3.37), i zato smo ih zapisali bez oznake promjenljive.

U nastavku ispitujemo konvergenciju i ponašanje jednog integrala koji će nam biti od značaja u dokazima koji slijede.

Lema 3.7. *Neka je $k \in \mathbf{N}$ i $x \in \mathbf{B}$. Integral*

$$I_k(x) = \int_{\mathbf{B}} \frac{1}{\|y-x\|^k} dy$$

konvergira ako i samo ako je $k < n$ i u tom slučaju važi

$$I_k(x) \leq I_k(0) = \frac{n}{n-k} \alpha_n, \quad \forall x \in \mathbf{B}. \quad (3.38)$$

Dokaz. Za konvergenciju integrala $I_k(x)$ neophodno i dovoljno je da konvergira integral

$$\int_{B(x,\rho)} \frac{1}{\|y-x\|^k} dy,$$

za neko $0 < \rho < 1 - \|x\|$, jer podintegralna funkcija van lopte $B(x,\rho)$ je ograničena i neprekidna. Koristeći smjenu (1.10), preko sfernih koordinata, nalazimo da je

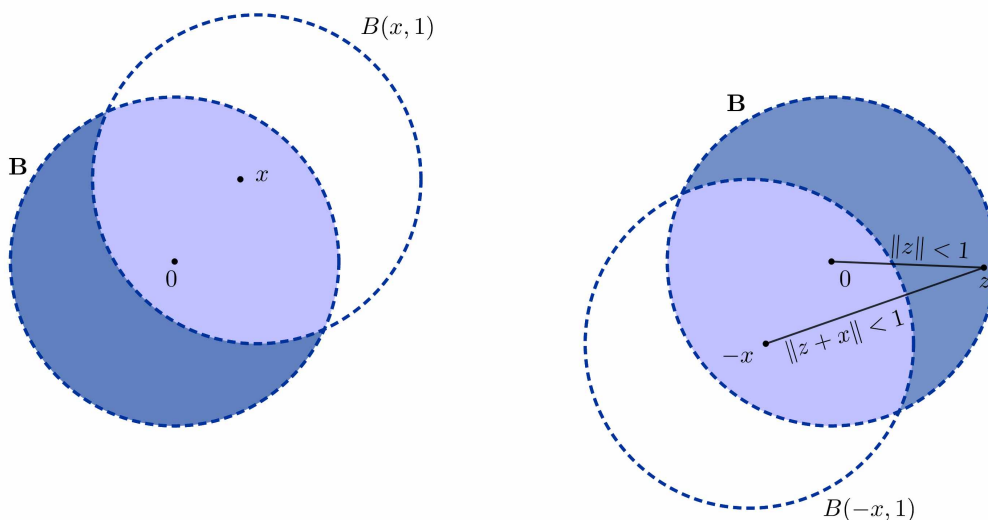
$$\int_{B(x,\rho)} \frac{1}{\|y-x\|^k} dy = n\alpha_n \int_0^\rho \frac{r^{n-1}}{r^k} dr. \quad (3.39)$$

Posljednji integral, jasno, konvergira ako i samo ako je $n-k > 0$, odnosno $k < n$. Primijetimo takođe da u slučaju da je $x = 0$, za $\rho = 1$, iz (3.39) dobijamo da je $I_k(0) = \frac{n}{n-k} \alpha_n$.

Za dokaz nejednakosti (3.38), primijetimo da koristeći smjenu $z = y - x$ za prvi, a $z = -y$ za drugi integral, izvedemo sljedeće zaključke:

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \int_{\mathbf{B} \cap B(x,1)} \frac{1}{\|y-x\|^k} dy + \int_{\mathbf{B} \cap (B(x,1))^c} \frac{1}{\|y-x\|^k} dy \\ &= \int_{\mathbf{B} \cap B(-x,1)} \frac{1}{\|z\|^k} dz + \int_{\mathbf{B} \cap (B(-x,1))^c} \frac{1}{\|z+x\|^k} dz \\ &\leq \int_{\mathbf{B} \cap B(-x,1)} \frac{1}{\|z\|^k} dz + \int_{\mathbf{B} \cap (B(-x,1))^c} \frac{1}{\|z\|^k} dz \\ &= \int_{\mathbf{B}} \frac{1}{\|z\|^k} dz = I_k(0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

□



Slika 3.4: Ilustracija smjene i nejednakosti korišćenih u (3.40)

Korišćena nejednakost sledi iz proste činjenice da za $z \in \mathbf{B} \cap (B(-x, 1))^C$, važi $\|z+x\| \geq 1$ i $\|z\| < 1$ (slika 3.4), odnosno

$$\frac{1}{\|z+x\|^k} \leq 1 < \frac{1}{\|z\|^k},$$

za $k \in \mathbf{N}$ i $y \in \mathbf{B} \cap (B(-x, 1))^C$.

Posljedica 3.8. Funkcija $[D_j \Gamma(y-x)]^q$, za $x \in \mathbf{B}$ i $q < \frac{n}{n-1}$, je integrabilna po y u \mathbf{B} .

Dokaz. Slijedi neposredno iz prethodne leme i ocjene (3.35). □

U nastavku, kroz dvije teoreme, dokazaćemo da je Newtonov potencijal

$$w(x) = \int_{\mathbf{B}} \Gamma(y-x)g(y)dy,$$

za $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, $p > n$, funkcija koja pripada familiji $C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}, \mathbf{R}^n)$. Na osnovu definicije prostora L^p vektorskih integrabilnih funkcija uslov $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$ se može zamijeniti sa L^p integrabilnošću koordinatnih funkcija g_j . Zato, funkciju g i Newtonov potencijal w kroz sljedeća dva dokaza, zbog jednostavnosti, posmatraćemo kao realne funkcije.

Dokaz sljedeće teoreme predstavlja modifikaciju dokaza sličnog tvrđenja u slučaju kada je $g \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (vidjeti [22, Lema 4.1] i [26, Teorema 2]).

Teorema 3.9. *Neka je $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, gdje je $p > n$. Tada je $w \in C^1(\mathbf{B})$.*

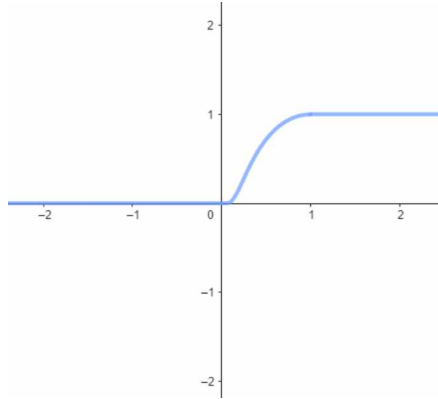
Dokaz. Za $x \in \mathbf{B}$ definišemo funkcije

$$v_j(x) = \int_{\mathbf{B}} D_{x_j} \Gamma(y-x) g(y) dy, \quad j = \overline{1, n}.$$

Primijetimo da su v_j dobro definisane funkcije, na osnovu Hölder nejednakosti i komentara prije formulacije teoreme.

Dokazaćemo da je $D_j w = v_j$, za $j = \overline{1, n}$. Nije moguće direktno koristiti teoremu o dominantnoj konvergenciji, već ćemo se služiti nekim drugim pristupom: ideja je da se funkcije w i v_j dobijaju kao granične vrijednosti pri uniformnoj konvergenciji C^1 funkcija w_ϵ i $D_j w_\epsilon$, respektivno, koje ćemo definisati.

Neka je $\kappa(t)$ realna glatka (beskonačno diferencijabilna) funkcija, tako da je $0 \leq \kappa \leq 1$, $0 \leq \kappa' \leq a$ (za neko $a > 0$) i $\kappa(t) = 0$, za $t \leq 1$, i $\kappa(t) = 1$, za $t \geq 2$ (slika 3.5).



Slika 3.5: Skica grafika funkcije κ

Za proizvoljno $\epsilon > 0$ definišemo funkciju

$$w_\epsilon(x) = \int_{\mathbf{B}} \underbrace{\Gamma(y-x)}_{\Gamma_\epsilon(y-x)} \kappa\left(\frac{\|y-x\|}{\epsilon}\right) g(y) dy.$$

Za fiksirano ϵ , funkcija $\Gamma_\epsilon(y-x)$ je neprekidno diferencijabilna i ograničena funkcija po y , jer množenje funkcijom κ čini da se gubi singularitet funkcije $\Gamma(y-x)$. Naime, Γ_ϵ se anulira za y "blizu" x , preciznije za $\|y-x\| \leq \epsilon$. Jasno, w_ϵ je dobro definisana jer je Γ_ϵ ograničena funkcija i $g \in L^p(\mathbf{B}) \subset L^1(\mathbf{B})$.

