

UNIVERZITET CRNE GORE  
EKONOMSKI FAKULTET PODGORICA

MR DAMIR SINDIK

**NELINEARNA DINAMIČKA ANALIZA  
DISEKVILIBRIJUMA I HAOSA U  
AGREGATIMA RASPOLOŽIVOG  
DOHOTKA, IMETKA I POTROŠNJE  
U MAKROEKONOMIJI EVROPSKE UNIJE**

Doktorska disertacija

Podgorica, 2024. godine

UNIVERSITY OF MONTENEGRO  
FACULTY OF ECONOMICS PODGORICA

M.Sc. DAMIR SINDIK

**NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS  
OF DISEQUILIBRIUM AND CHAOS IN  
AGGREGATES OF DISPOSABLE  
INCOME, WEALTH, AND CONSUMPTION  
IN EU MACROECONOMICS**

PhD thesis

Podgorica, 2024



## **PODACI O DOKTORANDU**

Ime i prezime: MR Damir V. Sindik

Datum rođenja: 28.10.1975.

Naziv završenog studijskog programa i godina završetka: Ekonomski fakultet Podgorica, Akademske magistarske studije – smjer Bankarstvo, 2015. godine.

## **UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE**

Datum sjednice Senata Univerziteta na kojoj je prihvaćena teza:

### **Mentor:**

Prof. dr Vladimir Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

### **Komentor:**

Prof. dr Ljiljana Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

### **Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:**

Prof. dr Vladimir Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Ljiljana Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Josip Tica, redovni profesor, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatska, Ekonomski fakultet

Prof. dr Maja Baćović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Doc. dr Saša Vujošević, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

### **Komisija za ocjenu doktorske disertacije:**

Prof. dr Vladimir Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Ljiljana Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Josip Tica, redovni profesor, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatska, Ekonomski fakultet

Prof. dr Maja Baćović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Doc. dr Saša Vujošević, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

### **Komisija za odbranu doktorske disertacije:**

Prof. dr Vladimir Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Ljiljana Kaščelan, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Prof. dr Josip Tica, redovni profesor, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatska, Ekonomski fakultet

Prof. dr Maja Baćović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

Doc. dr Saša Vujošević, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Ekonomski fakultet

**Datum odbrane:**

**Datum promocije:**

**UDK broj:**

## Rezime

U doktorskoj disertaciji istražujemo inkrementalni naučni pristup analizi ekonomske dinamike. Ključna u ovom istraživanju je teorija disekvilibriruma, koja predstavlja radikalno odstupanje od ustaljenih teorija opšte ekonomske ravnoteže. Prezentovani novi pristup, baziran je na teoriji disekvilibriruma i donosi duboko inovativnu perspektivu za dublje razumijevanje ekonomske dinamike. Srž teorije disekvilibriruma ogleda se u njenom fokusiranju na ekvilibrirume koji se neprestano mijenjaju. Umjesto da se smatraju konstantnim tačkama, ekvilibrirumi se tretiraju kao funkcije vremena, što odražava stvarnost ekonomske dinamike. Navedeno je značajna promjena ustaljene ekonomske paradigme. Međutim, ova nova teorija sa sobom nosi izazov u vidu konstantnog preračunavanja sistema jednačina modela. Predmetni sistemi predstavljaju kompleksne nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda s parametrima koji se vremenom mijenjaju. Disertacija se upravo bavi pomenutim izazovom i istražuje načine na koje se navedeni sistemi mogu kreirati, analizirati i sintetizovati u obliku naučnih zaključaka.

Jedna od ključnih inovacija ovog istraživanja jeste i pristup kreiranju pomenutih sistema, čak i kada imamo samo mali početni uzorak diskretnih podataka. Navedeno postižemo proširujući početni skup podataka putem diferencijabilnih funkcija, koje inherentno generišu beskonačan skup podataka. Pomenuti skup je od suštinskog značaja za dalje precizno definisanje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (SNDJPR).

Kako bismo kreirali SNDJPR, koristimo se ekonometrijskim metodama, posebno metodom najmanjih nelinearnih kvadrata (NNK). Kada su modeli uspješno formirani, prelazimo na analizu primijenom metoda matematičke ekonomije. Fokusiramo se na primijenjenu nelinearnu dinamičku analizu (NDA), koja se pokazala kao izuzetno moćan alat za dublje razumijevanje ekonomske dinamike u okvirima teorije disekvilibriruma.

Disertacija takođe uvodi inovativan pristup grafičkom rješavanju SNDJPR, što omogućava definisanje toka sistema i istraživanje različitih ekonomskih scenarija bez

potrebe za ponovnim evaluiranjem sistema. Navedeni aspekt istraživanja naglašava važnost „inercije” odnosno „lijepljivosti” varijabli sistema, što ima značajan uticaj na analizu makroekonomske stvarnosti u okviru Evropske unije (EU). Predmetni inovativni pristup implementira se putem specijalizovanih MATLAB aplikacija, poput Pplane za analizu 2D sistema u ravni i MATCONT za analizu 3D sistema u prostoru. Praktična primijena softverskih alata, uzimajući u obzir različite dimenzije analize, dodatno povećava korisnost metodologije za teorijske i empirijske naučne istraživače. Važno je napomenuti da prezentovani pristup nije ograničen samo na ekonomske analize. Kao što se koriste vremenske mape ili karte za praćenje atmosferskih promjena (vremenskih prilika), prezentovana metodologija može se primijeniti na različite oblasti, npr. uključujući analizu parametara nuklearnih reaktora, bioloških procesa rada srca, tako i makroekonomske analize.

Nadalje, prezentovani pristup je prilagođen specifičnostima makroekonomije EU, što dodatno unaprijeđuje razumijevanje i analizu ove ključne ekonomske oblasti. Disertacija zaista predstavlja inkrementalni korak naprijed u ekonomskoj analizi, pružajući istraživačima i donosiocima odluka moćan alat za bolje razumijevanje i modeliranje ekonomske dinamike, kao i za razvoj efikasnih makroekonomskih politika u monetarnom i fiskalnom domenu. Dodatno, predstavljanje korišćenja softverskih alata, poput MATLAB-a i njegovih specijalizovanih aplikacija Pplane i MATCONT, dodaje izuzetno praktičnu dimenziju disertaciji, čineći je relevantnim metodološkim osnovom za dalja empirijska istraživanja i analize.

Ključne riječi: teorija disekvilibrjuma, metoda nelinearnih najmanjih kvadrata, nelinearna dinamička analiza, teorija inverznog modeliranja, vještačka inteligencija, neuralne mreže

Naučna oblast: Primijenjena matematika

Uža naučna oblast: Matematička ekonomija

## **Abstract**

In the doctoral dissertation, we explore an incremental scientific approach to the analysis of economic dynamics. Central to this research is the theory of disequilibrium, which represents a radical departure from established theories of general equilibrium. The presented new approach is based on the theory of disequilibrium and brings a deeply innovative perspective for a deeper understanding of economic dynamics. The core of disequilibrium theory is reflected in its focus on equilibria that are constantly changing. Rather than being considered as fixed points, equilibria are treated as functions of time, reflecting the reality of economic dynamics. This is a significant change in the established economic paradigm. However, this new theory brings with it the challenge of constantly recalculating the system of model equations. The systems in question represent complex nonlinear differential equations of the first order with parameters that change over time. The dissertation deals with the mentioned challenge and explores the ways in which the mentioned systems can be created, analyzed and synthesized in the form of scientific conclusions.

One of the key innovations of this research is the approach to creating the mentioned systems, even when we only have a small initial sample of discrete data. We achieve the above by expanding the initial data set through differentiable functions, which inherently generate an infinite data set. The mentioned set is of essential importance for the further precise definition of the System of Nonlinear Ordinary Differential Equations (SNODE).

To create the SNODE, we use econometric methods, especially the Nonlinear Least Squares (NLLS) method. When the models have been successfully formed, we move on to the analysis using the methods of mathematical economics. We focus on applied Nonlinear Dynamic Analysis (NDA), which has proven to be an extremely powerful tool for a deeper understanding of economic dynamics within the framework of disequilibrium theory.

The dissertation also introduces an innovative approach to the graphical solution of SNODE, which allows defining the flow of the system and exploring different economic scenarios without the need to re-evaluate the system. The aspect of the research emphasizes

the importance of “inertia” or “stickiness” of system variables, which has a significant impact on the analysis of macroeconomic reality within the European Union (EU). The subject innovative approach is implemented through specialized MATLAB applications, such as Pplane for the analysis of 2D systems in the plane and MATCONT for the analysis of 3D systems in space. The practical application of software tools, considering different dimensions of analysis, further increases the usefulness of the methodology for theoretical and empirical scientific researchers. It is important to note that the presented approach is not limited to economic analyses. Just as weather maps or maps are used to monitor atmospheric changes (weather conditions), the presented methodology can be applied to different areas, e.g., including analysis of parameters of nuclear reactors, biological processes of the heart, as well as macroeconomic analysis.

Furthermore, the presented approach is adapted to the specifics of the EU macroeconomics, which further improves the understanding and analysis of this key economic area. The dissertation truly represents a incremental step forward in economic analysis, providing researchers and decision makers with a powerful tool for better understanding and modeling of economic dynamics, as well as for the development of effective macroeconomic policies in the monetary and fiscal domain. Additionally, the presentation of the use of software tools, such as MATLAB and its specialized applications Pplane and MATCONT, adds an extremely practical dimension to the dissertation, making it a relevant methodological basis for further empirical research and analysis.

**Keywords:** disequilibrium theory, nonlinear least squares method, nonlinear dynamic analysis, inverse modeling theory, artificial intelligence, neural networks

**Scientific Field:** Applied Mathematics

**Narrow Scientific Field:** Mathematical Economics

*Posvećeno mojoj porodici,*

*supruzi Lidiji, i kćerkama Kseniji i Kristini.*

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	1
<b>2. Teorija kompleksnosti, hipoteze i metodologija istraživanja</b>	11
2.1 Kompleksni sistemi	11
2.2 Primjena kompleksnih sistema u makroekonomiji Evropske unije (EU): hipoteze i metodologija	16
<b>3. Teorija nelinearne dinamičke analize (NDA) i MATLAB NDA aplikacije</b>	43
3.1 Opšte teorijske postavke NDA	43
3.2 Partikularni NDA postulati	71
3.3 Aproksimacija vremenskih serija nelinearnim diferencijabilnim funkcijama	120
3.4 Fazni i parametarski prostori	127
3.5 Teorija haosa	140
3.6 NDA analitički alati za MATLAB	152
3.6.1 PPlane aplikacija za MATLAB	152
3.6.2 MATCONT aplikacija za MATLAB	158
<b>4. Teorija disekvilibrjuma i kreiranje makroekonomskog modela</b>	172
4.1 Teorija disekvilibrjuma (TD) i opšte makroekonomske postavke KMG modela	175
4.2 Definisane KMG endogenih i egzogenih varijabli od interesa	184
4.3 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) u regresionoj analizi	188
4.4 Prilagođene za EU28 makroekonomske relacije teorije disekvilibrjuma (TD)	196
4.5 EViews i kreiranje SNDJPR	202
4.5.1 Kreiranje 2D modela za $Y_H - W_H, Y_H - C_H$ i $W_H - C_H$	208
4.5.2 Kreiranje 3D modela za $Y_H - W_H - C_H$ i $HICP - r_{t10} - Y_H$	217
4.5.3 Kreiranje 4D modela za $Y_{HS1} - G_{R(TOT)} - G_{E(TOT)} - M_H$	220
4.5.4 Kreiranje 7D modela za $Y_{HS1} - Y_{HS2} - G_{R(TOT)} - G_{E(TOT)} - T_{(TOT)} - M_H - B_H$	223
<b>5. Nelinearna dinamička analiza kreiranih modela</b>	228
5.1 Kompjuterski eksperiment i numeričke metode rješavanja SNDJPR	231
5.2 Analiza i sinteza 2D modela pomoću MATLAB PPlane aplikacije	234



5.2.1 Model ukupno raspoloživog dohodka i imetka ( $Y_H - W_H$ model).....	235
5.2.2 Model ukupno raspoloživog dohodka i potrošnje ( $Y_H - C_H$ model).....	238
5.2.3 Model ukupno raspoloživog imetka i potrošnje ( $W_H - C_H$ model).....	240
5.3 Analiza i sinteza 3D modela pomoću MATLAB MATCONT aplikacije.....	243
5.3.1 Model ukupno raspoloživog dohodka, imetka i potrošnje ( $Y_H - W_H - C_H$ model) i pojava haosa.....	249
5.3.2 Model harmonizovanog indeksa potrošačkih cijena, dugoročne kamatne stope i ukupno raspoloživog dohodka EU28 ( $HICP - r_{110} - Y_H$ model).....	278
5.4 Analiza 4D modela i hiperhaosa pomoću MATCONT-a.....	293
5.5 Analiza 7D modela i hiperhaosa pomoću MATCONT-a.....	311
5.6 Teorija inverznog modeliranja (TIM) .....	319
5.7 Ilustrativni prikaz TIM u izdvajanju parametara modela.....	338
<b>6. Komparativna analiza nelinearne dinamičke analize (NDA) i vještačke inteligencije i neuralnih mreža (AINN) .....</b>	<b>342</b>
6.1 Primjena vještačke inteligencije (AI) i neuralnih mreža (NN) u makroekonomiji EU.....	344
6.2 Komparativna analiza NDA i AINN.....	355
<b>Zaključak.....</b>	<b>358</b>
<b>Prilog.....</b>	<b>372</b>
Prilog A.....	373
Prilog B.....	385
Prilog C.....	387
Prilog D.....	391
<b>Literatura.....</b>	<b>397</b>
<b>Biografija.....</b>	<b>413</b>

## 1. Uvod

Ekonomске zavisnosti i kretanja spadaju u kategoriju kompleksnih dinamičkih sistema (KDS) (Commendatore et al., 2017 [54]; Shone, 2001 [174]). Nelinearna priroda ekonomskih procesa oslikava se u njihovoj stvarnoj i neidelazivovanoj nelinearnoj vremenskoj zavisnosti. Ekonomski sistemi obiluju stohastičnim kretanjima i promjenama. Ista, inherentno su utkana u samu bit ekonomskih pojava, tj. ekonomija se bazira na stohastici realnih događaja (Chiang, 2005 [46][47]; Puu, 2013 [162]). Međutim, skup brojnih mikroekonomskih pojava, koje su po svojoj prirodi stohastične, posjeduje na makroekonomskom nivou određene determinističke komponente (Craig et al., 1991 [55]; Burda & Wyplosz, 2013 [43]; Giavazzi, et al. 2017 [80]). Zanimljivo je da, deterministički dio makroekonomskih pojava inherentno posjeduje nelinearnu vremensku zavisnost varijabli, te se isti jedino može adekvatno proučavati putem nelinearne dinamičke analize (NDA) (Strogatz, 2015 [187]; Fuchs, 2014 [76]; Bischi et al., 2010 [31][32]). Linearizacija nelinearnih procesa u ekonomiji, uopšteno gledano, daje ponekad i u određenoj mjeri zadovoljavajuće rezultate (Verbeek, 2008 [190]; Wooldridge, 2016 [198]; Adams et al., 2015 [2]). Međutim, simplifikacija i linearizacija ne doprinose pozitivno analizi KDS, jer se potencijalno „izgube” fine analitičke nijanse uzroka i/ili posljedica nastalih promjena u sistemu (Berliner, 1992 [28]; Bolotin et al., 2007 [37]). U navedenom se gotovo uvijek koriste idealizovani i statični modeli međusobnih ravnotežnih ili ekvilibrjumskih zavisnosti, što opet nikako ne odgovara stvarnim i stalnim ekonomskim fluktuacijama u inherentno vrlo dinamičnim sistemima.

Ekonomska dinamika procesa često u sebi nosi klicu novih procesa koji se javljaju[173], ili će se tek javiti, u širem vremensko-prostornom okviru (Cvitanovic, 1984 [57][58]). Kao dodatna antiparadigma, naročito u ekonometriji, javlja se izučavanje budućih kretanja na osnovu (neposredno) prethodnih vrijednosti nezavisne promjenjive (Greene, 2003 [87]). Za očekivati je da naredna vrijednost nekog relativno stabilnog ekonomskog

procesa bude, u narednoj vremenskoj instanci, po vrijednosti relativno blizu njene u vremenu prethodne vrijednosti (Faggini & Parziale, 2012 [72]). Međutim, ne možemo sa sigurnošću tvrditi da li će ista ići na gore ili na dolje sa narednom vrijednošću, u odnosu na posljednju poznatu vrijednost (Hill, et al., 2018 [94]). Za očekivati je da naredna vrijednost vremenske serije prati teorijsku liniju „opšteg trenda”, te samim tim „pokazuje” očekivani znak buduće promjene. Pomenuta vrijednost se obično nalazi unutar granica relativno manjih odstupanja od prethodne vrijednosti promjenjive, tj. u par procenata. Ovakav vid prognoziranja i analiziranja ekonomskih varijabli je doveo istraživače u subrealni domen djelimično i uslovno pouzdane spoznaje. Dokaz za posljednje pomenuto su mnoge, čak ni (šire) anticipirane, ekonomske krize u svijetu. Osim par/nekoliko svjestikih ekonomista, kao što je to bio slučaj sa Nuriyelom Rubinijem, vezano za globalnu finansijsku krizu (GFK) iz 2008.<sup>1</sup> Ostatak svjetske ekonomske zajednice nije ukazivao niti upozoravao na GFK – koja je „donijela” svijetu recesiju u trajanju duže od decenije. Nedvojbeno, i danas neke zemlje u svijetu osjećaju posljedice GFK, pogotovo siromašnije i slabije ekonomski razvijene zemlje.

Pristup koji nudi NDA (Chua & Shilnikov, 2001 [52]), u kombinaciji sa teorijom disekvilibrijuma (TD) (Chiarella et al., 2011 [48][49][50][51]), Teorijom Haosa (TH) (Strogatz, 2015 [187], Aquirre, 1996 [3]) i teorijom inverznog modeliranja (TIM) (Tarantola, 2005 [189]), čini analizu promjena i njenu dinamiku centrom proćavanja. Apsolutna i statična vrijednost ekvilibrijumske vremenske serije u današnjoj ekonomiji gubi svaki stvarni (praktični) smisao pri proućavanju ekonomskih pojava (De Gooijer, 2017 [65]). Zapravo, ista se neprekidno mijenja, tj. vrijednosti varijabli, ekvilibrijumi i međusobni odnosi su promjenjivi u vremenu (Franses & Dijk, 2000 [75]). Kritične vrijednosti u ekonomskim zavisnostima, tzv. singulariteti, javljaju se kao vrijednosti rješenja modela odnosno sistema diferencijalnih jednaćina (SDJ) (Bender et al., 2009 [24]). Pri određenoj vrijednosti samo izdvojeni singulariteti prikazuju određenu vrstu ponašanja ekonomskih varijabli i zaključaka. Međutim, kontinuiranjem u vremenu singularnih taćaka ka „unaprijed” i/ili „unazad” dobijamo pravi uvid u suštinu i stvarni ekonomski uticaj dobijenih teorijskih rješenja, tj.

---

<sup>1</sup> Roubini N. *The rising risk of a systemic financial meltdown: the twelve steps of financial disaster*. Market Oracle; 2008 Feb 5.

relativnih (diferencijalnih) ekonomskih veličina vezano za endogene i egzogene varijable (Kuznetsov, 2004 [113][114][115][117]; Govaerts et al., 2019 [85]). Višestrukim generisanim trajektorijama putem promjene početnih uslova rješenja SDJ, korištenjem teorije haosa, odnosno kontinuiranjem singulariteta sistema diferencijalnih jednačina, dobijamo mogućnosti analize/izučavanja paralelnih ekonomskih „realnosti”, koje su se mogle dogoditi, koje se jesu dogodile, ili koje se mogu dogoditi u budućnosti. Na pomenuti način možemo da analiziramo postojeće stanje, budući razvoj posmatranog ekonomskog sistema, ali i sve moguće kombinacije potencijalnih ranijih, sadašnjih i budućih ekonomskih zavisnosti varijabli u parametarskom prostoru. Parametarska analiza (Sethna, 2006 [171]) dodatno proširuje mogućnosti prezentovane metodologije, na način što se može arbitrarno odabrati i pratiti istovremeni razvoj (jednog ili više) najznačajnijih ili najkarakterističnijih parametara. Bifurkaciona varijacija parametara sistema, simultano ili pojedinačno, u realnosti zapravo predstavlja promjenu pojedinačnih i međusobnih zavisnosti ekonomskih varijabli (Dhooge et al., 2008 [67]).

TIM singulariteta primijenjena na rješenjima SDJ vraća „unazad” analizu, ka početnim jednačinama i varijablama (Tarantola, 2005 [189]). Na pomenuti način se može odrediti pojedinačna ili međusobna ekonomska optimalna vrijednost, tj. stepen međusobne sprege varijabli u sistemu i njihova optimalna vrijednost vis-à-vis prijedloga buduće ekonomske politike (policy) (Hayward & Preston, 1999 [91]). Do stabilnih rješenja sistema u faznom prostoru dovešće nas kretanje trajektorija ka konvergentnim singularnim tačkama i/ili stabilnim površima (Drazin, 2002 [69]). Kreiranjem sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (SNDJPR) endogenih varijabli, koje predstavljaju ukupni raspoloživi dohodak ( $Y_H$ ), ukupni imetak ( $W_H$ ) i ukupnu raspoloživu potrošnju ( $C_H$ ) stanovništva EU28<sup>2</sup>, tj. analiziranjem istog pomoću NDA, doći ćemo do ekvilibrijumskih vrijednosti u faznom prostoru koje dodatnim inverznim modeliranjem prikazuju ekvilibrijumske vrijednosti novo-izvedenih varijabli sistema. Karakteristične izvedene varijable su zapravo kvantifikatori monetarne i fiskalne politike, kao što su npr. iznosi bruto finansijskih naknada za rad

---

<sup>2</sup> Sastav Evropske Unije od 28 zemalja članica, uključujući i Ujedinjeno Kraljevstvo (UK) prije formalne realizacije „Brexita”, tj. napuštanja EU od strane UK.

(određeni posledično kao dio kretanja monetarnih vrijednosti cjelokupnog makroekonomskog sistema), sklonost stanovništva ka štednji i/ili potrošnji, odnosno u fiskalnom domenu iznosi poreza i taksi na bruto vrijednost finansijskih naknada za rad, tj. u konačnici na iznos raspoloživog dohotka. Kretanja u makroekonomskom sistemu predstavljamo trajektorijama u faznom prostoru koje dalje produkuju alternativne vrijednosti i zaključke o varijablama, i zavise od početnih uslova odnosno realnih/stvarnih vrijednosti sistema.

Dinamička analiza izabranih i pomenutih makroekonomskih agregata ukupno raspoloživog dohotka, imetka i raspoložive potrošnje je interesantna za istraživanje, jer se pomoću nje može utvrditi, npr. ka kojoj kategoriji u društvu je kanalisani novac od državnih subvencija Evropske unije (EU) u razmatranom periodu, kao i dodatno, definisati preporuke za kreiranje budućih politika na osnovu optimalnih vrijednosti varijabli koje odgovaraju identifikovanim ravnotežnim tačkama. Naime, postavlja se krucijalno EU makroekonomsko pitanje: Da li je novac od državnih subvencija adekvatno alociran među građanima EU ili je pak otišao pretežno na račune velikih finansijskih i drugih korporacija? U slučaju GFK iz 2008. novac određen od strane SAD (TARP) za državne subvencije je uglavnom otišao na račune velikih privatnih korporacija – kako bi konsolidovali svoje bilanse stanja, dok je vrlo mali dio otišao ka stanovništvu. Na pomenutu temu, se i danas još uvijek vode debate među stručnim ekonomskim krugovima svijeta, a naravno i SAD-a. Ovo istraživanje pokušava da odgovori na pitanje da li se sličan scenario desio i u EU sa subvencionim programima. Očekivani odgovori na postavljena pitanja mogu naravno imati samo tri forme – da, ne i djelimično. Značajno je da koji god odgovor bio, od tri pomenuta, istraživanje će pokušati da kvalitativno i kvantitativno da odgovor i na pitanje koji bi to način alokacije finansijskih sredstava od subvencija bio optimalan, tj. da li je usmjeren ka onima kojima ponuđena pomoć najviše treba. Ukoliko bi donosioci odluka imali potpunije informacije o smjeru i iznosu plasiranih subvencionih finansijskih sredstava, pomenuto bi preduprijedilo eventualne buduće greške i/ili propuste u definisanju i implementaciji ovakvih i sličnih mjera.

TD predstavlja moderni makroekonomski sistem mnogo bolje i realističnije nego što je to slučaj sa teorijom ravnoteže<sup>3</sup> (TR). TD, simbiotski je uvezana u modelima sa matematičkom ekonomijom (ME) i NDA. Na pomenuti način se kreira okruženje faznih prostora, u dvije ili više dimenzija, pomoću kojih možemo doći do cijelog niza originalnih zaključaka. Međuzavisnosti endogenih varijabli u prostorima stanja mogu proizvoditi *tok* (engl. flow) „paralelnih ekonomskih stvarnosti” koje zavise od početnih uslova. Tok varijabli definisan je SNDJPR. Iste se generišu metodom nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) putem programa EViews<sup>4</sup>. Nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda (NDJPR), i sistemi koje grade, u većini slučajeva nemoguće je riješiti analitički, već jedino se mogu riješiti numerički [156][143]. U pomenutu svrhu koristi se programski paket MATLAB<sup>5</sup>, zajedno sa svojim specijaliziranim aplikacijama PPlane za 2D<sup>6</sup> i MATCONT za 3D<sup>7</sup> (rješenja i vizualizacije) [67][71]. Analizirajući evoluciju operatora toka može se predvidjeti buduće kvalitativno ponašanje cijelog sistema, očekivane i optimalne vrijednosti modeliranih varijabli, te možemo odrediti i traženi raspon vrijednosti nemodeliranih varijabli sve dok su one direktno korelisane sa proučavanim sistemom. Generisani i izračunati podaci se mogu koristiti za predlaganje makroekonomskih politika nadležnima, sa ciljem efikasnijeg, efektivnijeg i stabilnijeg funkcionisanja makroekonomije. Mogućnosti predložene metodologije ograničene su TH. Haotično ponašanje (u daljem tekstu: *haos*) se javlja nakon određenog broja vremenskih perioda. Nije nužno, da svaki SNDJPR nosi u sebi elemente haosa. Ukoliko se ipak pojavi haos u SNDJPR, korištenjem vrlo visoke preciznosti u proračunima<sup>8</sup>, te stvaranjem kontinualnih funkcija varijabli, zajedno sa prilagođavanjem

---

<sup>3</sup> Teorija Ekvilibriruma (TE).

<sup>4</sup> Eviews 10.2 je verzija koju koristimo u doktorskoj disertaciji.

<sup>5</sup> MATLAB verzija koju koristimo ima oznaku R2018b. Iako su bile dostupne druge (novije) verzije MATLAB-a i MATCONT-a, autori MATCONT-a su naveli da je na MATLAB-u ver. R2018b testirana i provjerena MATCONT ver. 7p1. Istu, koristimo u disertaciji, jer provjereno daje tačne rezultate. Svaka nova verzija MATLAB-a i MATCONT-a nosi u sebi razne promjene, koje ponekad nisu u potpunosti (međusobno) kompatibilne. Zbog naučne robustnosti zaključaka, svi su potencijalni rizici u vezi eventualne pogrešne interpretacije, svedeni na najmanju moguću mjeru.

<sup>6</sup> PPlane ver. 9 ćemo koristiti isključivo za analizu i sintezu 2D sistema.

<sup>7</sup> MATCONT se koristi i u analizi sistema dimenzije veće od tri (3D). U disertaciji ćemo koristeći MATCONT, analizirati pored 3D sistema: 4D, odnosno 7D, sisteme.

<sup>8</sup> U disertaciji je korištena, za kalkulacije i prezentovanje numeričkih rezultata, tzv. dugačka naučna notacija, *dvostruke preciznosti* (engl. *double precision*), koja koristi 64-bitni zapis u računarskim procesima i aplikacijama.

podataka polinomima visokoga reda, djelimično i do određene razumne mjere se neutralizuju uticaji haosa. Predstavljena metodologija je nastojanje da se doprinese dugoročnom predviđanju. Pomenuto se uvijek želi postići u ekonomiji, pogotovo kod dugoročnih makroekonomskih predviđanja.

Ideja *tokova* predstavlja osnovu doktorske disertacije. Analogno tokovima u prirodnim naukama, nedvosmisleno postoje *tokovi* (u širem smislu) u ekonomskim, odnosno makroekonomskim sistemima. Porijeklo i analiza toka ima svoj značajniji začetak prije nekih pola vijeka, pomoću primijenjene NDA 1960-ih godina u radovima i istraživanjima Edwarda N. Lorenza [89], kasnije 1970-ih u radovima Felgenbauma, Maya, Mandelbrota, i drugih. Kada sagledavamo kolektivno i usmjereno djelovanje mnoštva sačinjenog od jedinki, među prvim asocijacijama biva čuvena i stara latinska izreka: „*E pluribus unum*” (prev. „*Od mnoštva, jedan*”<sup>9</sup>). NDA neravnoteže (disekvilibriruma) i haosa u EU makroekonomiji, onako kako je primijenjena u istraživanju vezanim za disertaciju, zapravo pokušava „uočiti obrise Lorenzovog galeba”. Poznati pojam „Efekat leptira” je skovan u štampi i pop kulturi diljem svijeta u posljednjih nekoliko decenija. Iako je „oblačnog” (prim. aut. mutnog, nedefinisanog) porijekla – prema riječima tvorca pojma prof. Dr Edward N. Lorenza, teorija je zapravo bila „priča koja se razvija”. U početku prof. Lorenz je koristio pojam „galeb” – kao referencu za mali uticaj unutar „relativno zatvorenog sistema”<sup>10</sup>, koji ima intrinzičnu, idiosinkratsku i suštinski-naslijeđenu zavisnost od početnih uslova [101]. Pojam „Lorenzov galeb” naglašava vrlo težak<sup>11</sup> zadatak i problem kauzalnog izolovanja uzročne ili nulte „jedinke” direktno korelisane sa kvalitativnim i kvantitativnim razlikama mnogo većeg entiteta. Na primjer, možemo se sa punim pravom zapitati: je li moguće egzaktno „sagledati” i „odrediti” pomenutu pojavu u kontekstu TH? Epistemološki gledano, u današnjoj nauci, nemoguće je sagledati i spoznati dubinu pomenutog koncepta. Dok, sa ontološkog stajališta, uvijek se teži ka tome da se riješe manje komplikovani i razumno (sparam stvarnosti)

---

<sup>9</sup> Takođe, se prevodi i kao: „*Jedinstvo od množine*.”, ili „*Množina kao jedan*.”.

<sup>10</sup> Lorenz je izučavao uticaj malih perturbacija na SAD vremenske prilike početkom 1960-ih godina prošlog vijeka. Pojam „relativno zatvoren sistem” je naveden kao referenca na atmosferski sistem planete Zemlje, bez uzimanja u obzir npr. vremenskih prilika na nekoj drugoj planeti sunčevog sistema, tj. kako one utiču na vrijeme na zemlji, itd.

<sup>11</sup> U današnjoj nauci, navedeno je nemoguć zadatak za riješiti.



modelirani problemi. Nadalje se, korištenjem deduktivne analize, dolazi do zaključaka u integralnoj sintezi.

U svjetski poznatoj knjizi i bestselleru Jamesa Gleicka<sup>12</sup>, kako navodi autor, prezentovani koncepti i problemi „mučili su” mnoge vodeće i svjetski poznate naučnike. Na primjer, kako je moguće da potok – sastavljen od pojedinačno mnogo molekula vode, ima laminarni tok na ravnoj i monotonij podlozi, dok na stjenovitoj podlozi potok ima valove, vrtloge, prskanje, turbulencije, itd. Dodatno, zapitali su se kada i zašto počinje prijelaz između ta dva vrlo različita stanja strujanja (laminarnog i turbolentnog). Kontemplirano kroz vjekove, formulisno je jedno veliko pitanje na ovu temu: kada bismo znali tačan položaj svakog molekula i njegova druga svojstva kao što su relativna brzina, ubrzanje, itd. u toku potoka, i temeljnoj stijeni rijeke, da li bismo mogli predvidjeti što će se tačno dogoditi u „velikoj”, relativnoj makro razmjeri koja nam je vidljiva? Ovo pitanje graniči se sa dugo poznatom determinističkom Laplace<sup>13</sup>-ovom superpozicijom demona.<sup>14</sup>

Do samo prije nekoliko godina odgovor je bio: sigurno ne. U posljednjih nekoliko godina, uz napredak kvantnog računarstva, iako ne još u industrijskoj ili komercijalnoj razmjeri, dobijaju se nevjerovatni rezultati! Sa „samo” 300 kubitata (engl. *qubit*) u kvatnom računar (KR), kakvi skoro postoje danas u nekim svjetskim laboratorijama<sup>15</sup>, možemo simulirati  $2^{300}$  mogućih informacionih stanja (samo sa jednim kvantnim računarom!). Poređenja radi,  $2^{300}$  informacionih stanja je više od broja svih atoma u poznatom svemiru

---

<sup>12</sup> Gleick, J., 2008. *Chaos: Making a new science*. Penguin.

<sup>13</sup> „Svi ovi napori u potrazi za istinom imaju tendenciju da neprestano vode natrag do goleme inteligencije, ali od koje ćemo uvijek ostati beskonačno udaljeni.” – Pierre Simon Laplace.

<sup>14</sup> „Sadašnje stanje svemira možemo smatrati kao učinak prošlosti i uzrok budućnosti. Intelekt koji bi u određenom trenutku poznao sve sile koje pokreću prirodu i sve pozicije svih objekata od kojih se sastoji priroda, i takođe ako bi ovaj intelekt bio dovoljno velik da sve ove podatke izanalizira, obuhvatio bi u jednoj formuli kretnja najveća tijela u svemiru kao i njegove najsitnije djelove veličine atoma; za takav intelekt ništa ne bi bilo neizvjesno i nepoznato, i budućnost bi, baš kao i prošlost, bila stalno prisutna pred njegovim očima.” – Pierre Simon Laplace, preveden citat iz knjige: Laplace PS. *Pierre-Simon Laplace philosophical essay on probabilities*: translated from the fifth french edition of 1825 with notes by the translator. Springer Science & Business Media; 1998 Mar 16.

<sup>15</sup> U trenutku pisanja ovog doktorskog rada (DR), IBM-ov 127-kubitni *Eagle procesor* trenutno zauzima prvo mesto kao najveći, a samim tim i teoretski najmoćniji, supravodljivi KR koji je javno demonstriran 15.11.2021. godine. IBM očekuje, i najavljuje, da će do kraja 2023. godine napraviti 1000-kubitni KR!

Ažuriranje navedenog: IBM je napravio, prema informacijama od 04.12.2023., kvantni računar pod nazivom „Condor” koji ima više od 1000 kubita (preciznije, ima 1.121 qubit-a na samo jednom čipu)! (Izvor: <https://www.newscientist.com/article/2405789-ibms-condor-quantum-computer-has-more-than-1000-qubits/>)



(oko 3,5 puta)! Može se samo zamisliti, i nagađati u ovom trenutku, što se sa sličnim ili boljim kvantnim računarima može postići. „Teško je zamisliti primjenu za nešto što ne postoji.”<sup>16</sup> – odnosi se na buduće mogućnosti i korištenje KR. Posljedično, današnji odgovor na prethodna pitanja optimistično „naginje” ka: vjerovatno, da.

KR se mogu koristiti samo za obavljanje određenih zadataka, i uz primjenu specijaliziranih računarskih algoritama. Temelj mogućnosti za KR se definitivno rapidno širi, te u računarskom smislu, teško je i zamisliti što će sve biti moguće izračunati u budućnosti. Ipak, klasični računari neće biti zamijenjeni, jer je njihova uključenost i učinkovitost najbolja za svakodnevnu primjenu. Dodatno, klasični računari se intenzivno i direktno koriste kao podrška u procesu rada KR<sup>17</sup>. U istraživanju kompleksnih sistema (KS) neophodna je upotreba što je moguće boljih računarskih sistema i softvera. KS zbog svoje izuzetne složenosti, obično se (danas) izučavaju putem kompjuterskog eksperimenta (KE). Prethodno navedeno, uopšte ne podrazumijeva da ćemo jednog dana moći sve izračunati, već sugerije da ne znamo koje će sve biti mogućnosti i granice KR. Determinizam u realnim sistemima se ne može apsolutno i jednoznačno definisati, čak ni uz pomoć najnaprednijih i najmoćnijih računara, dokle god inherentno u KS postoji uključena paradigma *slobodne volje*<sup>18</sup>. U makroekonomiji, pomenuta paradigma je utjelovljena u ljudima koji su zapravo i njeni glavni konstituenti.

Za intenzivne numeričke proračune makroekonomskih pojava i zavisnosti, danas se koriste klasični računari, ali veće kompjutacione snage. Višestruka, individualno različita, svojstva građivnih elemenata toka potoka ili rijeke (atoma i molekula) mogu se u određenom stepenu analogno povezati sa individualnim ponašanjem ljudskih bića u makroekonomiji. Analogija je sljedeća, ono što je tok za mnoge atome i molekule to je makroekonomija za

---

<sup>16</sup> Navedeno predstavlja sjajno rezonovanje Prof. dr Andrea Morello sa Univerziteta New South Wales.

<sup>17</sup> Klasični računari su „upareni” sa kvantnim računarima kod: – provjere pariteta (kako bi se smanjile greške kod informacija); – vizuelni prikaz podataka i rezultata; – komunikacija između blokova u opremi KR; itd.

<sup>18</sup> Procesi mišljenja, racionalnosti i/ili emocija, kao i njihove suprotnosti, koreliraju sa apstraktnim pojmom i konceptom „slobodne volje” inherentno vezanim za ljudska bića. Shodno tome, u određenom stepenu, uvijek postoji ispoljavanje „slobodne volje” u svakom institucionalnom entitetu (npr. donosioc odluka o monetarnoj i/ili fiskalnoj politici), jer u njegovoj biti uvijek je ljudsko biće. Pored toga, nemoguće je znati ili odrediti kada će neko – pojedinac, porodica, kompanija, uzeti kredit, prodati kuću, kupiti auto, ili se možda razboljeti zbog lošeg načina života te će trebati finansijska sredstva za liječenje, itd. Možemo samo da imamo uvid u zbirnu, tj. makroekonomsku vrijednost predmetnih varijabli.

veliki broj ljudi. Naravno, broj atoma i molekula u toku ne može odgovarati broju ljudi u makroekonomiji, ali makroefekti protoka u oba slučaja su vidljivi kao jedan fenomen. Kao što potok prati korito rijeke – sve čestice zajedno, tako u makroekonomiji ljudi slijede ekonomski tok – slobodnom voljom ili ne. Posljednje rečeno je, u izvjesnom smislu, vrlo značajno i vrijedi za oba slučaja (iznenadni i eksterno uzrokovani šokovi).

Koristeći pomenutu analogiju i imajući u vidu potencijalnu mogućnost uticaja malog dijela cjeline na tok, postavlja se (među mnogim) novo pitanje: ukoliko poznajemo početne uslove relativno malog dijela sistema, koja predviđanja i zaključke možemo izvesti o budućem ponašanju cijelog sistema? Postavljeno pitanje čini srž ovog istraživanja. Pomenuto „uočavanje obrisa uvijek neuhvatljivog Lorenzovog galeba”, zapravo je više načelo i vodilja, nego što je cilj koji treba postići u istraživanju.<sup>19</sup>

U ovom radu će biti prikazano da se tok makro-tendencija može modelirati i predvidjeti sa razumnim stepenom tačnosti ako znamo stanje pojedinih dijelova cjeline, tj. korespondirajuće početne uslove. Koristeći NDA [122], zajedno sa prethodno izračunatim međuzavisnostima endogenih varijabli putem metode nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) (engl. NLLS) [147], možemo definisati makroekonomski tok. Koristeći specijalizovane programske pakete i aplikacije može se izvući širok dijapazon zaključaka, svojstava i ponašanja toka NDS-a.

Nemoguće je imati *apriori* detaljno znanje, bilo kojom intuitivnom metodom, o broju i vrsti singulariteta, tj. njihovim svojstvima za nepoznati (novi) složeni NDS. Jedini način za određivanje predmetnih tačaka od interesa – ravnotežnih tačaka, jeste rješavanje izučavanog sistema analitički ili numerički. Kod SNDJPR važi – za veliku većinu sistema, da ih je nemoguće riješiti analitički. U posljednje pomenutom, posebnu ulogu zauzima kompjuterski eksperiment. Naime, iterativnim postupcima, i „približavanjem” najoptimalnijem rješenju SNDJPR mi zapravo rješavamo sistem, određujući njegove ekvilibrijume i singularne tačke.

---

<sup>19</sup> Apriorno, ne postoji mogućnost da pomenuti princip bude determinisan u potpunosti sa sadašnjim nivoom znanja i tehničkih mogućnosti.

Pomenute tačke, mogu ujedno biti i bifurkacione tačke sistema. Takođe upotrebom KE, se ispituje da li neka singularna tačka ima ili nema bifurkaciono svojstvo [113].

Postoje brojne metode za numeričko rješavanje SNDJPR [187][150][156][143]. Međutim, osim rješenja sistema, zanimaju nas i svojstva, tj. stanja ravnotežnih tačaka. Prezentovana vrsta istraživanja je povezana sa stvarnim i postojećim sistemom, u našem slučaju sa EU makroekonomskim sistemom. Ponekad, postoji karakteristično i/ili parcijalno djelovanje u nekom dijelu faznog prostora (FP) NDS-a, a koje nije karakteristika cijelog sistema. Posljedično i po prirodi stvari, pomenuto djelovanje ne utiče, ili ne značajnije, na posmatrani sistem u cjelini. Dodatno, promjena određenih parametara sistema proizvodi promjenu u endogenim varijablama reda veličine od  $10^{-12}$ , što u ovom istraživanju predstavlja vrijednost od jednog eura. Bitno je pomenuti, da postoje i slična metodološka ograničenja koja se uvijek moraju uzeti u obzir kada koristimo NDA. Slično važi i u drugim naučnim oblastima, gdje se koriste metode primijenjene matematike, npr. u oblasti elektronike, mehanike, biologije, medicine, itd. Bifurkacija parametara može biti vrlo dinamična, i samim tim privlačna za dalje i dublje izučavanje. Međutim, ista obično egzistira samo u domenu izučavanja tzv. „čiste matematike” (engl. *pure mathematics*). Problemi u primijenjenoj matematici su bazirani i direktno povezani sa problemima iz stvarnog svijeta. U ovom radu ćemo se fokusirati na makroekonomska istraživanja koja imaju uporište u stvarnim događajima. U NDA, nikad se ne mogu istražiti sve tačke bifurkacije [82][5] putem tzv. pregleda parametara (engl. *parameter sweep*), jer će uvijek postojati „još jedna” ili nova tačka za nešto drukčije vrijednosti parametara.<sup>20</sup> Pomenuta nova tačka može po svojoj prirodi imati drugačije grananje, odnosno ponašanje, u istom ili višem tzv. *codim* redu, i tako na dalje.<sup>21</sup> Različite kombinacije početnih uslova i parametara omogućavaju da NDA pruži izuzetno širok naučni i istraživački analitičko-sintetički okvir. U narednom poglavlju biće prezentovane hipoteze i istraživačka pitanja.

---

<sup>20</sup> „Ekvivalentno, kodimenzija (skraćeno *codim*) je broj nezavisnih uslova koji određuju bifurkaciju. Ovo je najpraktičnija definicija kodimenzije. Ona jasno daje do znanja da je kodimenzija određene bifurkacije ista u svim generičkim sistemima i u zavisnosti od dovoljnih uslova parametara”. [113] str. 62 – Jurij A. Kuznjecov

<sup>21</sup> Za svaku tačku postoji drugačiji (otvoren i nebrojiv) skup parametara i/ili početnih uslova, koji će generisati novo, tj. različito rješenje SNDJPR.

## 2. Teorija kompleksnosti, hipoteze i metodologija istraživanja

Među mnogim opisima i definicijama KS, jedna od najkonciznijih i najkompletnijih je sledeća „definicija”<sup>22</sup>: „Kompleksni (složeni) sistem, je sistem sastavljen od mnogih komponenti koje mogu imati međusobnu interakciju. Primjeri složenih sistema su Zemljina globalna klima, organizmi, ljudski mozak, infrastruktura – kao što je to npr. električna mreža, transportni ili komunikacioni sistemi, složeni softver i elektronski sistemi, društvene i ekonomske organizacije (kao što su gradovi, i sl.), ekosistem, živa bića i konačno cijeli svemir. KS su sistemi čije je ponašanje intrinzično teško modelirati zbog zavisnosti, kompetitivnosti, odnosa ili drugih vrsta interakcija između njihovih dijelova ili između danog sistema i njegovog okruženja. Kao interdisciplinarni domen, KS crpe doprinose iz mnogih različitih područja, kao što su: proučavanje samoorganizacije i kritičnih fenomena iz fizike, spontanog poretka iz društvenih nauka, haosa iz matematike, adaptacije iz biologije i mnogih drugih. KS su široki pojam koji obuhvaća istraživački pristup problemima u mnogim različitim disciplinama, uključujući statističku fiziku, teoriju informacija, nelinearnu dinamičku analizu, antropologiju, informatiku, meteorologiju, sociologiju, ekonomiju, psihologiju i biologiju.”<sup>23</sup> Za navedenu definiciju i opis KS, izvor je naučni rad Dr. David H. Rinda.<sup>24</sup>

### 2.1 Kompleksni sistemi

U skladu sa navedenim, jedan od najkompleksnijih sistema u svemiru je ekonomski sistem (ES).[97] Isti je stvoren od strane ljudskih bića, gdje su ljudi ujedno i njegovi učesnici. Svakako, ES je dio sveukupnog svemira, te kao takav samo doprinosi još većoj složenosti i nerazumljivosti sveukupnog svemira za ljudski rod. Entropija je inherentno svojstvo svemira.

---

<sup>22</sup> Zapravo, danas u nauci, ne postoji jednoznačna definicija KS, već razni pristupi i fenomenološka tumačenja.

<sup>23</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Complex\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_system), preuzeto 11.05.2022. godine.

<sup>24</sup> Rind D. *Complexity and climate*. Science. 1999 Apr 2;284(5411):105-7. Informacije o Dr. D. Rindu se mogu pronaći na internet linku: <https://www.giss.nasa.gov/staff/drind.html>

Tendencijski rast entropije spada u domen elementarnih, potvrđenih i dokazanih, termodinamičkih zakona. Međutim, izrazit i svojevrstan stepen entropije postoji i u ES, tj. povezan je sa pojmom „slobodne volje”. Proces mišljenja, racionalnosti i/ili emocija korelira s apstraktnim pojmom „slobodne volje”, i inherentno je povezan s ljudskim bićima. Sukladno tome, u određenoj mjeri uvijek postoji ispoljavanje „slobodne volje” u svakom institucionalnom entitetu (npr. donosiocu odluka), jer je u njegovoj srži uvijek osoba. Osim toga, nemoguće je znati, odnosno odrediti kada će neki pojedinac ili porodica podnijeti zahtjev za kredit, prodati kuću, kupiti automobil ili se možda razboljeti zbog niskog životnog standarda, te u skladu sa tim trebati više sredstava za liječenje, itd. Možemo posmatrati samo agregatne, tj. makroekonomske vrijednosti kada je u pitanju posljednje pomenuto. Posljedično, postoje obrasci ponašanja u velikim odnosno makroekonomskim razmjerama, koje mogu indukovati najmanji konstituenti tog sistema (ljudi). U ovoj disertaciji ćemo izučavati Makroekonomske agregatne zavisnosti. Makroekonomski sistem je nedvojbeno KS. Međutim, u istom postoji „previše slobodne volje”, tj. njegove varijable ne slijede uvijek striktno postavljene jednačine, teorijske relacijske pretpostavke i/ili racionalno ponašanje. Posljednje pomenuto čini makroekonomski sistem vrlo teškim za buduće dugoročne prognoze. Čuven je citat Nielsa Bohra, dobitnika Nobelove nagrade za fiziku i „oca” atomskog modela: „*Predviđanje je vrlo teško, pogotovo ako se radi o budućnosti!*”. Između ostalog, navedeni citat govori o važnosti testiranja modela predviđanja izvan (samo) početnog uzorka podataka. Takođe, određivanje spram bilo koje vrijednosti sistema u potpuno egzaktnom i determinističkom smislu čini da vjerovatnoća ostvarivanja baš te konkretne vrijednosti teži ka nuli. Odnosno, poželjno i potrebno bi bilo, prognostički odrediti opseg-vrijednosti razmatrane varijable.

Profesori društvenih (socioloških) nauka B.Castellani i L.Gerrits kreirali su prvi puta 2009. godine „opštu” mapu poznatih KS. Pomenuta mapa je „evoluirala”, u detaljima i pristupu, tokom više od decenije, i najnoviju verziju iste (u trenutku pisanja disertacije) predstavljena je na Slici 1. Predmetna slika je u značajnom dijelu samo-opisna, te je nećemo posebno analizirati. Međutim, potrebno je naglasiti da se poznati KS prepliću među sobom, prema riječima autora slike, po „naučnoj dubini i širini”. Naime, iz nekih oblasti KS se ne

mogu isključiti aktivnosti i/ili metode spoznaje koje originalno proističu iz neke druge, čak i nesrodne naučne oblasti. Pri čemu, ima slučajeva, da neka naučna oblast po vremenu nastanka predatira danas poznati KS. Međutim, starija naučna disciplina je tek postala praktična za izučavanje npr. otkrićem i/ili razvojem modernih računara. Potencijalno, jedan od glavnih zaključaka sa Slike 1, jeste da su svi KS međusobno jako „isprepleteni” i naučno korelisani.

Kauzalnost KS u okvirima varijabilnih faktora predstavlja samu esenciju *per se* i *per quod* kompleksnosti. U skladu sa navedenim, EU makroekonomski sistem koji izučavamo u disertaciji predstavlja skup svih interakcija entiteta (ljudi, kompanija, vlada, i sl.) koji egzistiraju unutar zajedničkog političko-ekonomskog supra-entiteta EU. Naime, skup od skoro 500 miliona fizičkih lica, sa oko 10 miliona pravnih lica, predstavlja izuzetno složen KS. Dodatno, institucionalna organizacija EU u vidu evropskog savjeta, evropskog parlamenta, evropske centralne banke (ECB), evropski fond za stabilnost (EFSF), itd. čini prognozu politika unije još neizvjesnijom.

Metodologija korištena u disertaciji se bazira na NDA i analizi *tokova* sistema. Na pomenuti način, uključujemo u rješenja inherentno-postojeće *inercije* ili tzv. *ljepljivost*<sup>25</sup> varijabli. Na taj način direktno kreiramo širi opseg prihvatljivih promjena u sistemu koje uistinu odgovaraju postavkama modela i rješenjima SNDJPR. Posljedično su uključene u analizu, potencijalne eksterne perturbacije odnosno uticaj egzogenih varijabli na sistem, šokovi uzrokovani naglim promjenama endogenih varijabli, ukupna međuzavisnost endogenih i egzogenih varijabli, i sl. Na primjer, ukoliko bi došlo do nagle i značajne promjene jedne varijable, inertnost definisanog (izračunatog) toka bi povlačila promjenu u smjeru samog toka. Postojala bi određena dilatacija između nove i stare<sup>26</sup> trajektorije, ali sveukupni pravac promjena bi bio „kompenzovan” opštim smjerom toka. Pomenuto predstavlja značajnu prednost NDA u odnosu na postojeće analize.

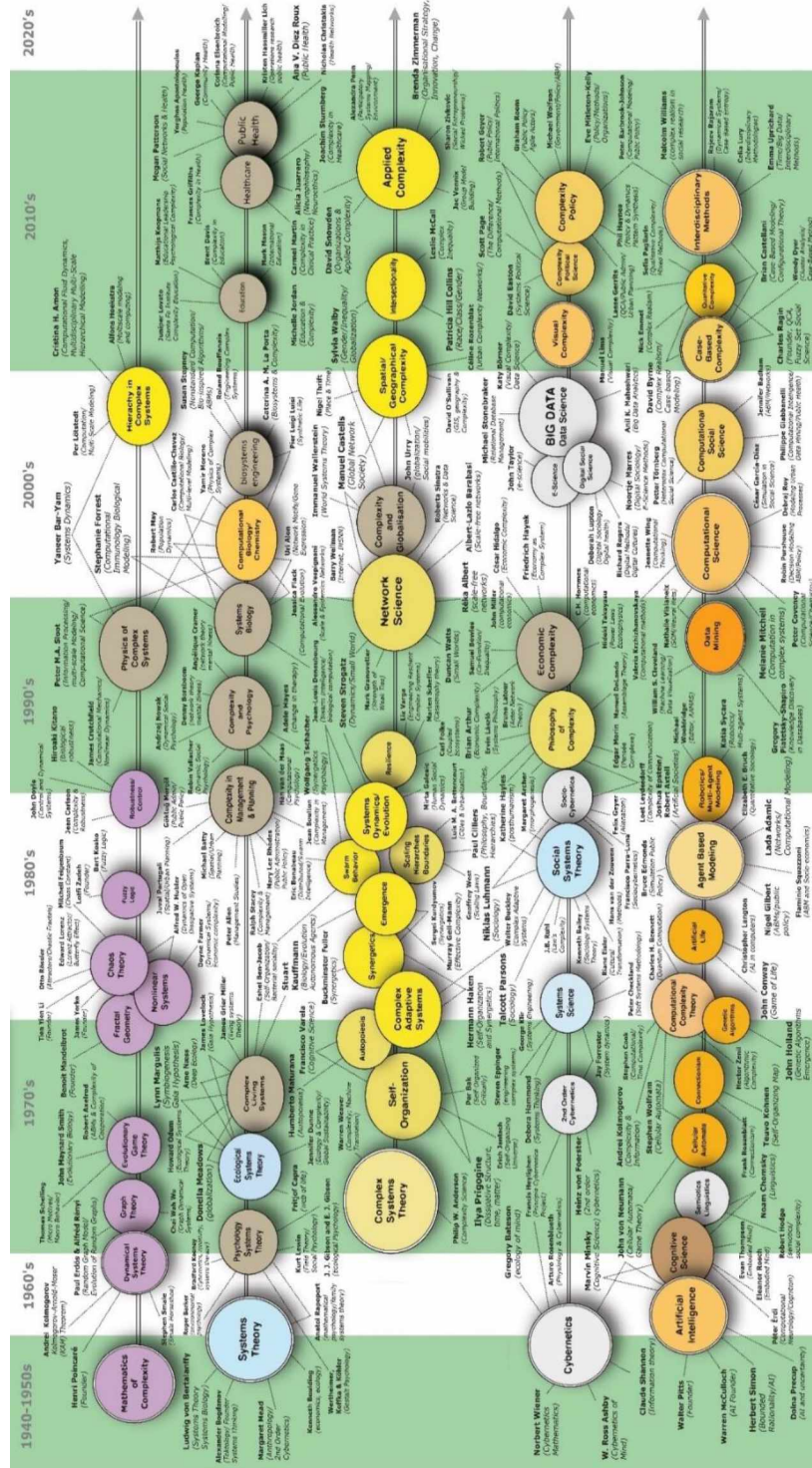
---

<sup>25</sup> Ljepljivost (engl. *stickiness*) varijabli je tendencija da iste ostanu konstantne ili da se sporo prilagođavaju, unatoč promjenama drugih povezanih varijabli.

<sup>26</sup> Trajektorije, koja bi postajala, da nije došlo do pomenutog sistemskog šoka.

Bez pomoći računara i intenzivne kompjutacije predmetnih karaktersitika singulariteta, ne postoji intuitivni ili bilo koji drugi način da se sazna i/ili izanalizira priroda posmatranih sistema, tj. njihovih karakterističnih tačaka, osim računarskom kompjutacijom. Kao što su naučnici nekada koristili mikroskope da pronađu nevidljivo i izvedu do tada njima nepoznate i nedokučive zaključke i saznanja o pojavama u prirodi, tako danas kod analize kompleksnih sistema/modela, koji u značajnoj mjeri personifikuju realne sisteme, koriste se računari kao jedina moguća alatka na putu otkrivanja skrivenih pojava i zavisnosti. Pojava i praktična primjena u današnjici tzv. *kompjuterskog eksperimenta* „nosi na svojim plećima” avangardu metodologija sadašnjeg, i budućeg, modernog, istraživanja u nauci (Hutz, 2018).





Slika 1. Mapa Kompleksnih sistema iz 2021. godine

Izvor: [https://www.art-sciencefactory.com/complexity-map\\_feb09.html](https://www.art-sciencefactory.com/complexity-map_feb09.html), preuzeto 13.06.2022.



## 2.2 Primjena kompleksnih sistema u makroekonomiji Evropske unije (EU): hipoteze i metodologija

Teorija koja preovladava u današnjoj ekonomskoj misli i praksi, još od samih začetaka austrijske klasične škole ekonomije 1871<sup>27</sup> godine (Azariadis, 2018), jeste teorija ekvilibriruma (TE). Ista, se bazira na ravnotežnom stanju dvije ili više ekonomskih promjenjivih, kao i zaključaka koji se izvode na osnovi ekvilibrirumskih postulata. TE funkcioniše tako što se prvo kreiraju ravnotežni modeli i međusobne korelacije varijabli. Pomenuto suštinski znači da se apriori polazi od pretpostavke da će ekonomske zavisnosti, i promjenjive, uvijek biti linearne, parabolične ili slično, i da će težiti ka ravnotežnom stanju. Dodatno, posmatrano ravnotežno stanje se određuje prostim ispitivanjem globalnih ili lokalnih ekstremnih vrijednosti funkcija. Ponekad se u međusobne funkcionalne zavisnosti uključi kvadratna zavisnost između opisnih i zavisnih promjenjivih. Međutim, pomenuto je i dalje daleko od modelovanja stvarnosti na realniji način (Bagliano & Bertola, 2004 [18]).

Potpuno novu paradigmu – prethodno navedenoj teoriji i njenim postulatima, predstavlja revolucionarna i moderna teorija disekvilibriruma (Chiarella et al., 2011 [48]). Naime, TD analizira promjenjivo stanje ekonomskih varijabli i ne polazi od pretpostavke da će iste težiti nekoj apriori definisanoj, izračunatoj ili teorijski očekivanoj vrijednosti. TD je formalno prisutna u široj akademskoj zajednici od druge polovine 20. i početka 21. vijeka. TD je relativno nov koncept u ekonomiji. Na temelju ne-Walrasovskog pristupa, TD razmatraju u ranim djelima Patinkin [186][87][88], Robert W. Clower [53] i Axel Leijonufvud [164]. Uslijedili su, detaljniji radovi Solowa i Stiglitz [13], a na sličnom teorijskom putu su bili Barro i Grossman [147][44][190][149]. Chiarella, C., Flaschel, P., Groh, G. i Semmler, W. [182][118][21][27][22] korištenjem naprednih i rigoroznih makroekonomskih teorijskih tumačenja, razvili su TD u modernu savremenu ekonomsku teoriju.[89][122][60] Prvi radovi Chiarelle i Flaschela [68] na TD, započeli su sredinom 1980-ih [182].[4][167][184] TD propagira proučavanje tačke konvergencije na osnovu postavljenih i analiziranih jednačina međusobne funkcionalne zavisnosti ekonomskih

---

<sup>27</sup> Čuvena knjiga Karla Mengera (Menger, C. (1871). Grundsätze der Volkswirtschaftslehre [Principles of economics]. Wirtschaft und Finanzen.), je predstavljala začetak pomenute austrijske škole.

veličina. Tačka konvergencije se obično mijenja u ekonomskom vremensko-prostornom polju za relativno manje ili veće vrijednosti bazične funkcije (Gerritsma et al., 2010 [77]).

Moguće je u praksi, u jako rijetkim slučajevima i pod određenim uslovima, da tačka konvergencije egzistira kao relativno „statična”. Tada tačka konvergencije zapravo prelazi u ekvilibrijumsku tačku, dok se modaliteti proučavanja konvertuju na postulate definisane načelima TE, što zapravo čini izuzetak od pravila. Međutim, „statična” tačka konvergencije funkcionalnih zavisnosti promjenjivih predstavlja početnu ili privremenu tačku ekonomskog sistema (pošto nije unaprijed poznata), a ne finalno rješenje (Bindel et al., 2005 [30]). Naime, tačka konvergencije koja je kvazi-statična u vremenu, dodatno argumentuje razloge za proširivanje potrebnog aparata klasične ekonomske teorije, umjesto da predstavlja njen finalni i/ili zadovoljavajući cilj.