Međutim, važi i više od toga: $w_\epsilon \in C^1(\mathbf{B})$. Naime, kako je

$$\begin{aligned} D_{x_j} \Gamma_\epsilon(y-x) &= \frac{1}{n\alpha_n} \frac{x_j - y_j}{\|y-x\|^n} \kappa\left(\frac{\|y-x\|}{\epsilon}\right) \\ &+ \frac{1}{n\alpha_n(2-n)} \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} \kappa'\left(\frac{\|y-x\|}{\epsilon}\right) \frac{1}{\epsilon} \frac{x_j - y_j}{\|y-x\|}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

to slijedi da je $D_{x_j}\Gamma_\epsilon = 0$ za $\|y - x\| < \epsilon$, i $\|D_{x_j}\Gamma_\epsilon\| \leq \frac{C}{\epsilon^{n-1}}$, za $\|y - x\| \geq \epsilon$, gdje konstanta C zavisi od n i $a > 0$. Odavde slijedi da $D_{x_j}\left(\Gamma_\epsilon(x - y)g(y)\right)$ ima integrabilnu dominantu $\frac{C}{\epsilon^{n-1}}|g(y)|$, što na osnovu Teoreme o dominantnoj konvergenciji¹⁶ povlači da je

$$D_j w_\epsilon(x) = \int_{\mathbf{B}} D_{x_j}\Gamma_\epsilon(x - y)g(y)dy.$$

Neprekidnost funkcije $D_j w_\epsilon(x)$ slijedi iz teoreme o konačnom priraštaju i ograničenosti funkcije $D_x(D_{x_j}\Gamma_\epsilon)(x - y)$, koja slijedi iz relacija (3.36) i (3.37), slično kao u (3.41). Konačno, $w_\epsilon \in C^1(\mathbf{B})$.

Dokazujemo sada najavljene uniformne konvergencije.

w_ϵ konvergira ravnomjerno ka w u \mathbf{B} .

Konstanta C u dijelu koji slijedi zavisi od n i p , i može mijenjati vrijednost. Kako je funkcija $1 - \kappa_\epsilon(\|y - x\|) = 1 - \kappa\left(\frac{\|y - x\|}{\epsilon}\right)$ jednaka nuli za $\|y - x\| \geq 2\epsilon$, a inače važi $1 - \kappa \leq 1$, to je za $x \in \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} |w(x) - w_\epsilon(x)| &\leq \int_{\{\|y-x\|\leq 2\epsilon\}\cap\mathbf{B}} |\Gamma(y-x)(1 - \kappa_\epsilon(\|y-x\|))g(y)|dy, \\ &\leq \int_{\|y-x\|\leq 2\epsilon\cap\mathbf{B}} |\Gamma(y-x)g(y)|dy \\ &\leq \left(\int_{\{\|y-x\|\leq 2\epsilon\}} |\Gamma(y-x)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{B}} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.42) \\ &\leq C\|g\|_{L^p(\mathbf{B})} \left(\int_{\|y-x\|\leq 2\epsilon} \frac{1}{\|y-x\|^{q(n-2)}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C\|g\|_{L^p(\mathbf{B})} (2\epsilon)^{\frac{n-q(n-2)}{q}}, \end{aligned}$$

gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Posljednja jednakost slijedi iz relacije (1.10), glava 1. Kako je $q = \frac{p}{p-1} < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2}$, to je $n - q(n-2) > 0$, i posljedično $w_\epsilon \xrightarrow{\epsilon} w$.

¹⁶Neka je $\{f_n\}$ niz kompleksno mjerljivih funkcija u X , tako da $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ postoji za svako $x \in X$. Ako postoji funkcija $g \in L^1(\mu)$ tako da $|f_n(x)| \leq g(x)$, za $n \geq 1$ i $x \in X$, tada je $f \in L^1(\mu)$ i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

$D_j w_\epsilon$ konvergira ravnomjerno ka v_j u \mathbf{B} , za $j = \overline{1, n}$.

Kao i u prethodnom slučaju, C ćemo posmatrati kao nefiksiranu konstantnu koja zavisi eventualno od n, p i a . Imajući u vidu osobine funkcije κ , za $x \in \mathbf{B}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
 & \|D_j w_\epsilon(x) - v_j(x)\| \\
 &= \left| \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\} \cap \mathbf{B}} D_{x_j} \left(\Gamma(y-x)(1 - \kappa_\epsilon(\|y-x\|)) \right) g(y) dy \right| \\
 &\leq \left| \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\} \cap \mathbf{B}} \left(D_{x_j} \Gamma(y-x)(1 - \kappa_\epsilon(\|y-x\|)) - \Gamma(x-y) D_{x_j} \kappa_\epsilon(\|y-x\|) \right) g(y) dy \right| \\
 &\leq \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\} \cap \mathbf{B}} \left(\frac{1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|y-x\|^{n-1}} + \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} \kappa' \left(\frac{\|y-x\|}{\epsilon} \right) \frac{1}{\epsilon} \right) |g(y)| dy \\
 &\leq C \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\} \cap \mathbf{B}} \left(\frac{1}{\|y-x\|^{n-1}} + \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} \frac{1}{\epsilon} \right) |g(y)| dy \\
 &\leq C \left(\int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\}} \left(\frac{1}{\|y-x\|^{n-1}} + \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} \frac{1}{\epsilon} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{B}} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \|g\|_{L^p(\mathbf{B})} \left(2^{q-1} \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\}} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{(n-1)q}} + \frac{1}{\|y-x\|^{(n-2)q}} \frac{1}{\epsilon^q} \right) dy \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Kao i ranije, imamo da je

$$\begin{aligned}
 & \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\}} \frac{1}{\|x-y\|^{(n-1)q}} dy = C(2\epsilon)^{n-(n-1)q}, \\
 & \int_{\{\|y-x\| \leq 2\epsilon\}} \frac{1}{\|x-y\|^{(n-2)q}} dy = C(2\epsilon)^{n-(n-2)q},
 \end{aligned}$$

pa je

$$|D_j w_\epsilon(x) - v_j(x)| \leq C \|g\|_{L^p(\mathbf{B})} \epsilon^{\frac{n-(n-1)q}{q}},$$

što povlači ravnomjernu konvergenciju.

Dakle, imamo da su funkcije w i v_j , za $j = \overline{1, n}$, neprekidne kao granične funkcije ravnomjerno konvergentne kolekcije neprekidnih funkcija. Ostaje još

da se dokaže, da je $D_j w(x) = v_j(x)$, $x \in \mathbf{B}$, za $j = \overline{1, n}$. Iz osnovne teoreme integralnog računa imamo da je

$$w_\epsilon(x_1, \dots, x_n) = \int_{y_1}^{x_1} D_1 w_\epsilon(t, x_2, \dots, x_n) dt + w_\epsilon(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

Iz dokazane uniformne konvergencije, puštajući $\epsilon \rightarrow 0$, slijedi da je

$$w(x_1, \dots, x_n) = \int_{y_1}^{x_1} v_1(t, x_2, \dots, x_n) dt + w(y_1, x_2, \dots, x_n),$$

što daje traženu jednakost za $j = 1$. Analogno i za ostale parcijalne izvode. \square

Sljedećom teoremom dokazujemo da Newtonov potencijal w , pod navedenim uslovom za funkciju g , pripada prostoru $C^{1, \mu}(\overline{\mathbf{B}})$, za $\mu < 1 - \frac{n}{p}$.

Teorema 3.10. *Neka je $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)^{17}$, gdje je $p > n$. Tada je $w \in C^{1, \mu}(\overline{\mathbf{B}})$, za $\mu < 1 - \frac{n}{p}$.*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme važi

$$Dw(x) = \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} D_x \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}} g(y) dy = \frac{-1}{n\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} \frac{y-x}{\|y-x\|^n} g(y) dy,$$

pa u cilju dokazivanja μ -Hölder neprekidnosti izvoda, posmatramo izraz

$$\frac{\|Dw(x) - Dw(z)\|}{\|x-z\|^\mu} = \left\| \frac{1}{n\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} \frac{\frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n}}{\|x-z\|^\mu} g(y) dy \right\|,$$

za $x, z \in \mathbf{B}$. Za q tako da $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, koristeći Hölder nejednakost i činjenicu da je $g \in L^p(\mathbf{B})$ proizilazi sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} \frac{\|Dw(x) - Dw(z)\|}{\|x-z\|^\mu} &\leq \frac{1}{n\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} \frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} |g(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{n\alpha_n} \left(\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbf{B}} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{n\alpha_n} \|g\|_{L^p(\mathbf{B})} \left(\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

¹⁷U dokazu funkciju g posmatramo kao realnu funkciju. Vidjeti komentar prije Teoreme 3.9.

Za naš dokaz dovoljno je pokazati da integral

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \quad (3.43)$$

ima konačnu vrijednost (nezavisno od x i z iz \mathbf{B}).

Neka je $A = \{y \in \mathbf{B} : \|y-x\| \leq \|y-z\|\}$. Za $y \in A$ imamo

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\| = \left\| \frac{(y-x)\|y-z\|^n - (y-z)\|y-x\|^n}{\|y-x\|^n\|y-z\|^n} \right\| \\ &= \frac{\|(y-x)\|y-z\|^n - (y-x)\|y-x\|^n + (y-x)\|y-x\|^n - (y-z)\|y-x\|^n\|}{\|y-x\|^n\|y-z\|^n} \\ &\leq \frac{\|(y-x)\|y-z\|^n - (y-x)\|y-x\|^n\|}{\|y-x\|^n\|y-z\|^n} + \frac{\|(y-x)\|y-x\|^n - (y-z)\|y-x\|^n\|}{\|y-x\|^n\|y-z\|^n} \\ &= \frac{\|\|y-z\|^n - \|y-x\|^n\|}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|^n} + \frac{\|(y-x) - (y-z)\|}{\|y-z\|^n} \\ &\leq \frac{\|\|y-z\| - \|y-x\|\| \cdot n\|y-z\|^{n-1}}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|^n} + \frac{\|x-z\|}{\|y-z\|^n} \\ &\leq \|x-z\| \left(\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|} + \frac{1}{\|y-z\|^n} \right). \end{aligned}$$

Iz prethodnog imamo

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \leq \int_A \left[\|x-z\|^{1-\mu} \left(\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|} + \frac{1}{\|y-z\|^n} \right) \right]^q dy \\ &\leq \int_A \left[(\|y-x\|^{1-\mu} + \|y-z\|^{1-\mu}) \left(\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|} + \frac{1}{\|y-z\|^n} \right) \right]^q dy \\ &\leq \int_A 2^q \left[\|y-z\|^{1-\mu} \left(\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|} + \frac{1}{\|y-z\|^n} \right) \right]^q dy \\ &= \int_A 2^q \left[\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-z\|^\mu} + \frac{1}{\|y-z\|^{n+\mu-1}} \right]^q dy \\ &\leq \int_A 2^q \left[\frac{n}{\|y-x\|^{n-1}\|y-x\|^\mu} + \frac{1}{\|y-x\|^{n+\mu-1}} \right]^q dy \\ &\leq \int_A \frac{(2(n+1))^q}{\|y-x\|^{(n-1+\mu)q}} dy. \end{aligned}$$

Analogno, za $\mathbf{B} \setminus A = \{y \in \mathbf{B} : \|y - z\| < \|y - x\|\}$ važi

$$\int_{\mathbf{B} \setminus A} \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \leq \int_{\mathbf{B} \setminus A} \frac{(2(n+1))^q}{\|y-z\|^{(n-1+\mu)q}} dy.$$

Iz prethodne dvije relacije slijedi da je

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\left\| \frac{y-x}{\|y-x\|^n} - \frac{y-z}{\|y-z\|^n} \right\|}{\|x-z\|^\mu} \right]^q dy \leq \int_{\mathbf{B}} \frac{(2(n+1))^q}{(\min\{\|y-x\|, \|y-z\|\})^{(n-1+\mu)q}} dy. \quad (3.44)$$

Kako integral $I_k(x)$, na osnovu Leme 3.7, konvergira za $k < n$, to i integral u (3.44) konvergira za $(n-1+\mu)q < n$, odnosno

$$(n-1+\mu) \frac{p}{p-1} < n \iff n-1+\mu < \frac{np-n}{p} \iff \mu < 1 - \frac{n}{p}.$$

Primijetimo da je $0 < 1 - \frac{n}{p} < 1$. Štaviše, kako važi nejednakost $I_k(x) \leq I_k(0)$, za svako $x \in \mathbf{B}$, dokazali smo da je integral (3.43) konačan i ne zavisi od tačaka x i z . Dakle, $w \in C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$.

□

Posljedica 3.11. Na osnovu Leme o simetriji 1.10, korektor funkciju $h_x(y)$ definisanu sa relacijom (1.21), Sekcija 1.2, možemo zapisati i u sljedećem obliku

$$h_x(y) = \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \frac{1}{\left\| x\|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{n-2}}.$$

Ovakva prezentacija povlači da je funkcija

$$x \rightarrow \frac{1}{n(2-n)\alpha_n} \int_{\mathbf{B}} \frac{1}{\left\| x\|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{n-2}} g(y) dy$$

harmonijska u \mathbf{B} i pod uslovima prethodne teoreme pripada prostoru $C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$, za $\mu < 1 - \frac{n}{p}$.

U nastavku dokazujemo da je Newtonov potencijal slabo rješenje Poissonove parcijalne diferencijane jednačine $\Delta u = g$.

Teorema 3.12. Newtonov potencijal $w(x) = \int_{\mathbf{B}} \Gamma(y-x)g(y)dy$ zadovoljava jednačinu $\Delta u = g$ u slabom smislu.

Dokaz. Neka je $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$. Primijetimo da na osnovu (1.17), Sekcija 1.2, uzimajući $u = \phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$ važi

$$\int_{\mathbf{B}} \Gamma(y-x) \Delta \phi(y) dy = \phi(x). \quad (3.45)$$

Na osnovu *Prvog Greenovog identiteta* imamo

$$-\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla w(x), \nabla \phi(x) \rangle dx = \int_{\mathbf{B}} w(x) \Delta \phi(x) dx,$$

što zajedno sa Fubinijevom teoremom i relacijom (3.45) daje

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{B}} w(x) \Delta \phi(x) dx &= \int_{\mathbf{B}} \left(\int_{\mathbf{B}} \Gamma(y-x) g(y) dy \right) \Delta \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{B}} \left(\int_{\mathbf{B}} \Gamma(y-x) \Delta \phi(x) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{B}} \phi(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

Dakle, za $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B})$ važi

$$\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla w(x), \nabla \phi(x) \rangle dx + \int_{\mathbf{B}} g(x) \phi(x) dx = 0. \quad (3.46)$$

Kako je $\overline{C_0^\infty(\mathbf{B})} = H_0^1(\mathbf{B})$, to slijedi da je relacija (3.46) tačna za $\phi \in H_0^1(\mathbf{B})$, odnosno da je w slabo rješenje jednačine $\Delta u = g$. \square

Cilj nam je da $f - G[g]$ posmatramo kao slabo rješenje Laplaceove jednačine $\Delta u = 0$. Dokazaćemo sada jedno interesantno tvrđenje od opšteg značaja. Naime, slaba harmonijska neprekidna funkcija je harmonijska u klasičnom smislu. Tvrđenje je tačno i pod slabijim uslovom, odnosno i ako se svojstvo neprekidnosti zamijeni sa uslovom da funkcija pripada prostoru L_{loc}^1 , što je poznato kao Weylova lema (u tom slučaju se funkcija razlikuje od harmonijske funkcije eventualno u skupu mjere nula).

Zbog jednostavnosti tvrđenje dokazujemo u slučaju lopte, iako važi i za proizvoljan otvoren skup Ω , što se može analogno pokazati.

Teorema 3.13. *Slaba harmonijska neprekidna funkcija je harmonijska funkcija u klasičnom smislu.*

Dokaz. Funkcija $u(x)$ zadovoljava jednakost

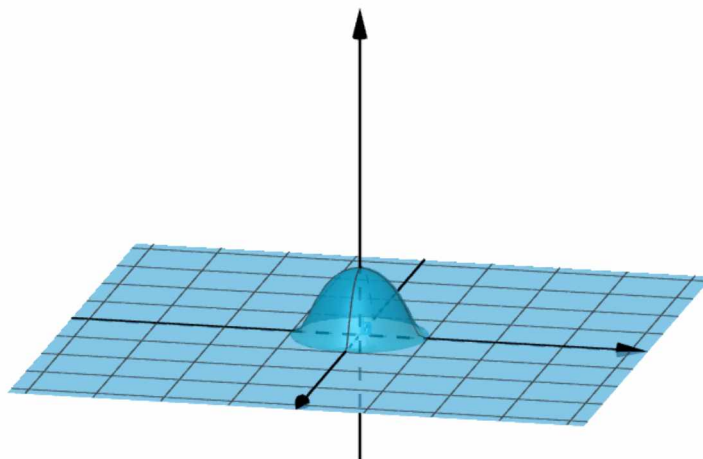
$$\int_{\mathbf{B}} \langle \nabla u(x), \nabla \phi(x) \rangle dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\mathbf{B}).$$