Cilj TD nije da izvrši modelovanje sistema ekonomskih zavisnosti na krajnje detaljan način,[86][134] i time dođe do empirijski nepraktičnog, preglomaznog i slabo-upotrebljivog modela realnosti.[11] Naprotiv, TD proširuje set početnih i glavnih jednačina upravo onoliko koliko je to dovoljno da se obuhvate krucijalne međusobne zavisnosti ekonomskih promjenjivih. Međutim, opet ne previše, da se ne bi došlo do situacije kada definisani model nije relativno lako upotrebljiv za analizu. Pomenuti kvalitativni kvantifikatori „dovoljno” i „ne previše”, suštinski znače da se npr. uzme u obzir uticaj, u finalnom 3D sistemu jednačina, okvirno još toliko jednačina povezanih sa prvobitnim ekonomskih varijablama, čime se u konačnici dobija 6D sistem (Chiarella et al., 2011 [48]). Ovako definisan sistem, i dalje nije prezahťjevan ili preglomazan za analizu, dok svakako nudi značajno dublji uvid u kretanja promjenjivih, dinamiku međuzavisnosti, dugoročne prognoze, itd. Pomenuti višedimenzioni sistemi (Chiarella et al., 1999 [51]) koje koristi TD su gotovo uvijek, po empirijskom pravilu, nelinearni sistemi. Otuda i potreba za korištenjem NDA tehnika. NDA je neophodna za tumačenje predmetnog/ih sistema jednačina, kako sa aspekta analize dobijenih rezultata, tako i sinteze finalnih zaključaka.

Kuznetsov (2004) [113] ističe da se NDA može koristiti ne samo za analizu dinamike sistema već i za analizu njihove determinističke ili nedeterminističke prirode, odnosno konvergencije/divergencije u širem vremensko-prostornom intervalu (Wiggins,

2003 [194]). TH i TIM predstavljaju kod ekvilibrijumskih analiza suštinski međuzavisne metodologije, jer ispitivanja i zaključci do kojih dolazi TH u domenu analize prirode bifurkacije parametara u parametarskim prostorima, teorija obrnutog ili inverznog modeliranja će preslikati u sferu makroekonomske analize i izvođenja zaključaka u ekonomskom prostoru događaja međuzavisnih promjenjivih (Das et al., 2014 [61]; Danca & Kuznetsov, 2018 [59]; Arrowsmith et al., 1993 [12]).

Podaci koji predstavljaju realne ekonomske procese su najčešće diskretne<sup>28</sup> prirode, u suprotnosti sa njihovom izvorno neprekidnom prirodom. Takođe, podaci do kojih se u makroekonomskim analizama može doći su podaci sa učestalošću na mjesečnom, kvartalnom ili godišnjem nivou. Relativno niska i/ili nezadovoljavajuća rezolucija predmetnih podataka, naspram suptilnije analize uzroka i posljedica u ekonomiji, čini svaku linearnu analizu – u najboljem slučaju, površnom (Vieru, 2008 [191]). Logično se nameće zaključak da je potrebno predstaviti svaku vrijednost podataka ekonomskih varijabli koliko je moguće preciznije sa funkcionalnom zavisnošću koja će, čak, inherentno uzeti u obzir i trend (rast ili pad) promjene posmatrane ekonomske veličine, za velike i male vremenske podintervale od posmatranog/originalnog vremenskog intervala. Dodatno, lako se izvodi zaključak da pomenuta funkcionalna zavisnost nikako ne može biti linearna funkcija – prava linija ili izlomljena-prava (engl. *piecewise analysis*).

Razlog za pomenuto je često, u praksi, odsustvo diferencijabilnosti pomenutih funkcija (Rössler, 1976 [166]). Ukoliko nedostaje diferencijabilnost za funkciju koja je po svojoj prirodi neprekidna, onda sama metodološka (pret)postavka nije dobra! Na primjer, kada govorimo o kvartalnim podacima za BDP neke države, jasno nam je da se predmetni kvartalni iznos BDP-a, vrlo vjerovatno, mijenjao tokom tri mjeseca koja su uključena u kvartalni podatak. Međutim, sve promjene, razloge tih promjena, kretanja na više ili niže, tendencije istog u vremenu, itd. koji su postojali tokom pomenutog kvartala „ispeglati” smo postojanjem samo jednog (opisnog) podatka. Najgore od svega je što ni ne slutimo, i ne znamo, na koji način će moguće postojeće promjene uzrokovati buduće promjene i trendove.

---

<sup>28</sup> Postoji određena vrijednost u određenom trenutku. Međutim, između dva poznata ili definisana vremenska trenutka, nemamo vrijednost za navedenu funkciju. Suprotno od kontinualne funkcije.

Iznos pomenutih relativno manjih, tj. mikro promjena koje utiču na makro kretanja, upravo upotpunjuje i izučava teorija haosa. Dakle, potrebno je kreirati *nelinearnu neprekidnu funkcijsku zavisnost* (u daljem tekstu: NNFZ) neke ekonomske varijable na osnovu dostupnih diskretnih podataka (Purica, 2015 [160]). Na pomenuti način smo se već značajno približili realnosti, tj. stvarnim promjenama i dinamici koje su opšte-prisutne u ekonomiji.

Nakon što se odrede NNFZ nezavisnih promjenljivih, iste se uvrstavaju u početni model, koji je najčešće sistem jednačina, te se onda analiziraju promjene. Međutim, najjednostavniji i najpraktičniji način praćenja promjena, naspram jedne „osnovne” promjenljive – vremena, jeste pronaći vremenske izvode pomenutih NNFZ (Stewart, 2009 [185]; Lipsman & Rosenberg, 2017 [123]). Uvrštavanjem izvoda NNFZ u prethodni sistem modela (Startz, 2009 [183][184]), dobijamo zapravo SNDJPR. Raznim numeričkim metodama možemo pronaći tačku koja je najbliža teorijskom „kvazi-ekvilibrirumu”, koji je zapravo suštinski gledano specijalan slučaj disekvilibriruma, jer pomenuta vrijednost ukoliko postoji za ekonomski sistem, u praksi nikada ne biva dostignuta, odnosno ekonomski sistem de-facto je ne uključuje u skup svojih rješenja, tj. trajektoriju SNDJPR. Bitno je napomenuti da se ne može uvijek egzaktno odrediti singularitet SNDJPR (Knoll & Keyes, 2004 [109]). Gotovo uvijek u praktičnim primjerima, isti je moguće odrediti sa određenom tačnošću, tj. najčešće je tačnost zadovoljavajuća i obično je reda veličine par stotina, ili hiljada, puta manja od reda veličine nezavisne promjenljive. Poslednje pomenuto, je više nego dovoljno za finalnu i praktičnu ekonomsku analizu. Bitno je istaći da SNDJPR određujemo pomoću NNK za konkretnu vrijednost funkcije u nekoj tački (Verbeek, 2008 [190]), u saglasnosti sa međuzavisnošću opisnih varijabli, a ne samo na određenom segmentu apcinskih vrijednosti. Poslednje navedenim, bi se u konačnici dobila neželjena linearizacija na posmatranom domenu nezavisnih promjenljivih, a samim tim bi se i izgubio smisao uključivanja promjena u analizu diferencijala ordinatnih vrijednosti (Boeing, 2016 [36]).

Korištenjem metoda TH ispitujemo u faznim dijagramima kretanja diferenciranih vrijednosti funkcijskih zavisnosti i pripadajućih im bifurkacija parametara u parametarskim prostorima. Bifurkacija parametarskih prostora za 2D, 3D i višedimenzione (hiper-haos) modele (u našem slučaju 4D i 7D modela) primarno izučava se u okviru kontinuiteta

karakterističnih singulariteta, dodatno provjerama ponašanja i karakteristikama Ljapunovih eksponenata (LE) i Gottwald-Melbourne „0–1 testom” na postojanje haosa [83][84], i sl. Kod višedimenzionih analiza, pri određenim uslovima, moguće je postojanje hiperhaosa [119] – u kretanju više promjenjivih i parametara u isto vrijeme (Danca, 2018 [59]), tj. kod više od dva LE. U teoriji haosa infinitezimalne promjene na mikro nivou ponekad uzrokuju relativno drastične promjene na makro nivou (Lorenz, 1963 [125]; Lorenz & Haman, 1996 [126]). Simulacija kontinuiranja singulariteta SNDJPR, gdje se gotovo svi parametri i promjenljive uzimaju sa visokom tačnošću, čine istu pogodnom za izučavanje uticaja, relativno i apsolutno, malih promjena u sistemu kod neke varijable ili parametra na cjelokupno ponašanje sistema (Feigenbaum, 1979 [73]; Feigenbaum, 1983 [74]).

Nakon završetka analize primjenom TH na SNDJPR, pristupa se TIM koja vrši preslikavanje dobijenih rezultata na izvorne ekonomske jednačine i međusobne zavisnosti ekonomskih veličina u početnim jednačinama. Zatim se putem TIM analiziraju postojeće i potencijalne vrijednosti određenih ekonomskih veličina. Primjenom TIM, koriste se vrijednosti optimalnog prostora rješenja – zajedno sa analizom ciljeva i posljedica, i ispituje se da li je ishod pozitivan ili negativan, tj. kako se može mijenjati pripadajuća dinamika faznih dijagrama i parametarskih prostora (Tarantola, 2005 [189]). Bitno je napomenuti da fazni dijagrami nude jako veliku fleksibilnost u pogledu analize kretanja posmatranog ekonomskog sistema i izbora relevantnih parametarskih vrijednosti naspram konkretne vrijednosti varijable u posmatranoj singularnoj tački sistema (Neal & Shone, 1976 [144]; Shone, 2002 [174]).

Zaključci koji slijede na osnovu gore prezentovane analize omogućavaju da retroaktivno, u sadašnjosti, i budućnosti, možemo uvidjeti potencijalne probleme u ponašanju sistema naspram željene stabilnosti, moguće potencijalne probleme u ekonomskim politikama, najavu potencijalne naredne krize, itd. Pomenuto se praktično i egzaktno može sve obuhvatiti prezentovanim metodama istraživanja.

U prethodnom je dat pregled istraživanja koja predstavljaju teorijski i metodološki okvir za disertaciju. Što se tiče empirijskih istraživanja ove teorije se primjenjuju u oblastima: matematike (Bosschaert et al., 2020 [39]; Kalia et al., 2019 [104]; Xing et al., 2013 [200];

Xing et al., 2014 [201]; Shykhmamedov et al., 2020 [175]; Luo, 2020 [131]; Luo et al., 2020 [132]; Hamri, 2018 [90]), fizike (Kuipers et al., 2019 [112]; Suárez-Ántola, 2019 [188]), medicine (Xing et al., 2020 [199]; Alonso, et al., 2020 [6]), mehanike (Bakri et al., 2015 [19]; Luo et al., 2020 [199]<sup>29</sup>; Viguie' et al., 2009 [192]), elektrotehnike (Itoh et al., 2017 [100]; Itoh et al., 2017 [101]; Liu, 2010 [124]), planetarnih, ekoloških i klimatskih nauka (Hobbs et al., 2018 [96]; Wang et al., 2011 [193]; Ghil, 2010 [78]; Gimmelli, 2015 [81]), hemije (Picardo et al., 2011 [155]; Kia et al., 2017 [107]), metalurgije (Pchelintseva et al., 2020 [152]), kao i u mnogobrojnim drugim naukama i oblastima. Primjene u ekonomiji su značajno rjeđe, iako postoje (Menuet et al., 2017 [141]; Menuet et al., 2019 [142]; Pereira-Pinto et al., 2020 [153]; Ghosh, 2013 [79]; De Magalhães et al., 2018 [66]; Neiryneck et al., 2016 [145]; William et al., 2015 [195]; Mainardi, 2020 [136]; Bosi et al., 2018 [38]).

Tako na primjer, Menuet et al. [141][142] iz 2017. i 2019. godine su u svojim istraživanjima iz oblasti makroekonomije primijenili NDA na budžetska pravila, neadekvatnost iznosa poreza i uzroka agregatne nestabilnosti. Dodatno, došli su do zaključka da je endogeni rast modela moguć samo ako postoji visoka javna potrošnja, koja opet implicira nastanak agregatne nestabilnosti, dok u slučaju niske javne potrošnje moguća je savršena predikcija budućih kretanja optimalne putanje budžetske linije i nema agregatne nestabilnosti. Navedene rezultate su Menuet et. al. 2019. [142] dobili prvo primjenom NDA na početni model, a zatim su se inverznim modeliranjem kretali unazad da dobiju optimalne vrijednosti agregata modela. Dok su isti autori, u svom radu iz 2017. godine [141], analizirali kretanje i iznose javnog duga, ciklusa endogenog rasta i dugoročno uzrokovane neodređenosti, koja ima tri različite manifestacije. Kontinuiranjem singularnih tačaka i primjenom inverznog modeliranja došli su do zaključka da teret javnog duga može biti kompenzovan smanjenjem nenamamjenske javne potrošnje uz povećanje odnosa duga spram BDP-a, a dolazi se i do adekvatnog smanjenja fiskalne baze. Navedeno, indirektno utiče na iznose bruto raspoloživog dohotka, i posledično na ukupni imetak odnosno potrošnju radnog faktora u ekonomiji. U oba rada je istaknut uticaj početnih uslova ekonomskih varijabli, tj.

---

<sup>29</sup> Rad je multidisciplinaran, te zato se nalazi na dva mjesta u citiranju (navođenju) referenci Literature.



kako vrijednosti varijabli i dinamika njihovih promjena može arbitrarno uticati na alternativnu dinamiku cijelog sistema.

Takođe, jedan od relativno rijetkih primjera primjene opisanih metoda u ekonomiji je istraživanje Pereira-Pinto et al. [153] iz 2020. godine, koji u svom radu prezentuju interakciju dvije nezavisne ekonomije, i na teorijskim postulatima definisane, koje koriste matematički model definisan od strane Ishiyama i Saiki na ekonomski model Kaldor–Goodwin u cilju određivanja međuzavisnosti udjela finansijskih naknada za rad u nominalnom BDP-u, stope nezaposlenosti, očekivane inflacije i iznosa novčanih naknada za rad koje su neprilagođene spram kupovne moći. U radu autori metodama obrnutog modeliranja dolaze do identifikovanja potencijalnih stagnacionih perioda u ekonomiji, kao i uslova odnosno momenata u kojima može doći do pojave haosa u kompleksnim sistemima. Autori su naveli da je nedostatak urađene analize to što se ista bazira na rezultatima dobijenim iz modela, i da podaci uvršteni u model nijesu uzeti iz realnog svijeta, već su proizvod rješenja egzaktnih matematičkih međuzavisnosti.

Sa druge strane suprotno navedenom, iz isključivo ekonomskog ugla, počevši od radova Macklem (1994) [135] i Bayar (1999) [22], pa nadalje preko radova Barrell et al. 2015 [20], De Bondt et al. 2019 [64], Alp et al. 2019 [7] i Boyer (2020) [40]. Na klasičan način se analizira međuzavisnost, kvalitativne i kvantitativne promjene makroekonomskih varijabli, među kojima su i raspoloživi dohodak, ukupni imetak i dostupna potrošnja stanovništva. Zaključci iz navedenih radova se baziraju na klasičnoj ekonomskoj analizi udjela jednih varijabli u drugima, odnosno trendova u njihovom kretanju. Dodatno, izvode se i zaključci o budućem kretanju varijabli na osnovu analize njihovih prošlih vrijednosti. Navedeni pristup je široko rasprostranjen u ekonomskim analizama, ali kao što smo već pomenutli, većina svjetskih ekonomista izuzev Nouriel Roubini-ja (Manasse et al., 2003) [137], i još nekolicine, nije ni izdaleka naslutila i predviđela događaje globalne finansijske krize iz 2008. godine i/ili sličnih događaja.

Doktorat će pokušati da popuni istraživačku prazninu između dva gore navedena i dijametralno različita metodološka pristupa, i to sa konkretnim i realnim vrijednostima predmetnih varijabli EU makroekonomije, uz primjenu NDA i TIM analize. Uzeće se u obzir

agregatno sve zemlje EU28, tretirajući uniju kao jedinstven ekonomski, pravni i politički entitet naspram ostatka svjetske međunarodne zajednice. Kvalitativni i kvantitativni zaključci će se bazirati na rezultatima dobijenim kontinuiranjem singularnih tačaka i/ili ekvilibrijumskih zavisnosti. Obrnutom analizom bifurkacionih vrijednosti odrediće se uslovne ravnoteže egzogenih i/ili endogenih varijabli modela, što će se koristiti u kratkoročnoj i dugoročnoj prognozi ekonomskih kretanja, koje dodatno mogu ukazivati na potencijalno opasne ili poželjne efekte po makroekonomiju EU.

Pregledom postojeće literature utvrđeno je da se metode korištene u disertaciji do sada nijesu puno koristile za analizu dinamike ekonomskih sistema, iako su po svojoj prirodi adekvatne. U skladu sa pomenutim, disertacija popunjava prazninu u postojećoj literaturi i pokazuje da se ove metode mogu uspješno primijeniti na ekonomske sisteme. Takođe, na osnovu pregleda prethodne literature, ne postoje istraživanja koja se odnose na dinamičku analizu ukupno raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje u EU. Predmetno istraživanje će popuniti i taj nedostatak korištenjem stvarnih EU podataka, uz prezentovanje empirijskih dokaza, sa ciljem potvrde uvedenih hipoteza. Do sada, ne postoji istraživanje bazirano na KE koje može utvrditi moguće paralelne scenarije dinamike makroekonomskog modela koji uključuje raspoloživi dohodak, imetak i potrošnju u EU. Dodatno, pronaći ćemo i prezentovati optimalni scenarijo koji odgovara tačkama u kojima sistem dostiže ekvilibrijum/e. Uzimajući u obzir (sve) poslednje navedeno, istraživanje u disertaciji, koristeći TD, kontinuiranja singularnih tačaka (KST) i TIM, prikazaće rješenje ovog problema po prvi put u literaturi.

Već neko vrijeme TD egzistira na ivici ili samoj „oštrici” ekonomske nauke, u smislu da ima relativno revolucionarne i inovativne postulate u odnosu na TE. Sa druge strane, TE ne može pružiti dovoljno zadovoljavajuće i egzaktne odgovore za sisteme ekonomskih varijabli gdje se rješenja sistema konstatno mijenjaju u vremenu, tj. naročito ne za složenije sisteme. Osim bazične edukativne vrijednosti, primjena TE u praksi je u najmanju ruku diskutabilna i nepraktična (Barro (1971) [21]; Kaldor (1975) [103]; Korliras, 1975 [110]; Korliras, 1980 [110]; Backhouse et al., 2005 [17]; Donzelli, 2008 [68]). Nova moderna teorija TD je kreirana da prebrodi probleme statičnosti koje apriori, i inherentno, TE unosi u



svaku analizu (Day, 1987 [63]; Ackerman et al., 2004 [1]; Cavalieri, 2004 [44]; Backhouse, 2012 [2016]; Chiarella et al., 2011 [50]; Pangallo et al., 2019 [148]). TD ima dijametralno suprotne postulate od TE. Sveprisutne dinamičke promjene u sistemu se jedino mogu adekvatno opisati određenim adaptivnim modelom koji će pratiti i/ili na relevantan način uzeti u obzir postojeću dinamiku ekonomskih procesa u svakom trenutku. Navedeno implicira da vremenska zavisnost postoji kod TD, ali i da je svaka tzv. „ravnotežna zavisnost” u sistemu zapravo funkcija vremena. Dakle, ne samo da su ekonomske varijable, procesi, rješenja sistema, i sl. funkcije vremena – stohastičke vremenske serije, već su i njihova ravnotežna stanja funkcije vremena! Navedeno čini jezgro postulata TD.

Da bi TD imala empirijski značaj i karakter, potrebno je predstaviti postulate na univerzalan i relativno primijenljiv način u praksi. Do danas, najdalje su u definisanju TD u ekonomskim sistemima otišli svjetski renomirani naučnici Carl Chiarella, Peter Flaschel, Gangolf Groh i Willi Semmler, u njihovoj knjizi Teorija disekvilibrjuma (Chiarella et al., 1999)[51]. Predstavljene ekonomske zavisnosti, teorijske osnove, implementacija istih u ekonomiji, itd. su objašnjeni na efikasan i efektivan način u obliku *n-dimenzionih* (višedimenzionih) modela. Međutim, empirijski dio pomenute knjige je prilagođen ekonomiji Australije. Pošto je predmet istraživanja disertacije EU makroekonomija, početne jednačine će biti u određenoj mjeri prilagođene specifikumu EU.

EU *sui generis* je karakterističan po mnogo čemu, a vjerovatno najviše iz razloga inkorporiranosti 28 kulturološko, tradicijski i ekonomski različitih zemalja u jednu političko-ekonomsku cjelinu. Dodatu vrijednost ovog naučnog istraživanja, pored relativno značajnog broja već pomenutih elemenata, čini i pomenuta adaptacija sistema jednačina na EU praksu. Tim prije što klasične metode i postulati TE nisu najadekvatniji za analizu i sintezu u istraživanju direktno baziranom na empirijskim podacima. TD sa prilagođenim početnim jednačinama EU čini pogodan osnov za postavku istraživanja, tj. EU makroekonomskih karakteristika, zavisnosti i trendova.

Glavni cilj ovog rada je odrediti tačke stabilnosti ekonomskog sistema u faznom i parametarskom prostoru, i kreirati u skladu sa dobijenim rezultatima zaključke o optimalnim ekonomskim politikama (fiskalnim i/ili monetarnim). Dobijene/određene optimalne

vrijednosti ekonomskih politika mogu poslužiti za određivanje ključnih parametara EU makroekonomije.

Metodološki slijed istraživanja u disertaciji, se sastoji od sljedećih koraka: 1) postaviti opšte teorijski-adekvatne disekvilibrirumske jednačine za određeni ekonomski sistem, koje će se moći koristiti dalje u NDA, koristeći TH i TIM; 2) kreirati sistem/e NDJPR, tj. diferencijabilnih nelinearnih funkcija koje reprezentuju ekonomske varijable, i pronaći/odrediti njihove međusobne relacije; 3) generisati diferencijabilne funkcionalne zavisnosti ekonomskih varijabli, suprotno od izvorno-diskretnih funkcija (prekidnih i nediferencijabilnih), sa ciljem proširivanja obima originalnog intervalskog uzorka početnih podataka, radi NNK kreiranja pripadajućeg sistema simultanih jednačina (SSJ), tj. u našem slučaju SNDJPR; 4) pronalaženje singularnih i karakterističnih tačaka sistema SNDJPR; 5) istražiti karakter pronađenih relevantnih singularnih tačaka i parametara; 6) realizovati kontinuiranje/a bifurkacija singulariteta SNDJPR; 7) definisati vezu dobijenih matematičkih rezultata predmetne teorijske analize i realnih ekonomskih kretanja.

Ispunjavanjem gore navedenih ciljeva se, paralelno i komplementarno, zaokružuje set zaključaka i dokaza neophodnih za testiranje hipoteza. Međusobnom kombinacijom zaključaka i dokaza – kod određenih/relevantnih ranije prezentovanih ciljeva, kreiraju se adekvatni i povezujući argumenti potrebni za testiranje i potvrdu pojedinih hipoteza. Dodatno, potvrdom skupa srodnih hipoteza, potvrđujemo i postulate disertacije.

U daljem tekstu prezetujemo plan realizacije definisanih ciljeva istraživanja. Prvi postavljeni cilj referencira se na postavljanje jednačina koje opisuju predmetni ekonomski sistem, tj. posmatra se i izučava agregatna makroekonomska dinamika EU28 zemalja za period od 2005. do 2015. godine (11 godina) (Statistical Data Warehouse, pristupljeno aprila 2019; Eurostat, pristupljeno aprila 2019). Kasnije će se upoređivati evolutivni tok pomenutog sistema sa realnim podacima za iste egzogene i endogene varijable za period od 2016. do 2019. godine. Podaci za period 2020–2022. će biti izuzeti iz analize u disertaciji, jer pandemija Covid–19 predstavlja svojevrstan iznenadni i duboki krizni šok svjetskih razmjera. U skladu sa navedenim, bilo kakva analiza i/ili predikcija, uz uključivanje pomenutog negativno-globalnog događaja, je praktično nemoguća. Početni teorijski sistemi

TD biće postavljeni na osnovu primjera australijske ekonomije, uz uvažavanje i uključivanje svih opštih ekonomskih postulata i normi. Isti je već poznat iz literature Chiarella et al [48]. Međutim, poznati početni model TD treba izmijeniti na način da bude dopunjen, tj. prilagođen EU karakteristikama (Chiarella et al., 2011 [50]). Na primjer, umjesto preovladavajućih investicija u obveznice, kada je u pitanju australijska ekonomija, tj. njeno stanovništvo, u početnim jednačinama za EU28 se uključuje preferencijalni izbor EU stanovništva u vidu dugoročne vremenski-oročene štednje sa rokom dospelja glavnice od preko 10 godina. Bihevioristički posmatrano, jedna vrsta ili tip preferirane investicije od strane stanovništva u jednoj određenoj regiji, je zapravo marginalan u drugoj. Osim uzimanja u obzir biheviorističkih karakteristika za pomenute ekonomske regije – pri kreiranju i dopuni početnih postavki jednačina TD, iste su dopunjene uključivanjem dodatnih i realnih makroekonomskih karakteristika, kao što su npr. različiti izvori prihoda od zarada, raznih vrsta preferencijalnih finansijskih instrumenata, brojčanog i prostornog specifikuma radno sposobne EU28 populacije, penzijskih i socijalnih izdavanja, i sl. (Statistical Data Warehouse, 2019; Eurostat, 2019). Navedeno predstavlja u značajnoj mjeri originalni, i prilično izmijenjen početni sistem jednačina, tj. naučni koncept, a opet uz poštovanje i zadržavanje osnovnih principskih načela TD onako kako su je kreirali i definisali, u epistemološkom smislu, njeni autori.

Drugi postavljeni cilj vezan je za činjenicu da je relativno zahtjevno pronaći neprekidnu funkciju koja predstavlja određeni skup brojnih vrijednosti iz konačnog uzorka ili vremenskog okvira na vjerodostojan način (imajući na raspolaganju samo diskretne empirijske podatke), naročito kada postoje strukturni lomovi u posmatranoj vremenskoj seriji. Ono što zahtijevamo od prethodno pomenutog metoda aproksimiranja ili tzv. „fitovanja” podataka iz vremenske serije neprekidnom funkcijom, jeste da na egzaktn način i koliko je moguće bliže vrijednosti izvornog podatka, reprodukuje ekonomske vrijednosti (Bober, 2013 [34][35]) i međusobne zavisnosti diferencijabilnom funkcijom (Duffy, 2003 [70]). Kod aproksimacije se trudimo da relativna greška između originalnog podatka i aproksimirane funkcionalne vrijednosti, bude manja ili najviše 1% (često su aproksimacije sa tačnošću od 0,5%, i bolje) (Lyche & Merrien, 2014 [133]). Nakon aproksimacije

funkcijskih zavisnosti, dodatna aproksimacija se vrši za njihove diferencijale, na način da se isti predstavljaju sa svim značajnim i povezanim članovima pojedinačnih, produktnih i eksponencijalnih zavisnosti opisnih (zavisnih) promjenjivih (Startz, 2009 [183][184]). Nakon kreiranih zavisnosti zapravo imamo SNDJPR koji sa značajnom preciznošću opisuje dinamiku posmatranog ekonomskog sistema. Kreiranje ovog sistema, uz aproksimiranje međusobnih zavisnosti, urađeno je metodom NNK (Verbeek, 2008 [190]; Hill et al., 2018 [94]). Za navedene aproksimacije se mogla koristiti bilo koja druga metoda koja na zadovoljavajuće precizan način može aproksimirati diferencijale funkcionalnih zavisnosti, kao što je to npr. metoda dvostrukih najmanjih kvadrata i sl. (Wooldridge, 2016 [198]). Međutim, korištenjem poslednje pomenute metode bi se dodatno i nepotrebno iskomplikovala funkcionalna zavisnost, i međuzavisnost, SNDJPR.

Treći postavljeni cilj se bavi aproksimacijom funkcionalnih zavisnosti neprekidnih funkcija, koja je urađena tzv. polinomnim fitovanjem i/ili putem aproksimacije korištenjem Furieovih redova (Hilborn, 2000 [93]). U cilju preglednijeg prezentovanja finalnih rezultata u ovom radu, tj. u krajnjim jednačinama je korišteno isključivo polinomno fitovanje.<sup>30</sup> Potrebno je napomenuti da se različite metodologije aproksimiranja funkcija u jednačinama TD mogu ravnopravno i istovremeno koristiti (miješano) među članovima finalnih jednačina (Siauw, 2014 [176]). Polinomno fitovanje funkcionalnih zavisnosti iz diskretnih podataka, kreira polinome sa relativno visokim stepenom (Stewart, 2009 [185]). Rad sa ovakvim polinomima je gotovo nemoguć „ručno”. Iz navedenog razloga je neophodno koristiti programske pakete tipa MATLAB. U narednom koraku može se proširiti početni vremenski uzorak, na način na koji je to potrebno, u smislu veličine i učestalosti novo-kreiranog vremenskog uzorka (Greene, 2003 [87]). Sa novo-određenim vrijednostima, u okviru granica početnog vremenskog uzorka, možemo koristiti programe kao što su EViews da pronađemo

---

<sup>30</sup> Tokom istraživanja su se paralelno kreirale obje vrste „fitova”, polinomna i FT, za sve funkcionalne zavisnosti. Interesantno je pomenuti da je FT dao čak i bolje rezultate od polinomnog fitovanja. Međutim, SNDJPR bi bio značajno složeniji, i što je još važnije, imao bi periodičnu komponentu, što ne odgovara realnim ekonomskim sistemima. Naravno, periodičnost se uz uvođenje određenih uslova, može lako eliminisati iz SNDJPR, ali onda bi se eventualno (zavisno od sistema) „skratila širina” početnog intervala za proširivanje početnog uzorka. Uzimajući u obzir sve navedeno, disertacija koristi optimalan metod (sram konzistentnosti zaključaka).

međusobne vremenske zavisnosti, za bilo koji oblik funkcionalne zavisnosti, opisnih promjenjivih (normalni ili derivativni oblik funkcija).

Četvrti cilj se bavi rješenjima SNJDPR. Uslovno rečeno, prostije nelinearne polinomne jednačine imaju broj nula jednak najvećem stepenu polinoma. Za nešto složenije sisteme, ukoliko se uradi kombinacija pomenutih jednačina u sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina, broj nula raste ili pada na unaprijed nepoznat broj, zavisno od matematičke forme predmetnog sistema (Duffy, 2003 [70]). Za najsloženije sisteme, ukoliko neka od jednačina ima članove koji su jednaki proizvodu opisnih promjenjivih na prvi, drugi i/ili veće eksponente, predmetni sistem najvjerovatnije nema analitičko već samo numeričko rješenje (Radi & El Hami, 2018 [163]). Ponekad ne postoji čak ni numeričko rješenje, već u određenim slučajevima postoji samo aproksimativno rješenje, koje ima određenu tačnost (zadovoljavajuću ili nezadovoljavajuću za konkretan slučaj). Da bi se prevazišli pomenuti problemi potrebno je posjedovanje znanja i vještine u odlučivanju što odabrati ili odbaciti kao rješenje sistema. Na ovaj način se dobijaju singularne tačke SNDJPR. Međutim, to ne znači da smo došli i do karakterističnih tačaka posmatranog sistema, koje će se zapravo koristiti dalje u istraživanju (Burke & Hunter, 2005)<sup>31</sup>. Za određivanje karakterističnih tačaka treba uzeti u obzir specifikum same oblasti istraživanja, u kombinaciji sa izučavanim sistemom. Na primjer, prilikom izučavanja ekonomskih sistema apriori po ekonomskim postulatima, i logici stvari, znamo da količina i cijena neke robe može biti samo pozitivna veličina, pa u skladu sa navedenim analiziramo singularitetne tačke iz prvog kvadranta ili oktanta funkcionalnih i sistemskih zavisnosti, jer su u pomenutim oblastima vrijednosti predmetnih ekonomskih varijabli uvijek pozitivne (Adams et al., 2015 [2]).

Peti cilj se bavi postulatima NDA i TH, tj. pronađeni singulariteti mogu imati različite evolutivne pojave u svom „životu” i/ili nastanku kao karakteristične tačke sistema i to na način da dolazi do raznih promjena i permutacija u samoj prirodi singularne tačke. Promjenom određenog parametra, ili više parametara, u parametarskom prostoru sistema pomenuti singulariteti mogu mijenjati svoju prirodu na različite načine. Na primjer,

---

<sup>31</sup> Burke, S.P., Hunter, J., Burke, S.P. and Hunter, J., 2005. Multivariate Time Series Approach to Cointegration. *Modelling Non-Stationary Time Series: A Multivariate Approach*, pp.69-127.

singularna tačka koja je „započela svoj život” kao karakteristična tačka sistema može promjenom određenog parametra ili parametara, promijeniti svoju prirodu u tzv. graničnu tačku bifurkacije [82][5], ili tzv. Hopf-ovu tačku (vrsta konvergentnog ili divergentnog, tj. kružnog ili elipsoidalnog oblika karakteristične tačke, odnosno stabilne ili nestabilne prirode), ili u Bogdanov-Takens, Andronov-Hopf, Neimar-Sacker, Bautin, itd. karakterističnu singularnu tačku bifurkacije (Kuznetsov et al., 2005 [113]; Bindel et al., 2005 [30]; Kuznetsov, 2019 [115]). Takođe, mogu se pronaći karakteristične tačke koje imaju, eventualno, neka od svojstava tzv. „tačke katastrofe” ili tačaka u kojima postoji tzv. dupliranje perioda i „put” ka haosu za posmatrani sistem (Bolotin & Yanovsky, 2007 [37]; Cvitanovic et al., 2005 [57][58]). Naravno, tek nakon detaljne, dubinske i iscrpne numeričke analize predmetnih sistema, možemo donijeti zaključke o prirodi pomenutih karakterističnih singularnih tačaka. Bez pomoći računara i kompjutacije karaktersitika singulariteta, ne postoji intuitivni ili bilo koji drugi način da se sazna i/ili izanalizira posmatrani sistem, tj. njegove karakteristične tačke.

Šesti cilj se bavi kontinuiranjem singulariteta, koje će se izvršiti korištenjem programskog paketa MATCONT (Dhooge et al., 2019 [67]), koji je specijalizovan za ispitivanje SNDJPR i bifurkaciju njegovih parametara. Pronalazeći i uočavajući karakteristične singularne tačke, iz prethodne iteracije, i sa generisanog grafika, iste postaju početne tačke za narednu iteraciju, tj. za narednu promjenu parametara sistema. Apriori, ne može se znati koji će se finalni rezultati dobiti analizom singulariteta, tj. kontinuuacijom karakterističnih tačaka.

Sedmi cilj je primjena TIM na dobijene rezultate. Ispunjavanjem prethodno opisanih ciljeva, postiže se da očitani rezultati sa NDA grafika se „vrate unazad” u početne jednačine. Nakon toga će se analizirati kako dobijeni rezultati, ili promjene, mogu biti ostvareni drugačijom kombinacijom parametara i/ili promjenom početnih uslova uz primjenu postulata TD. Sa izvedenim zaključcima bi se mogle definisati vrijednosti, i/ili opseg vrijednosti, početnih opisnih promjenjivih u jednačinama, tj. sa kojim to vrijednostima dobijamo najoptimalnije stanje u ekonomskom sistemu. Odnosno, koje ekonomske politike djeluju pozitivno i blagotvorno, a koje destabilizirajuće i negativno na makroekonomske agregate



posmatranog ekonomskog sistema. Na ovaj način bi bio zatvoren, metodološki, jedan pun istraživački krug. Zapravo, krećemo se od početnih jednačina u istraživanju ka nazad na početne jednačine – sa dobijenim rezultatima, gdje posljedično-uzročno je sve povezano. Opisuje se jedan ili više mogućih scenarija za stvarni (realni) ekonomski sistem (Pusuluri & Shilnikov, 2018 [161]; Xing et al., 2014 [200]; Zeng & Wu, 2013 [205]).

Suštinski gledano, krajnji cilj je generisati kvalitativne i kvantitativne zaključke vis-à-vis optimalnih politika koje su trebale, ili koje bi trebale biti na snazi, u razmatranom ekonomskom sistemu. Međutim, najkorisnije je da znamo u budućnosti koje to ekonomske politike bi trebale biti na snazi da bi se dobila u cjelosti optimalna/stabilna dinamika ekonomskog sistema. Makroekonomska agregatna analiza EU pruža istraživačko-dedukcioni okvir, ali sama po sebi nije jedini i glavni cilj prezentovane metodologije, već je cilj intertemporalna optimizacija ekonomskog sistema u cjelini.

Hipoteze i/ili istraživačka pitanja ove teze čine njegov centralni dio. Utemeljenja hipoteza su značajnim dijelom predstavljena i argumentovana u prethodno elaboriranim ciljevima rada, tj. na iste se oslanja testiranje hipoteza. Bitno je istaći da istraživanje, tj. ukupno implementirani deduktivno-metodološki okvir, nudi analizu prošlog i postojećeg stanja u posmatranom ekonomskom sistemu, ali i predikciju trendova opisnih i/ili zavisnih varijabli u budućnosti.

Pri testiranju hipoteza razmatraće se sljedeće egzogene i endogene varijable: raspoloživi bruto dohodak, ukupni imetak, ukupna raspoloživa potrošnja, porez na dohodak, depoziti po viđenju, oročeni depoziti do godinu dana, kao i druge varijable od interesa i značaja.

Hipoteze glase:

H1. Kontinuiranjem karakterističnih singulariteta raspoloživog dohotka u određenom trenutku za odgovarajuću vrijednost varijabli i parametara razmatranog sistema dostiže se ekvilibrjumski položaj.

H2. Postoji odstupanje između stvarnih vrijednosti razmatrane varijable i vrijednosti koja odgovara ekvilibrijumskom položaju utvrđenom kontinuiranjem singulariteta raspoloživog dohotka

H3. Kontinuiranjem singulariteta raspoloživog dohotka u sadejstvu sa ukupnim imetkom i potrošnjom u određenom trenutku za odgovarajuću vrijednost razmatranih varijabli i parametara dostiže se ekvilibrijumski položaj.

H4. Postoji odstupanje između stvarnih vrijednosti razmatrane varijable i vrijednosti koja odgovara ekvilibrijumskom položaju utvrđenom kontinuiranjem singulariteta raspoloživog dohotka u sadejstvu sa ukupnim imetkom i potrošnjom.

Finansijska sredstva obezbijedjena putem EU/ECB Asset Purchase Programme (ECB APP)<sup>32</sup> su u značajnoj mjeri održala i povećala životni standard EU stanovništva putem vještačkog povećanja makroekonomskih agregata ukupno raspoloživog dohotka ( $Y_H$ ), ukupno raspoloživog imetka ( $W_H$ ) i ukupne raspoložive potrošnje ( $C_H$ ) stanovništva EU.<sup>33</sup> Nakon u posljednjih deceniju ipo, značajnih fluktuacija agregatnih monetarnih i fiskalnih parametara EU makroekonomije, zahvaljujući ECB APP programu, došlo se do relativno stabilnih odnosno održivih javnih i privatnih finansija. Negativni efekti ECB APP programa su: pad eura – naspram drugih vodećih svjetskih valuta, nagle fluktuacije inflacionih kretanja u relativno kratkim periodima, kao i opštom EU makroekonomskom situacijom u kojoj stanovništvo EU troši dio finansijskih sredstava od uvećanog raspoloživog dohotka i imetka, a koji nema pokriće u dodatno stvorenoj ili produkovanoj real-ekonomskoj vrijednosti. U tom smislu, identifikovanje da li i za koliko su politike odstupale od optimalnih bi moglo doprinijeti da se identifikuju pozitivni ili negativni efekti ovog programa. U potrazi za odgovorima na pitanja, da li je došlo do sveukupnog smanjenja bogatstva/imetka EU

---

<sup>32</sup> Program kupovine i prodaje finansijskih dužničkih instrumenata, sa ciljem upravljanja/regulisanja monetarne politike EU, tj. primarne emisije funkcije. Izvor: <https://www.ecb.europa.eu/explainers/tell-me-more/html/app.en.html>

<sup>33</sup> Suprotno od situacije koja se desila u SAD sa Emergency Economic Stabilization Act iz 2008. godine i pratećim TARP programom od oko 700 milijardi US\$. Finansijska sredstva su se u konačnici našla na računima finansijskih institucija i korporacija, dok obični građani su vrlo malo, ili nikoliko, osjetili blagostanje primjenom pomenutog zakona/programa. Iako, TARP jeste usporio i obuzdao predmetnu krizu u SAD krajem 2008. i početkom 2009. godine.



stanovništva na račun održavanja životnog standarda trošeći ranije stvoreni ukupni imetak, od svoje strane ili strane svojih predaka, možemo jedino odgovoriti ako analiziramo simultano sve međuzavisnosti endogenih varijabli. Nikako ne bi bilo dobro da „sistem tjera” stanovništvo da bude u korak sa vremenom, odnosno potrošnjom koju savremeno doba zahtijeva, tj. da troše nezarađeno ili ranije zarađenu socijalnu sigurnost u vidu štednje, koja je primarno bila određena za život u starijem dobu života. Ukoliko posljednje jeste slučaj, imamo situaciju negativne ili obrnute intertemporalne razmjene, što samo po sebi predstavlja paradoks tzv. „države blagostanja”.<sup>34</sup> Iz tog razloga je važno analizirati dinamiku kretanja kontinuiranjem singulariteta dohotka, samostalno, ali i u sadejstvu sa ukupnim imetkom i potrošnjom.

H5. Postoji pojava haosa u ponašanju EU makroekonomskog modela, koji obuhvata raspoloživi dohodak, ukupni imetak i ukupnu raspoloživu potrošnju, nakon određenog broja vremenskih perioda.

Pojavu haosa u sistemu ćemo ispitati pomoću NDA. Nelinearni sistemi višeg reda često i inherentno imaju pojavu haosa u svojoj (prediktivnoj) vremenskoj dimenziji. Potrebno bi bilo da postoji određeni vremenski okvir, i početni uslovi sistema, u kojima su predviđanja moguća sa zadovoljavajućom tačnošću. Nakon određenog broja vremenskih perioda i pojave haosa u sistemu, predviđanja postaju nemoguća. Dodatno, što sa ekonomskog aspekta znači da poznamo opseg u kome predviđanja imaju kredibilitet i konzistentnost. Postojanje haosa u razmatranom makroekonomskom sistemu znači, pored spoznaje o nemogućnosti predviđanja izvan određenog vremenskog okvira, i relativno pozitivan aspekt koji se može manifestovati u ekonomskoj sferi, kao npr. nastanak i razvoj industrijskih klastera kojima pripadaju i tzv. start-up<sup>35</sup> kompanije (Pereira-Pinto et al., 2020, str. 16 [153]). Naime, pojava

---

<sup>34</sup> Država blagostanja je sistem društvenog uređenja u kojem država štiti i promoviše ekonomsku i socijalnu dobrobit građana, zasnovanu na principima jednakih mogućnosti, pravične raspodele bogatstva i javne odgovornosti za građane koji ne mogu da koriste minimalne odredbe za dobar život. Izvor: <https://www.britannica.com/topic/welfare-state>.

<sup>35</sup> Start-up ili pokretanje preduzeća je kompanija ili projekat koji preduzima preduzetnik u potrazi za razvojem i validacijom skalabilnog ekonomskog modela.

Detaljnije informacije mogu se pronaći na: <https://www.forbes.com/sites/natalierobehmed/2013/12/16/what-is-a-startup/?sh=7f59a9f74044>, 2) Katila, R., Chen, E. L., & Piezunka, H. (2012). All the right moves: How entrepreneurial firms compete effectively. *Strategic Entrepreneurship Journal*, 6(2), 116-132.

haosa generiše i stimuliše nepredvidiv i nekontrolisan rast pomenutih kompanija i samim tim doprinosi bržem i kvalitetnijem razvoju sveukupne ekonomije. Posljedično, raste raspoloživi dohodak stanovništva, ukupni imetak i ukupno raspoloživa potrošnja. Neke od najvećih svjetskih kompanija tipa Google, Amazon, Facebook, Twitter (X), NVidia i sl. Su iz sfere nekadašnjih start-up kompanija. Iste su kasnije dinamičnim razvojem postali izuzetno značajni faktori u ekonomiji i društvu uopšte. Nastanak samih kompanija (u pomenutoj IT oblasti) ima u sebi elemente haosa, tj. njihova kasnija razvojna „eksplozija”. Kao primjer pozitivne simbioze dva pomenuta načela, haosa i razvoja start-up kompanija, predstavlja i EU politika (na čelu sa Ursulom fon der Lajen) za petogodišnji period (2019-2024 godine). Ista, je stavila kao primarne ciljeve: razvoj „zelene” EU, tj. ekološki orjentisane Evrope, uz snažan poticaj start-up kompanijama unutar EU.

Pored testiranja navedenih hipoteza, u metodološkom smislu, u istraživanju će se odgovoriti i na sljedeća istraživačka pitanja:

IP1. Da li određivanje karakterističnih singularnih tačaka u faznim prostorima raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i potrošnje stanovništva EU, te primjena kontinuuacione bifurkacione analize parametarskih prostora na iste, može generisati mogućnosti alternativne i paralelne analize stabilnosti, tj. partikularne dinamike funkcionalnih zavisnosti predmetnih varijabli u prošlosti, sadašnjosti i budućnosti.

Linearizacijom, i sličnim metodama nižeg reda aproksimacije vremenskih serija, dolazilo bi do zanemarivanja relativno malih i potencijalno komplementarno-zavisnih promjena u ekonomskim sistemima. Iste bi nadalje u sebi nosile razloge budućih determinišućih trendova, kao i klicu haosa u kretanju predmetnih varijabli. Primijenjena TD nad stvarnim podacima raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i raspoložive potrošnje EU stanovništva, kao i međuzavisnosti navedenih varijabli, bi trebalo da pruže metodološki adekvatniju distribuciju vremensko-prostorne dinamike ekonomskog sistema. Aproksimiranje diskretnih vremenskih serija raspoloživog dohotka, imetka i raspoložive potrošnje EU stanovništva sa neprekidnim funkcijskim zavisnostima bi, teoretski i praktično, pružilo mogućnost generisanja međuvrijednosti niže vremenske klase – od originalnih podataka, tj. određivanje vrijednosti koja bi se nalazila između dva originalno susjedna

podatka. Na taj način bi mogli koristiti širi set primijenjenog matematičkog aparata u analizi podataka raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje stanovništva EU. Pripadajuće diskretne vremenske serije bi bile aproksimirane nelinearnim neprekidnim funkcijama i trebalo bi da, kvalitativno i kvantitativno, bolje reprezentuju EU makroekonomiju. Primjenom NDA na sistemu prvih diferencija (diferencijala) tih funkcija i analizom singularnih tačaka mogu se utvrditi anomalije u kreiranju dosadašnjih EU politika, kao i dati preporuke za buduća djelovanja. Iako se ovaj pristup pokazao uspješnim, kod mnogih drugih nelinearnih dinamičkih sistema u različitim oblastima naučne primjene, postavlja se pitanje da li će pomenuti metodološki pristup dati adekvatne rezultate kod razmatranog makroekonomskog sistema EU. Isti, se po prvi put primjenjuje u toj problematici, u ovoj disertaciji.

IP2. Da li se inverznim modeliranjem mogu definisati potrebni iznosi monetarnih i fiskalnih parametara za poželjna realna ekvilibrijumska stanja makroekonomskih politika?

Inveržno modeliranje je sastavni dio NDA kod mnogih razmatranih sistema u različitim oblastima i primjenama. Imajući u vidu da se NDA i inveržno modeliranje na ovaj način po prvi put primjenjuje na makroekonomskom sistemu EU, koji obuhvata dinamiku međuzavisnosti između raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje, logično se nameće pitanje da li će inveržno modeliranje dovesti do (korisnih i upotrebljivih u praksi) krajnjih rezultata, tj. do optimalnih monetarnih i fiskalnih parametara.

IP3. Da li primijenjena NDA metoda daje bolje rezultate pri tumačenju dinamike kretanja raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i raspoložive potrošnje u odnosu na metode vještačke inteligencije, kao što je dubinsko učenje pomoću neuronskih mreža?

Metode dubinskog učenja imaju u literaturi potvrđene dobre performanse pri predikciji budućih vrijednosti na osnovu prethodnih kretanja. Stoga je interesantno uporediti rezultate dobijene NDA sa neuronskim mrežama, ne samo u pogledu predikcije budućih kretanja, već i korisnosti za tumačenje dinamike tih kretanja. Ukoliko rezultati budu u korist NDA, to će biti još jedan od važnih doprinosa, jer se sugerise efikasniji metod za analizu nekih drugih ekonomskih sistema u budućim istraživanjima.

Kao što je već navedeno u obrazloženju prvog cilja, za empirijsko testiranje hipoteza i odgovora na istraživačka pitanja koristiće se agregatni makro pokazatelji ekonomskog sistema EU28 zemalja (ukupni raspoloživi dohodak, ukupni imetak, ukupna raspoloživa potrošnja, bruto naknade, porez na dohodak, depoziti po viđenju, oročeni depoziti do godinu dana, porez na kapitalnu dobit, koeficienti zaposlenosti i nezaposlenosti, koeficienti stepena izdvajanja za penzionere i nezaposlene, racija bruto izdvajanja za dohotke i socijalne izdatke, kuponska ili kamatna vrijednost investicija u domaće obveznice ili vrijednosti kamata na oročene depozite do godinu dana u domaćim i stranim finansijskih institucijama, stepen investicija u domaće i strane hartije od vrijednosti, prosječne vrijednosti nekretnina po glavi stanovnika u EU28, i sl.) za period od 2005. do 2015. godine (11 godina). Vremenske serije su preuzete iz Statistical Data Warehouse, 2019 i Eurostat, 2019 (pristupljeno pomenutim bazama, aprila 2019.). Radi kasnijeg upoređivanja evolutivnog toka sistema sa stvarnim vrijednostima za iste egzogene i endogene varijable, iz istih izvora, su preuzeti podaci za period od 2016. do 2019. godine.

Po uzoru na jednačine definisane u teoriji disekvilibrjuma (Chiarella et al., 1999 [51]), određen je i kreiran kvantitativni model, tj. osnov početnih jednačina za izučavanje specifikuma makroekonomskih agregata EU. Nakon formalno definisanih jednačina sistema pristupa se analitičkoj obradi istih u MATLAB-u R2018b (Margab et al., 2011 [138]; Yang, 2005 [204]; Mathews & Fink, 2004 [139]). Nadalje, pronašli smo realne i adekvatne podatke u odgovarajućoj vremenskoj učestanosti za varijable koje se pojavljuju u specificiranom modelu (Statistical Data Warehouse, 2019; Eurostat, 2019). Aktivan rad na pronalaženju, prikupljanju i obradi potrebnih podataka trajao je nekoliko mjeseci. Dodatno, obraćena je posebna pažnja da podaci budu primjenjivi u izabran teorijski okvir, ali i adekvatni za modelski zastupljene makroekonomske agregate EU (metadata konzistentnost podataka). Urađena je akvizicija dostupnih godišnjih podataka za BDP, populaciju EU i iznos sredstava koji je uložen u hartije od vrijednosti (vlasničke i dužničke) od strane stanovništva EU28 za jedanestogodišnji period, dok su izvorni podaci za HICP (Harmonised Index of Consumer Prices) ECB-a, podaci o oročenim depozitima sa različitom ročnošću i depoziti po viđenju pribavljeni u originalnim mjesečnim vremenskim serijama. Nad određenim podacima

potrebno je bilo uraditi konverziju mjesečnih u godišnje podatke, tj. usrednjavanje mjesečnih vrijednosti na godišnjem nivou. Podaci za iznos primanja i socijalnih davanja EU stanovništva su imali originalno kvartalnu dimenziju i potrebno ih je bilo konvertovati u godišnje podatke, prvo kvartalnim usrednjavanjem i zatim sumom srednjih vrijednosti usrednjavanja u godišnje vremenske serije. Osim pomenutih, korišteni su u analizi i podaci za broj, površinu i ukupan iznos stambenih objekata po pojedinačnim zemljama, kao i za prosječnu vrijednost kvadrata stambenog prostora po svim zemljama EU. Nakon obimnije kalkulacije dobijeni su podaci za agregatni iznos vrijednosti imetka u nekretninama (stambenim) za stanovništvo EU prema podacima iz marta 2019. Svi podaci (pripremljeni i originalni) su uvršteni u modifikovane formule TD za EU28. Sljedeći korak je predstavljalo kreiranje funkcijske i međufunkcijske zavisnosti derivativa analitičkih jednačina prilagođenog modela u MATLAB-u i EViews-u (Siau & Bayen, 2014 [176]; Zeng & Wu, 2013 [205]; Zhang & Karniadakis, 2017 [207]).

Nakon toga, određeni su singulariteti, a radilo se i na parametarskoj bifurkaciji i kontinuiranju bifurkacija karakterističnih tačaka u predmetnim jednačinama, tj. u modelu. Za posljednje pomenuto korišten je program MATCONT 7p1\_2 2019, u okviru programskog paketa MATLAB (Lyche & Merrien, 2014), i PPLANE 9 (John C. Polking[159], <https://math.rice.edu/~polking/>)<sup>36</sup>, tj. program koji je specijalno kreiran za MATLAB programsko okruženje. Postoji značajan broj singulariteta SNDJPR i pripadajućih im „grananja”, a samim tim i kombinacija koje su ispitane (Startz, 2009 [183][184]). Zatim su putem TIM povezani rezultati istraživanja sa početnim jednačinama i upoređene postojeće vrijednosti sa optimalnim vrijednostima dobijenim putem analize (Schleer-van Gellecom, 2013 [170]), kako bi se testirale postavljene hipoteze.

Metode istraživanja su u svim fazama istraživanja bile konzistentne sa postulatima PME. U TD postoji preko 100 jednačina za modele otvorene makroekonomije i isti se klasifikuju u 8 klasa, sa dimenzionalnošću od 27 dimenzija – KMG27 model, pa i više (Chiarella et al., 2010 [48]). Analitičkom obradom jednačina, uključivanjem jednih u druge

---

<sup>36</sup> Polking JC. DField and PPlane [Computer software], 1995–2003, <https://math.rice.edu/~polking/odesoft/dfpp.html>

– tamo gdje je to bilo moguće i/ili suštinski opravdano, kreiran je model koji najviše odgovara empirijskom makroekonomskom agregatnom modelu EU28 zemalja. Dodatno, dobijeni model na osnovu početne TD (Chiarella et al., 1999 [51]) je okvirno za nekih 40% samostalno proširen i uzete su u obzir dodatne varijable koje bi mogle uticati na makroekonomska kretanja EU28. Vremenski opseg serija podataka koje se koriste u tezi, kao što je rečeno, je od 2005. do 2015. godine (11 godina). Navedeni vremenski okvir je namjerno tako odabran, iako su bili dostupni podaci i za nešto kasnije vremenske periode. Međutim, razlozi za odabir prezentovanog vremenskog okvira su slijedeći: 1) Godine 2004. EU se u svojoj istoriji najznačajnije proširila sa nekoliko novih članica, i kasnije je opisanu strukturu održala najduže u svom postojanju (sve do prijema Republike Hrvatske u EU 2013. godine); 2) Period nakon 2016. godine obilježio je „Brexit”, tj. referendum o izlasku Velike Britanije iz EU, nakon čega nastaju razne ekonomsko-socijalne anomalije unutar EU – kao produkt ovog događaja.

Nakon kreiranih početnih jednačina u analitičkom obliku inkorporiranjem postulata TD, i njihovog proširivanja, tj. obrade u MATLAB-u, pomenute jednačine su dalje numerički transformisane u nelinearne polinomne funkcije (Hu & Chen, 2013 [98]; Bernard & Nyambuu, 2016 [29]). Aproksimacioni funkcionalni polinomi ekonomskih varijabli su u nekim slučajevima polinomi 28. stepena, sa preciznošću i tačnošću ukupnog funkcijskog zapisa od 64 bita sa rezidualima nakon aproksimacije manjim od 0,01% u preko 95% „fitovanih” tačaka. Pomenuti rezultati su dobijeni sa MATLAB-ovom funkcijom *polyfit* koja se oslanja na Vandermondove matrice aproksimacije vrijednosti polinomnih koeficijenata (Klein & Spreij, 2003 [108]; Lundengård, 2017 [127]; Yaici & Hariche, 2019 [203]). Tačnost aproksimacije važi i za vremenske serije koje u sebi imaju jedan ili više strukturnih lomova, što predstavlja samo po sebi značajan uspjeh u aproksimacijama. Prednost aproksimacije vrijednosti diskretnih vremenskih serija neprekidnim, tačije diferencijabilnim funkcijama je u pomenutom koraku direktno vidljiva.

Nakon definisanih nelinearnih funkcionalnih zavisnosti određuju se prvi diferencijali jednačina. Na pomenuti način možemo neprekidnim funkcijama pratiti dinamiku promjena varijabli. Zatim se pristupa formiranju SNDJPR i njihovo predstavljanje zamjenskim



varijablama koje definišu međuzavisnosti ekonomskih vremenskih serija putem metode NNK (Hill et al., 2018 [94]). Tačnost definisanja međuzavisnosti, sa metodom NNK, varira među definisanim diferencijalnim jednačinama u opsegu od 0% do najviše, i vrlo rijetko, 7,5%. Dodatno, vođeno je računa prilikom aproksimiranja izvoda da rezidualne vrijednosti ne budu uvijek sa iste strane aproksimirane originalne vrijednosti, već da iste relativno ravnopravno mijenjaju znak tokom aproksimacije (Greene, 2003 [87]). Na taj način se dobija da je srednja vrijednost reziduala jako bliska ili jednaka nuli (stacionarnost reziduala). Pomenuto je značajno i zbog funkcije distribucije gustine vjerovatnoće (FDGV) konkretne stohastičke promjenjive, jer ocjena zavisnih promjenjivih ostaje nepristrasna i konzistentna (Wooldridge, 2016 [198]). Metoda NNK je odabrana zbog svoje univerzalnosti i bazičnosti. Nešto veće tačnosti aproksimacije diferencijalnih vrijednosti bi se dobile drugim složenijim metodama, kao što je to npr. metoda dvostrukih najmanjih kvadrata. Međutim, na taj način bi se dodatno iskomplikovao ukupni matematički aparat i sami metodološki pristup, pa bi predloženi metod istraživanja bio manje dostupan (naj)širem krugu istraživača i praktičnoj primjeni. Pronađene međuzavisnosti obično sadrže članove različitih stepena i međusobnih proizvoda opisnih promjenjivih.

U narednom koraku slijedi rješavanje SNDJPR, pronalaženje nula ili singulariteta, putem algoritma koji koristi u svom operativnom radu numeričku metodu pod nazivom: Bez-Jakobijanski Njutn-Krilov metod (JFNK – Jacobian-Free Newton-Krylov method) (Knoll & Keyes, 2004 [109]). Zatim se vrši selekcija koji singulariteti zadovoljavaju uslove da postanu karakteristične tačke konkretno izučavanog sistema. Nadalje se proučava, pomoću programa MATCONT, koji to singulariteti i parametri posjeduju potencijalna bifurkaciona svojstva, i ako posjeduju na koji način, tj. koje tranzicije među karakterističnim tačkama postoje u skladu sa NDA i TH (Govaerts et al., 2019 [85]; Luo, 2008 [128]; Xu & Luo, 2018 [202]). Obično postoji značajan broj singulariteta, naročito za nelinearne sisteme diferencijalnih jednačina sa većom vrijednošću maksimalnog eksponenta. Zbog navedenog, kontinuiranje karakterističnih singulariteta putem bifurkacione parametarske analize uvijek generiše nove potencijalno značajne i/ili interesantne singularitete za izučavanje (Luo, 2012 [129]). Relativno veći broj pronađenih singulariteta, nakon bifurkacionog kontinuiranja parametara,

potrebno je putem TIM suštinski povezati sa izvornim ekonomskim varijablama i izvesti zaključke na osnovu dostupnih informacija i dobijenih rezultata (Tarantola, 2005 [189]). Predmetna teza predstavlja originalno teorijsko i empirijsko istraživanje koje doprinosi postojećoj nauci na više načina. Prvo sa metodološkog aspekta ovo istraživanje je originalno u domenu primjene faznih dijagrama na ekonomski sistem određen uz pomoć kreiranih neprekidnih funkcija opisnih promjenljivih i bifurkacijom pripadajućih im parametara. Takođe, uvodi se kompjuterski eksperiment kao relativno novo sredstvo istraživanja.[120][169] Naime, postoji velika razlika između primjene računara u modeliranju i proračunu određenih poznatih naučnih teorija, spram istraživanja gdje računar ispituje skoro sve moguće kombinacije, u određenom pretpostavljenom opsegu, na putu ka definisanju optimalnih vrijednosti.