Neka je

$$\kappa(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

takozvani *izgladivač* (eng. *mollifier*; slika 3.6), tj. beskonačno puta diferencijabilna funkcija sa kompaktnim nosačem $\overline{\mathbf{B}}$, gdje je konstanta C birana tako da je

$$\int_{\mathbf{R}^n} \kappa(x) dx = 1.$$



Slika 3.6: Skica grafika izgladivača u \mathbf{R}^3

Posmatramo funkciju $\kappa_r(x) = \frac{1}{r^n} \kappa\left(\frac{x}{r}\right)$. Za funkciju κ_r kompaktni nosač je $\overline{B(0, r)}$, a na osnovu teoreme o smjeni promjenljivih važi da je i njen integral po \mathbf{R}^n jednak 1. Pokazaćemo da je funkcija

$$u_r(x) = \int_{\mathbf{B}} \kappa_r(y - x) u(y) dy$$

harmonijska u $B(0, 1 - r)$. Za $x \in B(0, 1 - r)$ funkcija $\kappa_r(y - x)$ je beskonačno puta diferencijabilna funkcija u odnosu na y i ima kompaktni nosač unutar \mathbf{B} , pa kao takva jeste test funkcija i označićemo je sa $\phi(y)$. Posmatrajući Laplasijan funkcije u_r dobijamo sljedeći niz jednakosti:

$$\Delta u_r(x) = \Delta_x \int_{\mathbf{B}} \kappa_r(y - x) u(y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbf{B}} \Delta_x (\kappa_r(y-x)) u(y) dy \\
 &= \int_{\mathbf{B}} \Delta_y (\kappa_r(y-x)) u(y) dy \\
 &= \int_{\mathbf{B}} u(y) \Delta \phi(y) dy \\
 &= - \int_{\mathbf{B}} \langle \nabla u(y), \nabla \phi(y) \rangle dy = 0
 \end{aligned}$$

Druga jednakost slijedi iz činjenice da je funkcija u neprekidna, a κ_ϵ neprekidno diferencijabilna dva (beskonačno) puta. Treća jednakost slijedi iz simetričnosti funkcije κ_r i pravila lanca, dok pretposljednja jednakost iz primjene definicije slabih izvoda nad funkcijom u sa test funkcijama $D_j \phi$. Dakle, funkcija u_r je harmonijska u $B(1-r)$.

Dokazujemo sada da u_r konvergira ravnomjerno ka funkciji u po kompaktima, što će biti dovoljno da zaključimo da je u harmonijska funkcija. Neka je K proizvoljan kompaktan skup u \mathbf{B} i $\epsilon > 0$. Posmatramo kompakt K' td. $K \subsetneq K' \subsetneq \mathbf{B}$, npr. $K' = \{x \in \mathbf{B} : d(x, K) \leq \frac{d(K, S)}{2}\}$ ¹⁸. Iz ravnomjerne neprekidnosti funkcije u imamo da postoji $\delta > 0$, td. za $x, y \in K'$ i $\|x - y\| < \delta$, važi $\|u(x) - u(y)\| < \epsilon$.

Neka je $x \in K$ i $r < \min\{\delta, \frac{d(K, S)}{2}\}$, što obezbjeđuje da kompaktni nosač funkcije $\kappa_r(y-x)$ bude unutar $K' \subset \mathbf{B}$. Tada važi

$$\begin{aligned}
 |u(x) - u_r(x)| &= \left| u(x) - \int_{\mathbf{B}} \kappa_r(y-x) u(y) dy \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbf{B}} (u(x) - u(y)) \kappa_r(y-x) dy \right| \\
 &\leq \int_{\mathbf{B}} |u(x) - u(y)| \kappa_r(y-x) dy \\
 &= \int_{\|y-x\| \leq r} |u(x) - u(y)| \kappa_r(y-x) dy.
 \end{aligned}$$

Kako su $x, y \in K'$ i $\|x - y\| < r < \delta$, to je

$$|u(x) - u_r(x)| \leq \epsilon \int_{\|y-x\| \leq r} \kappa_r(y-x) dy = \epsilon.$$

¹⁸Kako su K i S kompaktni i $K \cap S = \emptyset$, to je $d(K, S) > 0$.

Dakle, u_r konvergira ravnomjerno ka funkciji u na kompaktima, pa na osnovu Teoreme 1.17 iz Sekcije 1.3 slijedi da je u harmonijska, čime je dokaz završen. \square

Ostaje da se iz dobijenih rezultata u ovoj subsekciji, dokazuje Greenova reprezentacija kvazikonformnog preslikavanje, koje je ujedno slabo rješenje Poissonove jednačine.

Posljedica 3.14. *Neka je f kvazikonformno preslikavanje iz \mathbf{B} u prostornu oblast Ω , koje u slabom smislu zadovoljava jednačinu $\Delta f = g$, za $g \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{B}^n)$, $p > n$. Tada je*

$$f(x) = \int_S P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) + \int_{\mathbf{B}} G(x, y) g(y) dy = P[f](x) + G[g](x).$$

Dokaz. Funkcija $G[g](x)$ je slabo rješenje jednačine $\Delta(u) = g$, kao zbir Newtonovog potencijala i harmonijske funkcije iz Posljedice 3.11.

Takođe, na osnovu konstrukcije korektor funkcije obezbjedili smo da se $G[g]$ anulira na granici, pa je $G[g] \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}})$ jedinstveno slabo rješenje problema $\Delta u = g$, sa nulnim uslovom na granici (jasno, $G[g]$ pripada prostoru $H^1(\mathbf{B})$, jer pripada prostoru $C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}})$ na osnovu Teoreme 3.10 i Posljedice 3.11).

Dalje, to povlači da je funkcija $f - G[g]$ slaba harmonijska funkcija. Međutim, iz glatkosti funkcije $G[g]$ i činjenice da je f homeomorfizam, to je $f - G[g]$ neprekidna funkcija, pa na osnovu Teoreme 3.13 $f - G[g]$ je harmonijska funkcija u klasičnom smislu. Štaviše, na sferi S uzima vrijednosti neprekidne funkcije $f - 0 = f$. Takva funkcija je jedinstvena na osnovu rješenja Dirichletovog problema i jednaka je $P[f]$, odakle slijedi tražena reprezentacija funkcije f . \square

3.4.2 Dokaz Lipschitz neprekidnosti

Slijedi dokaz najavljene teoreme sa početka sekcije. Problem stvara činjenica što funkcija f nije harmonijska, pa ne možemo direktno primijeniti Hardy-Littlewood Teoreme 3.2, 3.3 i 3.4. Međutim, od harmonijske funkcije se razlikuje za funkciju $G[g]$ za koju smo dokazali da pripada familiji $C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$, za $0 < \mu < 1 - \frac{n}{p}$. Uslov $C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$, povlači i Hölder neprekidnost svakog eksponenta i ograničenost parcijalnih izvoda. To će nam omogućiti da jednostavno prelazimo iz uslova za f na uslove za harmonijsku funkciju $P[f|_S]$.

Teorema 3.15. *Neka je f kvazikonformno preslikavanje iz jedinične lopte \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom. Ako je $\Delta f \in L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, za $p > n$, tada je f Lipschitz neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Za dokaz ove teoreme je potrebno pratiti dokaz Teoreme 3.6. Ovdje ćemo se samo fokusirati na razlike u dokazima, a koje su osnovane na rezultate Posljedice 3.14 i Teoreme 3.10.

Preslikavanje f je kvazikonformno, pa na osnovu Morijeve teoreme dobijemo β -Hölder neprekidnost na $\overline{\mathbf{B}}$, kao u (3.23). Za fiksiranu tačku $\eta \in S$, na isti način se dobija i nejednakost (3.27) i posljedično $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost (3.31) u odnosu na tu tačku za funkciju $f_n : S \rightarrow \mathbf{R}$.

Prva razlika je u primjeni Teoreme 3.2. Naime, navedena $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost n -te koordinate funkcije f na S povlači odgovarajuću nejednakost za $P = P[f]$ u tačkama radijus vektora određenog sa tačkom $\eta \in S$, tj.

$$\|\nabla P_n(r\eta)\| \leq C(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1). \quad (3.47)$$

Međutim $P[f]$ nije funkcija f , kao u Teoremi 3.6. Od preslikavanja f , na osnovu Posljedice 3.14, se razlikuje za funkciju $G = G[g]$, koja na osnovu Teoreme 3.10 je $C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$, gdje je $0 < \mu < 1 - \frac{n}{p}$. To, jasno, povlači ograničenost parcijalnog izvoda, odnosno

$$\|\nabla G_n(r\eta)\| \leq \tilde{C} \leq \tilde{C}(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1). \quad (3.48)$$

Dopuštajući da C mijenja vrijednost (a zavisi samo od α, n i Ω), iz (3.47) i (3.48) dobijamo nejednakost

$$\|\nabla f_n(r\eta)\| \leq C(1 - r)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall r \in [0, 1). \quad (3.49)$$

U nastavku, koristeći kvazikonformnost, nejednakost (3.49) se prenosi i na ostale koordinatne funkcije f_j , a koristeći izometrije, nejednakost se posljedično prenosi i na sve ostale tačke lopte, tj.

$$\|\nabla f_j(x)\| \leq C(1 - \|x\|)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall x \in \mathbf{B}, j = \overline{1, n}. \quad (3.50)$$

Bitno je napomenuti, da pri izometriji $L = t_b \circ R$, gdje je t_b translacija, a R rotacija - ortogonalna transformacija koja čuva orijentaciju, preslikavanje $L \circ f$ ostaje kvazikonformno, dok Laplasijan funkcije $L \circ f$ je jednak $R \circ g$, što se jednostavno provjerava. To što se prilikom prelaska u druge tačke (koristeći izometrije) mijenja parcijalna diferencijalna jednačina za f (prelaskom u \tilde{f}) ne mijenja ograničenost konstante δ . Naime, kako je R izometrija, to g i $R \circ g$ imaju istu normu, pa $G[g]$ i $G[R \circ g]$ imaju isti koeficijent Hölder neprekidnosti za izvod.

Potrebno je koristiti sada Lemu 3.4, kako bi nejednakost vratili na Hölder neprekidnost većeg eksponenta. Lema se odnosi na harmonijske funkcije, a nejednakost (3.50) se odnosi na funkciju f koja nije harmonijska (u opštem slučaju). Međutim, kako je $G[g] \in C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}})$, to i funkcije G_j zadovoljavaju nejednakost oblika (3.50), pa za određenu konstantu C važi

$$\|\nabla P_j(x)\| \leq C(1 - \|x\|)^{(1+\alpha)\beta-1}, \quad \forall x \in \mathbf{B}, j = \overline{1, n}, \quad (3.51)$$

gdje je $P_j = P[f]_j$. Iz Leme 3.4 dobijemo $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost funkcije $P[f]$ i posljedično i naše funkcije f , jer $G \in C^{1,\mu}(\overline{\mathbf{B}}) \subset C^{(1+\alpha)\beta}(\overline{\mathbf{B}})$. Time je završena jedna iteracija: iz β -Hölder neprekidnosti funkcije f dokazali smo $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost. Ostaje da se ponavlja iterativni postupak, tako što se u posljednjoj iteraciji koristi Teorema 3.3, umjesto Teoreme 3.2. \square

3.5 Uniformna Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja kada je $\partial\Omega \in C^1$

3.5.1 Uvod u problem i formulacija teorema

U ovoj sekciji razmatramo modul neprekidnosti u slučaju kada kodomen naše funkcije ima C^1 granicu. U ovom slučaju nije prirodno očekivati da preslikavanje bude Lipschitz neprekidno. Naime, i u slučaju $n = 2$ postoje primjeri konformnih preslikavanja iz jediničnog diska \mathbf{D} u Jordanovu oblast sa (samo) C^1 granicom, koja nijesu Lipschitz neprekidna. Funkcija $f(z) = 2z + (1 - z) \log(1 - z)$ iz [54, Sekcija 3.2] je primjer takve funkcije, jer $f'(x) = 1 - \log(1 - x) \rightarrow +\infty$, kada $x \rightarrow 1^-$, pa ne može biti Lipschitz neprekidna u \mathbf{D} .

Dakle, u slučaju C^1 glatkosti fokusiramo se na dokaz Hölder neprekidnosti, i to u uniformnom smislu, tj. tako da koeficijent Hölder neprekidnosti ne zavisi od preslikavanja f . Naime, imajući u vidu radove [62] i [40], gdje je tvrđenje dokazano, respektivno, za konformna, odnosno kvazikonformna harmonijska preslikavanja između Jordanovih oblasti u ravni sa C^1 granicom, cilj nam je da sličan rezultat dobijamo i u prostoru za kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz lopte \mathbf{B} u prostornu oblast Ω sa C^1 granicom. Iz razmatranja proizilazi da tvrđenje važi ako se dodatno pretpostavlja da funkcija f , odnosno svaka koordinatna funkcija f_j , zadovoljava uslov Bloch prostora.

Funkcija $u : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}$ kažemo da pripada harmonijskom β -Bloch prostoru, $\beta \in (0, 1)$, ako je u harmonijska i zadovoljava nejednakost

$$\sup_{x \in \mathbf{B}} (1 - \|x\|)^\beta \|\nabla u(x)\| < \infty. \quad (3.52)$$

U nastavku formulišemo glavni rezultat.

Teorema 3.16. *Neka je Ω prostorna oblast sa C^1 granicom, $b \in \Omega$ i $\beta \in (0, 1)$. Za svako $\alpha \in (0, 1 - \beta)$ i $K \geq 1$, postoji konstanta $M = M(\alpha, b, K, \Omega)$ tako da svako K -kvazikonformno preslikavanje $f : \mathbf{B} \rightarrow \Omega$, koje pripada harmonijskom β -Bloch prostoru i zadovoljava uslov $f(0) = b$, je α -Hölder neprekidno sa Hölder koeficijentom M , tj.*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbf{B}.$$

Značaj ovog rezultata se ogleda u činjenici da je koeficijent M uniforman, tj. ne zavisi ni od preslikavanja f , ni od β . Zamjenjujući uslov (3.52) Bloch prostora za preslikavanje f sa uslovom Lipschitz neprekidnosti, dobija se α -Hölder neprekidnost, za $\alpha \in (0, 1)$, sa "uniformnim" Hölder koeficijentom. I u ovom slučaju je važno napomenuti da je centralni dio rezultata u stvari uniformnost Hölder koeficijenta.

Teorema 3.17. *Neka je Ω prostorna oblast sa C^1 granicom i $b \in \Omega$. Za svako $\alpha \in (0, 1)$ i $K \geq 1$, postoji konstanta $M = M(\alpha, b, K, \Omega)$ tako da svako K -kvazikonformno harmonijsko preslikavanje $f : \mathbf{B} \rightarrow \Omega$, koje je Lipschitz neprekidno u \mathbf{B} i zadovoljava uslov $f(0) = b$, je α -Hölder neprekidno sa Hölder koeficijentom M .*

3.5.2 Dokazi teorema

Za dokaz teoreme, biće potrebno da se modul neprekidnosti kvazikonformnog preslikavanja f na S kontroliše uniformno, tj. da ne zavisi od preslikavanja f tog oblika. Koristeći C^1 glatkost oblasti Ω i Morijeve teoremu 2.32 dobijamo traženi rezultat kroz sljedeću lemu.

Lema 3.18. *Neka je $f : \mathbf{B} \rightarrow \Omega$ K -kvazikonformno preslikavanje, gdje je Ω oblast sa C^1 granicom. Postoji konstanta $M = M(K, f(0), \Omega)$ i konstanta $\alpha = \alpha(K, f(0), \Omega) < 1$ tako da*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbf{B}.$$

Dokaz. Kako Ω oblast sa C^1 granicom, to postoji difeomorfizam $g : \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\Omega}$, tako da je $g(0) = f(0)$ (uz eventualnu prekompoziciju sa Möbiusovim preslikavanjem). Preslikavanja g i g^{-1} su kvazikonformna, jer je g bi-Lipschitz neprekidno preslikavanje. Tada preslikavanje

$$h = g^{-1} \circ f$$

je $K_1 = K_1(K, \Omega, f(0))$ kvazikonformno preslikavanje jedinične lopte na sebe, koje fiksira tačku 0, pa važi nejednakost

$$\|h(x) - h(y)\| \leq M_1\|x - y\|^\alpha, \quad \alpha = K_1^{1/(1-n)}, \quad M_1 = M_1(K_1, \Omega, f(0)),$$

na osnovu Morijeve teoreme. Iz Lipschitz neprekidnosti preslikavanja g , slijedi da preslikavanje $f = g \circ h$ je α -Hölder neprekidno preslikavanje sa Hölder koeficijentom M koji zavisi samo od $K, f(0)$ i Ω . \square

Slijede dokazi najavljenih teorema.

Dokaz Teoreme 3.16.

Za tačku $\eta \in S$, koju ćemo kasnije odrediti, neka je $q = f(\eta) \in \partial\Omega$. Kao što smo i objasnili u paragrafu prije formulacije Teoreme 3.6, koristeći izometriju možemo pretpostaviti da je $q = (0, \dots, 0)$ i da jedinični vektor normale na tangentnu ravan površi $\partial\Omega$ u toj tački je $n_q = (0, \dots, 0, -1)$. Iz navedenih činjenica slijedi da okolinu tačke $q = 0$ u $\partial\Omega$, možemo predstaviti kao grafik C^1 funkcije $\psi : \mathcal{O} \subset \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$, tj. tačke $\partial\Omega$ iz neke male okoline tačke $q = 0$ su oblika

$$(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}, \psi(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})), \quad \text{za } (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathcal{O}, \quad (3.53)$$

gdje je $\psi(0, \dots, 0) = 0$ i $D_j \psi(0, \dots, 0) = 0$, za $j = \overline{1, n-1}$. Neka je $\epsilon > 0$. Iz glatkosti preslikavanja ψ postoji δ_1 tako da

$$|\psi(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) - \psi(0, \dots, 0) - \sum_{j=1}^{n-1} D_j \psi(0, \dots, 0) \zeta_j| \leq \epsilon \|(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\|,$$

odnosno

$$|\psi(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})| \leq \epsilon \|(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\|, \quad (3.54)$$

za $(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in B_{n-1}(0, \delta_1) \subset \mathcal{O}$. Vrijednost δ_1 zavisi od ϵ i $\partial\Omega$, ali iz kompaktnosti i glatkosti $\overline{\Omega}$, δ_1 ne zavisi ni od tačke q , već se može uzeti ista konstanta za sve tačke iz $\partial\Omega$.