Pored metodološkog okvira, predmetno istraživanje unosi važne konkretne teorijske i empirijske doprinose:

1. Glavni teorijski doprinos je uvođenje TD u analizi realnih ekonomskih kretanja, umjesto opšte prihvaćeneog pristupa zasnovanog na TE. Teorija ravnoteže je pogodna za bazična teorijska i skolastički-eksplanatorna istraživanja. Međutim, ista je daleko udaljena od realnih kretanja u izuzetno kompleksnim sistemima, npr. agregatnih makroekonomskih kretanja jedne velike ekonomske zajednice (kao što je to EU). Sa svojih (oko) 500 miliona stanovnika, i desetak miliona pravnih i drugih subjekata koji ostvaruju kompleksne interakcije među sobom, sa spoljnim heterogenim uticajima – po prirodi nastanka i izvora (SAD, vojske, ratovi, MMF, SB, itd.), EU je jedan izuzetno kompleksan (ekonomski i politički) sistem. Upravo zato će se dinamička analiza makroekonomskog modela EU, koji obuhvata agregate dohotka, imetka i potrošnje, po prvi put u ovom radu, bazirati na teoriji disekvilibriruma.

2. Veoma važan teorijski doprinos čini prikaz stvarnog kretanja ekonomskih promijenljivih, u kvantitativnom i kvalitativnom smislu, spram teorijski definisanog tzv. ravnotežnog položaja. Na pomenuti način se može vidjeti razlika između rezultata dobijenih na osnovu klasične TE i stvarnih empirijski-baziranih rezultata dobijenih primjenom TD. Ovaj rad prezentuje činjenicu da se sa disekvilibrirumskim modelom može dobiti više



korisnih informacija za kreiranje monetarnih i fiskalnih politika nego pristupom zasnovanim na TE.

3. Obzirom da je kao teorijska osnova za definisanje makroekonomskog modela na kojem se bazira ovo istraživanje uzet skup jednačina karakterističan za Australiju, proširivanje i prilagođavanje disekvilibrirumskih jednačina da odgovaraju EU makroekonomskim uslovima, predstavlja značajan teorijski doprinos. Po prvi put je u ovom radu definisan makroekonomski model koji opisuje ukupni raspoloživi dohodak, ukupni imetak i ukupnu raspoloživu potrošnju u EU, koji može poslužiti kao osnova za dinamičku analizu. Postupak izvođenja jednačina može poslužiti kao putokaz za kreiranje drugih makroekonomskih modela za dinamičku analizu u budućim istraživanjima.

4. Aproksimacija („fitovanje”) realnih ekonomskih podataka neprekidnim funkcijama, tj. pretvaranje diskretnih u „neprekidne“ podatke takođe predstavlja značajan doprinos. Naime, na pomenuti način se bolje aproksimira ekonomska realnost. Dodatno, mogu se odrediti i vremenske međuvrijednosti ekonomskog sistema (npr. od početnih godišnjih podataka za BDP možemo pronaći kvartalne i/ili mjesečne podatke, i sl.). Uz pomoć neprekidnih funkcijskih zavisnosti, primijenjenih na ekonomske varijable, mogu se „proširiti” originalne vremenske serije u okviru početnog vremenskog intervala da bi se dobila egzaktna ekonometrijska aproksimacija (fitovanje) nelinearnih dinamičkih zavisnosti odnosno pripadajućih jednačina.

5. Ispitivanje eventualne pojave haosa i hiper-haosa u realnim ekonomskim sistemima putem analize jednačina međusobno zavisnih varijabli. Poslednje pomenuto je značajano iz razloga definisanja granica validnosti predikcije. Naime, pojava haosa (hiper-haosa) u modelu koji predstavlja realni ekonomski sistem ima najveći značaj u tome što nam pokazuje koliki je budući vremenski okvir pouzdanih predviđanja u sistemu. Iako bifurkacije koje dovode do haosa imaju svoju inherentno-matematičku vrijednost, iste imaju izuzetno malu vjerovatnoću događaja i održivost kada je u pitanju realni ekonomski sistem.

6. Ipak, može se reći da je najvažniji empirijski doprinos sugerisanje pravca kretanja ekonomskog sistema i pronalaženje optimalnih vrijednosti za ekonomske varijable u istom,

uz paralelnu analizu kretanja pojedinih činilaca početnih jednačina, sa ciljem da se odrede optimalne i/ili povoljnije postavke ekonomskih politika korištenjem TIM. NDS prate određeni tok, koji je definisan evolutivnim operatorima. Prostor stanja funkcijskih rješenja koja su zavisna od početnih uslova je beskonačan. Sistem će se kretati u određenom definisanom smjeru, zavisno od početnih uslova i ravnotežnih rješenja sistema. Primjenjujući navedeno, dobijene/očitane vrijednosti NDA analizom za ukupno raspoloživi lični dohodak ukazuju da se ravnoteža sistema za prvi period posmatranja dobijala pri većim vrijednostima raspoloživog dohotka od onih koje su bile u stvarnosti. Takođe, u drugom posmatranom periodu su bile niže (prema modelu) od realnih vrijednosti. Na taj način smo došli do saznanja da je vještački pomjerena disekvilibrirumska ravnoteža odlukom o ubacivanju značajne novčane mase u monetarni sistem EU. Sa druge strane, da bi sistem ostao u ravnoteži, za tako značajno i vještačko povećane iznosa dohotka u drugom posmatranom vremenskom periodu, potrebno bi bilo značajno više povećati poreze na bruto dohodak zaposlenih – vrlo nepopularna i praktično neizvodljiva mjera. Za one stanovnike EU koji nemaju relevantno značajan ukupni imetak, za finansiranje uvećane javne potrošnje povećanjem poreza, značilo bi dodatno smanjenje životnog standarda putem kanala smanjivanja bruto raspoloživog dohotka. Model jasno pokazuje kako i gdje se kreću ravnotežne vrijednosti pri kojima sistem ni teorijski ne bi došao u stanje ekonomske krize. Dodatno, posljednje rečeno nas upućuje na zaključak da negdje, relativno skoro – za par/nekoliko godina, EU prijeti ekonomska kriza[105], tj. cijelom njenom monetarnom i fiskalnom sistemu. Naravno, da do pomenute krize neće doći dokle god se vještačkim putem ubacuje novac u sistem, odnosno održava socijalna stabilnost. Međutim, ukoliko isti recimo prestane i real-ekonomija ne prati dovoljno brzo nastalu promjenu, može vrlo lako doći do neke vrste dužničke krize zbog pretjerano velikog javnog duga EU. Pored navedenog uticaja na raspoloživi dohodak, ukupan imetak i raspoloživu potrošnju, u radu se analizira kretanje ravnotežne štednje i likvidnosti EU stanovništva.

7. I na kraju, sa metodološkog aspekta, važno je pomenuti da je urađena komparacija rezultata dobijenih primjenom NDA i TD sa rezultatima dobijenim primjenom metoda vještačke inteligencije, konkretno neuronskih mreža. Komparacija je značajna jer ukazuje na

prednosti NDA u odnosu na metode vještačke inteligencije, tj. iste se ogledaju u mogućnostima dinamičke analize identifikovanja odstupanja realnih podataka od optimalnih (onih koji bi nas doveli do ravnotežnog položaja), kao i potencijalnog identifikovanja tačke u kojoj posmatrani sistem ulazi u stanje haosa.

Dodatno, pored gore nabrojanih, u ovom istraživanju postoje mnoge novine koje se odnose na operativni dio primjene i/ili obrade predmentih funkcija i jednačina. Navedeno je realizovano primjenom programskog paketa MATLAB. Dodatno, MATLAB zaista pomjera i ubrzava tempo naučnog istraživanja u svijetu – već decenijama, pa samim tim ubrzava i optimizuje istraživanje u ovom radu. Određene kalkulacije u okviru istraživanja nisu, i ne bi bile moguće za uraditi/riješiti samo deceniju ili deceniju ipo ranije. Navedeno govori koliki je naučni napredak ostvaren kod računarskih rješenja i primjene programskih paketa tipa MATLAB. Pored metodološkog, teorijskog i empirijskog značaja, disertacija ima i praktični značaj za kreiranje makroekonomskih politika EU. U skladu sa ranije pomenutom relativnom inercijom toka evolutivnih operatora modela, postoji velika vjerovatnoća da će vrijednosti određene modelom imati odstupanja u odnosu na realne vrijednosti sistema. Pomenuta odstupanja su bitna ne samo po vrijednosti, već i po dinamici promjene znaka. Navedeno nam pruža uvid da li treba ekonomske politike „ispraviti ka gore” ili „saviti ka dolje”, kada su u pitanju promjenjive koje se posmatraju. Posljednje pomenuto pomaže kreatorima ekonomskih politika EU pri donošenju odluke da li treba ići ka postepenom ili naglom povećanju odnosno smanjenju vrijednosti poreza na dohodak – u oblasti fiskalne politike, tj. da li je potrebno više trošiti u okviru javne potrošnje i uskladiti primanja sa stvarnim tokom ekonomije. Dodatno, postavlja se pitanje kakav je ukupni kvalitet života stanovništva i da li ga, i kako, treba korigovati na duži rok, pogotovo kada je u pitanju promjena ukupnog imetka koja može biti vrlo zabrinjavajuća, tj. kako će se pomenuto odraziti na raspoloživu ukupnu potrošnju, štednju i likvidnost stanovništva u cjelokupnoj ekonomiji. Sve gore navedeno predstavlja jedan suštinski povezan i zatvoren ekonomski tok, tako da neravnoteža samo u jednom njegovom dijelu uvijek ima reperkusije, u većoj ili manjoj mjeri, na gotovo sve ostale djelove i elemente sistema.

### 3. Teorija nelinearne dinamičke analize (NDA) i MATLAB NDA aplikacije

#### 3.1 Opšte teorijske postavke NDA

U ovom poglavlju je korišten dio materijala iz knjige Yuri A. Kuznetsov-a *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113], treće izdanje u ediciji Springer-Verlag, New York, 2004, kao i dio njegovih predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu *Primijenjene teorije bifurkacija* na Univerzitetu Twente, u gradu Enschede, Nizozemska. Svi povezani dokazi Teorema se mogu pronaći u [113].<sup>37</sup>

Prvobitno, termin „dinamički sistem” je označavao samo mehaničke sisteme u klasičnoj mehanici čije kretanje je opisivano diferencijalnim jednačinama. Početne rezultate u analizi takvih dinamičkih sistema su dobili Ljapunov i Poenkare na kraju devetnaestog vijeka.[172]

Njihove studije nastavili su Dulac (1923) i Birkhoff (1966), između ostalih. Knjige Nemickog i Stepanova (1949) i Coddington & Levinson (1955) sadrže detaljne elaboracije do tada poznatih svojstava dinamičkih sistema definisanih diferencijalnim jednačinama. Kasnije je postalo jasno da je predmetni pristup koristan za analizu različitih evolucionih procesa koji su proučavani u različitim granama nauke. Ti procesi se opisuje sa sistemima (N)ODJ i/ili PDJ, ili eksplicitno u vremenu definisanih diskretnih iteriranih mapa.

Savremeni period u razvoju teorije dinamičkih sistema započeo je radovima Kolmogorova (1957), Smalea (1963, 1966, 1967) i Anosova (1967). Opšti uvod u savremenu teoriju dinamičkih sistema sublimativno može se naći u Katok & Hasselblatt (1995) i Hasselblatt & Katok (2003). Difeomorfizam potkovice koji je otkrio i izučavao Smale (1963 [179], 1967) tretira se u mnogim knjigama; na primjer, u Nitecki (1971), Guckenheimer & Holmes (1983), Viggins (1990) i Arrovsmith & Place (1990). Međutim, najbolja prezentacija pomenute i srodnih tema još uvek se pripisuje Moser (1973). Mapa Henona (1976) je

---

<sup>37</sup> Nekoliko vrlo značajnih knjiga na predmetnu temu je korišteno i navedeno u literaturi.

prepoznata kao najjednostavnija mapa sa neobičnim atraktorom. Henonova mapa je vjerovatno najbolje proučena planarna mapa sa komplikovanom dinamikom.

Opšta svojstva običnih diferencijalnih jednačina i njihov odnos prema dinamičkim sistemima su predstavljeni u knjizi Nemickog i Stepanova, a posebno u tekstovima Pontrijagina (1962), Arnolda (1973) i Hirša i Smejla (1974). Poslednje tri knjige sadrže sveobuhvatnu analizu linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim i vremenski zavisnim koeficijentima. Knjiga Hartmana (1964) tretira odnos između Poenkareovih mapa, množitelja i stabilnosti graničnih ciklusa. Proučavanje beskonačno-dimenzijskih dinamičkih sistema je stimulirano u oblastima hidrodinamike, aerodinamike i hemijskim odnosno nuklearnim inženjeringom.

Linearni beskonačno-dimenzijski dinamički sistemi, poznati su i kao „kontinualne (analitičke) polugrupe”, i proučavaju se u funkcionalnoj analizi (vidjeti, npr., Hille & Phillips (1957), Balakrishnan (1976), ili više fizički orijentisani radovi Richtmiera (1978, 1981). Beskonačno-dimenzijski sistemi nastaju prirodno pri proučavanju diferencijalnih jednačina sa uvedenim zakašnjenjima (vidi Hale (1971), Hale & Verduin Lunel (1993) i Diekmann, van Gils, Verduin Lunel & Valther (1995). Međutim, posljednje pomenuto neće biti korišteno ovom radu. Teorija nelinearnih beskonačno-dimenzijskih sistema je oblast koja se brzo razvija. Rani rezultati su predstavljeni u relevantnim poglavljima knjiga Marsden & McCracken (1976), Carr (1981) i Henri (1981). Savremeni tretmani i dalje reference mogu se naći u knjigama Temam (1997) i Robinson (2001).

Pojam *dinamičkog sistema* (DS) je matematička formalizacija opšteg naučnog koncepta *determinističkog procesa* [113]. DS obuhvata skup mogućih stanja (*prostor stanja*) zajedno sa *zakonom evolucije/promjene stanja* (evolucioni operator) u vremenu. DS mogu biti nezavisni od vremena, pa ih nazivamo *autonomni DS*, ili suprotno kada su DS zavisni od vremena nazivamo ih *neautonomni DS*. Sva moguća stanja sistema karakterišu tačke nekog skupa  $X$ . Ovaj skup se naziva *prostor stanja sistema* (*PSS*) ili najčešće samo skraćeno *prostor stanja* (*PS*).

Specifikacija tačke  $x \in X$  mora biti dovoljna, ne samo da opiše trenutnu „poziciju” sistema, već i da odredi njegovu evoluciju. Različite grane nauke imaju svoj specifični prostor stanja. Često se prostor stanja naziva *fazni prostor*, prateći tradiciju naziva iz klasične mehanike. Ponekad je korisno identifikovati *sekvence* koje se razlikuju samo po pomjeranju početne tačke. Takve sekvence su potpuno *ekvivalentne*. Klase ekvivalentnih nizova čine skup koji ćemo označiti sa  $\Omega$ . Prostori stanja imaju određenu ordinarno-kardinalnu strukturu, koja omogućava poređenje između različitih PS. Udaljenost  $\rho$  između dva stanja je definisana, čineći ove skupove zapravo *metričkim prostorima*. *Euklidska norma* se može koristiti za mjerenje udaljenosti između dva parametarizovana stanja u tačkama  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , naime  $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ , gdje  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  predstavlja standardni skalarni proizvod u  $\mathbb{R}^n$ , odnosno  $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Ponekad, rastojanje između dvije tačke na manifoldu<sup>38</sup> može biti mjereno kao minimalna dužina krive koja povezuje dvije posmatrane tačke u okviru manifolda. Postoji niz mogućih rastojanja, u zavisnosti od *glatkosti (diferencijabilnosti)* funkcija. Dodatno, možemo uvesti rastojanje između dvije neprekidne vektorske funkcije realnog argumenta  $u(x)$  i  $v(x)$  definisane u ograničenom i izolovanom domenu  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  kao  $\rho(u, v) = \|u - v\| = \max_{i=1, \dots, n} \sup_{x \in \Omega} |u_i(x) - v_i(x)|$ . Koristeći prethodno definisana svojstva rastojanja, definisani prostori stanja  $X$  su *potpuni metrički prostori*. Navedeno znači da bilo koji niz stanja iz prostora stanja, čiji su elementi odvojeni arbitrarno malom vrijednošću, konvergira (prostor nema „rupe”). Prema dimenziji prostora stanja  $X$ , dinamički sistem se naziva konačan ili beskonačno-dimenzionalan DS. Razlikuju se konačno-dimenzionalni sistemi definisani za  $x \in \mathbb{R}^n$ , od DS definisanih na manifoldima.

Glavna komponenta DS je zakon evolucije koji određuje stanje  $x_t$  sistema u trenutku  $t$ , pod uslovom da je *početno stanje*  $x_0$  poznato. Najopštiji način da se specifikira evolucija je ako pretpostavimo da je za dato  $t \in T$  mapa  $\phi^t$  definisana u prostoru stanja  $X$ ,  $\phi^t: X \rightarrow X$ , koja

<sup>38</sup> Pojam manifolda – koji je izvorno riječ engleskog porijekla, je složeniji i kompleksniji od jednoznačnog pojma „površ” ili „površina” na našem jeziku. Naime, za 1D sisteme manifold je tačka, dok je za 2D sisteme u pitanju prava ili kriva linija, te za 3D sisteme predstavlja površ, i na kraju za n-dimenzionalne sisteme imamo kombinacije površi i presjeka površi, tj. određene oblike više-dimenzionalnih „volumena” i sl. Iz navedenih razloga, ćemo koristiti termin *manifold*, umjesto termina površ/površina, jer isti bolje i vjerodostojnije odgovara matematičkim zakonitostima.

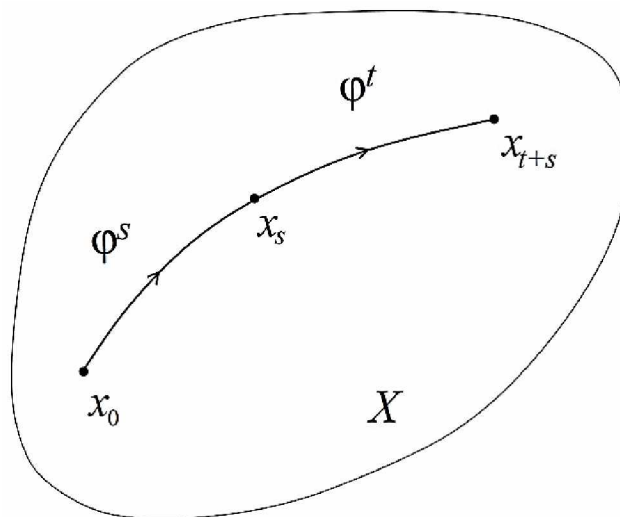
transformiše početno stanje  $x_0 \in X$  u neko stanje  $x_t \in X$  u trenutku  $t$ , tj.  $x_t = \varphi^t x_0$ . Mapa  $\varphi^t$  se često naziva *evolutivnim operatorom (EO)* DS. EO može biti eksplicitno poznat, međutim u većini slučajeva isti je definisan indirektno, odnosno može se samo približno izračunati. U slučajevima neprekidnog (kontinualnog) vremena, familija EO  $\{\varphi^t\}_{t \in T}$  se naziva *tok* (engl. *flow*).

Bitno je napomenuti da  $\varphi^t x$  ne mora biti definisano za sve uređene parove  $(x, t) \in X \times T$ . DS sa EO  $\varphi^t$  definisanim za  $t \geq 0$  i za  $t < 0$  se naziva *invertibilnim*. U pomenutim sistemima početno stanje  $x_0$  ne definiše samo buduća stanja, već i prošla stanja sistema. Korisno je razmotriti i DS čije je buduće ponašanje za  $t > 0$  potpuno određeno njihovim početnim stanjem  $x_0$  za  $t = 0$ . Međutim, kretanja za  $t < 0$  se ne mogu nedvosmisleno rekonstruisati. Takvi (*neinvertibilni*) DS su opisani EO definisanim samo za  $t \geq 0$  (npr., za  $t \in \mathbb{R}_+^1$  ili  $\mathbb{Z}_+$ ). U slučaju neprekidnog (kontinualnog) vremena, nazivaju se *polu-protoci* (*semiflows*). Takođe moguće je da  $\varphi^t x_0$  je definisan samo na lokalnom intervalu u vremenu, npr. za  $0 \leq t < t_0$ , gde  $t_0$  zavisi od  $x_0 \in X$ . Pomenuto definiše *lokalno* ponašanje sistema, i suprotno je od *globalnog*. Navedeno je evidentno kod takozvanog „eksplozivnog” ponašanje sistema, odnosno kada kontinualni sistem u konačnom vremenu za  $X = \mathbb{R}^n$  teži ka beskonačnosti, kao što je to slučaj kod  $\|\varphi^t x_0\| \rightarrow +\infty$ , kada  $t \rightarrow t_0$ .

EO imaju dva svojstva koja naročito odražavaju deterministički karakter ponašanja DS. Prvo svojstvo EO je **(DS.O)**  $\varphi^0 = id$  gdje *id* predstavlja *mapu identiteta* nad  $X$ , tj.  $id(x) = x \forall x \in X$ . Svojstvo (DS.O) implicira da sistem ne mijenja svoje stanje „spontano”.

Drugo svojstvo EO **(DS.I)** je da važi  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ , odnosno to znači da  $\varphi^{t+s} x = \varphi^t(\varphi^s x) \forall x \in X \wedge t, s \in T$  tako da su obje strane posljednje jednačine definisane. Svojstvo (DS.I) navodi da je rezultat evolucije sistema u toku  $t + s$  jedinica vremena, počevši od tačke  $x \in X$ , istovjetan kao da je sistem prvo promijenio stanje iz stanja  $x$  tokom  $s$  jedinica vremena, a zatim evoluirao tokom sledećih  $t$  jedinica vremena do rezultirajućeg stanja  $\varphi^s x$  (slika 2). Ovo svojstvo znači da zakon kojim se uređuje ponašanje sistema (EO) ne mijenja se u vremenu: sistem je „autonoman”.





Slika 2. Evolucionni operator

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Za invertibilne sisteme, EO  $\varphi^t$  zadovoljava svojstvo (DS.1) za negativne i pozitivne vrijednosti  $t$  i  $s$ . U pomenutim sistemima operator  $\varphi^{-t}$  je inverzan operatoru  $\varphi^t$ , odnosno jednak je  $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$  pošto je  $\varphi^{-t} \circ \varphi^t = id$ .

DS u diskretnom vremenu sa cjelobrojnim  $t$  je u potpunosti definisana samo sa jednom formulacijom mape  $f = \varphi^1$ , i obično se naziva „mapa početnog vremena” (engl. „time-one map”). Koristeći (DS.1) dobijamo  $\varphi^2 = \varphi^1 \circ \varphi^1 = f \circ f = f^2$ , gdje je  $f^2$  druga iteracija mape  $f$ . Slično, važio i da je  $\varphi^k = f^k$ ,  $\forall k > 0$ . Ukoliko je mapa u diskretnom vremenu invertibilna prethodna relacija važi i za  $k \leq 0$  tamo gdje je zadovoljeno  $f^0 = id$ . Jednačine koje su rekursivne i diskretne u vremenu nazivamo još i diferencnim jednačinama.

Bitno je istaknuti da je, za mnoge sisteme,  $\varphi^t x$  kontinualna funkcija za  $x \in X$ , a ako je zadovoljeno da je  $t \in \mathbb{R}^1$ , dodatno, funkcija je kontinualna i u vremenu. Kontinualnost (neprekidnost) treba definisati u odnosu na odgovarajuću metriku ili normu u  $X$ . Štoviše, mnogi sistemi definisani na  $\mathbb{R}^n$ , ili na glatkim manifoldima u  $\mathbb{R}^n$ , su takvi da je  $\varphi^t x$  glatka kao funkcija nad  $(x, t)$ . Takvi sistemi se nazivaju *glatki dinamički sistemi* (GDS).

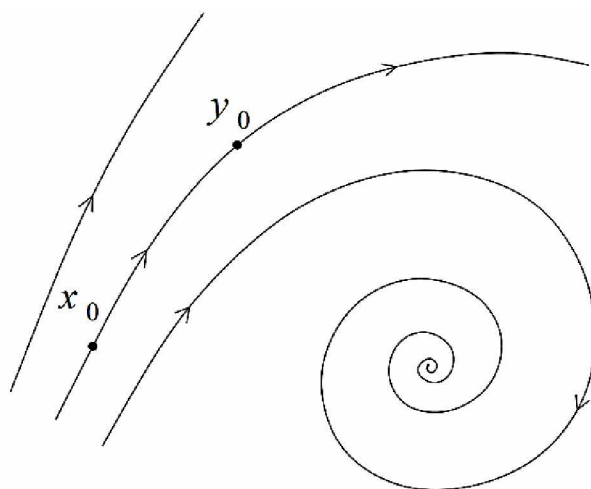


**Definicija 1 (D1)** *Dinamički sistem je uređena trojka  $\{T, X, \phi^t\}$ , gde je  $T$  vremenski skup,  $X$  je prostor stanja, a  $\phi^t: X \rightarrow X$  je familija evolucionih operatora parametrizovanih sa  $t \in T$ , i koji zadovoljavaju svojstva (DS.0) i (DS.1).*

Osnovni geometrijski objekti povezani sa dinamičkim sistemom  $\{T, X, \phi^t\}$  su njegove orbite u prostoru stanja i *fazni portret* sastavljeni od ovih orbita.

**Definicija 2 (D2)** *Orbita koja počinje u  $x_0$  je uređeni podskup prostora stanja  $X$ ,  $Or(x_0) = \{x \in X : x = \phi^t x_0, \forall t \in T \text{ takvo da je } \phi^t x_0 \text{ definisano (odnosno postoji)}\}$ .*

Orbite sistema u kontinuiranom vremenu sa kontinualnim EO su *krive* u prostoru stanja  $X$  parametrizovane vremenom  $t$  i orjentisane ka smjeru povećanja vremena (slika 3).



Slika 3. Orbite kontinualnog u vremenu DS

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Orbite sistema u diskretnom vremenu su nizovi tačaka u prostoru stanja  $X$  koje se označavaju i nabrajaju rastućim cijelim brojevima. Orbite se često nazivaju *trajektorije*. Ako je  $y_0 = \phi^{t_0} x_0$  za neku vrijednosti  $t_0$ , skupovi  $Or(x_0)$  i  $Or(y_0)$  se poklapaju. Najjednostavnije orbite su *ravnotežni položaji* ili *ekvilibrjumi* DS.

**Definicija 3 (D3)** Tačka  $x_0 \in X$  naziva se *ravnotežna ili ekvilibrirumska tačka (fiksna tačka)* ako je  $\varphi^t x_0 = x_0 \quad \forall t \in T$ .

**Definicija 4 (D4)** *Ciklus (engl. cycle (C))* je *periodična orbita, odnosno neravnotežna orbita*  $L_0$ , takva da svaka tačka  $x_0 \in L_0$  zadovoljava  $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$  za neko  $T_0 > 0$ , za  $\forall t \in T$ .

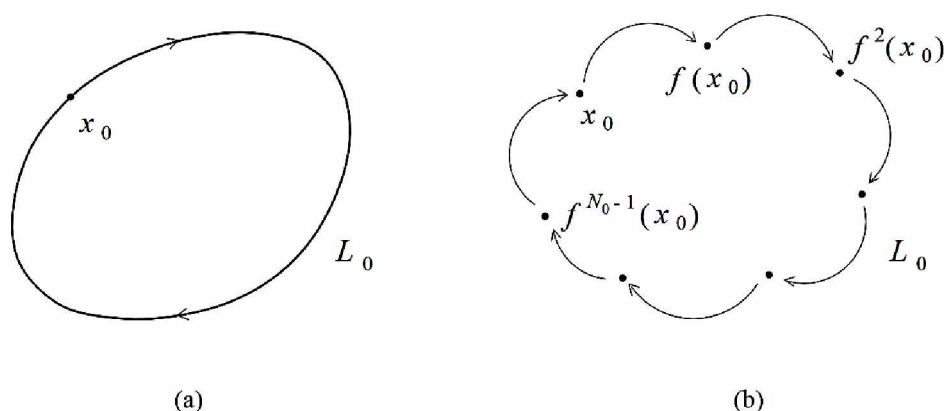
Minimalno  $T_0$  sa ovim svojstvom se naziva *period* ciklusa  $L_0$ . Ako sistem započne svoju evoluciju u tački  $x_0$  ciklusa, on će se vratiti tačno do ove tačke nakon svakih  $T_0$  jedinica vremena. Tada kažemo da sistem pokazuje *periodične oscilacije*. U slučaju neprekidnog vremena, ciklus  $L_0$  je zatvorena kriva (slika 4. (a)).

U slučaju diskretnog vremena *ciklus* ili *periodična orbita* je (konačan) skup tačaka  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{N_0}(x_0) = x_0$ , gde je  $f = \varphi^1$ , i period  $T_0 = N_0$  je cijeli broj (slika 4. (b)). Primjećuje se da je svaka tačka ovog skupa *fiksna tačka*  $N_0$ -ta iteracija  $f^{N_0}$  mape  $f$ .

**Definicija 5 (D5)** *Ciklus dinamičkog sistema u kontinuiranom vremenu u čijoj okolini nema drugih ciklusa, naziva se granični ciklus (engl. Limit Cycle (LC))*.

Sve moguće orbite u DS možemo grubo klasifikovati na: *fiksne tačke, cikluse* i „sve ostale”.

**Definicija 6 (D6)** *Fazni portret dinamičkog sistema je particionisanje prostora stanja u orbite*.



Slika 4. Periodične orbite DS: (a) u kontinualnom vremenu, (b) u diskretnom vremenu.

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

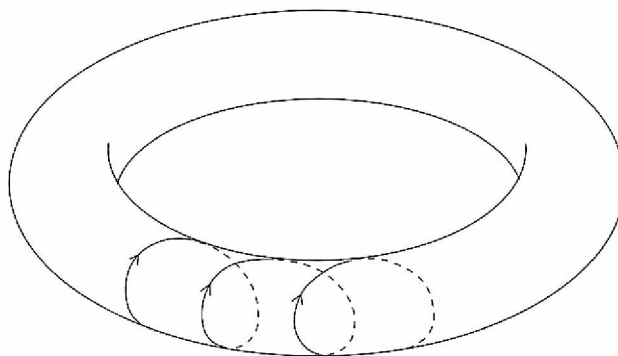
*Fazni portret* sadrži dosta informacija o ponašanju DS. Posmatrajući fazne portrete, možemo odrediti broj i vrste *asimptotskih stanja* kojima sistem teži kada  $t \rightarrow +\infty$  (jednako tako i kada  $t \rightarrow -\infty$  ako je sistem invertibilan). Naravno, nemoguće je nacrtati i prikazati sve orbite na slici faznog portreta. U praksi, prikazujemo samo nekoliko ključnih orbita na dijagramima kako bi prikazali fazne portrete šematski (kao što je to urađeno na Slici 3). Fazni portret dinamičkog sistema u kontinuiranom vremenu može se interpretirati kao tok neke tečnosti, gdje orbite pokazuju putanje „čestica tečnosti” dok prate strujni tok. Ova analogija objašnjava upotrebu termina „tok” za evolucione operatore u slučajevima neprekidnog (kontinualnog) vremena.

**Definicija 7 (D7)** *Invarijantni skup dinamičkog sistema  $\{T, X, \phi\}$  je podskup  $S \subset X$  takav da za  $x_0 \in S$  implicira  $\phi^t x_0 \in S$  za  $\forall t \in T$ .*

Definicija znači da je  $\phi^t S \subseteq S$  za svako  $t \in T$ . Invarijantni skup  $S$  se sastoji od orbita DS. Bilo koja pojedinačna orbita  $Or(x_0)$  je invarijantni skup. Uvijek možemo ograničiti EO  $\phi^t$  sistema na njegov invarijantni skup  $S$ , i onda razmatrati DS  $\{T, S, \psi^t\}$ , gde je  $\psi^t : S \rightarrow S$  mapa indukovana sa  $\phi^t$  u  $S$ . Uбудуće, koristićemo simbol  $\phi^t$  za ograničenje, umesto  $\psi^t$ .

Ukoliko prostor stanja  $X$  inherentno posjeduje metriku  $\rho$ , tada možemo razmatrati *zatvorene invarijantne skupove* u  $X$ . Ekvilibrijumi (ravnotežne ili fiksne tačke) i ciklusi, su najjednostavniji primjeri zatvorenih invarijantnih skupova. Postoje i druge vrste zatvorenih invarijantnih skupova. Slijedeći složeniji skupovi su *invarijantni manifoldi*, tj. konačno-dimenzione hiperpovršine u nekom prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Na primjer, slika 5. prikazuje invarijantni dvodimenzioni *torus* u  $\mathbb{T}^2$  kontinualnog u vremenu dinamičkog sistema u  $\mathbb{R}^3$ , i tipičnu orbitu na tom manifoldu. Jedno od najvećih otkrića u teoriji dinamičkih sistema jeste da vrlo jednostavan, inverzibilan i diferencijabilan dinamički sistemi, može imati izuzetno složene zatvorene invarijantne skupove koji sadrže beskonačan broj periodičnih i neperiodičnih orbita. Steve Smale je konstruisao najpoznatiji primjer takvog sistema poznat kao „Smejlova potkovica” (engl. Smale horseshoe). Smale prikazuje u ravni invertibilni dinamički sistem u diskretnom vremenu koji sadrži invarijantni skup  $A$ , čije tačke su u surjektivno-injektivnoj

korespondenciji sa svim dualno-beskonačnim nizovima dva korištena simbola.<sup>39</sup> U  $\mathbb{T}^2$  imamo infinitezimalno razdvajanje orbita koje se nikada ne presijecaju i nastavljaju svoju evoluciju unutar početnog domena. Ekvivalentnu mapu je uveo Henon [113] kao najjednostavniju mapu sa „slučajnom dinamikom”. Analizom Ksenonove Mape (engl. Henon map) dolazimo do sličnih zaključaka prethodnim.



Slika 5. Invarijantni Torus ( $\mathbb{T}^2$ )

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Za predstavljanje asimptotskog stanja dinamičkog sistema, invarijantni skup  $S_0$  mora biti stabilan; drugim riječima, trebalo bi da „privlači” orbite koje su u blizini. Pretpostavimo da imamo dinamički sistem  $\{T, X, \varphi^t\}$  nad potpunim metričkim skupom prostora stanja  $X$ . Neka je  $S_0$  zatvoren invarijantni skup.

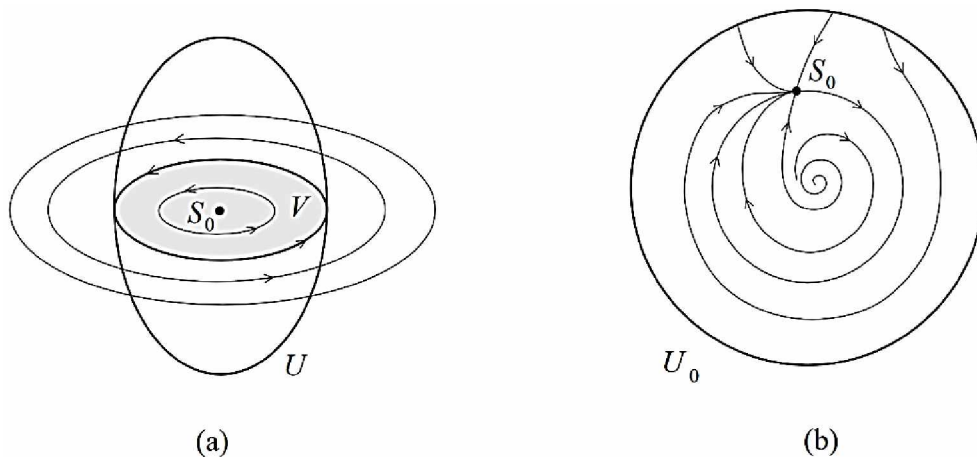
**Definicija 8 (D8)** *Invarijantni skup  $S_0$  naziva se stabilnim ako (i) za bilo koju dovoljno malu okolinu skupa  $U \supset S_0$  postoji okolina  $V \supset S_0$  takva da je  $\varphi^t \in U$  za  $\forall k \in V \wedge \forall t > 0$ ; (ii) postoji okolina skupa  $U_0 \supset S_0$  takva da je  $\varphi^t \rightarrow S_0$  za  $\forall k \in U_0$ , pri  $t \rightarrow +\infty$ .*

Ako je  $S_0$  ravnotežna tačka ili ciklus, prethodna definicija se pretvara u standardnu definiciju stabilnih ravnotežnih tačaka ili ciklusa. Svojstvo (i) definicije se zove *stabilnost po Ljapunovu*. Posljedično, ako je skup  $S_0$  stabilan po Ljapunovu, obližnje orbite ne

<sup>39</sup> Za detalje vidjeti: Stephen Smale. Diffeomorphism with many periodic points. In S. S. Cairns, editor, *Differential and Combinatorial Topology*, pages 63–80. Princeton University Press, 1963.

napuštaju njegovo okolinu. Dok, svojstvo (ii) se ponekad naziva *asimptotska snost*. Postoje invarijantni skupovi koji su stabilni po Ljapunovu, ali ne i asimptotski stabilni (slika 6. (a)). Nasuprot tome, postoje invarijantni skupovi koji „privlače” orbite, ali nisu stabilni po Ljapunovu, pošto neke orbite koje nastaju u blizu  $S_0$  na kraju se približe  $S_0$ , ali tek nakon što su „izašle” iz okoline ovog skupa (slika 6. (b)).

Ako je  $x^0$  fiksna tačka konačno-dimenzionog, glatkog, diskretnog u vremenu dinamičkog sistema, onda se mogu formulisati dovoljni uslovi za njegovu stabilnost ispitivanjem Jakobijanske matrice ocijenjene (evaluirane) u tački  $x^0$ .



Slika 6. (a) Stabilnost po Ljapunovu (b) Asimptotska stabilnost

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

**Teorema 1 (T1)** Razmotrimo diskretan u vremenu dinamički sistem  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , gdje je  $f$  glatka mapa. Pretpostavimo da ima fiksnu tačku  $x^0$ , naime  $f(x^0) = x^0$ , i označimo sa  $A$  Jakobijansku matricu od  $f(x)$  ocijenjenu u  $x^0$ , odnosno važi da je  $A = f'(x^0)$ . Tada, kažemo da je fiksna tačka stabilna ako sve sopstvene vrijednosti  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  od  $A$  zadovoljavaju  $|\mu| < 1$ .

Podsjetimo, da su sopstvene vrijednosti u ovom slučaju, zapravo korjeni (nule) jednačine koju nazivamo *karakteristična jednačina*:  $\det(A - \mu I_n) = 0$ , gdje je  $I_n$  predstavlja jediničnu matricu reda  $n \times n$ .

Sopstvene vrijednosti fiksne tačke se obično nazivaju *množitelji*. U linearnim slučajevima T1 je očigledna iz Jordanove normalne forme. T1 se primenjuje na  $N_0$ -tu iteraciju  $f^{N_0}$  mape  $f$  u bilo kojoj tački periodične orbite, što daje i dovoljan uslov za stabilnost  $N_0$ -og ciklusa.

**Teorema 2 (T2) (Princip kontrakcije preslikavanja)** *Neka je  $X$  kompletan metrički prostor definisan normom  $\rho$ . Pretpostavimo da postoji kontinualno preslikavanje  $f: X \rightarrow X$  koje zadovoljava, za  $\forall x, y \in X$ ,  $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ , gdje je  $0 < \lambda < 1$ . Tada dinamički sistem u diskretnom vremenu  $\{Z^+, X, f^k\}$  ima stabilnu fiksnu tačku  $x^0 \in X$ .*

*Štoviše,  $f^k(x) \rightarrow x^0$  kada  $k \rightarrow +\infty$  za  $\forall x \in X$ .*

Pomenućemo, da T1 predstavlja fundamentalnu teoremu. Dalja prezentacija i analiza u vremenu diskretnih sistema ovdje neće biti prezentovana, jer se u tezi isključivo razmatraju neprekidne funkcije. Bitno je istaći da invarijantni skup  $A$  Smejlove potkovice nije stabilan. Međutim, postoje slični invarijantni fraktalni skupovi koji su stabilni. Posljednje pomenuti objekti, se nazivaju *neobičnim atraktorima* (engl. *Strange Attractors*).

Najčešći način za definisanje dinamičkog sistema u kontinuiranom vremenu je *diferencijalnim jednačinama* (DJ). Pretpostavimo da prostor stanja sistema  $X = \mathbb{R}^n$  ima koordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ako je sistem definisan na manifoldu, predstavljene koordinate se mogu smatrati lokalnim koordinatama. Vrlo često zakon evolucije sistema je dat implicitno,  $\dot{x}_i^{40} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , gdje  $i = 1, 2, \dots, n$ , ili u obliku vektorske jednačine  $\dot{x} = f(x)$ , pri čemu se pretpostavlja da je funkcija vektorskog argumenta  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  *dovoljno diferencijabilna (glatka)*<sup>41</sup>. Funkciju  $f(x)$  nazivamo *vektorsko polje* pošto dodjeljuje svakoj tački  $x$  vektor  $f(x)$ .

---

<sup>40</sup> Tačka iznad varijabli označava izvod (diferencijal) u vremenu te predmetne varijable, npr.  $\dot{x}$  ili  $\dot{y}$  su takve oznake.

<sup>41</sup> Za funkciju postoje izvodi višeg reda od prvog, odnosno sve do određenog reda  $n$ .

Jednačina  $\dot{x} = f(x)$  predstavlja sistem od  $n$  autonomnih običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, ili skraćeno SAODJPR, koje su samo jedan od podskupova SODJPR.

**Teorema 3 (T3) (Postojanje, jedinstvenost i glatka zavisnost, rješenja SODJPR)**

Posmatrajmo sistem običnih diferencijalnih jednačina  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , gde je  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatka na otvorenom domenu  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Tada postoji jednoznačna funkcija  $x = x(t, x_0)$ , gdje  $x: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , koja je glatka na  $(t, x)$ , i zadovoljava za  $\forall x_0 \in U$  sljedeće uslove: (i)  $x(0, x_0) = x_0$ ; (ii) postoji interval  $J = (-\delta_1, \delta_2)$ , gde je  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$ , takav da za  $\forall t \in J$ ,  $y(t) = x(t, x_0) \in U$ , važi da je  $\dot{y}(t) = f(y(t))$ .

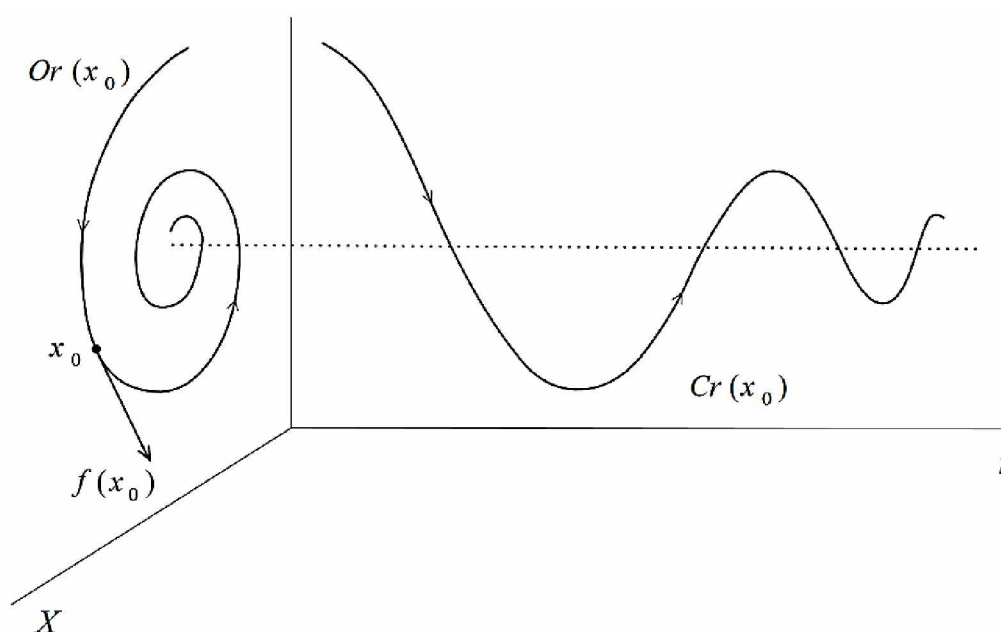
Stepen glatkoće  $x(t, x_0)$  u odnosu na  $x_0$ , u T3, je isti kao što je to slučaj sa  $f$  u odnosu na  $x$ . Funkcija  $x = x(t, x_0)$ , kao funkcija vremena  $t$ , naziva se *rješenje sa početnim uslovom*  $x_0$ . Navedeno definiše, za  $\forall x_0 \in U$ , dva fundamentalna objekta dinamičkih sistema: 1) *krivu rješenja*  $Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ ; i 2) *orbitu*, koja je projekcija  $Cr(x_0)$  na prostor stanja,  $Or(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^n$ . (slika 7). Obje krive su parametrizovane vremenom  $t$  i orijentisane su u smjeru napredovanja vremena ( $t \rightarrow +\infty$ ). Nenulti vektor  $f(x_0)$  je tangentan na orbitu  $Or(x_0)$  u  $x_0$ . Postoji *jedinstvena orbita* koja prolazi kroz tačku  $x_0 \in U$ .

Pod uslovima T3, orbita ili napušta  $U$  na  $t = -\delta_1$  (i/ili  $t = \delta_2$ ), ili ostaje u  $U$  zauvijek; u posljednjem slučaju smatramo da  $J = (-\infty, +\infty)$ .

Sada možemo definisati evolucioni operator  $\varphi^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  formulom  $\varphi^t x_0 = x(t, x_0)$  koji dodjeljuje tački  $x_0$  tačku na orbiti koja prolazi kroz  $x_0$  kasnije nakon  $t$  vremenskih jedinica. Očigledno,  $\{\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$  je dinamički sistem u kontinualnom vremenu. Dodatno, pomenuti sistem je *inverzibilan*. Svaki evolucioni operator  $\varphi^t$  je definisan za  $x \in U$  i  $t \in J$ , gde  $J$  zavisi od  $x_0$  i glatko je po  $x$ .

Evolucioni operator  $\varphi^t$  koji odgovara glatkom sistemu ODJ može se numerički izračunati u fiksnim vremenskim intervalima sa određenom tačnošću. Za pomenuto se može koristiti jedan od standardnih metoda za rješavanje ODJ.

Jedan od glavnih zadataka teorije dinamičkih sistema (TDS) je analiza ponašanja SODJPR. Naravno, moguće je pokušati riješiti SODJPR primjenom „grube sile” (engl. brute force), tj. numerički izračunavajući jako mnogo pripadajućih orbita. Međutim, najkorisniji aspekt TDS je da možemo predvidjeti i analizirati neke karakteristike faznog portreta SODJPR *bez* stvarnog rješavanja sistema. Najjednostavniji primjer pomenutog, jeste određivanje broja i pozicija ravnotežnih (ekvilibrijumskih) vrijednosti, koje samim tim određuju i vrstu kojoj pripadaju u okviru NDA. Uistinu, nule vektorskog polja predstavljenog kao  $\dot{x} = f(x)$  zapravo definiše vrijednost njihove desne strane jednačine, odnosno kada izjednačimo izraz na desnoj strani sa nulom  $f(x) = 0$ , te dobijeni rezultat su rješenja SODJPR.



Slika 7. Kriva rješenja i Orbita

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

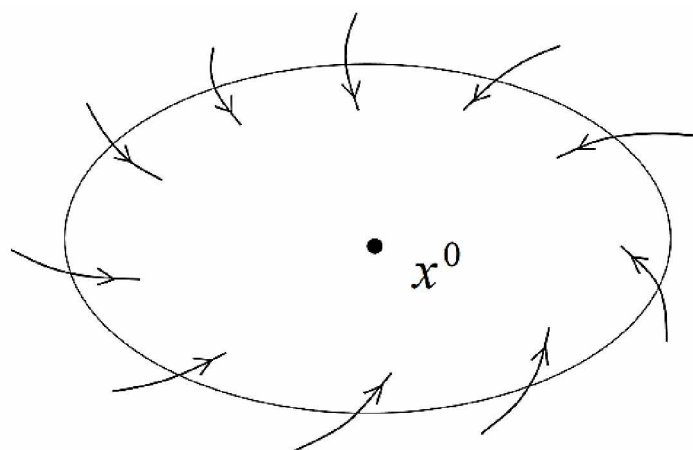
Posljedično, za invarijantne manifolde važi da je vrijednost funkcije u datoj tački jednaka evolucionom operatoru u toj tački, odnosno početnoj vrednosti tačke u konkretnom



(posmatranom) trenutku vremena, te navedeno notiramo kao  $f(x^0)$  važi  $\varphi^t x_0 = x_0$  za  $\forall t \in \mathbb{R}^1$ . Stabilnost nekog ravnotežnog položaja (u daljem tekstu: ekvilibrijum) se može otkriti i bez rješavanja sistema. Dovoljni uslovi da ravnoteža  $x_0$  bude stabilna, su obezbijeđeni sljedećom klasičnom teoremom ruskog matematičara Aleksandra Mihajloviča Ljapunova (Jaroslavlj, 6. Juna 1857. – Odesa, 3. Novembra 1918.).

**Teorema 4 (T4) (Ljapunov (1892))**

Posmatrajmo dinamički sistem definisan sa  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , gde je  $f$  glatka funkcija. Pretpostavimo da postoji ekvilibrijum u  $x_0$  (odnosno  $f(x_0) = 0$ ), i sa  $A$  označimo evaluiranu Jakobijansku matricu  $f(x)$  u ekvilibrijumu,  $A = f_x(x^0)$ . Tada kažemo da je  $x_0$  stabilno ako sve sopstvene vrijednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  od  $A$  zadovoljavaju da je  $\text{Re}\{\lambda\} < 0$ .



Slika 8. Ljapunova funkcija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Teorema se lako može dokazati za linearni sistem tipa  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , sa eksplicitnim rješenjem iste u bazi vektorskog prostora, gdje matrica  $A$  ima Žordanov normalni oblik (engl. Jordan normal form). Kada je u pitanju opšto rešenje nelinearnog sistema, ono postaje moguće konstrukcijom *Ljapunovljeve funkcije*  $L(x)$  u okolini ravnoteže. Tačnije, pomijeranjem koordinata, možemo postaviti ekvilibrijum u koordinatnom početku  $x_0 = 0$  i pronaći njegovu odgovarajuću kvadratnu formu  $L(x)$  čija arbitrarno i dovoljno mala odabrana

*linija nivoa*<sup>42</sup> (engl. *Levels curves*)  $L(x) = L_0$  u blizini ekvilibrijuma sadrži vektore vektorskog polja koji jednoznačno uviru unutar površine (slika 8).

U suštini Ljapunova funkcija  $L(k)$  je ista za linerane i nelinearne sisteme i u potpunosti je definisana Jakobijanskom matricom  $A$ . Nažalost, u opštem slučaju i posmatrajući samo desnu stranu  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , ne možemo reći da li sistem ima cikluse (periodična rješenja).

Ukoliko sistem sadrži glatki invarijantni manifold  $M$ , onda njegovo glavno (definišuće) vektorsko polje  $f(x)$  je *tangencijalno* na  $M$  u svakoj tački  $x \in M$ , i gdje je  $f(x) \neq 0$ . Za  $(n - 1)$  dimenzioni glatki manifold  $M \subset \mathbb{R}^n$ , koji je lokalno definisan sa  $g(x) = 0$  za neku skalarnu funkciju  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , invarijantnost znači  $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle = 0$ . Ovdje  $\nabla g(x)$  označava *gradijent*<sup>43</sup>, koji određujemo kao  $\nabla g(x) = (\partial g(x)/\partial x_1, \partial g(x)/\partial x_2, \dots, \partial g(x)/\partial x_n)^T$ , i ortogonalan je na  $M$  u tački  $x$ .

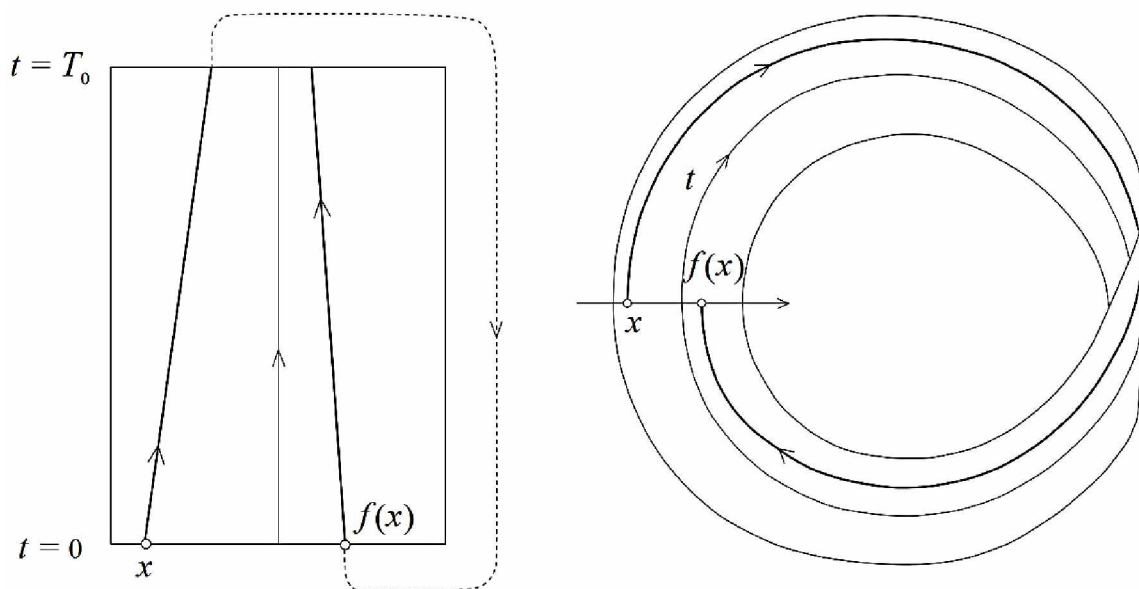
Postoje slučajevi kada se pojavljuju diskretni dinamički sistemi u vremenu (mape) pri proučavanju kontinualnih dinamičkih sistema. Uvođenje pomenutih mapa nam omogućava da određene rezultate i zaključke primijenimo u domen diferencijalnih jednačina. Pomenuta metodologija je posebno efikasna ukoliko je rezultujuća mapa definisana u niže-dimenzionom prostoru od originalnog, odnosno početnog SODJPR. Mape koje proizilaze iz ODJ-a zvaćemo Poenkareovim mapama (engl. *Poincaré maps*). Transformacije SODJPR u diskretne mape nećemo detaljnije elaborirati. Za detalje se može pogledati [113].

<sup>42</sup> Linija nivoa se definiše, za funkciju  $w = f(x, y, z) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , kao vrijednosti  $c$  nad  $S$  u  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  gdje je  $f(S) = c$ .

<sup>43</sup> U oblasti vektorske analize, gradijent skalarno-diferencijabilne funkcije  $f$ , koja zavisi od više promenljivih, predstavlja vektorsko polje  $\nabla f$  i izgovara se „nabla  $f$ “. U određenoj tački, označenoj sa  $m$ , pomenuti gradijentni vektor pruža informacije o smjeru i brzini *najbržeg rasta funkcije*. Kada je gradijent funkcije u određenoj tački  $m$  različit od nule, to znači da funkcija najbrže raste iz te tačke u smjeru gradijenta pri čemu magnituda gradijenta ukazuje na brzinu rasta duž te putanje, što je ujedno i maksimalna moguća apsolutno-direkciona derivacija. Dodatno, tačka u kojoj je gradijent jednak nultom vektoru naziva se *stacionarna tačka*. Gradijent, npr. neke multivarijabilne funkcije  $g$  koja zavisi od varijabli  $x_i$  (gdje  $i = 1, \dots, n$ ) izračunava se na slijedeći način:  $\nabla g(x) = \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)^T$ .

Međutim, ono što jeste jako značajno za predstaviti i pomenuti, je veza između Poankareovih mapa i stabilnosti, odnosno nestabilnosti, samih ciklusa.

Posmatrajmo kontinualan u vremenu dinamički sistem definisan sa  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , gde je  $f$  glatka funkcija. Pretpostavimo i da predmetni sistem ima periodičnu orbitu  $L_0$  (slika 9). Uzmimo neku arbitrarnu tačku  $x_0$  sa  $L_0$  i definišimo *poprečni-presjek*  $\Sigma$  na ciklusu u ovoj tački (slika 10.).



Slika 9. Stabilni ciklus na Mobiusovoj<sup>44</sup> traci

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

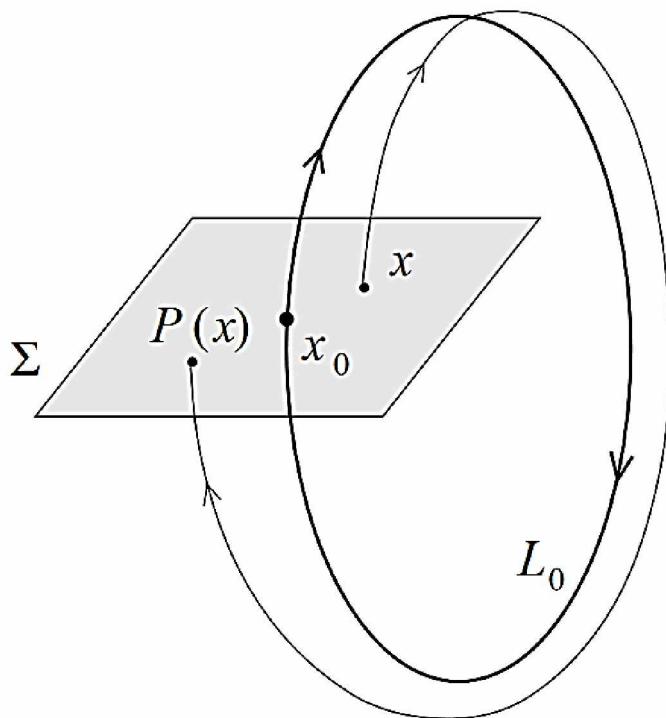
Poprečni presek  $\Sigma$  je glatka hiperpovršina dimenzije  $(n-1)$ , koja presjeca  $L_0$  pod ne-nultim uglom. Pošto je dimenzija  $\Sigma$  za jedan manja nego dimenzija prostora stanja, tada kažemo da je hiperpovršina  $\Sigma$  „kodimenzije” jedan, ili skraćeno  $\text{codim } \Sigma = 1$ .

Pretpostavimo da je  $\Sigma$  definisana u blizini tačke  $x_0$  skupom *multog nivoa* ( $c=0$ ) glatke skalarne funkcije  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , i gdje je  $g(x_0) = 0$ ,  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ . Ne-nulti ugao

<sup>44</sup> August Ferdinand Möbius (17. Novembar 1790. – 26. Septembar 1868.) je bio čuveni njemački matematičar i teorijski astronom.

presjeka („transverzalnost”) znači da gradijent  $\nabla g(x) = (\partial g(x)/\partial x_1, \partial g(x)/\partial x_2, \dots, \partial g(x)/\partial x_n)^T$  nije ortogonalan na  $L_0$ , odnosno,  $\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0$ , i gdje je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  standardni („obični”) skalarni proizvod u  $\mathbb{R}^n$ . Najjednostavniji izbor za  $\Sigma$  jeste hiper-ravan ortogonalna na  $L_0$  u  $x_0$ . Takav presjek je očigledno zadat (definisan) skupom linearne funkcije nultog nivoa  $g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle$ .

Razmotrimo sada orbite  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  u blizini ciklusa  $L_0$ . Sam ciklus je zapravo jedna orbita koja počinje u tački na  $\Sigma$  i vraća se u  $\Sigma$  u istu tu tačku ( $x_0 \in \Sigma$ ). Pošto rješenja sistema glatko zavise od njihove početne tačke (uslova), orbita koja počinje u tački  $x \in \Sigma$  i dovoljno je blizu  $x_0$  takođe se vraća u  $\Sigma$  u nekoj tački  $\tilde{x} \in \Sigma$  opet u blizini  $x_0$ . Štoviše, obližnje orbite će takođe presjecati  $\Sigma$  poprečno. Na taj način je konstruisana mapa  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $x \rightarrow \tilde{x} = P(x)$ .



Slika 10. Poankareva mapa ciklusa

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

**Definicija 9 (D9)** Mapa  $P$  se naziva Poinkareova mapa ciklusa  $L_0$ .

Poinkareova mapa  $P$  je lokalno definisana, i glatka je u skladu sa izrazom na desnoj strani izraza u okviru SNDJPR, odnosno inverzibilna je blizu  $x_0$ . Invertibilnost mape slijedi iz invertibilnosti dinamičkog sistema. Inverzna mapa  $P^{-1}: \Sigma \rightarrow \Sigma$  može biti konstruisana proširivanjem orbita koje presjecaju  $\Sigma$  krećući se unazad u vremenu dok ponovo ne dođemo do presjeka sa  $\Sigma$ . Tačka presjeka  $x_0$  je *fiksna tačka* Poinkareove mape:  $P(x_0) = x_0$ . Uvešćemo lokalne koordinate  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$  na  $\Sigma$  tako da  $\zeta = 0$  odgovara  $x_0$ . Tada će Poinkareova mapa biti okarakterisana sa lokalno definisanom mapom  $P: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , koja transformiše  $\zeta$  koje odgovara  $x$  u  $\tilde{\zeta}$  (*ksi-tilda*) koje odgovara  $\tilde{x}$ ,  $P(\zeta) = \tilde{\zeta}^{45}$  (*ksi-tilda*). Početna tačka  $\zeta = 0$  od  $\mathbb{R}^{n-1}$  je *fiksna tačka* mape  $P: P(0) = 0$ . Stabilnost ciklusa  $L_0$  je ekvivalentna stabilnosti fiksne tačke  $\zeta_0 = 0$  Poinkareove mape. Ciklus je stabilan ako se sve sopstvene vrijednosti (množitelji)  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  Jakobijanske matrice  $P$  reda  $(n-1)$ ,  $A = dP/d\zeta$  (evaluirane u  $\zeta = 0$ ), nalaze unutar jediničnog kruga  $|\mu| = 1$  (prema T1).

Postavlja se logičko pitanje, da li množitelji zavise od izbora tačke  $x_0$  na  $L_0$ , ili od presjeka  $\Sigma$ , ili od koordinate  $\zeta$  na njemu. Ukoliko bi na prethodno pitanje(a) odgovor bio potvrđan, određivanje stabilnosti pomoću množitelja bi bilo zbunjujuće ili čak nemoguće.

**Lema 1 (L1)** Množitelji  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  Jakobijanske matrice  $A$  Poinkareove mape ciklusa  $L_0$  su nezavisni od tačke  $x_0$  na  $L_0$ , presjeka  $\Sigma$  i lokalnih koordinata na njemu.

Prema L1, možemo koristiti *bilo koji* poprečni presjek  $\Sigma$  za izračunavanje množitelja ciklusa: Rezultat će biti isti.

Sljedeći problem koji treba riješiti je odnos između množitelja (ciklusa) i diferencijalnih jednačina (sa ciklusima) u okviru dinamičkog sistema. Neka  $x^0(t)$  označava periodično rješenje dinamičkog sistema,  $x^0(t + T_0) = x^0(t)$ , koje odgovara ciklusu  $L_0$ . Predstavimo rješenje dinamičkog sistema u obliku  $x(t) = x^0(t) + u(t)$ , gde je  $u(t)$  odstupanje od periodičnog rješenja. Tada važi da je  $\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t) = f(x^0(t) + u(t)) - f(x^0(t)) =$

<sup>45</sup> Zbog vrste fonta i tipa grčkog slova, potencijalno, se ne učava najbolje znak tilda iznad  $\xi$ , te smo stavili u zagradama naziv  $\tilde{\xi}$  (ksi-tilda) tamo gdje se radi o koordinati sa tildom iznad grčkog slova ksi.

$A(t)u(t) + O(\|u(t)\|^2)$ . Zanimarivanjem članova drugog i višeg reda  $O(\|u\|^2)$ , u okviru sistema sa periodom  $T_0$ , dobija se  $\dot{u} = A(t)u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , gde je  $A(t) = f_x(x^0(t))$ ,  $A(t + T_0) = A(t)$ .

**Definicija 10 (D10)** Sistem  $\dot{u} = A(t)u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  se zove *varijaciona jednačina ciklusa*  $L_0$ .

Varijaciona jednačina je glavni činilac i (linearni) dio sistema koji upravlja evolucijom *perturbacija* u blizini ciklusa. Shodno tome, stabilnost ciklusa zavisi od svojstava varijacione jednačine.

**Definicija 11 (D11)** Vremenski zavisna matrica  $M(t)$  se naziva *fundamentalno matrično rješenje*  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  ako zadovoljava  $\dot{M} = A(t)M$ , sa početnim uslovom  $M(0) = I$ , gdje je  $I$  jedinična matrica reda  $n \times n$ .

Svako rješenje  $u(t)$  za  $\dot{u} = A(t)u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , zadovoljava  $u(T_0) = M(T_0)u(0)$ . Matrica  $M(T_0)$  naziva se *monodromska matrica ciklusa*  $L_0$ . Liuvilova (franc. *Liouville*) formula izražava determinantu monodromske matrice u zavisnosti od  $A(t)$ :  $\det M(T_0) = e \left\{ \int_0^{T_0} \text{tr} A(t) dt \right\}$ .

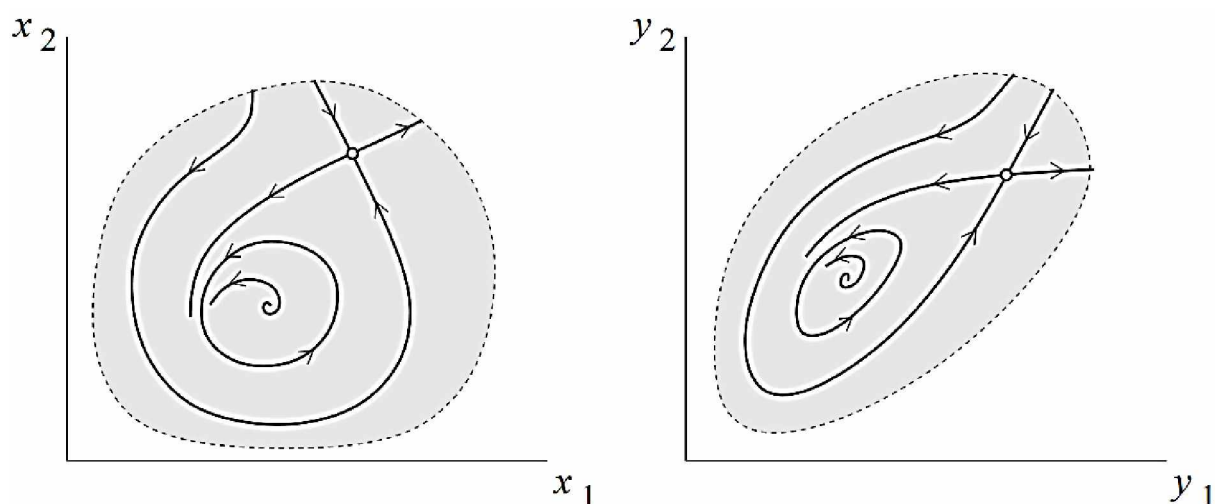
**Teorema 5 (T5)** Monodromska matrica  $M(T_0)$  ima sopstvene vrijednosti  $1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ , gdje su  $\mu_i$  množitelji Poenkareove mape ciklusa  $L_0$ .

Prema T5 proizvod svih sopstvenih vrijednosti  $M(T_0)$  se predstavlja kao  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} = e \left\{ \int_0^{T_0} \text{div}(f)(x^0(t)) dt \right\}$ , gdje je, po definiciji, *divergencija* vektorskog polja  $f(x)$  data kao  $\text{div}(f)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$ . Posljedično, proizvod svih množitelja bilo kog ciklusa je *pozitivan*.

Primijetimo, da u planarnom slučaju ( $n = 2$ ) prethodna formula nam omogućava da izračunamo jedini mogući i postojeći (u tom slučaju) množitelj  $\mu_1$ , pod uslovom da je periodično rješenje koje odgovara ciklusu eksplicitno poznato. Međutim, navedeno je uglavnom teorijska alatka, pošto su rješenja za nelinearne sisteme rijetko poznata u analitičkom obliku.

U principu, mi želimo da proučimo opšte (kvalitativne) karakteristike dinamičkih sistema, posebno, tj. da klasifikujemo moguće tipove njihovog ponašanja i uporedimo sa ponašanjem različitih dinamičkih sistema. Poređenje bilo koja dva objekta, zasniva se na

odnosu ekvivalencije<sup>46</sup>, što nam dalje omogućava da definišemo klase ekvivalentnih objekata i da proučavamo prelaze između ovih klasa. Slijedi, da moramo odrediti kada definišemo da su dva dinamička sistema „kvalitativno slična” ili ekvivalentna. Pomenuta definicija mora zadovoljiti neke opšte intuitivne kriterijume. Na primjer, prirodno je očekivati da su dva sistema ekvivalentna kada imaju isti broj ravnotežnih tačaka i ciklusa sa istom vrstom stabilnosti. „Relativni položaj” ovih invarijantnih skupova i oblik njihovih domena privlačnosti takođe treba da bude sličan. Drugim riječima, dva dinamička sistema smatramo ekvivalentnim ako su njihovi fazni portreti „kvalitativno slični”, odnosno ako se jedan portret može dobiti iz drugog kontinuiranom transformacijom (slika 11).



Slika 11. Topološka ekvivalencija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

**Definicija 12 (D12)** *Dinamički sistem  $\{T, \mathbb{R}^n, \phi^t\}$  se naziva topološki ekvivalentan dinamičkom sistemu  $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$  ako postoji homeomorfizam  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  koji preslikava orbite prvog sistema u orbite drugog sistema, očuvajući pravac vremena.*

<sup>46</sup> Relacija između dva objekta ( $a \sim b$ ) se naziva relacijom ekvivalencije ako je: 1) refleksivna ( $a \sim a$ ), 2) simetrična ( $a \sim b$  implicira  $b \sim a$ ) i 3) tranzitivna ( $a \sim b$  i  $b \sim c$  implicira  $a \sim c$ ).

*Homeomorfizam* je invertibilna mapa, takva da su mapa i njen inverzni oblik neprekidni. Definicija topološke ekvivalencije može se generalizovati tako da pokrije opštije slučajeve kada je prostor stanja u *potpunosti metričan* ili je, konkretno, *Banahov prostor* (njem. *Banach*). Predmetna definicija važi i kada je prostor stanja glatki konačno-dimenzioni manifold u  $\mathbb{R}^n$ , na primjer, dvodimenzionalni torus  $\mathbb{T}^2$  ili sfera  $\mathbb{S}^2$ . *Fazni portreti* topološki ekvivalentnih sistema se često nazivaju i *topološki ekvivalentnim*. Prethodna definicija se odnosi na sisteme u kontinuiranom i diskretnom vremenu.

Topološka ekvivalencija implicira da ako su  $x$  i  $y$  povezani homeomorfizmom  $h$ ,  $y = h(x)$ , tada se orbite prve mape preslikavaju u orbite druge mape pomoću  $h$ .

Prema tome,  $g(y) = h(f(x))$  ili  $g(h(x)) = h(f(x))$  za  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , odnosno pošto je  $h$  inverzibilno može biti napisano i kao  $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$ . Posljednju jednačinu možemo napisati u kompaktnijoj formi koristeći simbol superpozicije (kompozicije) mape(a):  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ .

**Definicija 13 (D13)** Dvije mape  $f$  i  $g$  koje zadovoljavaju  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  za homeomorfizam  $h$  nazivaju se *konjugovane*.

Shodno tome, topološki ekvivalentni sistemi u diskretnom vremenu su često nazivaju *konjugovani sistemi*. Ako su  $h$  i  $h^{-1}$  mape tipa  $C^k$  mape, tada se  $f$  i  $g$  mape nazivaju  $C^k$ -konjugovane. Za  $k \geq 1$ ,  $C^k$ -konjugovane mape (i njihovi korespondirajući sistemi) nazivaju se *glatko konjugovanim* ili *difeomorfizmima*.

Dvije različite difeomorfne mape  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , mogu se smatrati istim, samo napisanim u dva različita koordinatna sistema sa koordinatama  $x$  i  $y$ , dok se  $y = h(x)$  može tretirati kao *glatka promjena koordinata*. Posljedično, difeomorfni dinamički sistemi u diskretnom vremenu praktično se ne razlikuju.



$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ y & \xrightarrow{g} & g(y) \end{array}$$

Slika 12. Topološka ekvivalencija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Razmotrimo dva topološki ekvivalentna sistema u neprekidnom vremenu  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , sa *glatkim desnim stranama*. Neka  $\phi^t$  i  $\psi^t$  označavaju odgovarajuće tokove, respektivno. U ovom slučaju, ne postoji jednostavan odnos između  $f$  i  $g$  koji bi bio analogan formuli  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ . Ipak, postoje dva posebna slučaja topološke ekvivalencije između  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , koja se mogu izraziti analitički, i to na sljedeći način. Pretpostavimo da je  $y = h(x)$  inverzibilna i glatka mapa  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i isto tako njen inverzni oblik ( $h$  je difeomorfizam), i takva da, za  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = M^{-1}(x)g(h(x))$ , gdje je  $M(x) = dh(x)/dx$  i predstavlja Jakobijansku matricu od  $h(x)$  procijenjenu u tački  $x$ . Tada je sistem  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  topološki ekvivalentan sistemu  $y = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Uistinu, sistem  $y = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , se dobija iz sistema  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , glatkom promjenom koordinata  $y=h(x)$ . Dakle,  $h$  preslikava rješenja  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , u rješenja  $y = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , odnosno važi  $h(\phi^t x) = \psi^t h(x)$ , i može imati ulogu *homeomorfizma* u D12.

**Definicija 14 (D14)** Dva sistema  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , koji zadovoljavaju  $f(x) = M^{-1}(x)g(h(x))$  pomoću nekog difeomorfizma  $h$  nazivaju se *glatko ekvivalentnim* (ili *difeomorfnim*).

**Napomena:** Ako je stepen glatkosti difeomorfizma  $h$  od interesa, onda pišemo  $C^k$ -ekvivalentan ili  $C^k$ -difeomorfan u D14.

Dva difeomorfna sistema su praktično identična i mogu se posmatrati kao isti sistem napisan u različitim koordinatama. Na primjer, sopstvene vrijednosti odgovarajućih ravnotežnih tačaka su iste. Neka su  $x_0$  i  $y_0 = h(x_0)$  ravnotežne, i neka  $A(x_0)$  i  $B(y_0)$  označavaju pripadajuće Jakobijanske matrice. Tada diferenciranjem  $f(x) = M^{-1}(x)g(h(x))$  dobijamo izraz za Jakobijan, evaluiran u tački  $x_0$ , kao  $A(x_0) = M^{-1}(x_0)B(y_0)M(x_0)$ . Dakle, karakteristične jednačine za matrice  $A(x_0)$  i  $B(y_0)$  se podudaraju. Dodatno, difeomorfni granični ciklusi imaju iste množitelje i period. Posljednje pomenuto svojstvo zahtijeva pažljiviju i detaljnu analizu različitih vremenskih parametrizacija.

Pretpostavimo da je  $\mu = \mu(x) > 0$  pozitivna i glatka skalarna funkcija i da su desne strane sistema  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , povezane sa  $f(x) = \mu(x)g(x)$  za  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Tada su, očigledno, sistemi  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , topološki ekvivalentni, jer su im orbite identične, dok ih brzina promjena čini drugačijima. (Odnos brzina u tački  $x$  iznosi  $\mu(x)$ ). Dakle, homeomorfizam  $h$  u definiciji u D12 je mapa identiteta  $h(x) = x$ . Drugim riječima, sistemi se jedino razlikuju po vremenu parametrizacije duž orbita.

**Definicija 15 (D15)** Dva sistema  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , koji zadovoljavaju da je  $f(x) = \mu(x)g(x)$  za pozitivnu i glatku funkciju  $\mu$ , zovu se orbitalno ekvivalentni sistemi.

Jasno je da dva orbitalno ekvivalentna sistema mogu biti nedifeomorfna, odnosno da imaju cikluse koji izgledaju isto kao zatvorene krive linije u faznom prostoru, međutim, ti ciklusi imaju međusobno različiti period. Veoma često proučavamo dinamiku sistema lokalno, na primjer, ne u cijelom prostoru stanja  $\mathbb{R}^n$ , već u u nekoj oblasti  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Takav region može biti, na primjer, u okolinu ravnoteže (fiksne tačke) ili ciklusa. Pomenute definicije topološke, glatke i orbitalne ekvivalencije, mogu lako biti zadovoljene uvođenjem odgovarajućih lokalnih regiona u okviru domena sistema. Na primjer, u topološkoj klasifikaciji faznih portreta u blizini tačaka ravnoteže, korisna je sljedeća modifikacija D12.

**Definicija 16 (D16)** Dinamički sistem  $\{T, \mathbb{R}^n, \phi'\}$  se naziva lokalno topološki ekvivalentnim u blizini ravnotežne tačke  $x_0$  dinamičkom sistemu  $\{T, \mathbb{R}^n, \psi'\}$  blizu ravnotežne tačke  $y_0$  ako postoji homeomorfizam  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  takav da je (i) definisan u maloj okolini  $U \subset \mathbb{R}^n$  od  $x_0$ ;

(ii) zadovoljava  $y_0 = h(x_0)$ ; (iii) preslikava orbite prvog sistema u  $U$  na orbite drugog sistema u  $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ , čuvajući pritom pravac vremena.

Ukoliko je  $U$  otvorena okolina  $x_0$ , onda je  $V$  otvorena okolina  $y_0$ . Primijetimo da ravnotežni položaji  $x_0$  i  $y_0$  se mogu poklapati sa  $U$  i  $V$ .

Primjer faznih portreta prikazan je na Slici 13. Ravnoteža (ekvilibrirum) prvog sistema je čvor (slika 13. (a)), dok je u drugom sistemu u pitanju fokus (slika 13. (b)). Razlika u ponašanju sistema se takođe može uočiti kada uvedemo perturbacije u blizini ekvilibriruma, odnosno, iste u prvom slučaju opadaju monotonno, dok u drugom slučaju radi se o oscilatornom približavanju tački ravnoteže.

Sistemi nisu ni orbitalno, ni glatko, ekvivalentni. Prva konstatacija je očigledna, dok druga slijedi iz zapažanja da sopstvene vrijednosti ekvilibriruma u prvom sistemu ( $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ) se razlikuju od vrijednosti za drugi sistem ( $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ ).

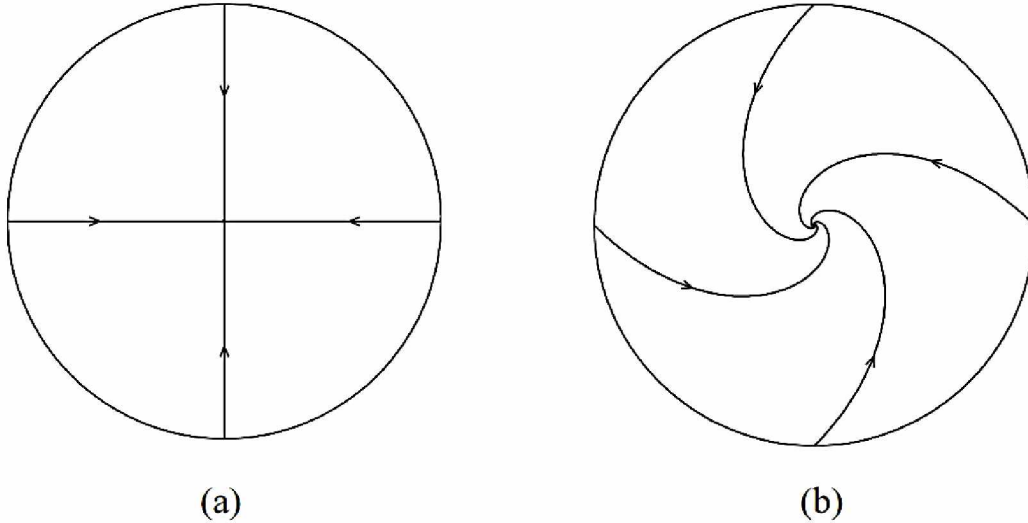
Prema D16, dva sistema su ekvivalentna (u  $\mathbb{R}^n$  ili u nekoj oblasti  $U \subset \mathbb{R}^n$ ) ukoliko možemo jedan sistem transformisati u drugi glatkim invertibilnim promjenama koordinata i množenjem pozitivnom glatkom funkcijom u okvirima tih koordinata. Dva glatko orbitalno ekvivalentna sistema su i topološki ekvivalentna, dok obrnuto ne važi.

Razmotrimo dinamički sistem u kontinualnom vremenu, definisan kao  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , gdje je  $f$  glatko. Neka je  $x_0 = 0$  ekvilibrirum sistema (npr.  $f(x_0) = 0$ ) i neka  $A$  označava Jakobijansku matricu  $df/dx$  procijenjenu u  $x_0$ . Neka  $n_-$ ,  $n_0$ , i  $n_+$  označavaju broj sopstvenih vrijednosti  $A$  koje imaju negativan, nula i pozitivan realni dio, respektivno.

**Definicija 17 (D17)** Dva sistema  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $y \rightarrow g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , se nazivaju glatko orbitalno ekvivalentnim ako je  $y \rightarrow g(y)$  glatko ekvivalentan sistemu koji je orbitalno ekvivalentan sa sistemom  $x \rightarrow f(x)$ .

**Definicija 18 (D18)** Ravnoteža se naziva hiperboličkom ako je  $n_0 = 0$ , tj. na imaginarnoj osi nema sopstvenih vrijednosti. Hiperbolički ekvilibrirum se naziva (hiperboličkim) ako su  $n_-$  i  $n_+ \neq 0$ .

Pošto generički sistemi nemaju sopstvene vrijednosti na imaginarnoj osi ( $n_0 = 0$ ), hiperboličnost im je tipično svojstvo, i ravnoteža u generičkom sistemu (npr. sistemu koji ne mora da ispunjava određene posebne uslove) je hiperbolička.



Slika 13. Čvor–fokus ekvivalencija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

Za ekvilibrijum (ne nužno hiperbolički), definišemo dva invarijantna skupa:  $W^s(x_0) = \{x : \varphi^t x \rightarrow x_0, t \rightarrow +\infty\}$ ,  $W^u(x_0) = \{x : \varphi^t x \rightarrow x_0, t \rightarrow -\infty\}$ , gde je  $\varphi^t$  tok povezan sa  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 19 (D19)**  $W^s(x_0)$  se naziva *stabilnim skupom*  $x_0$ , dok se  $W^u(x_0)$  naziva *nestabilnim skupom*  $x_0$ .

**Teorema 6 (T6) (Lokalni Stabilni Manifoldi)** Neka je  $x_0$  hiperbolični ekvilibrijum (npr. neka je broj  $n_0 = 0$ , i  $n_- + n_+ = n$ ). Tada presjeci  $W^s(x_0)$  i  $W^u(x_0)$  u dovoljno bliskoj okolini  $x_0$ , sadrže glatke pod-manifolde  $W_{loc}^s(x_0)$  i  $W_{loc}^u(x_0)$  dimenzija  $n_-$  i  $n_+$ , respektivno.

Štoviše,  $W_{loc}^s(x_0)(W_{loc}^u(x_0))$  je tangenta u  $x_0$  na  $T^s(T^u)$ , gde je  $T^s(T^u)$  generalizovani sopstveni prostor koji odgovara uniji svih sopstvenih vrijednosti  $A$  sa  $Re\{\lambda\} < 0$  ( $Re\{\lambda\} > 0$ ).

**Napomena:** Globalno, invarijantni skupovi  $W^s$  i  $W^u$  su *uronjeni*<sup>47</sup> manifoldi dimenzija  $n_-$  i  $n_+$ , respektivno, i imaju iste karakteristike glatkoće kao i  $f$ . Imajući u vidu navedena svojstva, skupove  $W^s$  i  $W^u$  ćemo respektivno nazivati *stabilnim* i *nestabilnim* invarijantnim manifoldima u  $x_0$ .

Slika 14. (pod (a) i (b)) ilustruje T6 za slučaj kada je  $n = 3$ ,  $n_- = 2$  i  $n_+ = 1$ .<sup>48</sup> U ovom slučaju, postoje dva invarijantna manifolda koji prolaze kroz ekvilibrijum. Naime, dvo-dimenzioni manifold  $W^s(x_0)$  je formiran od svih dolaznih orbita, i jedno-dimenzioni manifold  $W^u(x_0)$  koji je formiran od dvije izlazne orbite  $W_1^u(x_0)$  i  $W_2^u(x_0)$ . Sve orbite koje ne pripadaju ovim manifoldima prolaze u blizini ekvilibrijuma i napuštaju njegovu okolinu u oba vremenska pravca.

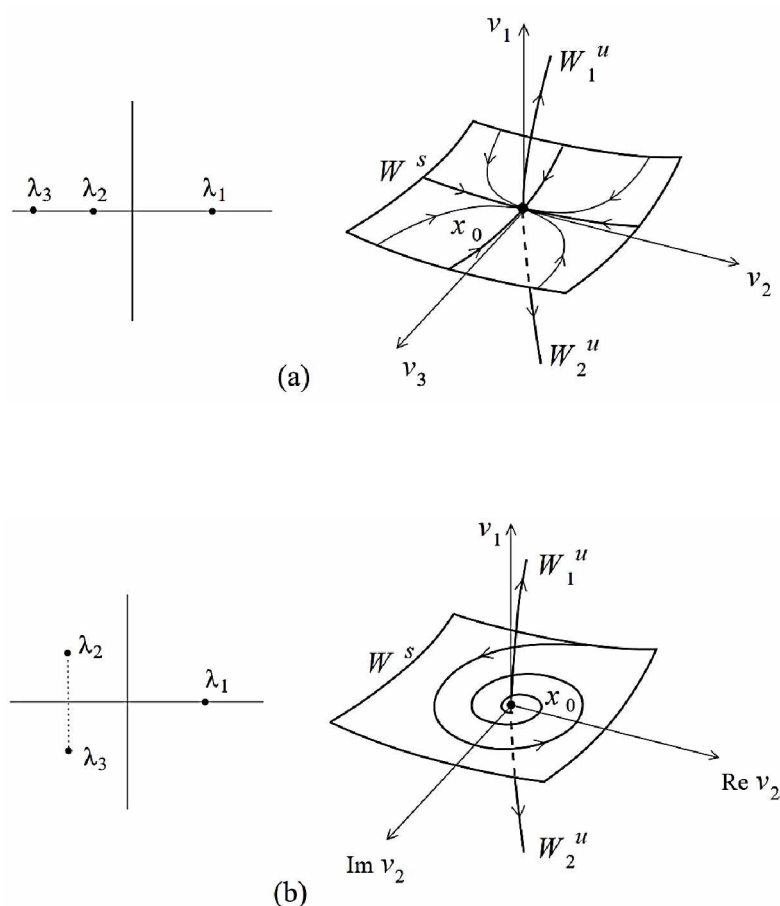
U slučaju prikazanom na Slici 14. pod (a), kod realnih i prostih sopstvenih vrijednosti ( $\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ), orbite na  $W^s(x_0)$  formiraju čvor, dok kod iste slike u slučaju pod (b), imamo kompleksne sopstvene vrijednosti ( $Re\{\lambda_{2,3}\} < 0 < \lambda_1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_2$ ), i kreiranje fokusa. Dakle, u prvom slučaju, ravnoteža (ekvilibrijum) se naziva *sjedlo*, dok se u drugom slučaju (b) radi o *sjedlo-fokus*.

Ekvilibrijumi u oba slučaja su topološki ekvivalentni. Ipak, korisno ih je razlikovati, i navedeno se postiže proučavanjem osobina homokliničkih bifurkacija orbita.

---

<sup>47</sup> Integrisani, odnosno uključeni u određeni i pripadajući manifold.

<sup>48</sup> Navedeno se vidi, i na koordinatnom sistemu predstavljenom na lijevoj strani kod obje slike, gdje upravo crne tačke označavaju sopstvene vrijednosti Jakobijana  $A$  u  $x_0$ .



Slika 14. (a) Sjedlo i (b) Sjedlo–fokus.

Vektori  $v_k$  su sopstveni vektori, koji odgovaraju sopstvenim vrijednostima  $\lambda_k$ .

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

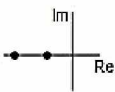
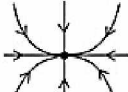
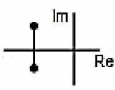

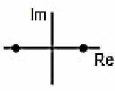
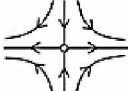
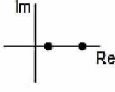
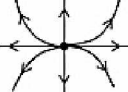
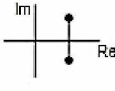

Naredna teorema će nam dati topološku klasifikaciju hiperboličkih ekvilibriruma.

**Teorema 7 (T7)** *Fazni portreti sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , u blizini dva hiperbolička ekvilibriruma,  $x_0$  i  $y_0$ , su lokalno topološki ekvivalentni ako i samo ako pripadajući ekvilibrirumi imaju respektivno isti broj  $n_-$  i  $n_+$  sopstvenih vrijednosti sa  $\text{Re}\{\lambda\} < 0$  i  $\text{Re}\{\lambda\} > 0$ .*

U okviru generičke ravnoteže planarnih sistema, razmatramo dvo-dimenzioni sistem  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}_2$ , sa glatkom  $f$ . Pretpostavimo da je  $x = 0$  ekvilibrirum,  $f(0) = 0$ ,

i neka je  $A = df(x)/dx$  njena Jakobijanska matrica. Matrica  $A$  ima dvije sopstvene vrijednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , koje su korijeni karakteristične jednačine  $\lambda^2 - \sigma \lambda + \Delta = 0$ , gdje je  $\sigma = \text{tr } A$ ,  $\Delta = \det A$ .

Slika 15. prikazuje dobro poznate klasične rezultate nelinearne dinamičke analize u ravni. Postoje tri topološke klase hiperboličkih ekvilibrjuma u ravni: *stabilni čvorovi* (fokusi), *sjedla* i *nestabilni čvorovi* (fokusi). Kao što smo već naveli, čvorovi i fokusi (pripadajućih stabilnosti) su topološki ekvivalentni, i mogu se identifikovati posmatrajući njihove sopstvene vrijednosti.

$(n_+, n_-)$	Sopstvene Vrijednosti	Fazni Portret	Stabilnost
(0, 2)			Stabilan
			
(1, 1)			Nestabilan*
(2, 0)			Nestabilan
			

Slika 15. Topološka kvalifikacija hiperboličkih ekvilibrjuma u ravni<sup>49</sup>

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* [113]

**Definicija 20 (D20)** Čvorovi i fokusi se zovu antisjedla.

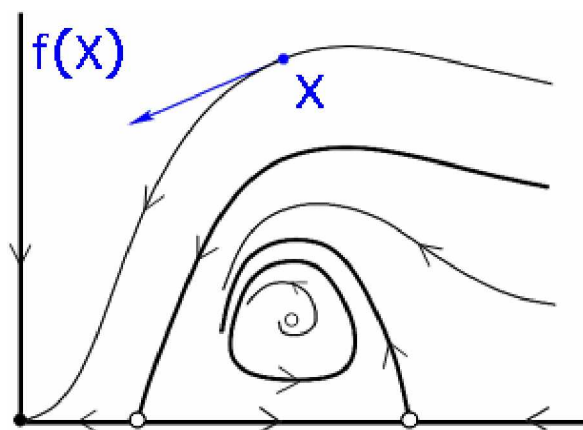
Stabilne tačke imaju dvo-dimenzione stabilne manifolde i nemaju nestabilnih manifolda. Za nestabilne ekvilibrjume važi obrnuto. Sjedla imaju jedno-dimenzione stabilne i nestabilne manifolde, koje se nazivamo *separatrisama*.

<sup>49</sup> Sjedla imaju stabilne, nestabilne i „asimptotske” orbite.



### 3.2 Partikularni NDA postulati

Svojstva rješenja i orbita u ravni ćemo određivati pomoću *opšteg oblika planarnog* (2D) sistema  $\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$ , ili  $\dot{X} = f(X)$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$ , gdje je  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  i  $f(X) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ . Ako je  $f$  glatko za bilo koje početne uslove  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  onda postoji jedinstveno lokalno definisano rješenje  $t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  takvo da je  $x(0) = x_0$  i  $y(0) = y_0$ . Dodatno, i neka je  $I$  potpuni interval na kome su definisana rješenja  $t \rightarrow X(t)$ ,  $t \in I$ . Rezultantna kriva orjentisana napredovanjem vremena  $X(I) \subset \mathbb{R}^2$  će biti orbita. Kod vektorskog polja važi da  $X \rightarrow f(X)$  i sve vrijednosti  $f(X) \neq 0$  su tangente na orbitama u tački  $X$ , što dalje implicira da se orbite ne mogu presjeći (slika 16). *Fazni portret* planarnog sistema je skup svih njegovih orbita u  $\mathbb{R}^2$ . Međutim, u okviru NDA crtamo samo ključne orbite, koje određuju topologiju faznog portreta.



Slika 16. Primjer planarnih orbita i tangencijalnih vektora

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Generalna (opšta) klasifikacija tipova orbita je sljedeća:

1. *Ekvilibrijum*:  $X(t) = X_0$  tako da je  $f(X_0) = 0$ .
2. *Periodične orbite* (ciklusi):  $X(t) \neq X_0$ ,  $X(t+T) = X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Minimalna vrijednost  $T > 0$  se zove *period ciklusa*.

3. *Spojene orbite*:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} X(t) = X_{\pm}$  sa  $f(X_{\pm}) = 0$ .

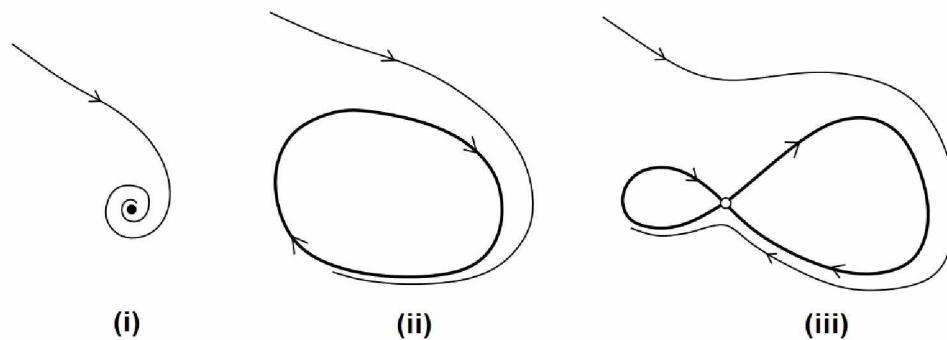
Ukoliko važi  $X_- = X_+$  za spojene orbite, tada se nazivaju *homoklinične*.

Ukoliko važi  $X_- \neq X_+$  za spojene orbite, tada se nazivaju *heteroklinične*.

4. Sve ostale orbite.

**Teorema 8 (T8) (Poincaré – Bendixson)** *Ograničena orbita glatkog sistema  $\dot{X} = f(X)$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$  teži jednom od sljedećih skupova u faznoj ravni (slika 17):*

- (i) *tački ravnoteže (ekvilibrjuma);*
- (ii) *periodičnoj orbiti;*
- (iii) *uniji ravnoteža (ekvilibrjuma) i njihovih povezujućih orbita.*

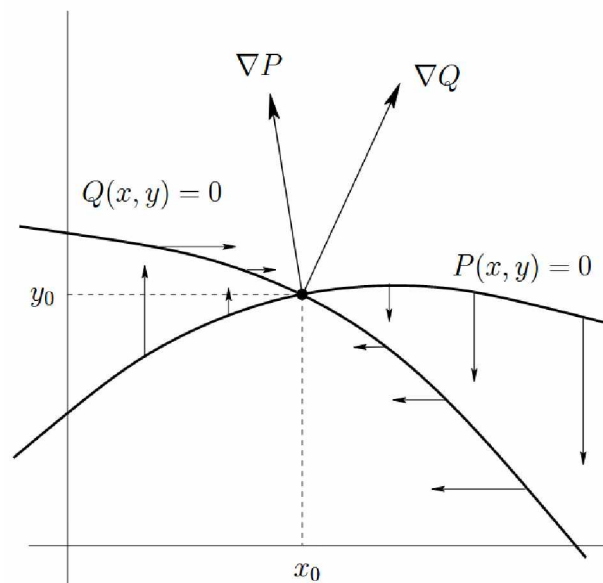


Slika 17. Tri slučaja Poincaré – Bendixson Teoreme

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Izokline ili *nulcline* (engl. Null-isocline),<sup>50</sup> se određuju na način što tražimo korjene polinoma, odnosno nule funkcije. Naime, za sistem  $\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$  parcijalni izvodi  $\nabla P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$  i  $\nabla Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix}$  su ortogonalni na  $P = 0$  i  $Q = 0$ .

Jakobijanska matrica u ekvilibrijumu  $X_0$  glasi  $A = f_x(X_0) = \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix}$  za  $x=x_0$  i  $y=y_0$ . Ako je  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  izokline se sijeku poprijечно u  $X_0$ . Ako je  $\det A = 0 \Rightarrow$  izokline su tangente u  $X_0$ .



Slika 18. Izokline, x-nulklina ( $dx/dt=0$ ) i y-nulklina ( $dy/dt=0$ )

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Sopstvene vrijednosti ekvilibrjuma  $X_0$  su zapravo sopstvene vrijednosti od  $A$ . Odnosno, rješenja karakteristične jednačine  $\lambda^2 - \sigma \lambda + \Delta = 0$ , gdje su  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Sp}A =$

<sup>50</sup> U slobodnom prevodu, i suštinski, bi značilo nultu promjenu (neme promjene) u porastu/padu vrijednosti pri promjeni vremena (ili, neke druge nezavisne i bazične varijable sistema). Češće se u praksi koristi termin izokline od termina nulcline, jer po predmetnim linijama izvod (diferencijal) jeste nula (engl. null), ali sama kriva posjeduje određene vrijednosti (koordinate) koje su različite od nule, tj. ima *istu* (grčki. iso) promjenu varijabli jednaku nuli.

$P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)$ , i  $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = \det A = P_x(x_0, y_0) Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0) Q_x(x_0, y_0)$ .

Sopstvene vrijednosti se određuju kao  $\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$ . Posljedično, ekvilibrijum  $X_0$  se naziva *hiperboličnim* ako je  $\operatorname{Re}\{\lambda\} \neq 0$ . Dodatno, ekvilibrijum  $X_0$  sa  $\lambda_1 = 0$  (npr.  $\det A = 0$ ) se zove *višestrukim ekvilibrijumom*. Dok, ekvilibrijum  $X_0$  sa  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  (npr.  $\operatorname{Sp} A = 0$ ) se naziva *neutralnim ekvilibrijumom*. Pomenuto, se vidi i na Slici 15, a povezano je sa planarnim faznim portretima. Kao što smo već pomenuli, dva sistema se nazivaju topološki ekvivalentnim ako su njihovi fazni portreti homeomorfni, odnosno postoji kontinualna invertibilna transformacija koja preslikava orbite iz jednog sistema u drugi, čuvajući pritom orijentaciju.

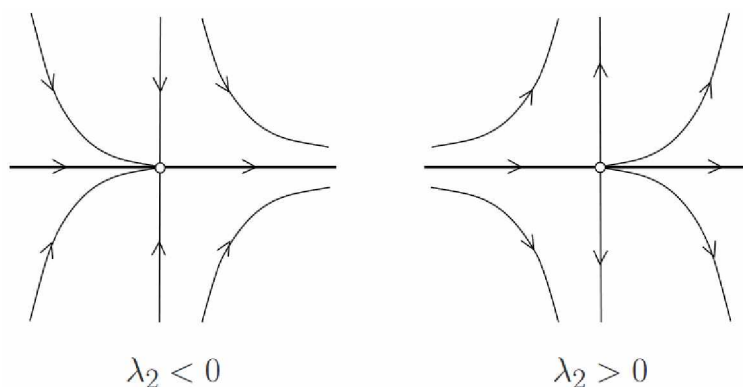
**Teorema 9 (T9) (Grobman-Hartman)** *Razmotrimo glatki nelinearni sistem  $\dot{X} = AX + F(X)$ ,  $F = O(|X|^2) \equiv O(2)$  i njegovu linearizaciju  $\dot{Y} = AY$ . Ukoliko je  $\operatorname{Re}\{\lambda\} \neq 0$  za sve sopstvene vrijednosti od  $A$ , onda su ovi sistemi lokalno topološki ekvivalentni u okolini (blizini) koordinatnog početka.*

Stabilan/nestabilan čvor je lokalno topološki ekvivalentan stabilnom/nestabilnom fokusu. Posljedično, trivijalne topološke ekvivalencije se dijele na: 1) *Orbitalne ekvivalencije*, za koje važi  $\dot{X} = f(X) \sim \dot{Y} = g(Y)f(Y)$ , gdje  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  predstavlja pozitivnu glatku funkciju, i  $Y = h(X) = X$  čuva smjer vremena; 2) *Glatke ekvivalencije*, sa  $\dot{X} = f(X) \sim \dot{Y} = h_X(h^{-1}(Y))f(h^{-1}(Y))$ , gdje je  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatki difeomorfizam, dok smjena  $Y = h(X)$  transformiše postojeća rješenja u nova rješenja, oblika  $\dot{Y} = h_X(X)\dot{X} = h_X(X)f(X)$ ; 3) *Glatka orbitalna ekvivalencija*, podrazumijeva uniju ekvivalencija navedenih pod 1) i 2).

Inicijalna analiza počinje sa najprostijim kritičnim slučajevima, odnosno za  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 \neq 0$ . Pomoću linearnog difeomorfizma  $\dot{X} = f(X)$  možemo pomenuti slučaj transformisati u 
$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + O(3)^{51} \\ \dot{y} = \lambda_2 y + O(2) \end{cases}$$
. Ukoliko je  $a \neq 0$  onda je sistem  $\dot{X} = f(X)$  lokalno

<sup>51</sup> Oznake  $O(2)$  i  $O(3)$ , kao i slične oznake – samo sa drugačijom vrijednošću broja u zagradama, predstavljaju sve članove reda većeg od dva odnosno tri, respektivno. Uopšteno, ostatak  $O$  pri razvoju u Tejlorov red, npr.  $O(n)$  predstavlja sve članove reda većeg od  $n$ .

topološki ekvivalentan sistemu  $\begin{cases} \dot{x} = ax^2 \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$ . Slučaj *sjedlo-čvor* ( $a > 0$ )<sup>52</sup> je prikazan na Slici 19.



Slika 19. Sjedlo-čvor za  $\lambda_2 < 0$  (lijevo), i za  $\lambda_2 > 0$  (desno)

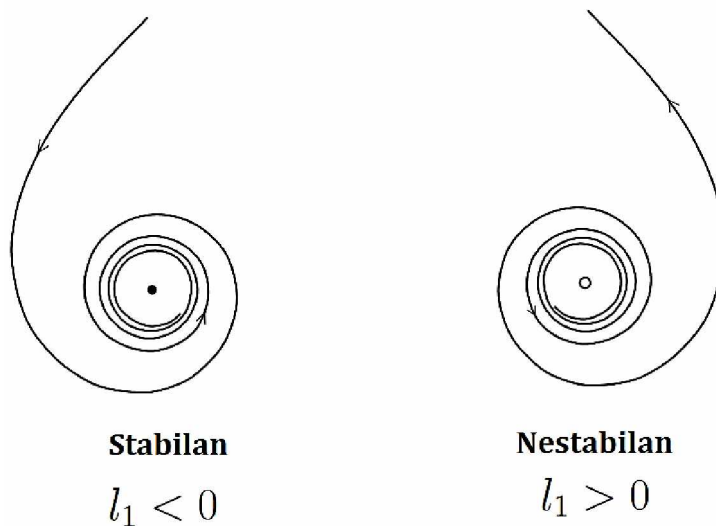
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Naredni kritični slučaj se javlja pri  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ , i  $\omega > 0$ . Takođe, pomoću linearnog difeomorfizma  $\dot{X} = f(X)$ , možemo predmetni slučaj transformisati u  $\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + R(x, y), & R = O(2), \\ \dot{y} = \omega x + S(x, y), & S = O(2). \end{cases}$  Uvedimo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , i njegovu konjugovano kompleksnu vrijednost  $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ . Tada predmetni sistem postaje  $\dot{z} = i\omega z + g(z, \bar{z})$ , gdje je  $g(z, \bar{z}) = R\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iS\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ . Ukoliko  $g$  razvijemo u Tejlrov red više promjenjivih (kompleksnog argumenta), odnosno po  $z$  i  $\bar{z}$ , dobija se  $g(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} g_{20} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} g_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} g_{21} z^2 \bar{z} + \dots$  Navedeno nam je kreiralo matematički okvir za definisanje infinitezimalnih odstupanja orbita tokom vremena, u vidu Ljapunovih koeficijenata.

<sup>52</sup> Sjedlo-čvor predstavlja jezičku složenicu dva NDA termina, jer imamo prijelaz iz sjedla u čvor, i obrnuto. Navedeno se jasno vidi na Slici 19.

**Definicija 21 (D21)** Prvi Ljapunov koeficijent jednak je  $l_1 = \frac{1}{2\omega^2} \Re(i g_{20} g_{11} + \omega g_{21})$ .

Ako je  $l_1 \neq 0$  onda je  $\dot{X} = f(X)$  lokalno topološki ekvivalentno u blizini koordinatnog početka sistemu  $\begin{cases} \dot{\rho} = l_1 \rho^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$ , gdje su  $(\rho, \varphi)$  polarne koordinate od  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Posljedično, definišemo uslove za *slab fokus* koji je prikazan na Slici 20.



Slika 20. Slab fokus. Stabilan za  $l_1 < 0$  (lijevo), i nestabilan za  $l_1 > 0$  (desno)

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

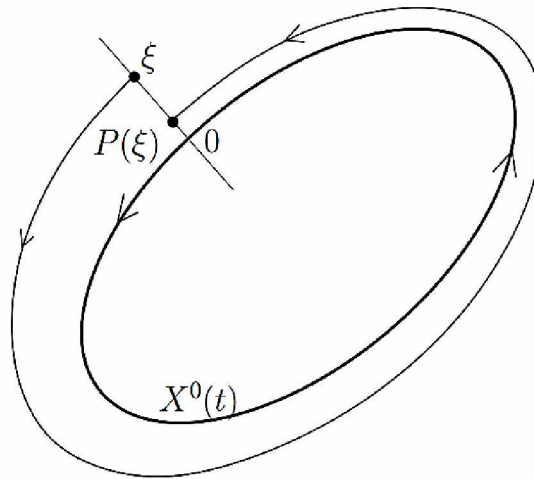
Sljedeće što ćemo razmatrati su periodične orbite i granični ciklusi. Poankareva mapa je u suštini jednaka  $\xi \rightarrow P(\xi) = \mu \xi + O(2)$ , gdje su množioc(i) (multiplajeri) jednaki vrijednostima izraza  $\mu = e^{\int_0^T (\text{div } f)(X^0(t)) dt} > 0$ . Navedeno se vidi na Slici 21.

**Definicija 22 (D22)** Ciklus planarnog sistema je hiperboličan ako je  $\mu \neq 1$ .

Ciklus je stabilan ako je  $\mu < 1$ , i nestabilan ako je  $\mu > 1$  (slika 22).

**Teorema 10 (T10) (Bendixson–Dulac)** Ukoliko je  $(\text{div } f)(X) > 0$  ( $< 0$ ) na disku  $D \in \mathbb{R}^2$ , tada sistem  $\dot{X} = f(X)$  nema periodičnih orbita.

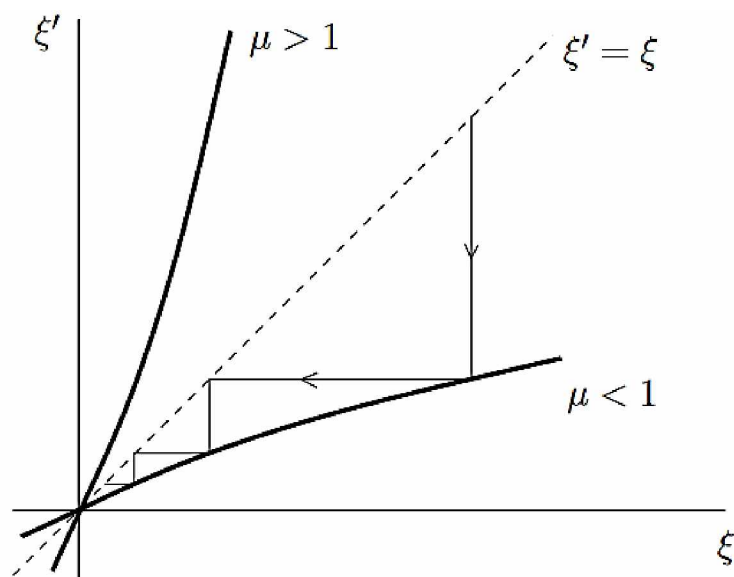
Posljedice D22 i T10 su slijedeće: 1) Ako je  $\text{div}(gf) > 0$  ( $< 0$ ) na disku  $D \subset \mathbb{R}^2$  za glatku pozitivnu funkciju  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onda  $\dot{X} = f(X)$  **nema** periodičnih orbita u  $D$ ; 2) Ako je  $\text{div}(gf) > 0$  ( $< 0$ ) prsten  $A \subset \mathbb{R}^2$  za glatku pozitivnu funkciju  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tada  $\dot{X} = f(X)$  ima **najviše jednu** periodičnu orbitu u  $A$ ; 3) Ako je  $f(X) \neq 0$  i  $\text{div}(gf) < 0$  u ograničenom prstenu  $A \subset \mathbb{R}^2$  za glatku pozitivnu funkciju  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tada  $\dot{X} = f(X)$  ima **jedinstvenu** stabilnu periodičnu orbitu u  $A$ .



Slika 21. Poankareva mapa, planarna projekcija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



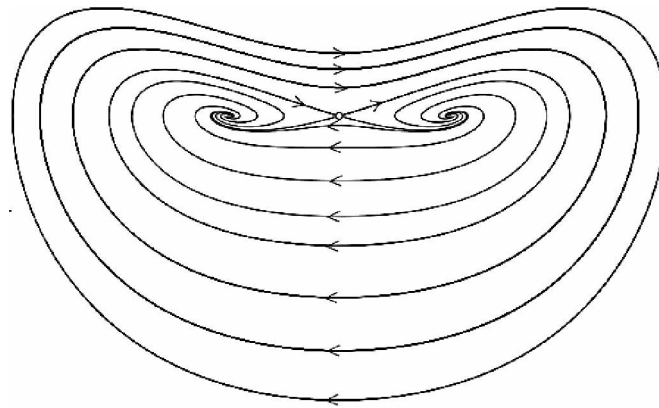


Slika 22. Stabilnost planarnih ciklusa (za  $\mu < 1$  ciklus je stabilan, a za  $\mu > 1$  je nestabilan)

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Definicija 23 (D23)** Glatki sistem  $\dot{X} = f(X)$  naziva se **reverzibilnim** ako važi  $f(JX) = -Jf(X)$  za matricu  $J$  takvu da je  $J^2 = E$ . Transformacija  $X \rightarrow JX$  se zove **involucija**.

Ako postoji segment orbite koji je bez ravnotežnih tačaka i ne povezuje dva ekvilibrijuma u nepromjenjivom potprostoru  $\{Y : JY = Y\}$  involucije, onda postoji periodična orbita  $\dot{X} = f(X)$ . Navedeno implicira da se periodične orbite javljaju u kontinualnim familijama.

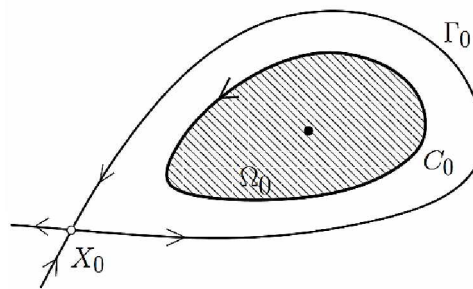


Slika 23. Primjer familije kontinualnih orbita

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Planarni Hamiltonov sistem definišemo za glatku funkciju  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , kao  $\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) \\ \dot{y} = -H_x(x, y) \end{cases}$ , odakle slijedi da je  $\dot{H} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} \equiv 0$ , gdje je  $H(x(t), y(t)) = h$ .

Disipativne perturbacije planarnog 2D Hamiltonovog sistema predstavljane su na slijedeći način  $\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = -H_x(x, y) + \varepsilon Q(x, y) \end{cases}$ , i sa  $F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ . Neka  $X^0(t)$  odgovara periodičnoj orbiti  $C_0$  sa periodom  $T_0$ , i neka je domen  $\Omega_0$  ograničen sa  $C_0$  (Slika 24).

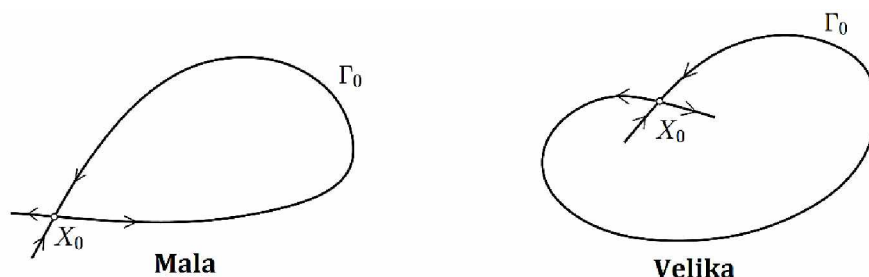


Slika 24. Periodična orbita i pripadajući domen

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Teorema 11 (T11) (Pontryagin–Melnikov)** Ako je  $\iint_{\Omega_0} \operatorname{div} F(X) dX = 0$ , ali je  $\int_0^{T_0} \operatorname{div} F(X^0(t)) dt \neq 0$ , tada postoji prsten koji sadrži  $C_0$  u kome sistem ima jedinstvenu i periodičnu orbitu  $C\varepsilon$  za sve dovoljno male vrijednosti  $\varepsilon$ , takve da  $C\varepsilon \rightarrow C_0$  kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

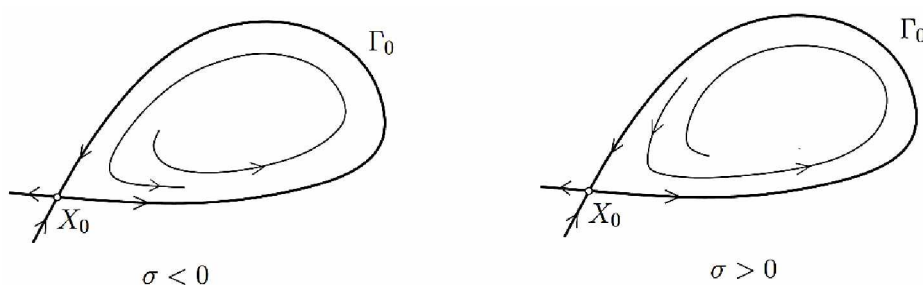
Transformacija homokliničkih orbita u sjedla prikazana je na Slici 25.



Slika 25. Transformacija homokliničkih orbita u sjedla (mala i velika)

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Definicija 24 (D24)** Realni broj  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = (\operatorname{div} f)(X_0)$  se zove **količina sjedla**<sup>53</sup> (engl. *saddle quantity*) u  $X_0$  (Slika 26).

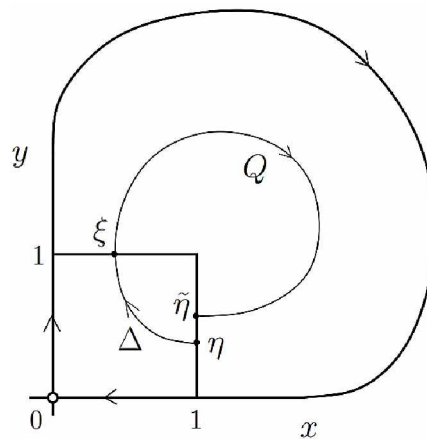


Slika 26. Količina sjedla i orijentacija spram  $\sigma$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

<sup>53</sup> Alternativni prevod bi bio: *mjera sjedla*. Međutim, češće se koristi termin *količina sjedla*, zbog njegove direktne lingvističke veze nakon prevoda sa originalnim terminom.

Singularna mapa ima oblik  $\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$ , dok rastojanje između tačaka presjeka na Poankareovoj mapi iznosi  $\xi = \Delta(\eta) = \eta^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ . Regularnu mapu možemo predstaviti kao  $\tilde{\eta} = Q(\xi) = A\xi + O(2)$ ,  $A > 0$ . Uvrštavanjem izraza za  $\xi$  u izraz za  $\tilde{\eta}$  dobija se  $\rightarrow \tilde{\eta} = Q(\Delta(\eta)) = A\eta^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \dots$ , pa zaključujemo da je homoklinička orbita *stabilna* ako je  $\sigma < 0$ , odnosno da je *nestabilna* ako je  $\sigma > 0$  (slika 27).



Slika 27. Rastojanje između tačaka presjeka na Poankareovoj mapi

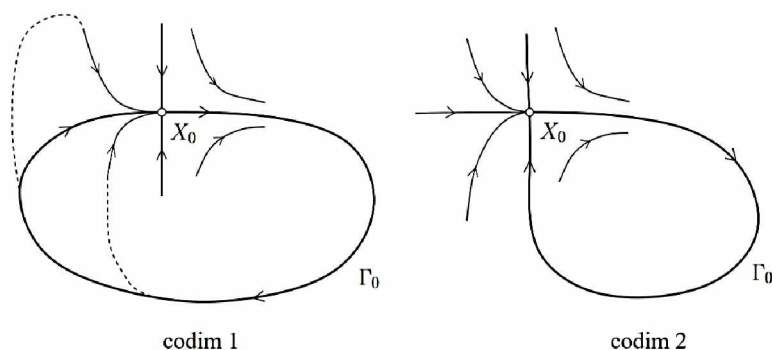
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Dodatno, ukoliko je  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , i ako je (slika 28): 1)  $\int_{-\infty}^{\infty} (\text{div } f)(X^0(t)) \text{TD} < 0$  homoklinička orbita je *stabilna*; 2) dok, ukoliko je  $\int_{-\infty}^{\infty} (\text{div } f)(X^0(t)) \text{TD} > 0$  homoklinička orbita je *nestabilna*.

Posmatrajmo glatki 2D sistem koji ima samo jedan promjenjivi parametar  $\dot{X} = f(X, \alpha)$ , gdje je  $X \in \mathbb{R}^2$ , i  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definicija 24 (D24)** Tačka  $\alpha_0$  se naziva **tačkom bifurkacije** ako u bilo kojoj okolini  $\alpha_0$  postoji tačka  $\alpha$  za koju  $\dot{X} = f(X, \alpha) \not\sim \dot{X} = f(X, \alpha_0)$ . Pojava **topološki neekvivalentnog sistema** se naziva **bifurkacija**.

Pošto su broj ekvilibrjuma, broj periodičnih orbita i njihova stabilnost, kao i prisustvo povezujućih orbita, *topološki invarijantni*, bifurkacija 2D–sistema zapravo znači promjenu neke od pomenutih osobina.



Slika 28. Transformacija homokliničkih orbita u sjedlo–čvor, za codim 1 (lijevo) i codim 2 (desno) bifurkaciju

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Definicija 25 (D25)** Kodimenzija bifurkacije (*codim*) je broj uslova koje bifurkacioni objekat mora zadovoljiti.

Samo codim–1 bifurkacije se javljaju u generičkim sistemima sa jednim parametrom. Ukoliko je  $X_0$  hiperbolički ekvilibrjum  $\dot{X} = f(X, \alpha_0)$ , onda on ostaje hiperboličan za svako  $\alpha$  koje je dovoljno blizu  $\alpha_0$  (međutim, može se blago pomjeriti).

Lokalna bifurkacija se može desiti samo kod *nehiperboličke* ravnoteže (ekvilibrjuma) sa  $\Re(\lambda) = 0$ .

Generički slučajevi codim–1 bifurkacije, kao kritični slučajevi za određenu vrijednost parametra, su:

1) **Fold (sjedlo–čvor):**  $\lambda_1 = 0$  ( $\lambda_2 \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2, \\ \dot{y} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

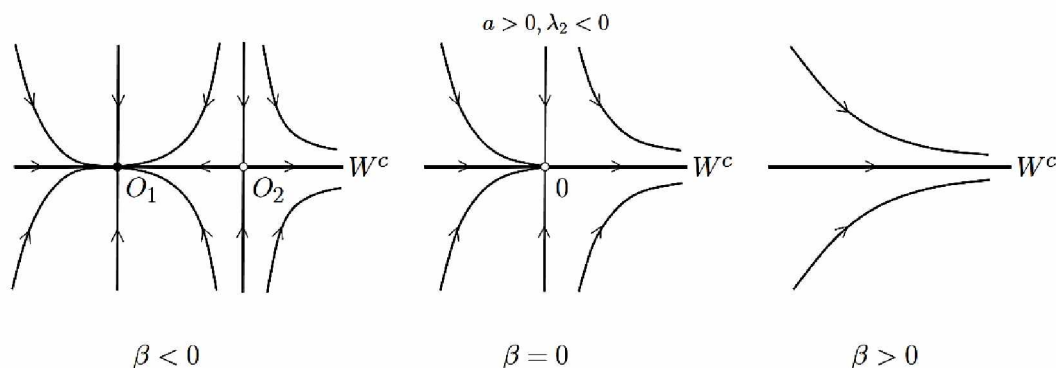
2) Andronov-Hopf (slabi fokus):  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ,  $l_1 \neq 0$ )

$$\begin{cases} \dot{\rho} = l_1 \rho^3, \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

1) Na fold bifurkaciju, koja ima  $\lambda_1 = 0$ , možemo primijeniti slijedeću (narednu) teoremu.