Kako je f K -kvazikonformno preslikavanje, iz Leme 3.18 možemo izabrati δ tako da

$$\|f(\xi) - f(\eta)\| \leq \delta_1, \quad (3.55)$$

za $\xi \in V(\eta) = B(\eta, \delta) \cap S$, gdje δ zavisi od $\delta_1, K, f(0)$ i Ω .

Iz (3.55) imamo

$$\|(f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi)) - \underbrace{(f_1(\eta), \dots, f_{n-1}(\eta))}_{(0, \dots, 0)}\| < \delta_1,$$

za $\xi \in V(\eta)$, što zajedno sa (3.53) i (3.54) povlači vezu

$$f_n(\xi) = \psi(f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi))$$

i nejednakost

$$|f_n(\xi)| \leq \epsilon \|(f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi))\|, \quad \text{za } \xi \in V(\eta). \quad (3.56)$$

Koristeći Poissonovu integralnu formulu, za harmonijsku realnu funkciju f_n imamo reprezentaciju

$$f_n(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} f_n(\xi) d\sigma(\xi).$$

Otuda slijedi identitet

$$\nabla f_n(x) = \int_S Q(x, \xi) f_n(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je

$$Q(x, \xi) = \left(-2x + \frac{-n(1 - \|x\|^2)(x - \xi)}{1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle} \right) \frac{1}{(1 + \|x\|^2 - 2\langle \xi, x \rangle)^{\frac{n}{2}}}.$$

Kao i u relacijama (3.3) – (3.9) kod Teoreme 3.2 slično vidimo da važi

$$\|\nabla f_n(x)\| \leq (2n+2) \int_S \frac{|f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|x - \xi\|^n} d\sigma(\xi), \quad \forall x \in \mathbf{B}. \quad (3.57)$$

Neka je $\alpha \in (0, 1 - \beta)$. Razmatramo vrijednost

$$A = \sup_{x \in \mathbf{B}} (1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(x)\|$$

i primijetimo da važi

$$(1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(x)\| = [(1 - \|x\|)^\beta \|\nabla f_n(x)\|] (1 - \|x\|)^{1-\alpha-\beta}.$$

Sa druge strane, kako f pripada familiji harmonijskog β -Bloch prostora, to je

$$\sup_{x \in \mathbf{B}} (1 - \|x\|)^\beta \|\nabla f_n(x)\| < \infty,$$

što povlači da se funkcija $(1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(x)\|$ može neprekidno dodefinisati u $\overline{\mathbf{B}}$, tako da na S uzima vrijednost 0. Ovo znači da se vrijednost A dostiže u nekoj unutrašnjoj tački lopte \mathbf{B} . Neka je to tačka $r\eta$, gdje je $r \in [0, 1)$, a $\eta \in S$ je tačka koju smo razmatrali u početku dokaza i za koju važi (3.57).

Posmatrajući vrijednosti

$$A_j = \sup_{x \in \mathbf{B}} (1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_j(x)\|,$$

slično se može izvesti zaključak za funkcije f_j , za $j = \overline{1, n-1}$. Međutim, nama je dovoljno da dobijemo gornje ograničenje vrijednosti A_j , za $j = \overline{1, n-1}$, kao funkciju od A .

Iz kvazikonformnosti preslikavanja f i Leme 3.5, dobijamo nejednakost

$$\max_{\|h\|=1} \|f'(x)^T h\| \leq K \min_{\|k\|=1} \|f'(x)^T k\|, \quad \forall x \in \mathbf{B}. \quad (3.58)$$

Uzimajući $h = e_j$ i $k = e_n$ u (3.58) dalje imamo da važi

$$\|\nabla f_j(x)\| \leq K \|\nabla f_n(x)\|, \quad \forall x \in \mathbf{B},$$

što povlači

$$A_j \leq K A, \quad \text{za } j = \overline{1, n-1}.$$

Na osnovu dokaza Leme 3.4 vidimo da je

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq K A C(\alpha) \|x - y\|^\alpha, \quad \text{za } j = \overline{1, n-1}, \quad (3.59)$$

i

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq A C(\alpha) \|x - y\|^\alpha,$$

za sve $x, y \in \overline{\mathbf{B}}$. Dakle,

$$|f(x) - f(y)| \leq AC(\alpha) \sqrt{1 + K^2(n-1)} \|x - y\|^\alpha, \quad (3.60)$$

za $x, y \in \overline{\mathbf{B}}$. Ostaje da se dokaže da A ne zavisi od preslikavanja f , već od datih parametara iz formulacije teoreme. Konstanta $C(\alpha)$ u dijelu koji slijedi može mijenjati svoju vrijednost, ali zavisi samo od α . Koristeći nejednakost (3.57), dobijamo sljedeće ocjene za vrijednost A :

$$\begin{aligned} A &= (1-r)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(r\eta)\| \\ &\leq (2n+2)(1-r)^{1-\alpha} \int_S \frac{|f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \\ &= (2n+2) \underbrace{\int_{V(\eta)} \frac{(1-r)^{1-\alpha} |f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi)}_{I_1} \\ &\quad + (2n+2) \underbrace{\int_{S \setminus V(\eta)} \frac{(1-r)^{1-\alpha} |f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi)}_{I_2}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdje je $V(\eta) = \{\xi \in S : \|\xi - \eta\| < \delta\}$.

Za integral I_1 , nejednakosti (3.56) i (3.59) povlače

$$\begin{aligned} I_1 &= (1-r)^{1-\alpha} \int_{V(\eta)} \frac{|f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \\ &\leq \epsilon (1-r)^{1-\alpha} \int_{V(\eta)} \frac{\|(f_1(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi))\|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \\ &\leq \epsilon \sqrt{n-1} AKC(\alpha) (1-r)^{1-\alpha} \int_{V(\eta)} \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \\ &\leq \epsilon \sqrt{n-1} AKC(\alpha) (1-r)^{1-\alpha} \int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi). \end{aligned} \quad (3.62)$$

U nastavku razlikujemo dva slučaja, analogno kao kod integrala u Teoremi 3.6.

Prvi slučaj $r = \|r\eta\| \geq \frac{1}{2}$

Očigledno je da posljednji integral ne zavisi od tačke $\eta \in S$, pa radi jednostavnosti računanja možemo pretpostaviti da je $\eta = (1, 0, \dots, 0)$. Tada krajni integrand u (3.62) zavisi samo od prve koordinate ξ , pa koristeći formulu iz [7, str.

242, Appendix A5] slijedi da je

$$\int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) = C_1 \int_{-1}^1 \int_{S_{n-2}} \frac{(2 - 2\xi_1)^{\frac{\alpha}{2}} (1 - \xi_1^2)^{\frac{n-3}{2}}}{((1-r)^2 + r(2-2\xi_1))^{\frac{n}{2}}} d\sigma_{n-2}(\zeta) d\xi_1, \quad (3.63)$$

gdje σ_{n-2} označava odgovarajuću normalizovanu površinsku mjeru na jediničnoj sferi S_{n-2} u \mathbf{R}^{n-1} . Konstanta C_1 zavisi od n i od zapremina jediničnih lopti u \mathbf{R}^n i \mathbf{R}^{n-1} .

Desnu stranu u (3.63), koristeći Fubinijevu teoremu i pretpostavku $r \geq \frac{1}{2}$, transformišemo kroz neke elementarne nejednakosti i dobijamo

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) &\leq C_1 \int_{-1}^1 \frac{(2 - 2\xi_1)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \frac{2^{\frac{n-3}{2}} (1 - \xi_1)^{\frac{n-3}{2}}}{((1-r)^2 + r(2-2\xi_1))^{\frac{n-2}{2}}} d\xi_1 \\ &= C_1 2^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \underbrace{\left(\frac{1 - \xi_1}{(1-r)^2 + r(2-2\xi_1)} \right)^{\frac{n-2}{2}}}_{\leq 1} d\xi_1 \\ &\leq C(\alpha) \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(1-r)^2 + (1 - \xi_1)} d\xi_1. \end{aligned}$$

Dalje, koristeći smjenu $t = \frac{\sqrt{1-\xi_1}}{1-r}$, proizilazi

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) &\leq (1-r)^{\alpha-1} C(\alpha) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{1-r}} \frac{2t^\alpha}{1+t^2} dt \\ &\leq (1-r)^{\alpha-1} C(\alpha) \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Kako posljednji integral konvergira, konačno imamo

$$(1-r)^{1-\alpha} \int_S \frac{\|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \leq C(\alpha), \quad (3.64)$$

za $r \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Drugi slučaj $r < \frac{1}{2}$

U ovom slučaju imamo ograničenost imenioca podintegralne funkcije sa donje strane, pa je nejednaost trivijalna. Naime

$$\frac{(1-r)^{1-\alpha} \|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} = \frac{(1-r)^{1-\alpha} \|\xi - \eta\|^\alpha}{((1-r)^2 + r\|\xi - \eta\|^2)^{\frac{n}{2}}} < \frac{1 \cdot 2^\alpha}{(\frac{1}{2})^n} = 2^{n+\alpha},$$

to slijedi da je

$$\int_S \frac{(1-r)^{1-\alpha} \|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \leq 2^{n+\alpha}. \quad (3.65)$$