**Teorema 12 (T12)** Ako je  $\alpha \neq 0$  i  $\lambda_2 \neq 0$ , onda je  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  lokalno topološki ekvivalentan u okolini sjedlo-čvor ekvilibriruma  $\begin{cases} \dot{x} = \beta(\alpha) + \alpha x^2 \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$ , gdje je  $\beta(0) = 0$ .

Za vrijednost parametara  $\alpha > 0$  i za  $\lambda_2 < 0$  imamo bifurkaciju promjenom parametra  $\beta$  onako kako je to prikazano na slici 28. Dva ekvilibriruma  $O_{1,2} = \left( \mp \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0 \right)$  sudaraju se i nestaju na 1D *centralnom manifoldu*  $W^c = \{y = 0\}$ , pod uslovom  $\beta'(0) \neq 0$  (slika 29).



Slika 29. Codim-1 promjenom parametra  $\beta$  za  $\alpha > 0$  i za  $\lambda_2 < 0$

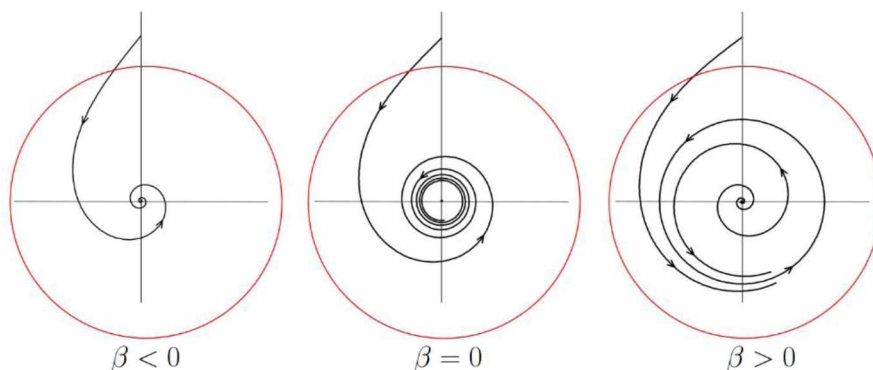
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

2) Andronov-Hopf bifurkaciju karakteriše  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ .

**Teorema 13 (T13)** Ako je  $l_1 \neq 0$  i  $\omega > 0$ , onda je  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  lokalno topološki ekvivalentno u blizini slabog fokusa sa  $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta(\alpha) + l_1 \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$ , gdje je  $\beta(0) = 0$ . **Granični ciklus**  $\rho_0 =$

$\sqrt{\frac{-\beta}{l_1}} > 0$  se pojavljuje dok fokus mijenja stabilnost. Smjer bifurkacije ciklusa određen je

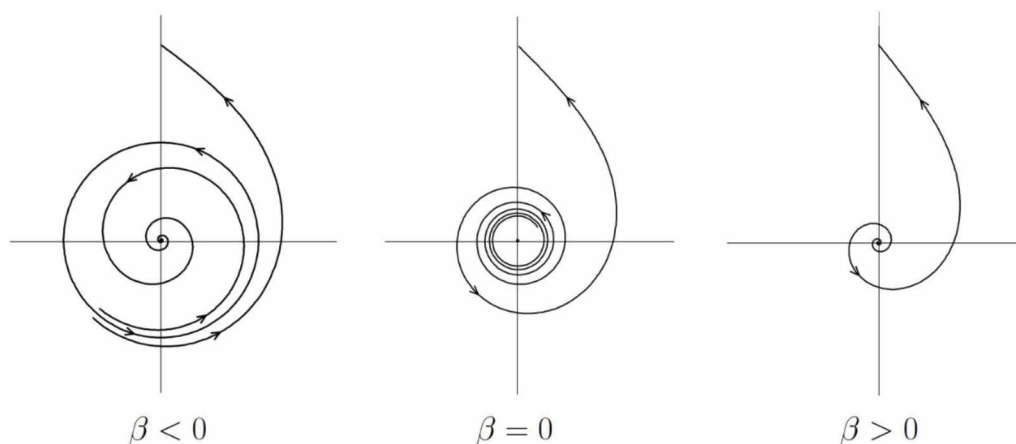
prvim Ljapunovim koeficijentom  $l_1$  slabog fokusa, i to: 1) **superkritična** (meko, nekatastrofična) Andronov–Hopf bifurkacija ( $l_1 < 0$ ) (slika 30); 2) **subkritična** (tvrda, katastrofična) Andronov–Hopf bifurkacija ( $l_1 > 0$ ) (slika 31).



Slika 30. Superkritična Andronov–Hopf bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Stabilnu ravnotežu zamjenjuju oscilacije male amplitude unutar domena privlačnosti (atrakcije).



Slika 31. Subkritična Andronov–Hopf bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



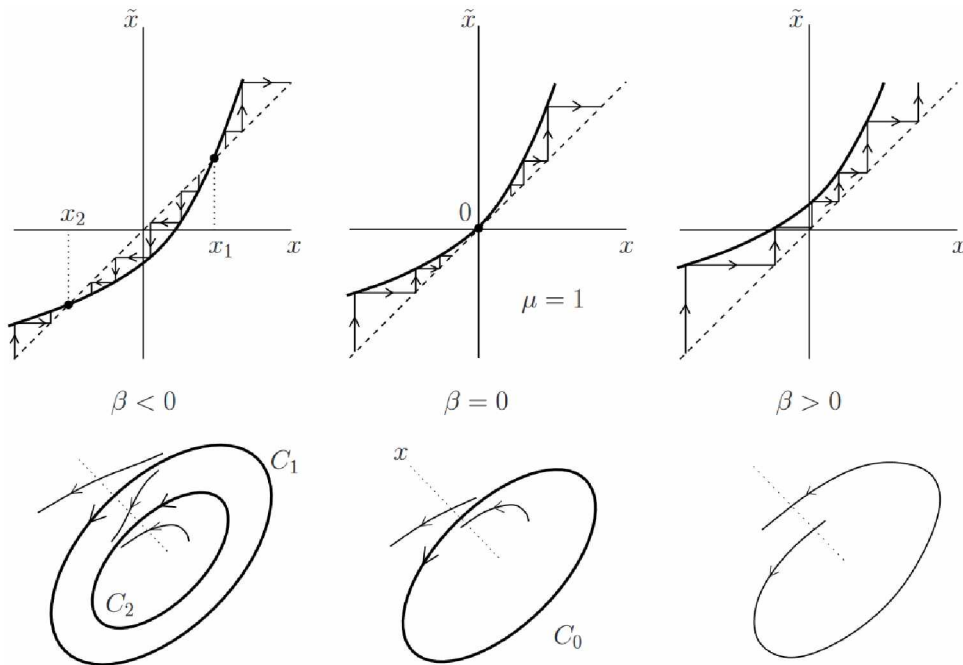
Domen privlačnosti (atrakcije) stabilnog fokusa se smanjuje, dok postaje nestabilan.

Dalje, se logički nameće pitanje primjene praktičnog algoritma za izračunavanje prezentovanih bifurkacija. Međutim, njime se nećemo baviti. Detalji se mogu naći u [113].

Lokalna bifurkacija ciklusa nastaje kada je  $\mu=1$ . Parametarski zavisna Poankareova mapa ima oblik  $\zeta \rightarrow \tilde{\zeta} = P(\zeta, \alpha)$ , gde je  $P(\zeta, 0) = \zeta + O(2)$  ( $\mu = 1$ ).

**Lema 1** Ako je  $p_2(0) = \frac{1}{2} P_{\xi\xi}(0, 0) \neq 0$ , onda postoji glatka funkcija  $\delta = \delta(\alpha)$  takva da zamjena  $x = \zeta + \delta(\alpha)$  redukuje mapu  $\zeta \rightarrow P(\zeta, \alpha) = p_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)]\zeta + p_2(\alpha)\zeta^2 + O(3)$ , gde je  $g(0) = 0$ ,  $p_0(0) = P(0, 0) = 0$ , na oblik  $x \rightarrow \tilde{x} = \beta(\alpha) + x + \beta(\alpha)x^2 + O(3)$  sa  $\beta(0) = 0$  i  $b(0) = p_2(0) \neq 0$ .

Ciklična fold bifurkacija ima oblik  $x \rightarrow \beta + x + bx^2$ , za  $b > 0$ . Dva hiperbolička ciklusa (nestabilan  $C_1$  i stabilan  $C_2$ ) se sudaraju formirajući nehiperbolički ciklus  $C_0$ , i nestaju (slika 32).

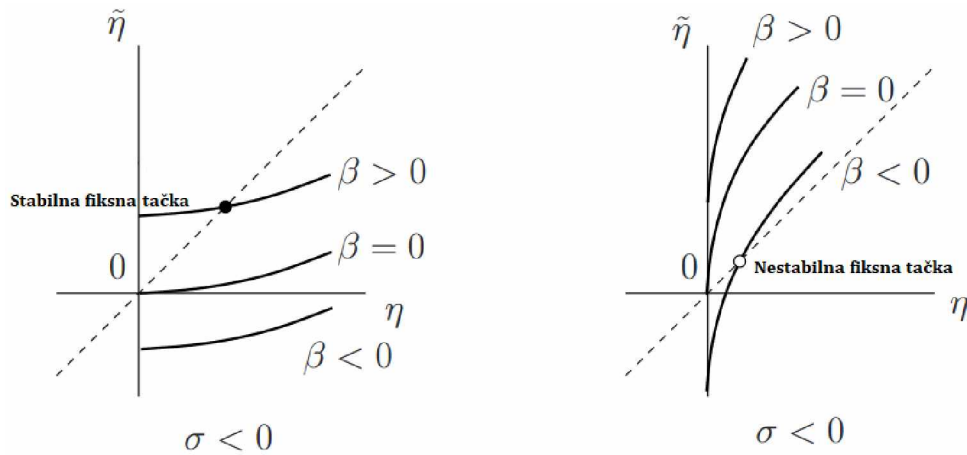


Slika 32. Ciklična Fold bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Kod globalnih bifurkacija spojenih orbita prvenstveno prepoznamo sjedlo–homolitičku bifurkaciju. Zamjenom izraza za singularnu mapu  $\tilde{\eta} \rightarrow \xi = \eta^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$  u regularnu mapu  $\xi \rightarrow \tilde{\eta} = \beta(\alpha) + A(\alpha)\xi + O(2)$  za  $A(0) > 0$ , dobijamo izraz za Paonkareovu mapu  $\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \beta(\alpha) + A(\alpha)\eta^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \dots$ . Grafički prikaz sa Slike 27 važi i za sjedlo–homolitičku bifurkaciju.

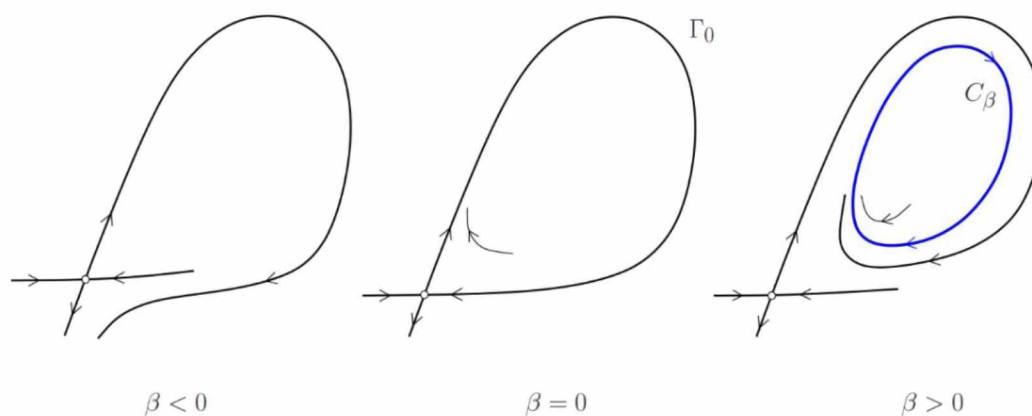
Za različite vrijednosti parametra  $\sigma$  imamo dva slučaja bifurkacije, koji se opet razlikuju po stabilnosti spram vrijednosti parametra  $\beta$  (slika 33).



Slika 33. Sjedlo–homoklinička bifurkacija

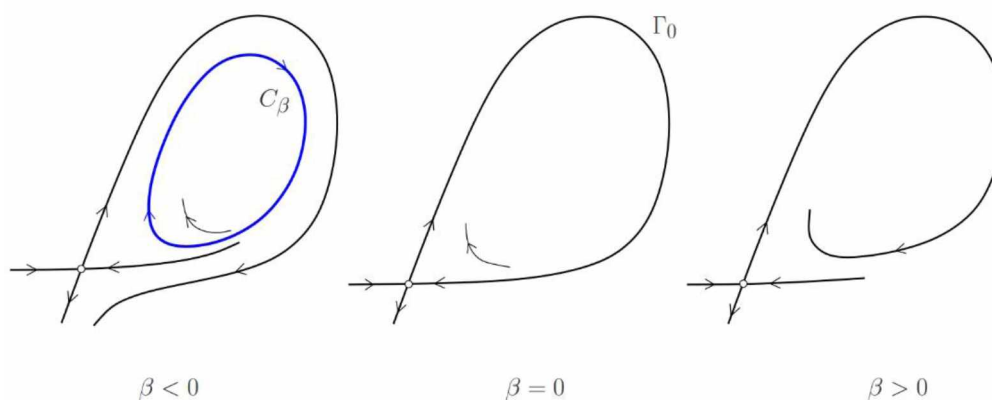
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Iz ugla prikaza orbita, sjedlo–homoklinička bifurkacija za  $\sigma < 0$  ima oblik kao na slici 34. Stabilan ciklus  $C_\beta$  bifurcira iz orbite  $\Gamma_0$  i dolazi do zamjene separatriisa. Iz ugla prikaza orbita, sjedlo–homoklinička bifurkacija za  $\sigma > 0$  ima oblik kao na slici 35. Nestabilan ciklus  $C_\beta$  bifurcira iz orbite  $\Gamma_0$  i dolazi do zamjene separatriisa. Nadalje prezentovaćemo Melnikov integral koji nam omogućava da provjerimo pravilnost (regularnost) razdvajanja manifolda pri varijaciji parametara.



Slika 34. Orbite sjedlo–homokliničkih bifurkacija za  $\sigma < 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



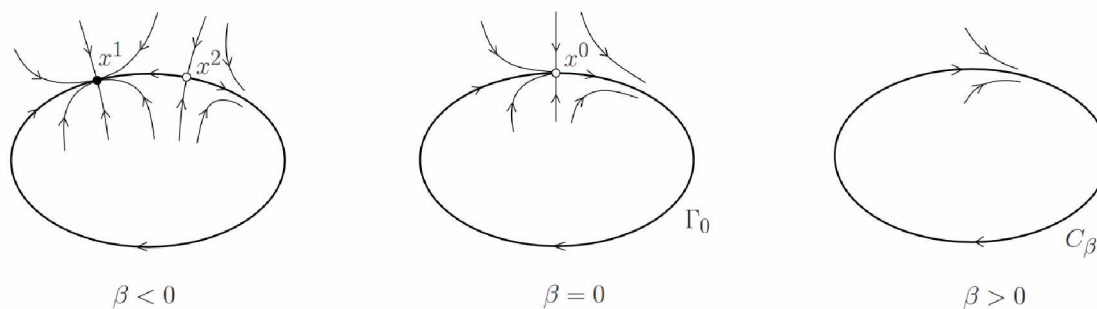
Slika 35. Orbite sjedlo–homokliničkih bifurkacija za  $\sigma > 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

#### Teorema 14 (T14) (Melnikov uslov) Integral

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\int_0^t \operatorname{div} f(X^0(s)) ds\right)} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)(X^0(t)) dt \neq 0$  je različit on mule, uz uslov da je  $i \beta'(0) \neq 0$ .

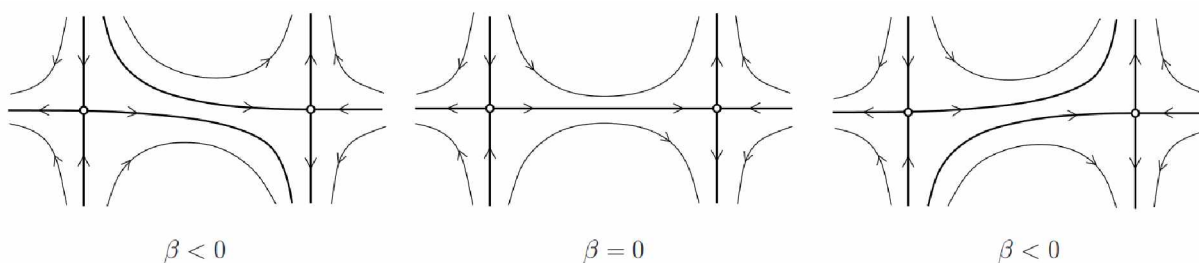
Homoklinička sjedlo–čvor bifurkacija je prikazana na slici 36.



Slika 36. Homoklinička sjedlo-čvor bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz *predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska* [113]

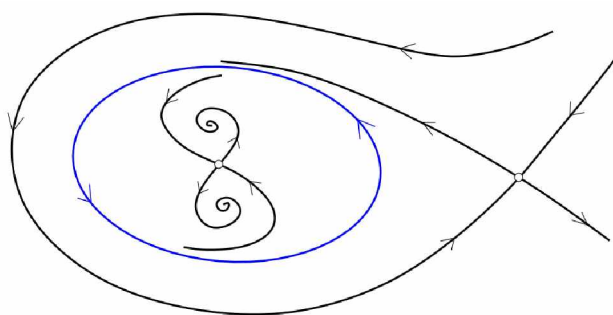
Heteroklinička sjedlo-čvor bifurkacija je prikazana na Slici 37.



Slika 37. Heteroklinička sjedlo-čvor bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz *predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska* [113]

Jedna od osobina heterokliničkih tačaka bifurkacije, je da se one mogu ugnijezditi (akumulirati), što je prikazano na Slici 38.



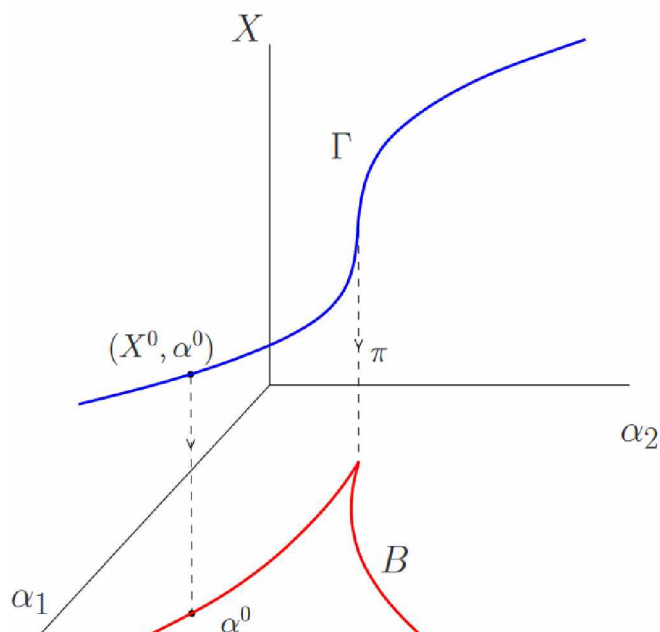
Slika 38. Ugniježdene heteroklinične tačke bifurkacije

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Mimo gore pomenutih i prezentovanih slučajeva bifurkacija kod codim 1, ne postoji više slučajeva vezanih za SNDJPR.

Kod codim 2 bifurkacija u 2D, razmotrimo glatki sistem zavisen od dva parametra  $\dot{X} = f(X, \alpha)$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$ , i  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ . Krive koje pripadaju codim 1 bifurkacijama su  $ld = \begin{cases} f(X, \alpha) = 0 \\ \det \{f_x(X, \alpha)\} = 0 \end{cases}$ , i  $Hopf = \begin{cases} f(X, \alpha) = 0 \\ Sp^{54} \{f_x(X, \alpha)\} = 0 \end{cases}$ . U oba slučaja imamo  $3=2+1$  jednačina u  $\mathbb{R}^4$ . Projekcija  $B = \pi\Gamma$  na  $\alpha$ -ravan prikazuje codim 1 bifurkaciju (slika 39). Dodatno, uvijek se mora provjeriti da li je  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  duž Hopfove krive.

<sup>54</sup> Oznaka  $Sp$  (engl. span) je na engleskom jeziku, i koristi se manje ili više zavisno od toga da li je u predmetnom zapisu više prisutna istočna ili zapadna matematička škola/notacija. Najčešće, u okviru matematike koja se izučava u našoj zemlji i okruženju,  $Sp$  se zapravo predstavlja sa  $Tr$ , što označava *Trag matrice*. Međutim, zbog konzistentnosti prenošenja zapisa i akademske korektnosti zadržana je izvorna notacija izvora.



Slika 39. Codim 1 (crvena)<sup>55</sup> i Codim 2 (plava) bifurkacija 2D sistema

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom Fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

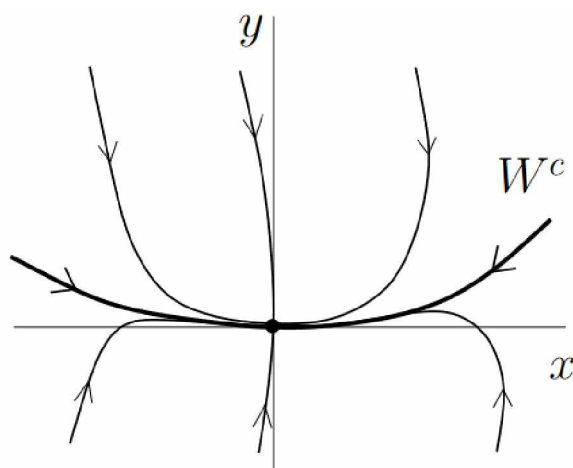
Lokalni codim 2 slučajevi u ravni su: 1) Fold, za  $\lambda_1 = 0$ ,  $\begin{cases} \dot{x} = ax^2 + O(3) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + O(2) \end{cases}$ , pri čemu drugi slučaj za  $y$  možemo dobiti kada je  $\lambda_1 = 0$  i  $a = 0$ , ili  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = 0$ ; i Hopf, za  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,  $\begin{cases} \dot{\rho} = l_1 \rho^3 + O(4) \\ \dot{\phi} = \omega + O(1) \end{cases}$ , pri čemu prvi slučaj za  $\rho$  možemo dobiti kada je  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = 0$  ili  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  i  $l_1 = 0$ . Kako bi zadovoljili pojedinačne slučajeve, potrebno je da „podesimo” vrijednosti oba parametra prateći  $\Gamma$  (ili  $B$ ), što nadalje implicira pojavu codim 2 bifurkacije. Karakteristični slučaj, je Kasp bifurkacija<sup>56</sup>, za  $\lambda_1 = 0$  ili  $a = 0$ , ili tzv. „Katastrofična Bifurkacija” (bifurkacija „loma”). Kritični sistem  $\dot{X} = f(X, 0)$  se može transformisati

<sup>55</sup> Prezentovana codim 1 kriva ima na svom vrhu Cusp tačku bifurkacije.

<sup>56</sup> Cusp Bifurkacija. Na našem jeziku se Cusp čita, odnosno izgovara kao: Kasp. U nekoj domaćoj NDA literaturi se isti prevodi kao šiljak bifurkacijale. Međutim, u ovom radu koristimo izvornu englesku riječ Cusp iz razloga što ista (cusp bifurkacija) predstavlja mnogo više od šiljka (npr. prostorni histerezesni efekat u okolini kritične tačke), tj. predmetni termin može dovesti čitaoca u zabludu. Šiljak se zapravo dobija pri projekciji bifurkacione krive na jednu od ravni – obično donju (slika 39. crvena kriva).

linearnim difeomorfizmom  $\begin{cases} \dot{x} = p_{11}xy + \frac{1}{2} p_{02}y^2 + \frac{1}{6} p_{30}x^3 + \dots, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \frac{1}{2} q_{20}x^2 + q_{11}xy + \frac{1}{2} q_{02}y^2 + O(3). \end{cases}$  Cusp

bifurkacija ima invarijantni *ID centralni manifold*  $W^c = \{(x, y) : y = W(x)\} : y = W(x) = \frac{1}{2} \omega_2 x^2 + O(3)$ , gdje je  $\omega_2 = -\frac{q_{20}}{\lambda_2}$ . Ograničenje  $\dot{X} = f(X, 0)$  na centralni manifold  $W^c$  jeste  $\dot{x} = cx^3 + O(4)$ , gdje je  $c = \frac{1}{6} \left( p_{30} - \frac{3}{\lambda_2} q_{20} p_{11} \right)$ .



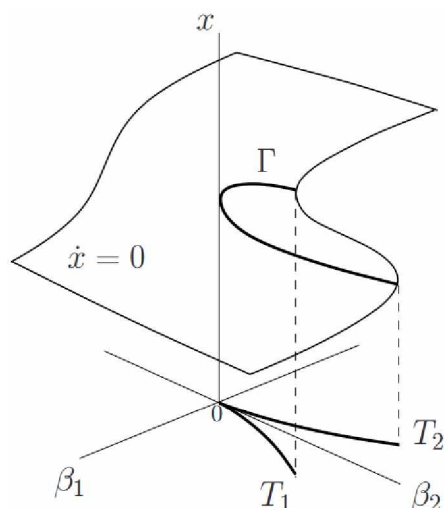
Slika 40. Invarijantni centralni manifold  $W^c$  kod Cusp bifurkacije

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Za određivanje normalne forme Cusp bifurkacije poslužiće nam sljedeća teorema.

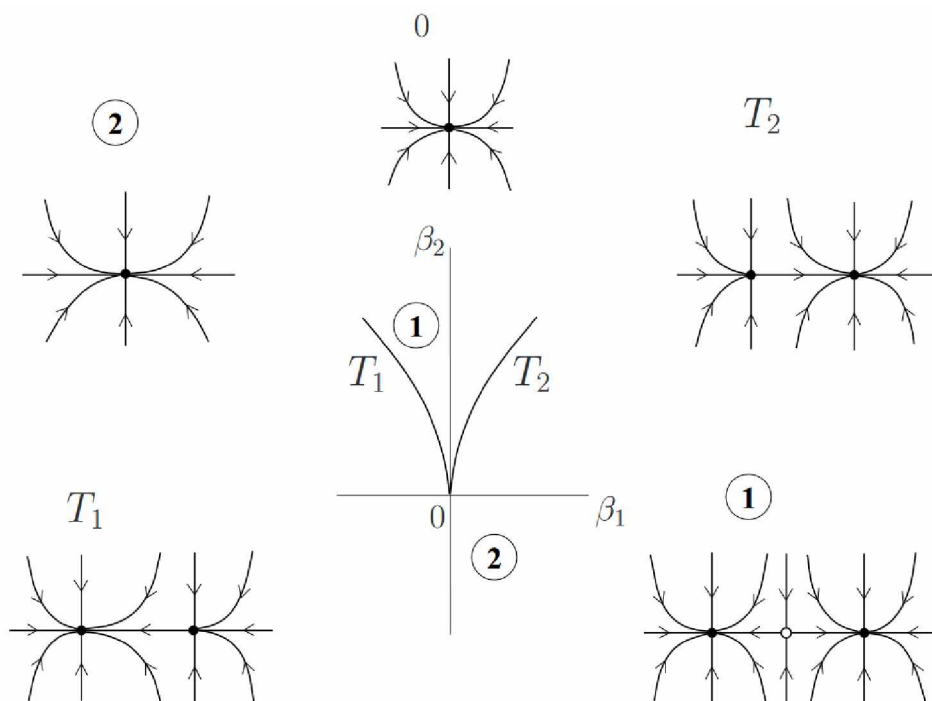
**Teorema 15 (T15)** Ako je  $c \neq 0$ , onda je  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  lokalno topološki ekvivalentna blizu vrha Kasp bifurkacije sa  $\begin{cases} \dot{x} = \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)x + sx^3, \\ \dot{y} = \lambda_2 y, \end{cases}$  gdje je  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$  i  $s = \text{sign}(c) = \pm 1$ .

Za Fold krivu važi  $4\beta_2^3 + 27s\beta_1^2 = 0$  (slika 41). Diagram Kasp bifurkacija za vrijednosti  $c < 0$  i  $\lambda_2 < 0$  je prikazan na slici 42. Unutar „klina” postoje tri ravnoteže, sudaraju se u parovima na granicama  $T_{1,2}$  i pri tome jedan ekvilibrijum ostaje spolja (slika 42).



Slika 41. Ekvilibrijski manifold Cusp bifurkacije

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



Slika 42. Diagram Kasp (Cusp) bifurkacija za vrijednosti  $c < 0$  i  $\lambda_2 < 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



Bogdanov–Takens bifurkacija nastaje ukoliko su ispunjeni uslovi da je  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  i  $A = f_X(0, 0) \neq 0$ . Kritični sistem  $\dot{X} = f(X, 0)$  se može transformisati linearnim

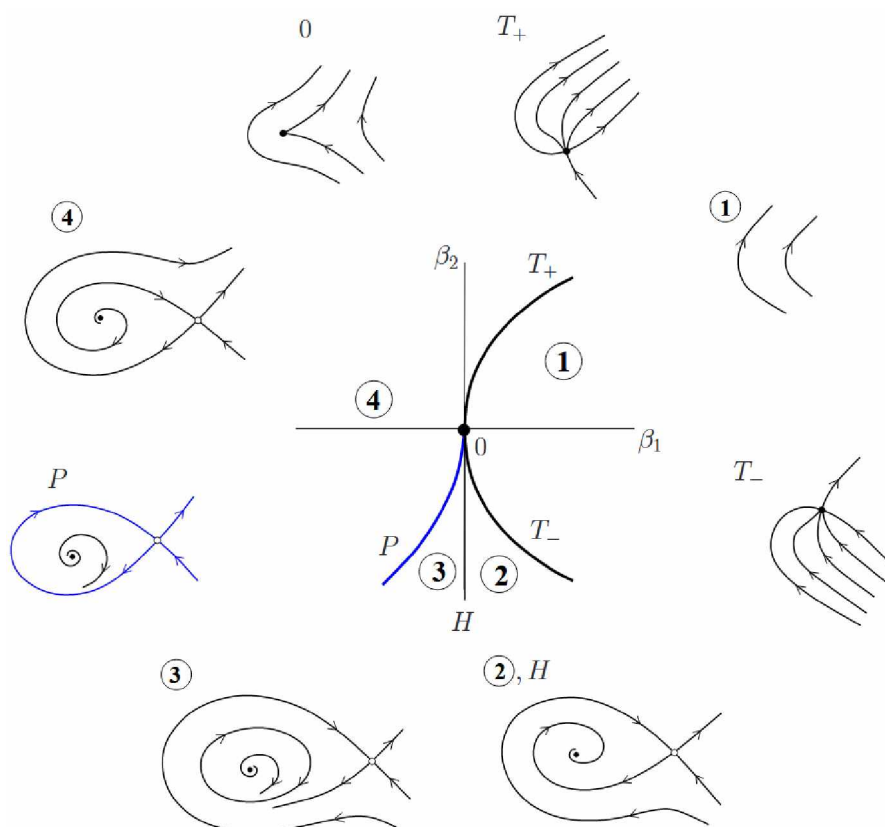
difeomorfizmom 
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2} p_{20}x^2 + p_{11}xy + \frac{1}{2} p_{02}y^2 + O(3) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = \frac{1}{2} q_{20}x^2 + q_{11}xy + \frac{1}{2} q_{02}y^2 + \frac{1}{6} q_{03}x^3 + O(3). \end{cases}$$
 Uz pomoć

nelinearnog lokalnog difeomorfizma možemo uraditi i promjenu koordinata  $\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = P(x, y), \end{cases}$

u okolini (novog) koordinatnog početka sa  $\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = a\xi^2 + b\xi\eta + \dots, \end{cases}$  gdje je  $a = \frac{1}{2} q_{20}$ ,  $b = p_{20} + p_{11}$ . Bogdanov Takens *normalnu formu* definišemo pomoću sljedeće teoreme:

**Teorema 16 (T16)** *Ako je  $ab \neq 0$ , onda je  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  lokalno topološki ekvivalentna u blizini Bogdanov–Takens bifurkacije sa  $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)x + x^2 + sxy, \end{cases}$  gdje je  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$  i  $s = \text{sign}(ab) = \pm 1$ .*

Bifurkacione krive za  $ab < 0$  se mogu podijeliti na (slika 43): 1) *Fold* (T – krive na slici) za  $\beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2$ ; 2) *Andronov–Hopf* (H – krive na slici) za  $\beta_1 = 0$  i  $\beta_2 < 0$ ; 3) *Sjedlo-homoklinička* (P – krive na slici)  $\beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + O(3)$  i  $\beta_2 < 0$ , pri čemu sjedlo-homoklinička bifurkacija spada u red *Globalnih bifurkacija*.



Slika 43. Dijagram Bogdanov–Takens bifurkacija za vrijednosti  $ab < 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Jedinstveni granični ciklus (LC) se pojavljuje na Andronov–Hopf bifurkacionoj krivoj H, te zatim nestaje putem sjedlasto–homokliničke orbite na krivoj P.

Još jedna karakteristična bifurkacija jeste Bautin bifurkacija („Generalizovana Hopf” bifurkacija) sa GF oznakom u MATCONT-u, i za koju važi  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  i  $l_1 = 0$ . Kritični sistem  $\dot{X} = f(X, 0)$  se može transformisati linearnim difeomorfizmom u kompleksnu formu  $\dot{z} = i\omega z + \sum_{2 \leq j+k \leq 5} \frac{1}{j!k!} g_{jk} z^j \bar{z}^k + O(6)$ , koja je lokalno glatko ekvivalentna sa **Poankareovom normalnom formom** i jednaka je  $\dot{w} = i\omega w + c_1 w |w|^2 + c_2 w |w|^4 + O(6)$ , gdje je **Ljapunov koeficient** jednak  $l_j = \frac{1}{\omega} \Re(c_j)$  i zadovoljava  $2l_1 = \frac{1}{\omega} \left( \Re(g_{21}) - \right.$

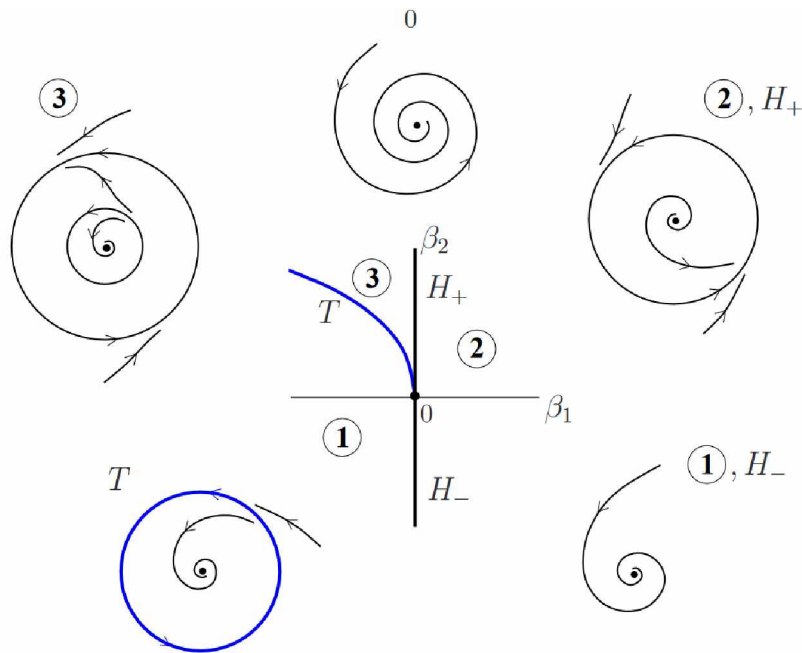
$$\frac{1}{\omega} \Im(g_{20}g_{11})) \Big), \text{ što dalje implicira da je } l_1 = \frac{1}{2\omega^2} \Re(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}). \text{ Dalje važi, ukoliko je } l_1 = 0 \text{ onda je}$$

$$12l_2(0) = \frac{1}{\omega} \Re(g_{32}) + \frac{1}{\omega^2} \Im \left[ g_{20}\bar{g}_{31} - g_{11}(4g_{31} + 3\bar{g}_{22}) - \frac{1}{3}g_{02}(g_{40} + \bar{g}_{13}) - g_{30}g_{12} \right] + \frac{1}{\omega^3} \left\{ \Re \left[ g_{20} \left( \bar{g}_{11}(3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02} \left( \bar{g}_{12} - \frac{1}{3}g_{30} \right) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}g_{03} \right) + g_{11} \left( \bar{g}_{02} \left( \frac{5}{3}\bar{g}_{30} + 3g_{12} \right) + \frac{1}{3}g_{02}\bar{g}_{03} - 4g_{11}g_{30} \right) \right] + 3\Im(g_{20}g_{11})\Im(g_{21}) \right\} + \frac{1}{\omega^4} \{ \Im [g_{11}\bar{g}_{02}(\bar{g}_{20}^2 - 3\bar{g}_{20}g_{11} - 4g_{11}^2)] + \Im(g_{20}g_{11}) [3\Re(g_{20}g_{11}) - 2|g_{02}|^2] \}.$$

Pri definisanju Bautin normalne forme, poslužićemo se sljedećom teoremom:

**Teorema 17 (T17)** Ako je  $l_2 \neq 0$  i  $\omega \neq 0$ , onda je  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  lokalno topološki ekvivalentna u blizini Bautin bifurkacije normalnoj formi prikazanoj u polarnim koordinatama na sljedeći način:  $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)\rho^2 + s\rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases}$  gdje je  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$  i  $s = \text{sign}(l_2) = \pm 1$ .

Bifurkacione krive za ( $l_2 < 0$ ) su: 1) *Superkritična Andronov–Hopf* bifurkacija, za koju važi Andronov–Hopf  $H^-$ :  $\beta_1 = 0$  i  $\beta_2 < 0$ ; 2) *Subkritična Andronov–Hopf* bifurkacija, za koju važi Andronov–Hopf  $H^+$ :  $\beta_1 = 0$  i  $\beta_2 > 0$ ; 3) *Ciklični fold* za koji važi  $\beta_1 = -\frac{1}{4}\beta_2^2$ , i  $\beta_2 > 0$ , pri čemu *ciklični fold* bifurkacija spada u red *globalnih bifurkacija*. Pomenute bifurkacije su predstavljene na slici 44.

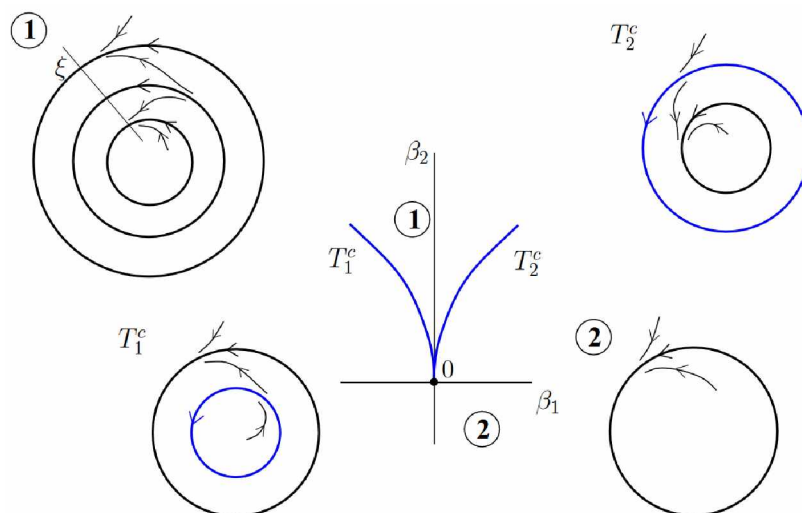


Slika 44. Dijagram Bautin bifurkacija za vrijednosti  $I_2 < 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

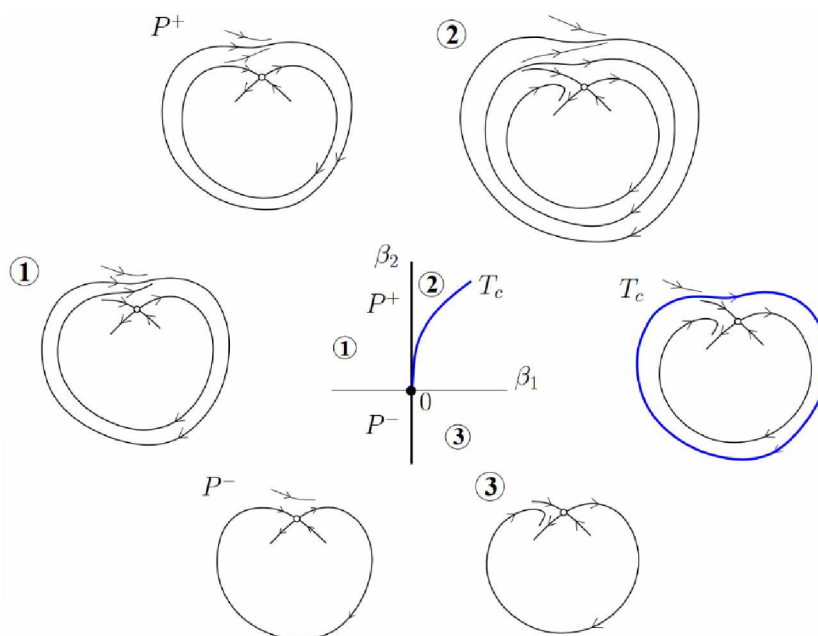
Na „vrhu klina” između  $H^+$  i  $T_c$  postoje dva granična ciklusa koja nastaju putem različitih Andronov-Hopf bifurkacija, i koje se spajaju odnosno nestaju na cikličnoj-fold krivoj  $T_c$ .

Dodatno, u **globalne** *codim 2* bifurkacije u 2D spadaju: 1) *Ciklična-Kasp* (engl. *cyclic cusp*) bifurkacija za  $b = 0$  (slika 45), i kritičnu Poankareovu mapu koja preslikava  $\xi' \rightarrow \xi + c \xi^3 + \dots$ . Ako je  $c \neq 0$ , onda je Poincaréova mapa lokalno topološki ekvivalentna sa  $\xi' \rightarrow \beta_1(\alpha) + \beta_1(\alpha)\xi + \xi + s\xi^3$ , gdje je  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ , i  $s = \text{sign}(c) = \pm 1$ . 2) *Neutralna sjedlo-homoklinička orbita* (engl. *Neutral saddle homoclinic orbit*) za koju važi  $\int_{-\infty}^{\infty} (\text{div } f)(X^0(t))dt < 0$ , ima dijagram bifurkacije prikazan na Slici 46. 3) *Ne-centralna sjedlo-čvor homoklinička orbita* (slika 47).



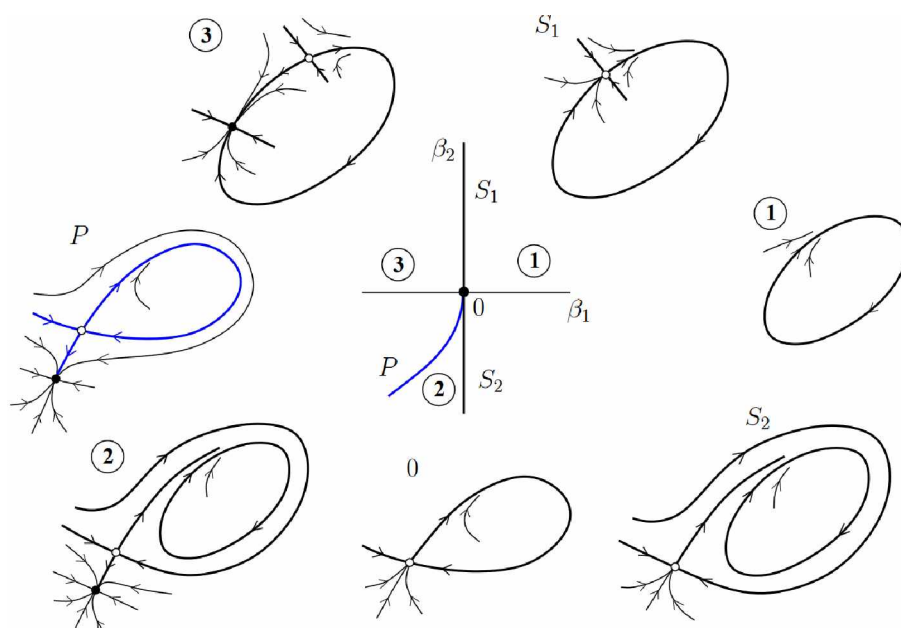
Slika 45. Kusp–Ciklična bifurkacija (engl. cusp cyclic) za  $b = 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



Slika 46. Neutralna sjedlo–homoklinička orbita za  $\int_{-\infty}^{\infty} (\text{div } f)(X^0(t)) dt < 0$

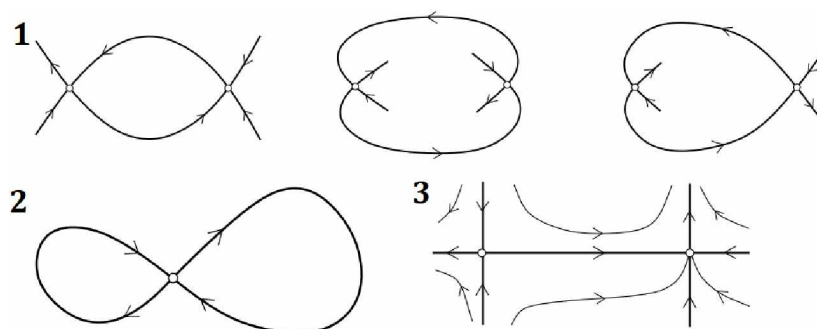
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



Slika 47. Ne-centralna sjedlo-čvor homoklinička orbita

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Preostale globalne codim 2 bifurkacije su prikazane na slici 48.



Slika 48. Preostale globalne codim 2 bifurkacije

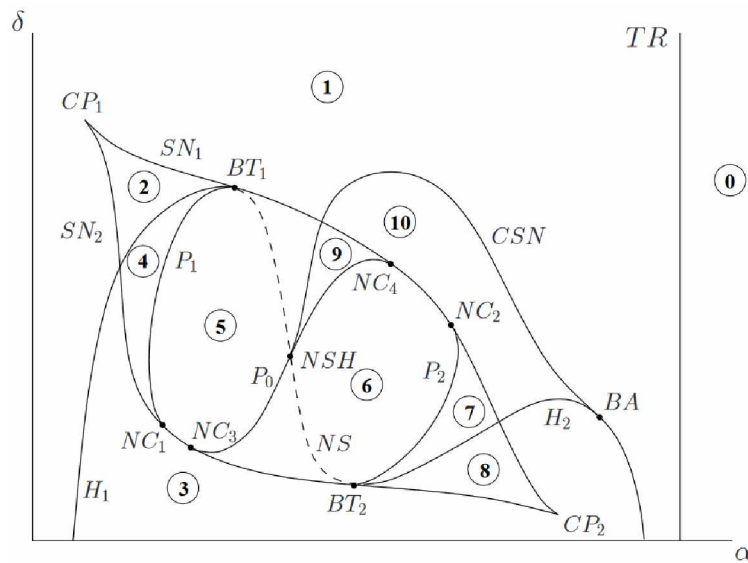
1) Heteroklinički ciklusi; 2) Figure „Osmice”; 3) Sjedlo-na-sjedlo-čvor bifurkacije.

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Prethodno navedeno, najbolje možemo uočiti na nekom relevantnom primjeru. Na primjer, čuveni *Bazjikinov plijen-predator*<sup>57</sup> model posjeduje raznoliku dinamiku unutar svog globalnog dinamičkog faznog portreta (slika 49). Bazjikinov model se opisuje sljedećim

$$\text{jednačinama} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2. \end{cases}$$

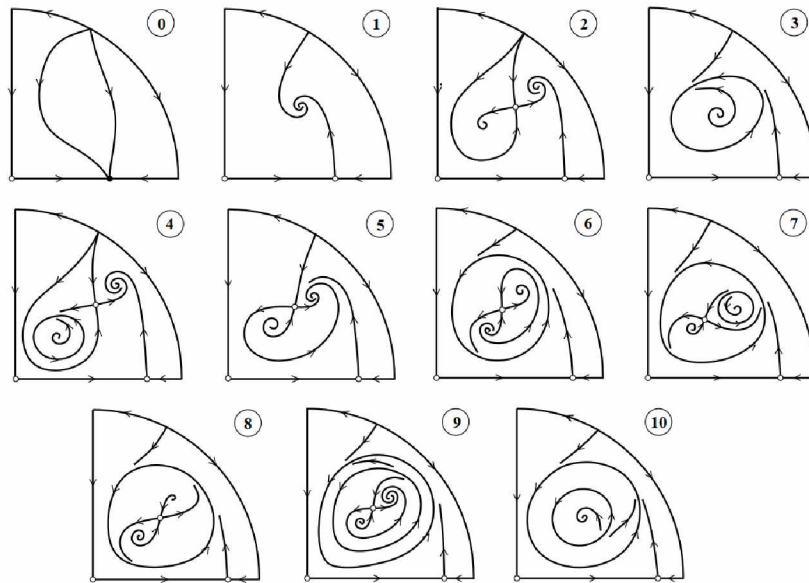
Na slici 50. su prikazani generički fazni portreti (lokalni), koji se pronalaze (egzistiraju) u okviru globalnog bifurkacionog portreta prikazanog na slici 49. Svaki zaokruženi broj prikazan na slici 49. odgovara generičkom portretu sa istim brojem na slici 50.



Slika 49. Globalni (dinamički) fazni portret

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

<sup>57</sup> Bazykin AD, Berezovskaya FS, Zudin SL. Bifurcation approach to the predator-prey population models (Version of the computer book). *International Centre for Theoretical Physics*; 1993. (A.D. Bazjikin, Institut matematičkih problema u biologiji, R.A.S., Puschino, Ruska federacija)



Slika 50. Lokalni (dinamički) fazni portreti

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Kada analiziramo rješenja i orbite, posmatramo sistem  $\dot{X} = f(X)$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ . Orbite, fazne portrete i topološke ekvivalencije definišemo za slučaj  $n = 2$ . Ekvilibrijum je u  $f(X_0) = 0$ .

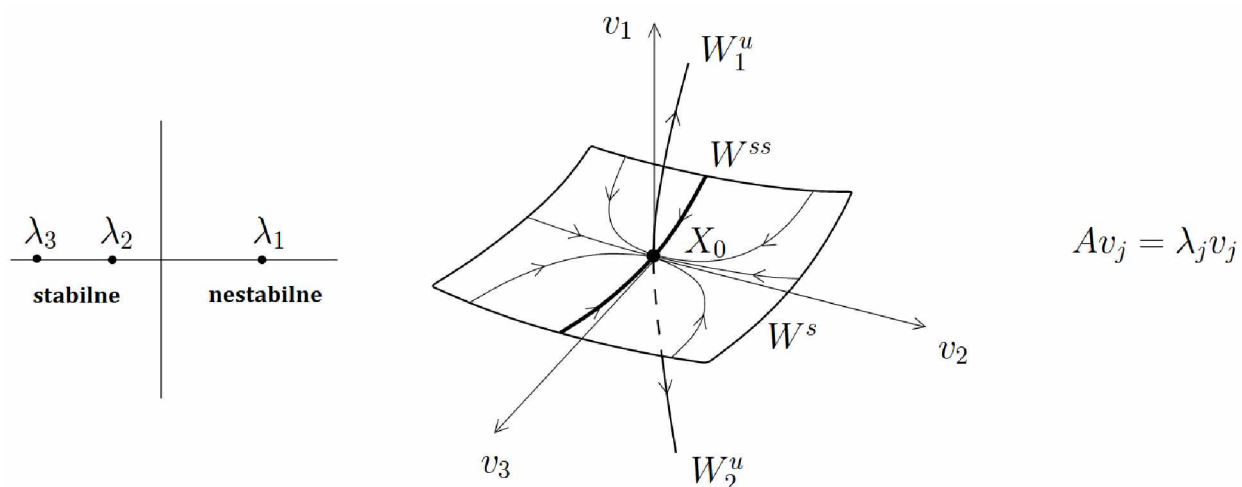
**Definicija 26 (D26)** Ekvilibrijum se naziva hiperboličkim ukoliko je  $\Re(\lambda) \neq 0$  za sve sopstvene vrijednosti Jakobijanske matrice  $A = f_x(X_0)$ .

U T9 (Grobman-Hartman teorema) je naznačeno da, ukoliko je ekvilibrijum  $X_0 = 0$  hiperbolički, tada je  $\dot{X} = f(X)$  lokalno topološki ekvivalentno u okolini (novo-definisano) koordinatnog početka  $\dot{Y} = AY$ .

Analiziraćemo, povezano sa prethodno navedenim, stabilne i nestabilne invarijantne manifolde ekvilibrjuma. Naime, ukoliko hiperbolički ekvilibrijum  $X_0$  ima  $n_s$  sopstvenih vrijednosti sa  $\Re(\lambda) < 0$  i  $n_u$  sopstvenih vrijednosti sa  $\Re(\lambda) > 0$ , i ima  $n_s$ -dimenzioni glatki invarijantni manifold  $W^s$  koji se sastoji od svih orbita koje se približavaju  $X_0$  kada  $t \rightarrow +\infty$ ,



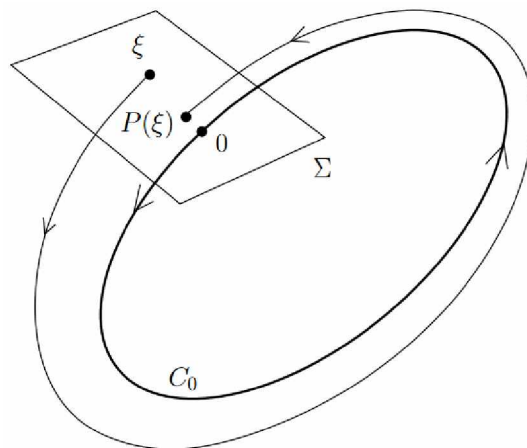
i  $n_u$ -dimenzioni glatki invarijantni manifold  $W^u$  koji se sastoji od svih orbita koje se približavaju  $X_0$  kada  $t \rightarrow -\infty$  (slika 51).



Slika 51. Stabilni i nestabilni manifoldi sa pripadajućim brojem sopstvenih vrijednosti

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene Teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Kod *periodičnih orbita (ciklusa)* primijenimo Pankareovu mapu  $\zeta \rightarrow \tilde{\zeta} = P(\zeta)$  koja je definisana nad glatkim  $(n-1)$  dimenzionim presjekom  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Ukoliko  $C_0$  odgovara slučaju da je  $\zeta = 0$ , tada je  $P(0) = 0$  i  $P(\zeta) = M\zeta + O(2)$ , i važi da je  $\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-1} = e^{\int_0^{T_0} \text{div}(f)(x^0(t)) dt} > 0$  (slika 52).



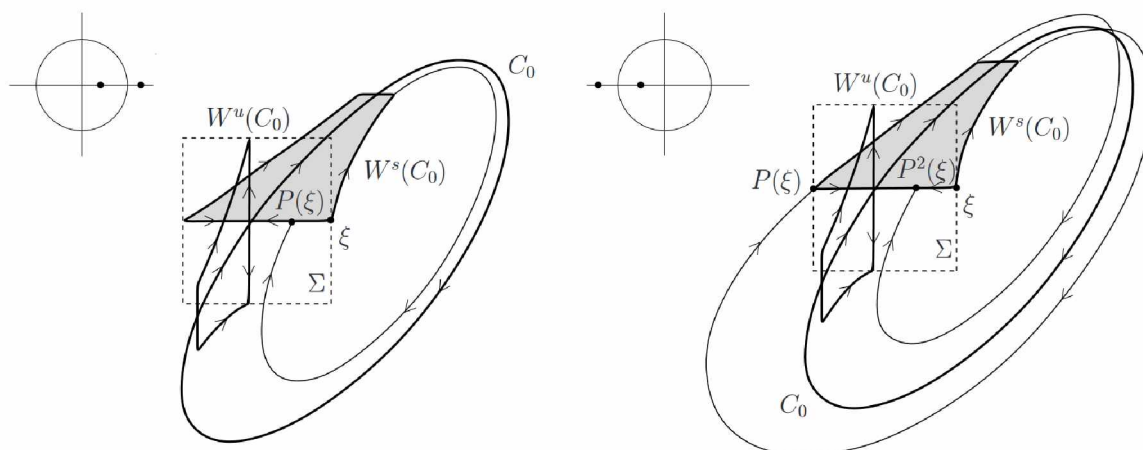
Slika 52. Poankareva mapa u prostoru

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Definicija 27 (D27)** *Ciklus se naziva **hiperboličkim** ukoliko je  $|\mu| \neq 1$  za sve sopstvene vrijednosti (množioce ili multiplikatore) matrice  $M = P'_\xi(0)$ .*

**Teorema 18 (T18) (Grobman–Hartman za mape)** *Poankareova mapa  $\xi \rightarrow P(\xi)$  hiperboličkog ciklusa je lokalno topološki ekvivalentna u blizini koordinatnog početka (novog) sa  $\xi \rightarrow M\xi$ .*

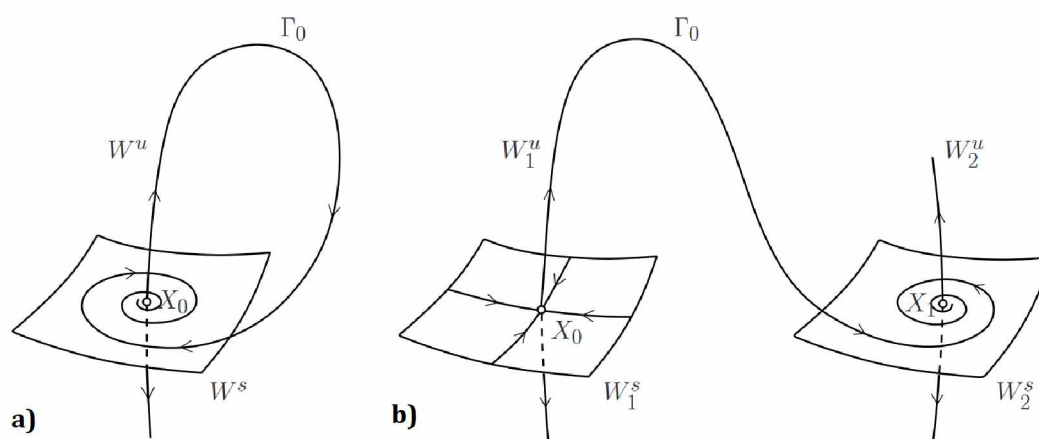
Sada ćemo analizirati stabilne i nestabilne invarijantne manifolde ciklusa. Ukoliko hiperbolički ciklus  $C_0$  ima  $m_s$  množioca sa  $|\mu| < 1$  i  $m_u$  množitelja sa  $|\mu| > 1$ , ima  $(m_s + 1)$  dimenzioni glatki invarijantni manifold  $W_s$  koji se sastoji od svih orbita koje se približavaju  $C_0$  kada  $t \rightarrow \infty$ , i  $(m_u + 1)$  dimenzioni glatki invarijantni manifold  $W_u$  sastavljen od svih orbita koje se približava  $C_0$  pri  $t \rightarrow -\infty$  (slika 53).



Slika 53. Stabilni i nestabilni invarijantni manifoldi ciklusa

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

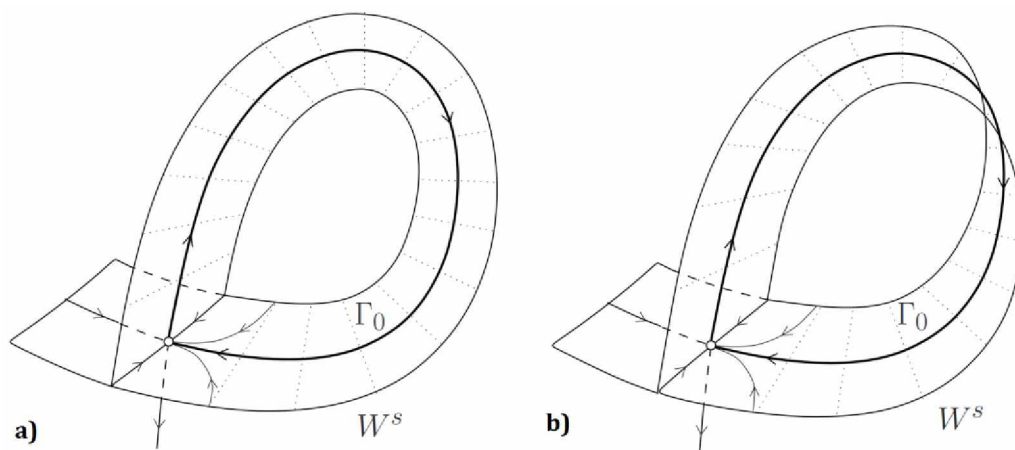
Sljedeća skupina koju analiziramo su spojene orbite. *Homokliničke orbite* su zapravo presjeci  $W^s$  i  $W^u$  sa jednim ekvilibrijumom/ciklusom. *Heteroklinične orbite* su presjeci  $W^s$  i  $W^u$  sa dva različita ekvilibrija/ciklusa (slika 54).



Slika 54. Spojene orbite. a) Homoklinične orbite, b) Heteroklinične orbite.

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Generički gledano, spoj ili ukrštanje 2D invarijantnog manifolda u blizini homokliničke orbite  $\Gamma_0$  sa ekvilibrijumom koji ima realne sopstvene vrijednosti (sjedlo) u  $\mathbb{R}^3$  može biti *prost* (orjentisan) ili *uvrnut* (ne-orjentisan)<sup>58</sup>.



Slika 55. Intersekcija 2D invarijantnog manifolda u blizini homokliničke orbite sa ekvilibrijumom. a) Prosto (orjentisano) ukrštanje, b) Uvrnuto (ne-orjentisano) ukrštanje.

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

U kompaktne invarijantne manifolde spadaju: 1) Torusi<sup>59</sup>; 2) Sfere; 3) Klein<sup>60</sup>-ova boca. Posebnu kategoriju čine tzv. *neobični (haotični) invarijantni skupovi*, koji imaju sljedeće osobine: 1) **fraktalna** struktura (nije manifold); 2) sadrže **beskonačan** broj hiperboličkih ciklusa; 3) iskazuju **osjetljivu zavisnost** rješenja od početnih uslova; 4) može

<sup>58</sup> Zapravo, imamo Mobijusovu traku po kojoj se proteže orbita(e).

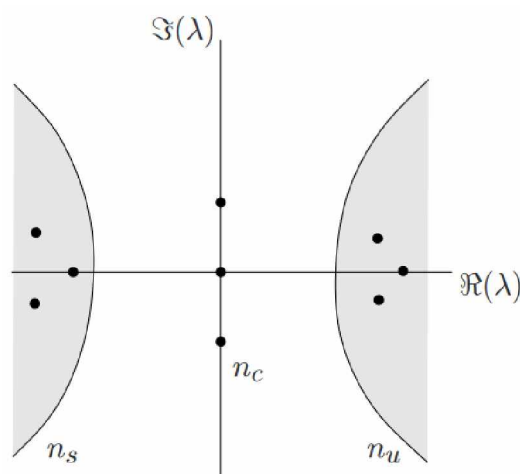
<sup>59</sup> Npr. 2D torus  $\mathbb{T}^2$  sa periodičnim ili kvaziperiodičnim orbitama (slika 5).

<sup>60</sup> Kleinova boca je primjer neorijentirane površine u matematici, što znači da je jednostrana površina na kojoj se putnik može kretati dok se vraća na početnu tačku, okrećući se naopako. Formalno, navedeno je dvodimenzionalna mnogostrukost (manifold) na kojoj se ne može definisati normalni vektor u svakoj tački koji kontinuirano varira preko cijele površine. Srodne neorijentirane površine uključuju Möbiusovu traku i realnu projektivnu ravninu. Za razliku od Möbiusove trake, Kleinova boca nema granicu. Felix Klein je prvi puta opisao 1882. godine.

Feliks Kristijan Klajn (njemački: [klajn]; 25. april 1849 — 22. jun 1925) bio je njemački matematičar i profesor matematike. Postao je poznat po svom radu u teoriji grupa, kompleksnoj analizi, neuklidskoj geometriji te povezanosti između geometrije i teorije grupa.

biti privlačan (*neobični atraktori*); 5) orbite se mogu kodirati nizovima simbola (*simbolička dinamika*).

Najsloženiji oblik je bifurkacija  $n$ -dimenzionih SNDJPR. Lokalne (ekvilibrirumske) bifurkacije su prvi oblik u okviru podjele pomenutih  $n$ -dimenzionih bifurkacija. U analizi  $n$ -dimenzionih bifurkacija potrebno je koristiti redukciju centralnog manifolda i pripadajuće teoreme. Naime, neka je  $X_0 = 0$  *nehiperbolični* ekvilibrirum sa stabilnim, nestabilnim i kritičnim sopstvenim vrijednostima (slika 56).

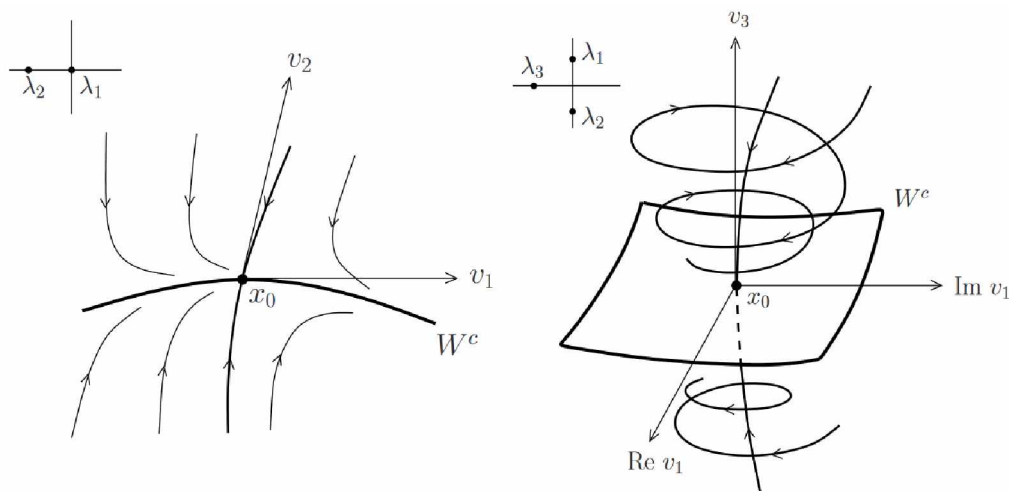


Slika 56. Nehiperbolični ekvilibrirum sa stabilnim, nestabilnim i kritičnim sopstvenim vrijednostima

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Teorema 19 (T19)** Za svako dovoljno malo  $|\alpha|$  postoji lokalni invarijantni *centralni manifold*  $W^c(\alpha)$  dimenzija  $n_c$  koji je lokalno privlačan ako je  $n_u = 0$ , a odbijajući ako je  $n_s = 0$ , i tip sjedla ako je  $n_s n_u > 0$ . Štoviše,  $W^c(0)$  je tangenta na kritičnu ( $\varepsilon$ -blisku) okolinu prostora stanja  $A = f_x(0, 0)$  (slika 57).

$W^c(0)$  nije jedinstveno, međutim svi  $W^c(0)$  imaju isti oblik zapisa, jer uzimaju određeni i konkretni član predmetne funkcije koja je razvijena u Tejlrov red (suprotno, od svih ostalih i postojećih i/ili mogućih članova).



Slika 57. Centralni manifold

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

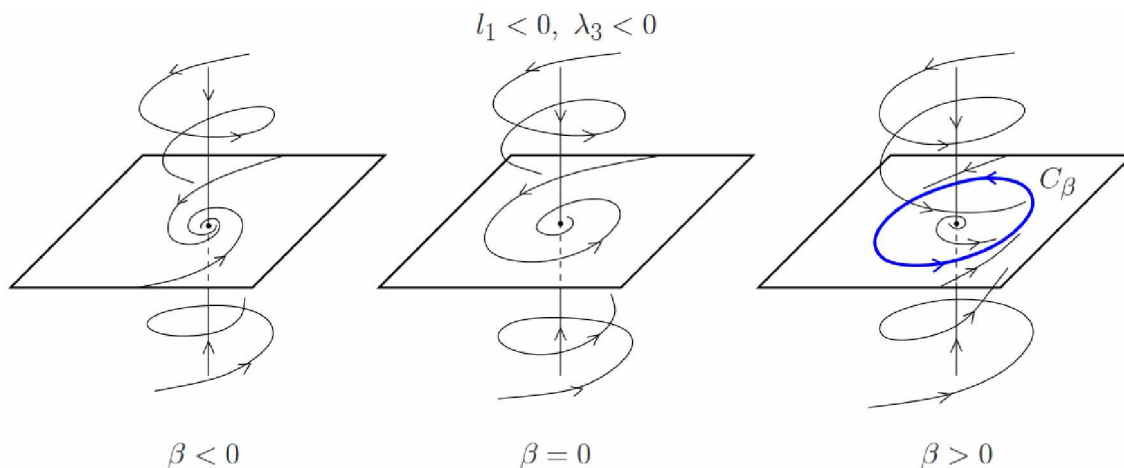
**Teorema 20 (T20)** Ako je  $\xi = g(\xi, \alpha)$  ograničenje za  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na  $W^c(\alpha)$ , onda je ovaj sistem lokalno topološki ekvivalentan sa

$$\begin{cases} \dot{\xi} = g(\xi, \alpha), \xi \in \mathbb{R}^{n_c}, \alpha \in \mathbb{R}^m, \\ \dot{x} = -x, x \in \mathbb{R}^{n_s}, \\ \dot{y} = y, y \in \mathbb{R}^{n_u}. \end{cases}$$

Kod *codim*–1 bifurkacija parametar  $\alpha \in \mathbb{R}$  (jer, je  $m = 1$ ), i imamo opšti oblik jednačine koja odgovara sljedećem izrazu:  $f(X, 0) = AX + \frac{1}{2}B(X, X) + \frac{1}{6}C(X, X, X) + O(4)$ . U slučaju *Fold* (*sjedlo–čvor*) bifurkacije važi da je  $\lambda_1 = 0$  i  $g(\xi, 0) = a\xi^2 + O(3)$ . Ukoliko je  $a \neq 0$ , onda ograničenje  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na njegov *ID* centralni manifold  $W^c(\alpha)$  je lokalno topološki ekvivalentno sa  $\xi = \beta(\alpha) + a\xi^2$  (slika 29). Računska formula za određivanje *Fold* (*sjedlo–čvor*) bifurkacije ima elemente:  $a = \frac{1}{2} \langle q, B(q, q) \rangle$ , gdje  $Aq = A^T p = 0$ , i  $\langle p, q \rangle = \langle q, q \rangle = 1$ .

Dok, kod *Andronov–Hopf* bifurkacija važi da je  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ) i  $\xi = g(\xi, 0)$  je lokalno glatko ekvivalentno sa  $\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + O(5)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Ako je  $l_1 = \frac{\Re(c_1)}{\omega} \neq 0$ ,

onda ograničenje  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na njegov 2D centralni manifold  $W^c(\alpha)$  je lokalno topološki ekvivalentno sa  $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta(\alpha) + l_1 \rho^2), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases}$  (slika 58).



Slika 58. Andronov–Hopf bifurkacija u 3D

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Računska formula za određivanje *Andronov–Hopf* bifurkacija  $l_1 = \frac{1}{2\omega} \Re [ \langle p, C(q, q, \bar{q}) - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E_n - A)^{-1}B(q, q)) \rangle ]$ , gdje je  $Aq = i\omega q, A^T p = -i\omega p, \langle p, q \rangle = \langle q, q \rangle = 1$ .

Kod **codim–2 bifurkacija** parametar  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  (jer, je  $m = 2$ ). Sljedeće bifurkacije pripadaju isključivo codim–2 domenu.

1) **Cusp (Kasp)** bifurkacija ima sljedeće karakteristike  $\lambda_1 = 0, a = 0$  ( $n_c = 1$ ). Ako je  $c \neq 0$ , onda ograničenje  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  je lokalno topološki ekvivalentno sa  $\dot{\xi} = \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)\xi + s\xi^3$ , gdje je  $s = \text{sign}(c) = \pm 1$ .

2) **Bogdanov–Takens** bifurkacija ima sljedeće karakteristike  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ( $n_c = 2$ ). Ako je  $ab \neq 0$ , onda ograničenje  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  je lokalno topološki ekvivalentno sa  $\dot{x} = y, \dot{y} = \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)x + x^2 + sxy$ , gdje je  $s = \text{sign}(ab) = \pm 1$ .

3) **Bautin** bifurkacija ima sljedeće karakteristike  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,  $\omega > 0$  ( $n_c = 2$ ). Ako je  $l_2 \neq 0$ , onda ograničenje  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  je lokalno topološki ekvivalentno sa  $\dot{\rho} = \rho(\beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)\rho^2 + s\rho^4)$ ,  $\dot{\phi} = 1$ , gdje je  $s = \text{sign}(l_2) = \pm 1$ .

4) **Fold–Hopf (sjedlo–čvor–Hopf)** bifurkacija ima sljedeće karakteristike  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$ ,  $\omega > 0$  ( $n_c = 3$ ). Generički posmatrano, ograničenja  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  su glatko–orbitalno ekvivalentna sa

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1(\alpha) + \xi^2 + s\rho^2 + P(\xi, \rho, \phi, \alpha), \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2(\alpha) + \theta(\alpha)\xi + \xi^2) + Q(\xi, \rho, \phi, \alpha), \\ \dot{\phi} = \omega_1(\alpha) + \theta_1(\alpha)\xi + R(\xi, \rho, \phi, \alpha), \end{cases} \quad \text{gdje je } s \text{ jednako } s =$$

$\pm 1$ , i važi  $\theta(0) \neq 0$ ,  $\omega_1(0) > 0$ ,  $P, Q, R = O(\|\xi, \rho\|^4)$ . Dijagrami bifurkacije zavise od  $O(4)$ –članova, međutim opšta slika faznog portreta se prikazuje pomoću tzv. „skraćenog normalnog oblika” bez  $O(4)$ –članova. Takođe, postoje **invarijantni torusi** i **homokliničke orbite** u blizini sjedlo–čvor–Hopf bifurkacije.

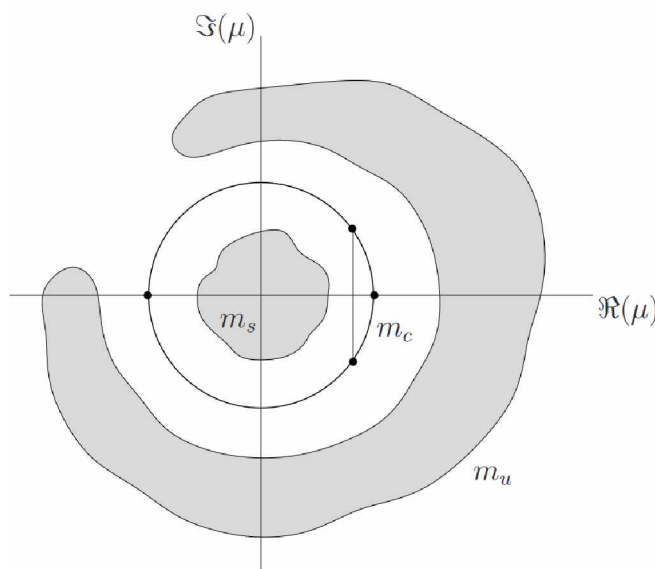
5) **Hopf–Hopf** bifurkacije imaju sljedeće karakteristike  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ ,  $\omega_j > 0$  ( $n_c = 4$ ). Generički posmatrano, ograničenja  $\dot{X} = f(X, \alpha)$  na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  su glatko–orbitalno ekvivalentna sa:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\beta_1(\alpha) + p_{11}(\alpha)r_1^2 + p_{12}(\alpha)r_2^2 + s_1(\alpha)r_2^4 + \Phi_1(r, \phi, \alpha), \\ \dot{r}_2 = r_2(\beta_2(\alpha) + p_{21}(\alpha)r_1^2 + p_{22}(\alpha)r_2^2 + s_2(\alpha)r_1^4 + \Phi_2(r, \phi, \alpha) \\ \dot{\phi}_1 = \omega_1(\alpha) + \Psi_1(r, \phi, \alpha), \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2(\alpha) + \Psi_2(r, \phi, \alpha). \end{cases} \quad \text{gdje je } \Phi_j =$$

$O(\|r\|^6)$ ,  $\Psi_j = O(\|r\|)$ . Dijagrami bifurkacije zavise od  $\Phi_j$ –članova i  $\Psi_j$ –članova, međutim opšta slika faznog portreta se prikazuje pomoću tzv. „skraćenog normalnog oblika” bez pomenutih članova. Takođe, postoje **invarijantni torusi** i **homokliničke orbite** u blizini Hopf–Hopf bifurkacija.

Lokalna bifurkacija ciklusa nastaje kada važi  $\dim\{W^c\} = m_c$  (slika 59).



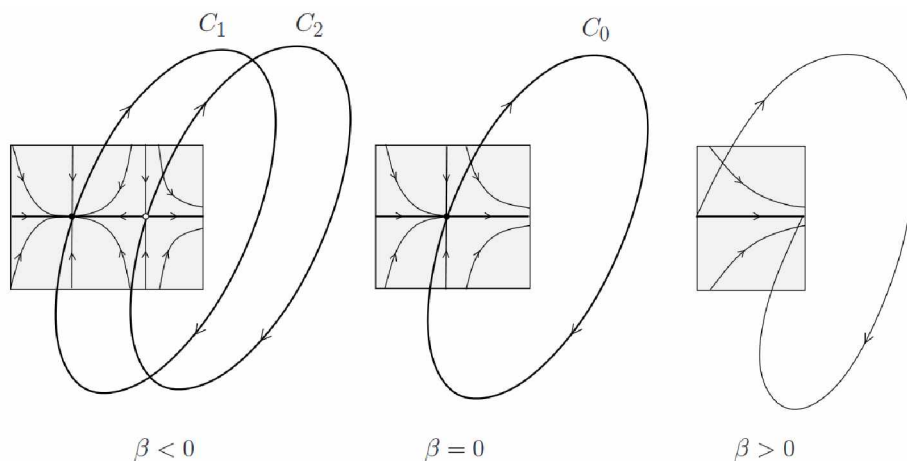


Slika 59. Lokalna bifurkacija ciklusa

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Kritični slučajevi codim–1 bifurkacija su: **1) Ciklične–Fold** (ciklične sjedlo–čvor) bifurkacija, sa uslovom da je  $\mu_1 = 1$ ; **2) Period–doubling** (dupliranje perioda) bifurkacija sa uslovom da je  $\mu_1 = -1$ ; **3) Neimark–Sacker** (Neimark-Saker) (**torus**) bifurkacija sa uslovom  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ , za vrijednosti  $0 < \theta_0 < \pi$ . Detaljnija elaboracija navedenog je sljedeća:

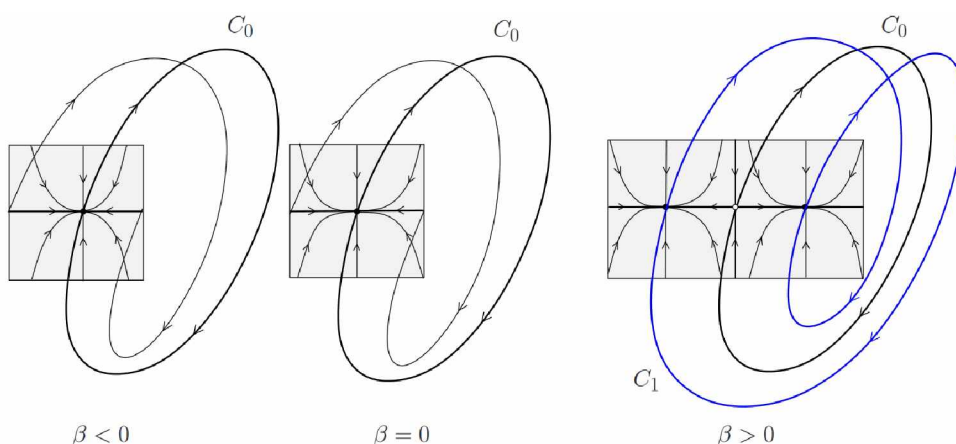
**Fold** (sjedlo–čvor) **bifurkacija ciklusa** zahtijeva uslov  $\mu_1 = 1$  ( $m_c = 1$ ), i ograničenje za  $\xi \rightarrow P(\xi, 0)$  na centralnom manifoldu  $W^c(0)$   $\xi \rightarrow \xi + b\xi^2 + O(3)$ . Ako je  $b \neq 0$ , onda je ograničenje  $\xi \rightarrow P(\xi, \alpha)$  na centralnom manifoldu  $W^c(\alpha)$  lokalno topološki ekvivalentno sa  $\xi^* \rightarrow \xi + \beta(\alpha) + b\xi^2$  (slika 60).



Slika 60. Fold (sjedlo–čvor) bifurkacija ciklusa

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

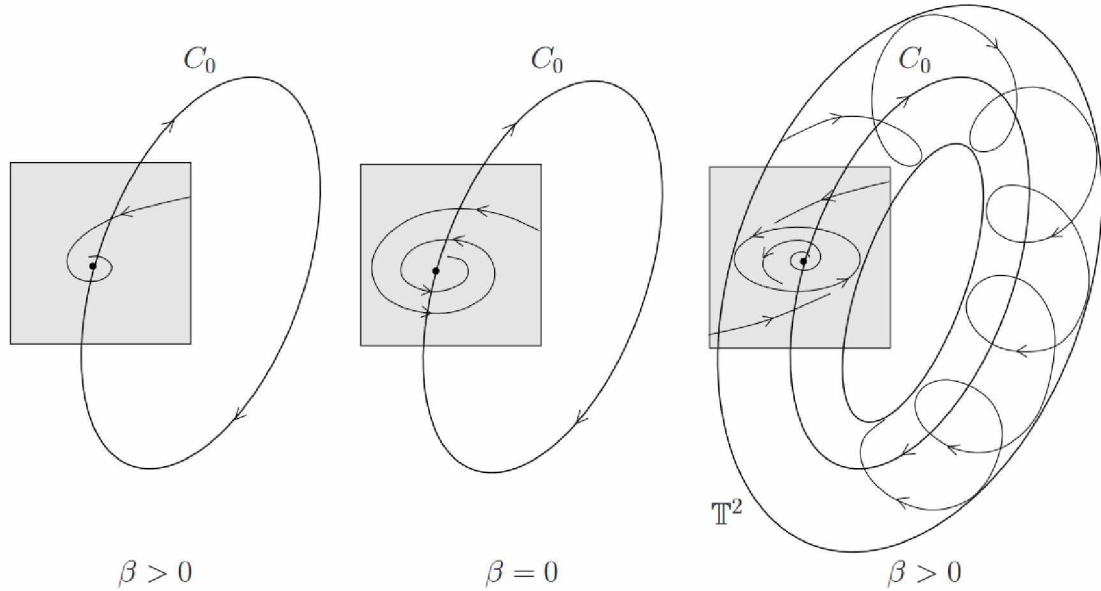
**Period–doubling** (dupliranje perioda) bifurkacija zahtijeva uslov  $\mu_1 = -1$  ( $m_c = 1$ ), i ograničenje za  $\xi \rightarrow P(\xi, 0)$  na centralnom manifoldu  $W^c(0)$   $\xi \rightarrow -\xi + c\xi^3 + O(5)$ . Ako je  $c \neq 0$ , onda je ograničenje  $\xi \rightarrow P(\xi, \alpha)$  na centralnom manifoldu  $W^c(\alpha)$  lokalno topološki ekvivalentno sa  $\xi \rightarrow -(1 + \beta(\alpha))\xi + c\xi^3$  (slika 61).



Slika 61. Period–doubling (dupliranje perioda) bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

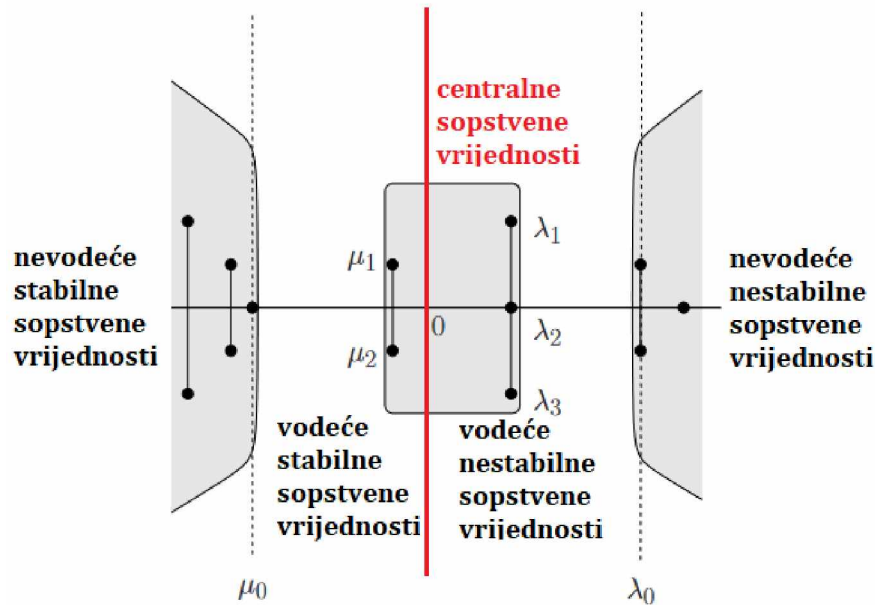
**Neimark–Sacker** (*Neimark-Saker*) (**torus**) bifurkacija zahtijeva uslov  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ , za vrijednosti  $0 < \theta_0 < \pi$ . Ako je  $e^{ik\theta_0} \neq 1$  za vrijednosti  $k = 1, 2, 3, 4$ , onda su ograničenja Poankareove mape na centralni manifold  $W^c(\alpha)$  lokalno glatko–ekvivalentna sa  $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho(1 + \beta(\alpha) + d(\alpha)\rho^2) \\ \varphi + \theta(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(\rho, \varphi, \alpha) \\ S(\rho, \varphi, \alpha) \end{pmatrix}$ , gdje je  $\theta(0) = \theta_0$  i  $R = O(\rho^4)$ ,  $S = O(\rho^2)$ .



Slika 62. Neimark–Sacker (Neimark-Saker) (Torus) bifurkacija

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Codim–1 bifurkacije homokliničkih orbita u ekvilibrirume dijele se na: 1) *Hiperboličke orbite koje prelaze u hiperboličke ekvilibrirume*; i, 2) *Sjedlo–homokliničke orbite*. U okviru D24 smo definisali količinu–sjedla kao  $\sigma = \Re(\mu_1) + \Re(\lambda_1)$  (slika 63).

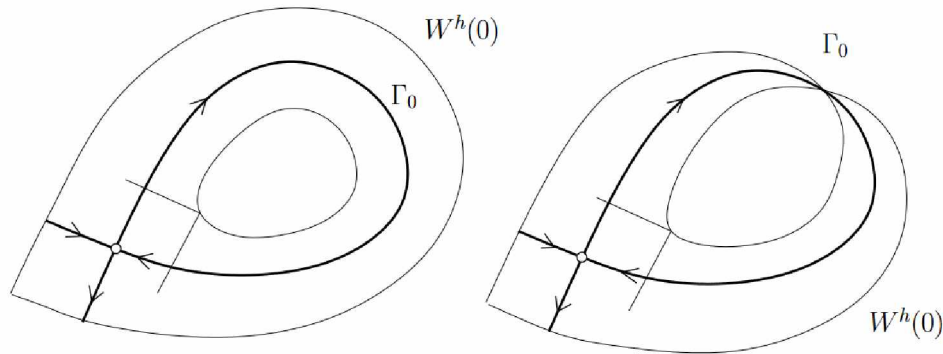


Slika 63. Vodeće i nevodeće, stabilne odnosno nestabilne, sopstvene vrijednosti (količina–sjedla)

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

**Teorema 21 (T21) (Homoklinički Centralni Manifold)** *Generički posmatrano, postoji invarijantni konačno–glatak manifold  $W^h(\alpha)$  koji je tangencijalan na centralni spostveni prostor homokliničke bifurkacije.*

Kod *sjedlo–čvor (saddle–homoclinic) homokliničkih orbita* količina sjedla ( $\sigma$ ) je jednaka  $\sigma = \mu_1 + \lambda_1$ . Pretpostavimo da putanja (kontura)  $\Gamma_0$  konvergira  $X_0$  duž vodećeg sopstvenog sopstvenog vektora (slika 64).



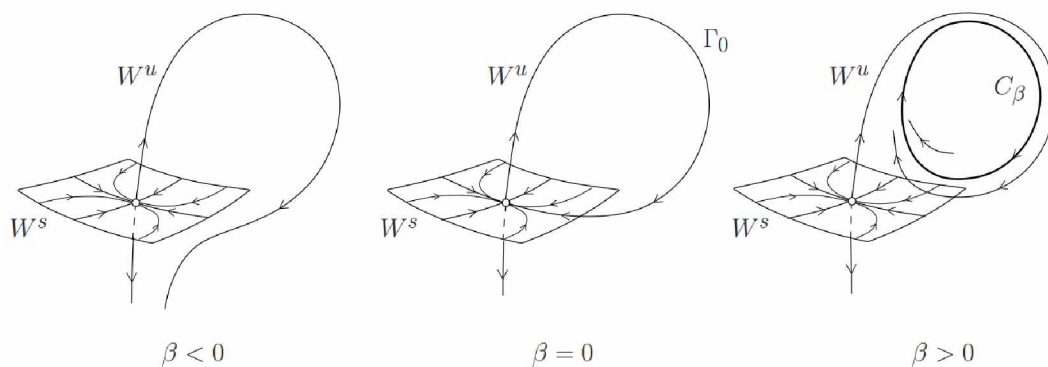
Slika 64. Sjedlo-čvor (saddle-homoclinic) homokliničkih orbita

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Poankareva mapa u blizini putanje (konture)  $\Gamma_0$  preslikava  $\rightarrow \tilde{\xi} = \beta + A\xi^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} + \dots$ , gdje je generički  $A \neq 0$ , tako da jedinstveni hiperbolički ciklus doživljava bifurkaciju iz  $\Gamma_0$  (stabilan u  $W^h$  ako je  $\sigma < 0$  i nestabilan u  $W^h$  ako je  $\sigma > 0$ ).

Kada analiziramo u prostoru (3D) sjedlo-čvor homokliničke orbite, razlikujemo dva specifična i kardinalna slučaja spram vrijednosti  $\sigma$ , odnosno dali je ista veća ili manja od nule (slika 65 i slika 66).

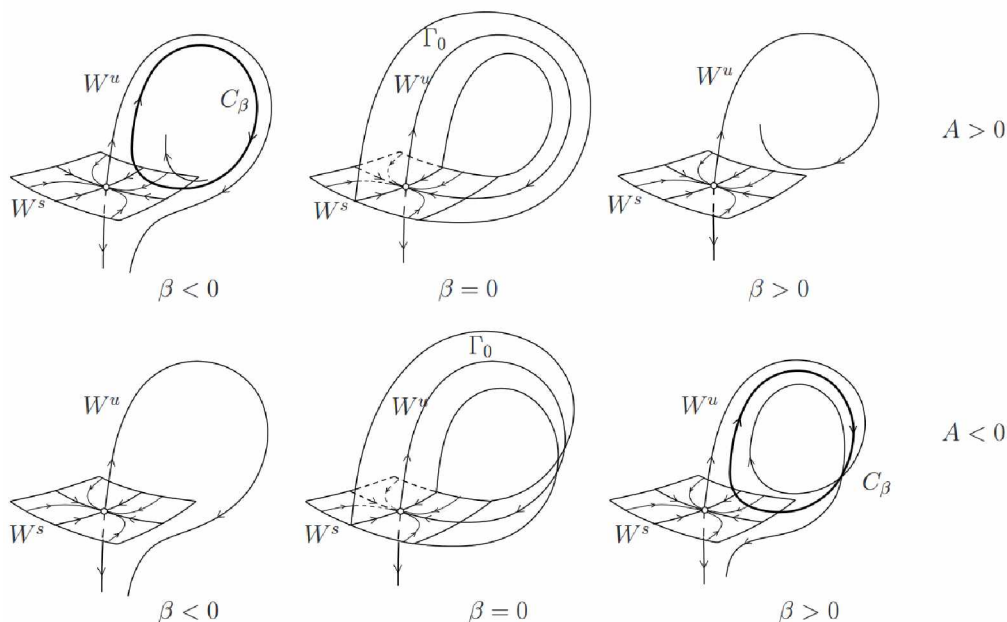
Sjedlo-čvor homoklinička orbita za  $\sigma < 0$ , i pri tome pretpostavljamo da važi  $\mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1$ , važi i kada  $t \rightarrow -t$  (slika 65).



Slika 65. Sjedlo-čvor homokliničkih orbita za  $\sigma < 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

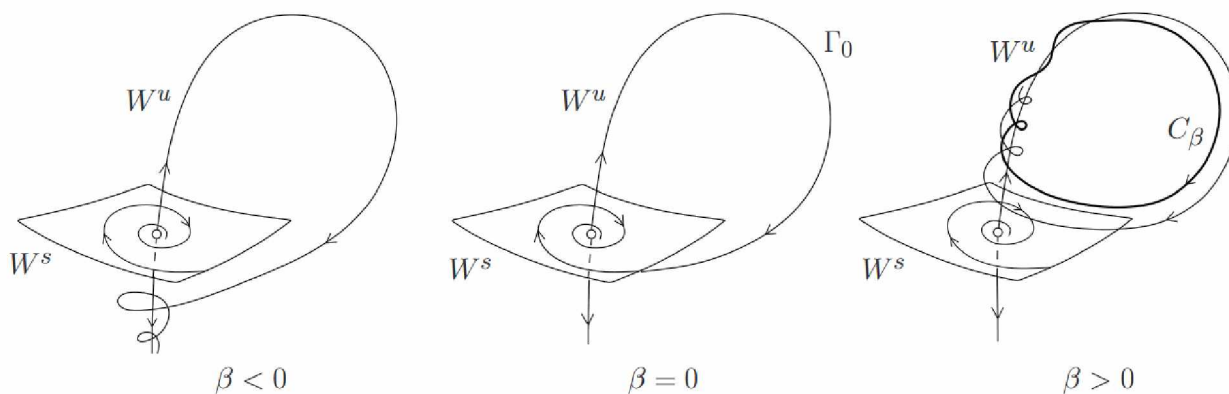
Sjedlo-čvor homoklinička orbita za  $\sigma > 0$ , i pri tome pretpostavljamo da važi  $\mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1$ , važi i kada  $t \rightarrow -t$  (slika 66).



Slika 66. Sjedlo-čvor homokliničkih orbita za  $\sigma > 0$

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Postoji i **sjedlo-čvor-fokus (saddle-focus homoclinic orbit) homoklinička orbita** kod koje je vrijednost za količinu sjedla jednaka  $\sigma = \Re(\mu_1) + \lambda_1$ . Pri tako određenom  $\sigma$ , i kada je isto manje od nule ( $\sigma < 0$ ), i pri tome pretpostavljamo da važi  $\Re(\mu_2) = \Re(\mu_1) < 0 < \lambda_1$ , važi i kada  $t \rightarrow -t$  (slika 67).



Slika 67. Sjedlo-čvor-Fokus homokliničke orbite za  $\sigma < 0$

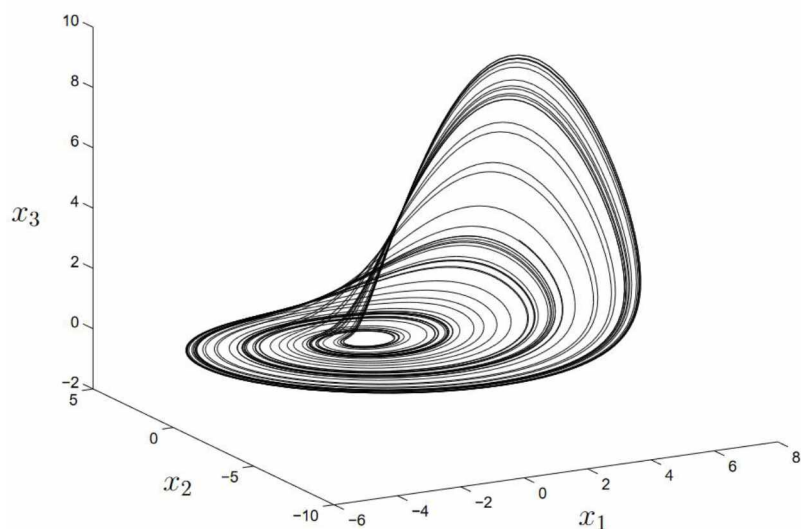
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Dok, za sjedlo-čvor-fokus homokliničku orbitu, i za  $\sigma > 0$  imamo sljedeću situaciju prikazanu na slici 68. Zapravo, predstavljen je Rössler (Rozler) atraktor, koji u konkretnom

slučaju ima jednačine 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases},$$
 i za vrijednosti:  $a = b = 0,2$ ,  $c = 5,7$ , egzaktno

dobijamo atraktor na slici 68.

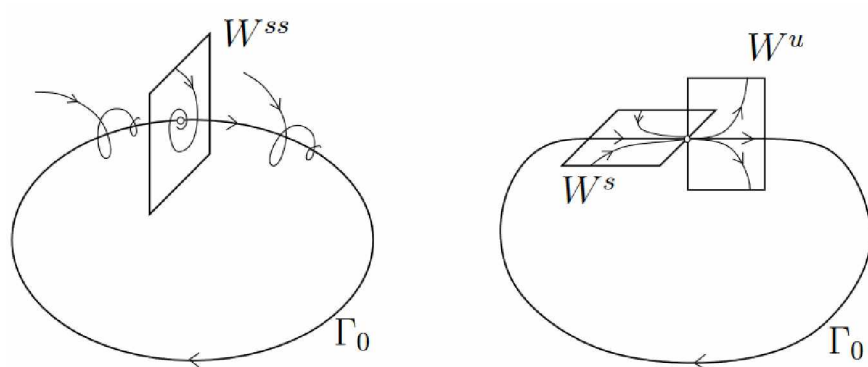
Kada govorimo o **haotičnim invarijantnim skupovima (Focus-focus homoclinic orbit)**, kao što je **fokus-fokus homoklinička orbita** sa vrijednošću količine sjedla  $\sigma = \Re(\mu_1) + \Re(\lambda_1)$ , imamo pojavu **haosa**.



Slika 68. Sjedlo-čvor–Fokus homokliničke orbite za  $\sigma > 0$  (Rössler (Rozler) atraktor)

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Kada imamo prijelaz **homokliničkih orbita u ne-hiperbolički ekvilibrijum** (*Homoclinic orbit(s) to a non-hyperbolic equilibrium*), zapravo to najbolje prikazuje situacija sa slike 69.

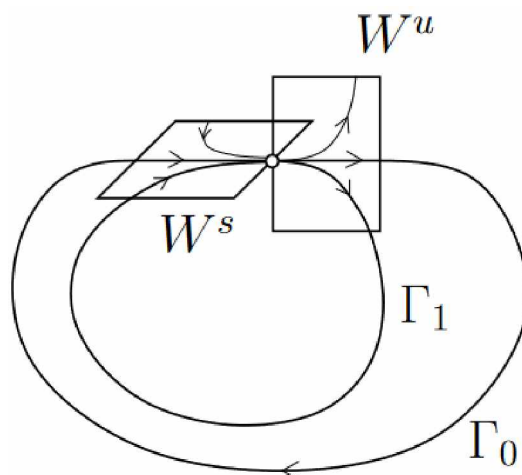


Slika 69. Prijelaz homokliničkih orbita u ne-hiperbolički ekvilibrijum

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]



Odnosno, *jedna homoklinička orbita* implicira (kreira) *jedan jedinstveni hiperbolični ciklus* (slika 70).



Slika 70. Transformacija jedne homokliničke orbite u jedan jedinstveni hiperbolični ciklus

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

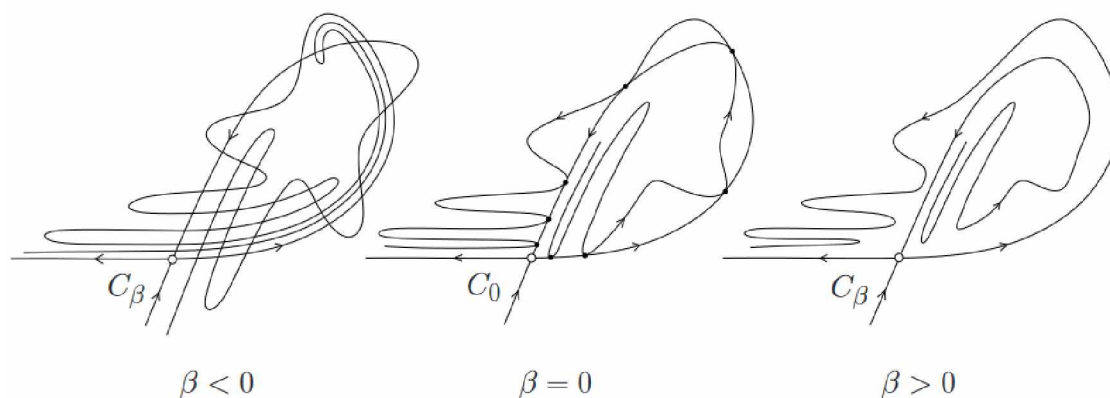
Posljedično, *više homokliničkih orbita* implicira (kreira) *haotični invarijantni skup!*<sup>61</sup>

Napokon, došli smo do objašnjenja pojave, nastanka i značenja haosa. Posmatrano sa duboko matematičke, ali i fizičke strane, te kao svojstvo stvarnog svijeta koji nas okružuje, pojam haosa predstavlja trenutno ograničavajući faktor ljudskog znanja i razumijevanja. Iako možemo da opišemo i analiziramo sisteme i modele koji inherentno sadrže kaos, suštinska pitanja vezana za kaos i dalje nam izmiču u današnjoj nauci. Naime, najfundamentalnije i najbitnije od navedenih pitanja je: Zašto nastaje kaos? Pri tome, ne misli se na odgovor koji uzima u obzir: „skupljanje” i/ili „istezanje” neke prostorne mape odnosno neki SNDJPR ili njegovu interpretaciju vrijednosti–uzroka za konkretni sistem; ili objašnjenja o različitosti početnih uslova i posljedično dilataciju koeficienta Ljapunova, i slično, već postavljamo

<sup>61</sup> Pojava haosa.

iskonsko pitanje o suštinskoj dimenziji (uslovno rečeno – prirodi) samog haosa: zašto haos *uopšte* nastaje?! Gdje leži njegov suštinski uzrok, odnosno izvor?! U okvirima današnje nauke, nemamo odgovor na ovo pitanje(a). Iako, haos prepoznamo, opisujemo ga matematičkim jednačinama, pa čak, i projektujemo neke očekivane vrijednosti u domenu rješenja (za neke posebne sisteme), ipak, nauka još uvijek ne poznaje pravu suštinu uzroka–nastanka haosa.<sup>62</sup> No, u daljem dijelu disertacije vraćamo se poznatim metodama analize haosa, u čemu nam esencijalno pomažu moderni računari.

U dijelu do sada poznatih naučnih analiza opštih *haotičnih postavki sistema*, pomenuli bismo *homokliničku tangentnost hiperboličnih ciklusa* (slika 71). Čak, i na prvi pogled, jasna je i vidljiva kompleksnost tzv. „pletanja” (engl. *trajectory waiving*) trajektorija, koja na kraju rezultuje haosom.



Slika 71. Homoklinička tangentnost hiperboličnih ciklusa

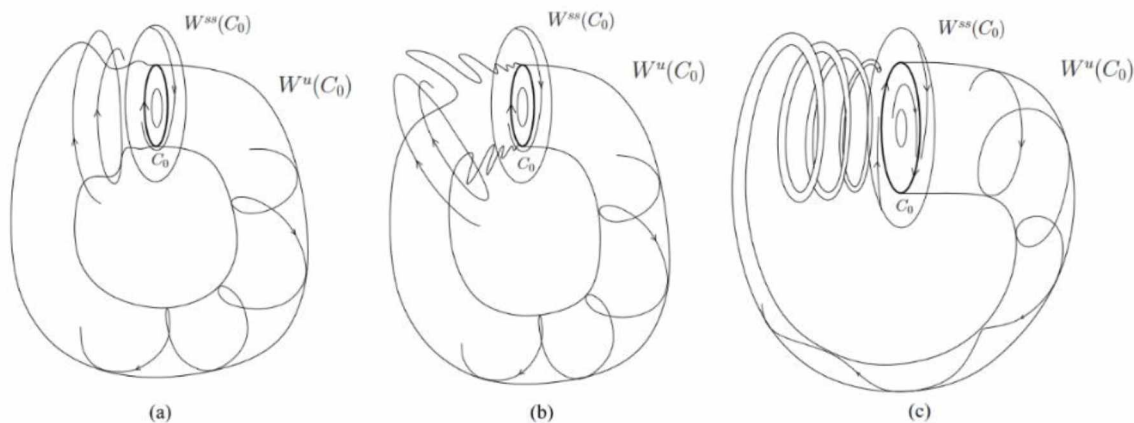
Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

Odmah je jasno, da ovakva „pletanja” trajektorija, pogotovo kada se radi o destinama, stotinama, hiljadama, ili čak milionima i trilionima istih, jedino je moguće efikasno i

<sup>62</sup> Ovdje se ne postavlja pitanje „kako” se haos i/ili njegova svojstva manifestuju u nekom sistemu kauzalno i/ili konsekvencno – navedeno je manje-više poznato u današnjoj nauci za određene klase sistema, već se postavlja suštinski-izvorno i fenomenološko pitanje: zašto haos uopšte nastaje?! Posljednje pomenuto pitanje, sadrži u sebi toliko veliku ontološku dubinu, da na njega – ne samo da nemamo odgovor, već teško je i naslutiti smjer u kome bi se išlo ka pronalaženju predmetnog odgovora.

smisleno razlučiti uz pomoć današnjih modernih i jačih–hardverski računara, naravno, uz odgovarajući softver (npr. kao što je MATCONT).

Kao korak dalje u izučavanju haosa otišlo se sa analizom prijelaza **homokliničkih u nehiperbolične cikluse**, koji impliciraju stvaranje **torusa/haosa/ciklusa** (slika 72)!<sup>63</sup>



Slika 72. Transformacija homokliničkih u nehiperbolične cikluse.

(a) Torus, (b) Haos, (c) Ciklus.<sup>64</sup>

Izvor: Yuri A. Kuznetsov, izvod iz predavanja sa postdiplomskih magistarskih studija na Matematičkom fakultetu Primijenjene teorije bifurkacija na Univerzitetu Twente, Enschede, Nizozemska [113]

<sup>63</sup> Primjer navedenog, se može pronaći u dinamici globalnih i lokalnih bifurkacija koje su vezane za idealizovani trostrani lanac ishrane u nekom ekosistemu (Hogeweg & Hesper (1978)). Pomenuti autori, su proučavali putem NDA odnos promjena bio–masa plijena, predatora, i super–predatora, i njihovu međuzavisnost. Čitaocu je odmah jasno, da pomenuti sistem ima inherentnu pojavu haosa u sebi, i da uveliko podsjeća na problem Poankarevih izučavanja kretanja i međuzavisnosti „Tri tijela” u Sunčevom sistemu – koji mu je krajem XIX. vijeka postavio švedski kralj („sage” o: pogrešnom rješenju, štampe/objavljivanja istih, otkupljivanja cijelog dnevnog pariškog tiraža novina – do skoro siromaštva Poankarea, kasnije pravog zaključka – bez stvarnog rješenja, i ipak, dodjeljene nagrade od strane kralja. Vjerujem, da je bespredmetno i pominjati kako u stvarnosti postoje n–tostruke veze i konekcije, svih plijenova i svih predatora, u samo jednom ekosistemu... Navedeno, pokazuje i dokazuje, naše (naučno–humanističke) limite znanja i razumijevanja NDA, tj. naročito analize haosa.

<sup>64</sup> Sa slike 72. očigledno je sljedeće: ukoliko bi „samo” povećali broj torusa na nekoliko, te posljedično – i haotičnih kretanja, odnosno kreiranih ciklusa, predmetnu sliku bi bilo jako teško i zamisliti, a kamoli egzaktno odrediti/izračunati (odrediti domen rješenja). Naime, sam termin „egzaktno” nikako „ne stoji” pored termina haosa, međutim, ovdje se upotrebljava u okvirima granica poznavanja današnje nauke, i limita ljudskih računskih mogućnosti (bez automatizovane/računarske pomoći). Istina, postoje velikani nauke koji su izučavali ovdje prezentovane elemente, kao što je to – među mnogima, bio i Leonid Pavlovič Šilnikov (Niži Novgorod, Rusija) ([http://www.scholarpedia.org/article/Shilnikov\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Shilnikov_bifurcation)) bez pomoći kompleksnih računara, i svojim izuzetnim uvidom u predmetnu problematiku NDA i njena rješenja, kreirali pravu istoriju u nauci!

### 3.3 Aproximacija vremenskih serija nelinearnim diferencijabilnim funkcijama

Vremenske serije – naročito u ekonomiji, odnosno makroekonomiji, po svojoj prirodi sadrže diskretne podatke. Međutim, pojave koje su predstavljene diskretnim podacima su, u stvarnom životu, zapravo pojave koje imaju inherentno kontinualnu prirodu! Naime, primjer za rečeno je BDP (Bruto Domaći Proizvod). BDP podatke, obično, kao pouzdane imamo tek na kraju godine, izuzetno, na kvartalnom nivou, iako se BDP mijenja praktično svake sekunde, ili bolje reći svake mikro-sekunde<sup>65</sup> (u vremenu). Dodatno, da bi jedna funkcija uistinu uključila sve vremenski zavisne tačke diskretne funkcije potrebno je da ista bude nelinearna i diferencijabilna. Navedeno se može takođe postići i tzv. *izlomljenim linearnim funkcijama* (*piece-wise functions*), međutim iste su: 1) nediferencijabilne; 2) imaju znatno manju preciznost funkcionalne-reprezentacije početnih vrijednosti uzorka; 3) inherentno unose dodatnu i nepotrebnu kompleksnost sveukupnog matematičkog alata/proračuna. Kasnije ćemo vidjeti da je diferencijabilnost istih krucijalna za implementaciju prezentovane metodologije u disertaciji.

Za potrebe predstavljanja diskretnih vrijednosti podataka vremenskih serija (u disertaciji) odlučio sam se za polinomno-funkciono fitovanje. Naime, polinom  $P_n(x) = p_1x_n + p_2x_{n-1} + \dots + p_nx + p_n + 1$  putem funkcijske zavisnosti će vjerodostojno i precizno predstaviti diskretne vremenske serije. Za navedeno ćemo koristiti funkciju fitovanja *polyfit*<sup>66</sup> koju koristi programski paket MATLAB. Algoritam koji MATLAB-u koristi, i koji se nalazi u pozadini navedene funkcije, zapravo jeste metod određivanja *polinoma* (*reprezentativne funkcije*) diskretnih podataka pomoću *Vandermodove matrice* (*Vandermonde matrix*).

---

<sup>65</sup> Pominjanje čak i mikro-sekunde – nije dovoljno precizno, sa obzirom na obim i količinu proizvoda i usluga koje konstantno produkuje jedna cijela ekonomija (sram uzimanja u obzir trenutka  $t_0$ , kada je samo jedan proizvod završen(!), tj. dodat kao nova vrijednost u makroekonomiji, odnosno narednog trenutka  $t_0+1$  kada je već kreiran naredni proizvod ili usluga). Ukratko, BDP je jasno suštinski, i praktično posmatrano, kontinualna funkcija određene vremenske rezolucije.

<sup>66</sup> Polinomno fitovanje, odnosno određivanje reprezentativnih funkcijskih krivih, od originalno diskretnih podataka.

Postupak za određivanje koeficijenata  $a_0, a_1, \dots, a_n$  polinoma  $P_n(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$  je takav da, za  $(n+1)$  uređenih parova vrijednosti podataka  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , kreiramo sistem linearnih jednačina:

$$P_n(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0$$

$$P_n(x_1) = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = y_n \Rightarrow a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n,$$

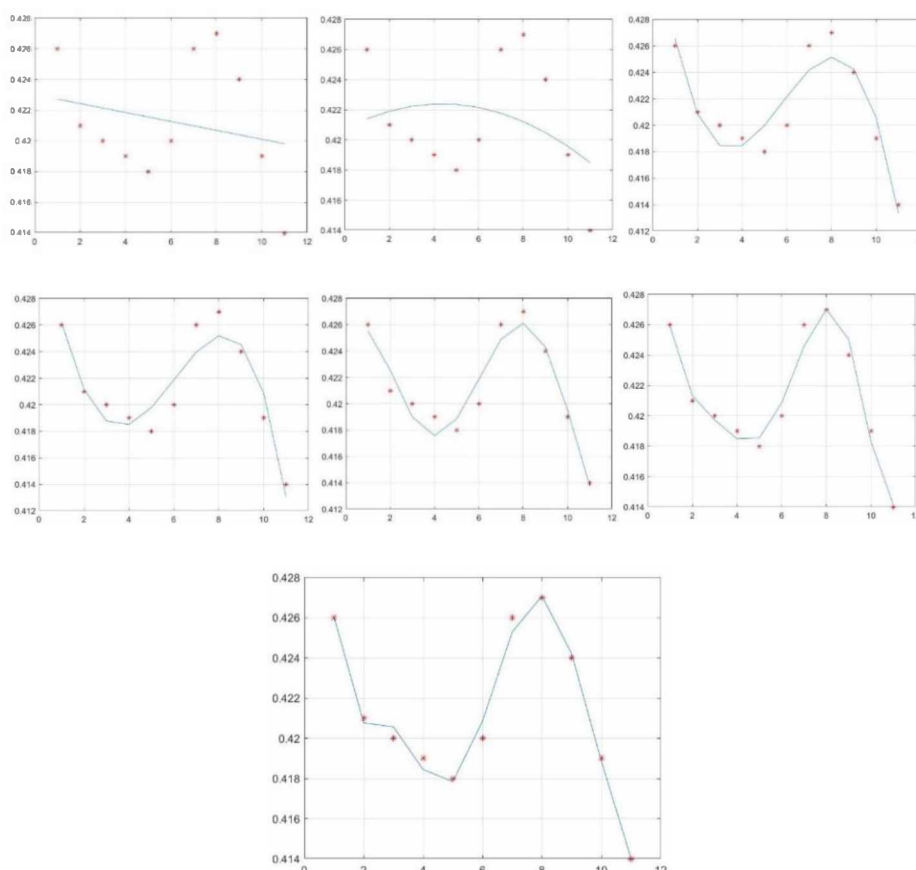
ili, u matricnoj formi  $V\vec{a} = \vec{b}$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matrica  $V$  se naziva *Vandermondova matrica*. Matrica  $V$  nije *singularna* (determinanta joj je različita od nule), te onda možemo riješiti sistem  $V\vec{a} = \vec{y}$  da bismo dobili koeficijente  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ .

Primjer, za navedeno se može vidjeti u fitovanju (aproksimiranju) dolje prezentovane vremenske serije, odnosno visokom tačnošću (*kvalitetom*) aproksimiranih vrijednosti

funkcionalnim (polinomnim) reprezentovanjem tačaka (diskretnih vrijednosti vremenske serije).<sup>67</sup>



Slika 73. Aproximacija diskretnih vrijednosti diferencijabilnim funkcijama (fitovanje).<sup>68</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

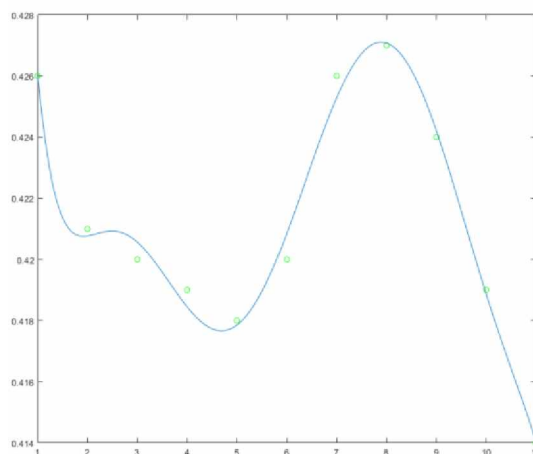
Krajnji rezultat prezentovanog procesa izgleda kao na slici 74. Dobijamo kontinualnu funkcionalnu zavisnost varijable u vremenu za određeni vremenski interval. Na slici 74 je

<sup>67</sup> Iako se radi o tudici – u našem jeziku, često se koristi termin *fitovanje*, umjesto termina *aproksimacija vrijednosti*. Navedeno će biti ravnopravno korišteno prilikom referenciranja na prezentovanu metodologiju.

<sup>68</sup> Sedam grafika prikazanih na Slici 73 predstavljaju polinomno fitovanje (plava linija) diskretnih vrijednosti određene vremenske serije (crvene zvijezdice). Prvi grafik je gore lijevo, te prateći grafike sa lijeva na desno, predstavljeni su fitovi polinoma od prvog do sedmog stepena. Posljednji izdvojen grafik na dnu, predstavlja finalno fitovanje i formu koju ćemo dalje koristiti u radu. Primjećuje se da polinomno fitovanje daje mnogo bolje rezultate od standardnih linearnih i/ili kvadratnih aproksimacija koje najčešće sriječemo u ekonometrijskim modelima. Navedeno čini prezentovanu metodologiju jako efikasnom, jer su greške između funkcionalne reprezentacije i pripadajućih diskretnih vrijednosti značajno manje od pomenutog linearnog i kvadratnog slučaja.

zapravo prikazana vremenska serija  $\tau_\omega$  koja predstavlja porez na bruto agregatni dohodak EU19 stanovništva za period od 2005. do 2015. godine (više detalja kasnije u disertaciji).<sup>69</sup> Naime, ukoliko uskladimo početne vrijednosti vremena, sa nekom jediničnom vremenskom vrijednošću (npr. mjesec, kvartal, godina, itd.), svaka naredna vrijednost će biti multipl odabrane vremenske dimenzije.

Oznake u narednim vremenskim vrijednostima će biti  $n = 1, 2, \dots, x_n$ , pri čemu je  $x_n$  poslijednji vremenski period iz vremenske serije. Za prikazanu vremensku seriju, imamo da je  $x_n = 11$  (za jedanaest godina, u periodu 2005–2015). Bitno je naglasiti, da ukoliko usvojimo prezentovanu konvenciju označavanja, i koju koristimo u kalkulacijama i proračunima za jednu seriju, istu moramo ispoštovati odnosno primijeniti za svaku vremensku seriju. Početni vremenski interval nije promijenjen, već se samo dodaje veći broj međuvrijednosti između krajnjih granica/vrijednosti početnog intervala.



Slika 74. Krajnji izgled diferencijabilne funkcije (fit-a) egzogene varijable  $\tau_\omega$ <sup>70</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>69</sup> U okviru istraživanja povezanim sa disertacijom, ravnopravno i u cjelosti, su istraživani i analizirani makroekonomski modeli EU19 (samo zemlje Eurozone) i EU28 (sve zemlje Evropske Unije). U disertaciji se uvijek radi sa EU28 podacima i modelima. Ovdje, kao izuzetak od pravila, je prikazana  $\tau_\omega$  vremenska zavisnost za EU19 u svijetlu prezentacije i elaboracije korištene metodologije.

<sup>70</sup> Upravo u predmetnoj funkciji, je broj početnih perioda povećan sa 11 (broj godina) na 132 (broj mjeseci), i na taj način su stvoreni uslovi za korištenje nekih ekonometrijskih metoda, koje nužno iziskuju veći broj podataka za početni uzorak od originalnog. Plava boja predstavlja kontinualnu funkciju aproksimacije početnih diskretnih vrijednosti (zeleni krugovi) egzogene varijable predstavljene vremenskom serijom.



Prilikom fitovanja bitno je da najveći stepen polinoma ne dovede do prekomjerne aproksimacije (engl. *overfitting*). U tom slučaju bi došlo do distorzije, ili izobličenja glavne funkcije fitovanja, te bi se pojavili funkcijski harmonici u okviru glavne linije fitovanja (aproksimacije). U disertaciji su za početne egzogene varijable korišteni polinomi 7. stepena, kao optimalne vrijednosti fitovanja spram broja, vrste i vrijednosti podataka kako ne bi došlo do pomenutog fenomena *overfittinga*. Demonstracije radi, primjer funkcionalne zavisnosti (fit-a) na slici 74 je:

$$\begin{aligned} \tau_{\omega_{EU19}} = & -0.00000071195144724572793787646836360938 \tau_{\omega}^7 + \\ & 0.00003222222222232773053505333615831 \tau_{\omega}^6 - \\ & 0.00058532679738586984325571238585439 \tau_{\omega}^5 + \\ & 0.0054505404726021529707158386202082 \tau_{\omega}^4 - \\ & 0.027690315485185752752972376811158 \tau_{\omega}^3 + \\ & 0.076080997074875506003266423249443 \tau_{\omega}^2 - \\ & 0.10523261326916513724860635647929 \tau_{\omega}^1 + \\ & 0.47798181818185764280215721555578 \end{aligned} \quad (1)$$

Prikazani koeficijenti uz stepene varijabli – na desnoj strani jednačine, nisu potpuni u zapisu, jer iste smo odredili/izračunali sa tzv. *kompjutacijom duple preciznosti* (engl. *double precision computation*) na 64-bitnom računaru i aplikaciji, te isti imaju oko/ukupno 64 cifre (zavisi od vrijednosti koeficijenta, da li poslije određene decimale broj ima sve vrijednosti nula, pa je onda zapis kraći). Međutim, nezavisno od prikaza, sve kalkulacije su izvršene sa duplom preciznošću, odnosno sa sve 64 cifre, i tako za svaki broj/koeficijent.. Pomenuto nam je upravo tako i trebalo, sa ciljem da testiramo postulate teorije haosa, i to u dijelu istraživanja uticaja: kako male promjene u sistemu kod početnih uslova indukuju velike i/ili haotične promjena na nivou čitavog sistema (o navedenom će biti više riječi kasnije).