Iz (3.64) and (3.65), zaključujemo da važi

$$\int_S \frac{(1-r)^{1-\alpha} \|\xi - \eta\|^\alpha}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi) \leq C(\alpha),$$

za $r \in [0, 1)$, što zajedno sa (3.62) daje

$$I_1 \leq \epsilon \sqrt{n-1} AKC(\alpha). \quad (3.66)$$

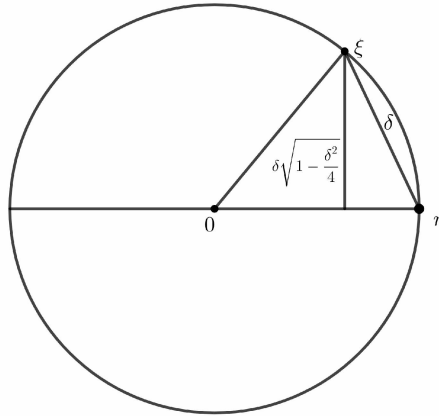
U nastavu razmotrimo izraz

$$I_2 = (1-r)^{1-\alpha} \int_{S \setminus V(\eta)} \frac{|f_n(\xi) - f_n(\eta)|}{\|r\eta - \xi\|^n} d\sigma(\xi)$$

iz nejednakosti (3.61). Iz $1-r \leq 1$ i $|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leq \text{diam}(\Omega)$ slijedi da je

$$I_2 \leq \text{diam}(\Omega) \cdot \sigma(S \setminus V(\eta)) \max_{\xi \in S \setminus V(\eta)} \frac{1}{\|r\eta - \xi\|^n} \leq \text{diam}(\Omega) \max_{\xi \in S \setminus V(\eta)} \frac{1}{\|r\eta - \xi\|^n}.$$

Želimo odrediti donje ograničenje izraza $\|r\eta - \xi\|^2$, za $\xi \in S \setminus V(\eta)$ u terminima vrijednosti δ . Opet, bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\eta = (1, 0, \dots, 0)$.



Slika 3.7: Minimalna vrijednost izraza $\|r\eta - \xi\|$, za $0 \leq r < 1$

Kako je $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in S \setminus V(\eta)$, to važi

$$\delta^2 \leq \|\xi - \eta\|^2 = 2 - 2\xi_1,$$

što povlači

$$\begin{aligned} \|r\eta - \xi\|^2 &= 1 + r^2 - 2r\xi_1 \geq 1 + r^2 + r(\delta^2 - 2) \\ &\geq 1 + \left(\frac{2 - \delta^2}{2}\right)^2 + \frac{2 - \delta^2}{2}(\delta^2 - 2) \\ &= \delta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina je ograničena sa donje strane sa globalnim minimumom u tjemenu parabole.

Odatle slijedi da je

$$I_2 \leq \text{diam}(\Omega) \left(\delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}} \right)^{-n}. \quad (3.67)$$

Ograničili smo oba integrala u (3.61), pa uvrštavajući dobijene ocjene (3.66) i (3.67) zaključujemo

$$A \leq \epsilon(2n+2)\sqrt{n-1}AKC(\alpha) + (2n+2)\text{diam}(\Omega) \left(\delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}} \right)^{-n}. \quad (3.68)$$

Međutim, vrijednost ϵ možemo da biramo tako da

$$\epsilon(2n+2)\sqrt{n-1}KC(\alpha) \leq \frac{1}{2},$$

pa iz (3.68) imamo

$$A \leq 2(2n+2)\text{diam}(\Omega) \left(\delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}} \right)^{-n}. \quad (3.69)$$

Napominjemo još jednom da δ zavisi od $K, f(0), \Omega$ i α (jer ϵ zavisi od α). Konačno, dokazali smo ograničenost vrijednosti A , pa iz (3.60) zaključujemo da je f α -Hölder neprekidno preslikavanje u $\overline{\mathbf{B}}$ sa Hölder koeficijentom M koji ne zavisi ni od f , ni od β . \square

Dokazujemo u nastavku i drugi rezultat ove sekcije. Dokaz se neznatno razlikuje od prethodnog, pa ćemo se zbog toga fokusirati samo na razlike.

Dokaz Teoreme 3.17. Dokaz ove teoreme se razlikuje od dokaza prethodne teoreme samo u jednom koraku: u dostizanja vrijednosti

$$A = \sup_{x \in \mathbf{B}} (1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(x)\|,$$

u nekoj unutrašnjoj tački lopte \mathbf{B} , gdje je $\alpha \in (0, 1)$. U ovom slučaju, ta činjenica se dokazuje na sljedeći način: kako je f_n Lipschitz neprekidno i glatko (jer je f i harmonijska funkcija) slijedi da je $\sup_{x \in B} \|\nabla f_n(x)\| < \infty$, pa za svako $\alpha \in (0, 1)$

funkcija

$$(1 - \|x\|)^{1-\alpha} \|\nabla f_n(x)\|$$

se može dodefinisati neprekidno u $\overline{\mathbf{B}}$, uzimajući vrijednost nula na granici.

Kao i u prethodnom dokazu, Hölder koeficijent zavisi samo od $\alpha, f(0), K$ i Ω . \square

Literatura

- [1] AHLFORS, L. Möbius transformations in several dimensions. *Lecture Notes at University of Minnesota* (1981).
- [2] AHLFORS, L., AND BEURLING, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta Mathematica* 83 (1950), 101 – 129.
- [3] ANDERSON, G., AND VAMANAMURTHY, M. Hölder continuity of quasiconformal mappings of the unit ball. *Proceedings of the American Mathematical Society* 104, 1 (1988), 227 – 230.
- [4] ANDERSON, G. D. Dependence on dimension of a constant related to the Grötzsch ring. *Proceedings of the American Mathematical Society* 61, 1 (1976), 77 – 80.
- [5] ARSENOVIĆ, M., KOJIĆ, V., AND MATELJEVIĆ, M. On Lipschitz continuity of harmonic quasiregular maps on the unit ball in \mathbf{R}^n . In *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica* (2008), vol. 33, pp. 315–318.
- [6] ASTALA, K., AND MANOJLOVIĆ, V. On Pavlovic’s theorem in space. *Potential Analysis* 43, 3 (2015), 361 – 370.
- [7] AXLER, S., BOURDON, P., AND WADE, R. *Harmonic function theory*, vol. 137. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] BHAYO, B., AND VUORINEN, M. On Mori’s theorem for quasiconformal maps in the n -space. *Transactions of the American Mathematical Society* 363, 11 (2011), 5703 – 5719.
- [9] BOŽIN, V., AND MATELJEVIĆ, M. Bounds for Jacobian of harmonic injective mappings in n -dimensional space. *Filomat* 29, 9 (2015), 2119–2124.
- [10] BOZIN, V., AND MATELJEVIC, M. Quasiconformal and hqc mappings between Lyapunov Jordan domains. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(5), to appear* 23 (2018).
- [11] CARAMAN, P. *n -dimensional quasiconformal (QCf) mappings*. CRC Press, 1974.
- [12] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

- [13] FEHLMANN, R., AND VUORINEN, M. Mori's theorem for n -dimensional quasiconformal mappings. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica* 13 (1988), 111 – 124.
- [14] FUGLEDE, B. Extremal length and functional completion. *Acta Mathematica* 98 (1957), 171 – 219.
- [15] GANTUMUR, T. Poisson's equation. <https://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f13/poisson.pdf>, November 2013. [Online; pristupljeno 06.05.2023. godine].
- [16] GEHRING, F., AND VÄISÄLÄ, J. On the geometric definition for quasiconformal mappings. *Commentarii Mathematici Helvetici* 36, 1 (1962), 19 – 32.
- [17] GEHRING, F. W. Symmetrization of rings in space. *Transactions of the American Mathematical Society* 101, 3 (1961), 499 – 519.
- [18] GEHRING, F. W. Rings and quasiconformal mappings in space. *Transactions of the American Mathematical Society* 103, 3 (1962), 353 – 393.
- [19] GEHRING, F. W. Quasiconformal mappings. In *Complex analysis and its applications (Lectures, Internat. Sem., Trieste, 1975), Vol. II*. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976, pp. 213–268.
- [20] GEHRING, F. W. Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* 10 (1985), 203 – 219.
- [21] GEHRING, F. W., MARTIN, G. J., AND PALKA, B. P. *An introduction to the theory of higher-dimensional quasiconformal mappings*, vol. 216. American Mathematical Soc., 2017.
- [22] GILBARG, D., TRUDINGER, N. S., GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. 224. Springer, 1977.
- [23] GJOKAJ, A. Hölder continuity of quasiconformal harmonic mappings from the unit ball to a spatial domain with C^1 boundary. *Indagationes Mathematicae* 33, 5 (2022), 1061 – 1070.
- [24] GJOKAJ, A., AND KALAJ, D. Quasiconformal Harmonic Mappings Between the Unit Ball and a Spatial Domain with $C^{1,\alpha}$ Boundary. *Potential Analysis* (2021), 1 – 11.
- [25] GOLUZIN, G. M. *Geometric theory of functions of a complex variable*, vol. 26. American Mathematical Soc., 1969.
- [26] GUTIÉRREZ, C. E. Solution of Poisson's equation. <https://www.math.temple.edu/~gutierrez/math8141/solution.poisson.equation.pdf>, 2013. [Online; pristupljeno 06.05.2023. godine].