Svaka startna egzogena varijabla, endogena modelska varijabla, kao i međuvarijable funkcionalne reprezentacije, imaju sličan oblik jednačine kao (1). Kasnije ćemo vidjeti da je



množenjem polinoma različitog reda, npr. 4. i 7. stepena, dobijena funkcionalna zavisnost 28. stepena (prema matematičkom pravilu množenja polinoma). Slični proračuni, urađeni u ovoj tezi, ne bi bili mogući samo deceniju ili deceniju ipo ranije! Rukovanje, obrada i proračuni sličnih polinoma su gotovo nezamislivi ručno, već se mora pribjegavati pomoći od strane računara, jer je neke kalkulacije nemoguće uraditi ručno. Nerijetko su i najnovijim komercijalnim računarima trebali sati, ili vremena rada reda veličine pola dana ili dan kompjutacije – neprekidno, da bi se dobile (izračunale) određene vrijednosti u disertaciji, odnosno donijeli zaključci.

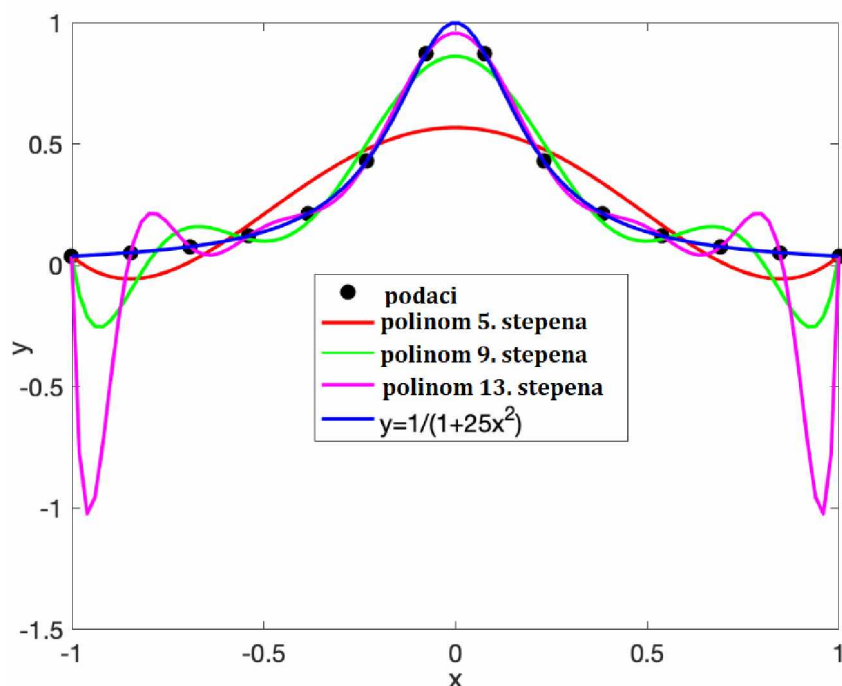
Naime, pojava distorzije prilikom aproksimacije, odnosno overfitinga, je posljedica *Rungeovog*<sup>71</sup> *fenomena*, koji se vrlo uspješno rješava sa *Čebišljevim*<sup>72</sup> *tačkama*. Rungeov fenomen se nažalost javlja u situacijama kada su podaci ravnomjerno raspoređeni po x-osi, odnosno (najčešće) u vremenu kada su u pitanju vremenske serije podataka (distorzija vrijednosti na krajevima intervala – zeleni i ljubičasti grafik za polinom 9. i 13. stepena, slika 73). Kao što smo već rekli, Rungeov fenomen možemo izbjeći korištenjem podataka u tačkama koje nisu podjednako raspoređene. Razmak među podacima koji daje najbolju aproksimaciju su Čebiševljeve tačke, definisane na intervalu  $[-x_m, x_m]$  kao  $\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$  za  $k = 1, \dots, n$ . Posljednje pomenuto, je prezentovano na slici 75, za proizvoljno odabranu, ali egzaktnu matematičku funkciju (tamno plava linija) čije diskretno-odabrane podatke fitujemo (crne tačke).

Takođe, bitno je napomenuti da u stvarnosti podaci su relativno uvijek nelinearno raspoređeni, te se pomenuti Rungeov efekat a-priori smanjuje prilikom fitovanja, odnosno često nije potrebna korekcija Čebišljevim tačkama, ukoliko se obrati pažnja na izbor maksimalnog reda polinoma prilikom fitovanja.

---

<sup>71</sup> Karl David Tolme Runge (30. avgust 1856. – 3. januar 1927.) bio je njemački matematičar, fizičar i spektroskopista. Njegov ko-eponim se nalazi u nazivu metode Runge-Kutta u oblasti matematike koju danas nazivamo numerička analiza (numeričke metode).

<sup>72</sup> Pafnuti Lvovič Čebišev (Пафнути Львович Чебишев) (16. maj 1821. – 8. decembar 1894.) je bio ruski matematičar, i smatra se osnivačem ruske škole matematike.



Slika 75. Rungeov fenomen (over-fitinga) za različite stepene (redove) polinoma

Izvor: Jodi Mead.<sup>73</sup> Mathematics Professor, Boise State University.

Sva polinomna fitovanja bila su paralelno urađena sa fitovanjima koja su podrazumijevala korištenje furijeove transformacije (FT). Međutim, ista nisu kasnije uzeta u dalje razmatranje u okviru disertacije, iako su davala jako dobar pa čak i bolji rezultat nego polinomna fitovanja. Razlog za posljednje navedeno, se nalazi u činjenici da kod ekonomskih (makroekonomskih) pojava u praksi ne postoji nivo egzaktne peridičnosti, koju po svojoj prirodi FT unosi u fit, te bi trebali iste izuzeti iz dobijenih izraza – što bi dodatno i znatno usložilo proces i primijenjenu metodologiju. Dodatno, pri tome ne bi dobili skoro ništa na preciznosti i/ili tačnosti dobijenih modela i/ili zaključaka. Jedan od najizazovnijih momenata u radu bio je da se pronađe optimalan balans između mnogobrojnih istraživačkih proračuna, modela, pitanja, postavki, metodologija, zaključaka, i sl.

<sup>73</sup> Internet link: <https://jodimead.github.io/files/m365/interpolation.pdf>

### 3.4 Fazni i parametarski prostori

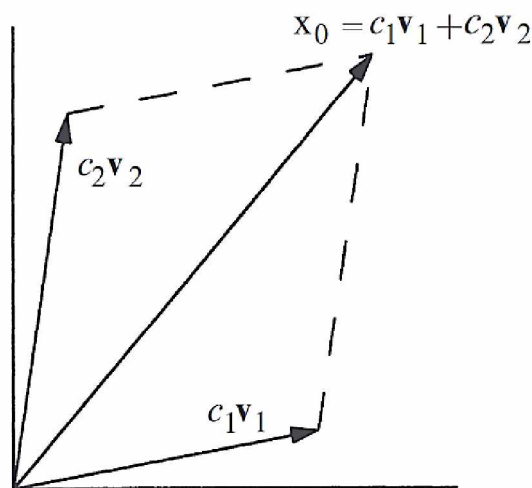
Dinamički sistem je matematički objekat koji opisuje razvoj fizičkog, biološkog, ili nekog drugog sistema iz stvarnog života u zavisnosti od vremena. Definisan je *faznim prostorom*  $M$  (enlf. *phase space*), i *parametarskom familijom* preslikavanja  $\varphi^t: M \rightarrow M$ , gdje je  $t$  parametar vremena. U okviru navedenog, fazni prostor je  $\mathbb{R}^n$ , njegov podskup, ili *metrički prostor*. Vremenski parametar  $t$  je iz  $\mathbb{R}$  (*kontinualni sistemi u vremenu*), ili je iz  $\mathbb{Z}$  odnosno  $\mathbb{Z}_+$  (*diskretni sistemi u vremenu*). Dodatno, zahtijeva se da je  $x \in M$  tako da je: a)  $\varphi^0(x) = x$ ; i b)  $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x) \forall t, s$ . Ako je  $\varphi(t)$  rješenje sistema  $\dot{x} = f(x)$ , onda je funkcija  $\varphi(t + c)$  sa proizvoljnom konstatom  $c$  takođe rješenje. Dvije proizvoljne orbite  $\dot{x} = f(x)$  nemaju zajedničkih tačaka, odnosno ne sijeku i ne preklapaju se. Posljedično, fazni prostor  $\dot{x} = f(x)$  sastoji se od razloženih orbita. Dekompozicija faznog prostora u razdvojene orbite naziva se *fazni portret* (engl. *phase portrait*). Svaka orbita, koja nije dio stabilnih/nestabilnih tačaka, je pravilna glatka kriva i može biti otvorena ili zatvorena.

S obzirom da su u poglavlju 3.2 prezentovani i objašnjeni invarijantni setovi, i pripadajuće im parametarski zavisne bifurkacije, nadalje ćemo na pojedinim arbitrarno izabranim primjerima prikazati prednosti analize pomoć faznih portreta. Cilj upotrebe faznih prostora i portreta u NDA je da dođemo do kvalitativnih zaključaka u analizi SNDJPR, a da pri tom ne moramo riješiti sistem, koji inače nije ni moguće riješiti analitički, već samo numerički. Za pomenutu svrhu, kao i zbog jasnoće odnosno bolje reprezentativnosti, korist ćemo se SDJPR u ravni, odnosno analiziraćemo *opšti linearni* 2D dinamički sistem. Razumijevanjem linearnog SDJPR, zaključke možemo analogno proširiti na nelinearni sistem.

Posmatrajmo sistem  $\dot{x} = ax + by$  i  $\dot{y} = cx + dy$ , gdje su  $a, b, c$  i  $d$  parametri. On se može zapisati i u matričnoj formi, kao  $\dot{x} = Ax$ , gdje je  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  i  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Takav sistem je linearan, u smislu, ako su  $x_1$  i  $x_2$  rješenja, onda je rješenje SDJPR i bilo koja linearna kombinacija  $c_1 x_1 + c_2 x_2$ . Primjetićemo da je  $\dot{x} = 0$  onda kada je  $x = 0$ , pa je onda  $x^* = 0$  uvijek fiksna tačka za bilo koji izbor  $A$ . Rješenja  $\dot{x} = Ax$  se mogu vizualizovati kao *putanje* (*trajektorije*) koje se kreću u  $(x, y)$  ravni. U ovom kontekstu tu

ravan nazivamo *fazna ravan* ili *fazni prostor*. Poznato je da analitička rješenja elementarnih diferencijalnih jednačina tražimo pomoću pomoćnog funkcijskog oblika (smjene) u obliku funkcionalne zavisnosti od vremena  $x(t) = e^{\lambda t} v$ , gdje je  $v \neq 0$  neki fiksni vektor koji treba odrediti, a  $\lambda$  je stopa rasta, koju takođe treba odrediti. Ako takva rješenja postoje, onda ona odgovaraju eksponencijalnom kretanju (vrijednostima) duž linija koju obuhvata (razapinje) vektor  $v$ .

Da bismo pronašli uslove za  $v$  i  $\lambda$ , zamenjujemo  $x(t) = e^{\lambda t} v$  u  $\dot{x} = Ax$ , pa dobijamo  $\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v$ . Skraćivanjem skalarnog člana  $e^{\lambda t}$ , koji je različit od nule, dobijamo  $A v = \lambda v$  koji implicira da željena rješenja postoje ako je  $v$  sopstveni vektor od  $A$  sa odgovarajućom sopstvenom vrednošću  $\lambda$ . U ovom slučaju, rješenje  $x(t) = e^{\lambda t} v$  nazivamo *sopstvenim rješenjem* SDJPR. Podsjećanja radi, sopstvene vrijednosti matrice  $A$  su definisane *karakterističnom jednačinom* sistema  $\det(A - \lambda I) = 0$ , gdje je  $I$  *jedinična matrica*. Za matricu  $A$  dimenzija  $2 \times 2$ , imamo slijedeću reprezentaciju  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , te onda karakteristična jednačina ima oblik, i određuje se, kao  $\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0$ . Rješavajući determinantu dobijamo slijedeći izraz  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ , gdje su  $\tau = \text{trace}(A) = a + d$ ,  $\Delta = \det(A) = ad - bc$ . Tada je rješenje karakteristične jednačine jednako  $\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ . Sublimativno rečeno, sopstvene vrijednosti zavise samo od *traga* (engl. trace) i *determinante* matrice  $A$ . Tipična situacija je da sopstvene vrijednosti su različite:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . U tom slučaju, teorema linearne algebre kaže da su odgovarajući sopstveni vektori  $v_1$  i  $v_2$  linearno nezavisni, pa stoga razapinju cijelu ravan (slika 76).

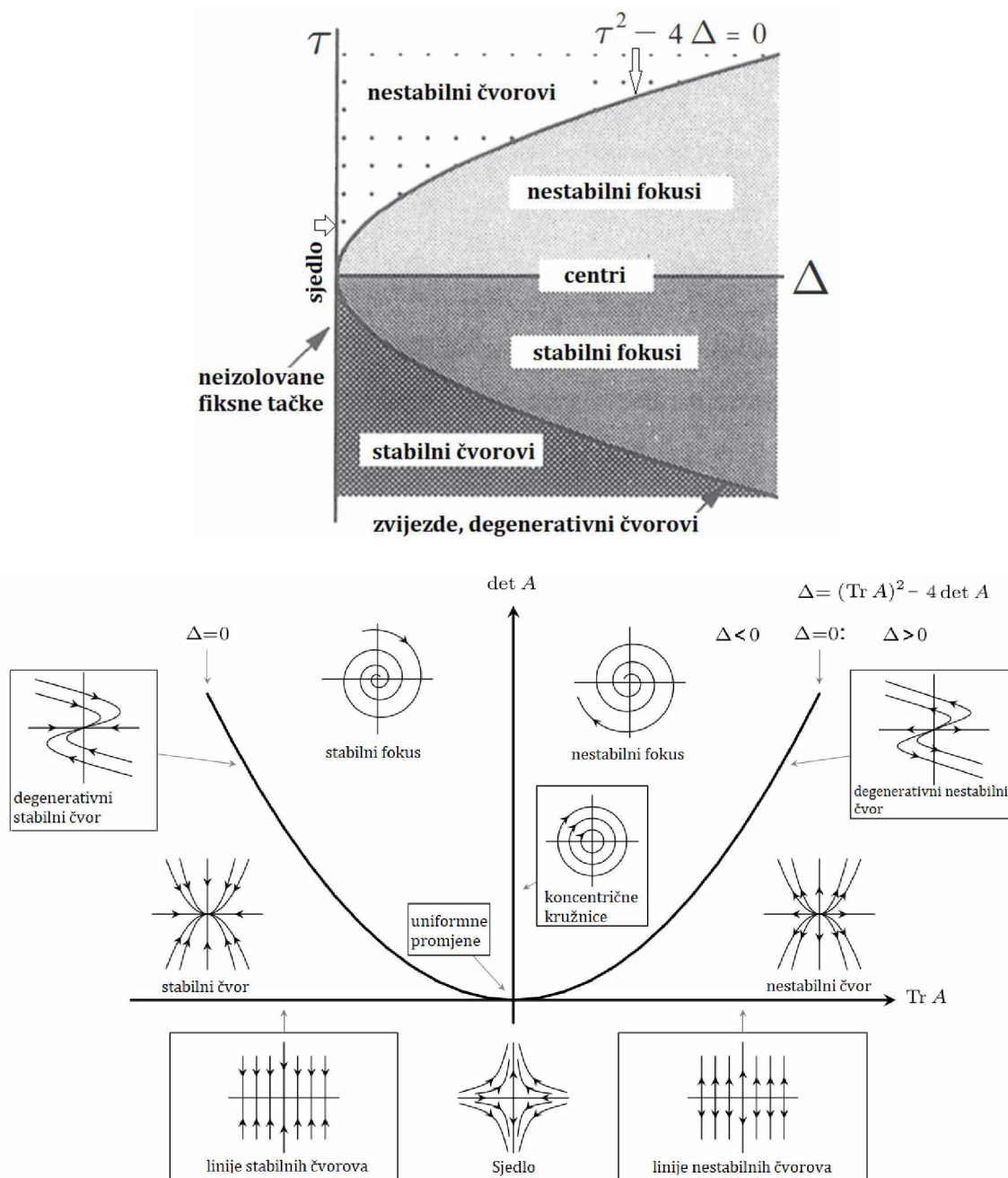


Slika 76. Ravan definisana od strane sopstvenih vektora

Izvor: Strogatz, H.S. (2015). Nonlinear dynamics and chaos

Konkretno, bilo koji početni uslov  $\mathbf{x}_0$  se može napisati kao linearna kombinacija sopstvenih vektora, npr.  $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ . Pomenuto nam omogućava da zapišemo opšte rješenje za  $\mathbf{x}(t)$  koje je u konačnici jednako  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ . Navedeno je opšte rješenje jer predstavlja linearnu kombinaciju rješenja za  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , i dodatno zadovoljava početni uslov  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , te onda prema teoremi o jedinstvenosti rješenja (T3), zapravo jeste *jedino* rješenje.

Međutim, ne desi se uvijek situacija da je  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , pa onda moramo uzeti u obzir i ostale moguće slučajeve i vrijednosti  $\lambda_{1,2}$ , koje pak generišu fiksne tačke i fokuse različitih stabilnosti. Za navedeno nam služi *klasifikaciona šema* fiksnih tačaka prikazana na slici 77.



Slika 77. Poankareov Dijagram: Klasifikacija faznih portreta u  $(\det A, \text{Tr } A)$  ravni

Izvor: Strogatz, H.S. (2015). Nonlinear dynamics and chaos, i *Wikiwand* internet sajt<sup>74</sup>

<sup>74</sup> Izvor za donji dio slike 77. se nalazi na internet linku: [https://www.wikiwand.com/en/Stability\\_theory](https://www.wikiwand.com/en/Stability_theory)

Na slici 77. koordinatne ose su predstavljena kao: 1) apcisu predstavlja determinanta matrice  $A$  označena sa  $\Delta$ , dok, 2) ordinatu predstavlja trag matrice  $A$  označen sa  $\tau$ . Sve informacije na dijagramu impliciraju slijedeći izrazi:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$ ,  $\Delta = \lambda_1\lambda_2$ ,  $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$ . Pri čemu, karakterističnu jednačinu možemo zapisati kao  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ .

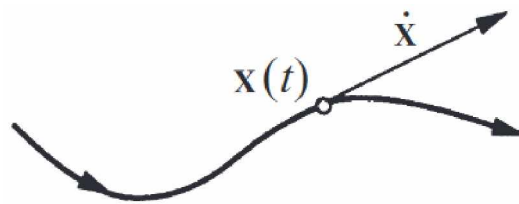
Na osnovu prezentovanog, možemo izvući određene opšte zaključke: Ako je  $\Delta < 0$ , sopstvene vrijednosti su realne i imaju suprotne predznake, što implicira da je fiksna tačka sjedlo. Ako je  $\Delta > 0$ , sopstvene vrijednosti su, ili realne i sa istim predznakom (čvorovi), ili kompleksno konjugovane (spirale i centri). Čvorovi zadovoljavaju  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , dok spirale zadovoljavaju  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Parabola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  je granična linija između čvorova i fokusa; zvjezdasti čvorovi i degenerisani čvorovi egzistiraju na ovoj paraboli. Stabilnost čvorova i fokusa određuje  $\tau$ . Kada je  $\tau < 0$ , obje sopstvene vrijednosti imaju negativne realne djelove, tako da je fiksna tačka stabilna. Dok, kada je  $\tau > 0$ , imamo nestabilne čvorove i fokuse. Neutralno-stabilni centri egzistiraju na graničnoj liniji  $\tau = 0$ , gdje su sopstvene vrijednosti imaju čisto imaginarnu vrijednost. Ako je  $\Delta = 0$ , onda je barem jedna sopstvena vrijednost jednaka nuli, i u tom slučaju koordinatni početak nije izolovana fiksna tačka. Takođe, zaključujemo da su sjedla, čvorovi i fokusi glavni tipovi fiksnih tačaka, jer se javljaju u najvećoj oblasti u  $(\Delta, \tau)$  ravni. Centri, zvijezde, degenerisani čvorovi, i neizolovane fiksne tačke su *granični slučajevi* koji se javljaju duž krivih u ravni  $(\Delta, \tau)$ . Od pomenutih graničnih slučajeva, centri su daleko najvažnije fiksne tačke. Iste se najčešće pojavljuju u mehaničkim sistemima bez trenja, gdje važi fizički zakon očuvanja energije. Vidjećemo kasnije, da u ekonomskim sistemima čiji su modeli kreirani na bazi stvarnih podataka (neidealizovani sistemi – suprotno od ranije pomenutih mehaničkih sistema bez trenja), kreirani modeli imaju karakteristike *disipativnih sistema*, odnosno sistema gdje ne važi zakon o očuvanju energije (kakvu god „energija” imala različitu interpretaciju među raznorodnim oblastima nauke i pripadajućim sistemima)<sup>75</sup>.

---

<sup>75</sup> Energija, u smislu fizičkog, konkretno nekog mehaničkog sistema, ima svakako svoje izvorno značenje. Dok, kod analize ekonomskih pojava, „energija” može biti monetarni input od strane regulatora u okviru monetarne analize, ili u fiskalnom domenu smanjivanje poreskih stopa u domenu fiskalne analize, što nedvojbeno unosi



Kod faznih portreta u ravni opšti oblik vektorskog polja ima oblik:  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$   
 $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$  gdje su  $f_1$  i  $f_2$  zadate funkcije. Prezentovani sistem, može biti zapisan u kompaktnijoj notaciji kao  $\dot{x} = f(x)$ , gdje je  $x = (x_1, x_2)$  i  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ . Ovdje  $x$  predstavlja tačku u faznoj ravni, a  $\dot{x}$  predstavlja promjenu, odnosno prvi izvod/diferencijal predmetne funkcije (obično je navedeno kod fizičkih sistema, zapravo vektor brzine u toj tački). Prateći tok duž vektorskog polja, fazna tačka iscrtava rješenje  $x(t)$ , pri čemu isto predstavlja jednu trajektoriju koja „vijuga” kroz faznu ravan (Slika 78).



Slika 78. Trajektorija u faznoj ravni, i vektor promjene (brzine) u toj tački

Izvor: Strogatz, H.S. (2015). Nonlinear dynamics and chaos

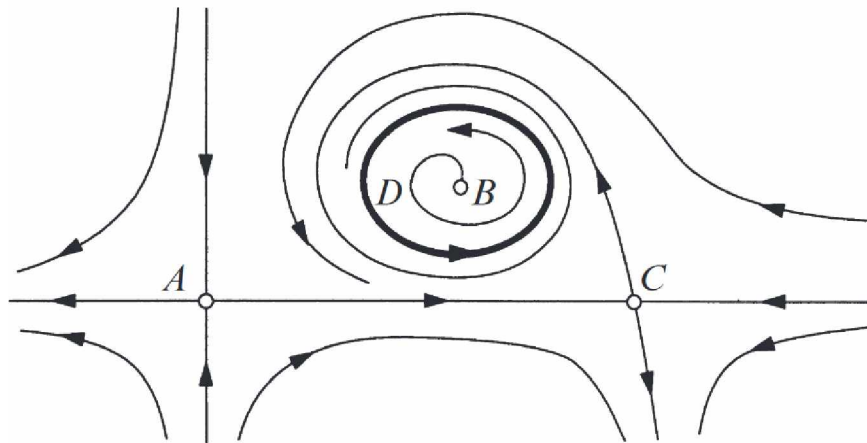
Štoviše, cijela fazna ravan je ispunjena trajektorijama, jer svaka tačka može biti vrijednost nekog novog (drugačijeg) početnog stanja!

Za nelinearne sisteme, obično je nemoguće pronaći trajektorije (putanje) analitički. Čak, i kada su eksplicitne formule dostupne, često su previše komplikovane da bi pružile koristan uvid u ponašanje SDJPR. Umjesto navedenog analitičkog rješavanja SDJPR pokušaćemo odrediti kvalitativno ponašanje rješenja! Naime, naš cilj je da pronađemo fazni portret sistema direktno iz svojstava  $f(x)$ . Ogromna raznolikost faznih portreta je moguća, te samo jedan primjer prikazujemo na slici 79.

---

dinamičku promjenu porasta aktivnosti u ekonomskom sistemu. Analogija postoji, iako ne može biti identično tumačena.





Slika 79. Primjer faznog portreta u ravni

Izvor: Strogatz, H.S. (2015). Nonlinear dynamics and chaos

Analizirajući fazni portret u ravni sa slike 79, izdvojicemo i prezentovati neka njegova najkarakterističnija svojstva:

- 1) Tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$  predstavljaju **fiksne tačke**. Fiksne tačke zadovoljavaju uslov  $f(x^*) = 0$ , gdje je  $x^*$  numeričko rješenje SDJPR. Dodatno, fiksne tačke predstavljaju *ekvilibrjume* ili *ravnotežna stanja* cijelog sistema.
- 2) Tačka (kriva)  $D$  predstavlja **zatvorenu orbitu**. Zatvorene orbite (vrste trajektorija/putanja) odgovaraju *periodičnim rješenjima*, odnosno rješenjima za koja važi da je npr.  $x(t + T) = x(t)$ ,  $\forall t$ , za neku vrijednost  $T > 0$ .
- 3) Raspored trajektorija u blizini fiksnih tačaka i zatvorenih orbita je karakterističan za određenu vrstu fiksne tačke. Na primjer, obrazac toka u blizini  $A$  i  $C$  je sličan, ali opet i drugačiji nego što je to slučaj kod  $B$ .
- 4) Karakteristična je međusobna različitost, stabilnosti ili nestabilnosti, fiksnih tačaka u odnosu na zatvorene orbite. Prezentovane fiksne tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$  su nestabilne, jer obližnje putanje imaju tendenciju da se udalje od njih, dok je zatvorena orbita  $D$  stabilna.

Već smo pomenuli *separatrise*, kao linije koje razdvajaju stabilne od nestabilnih manifolda. Dok, *nullcline* prikazuju vrijednosti vektorskog polja gdje je promjena određene varijable jednaka nuli. Postoje *x-nullcline* (engl. null-cline) sa  $\frac{dx}{dt} = 0$ , i *y-nullcline* gdje je  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Navedeno se najbolje vidi iz primjera koji slijedi, (slika 80). Uz to, bitno je napomenuti da se SDJPR rješavaju putem *numeričkih metoda*.

Razmotrićemo neki jednostavan primjer analize fazne ravni sa klasičnim ***Lotka-Volterra modelom kompetitivnosti*** (takmičenja) između dvije biološke vrste, ovdje modelski–zasnovane na međusobnim interakcijama i relacijama između populacije zečeva i ovaca u nekom ekosistemu, kao što je to npr. travnata livada. Pretpostavimo da se obje vrste takmiče za istu zalihu hrane (trava) i raspoloživa količina je ograničena. Pritom ćemo zanemariti sve druge komplikacije, poput predatora, sezonskih efekata i drugih izvora hrane.[23] Tada, postoje dva glavna efekta koja utiču na brojnost predmetnih populacija, te koje treba da razmotrimo:

- 1) Svaka vrsta bi narasla do svog krajnjeg, odnosno maksimalno mogućeg kapaciteta u odsustvu druge vrste. Navedeno se može modelovati pretpostavkom logističkog rasta za svaku vrstu. Zečevi imaju izuzetnu sposobnost reprodukcije, te iz tog razloga im dodjeljujemo veću intrinzičnu stopu rasta.
- 2) Kada se zečevi i ovce sretnu na livadi, nastaju problemi. Ponekad zec stigne da jede, ali češće ovca ga gurne u stranu, i onda samo ona počinje da jede travu. Pretpostavićemo da se ovi sukobi dešavaju po stopi proporcionalnoj veličini svake populacije. Posljedično, kada bi bilo duplo više ovaca, vjerovatnoća da zec sretne ovcu bila bi duplo veća. Dalje pretpostavljamo da sukobi (problemi) smanjuju stopu rasta za svaku vrstu, ali pomenuti efekat nosi teže posljedice za zečeve (zbog njihove znatno manje fizičke snage).

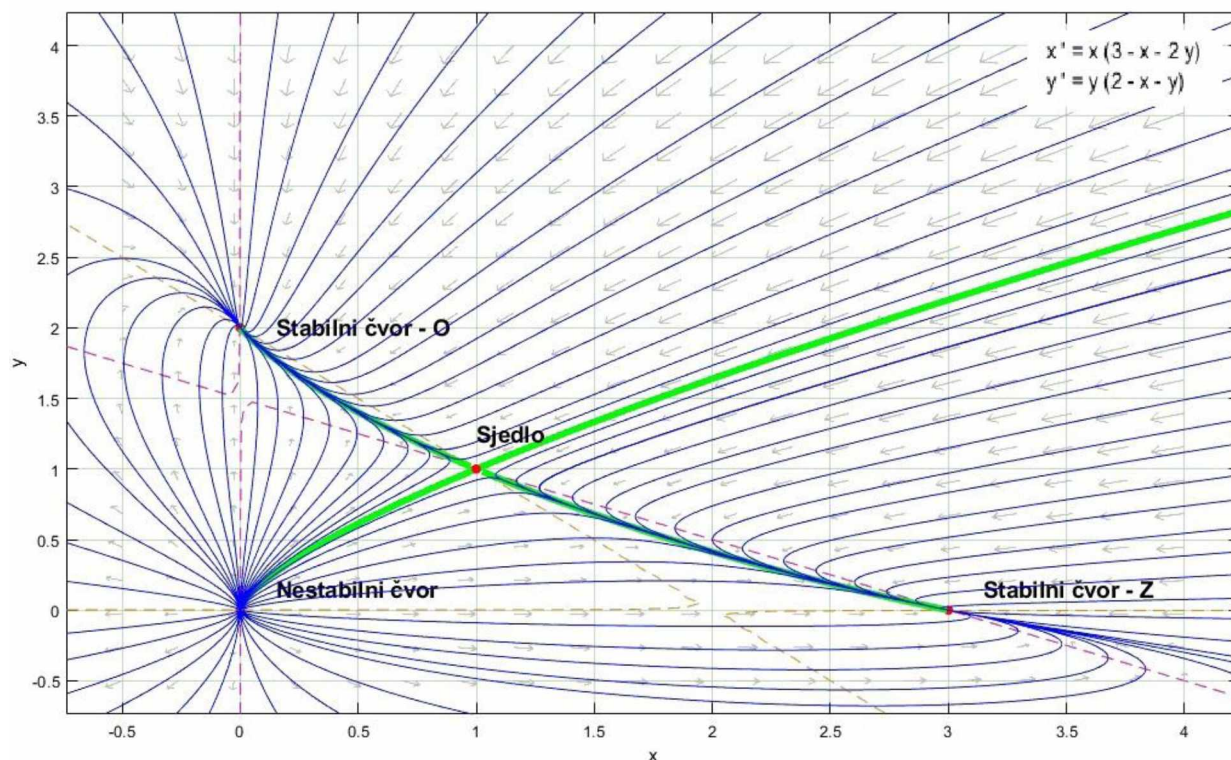
Iako gore postavljeni postulati su jedna vrsta *Lotka-Volterra modela kompetitivnosti*, mi smo izabrali isti, jer u konačnici zečevi i ovce (u principu) koegzistiraju na bazi nekog (trećeg) dobra. Odnosno, nemamo situaciju da vrste ugražavaju (pojedu) jedna drugu, kao što bi to bio slučaj kod *Predator-Plijen Lotka-Volterra modela* (lisice i zečevi). Takođe, pomenuta analogija je slična određenim ekonomskim relacijama, npr. kod antagonizma

poslodavac–radnik, gdje se oboje „bore” (takmiče) za isti resurs (novac), i u istom okruženju (ekonomija, odnosno makroekonomski sistem države). Dodatno, slično je kod odnosa između referentne kamatne stope i poreza na dohodak, spram ukupne vrijednosti novčane mase u opticaju u jednoj makroekonomiji kao (trećeg) dobra. Pri čemu je bitno napomenuti da posljednje navedeni primjer nema svojstva živog bića, već parametrizovanu formu institucionalnog djelovanja u okvirima međusobne ekonomske kohabitacije.

Inkorporiranje u model svega prethodno navedenog vršimo sa sljedećim SNDJPR

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) \end{aligned} \quad , \quad \text{gdje je } x = x(t) = \text{populaciji zečeva} \quad , \quad \text{a } y = y(t) = \text{populaciji ovaca} \quad (\text{slika 80}), \text{ i vrijednosti za } x, y > 0.$$

Posljednje navedeno, prati ranije pomenutu „logiku” u ekonomskih relacijama, gdje su cijena i količina proizvoda uvijek pozitivne veličine, odnosno uvijek su veće od nule. Tačke iznad varijabli  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$  označavaju respektivno njihove prve izvode u vremenu, odnosno važi da je  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  i  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ . Magenta isprekidana linija predstavlja x-nulklinu ( $\dot{x} = 0$ ), dok narandžasta isprekidana linija predstavlja y-nulklinu ( $\dot{y} = 0$ ). Na faznoj ravni, svijetlozelene pune linije predstavljaju separatriše, odnosno razdvajanje između stabilnih ( $W^s$ ) i nestabilnih ( $W^u$ ) manifolda. Izuzetno je bitno naglasiti da relacioni odnos i formirani SNDJPR za ovaj model se obično kreira putem fizičkog prebrojavanja jedinki određene vrste u nekom ekosistemu tokom određenog vremenskog perioda u okviru naučnog posmatranja i izučavanja konkretnog ekosistema. Kada su u pitanju ekonomske, odnosno makroekonomske varijable ne postoji predmetna mogućnost zbog toga što se radi o izuzetno kompleksnom sistemu. Jedna od inovacija u ovoj disertaciji je određivanje međusobnog relacionog odnosa kod logički i suštinski povezanih varijabli, putem upotrebe NNK metoda nad postojećim i pripadajućim podacima u povezanim vremenskim serijama.



Slika 80. Fazni portret u ravni za Lotka-Volterra kompetitivni model „Zečevi–Ovce”

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Ukratko, logika prikazanog modela je sljedeća: Fazni portret, u faznoj ravni, za pomenuti model ima 4 fiksne tačke, i to: dvije stabilne, jednu nestabilnu i sjedlo. Posljedično, fazni portret ima zanimljivu biološku interpretaciju. Prvenstveno pokazuje se, da jedna vrsta uglavnom dovodi drugu vrstu do izumiranja. Trajektorije koje počinju ispod stabilnih manifolda dovode do konačnog izumiranja ovaca, dok one koje počinju iznad mogu dovesti do konačnog izumiranja zečeva. Ova dihotomija se javlja i u drugim modelima konkurencije, i navela je biologe da formulišu *princip kompetitivne konkurentnosti*, koji navodi da dvije vrste koje se takmiče za isti ograničeni resurs obično ne mogu koegzistirati! Za stabilnu, odnosno privlačeću fiksnu tačku  $x^*$ , definišemo njen *basen privlačnosti*<sup>76</sup>, kao skup početnih

<sup>76</sup> Ravnopravni zamjenski termin je: *domen privlačnosti*.

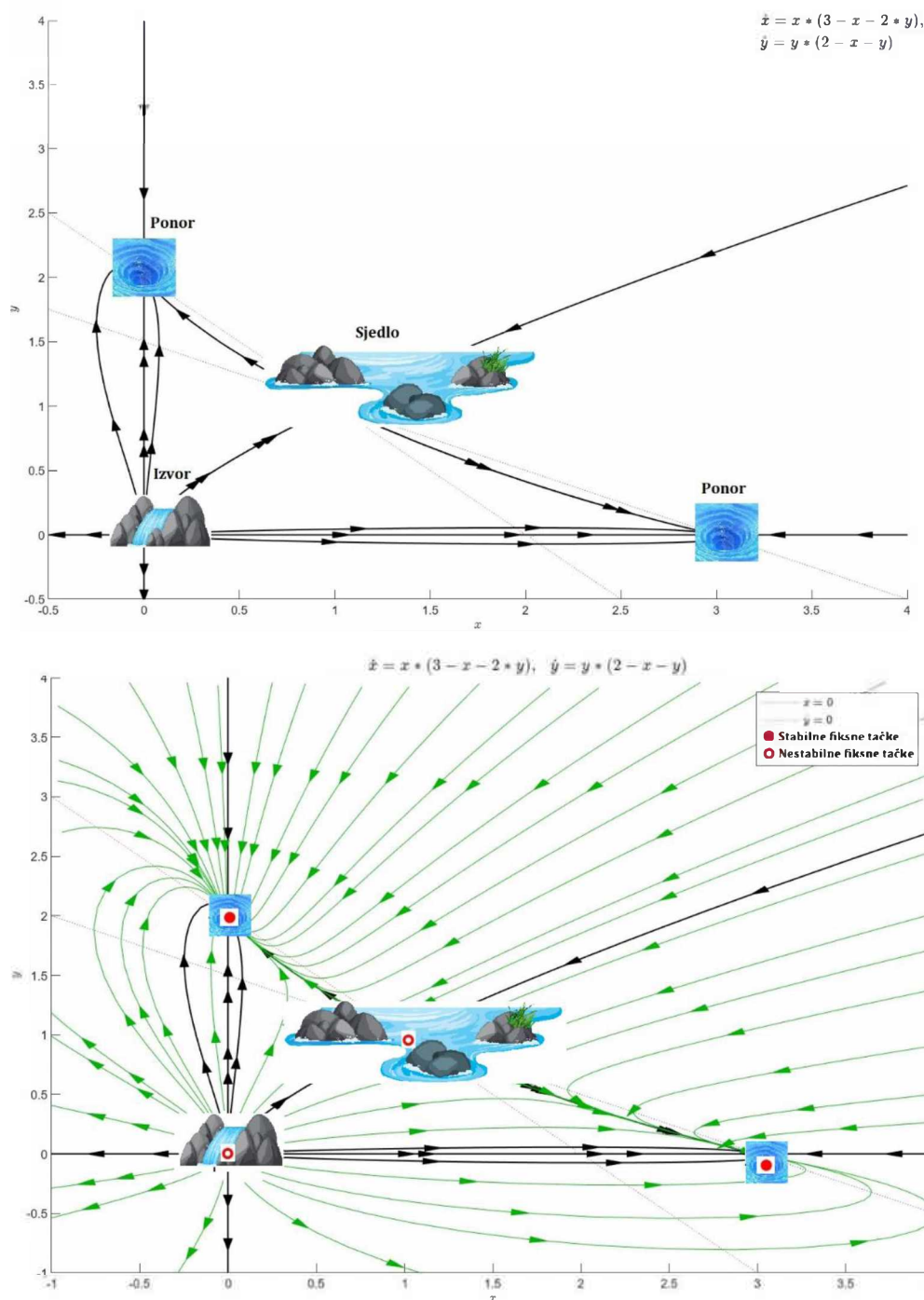
uslova  $x_0$  takvih da  $x(t) \rightarrow x^*$  kada  $t \rightarrow +\infty$ . Na primjer, basen privlačnosti za stabilni čvor u  $(3, 0)$  se sastoji od svih tačaka koje leže ispod stabilnog manifolda koji definiše u sredini sjedlo i separatriše. Suštinski gledano, svaka od dvije vrste želi da stekne prednost nad drugom, na način da postigne apsolutno homogenu populaciju svoje vrste, kako se vremenom zajednički resurs (trava) troši u vremenu. Te stabilne tačke, predstavljaju tačku  $(0,2)$  za ovce i  $(3,0)$  za zečeve. Međutim, prateći i idući tzv. *logikom krda*,<sup>77</sup> dolazi do situacije kada prenaseljenost staništa jedne populacije dovodi do osiromašenja i nestanka resursa potrebnih za život (trava), te se sama brojnost pomenute vrste smanjuje, dok se opet ne dostigne dinamički tok između sve tri kategorije.

Navedeno, jako slično ljudskim bićima u određenim idealizovanim ekonomskim modelima, npr. može se povući paralela između navedene priče sa ljudskom aktivnošću u monopolističkom ponašanju dvije kompanije u određenoj grani ekonomije. Zaključci su vrlo slični, sa tim da u posljednje pomenutom slučaju, zajednički resurs su zapravo potrošači, koji eventualno – na kraju, odustaju od kupovine preskupih proizvoda jednog od monopolista, tj. onog koji je pobijedio (odnosno odnio prevagu u „ekonomskom sukobu” nad onim drugim). Kako bi koliko je moguće jasnije prezentovali i pojasnili predmetni koncept, predstavljamo sliku 81. Pomenuta slika, na vrlo razumljiv vizuelni način prezentuje relativno složene koncepte izvorišta, ušća i preloma trajektorija i nelinearne dinamike u okviru jednog faznog dijagrama, odnosno njegovog pripadajućeg faznog portreta.

---

<sup>77</sup> Pomenuta logika krda se da primijeniti i na ljudsku vrstu, npr. u slučajevima tzv. „juriša na banke”, iracionalnog ponašanja učesnika na berzama kapitala i robe, i sl.

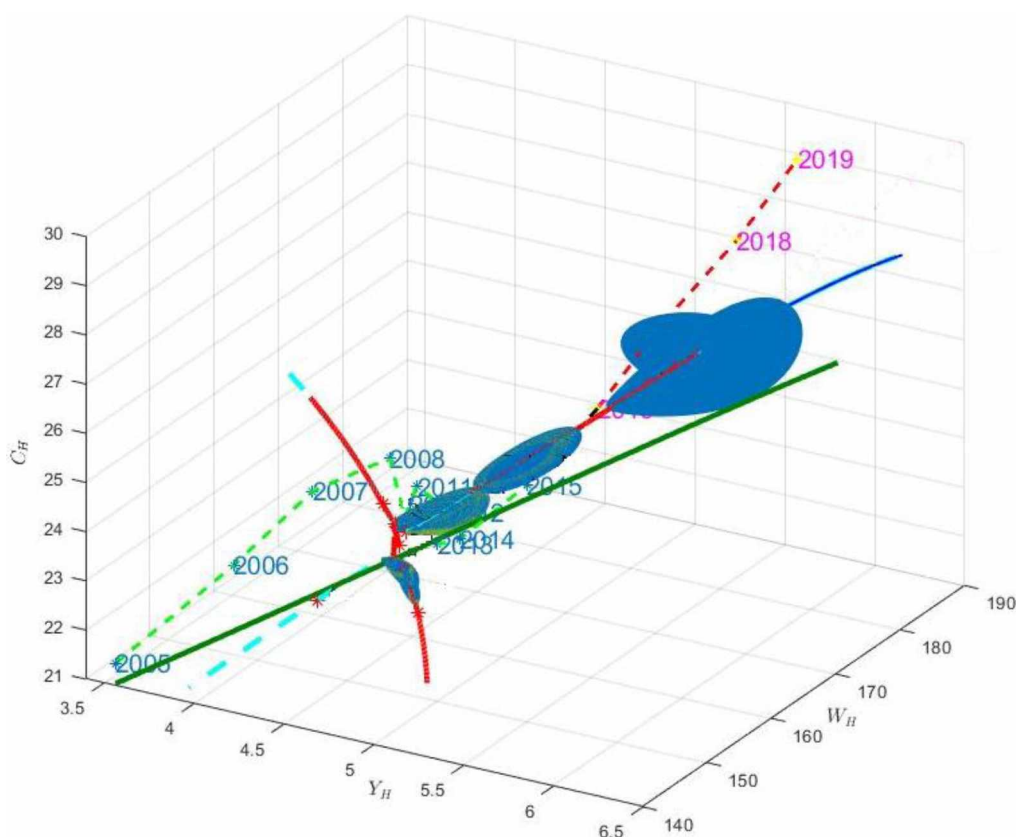




Slika 81. Fazni portret sa vizuelnim elementima, za Lotka-Volterra kompetitivni model

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Bitno je pomenuti, da pojava haosa je jedino moguća u 3D sistemima. Dodatno, izgled *faznog prostora* (3D), i pripadajućeg mu faznog portreta, možemo vidjeti na slici 82. Navedeno je samo ilustracija prostornih, odnosno 3D faznih dijagrama, dok njihova analiza i sinteza će biti detaljno prezentovana u 5. poglavlju.



Slika 82. Fazni portret u prostoru (3D) za  $Y_H$ – $W_H$ – $C_H$  sistem

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Na slici 82. su pored faznog portreta, dodatno i naknadno, označene godine u kojima su vrijednosti prikazane na faznom portretu odgovarale stvarnim vrijednostima u vremenu. Predmetni prikaz i metodologija NLA u 3D, daje zaista obilje podataka, i analitičko–sintetičkih okvir sa različitim mogućnostima u istraživanjima. Moguće je da u budućnosti prezentovana metodologija postane standard u ekonomskoj analizi, te da se može koristiti i prilikom grafičkog izvješćivanja o dinamici promjena ekonomskih varijabli.

### 3.5 Teorija haosa

Postavlja se pitanje: kako da jednoznačno, egzaktno i opšteprihvaćeno definišemo što je to *haos*? Najčešći odgovor na postavljeno pitanje je da ne možemo jednoznačno, egzaktno i opšteprihvaćeno definisati što je to haos.

Naime, nijedna definicija pojma haosa nije univerzalno prihvaćena, iako skoro svi bi se složili oko tri osnovna elementa koja definišu haos, i korišteni su u sljedećoj definiciji: *Haos je aperiodično dugoročno ponašanje u determinističkom sistemu koji pokazuje osjetljivu zavisnost od početnih uslova*. Potrebno je pomenuti, i malo detaljnije elaborirati, svaki od tri pomenuta koncepta prisutna u navedenoj „definiciji” haosa: 1.) „*Aperiodično dugoročno ponašanje*” znači da postoje putanje koji se ne završavaju sa fiksnim tačkama, periodičnim orbitama ili kvaziperiodičnim orbitama kada  $t \rightarrow \infty$ . Iz razloga praktičnosti, trebalo bi da zahtijevamo da pomenute putanje nisu previše rijetke. Na primjer, mogli bismo da insistiramo na tome da mora postojati, ili otvoren skup početnih uslova koji vode do aperiodičnih putanja, ili da se takve putanje „dešavaju” sa vjerovatnoćom različitom od nule za neki arbitrarno odabrani početni uslov. 2.) „*Deterministički*” znači da sistem nema slučajnih promjena, ili šuma na ulazu sistema, ili promjenjivih parametara. Neregularno ponašanje proizilazi iz nelinearnosti sistema, a ne od komponenti šuma (kao pokretačkih sila). 3.) „*Osjetljiva zavisnost od početnih uslova*” znači da obližnje trajektorije se odvajaju jedna od druge eksponencijalno brzo, tj. da sistem ima pozitivan Ljapunov EkspONENT (LE).

Moderni razvoj teorije haosa, kako su je tada mnogi nazivali *nove vrste nauke*<sup>78</sup>, [180][181] vezuju se za 1960-e godine prošlog vijeka, i naučnika Edvarda Nortona Lorenca. Edward Norton Lorenz (23. maj 1917 – 16. april 2008) je bio američki matematičar i meteorolog koji je uspostavio teorijske osnove vremenske i klimatske predvidljivosti, kao i osnov za kompjuterski potpomognutu atmosfersku fiziku i meteorologiju. Najpoznatiji je kao osnivač moderne teorije haosa, grane matematike koja se fokusira na ponašanje dinamičkih sistema koji su veoma osjetljivi na početne uslove. Njegovo otkriće determinističkog haosa „duboko je uticalo na širok spektar osnovnih nauka i dovelo do jedne od najdramatičnijih

---

<sup>78</sup> Gleick J. Chaos: Making a new science. Penguin; 2008 Aug 26.



promjena u pogledu čovječanstva na prirodu, od Isaka Njutna“, prema komitetu koji mu je 1991. dodijelio Kjoto nagradu za osnovne nauke u oblasti nauka o zemlji i planeti.

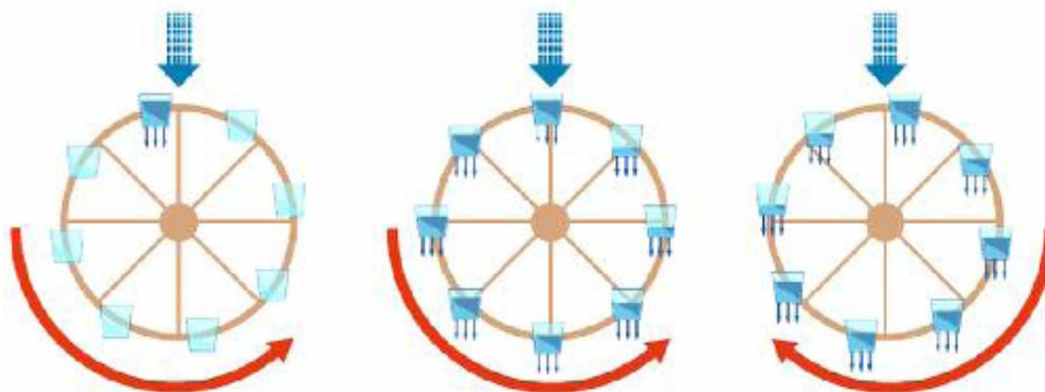
Naime, određena vrsta kretanja tečnosti inspirisala je Lorencove tri jednačine: podizanje vrućeg gasa ili tečnosti, poznato kao konvekcija. U atmosferi, konvekcija pokreće zrak zagrijan suncem nad zemljom, a svjetlucavi konvektivni talasi se uzdižu iznad vrućeg tla. Logiku planetarne konvekcije, Lorenc je pokušao približiti širem stručnom i laičkom auditorijumu riječima: „Možemo odrediti temperaturu šoljice kafe za sat vremena, ali je ne možemo odrediti za jedan minut.“ Navedeno je kontra-intuitivno za većinu ljudi koji ne poznaju, ili se nisu sreli, odnosno barem okvirno upoznali sa postulatima *teorije haosa*. Svoj početni model atmosferskih konvektivnih kretanja za planetu zemlju, Lorenc je maksimalno uprostio, odbacivši skoro sve nelinearne članove, osim jednog. Naizgled, relativno jednostavan sistem jednačina, u sebi je krio *klicu haosa*. Kasnije će naučnici izučavati logičku jednačinu, otkriće nove vrste nelinearnosti, razne zanimljive atraktore, itd., ali tada (1962./1963. godine) ,nakon više od pola vijeka od Poankareovog pokušaja rješavanja problema tri tijela, sve je počelo od E.W.Lorenca. Dodatno, postoji mehanički model tzv. *vodenog točka (vodenice)*, čije kretanje je apsolutno precizno i naučno (egzaktno) opisano pomoću Lorencovih jednačina, odnosno njegov konceptualni dio.<sup>79</sup>

Lorencov vodeni točak (slika 83) je zapravo prvi poznati haotični sistem. Pomenuti točak korespondira sa mehaničkim uređajem poznatim pod nazivom *vodenica*. Ovaj jednostavan uređaj je pokazao iznenađujuće kompleksno ponašanje. Rotacija vodenog točka (vodenice) dijeli neke od svojstava rotirajućih cilindara tečnosti u procesu konvekcije. Vodeni točak je kao jedan poprečni presjek konvektivnog cilindra u tečnosti. Oba sistema se stalno pokreću – vodom ili toplotom, i oba rasipaju energiju. Tečnost gubi toplotu, dok kante gube vodu. U oba sistema, dugoročno ponašanje zavisi od toga kolika je količina energije unesena u pokretanje. Voda se uliva sa vrha stalnom brzinom. Ako je protok vode u vodenom točku spor, gornja kanta se nikada ne napuni dovoljno da prevaziđe trenje, a točak nikada ne

---

<sup>79</sup> Naravno, haotične vrijednosti i ponašanje sistema nije moguće egzaktno predviđjeti.

počinje da se okreće. Slično, u tečnosti, ako je toplota preniska da bi se prevazišao viskozitet, neće doći do konvektivnog kretanja.



Slika 83. Konceptualni prikaz modela Lorencovog vodenog točka (vodenice)

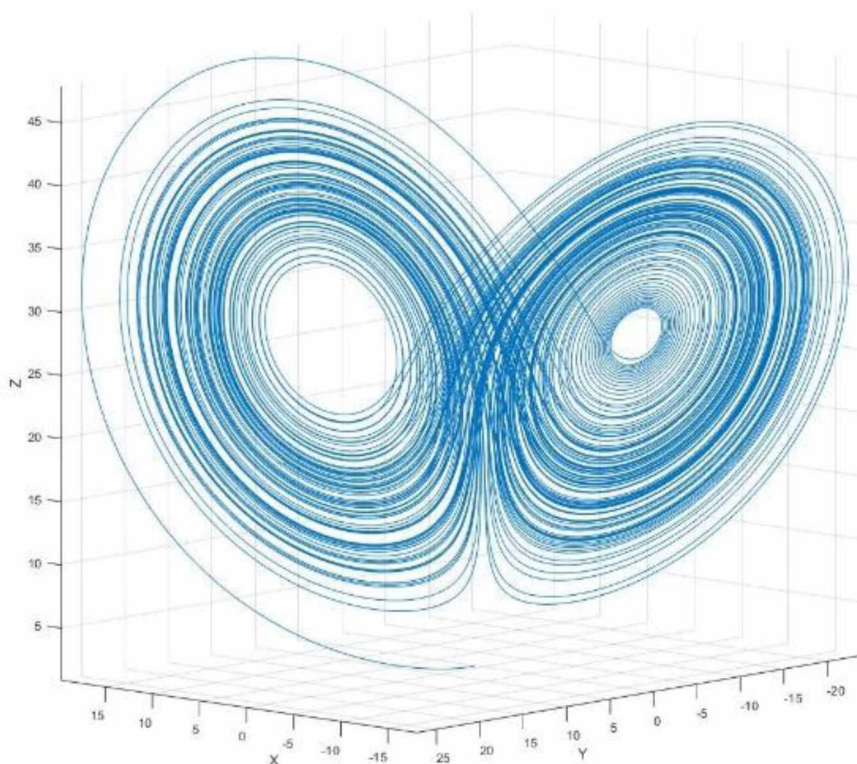
Izvor: Gleick J. Chaos: Making a new science. Penguin; 2008 Aug 26.

Ako je protok brži, težina gornje kante pokreće točak iz stanja mirovanja (slika lijevo). U tom slučaju vodeni točak se zarotira, i stalno se okreće određenom brzinom (slika u sredini). Ukoliko povećavamo brzinu toka (slika desno), okretanje može postati haotično, zbog nelinearnih efekata koji su intrinzično inkorporirani u sistem. Prolaskom kanti ispod izvora vode, količina koliko će se kante napuniti zavisi od brzine okretanja vodenog točka (vodenice). Kada se točak brzo okreće, kante imaju malo vremena da se napune. Slično, tečnost u konvekcijskom valjku koji se brzo okreće ima malo vremena da apsorbuje toplotu. Takođe, ako se točak brzo okreće, kante mogu da se pokrenu sa druge strane točka prije nego što imaju vremena da se isprazne. Kao rezultat navedenog, teške kante na bočnoj strani koje se kreću nagore mogu uzrokovati usporavanje okretanja, a zatim obrnuti smjer rotacije. U stvari, Lorenc je otkrio, tokom dugih (dužih) perioda, okretanje može da promijeni smjer mnogo puta, nikada se ne spusti na stabilnu brzinu i nikada se ne ponavlja po bilo kom predvidljivom obrascu.

Analogni sistem, gore prezentovanom vodenom točku, jeste Lorenzov atraktor (slika 84). Naizgled jednostavnim SNDJPR, kreira se jedna od najpoznatijih i „najplastičnijih”

figura u TH. Predstavimo prvo Lorenzove jednačine, koje imaju oblik: 
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

gdje su parametri  $\sigma, r, b > 0$ . Parametar  $r$  se često označava sa  $\rho$ . Obično,  $\sigma$  je **Prantdlov broj**,  $r$  ili  $\rho$  je **Reilejev broj**, dok su  $a$  i  $b$  opšte oznake za promjenjive parametre.



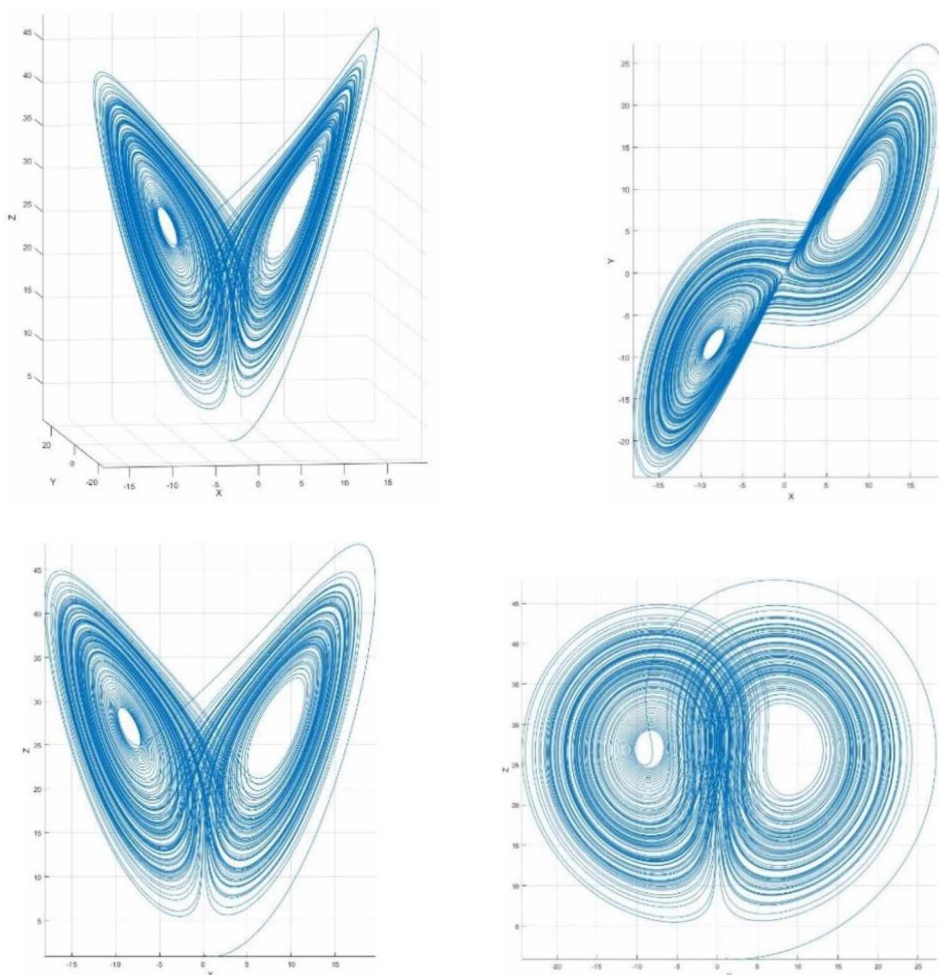
Slika 84. Lorencov Atraktor Slika

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Kod izučavanja konvekcije, parametri  $a$  i  $b$  su povezani sa odnosom širine i visine rotirajuće rolne tečnosti tokom procesa konvekcije. Za vrijednosti parametara  $\rho = 28, \sigma = 10$  i  $\beta = \frac{8}{3}$  dobijamo oblik prikazan na slici 84. Poznati „oblik leptira”, koji je moguće

mogao biti inicijalna inspiracija novinaru (koji je inače pogrešno prenio dio intervjua sa Edvardom Lorencom) prezentovan je uskoro svjetskoj javnosti.

U pomenutom obliku leptira prepoznajemo – uslovno rečeno, krugove koji predstavljaju tzv. *neobični atraktor* (engl. strange attractor). Nadalje, definišemo što to predstavlja *atraktor* i *neobični atraktor* u domenu NDA i TH.