- [27] HARTMAN, P. On isometries and on a theorem of Liouville. *Mathematische Zeitschrift* 69 (1958), 202 – 210.
- [28] IWANIEC, T., AND MARTIN, G. Quasiregular mappings in even dimensions. *Acta Mathematica* 170, 1 (1993), 29 – 81.
- [29] KALAJ, D. Quasiconformal and harmonic mappings between Jordan domains. *Mathematische Zeitschrift* 260 (2008), 237 – 252.
- [30] KALAJ, D. Harmonic mappings and distance function. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 10, 3 (2011), 669 – 681.
- [31] KALAJ, D. On boundary correspondences under quasiconformal harmonic mappings between smooth Jordan domains. *Mathematische Nachrichten* 285, 2-3 (2012), 283 – 294.
- [32] KALAJ, D. A priori estimate of gradient of a solution of a certain differential inequality and quasiconformal mappings. *Journal d'Analyse Mathématique* 119, 1 (2013), 63 – 88.
- [33] KALAJ, D. Harmonic quasiconformal mappings between C^1 smooth Jordan domains. *Revista Matemática Iberoamericana* 38, 1 (2021), 95 – 111.
- [34] KALAJ, D., AND MATELJEVIĆ, M. Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains. *Journal d'Analyse Mathématique* 100, 1 (2006), 117–132.
- [35] KALAJ, D., AND MATELJEVIĆ, M. Harmonic quasiconformal self-mappings and Möbius transformations of the unit ball. *Pacific Journal of Mathematics* 247, 2 (2010), 389–406.
- [36] KALAJ, D., AND MATELJEVIĆ, M. Quasiconformal harmonic mappings and generalizations. In *International workshop on harmonic and quasiconformal mappings* (2010), vol. 18, pp. 239–260.
- [37] KALAJ, D., AND MATELJEVIĆ, M. (K, K') -quasiconformal harmonic mappings. *Potential Analysis* 36 (2012), 117 – 135.
- [38] KALAJ, D., AND PAVLOVIĆ, M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math* 30, 1 (2005), 159 – 165.
- [39] KALAJ, D., AND SAKSMAN, E. Quasiconformal maps with controlled Laplacian. *Journal d'Analyse Mathématique* 137, 1 (2019), 251 – 268.
- [40] KALAJ, D., AND VUORINEN, M. On harmonic functions and the Schwarz lemma. In *Proc. Amer. Math. Soc* (2012), vol. 140, pp. 161 – 165.

- [41] KALAJ, D., AND ZLATICANIN, A. Quasiconformal mappings with controlled Laplacian and Hölder continuity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math* 44, 2 (2019), 797 – 803.
- [42] KELLOGG, O. D. *Foundations of potential theory*, vol. 31. Courier Corporation, 1953.
- [43] LEHTO, O., AND VIRTANEN, K. I. *Quasiconformal mappings in the plane*, vol. 126. Citeseer, 1973.
- [44] MARTIO, O. On harmonic quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 425* (1968), 3 – 10.
- [45] MARTIO, O., AND NÄKKI, R. Boundary Hölder continuity and quasiconformal mappings. *Journal of the London Mathematical Society* 2, 2 (1991), 339 – 350.
- [46] MATELJEVIĆ, M. Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains. *Filomat* 26, 3 (2012), 479–510.
- [47] MATELJEVIĆ, M. Boundary behaviour of partial derivatives for solutions to certain laplacian-gradient inequalities and spatial qc maps. In *Operator Theory and Harmonic Analysis: OTHA 2020, Part I–New General Trends and Advances of the Theory 10* (2021), Springer, pp. 393–418.
- [48] MATELJEVIĆ, M., BOŽIN, V., AND KNEŽEVIĆ, M. Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains. *Filomat* 24, 3 (2010), 111–124.
- [49] MATELJEVIĆ, M., AND VUORINEN, M. On harmonic quasiconformal quasi-isometries. *Journal of Inequalities and Applications* (2010), 1 – 19.
- [50] MORI, A. On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 8, 2 (1956), 156 – 166.
- [51] PARTYKA, D., AND SAKAN, K. On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings. In *Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica* (2007), vol. 32, pp. 579 – 594.
- [52] PARTYKA, D., SAKAN, K., AND ZHU, J.-F. Quasiconformal harmonic mappings with the convex holomorphic part. vol. 43, pp. 401 – 418.
- [53] PAVLOVIC, M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk. In *Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica* (2002), vol. 27, pp. 365 – 372.
- [54] POMMERENKE, C. *Boundary behaviour of conformal maps*, vol. 299. Springer Science & Business Media, 2013.

- [55] RESHETNYAK, Y. G. Liouville's theorem on conformal mappings for minimal regularity assumptions. *Siberian Mathematical Journal* 8, 4 (1967), 631 – 634.
- [56] RUDIN, W. Real and complex analysis, third edition. *McGraw-Hill* (1987).
- [57] RUDIN, W. *Function theory in the unit ball of C^n* . Springer Science & Business Media, 2008.
- [58] SHABAT, B. V. On the theory of quasiconformal mappings in space. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (1960), vol. 132, pp. 1045 – 1048.
- [59] SONGLIANG, Q. On Mori's theorem in quasiconformal theory. *Acta Mathematica Sinica* 13, 1 (1997), 35–44.
- [60] VÄISÄLÄ, J. *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, vol. 229. Springer, 2006.
- [61] VUORINEN, M. *Conformal geometry and quasiregular mappings*, vol. 1319. Springer, 2006.
- [62] WARSCHAWSKI, S. On conformal mapping of regions bounded by smooth curves. *Proceedings of the American Mathematical Society* 2, 2 (1951), 254 – 261.
- [63] YŪJŌBŌ, Z., ET AL. On pseudo-regular functions. *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 1, 2 (1953), 67 – 80.

Biografija

Anton Gjokaj rođen je 13. juna 1994. godine u Podgorici. Osnovnu i srednju školu završio je u Tuzima, kao dobitnik diplome „Luča” i đak generacije. Tokom tog perioda učestvovao je na takmičenjima iz matematike i biologije i ostvario zapažene rezultate na državnom nivou. Takođe je predstavljao Crnu Goru na balkanskim i internacionalnim olimpijadama iz matematike (JBMO, BMO, IMO).

Studijske 2013/14 godine upisao je Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore, smjer Matematika. Trogodišnje osnovne studije završio je u roku sa prosječnom ocjenom 10.00. Specijalističke studije, smjer Teorijska matematika, uspješno je završio 2017. godine, braneći rad pod nazivom „Konformna preslikavanja između jednostruko i dvostruko povezanih oblasti”. U martu 2019. godine završio je magistarske studije pri istom fakultetu, braneći rad „Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija”, pod mentorstvom prof. dr Davida Kalaja. Doktorske studije na Univerzitetu Crne Gore upisao je u akademskoj godini 2019/20.

Za postignute rezultate u toku studija dobitnik je Studentske nagrade Univerziteta Crne Gore za najboljeg studenta Prirodno-matematičkog fakulteta (studijska godina 2015/16), Plakete Univerziteta Crne Gore (2017 godine), stipendije CANU-a za izuzetan uspjeh (2017 godine). Dobitnik je nagrade Ministarstva nauke i tehnološkog razvoja Vlade Crne Gore za najuspješnijeg mladog naučnika do 30 godina života u 2022. godini.

Od septembra 2017. godine anagažovan je kao saradnik u nastavi na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Izvodio je vježbe na predmetima: Analiza 3, Analiza 4, Kompleksna analiza 1, Kompleksna analiza 2, Uvod u diferencijalnu geometriju, Diferencijalne jednačine, Algebra i na matematičkim predmetima na Mašinskom, Elektrotehničkom i Građevinskom fakultetu Univerziteta Crne Gore.

Tečno govori albanski i crnogorski jezik, a aktivno govori engleski i italijanski jezik.

Izjava o autorstvu

Potpisani Anton Gjokaj

Broj indeksa/upisa 2/2019

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom „**Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**”

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

U Podgorici, 07. 11. 2023 god

Potpis doktoranda

A. Gjokaj

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Anton Gjokaj

Broj indeksa/upisa: 2/2019

Studijski program: Matematika

Naslov rada: „Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru”

Mentor: prof. dr David Kalaj

Potpisani Anton Gjokaj

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

U Podgorici, 07. 11. 2023 god

Potpis doktoranda

A. Gjokaj

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: „**Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**”, koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

U Podgorici, 07. 11. 2023 god

Potpis doktoranda

A. Gokaj