Slika 85. Lorencov atraktor u 3D, i 2D projekcije na koordinatne ose  $x - y$ ,  $x - z$  i  $y - z$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

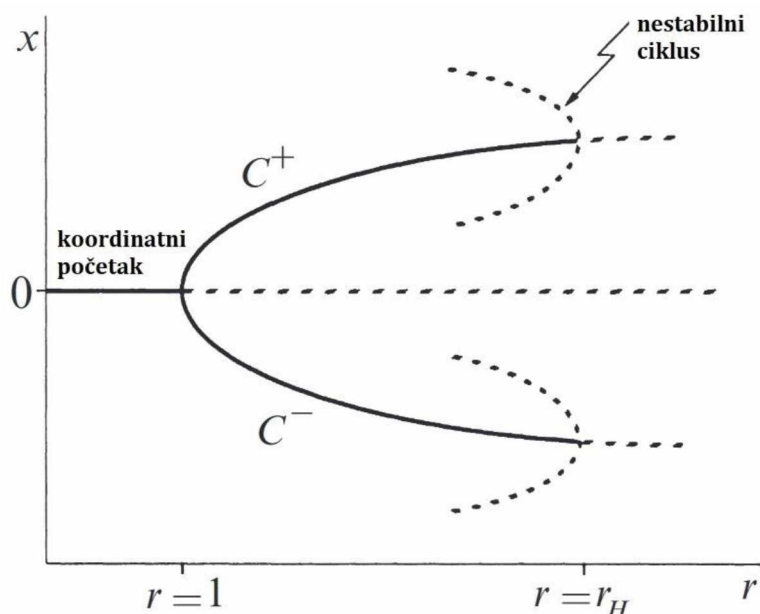
Pomenimo prije svega neke esencijalne osobine Lorencovog sistema. Naime, nelinearnosti u Lorencov sistem unose članovi  $xy$  i  $xz$ . U Lorencovim jednačinama postoji

jako značajna simetrija. Naime, ako zamijenimo  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  jednačine ostaju iste! Dakle, ako je  $(x(t), y(t), z(t))$  rješenje sistema, tada je i  $(-x(t), -y(t), -z(t))$  takođe njegovo rješenje. Odnosno, sva rješenja su simetrična sama sebi, ili imaju simetričnog dvojnika u obliku uređene trojke sa negativnim predznakom. Pomenuta osobina je ranije detaljno elaborirana kod prezentacije reverzibilnih dinamičkih sistema. Dodatno, Lorencov sistem je *disipativan*, tj. zapremine u faznom prostoru se skupljaju pod uticajem toka.[187]

Lorencov sistem ima dvije vrste fiksni tačaka. U koordinatnom početku je tzv. *trivijalna* fiksna tačka  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$  za sve vrijednosti parametara. Navedeno stanje odgovara stanju *mirovanja*, odnosno odsustvu bilo kakve dinamike u sistemu. Za  $r > 1$  takođe postoji simetričan par fiksni tačaka  $x^* = y^* = \sqrt{b(r-1)}$ ,  $z^* = r-1$ . Lorenc je navedene fiksne tačke nazvao  $C^+$  i  $C^-$ . U fizičkom smislu, pomenute fiksne tačke predstavljaju konvekcijske valjke koji se okreću lijevo ili desno (analogno sa stabilnim rotacijama Lorencovog vodenog točka). Kada  $r \rightarrow 1^+$ , tada  $C^+$  i  $C^-$  doživljavaju *koalescenciju* sa koordinatnim početkom, odnosno spajaju se sa koordinatnim ishodištem (gledano iz ugla faznog prostora) u *vilastoj bifurkaciji* (engl. pitchfork bifurcation). Za vrijednosti  $r < 1$  svaka se putanja približava koordinatnom početku kada  $t \rightarrow \infty$ , te iz toga proizilazi da je koordinatni početak za Lorencov sistem *globalno stabilan*, odnosno ne mogu se pojaviti granični ciklusi ili kaos za  $r < 1$ . Bitno je naglasiti, da se nijedna od trajektorija Lorencovog sistema ne ukršta sa nijednom drugom trajektorijom. Iako u 2D projekcijama ponekad može vizuelno izgledati da se trajektorije ukrštaju, u suštini one se nikada ne ukrste.

Analizirajmo stabilnost  $C^+$  i  $C^-$  tačaka (slika 86). Pretpostavimo  $r > 1$ , tako da  $C^+$  i  $C^-$  postoje. Proračun se dobija da su  $C^+$  i  $C^-$  linearno stabilni za  $1 < r < r_h = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$  (pod pretpostavkom da je  $(\sigma - b - 1) > 0$ ). Koristimo u indeksu „H” pri označavanju  $C^+$  i  $C^-$ , jer pomenute tačke gube stabilnost u Hopfovoj bifurkaciji pri  $r = r_h$ .





Slika 86. Vilasta bifurkacija kod Lorencovog sistema

Izvor: Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. CRC press; 2018 May 4.

Zapravo, trajektorija započinje svoju matematičku egzistenciju u blizini koordinatnog početka, zatim se „zamahne” udesno, a zatim zaroni u centar spirale na lijevo. Nakon veoma sporog okretanja ka spolja, putanja se vraća udesno sa strane, spiralno se okreće nekoliko puta, zatim opet prelazi u lijevo, spiralno kruži okolo, i tako dalje se „kreće” beskonačno vremena. Broj krugova napravljenih na obje strane (lijevo i desno) nepredvidivo varira iz ciklusa u ciklus! Zapravo, redosljed broja krugova napravljenih lijevo i/ili desno ima karakteristike slučajnog niza. Fizičko značenje pomenutog se ogleda u neregularnom, odnosno stohastičnom odabiru smjera rotacije Lorencovog vodenog točka. Kada se putanja posmatra u sve tri dimenzije, a ne kao dvodimenzionalna projekcija, izgleda da se putanje „naslažu” na izuzetno tanak skup, koji opet dalje izgleda kao par leptirovih krila. Slike 84 i 85 prikazuju šemu ovog neobičnog atraktora. Termin neobični atraktor su „skovali” i prvi upotrijebili Ruel i Takens (1971)[168]. Pomenuti granični skup je privlačan i ima nultu zapreminu! Dodatno, na prvi pogled izgleda da se dvije površine („krila leptira”) spajaju u jednoj tački/oblasti/skupu, ali zapravo postoji beskonačan broj površina koje grade početno–najuočljivije dvije površine. Do prezentovanog zaključka dolazimo ukoliko pratimo

paralelno trajektorijama površinu koju opisuju, jer tada dolazi do multiplikacije dvije u četiri, pa četiri u osam, osam u šesnaest površina, itd. u beskonačnost. Uistinu, pomenuti *matematički konstrukt* jeste neobičan, i za njega u današnjoj matematici imamo naziv: **fraktal**. Fraktali su zapravo skupovi tačaka sa nultom zapreminom, ali beskonačnom površinom. *Numerički eksperimenti* sugerišu da Lorencov neobični atraktor ima dimenziju od oko 2,05!<sup>80</sup> Kada govorimo o dimenzijama fraktala iste se konceptualno, i u nekim očiglednijim odnosno prostijim slučajevima, mogu odrediti na sljedeći način: pretpostavimo da se sebi sličan skup sastoji od  $m$  kopija samog sebe umanjenih za faktor  $r$ . Zatim, da je **dimenzija sličnosti**  $d$  eksponent definisan sa  $m = r^d$ , ili ekvivalentno,  $d = \frac{\ln m}{\ln r}$ . Pomenutu formulu je relativno lako koristiti za prostije slučajeve, kao što su Kantorov skup (engl. Cantor set), Kohova kriva (engl. Koch curve), trugao Sierpinskog (engl. Sierpiński triangle), i sl. Intuitivno nam postaje jasno, da za većinu fraktalnih skupova  $S$ , dimenzija ( $d$ ) više nije cijeli broj. Po analogiji sa klasičnim određivanjem dimenzija, dimenzija  $d$  se obično naziva i **kapacitet** ili **dimenzija kutije  $S$** . Metod određivanja dimenzije fraktala pomoću **dimenzionih kutija** (engl. Box dimension), koristi zapravo metod potpunog pokrivanja fraktala sa dovoljno malih kvadrata (za konkretnu dužinu, površinu ili zapreminu), pri čemu stranice tih kvadrata su infinitezimalno male (teže ka nuli). Pomenuto sublimira formula  $d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$ , gdje je  $N$  broj kvadrata (kocki, za zapreminu) koji pokrivaju fraktal, a  $\varepsilon$  veličina njegove stranice. Sve navedeno je pod uslovom da predmetni *limes* postoji. Pored posljednje pomenutog potencijalnog problema u određivanju dimenzije fraktala, metoda dimenzije kutije  $S$  ima još nedostataka u vidu teškoća na koje se nailazi pri pronalaženju minimalno potrebnih kvadrata/kocki da pokriju fraktal. Iz tog razloga je razvijena u praksi najkorištenija metoda **tačkasta dimenzija** u  $x$  ili **korelaciona dimenzija**. Detaljna analiza tačkaste odnosno korelacione dimenzije prevazilazi svrhu disertacije, ali se detalji mogu naći u [113]. Bitno je pomenuti, da pored fraktala postoje i multifraktali, čije dodatno objašnjenje se takođe nalazi u prethodno pomenutoj referenci.

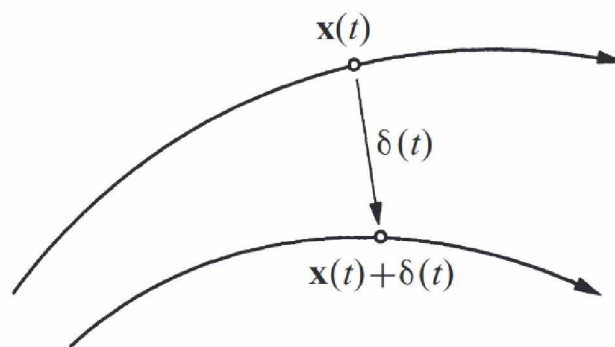
---

<sup>80</sup> Pomenuta oblast je jako široka, i prevazilazi okvire i namjenu disertacije, te je nećemo dalje i detaljnije analizirati.

Kompletna okvirna priča oko dimenzija fraktala nam je u ovom dijelu disertacije potrebna da bi napravili kauzalnu vezu kod definisanja atraktora i neobičnih atraktora. Dodatno, potrebno je definisati pojam *eksponencijalne divergencije putanja*, koje su fenomenološki direktno povezane sa Ljapunovim eksponentima (LE).

Kretanje po atraktoru pokazuje osjetljivu zavisnost od početnih uslova. Dvije putanje, koje počinju veoma blizu jedna drugoj, brzo će se razići i imati potpuno drukčije vrijednosti u budućnosti. Praktična implikacija navedenog nalazi se u tome da je dugoročno predviđanje u sistemu nemoguće, jer se male razlike eksponencijalno „brzo” pojačavaju.

Pretpostavimo da smo dozvolili/pustili da se sistemski prolazni procesi stabilizuju, i da se putanja koju posmatramo nalazi „na” atraktoru. Dalje, pretpostavimo da je  $x(t)$  tačka na atraktoru u vremenskom trenutku  $t$ , i razmotritimo neku arbitrarno odabranu obližnju (vrlo blisku) tačku  $x(t) + \delta(t)$ , gde je  $\delta$  jako malo razdvajanje (separacija) vektora početne dužine normiranog kao  $\|\delta_0\| = 10^{-15}$  (slika 87).



Slika 87. Eksponencijalna divergencija putanja

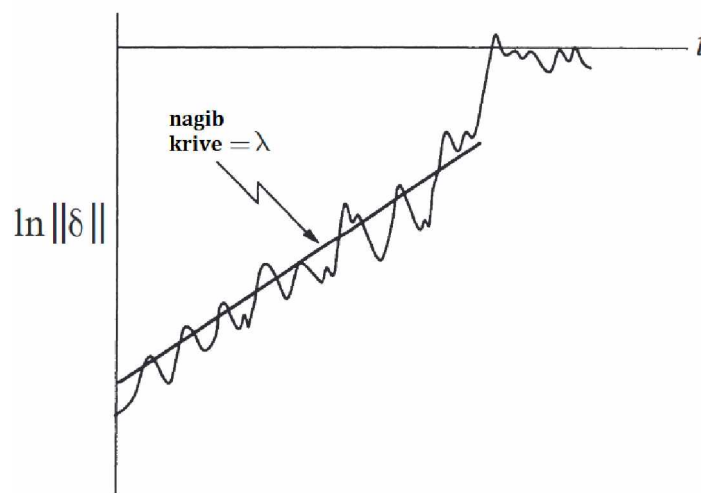
Izvor: Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. CRC press; 2018 May 4.

Sada, posmatrajmo koliko brzo se mijenja  $\delta(t)$ , odnosno koliko brzo raste. U numeričkim studijama Lorencovog atraktora pokazano je da važi  $\|\delta(t)\| \sim \delta_0 e^{\lambda t}$ . Posljednje pomenuta zavisnost jednoznačno ukazuje na razloge eksponencijalnog razdvajanja putanja, odnosno trajektorija Lorencovog sistema. Dodatno, ako nacrtamo grafik



zavisnosti  $\ln \|\delta(t)\|$  spram  $t$ , zapravo određujemo (crtamo) krivu koja je bliska *pravoj* sa pozitivnim nagibom  $\lambda$  (slika 88).

Međutim, potrebno je da definišimo i prezentujemo neke od ključnih osobina predmetne krive (slika 88). Naime, važi da: 1. Kriva nije nikada potpuno ravna (uvijek postoji oscilovanje). Razlog je, što se duž atraktora razlikuju vrijednosti ekspoencijalno–divergacionih karakteristika sistema. 2. Ekspoencijalno–divergaciona tendencija mora prestati kada je razdvajanje uporedivo sa „prečnikom” atraktora – putanje se očigledno ne mogu udaljiti više od toga. Navedeno objašnjava zašto dolazi do zasićenja krive na slici 88. Vrijednost  $\lambda$  se naziva Ljapunovim eksponentom, iako pomenuti naziv nije naučno gledano najprecizniji, jer postoji  $n$  različitih Ljapunovih eksponenata za  $n$ -dimenzioni sistem. Razmotrimo evoluciju infinitezimalne sfere perturbiranih početnih uslova. Tokom vremena, sfera će se izobličiti u beskonačno mali elipsoid. Neka  $\delta(t), k = 1, \dots, n$ , označava dužinu  $k$ -te glavne ose<sup>81</sup> elipsoida. Tada važi da je  $\delta_k(t) \sim \delta_k(0) e^{\lambda_k t}$ , gdje su  $\lambda_k$  Ljapunovi eksponenti.



Slika 88. LE i pripadajući nagib krive spram logaritma normirane divergencije putanja

Izvor: Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. CRC press; 2018 May 4.

<sup>81</sup> Poluprave iz koordinatnog početka koje leže na osama simetrije elipsoida nazivaju se glavne ose ili jednostavno ose elipsoida.

Za velike vrijednosti  $t$ , prečnik elipsoida najviše zavisi od najvećeg–pozitivnog Ljapunovog eksponenta, tako da je zapravo pomenuta vrijednost ona koju često kolokvijalno nazivamo Ljapunov eksponent. Određivanje Ljapunovog eksponenta jako malo zavisi od toga koju trajektoriju odaberemo (pratimo), jer suštinski se  $\lambda$  određuje usrednjavanjem kalkulacije na osnovu više srodnih trajektorija u okviru kompatibilnog ogranka toka. Kada sistem ima pozitivan Ljapunov eksponent postoji vremenski horizont iza kojeg je predviđanje budućih vrijednosti nemoguće (slika 89).

Kao primjer prethodno navedenog: pretpostavimo da mjerimo veoma precizno početne uslove za neki eksperimentalni sistem. Naravno, nijedno mjerenje nije savršeno, i uvijek postoji određena greška  $||\delta_0||$  između izmjerene i prave vrijednosti početnog stanja. Nakon određenog vremena  $t$ , razlika raste na  $||\delta(t)|| \sim ||\delta_0||e^{\lambda t}$ . Neka  $a$  bude mjera naše tolerancije, tj. ako je predviđanje u granicama  $a$  od *stvarnih vrijednosti*, smatramo ga prihvatljivim. Posljedično, naše predviđanje nije valjano, odnosno loše je, ako je  $||\delta(t)|| \geq a$ . Navedeno se događa pri približno vrijednosti za  $t$  koja iznosi  $t \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{||\delta_0||}\right)$ . Koliko god se trudili da smanjimo grešku  $||\delta_0||$ , nikada ne možemo predvidjeti kretanje i vrijednosti sistema u budućnosti više od par/nekoliko multipla vrijednosti  $\frac{1}{\lambda}$ . U cilju jasnije prezentacije navedenog, navodimo jedan numerički primjer.



Slika 89. Divergencija vrijednosti trajektorija u vremenu za skoro identične početne uslove

Izvor: Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. CRC press; 2018 May 4.

Pretpostavimo da pokušamo da predvidimo buduće stanje haotičnog sistema sa preciznošću, odnosno vrijednošću tolerancije, od  $a = 10^{-3}$ . Imajući u vidu da je naše

mjerenje vrijednosti početnog stanja reda veličine  $||\delta_0|| = 10^{-7}$ , postavlja se logično pitanje: koliko dugo možemo predvidjeti stanje sistema, odnosno da ostane u granicama zadate (tražene) tolerancije? Nadalje, pretpostavimo da u drugom slučaju imamo najbolje moguće instrumente, istraživačko osoblje, istraživačke uslove za rad, itd., i da posljedično uspijevamo izmjeriti početno stanje milion puta(!) bolje nego prošli put, tj. poboljšali smo početnu grešku na  $||\delta_0|| = 10^{-13}$ . Dakle, koliko puta možemo predvidjeti vrijednosti sistema u budućnosti u oba slučaja? Prvobitno predviđanje ima tzv. *horizont predviđanja* od  $t_1 \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}}\right) = \frac{1}{\lambda} \ln(10^4) = \frac{4 \ln 10}{\lambda}$ . Poboljšano, drugo predviđanje ima horizont predviđanja od  $t_2 \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}}\right) = \frac{1}{\lambda} \ln(10^{10}) = \frac{10 \ln 10}{\lambda}$ . Odnosno, kada ih uporedimo, koeficijent poboljšanja predviđanja  $k$  je jednak je raciju vrijednosti za  $t_2$  i  $t_1$ , i iznosi  $k = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{10 \ln 10}{\lambda}}{\frac{4 \ln 10}{\lambda}} = \frac{10}{4} = 2,5$ . Dakle, nakon milion puta poboljšanja naše početne neizvjesnosti (greške mjerenja), možemo predvidjeti samo 2,5 puta duže u vremenu! U ovoj disertaciji način na koji smo pokušali, samo donekle da riješimo pomenuti problem ili bolje reći poboljšamo dobijene rezultate, jeste izuzetno visoka preciznost vrijednosti uključenih varijabli, i to, od minimalno 54 do 64 decimale iza decimalnog zareza!

Zapravo, atraktor je skup kome konvergiraju sve susjedne putanje. Primjer, su stabilne fiksne tačke i stabilni granični ciklusi. Dakle, definišemo atraktor kao zatvoreni skup  $A$  sa sljedećim svojstvima: 1)  $A$  je *invarijantni* skup: svaka putanja  $x(t)$  koja počinje u  $A$  ostaje u  $A$  sve vrijeme. 2)  $A$  *privlači otvoreni skup početnih uslova*: postoji otvoreni skup  $U$  koji sadrži  $A$  takav da ako je  $x(0) \in U$ , onda rastojanje od  $x(t)$  do  $A$  teži nulu kada  $t \rightarrow \infty$ . To znači da  $A$  privlači sve putanje koje počinju dovoljno blizu. Najveći skup  $U$  se naziva *basen privlačenja* od  $A$ . 3)  $A$  je *minimalno*: odnosno ne postoji podskup od  $A$  koji zadovoljava uslove 1 i 2.

U disertaciji nećemo dalje obrađivati Lorencov sistem, već isti nam je poslužio da konceptualno prikažemo pojam i karakteristike haosa u SNDJPR. Dodatno, kaos je pronađen u makroekonomskim sistemima koje izučavamo i prezentujemo u disertaciji, te će biti više i detaljnije riječi o istom na praktičnom primjeru u nastavku.

### 3.6 NDA analitički alati za MATLAB

Karakteristično je da sistemi običnih nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (SNDJPR) nemaju simbolička rješenja. Odnosno sistem(e) NDJPR nije nemoguće riješiti analitički. Jedini način da se pomenuti SNDJPR riješe su *numeričke metode*. Zapravo numerička rješenja definišu fazne dijagrame i portrete, te dobijamo kvalitativni i kvantitativni uvid u ponašanje sistema putem istih. Posmatrajući tok (engl. flow) možemo analizirati SNDJPR bez stvarnog potpunog i krajnjeg rješenja. Dolazimo do situacije, gdje analiziramo SNDJPR vizualizacijom faznih portreta i slika. Za posljednje pomenuto, potrebni su kompleksni programski alati i njihova upotreba u NDA. Za potrebe disertacije numeričko rješenje i vizuelizacija SNDJPR zahtijeva MATLAB softverski paket, u kombinaciji sa svojim specijalizovanim aplikacijama *pplane*<sup>82</sup> (dvodimenzionalni sistemi (2D)) i *MATCONT* (trodimenzionalni sistemi (3D)). U narednim poglavljima ćemo kratko predstaviti njihove osnovne karakteristike, podešavanja, korisnički interfejs (okvirno), itd., kao i vrstu rješenja (vizualizacija) koja pružaju.

#### 3.6.1 PPlane aplikacija za MATLAB

Program *pplane* omogućava korisniku da koristeći grafički interfejs vrši iscrtavanje faznih i parametarskih prostora, odnosno odgovarajućih im faznih portreta. *Pplane* je vremenom, programiran na različitim programskim jezicima (Fortran, MATLAB, Java, Python, itd.) i sistemskim okruženjima (MS Windows, RH Linux, Apple iOS, itd.) – od svoje početne i izvorne verzije, koju je napisao i razvio profesor sa Univerziteta Rajs, Džon C. Polking (John C. Polking, Rice University, USA) [43]. Prof. dr Polking je ovaj softver učinio besplatnim za upotrebu u obrazovnim institucijama. Korisnik *pplane* ne mora definisati vektore za sve tačke u opsegu faznog prostora SNDJPR, već jednostavno može definisati

---

<sup>82</sup> Kouznetsov I. *pplane9* (MATLAB Central File Exchange), <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/65887-pplane9-action-input1-input2-input3> (2019, accessed 28 October 2019).

jednačine u programu, odrediti željeni opseg za fazni portret, oblik i broj strelica, i spreman je za kvalitativnu i kvantitativnu analizu predmetnog sistema. Naravno, analiza i tumačenje dobijenih rezultata iziskuje specijalistička znanja i poznavanje NDA, oblasti istraživanja i konkretnog modela.

Uopšteno gledano, *pplane* je program koji olakšava rješavanje nelinearnih i linearnih autonomnih i neautonomnih SDJPR. U istom se mogu odabrati arbitrarni početni uslovi spram kojih će *pplane* po automatizmu nacrtati fazni portret. Dodatno, sa dobijenim podacima, i zavisno od verzije *pplane*, mogu se nacrtati i vremenske zavisnosti varijabli u vremenu. U disertaciji je korištena *pplane9* verzija, koju je doradio i unaprijedio korisnik „Iuri Kouznetsov” na MATLAB File Exchange internet sajtu.<sup>83</sup> Navedena verzija za *pplane9* je posjedovala kompatibilnost sa verzijom MATLAB R2017b – prema riječima njenog autora, dok je istraživanje u disertaciji rađeno na verziji MATLAB-a R2018b zbog kompatibilnosti i sa MATCONT analizom. Pomenuto je uzrokovalo nastajanje diskrepance u verzijama MATLAB-a, te samim tim i prestanka rada *pplane9* aplikacije u novijoj verziji MATLAB-a. Međutim, autor disertacije je „prolaskom” kroz cijeli kod *pplane* aplikacije, pronašao višestruke razloge za nemogućnost rada programskog *pplane9* MATLAB koda – u novijoj verziji, te iste uspješno korigovao i/ili otklonio. Na taj način predmetna verzija je radila potpuno ispravno u MATLAB-u R2018b okruženju, dok mnogim drugim MATLAB-ovim korisnicima širom svijeta nije, o čemu postoje komentari na File Exchange. Dodatno, posljednje pomenuto je i sa ciljem naučne egzaktnosti, u prezentovanju korištenih programskih alata, metoda, i samim tim dobijenih rezultata.

U principu postoje dvije srodne aplikacije pod nazivom *dfield* i *pplane*. *Dfield* i *pplane* su programi dizajnirani za analizu diferencijalnih jednačina u faznoj ravni. *Dfield* se

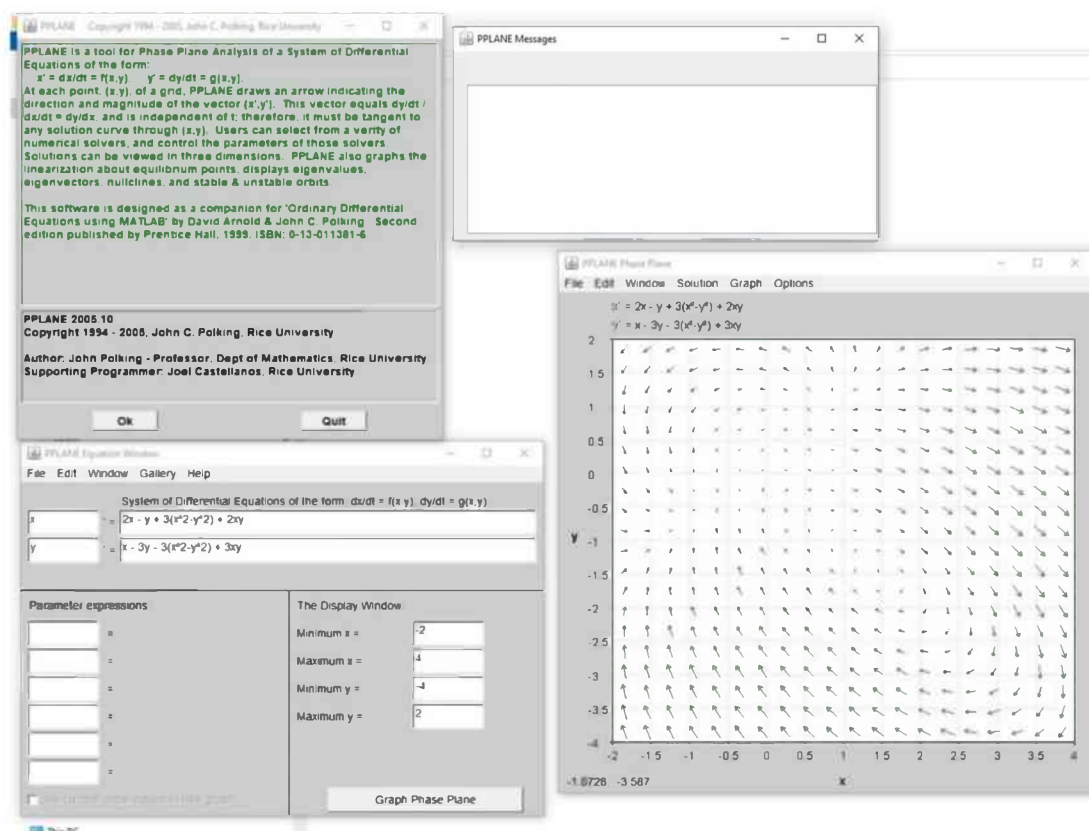
---

<sup>83</sup> Internet link, i informacije o programskoj verziji *pplane9* koja je korištena u disertaciji, su slijedeće: korisnik na MATLAB File Exchange forumu je Iouri Kouznetsov, postavljena dana (29.01.2018); dok naziv aplikacije i web adresa su: *pplane9(action,input1,input2,input3)*. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/65887-pplane9-action-input1-input2-input3>, MATLAB Central File Exchange. Retrieved October 28, 2018., pristupljeno od strane autora disertacije dana 28.10.2018. godine.

File Exchange internet sajt se nalazi na internetu, i sastavni je dio MATLAB-vog glavnog internet-portala. Iako, teme i sadržaj istog su više tipa foruma i razmjene aplikacija među korisnicima, komentarima korisnika na rad pojedinih aplikacija, kao i razmjene/dijeljenja znanja među MATLAB-ovim korisnicima.

koristi na diferencijalnim jednačinama prvog reda oblika  $x' = \dot{x} = f(t, x)$ , dok se *pplane* koristi za sisteme diferencijalnih jednačina oblika  $x' = \dot{x} = f(x, y)$  i  $y' = \dot{y} = g(x, y)$ . S obzirom da *pplane* uključuje sve funkcije dostupne u *dfield-u*, i više od toga, analiza *pplane*-a će biti dovoljna za upoznavanje i razumijevanje oba predmetna programa.<sup>84</sup>

Naime, kada se program prvi put pokrene, otvaraju se 4 programska prozora (slika 90): *Pplane Equation Window* (Prozor jednačina u ravni), *Pplane Messages* (Prozor poruka, odnosno rezultata), *Pplane Phase Plane* (Prozor grafičkog prikaza rješenja sistema u ravni), i *Pplane copyright window* (Prozor sa informacijama o autorskim pravima).<sup>85</sup>



Slika 90. Početni prozori za *pplane* aplikaciju

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>84</sup> Dio prezentovanih početnih objašnjenja je preuzet sa internet sajta:

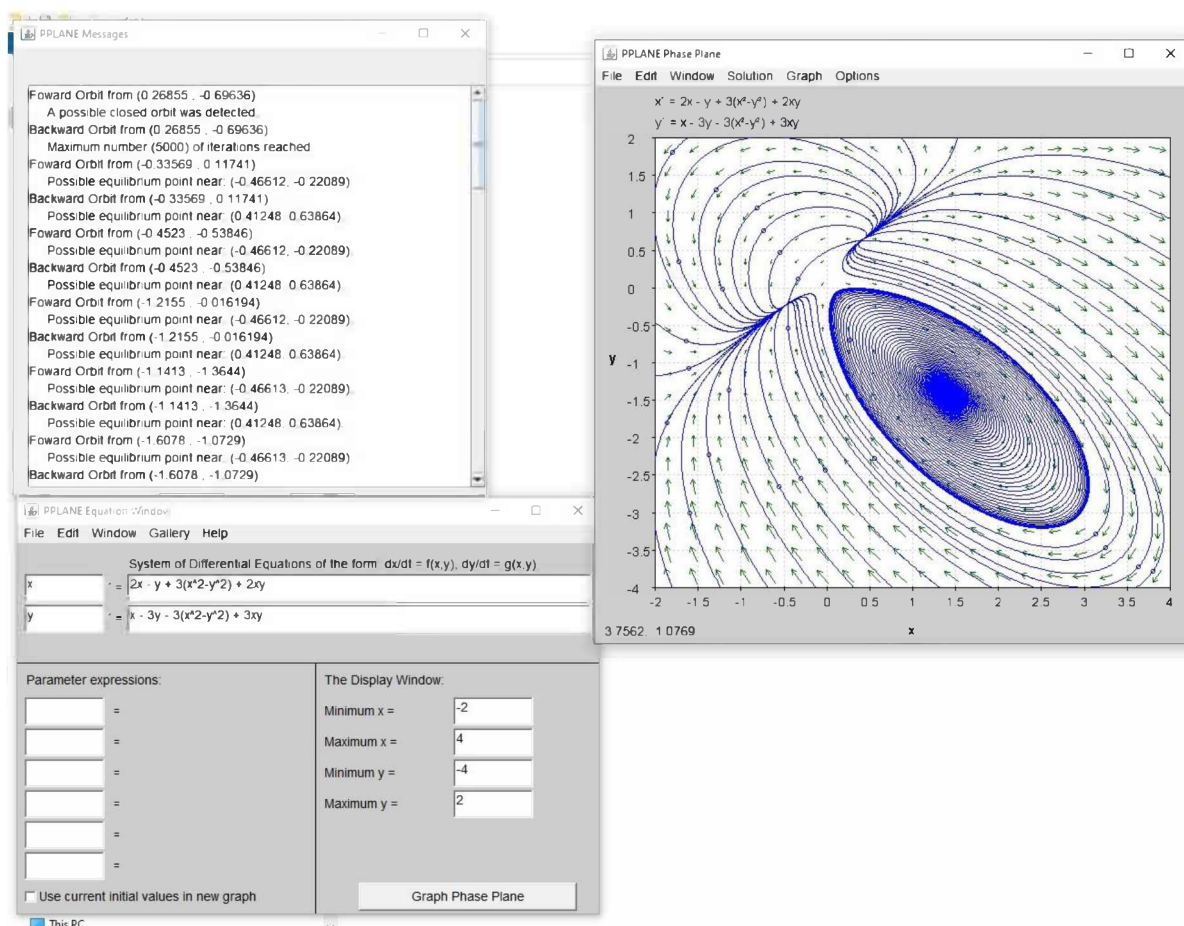
[https://www.math.lamar.edu/faculty/maesumi/Syllabi/pplane\\_handout.pdf](https://www.math.lamar.edu/faculty/maesumi/Syllabi/pplane_handout.pdf), Prof. dr Nancy Chen, profesorke matematike na Univerzitetu Harvard (SAD).

<sup>85</sup> Potrebno je saglasiti se sa informacijama i izjavom o prihvatanju autorskih prava.



Pomenuti prozori imaju sljedeća, nešto detaljnija, objašnjenja i funkcije:

- *Pplane Equation Window*: ovdje se unose izrazi za jednačine koje su sastavni dio sistema nelinearnih/linearnih DJPR, specificiraju se parametri i postavljaju veličina prozora za fazni portret;
- *Pplane Messages*: prikazuje koordinate, moguća rješenja, sopstvene vrijednosti, itd. kada izračunavamo orbite ili tačke ravnoteže (ekvilibrjume);
- *Pplane Phase Plane*: fazna ravan u kojoj se iscrtava fazni portret za konkretan/posmatrani i izučavani sistem. Prozor je interaktivan, odnosno možemo: zatražiti iscrtavanje nulklina, putanja (trajektorija), iscrtati  $x(t)$  i/ili  $y(t)$  – spram  $t$ , pronaći tačke ravnoteže, itd.

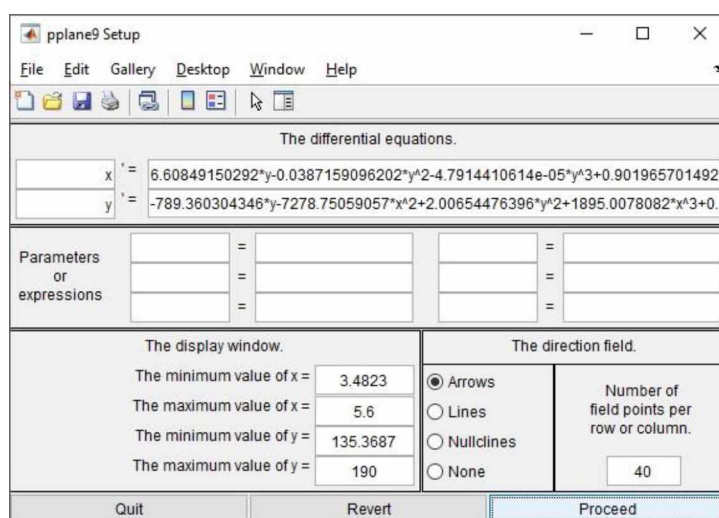


Slika 91. Radni prozori *pplane* aplikacije

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Bitno je pomenuti, da gore prezentovani prozori *pplane* aplikacije, i njihovi nazivi, prate egzaktno *pplane* aplikaciju urađenu u programskom paketu Java. Međutim, MATLAB verzija *pplane* aplikacije, koja nudi značajno više opcija i mogućnosti, ima nešto drukčije nazive pojedinih prozora u aplikaciji, kao i njihov međusobni položaj u okviru grafičkog korisničkog interfejsa (engl. Graphic User Interface – GUI). Dodatno, pomenuta MATLAB verzija ima („morfološki” gledano) istu suštinsku i matematičku funkcionalnost kao gore pobrojani aplikativni prozori.

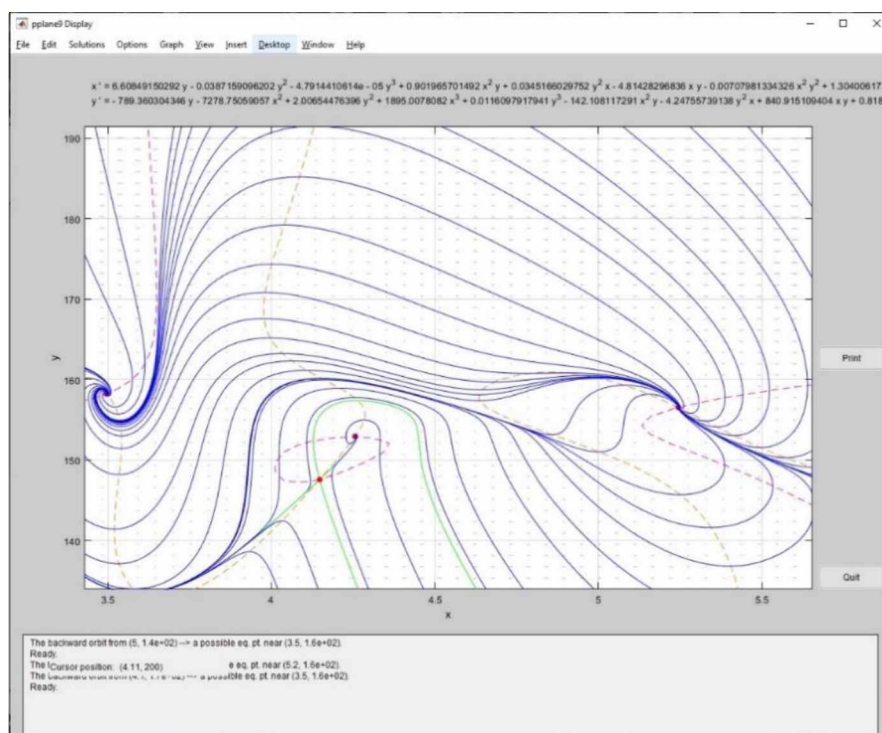
Analiza uvijek mora prvo započeti sa unosom jednačina sistema, i ukoliko postoje varijabilni parametri istih u program (Equation Window – prozor jednačina). Oznake varijabli ne moraju biti  $x$  i  $y$ , već se mogu koristiti bilo koja slova abecede. Pravila za ispisivanje jednačina prate standardni LaTeX zapis (u originalnom formatu, tj. ne prevode se u simboličke izraze). Pomenuti i nabrojani prozori u *pplane* aplikaciji, su prilično samo-eksplanatorni za poznavaoce engleskog jezika, te neće biti detaljno objašnjavani i prezentovani, izuzev prikaza istih na slikama 92–94 za MATLAB programsko okruženje, odnosno *pplane* aplikaciju. Takođe, navedeno važi i za opcije u okviru aplikacijskih prozora. Dodatno, predmetna *pplane* aplikacija ima dobar „Help”, odnosno dokumentovanu podršku pomoći za korisnike.



Slika 92. Pplane Equation Window (prozor za unošenje jednačina i parametara u ravni)

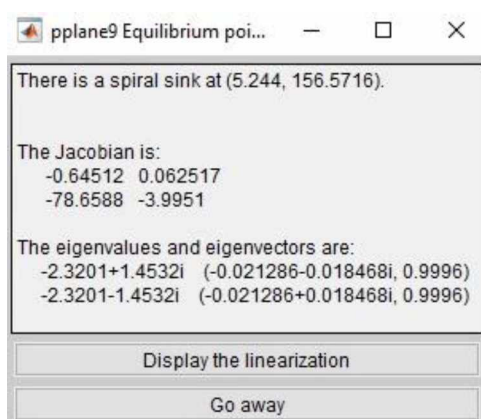
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije





Slika 93. Pplane Phase Plane (prozor grafičkog prikaza rješenja sistema u ravni)

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



Slika 94. Pplane Messages (prozor poruka, odnosno rezultata)

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Primjeri za MATLAB *pplane* aplikaciju – prikazani na slikama 92–94, se direktno referenciraju na 2D istraživanja u okviru disertacije, za  $Y_H$  i  $C_H$  endogene varijable, i biće detaljno prezentovane/analizirane u glavi 5.2.2.

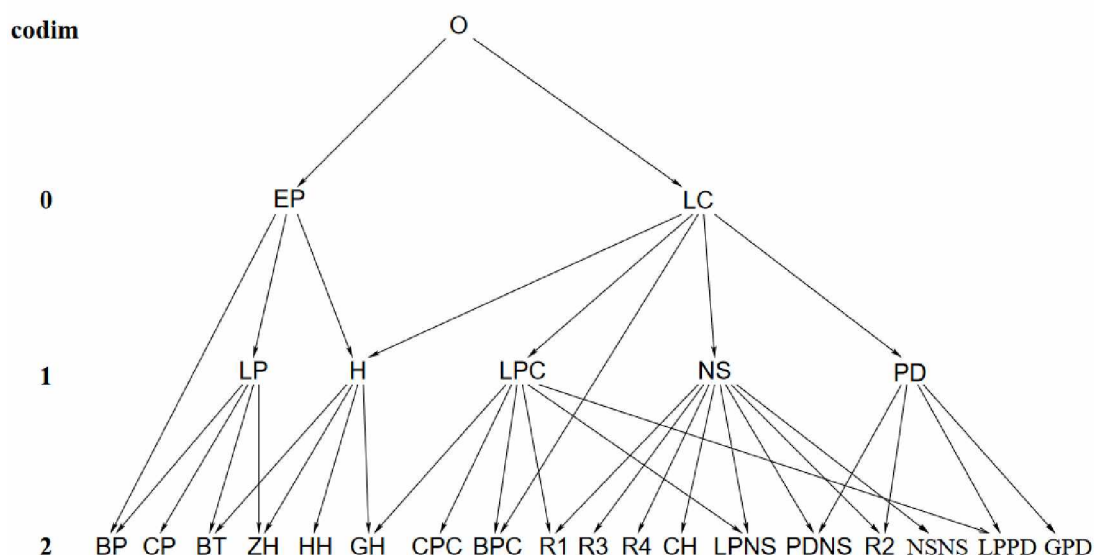
### 3.6.2 MATCONT aplikacija za MATLAB

Aplikacija za MATLAB pod nazivom MATCONT, je izuzetan program u svojoj kategoriji. Naime, MATCONT omogućava pored egzaktnog određivanja vrijednosti i vrste ekvilibrijumskih tačaka, odnosno tačaka bifurkacije, kontinuitet vrijednosti sistema za određeni početni uslov.

MATCONT je MATLAB-ov paket sa GUI koji koristi skup raznih operativnih rutina. Pomenute rutine, se mogu koristiti odvojeno od MATLAB komandne linije, dok paket koji koristi MATLAB-ovu komandnu liniju naziva se CL\_MATCONT. Primarni cilj MATCONT-a i CL\_MATCONT-a je da ponudi alatku sposobnu za izvršavanje zadataka kontinuiteta i bifurkacije diferencijalnih jednačina, a opet sve u skladu sa standardnim MATLAB interfejsom i komandama. Navedeno znači, da korisnici mogu primijeniti sopstvene modele u programu sa postojećim alatkama, bez potrebe za modifikacijom kako bi isti odgovarali nekom određenom i unaprijed definisanom programskom paketu. Programski jezik MATLAB, takođe i dodatno olakšava upotrebu aplikacije korisnicima, odnosno čini je relativno jednostavnom, jer prilagođava kutije sa alatkama potrebama istraživača. Relacije između NDA objekata kodimenzija 0, 1 i 2, a koje su izračunali MATCONT-a i CL\_MATCONT, su predstavljene na slici 95. Predmetna slika je jako bitna i ilustrativna, odnosno predstavlja suštinu NDA SNDJPR!

Slika 95 prikazuje strelicu od O do EP ili LC, što ukazuje da započinjanjem vremenske integracije iz određene tačke možemo postići stabilni ekvilibrjum ili stabilan granični ciklus. Generalno, strelica od objekta tipa A ka objektu tipa B sugerise da možemo da identifikujemo objekat tipa B tokom izračunavanja krive objekata tipa A, bilo automatskom detekcijom ili inspekcijom izlaza (engl. output-a). Na primjer, strelice od EP do H, LP i BP, impliciraju da tokom kontinuiteta ekvilibrjuma možemo otkriti H, LP i BP.

Štoviše, za svaku strelicu koja ide u suprotnom smeru, odnosno od B do A, postoji šansa da se započne izračunavanje rješenja tipa A počevši od objekta B. Na primjer, možemo započeti kontinuiranju<sup>86</sup> i doći do LP i/ili H krive iz BT tačke. Važno je napomenuti da se svaki objekat *kodim 0* (engl. *codim 0*) i *kodim 1* (engl. *codim 1*) može kontinuirati u jednom ili dva sistemska parametra, respektivno. U slučaju kontinuiranja dva sistemska parametra, imamo takozvanu *kodim 2* (engl. *codim 2*) bifurkaciju. Dok, uzročno–posljedično posmatrano, kontinuiranjem nijednog ili jednog parametra imamo *kodim 0*, odnosno *kodim 1* bifurkaciju, respektivno.



Slika 95. Relacije između NDA objekata, kodimenzija 0, 1 i 2, određenih od MATCONT-a

Izvor: Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HG, Al-Hdaibat B, De Witte V, Dhooge A, Mestrom W, Neiryneck N, Riet AM, Sautois B. MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab.[85]

<sup>86</sup> Kontinuiranost (izvorno engleska riječ, tj. tudica izvedena od engleske riječi: continuation), ili na našem jeziku nastavljanje, predstavlja proces rješavanja SNDJPR za neku novu vrijednost (promijenjenu) jednog ili dva parametra, odnosno kada bez promjene vrijednosti parametara (za druge numeričko–računske kriterijume) kontinuiramo ekvilibrijum. Jedna od glavnih karakteristika koje karakterišu kontinuiranost značajnih tačaka SNDJPR, je *korak integracije*, koji zapravo predstavlja numeričku vrijednost za koju se pomijera – u relativno pozitivnom ili negativnom smjeru, vrijednost nekog parametra ili parametara u sistemu diferencijalnih jednačina.

Grafička šema prikazana na slici 95. važi za kontinuirane *diferencijabilnih funkcija*, dok za *iterativne mape* postoji značajno drugačija i relativno jednostavnija bifurkaciona šema. Posljednje navedenu šemu nećemo ovdje prezentovati, jer pomenuta metodologija nije korištena u disertaciji. Međutim, ista se može pronaći među relativno raznovrsnom MATCONT–relevantnom literaturom na internetu.<sup>87</sup>

Bitno je pomenuti da, CL\_MATCONT ima veliki broj testnih funkcija koje se nalaze u direktorijumu *Testruns*. Jedan od razloga za postojanje navedenih funkcija je taj da se provjeri da li računske rutine dobro funkcionišu u određenom računarsko–konfiguracionom<sup>88</sup> okruženju. Međutim, za navedeno postoji i drugi, pretežno pedagoški razlog. Naime, najlakši način da se započne sa korištenjem MATCONT-a jeste njegova pripadajuća GUI verzija i pripadajuća joj uputstva. Međutim, verzija komandne linije CL\_MATCONT ima više funkcionalnosti i fleksibilnija je za naprednu upotrebu kod korisnika. Na slici 96. možemo vidjeti nazive karakterističnih i značajnih tačaka, odnosno bifurkacija koje MATCONT izračunava, prepoznaje i prikazuje u svom programskom okruženju.

---

<sup>87</sup> Internet link za obimniju MATCONT literaturu i programska uputstva, se nalazi na:

<https://sourceforge.net/projects/MatCont/files/Documentation/MatContODE/>

<sup>88</sup> U namjeri da korisnik MATCONT-a uvijek dobije tačne i konzistentne rezultate iz programa, nezavisno od softverske (npr. operativni sistem na računaru, i sl.) i hardverske (npr. Intel ili AMD CPU i/ili GPU, odnosno postojećeg i pratećeg interpretersko–komandnog seta instrukcija) konfiguracije – na kojoj se isti koristi, startuju se testne funkcije, i upoređuju se dobijeni rezultati sa provjerenim i defaultnim rezultatima na ranije–provjerenoj i uslovno rečeno nominalnoj (default–noj konfiguraciji) računarskoj konfiguraciji kreatora MATCONT-a.

Type of object	Label
Point	P
Orbit	O
Equilibrium	EP
Limit cycle	LC
Limit Point (fold) bifurcation	LP
Hopf bifurcation	H
Limit Point bifurcation of cycles	LPC
Neimark-Sacker (torus) bifurcation	NS
Period Doubling (flip) bifurcation	PD
Branch Point	BP
Cusp bifurcation	CP
Bogdanov-Takens bifurcation	BT
Zero-Hopf bifurcation	ZH
Double Hopf bifurcation	HH
Generalized Hopf (Bautin) bifurcation	GH
Branch Point of Cycles	BPC
Cusp bifurcation of Cycles	CPC
1:1 Resonance	R1
1:2 Resonance	R2
1:3 Resonance	R3
1:4 Resonance	R4
Chenciner (generalized Neimark-Sacker) bifurcation	CH
Fold-Neimark-Sacker bifurcation	LPNS
Flip-Neimark-Sacker bifurcation	PDNS
Fold-flip	LPPD
Double Neimark-Sacker	NSNS
Generalized Period Doubling	GPD

Slika 96. Nazivi karakterističnih i značajnih tačaka NDA objekata (singulariteta) u MATCONT<sup>89</sup>

Izvor: Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HG, Al-Hdaibat B, De Witte V, Dhooge A, Mestrom W, Neiryneck N, Riet AM, Sautois B. MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab.[85]

<sup>89</sup> Postoji i slična nomenklatura za iterativne mape, ali je nećemo dalje navoditi i elaborirati iz istih razloga koji su ranije pomenuti. Dodatno, nazivi karakterističnih i značajnih tačaka NDA objekata (singulariteta) u MATCONT-u su ostavljeni namjerno na Slici 96. na engleskom jeziku, jer njihov akronim na istom prati oznake u programu. Prevodom na naš jezik bi se izgubila logička nit povezanosti prevedenih naziva, i onoga što program (MATCONT) prikazuje u rezultatima.

MATCONT je organizovan oko kontinuiranja krivih (12 različitih tipova), i one su: granični ciklusi, granične tačke (sjedlo), Hopf, granična tačka ciklusa (sjedlo–ciklus), udvostručenje perioda ciklusa, Neimark–Sacker bifurkacija ciklusa, tačka grananja, tačka grananja ciklusa, sjedlaste homokliničke orbite, sjedlo–čvor homokliničke orbite i heterokliničke orbite. Svaka od ovih krivih ima svoj namjenski direktorijum u MATCONT-u. Dodatno, svaki tip krive je povezan sa parametrizovanim dinamičkim sistemom i vremenska integracija (simulacija) tog sistema je često poželjna zbog potvrde dobijenih rezultata kontinuiranja ili se koristi za potrebne inicijalizacije kontinuiranih krivih. MATCONT omogućava pristup standardnim MATLAB integratorima, kao i dvjema integratorima višeg reda, pod nazivom *ode78.m* i *ode87.m*. Detalji o MATCONT inicijatorima<sup>90</sup> se mogu pronaći na prezentovanom internet linku MATCONT literature. Takođe, MATCONT vrši i izračunavanje tzv. *koeficijenata normalne forme* koji se direktno baziraju na NDA postulatima za pojedine tačke i cikluse.

Prezentovaćemo u nastavku određene matematičke aspekte numeričke kontinuiranja i analize singulariteta<sup>91</sup>. Posmatrajmo glatku funkciju  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nadalje, želimo da odredimo krivu rješenja jednačine  $F(x) = 0$ . Numerička kontinuiranja je tehnika izračunavanja niza uzastopnih tačaka koje aproksimiraju željenu granu. Većina algoritama za kontinuiranje primjenjuje tzv. *prediktivno-korektivni* metod. Ideja koja stoji iza pomenute metode je da generiše niz tačaka  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  uzduž predmetne krive, tako da su zadovoljeni uslovi: 1) *tolerancije*  $\|F(x_i)\| \leq \varepsilon$ , za neko  $\varepsilon > 0$ , i 2) *uslov preciznosti*  $\|\delta x_i\| \leq \varepsilon'$ , gdje je  $\varepsilon' > 0$  i  $\delta x_i$  je posljednja Njutnova<sup>92</sup> korekcija. Da bismo pokazali kako se generišu tačke,

---

<sup>90</sup> Ukratko rečeno, inicijatori su MATCONT-ove rutine pisane u MATLAB-u koje prate numeričko-matematičku strukturu ispitivanja puta prikazanog na slici 95., i na osnovu dobijenih rezultata dalje korisniku prezentuju zaključke o vrsti, broju, i tipu dobijenih NDA objekata.

<sup>91</sup> Karakteristične i značajne tačke SNDJPR, koje su ujedno i nule trenutno–posmatranog sistema. Singulariteti zavise od vrijednosti parametara (koji se po prirodi procesa mijenjaju) prilikom bifurkacione analize, odnosno rješenja SNDJPR za upravo konkretne i trenutne vrijednosti nekog parametra početnog sistema, u nekom novom parametarski-drukčijem sistemu. Simbolički izrazi članova vezanih za varijable, kao i sami eksponenti varijabli ostaju nepromijenjeni.

<sup>92</sup> (Ser) Isak Njtn (engl. Sir Isaac Newton PRS – president of the Royal Society), 25. decembra 1642. – 20. mart 1727. je bio engleski matematičar, fizičar, astronom, alhemičar, teolog i pisac, koji je u svoje vrijeme opisan kao „prirodnjak”. Bio je ključna figura u filozofskoj revoluciji poznatoj kao *prosvetiteljstvo*. Njegova knjiga *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematički principi prirodne filozofije), prvi put objavljena 1687, uspostavila je klasičnu mehaniku. Njtn je takođe dao značajan doprinos (i) u optici, tj. dijeli

pretpostavimo da smo pronašli tačku  $x_i$  na krivoj. Takođe, pretpostavimo da imamo normalizovani tangentni vektor  $v_i$  u tački  $x_i$ , npr.  $F(x_i)v_i = 0$ ,  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ . Proračun sljedeće tačke  $x_{i+1}$  sastoji se od 2 koraka: a) predviđanje nove tačke; b) korekcija predviđene tačke.

Kod *prediktivne metode*, pretpostavimo da je  $h > 0$ , i da istovremeno predstavlja veličinu koraka (predikcije). Često korišteni prediktor je tzv. *tangentni prediktor*:  $X^0 = x_i + hv_i$ .

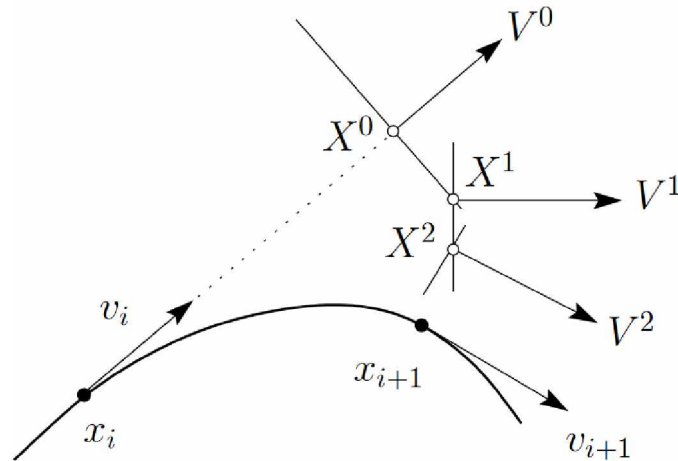
Dok kod *korektivne metode* pretpostavljamo da je  $X^0$  blizu krive. Da bismo pronašli tačku  $x_{i+1}$  na krivoj, koristimo postupak sličan Njutnovom. Pošto se standardne Njutnove iteracije mogu primijeniti samo na sisteme sa istim brojem jednačina i nepoznatih, moramo dodati skalarni uslov:  $\begin{cases} F(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$  Problem se zapravo svodi na određivanje  $g(x)$ , odnosno *kako da odaberemo  $g(x)$* ? Jedna od opcija za određivanje  $g(x)$  jeste kontinuirana pseudo-luka. Naime, odaberimo hiper-ravan koja prolazi kroz  $X^0$ , i koja je ortogonalna na vektor  $v_i$ :  $g(x) = \langle x - X^0, v_i \rangle$ . Tada, predmetna Njutnova iteracija postaje  $X^{k+1} = X^k - H_x^{-1}(X^k) H(X^k)$ , gdje je  $H(X) = \begin{pmatrix} F(X) \\ 0 \end{pmatrix}$ , a  $H_x(X) = \begin{pmatrix} F_x(X) \\ v_i^T \end{pmatrix}$ . Tada se može dokazati da će Njutnova iteracija za  $\begin{cases} F(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$  konvergirati ka tački  $x_{i+1}$  na krivoj od  $X^0$ , pod uslovom da je veličina koraka  $h$  dovoljno mala i da je kriva pravilna ( $\text{rang } F_x(x) = n$ ). Nakon što smo pronašli novu tačku  $x_{i+1}$  na krivoj, treba još da izračunamo tangentni vektor u toj tački iznosi  $F_x(x_{i+1})v_{i+1} = 0$ . Nadalje, pravac duž krive mora biti sačuvan:  $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = 1$ , tako da dobijamo  $(n + 1)$ -dimenzioni dodatni sistem  $\begin{pmatrix} F_x(x_{i+1}) \\ v_i^T \end{pmatrix} v_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Nakon rješavanja navedenog sistema, potrebno je normalizovati  $v_{i+1}$ . Sve gore navedeno se odnosi na određivanje karakterističnih i značajnih tačaka NDA objekata (singulariteta) u MATCONT.

---

zasluge sa njemačkim matematičarem Gotfridom Vilhelmom Lajbnicom (njem. Gottfried Wilhelm (von) Leibniz, 1. jul 1646 – 14. novembar 1716.) za razvoj infinitezimalnog računa.



Dok, kod CL\_MATCONT-a se koristi tzv. Mur–Penrouzova kontinuiranost (Moore–Penrose continuation), prikazana na slici 97, i nešto se malo razlikuje od ranije prezentovane Njutnove kontinuiranosti. Detalji se mogu naći u zvaničnim MATCONT uputstvima.



Slika 97. Konceptualni prikaz Mur–Penrouzove kontinuiranosti u MATCONT-u<sup>93</sup>

Izvor: Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HG, Al-Hdaibat B, De Witte V, Dhooge A, Mestrom W, Neiryneck N, Riet AM, Sautois B. MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab.[85]

Bitno je napomenuti da se može dokazati, pod istim uslovima kao i za kontinuiranje pseudo-luka Njutnove iteracije, da konvergiraju ka tački na krivoj  $x_{i+1}$ , kao i njen odgovarajući tangentni vektor  $v_{i+1}$ . Dodatno kod Njutnove metode kontinuiranosti, morali bismo da izračunamo tangentni vektor kada god je pronađena nova tačka. Navedeno, nije slučaj kod Mur–Penrouzove kontinuiranosti, jer smo već izračunali tangentne vektore  $V^k$  pri svakoj iteraciji, tako da nam preostaje da *normalizujemo* izračunate tangentne vektore.

Odabir veličine koraka je važno pitanje u algoritmima za rješavanje SNDJPR, odnosno u MATCONT aplikaciji. Suviše mali koraci dovode do neracionalnog povećanja

<sup>93</sup> Vrlo slična je i Njutnova kontinuiranost, štoviše oznake tačaka, tangentnih vektora i iterativno određenih novih tačaka na krivoj su u potpunosti iste.



volumena kompjutacija, dok preveliki koraci mogu dovesti do gubitka detalja na krivoj koja predstavlja rješenje. Pouzdan i primjenjiv način za određivanje koraka integracije jeste metod zavisne–konvergencyone kontrole. Pomenuti metod predstavljamo sa izračunavanjem sljedeće tačke koristeći veličinu koraka  $h_i$ . Ako proračun konvergira, i neka  $n$  označava broj potrebnih Njutnovih iteracija. Tada će veličina novog koraka  $h_{i+1}$  biti izabrana na sljedeći

$$\text{način: } h_{i+1} = \begin{cases} h_i h_{dec}, & \text{ako nema konvergencije} \\ h_i h_{inc}, & \text{ako konvergira i } n < n_{thr}, \text{ gdje je } h_{dec} < 1, h_{inc} > 1, \text{ i } n_{thr} \text{ su} \\ h_i, & \text{u svim ostalim slučajevima} \end{cases}$$

eksperimentalno određene konstante. Kako bi bili u prilici detektovati (pronaći) i analizirati singularitetne tačke potrebno je da uvedemo pojam testnih funkcija, i način na koji ih koristimo za ostvarivanje navedenog cilja. Naime, ideja određivanja singulariteta je direktno povezana sa određivanjem glatke skalarne funkcije, koja regularno (po svojoj prirodi) ima nule funkcije u blizini singularitetnih tačaka. Pomenute funkcije nazivamo *testne funkcije*.

Pretpostavimo, da imamo singularnu tačku  $S$  određenu/pronađenu pomoću testne funkcije  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Takođe pretpostavimo, da smo pronašli uzastopne tačke na krivoj  $x_i$  i  $x_{i+1}$ , kao i da važi  $F(x) = 0$ ,  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tada će tačka singulariteta  $S$  biti detektovana ako je  $\phi(x_i)\phi(x_{i+1}) < 0$ . Pošto smo pronašli tačke  $x_i$  i  $x_{i+1}$  želimo pronaći tačku  $x^*$  gdje  $\phi(x)$  ne egzistira (tj. „nestaje”, engl. *vanish*). Logičan put za ostvarivanje posljednje navedenog jeste da riješimo sistem  $\begin{cases} F(x) = 0 \\ \phi(x) = 0 \end{cases}$  pomoću metode Njutnovog iterativnog postupka u tački  $x_i$ . Međutim, da bi koristili ovaj metod, trebalo bi da postoji/e izvod/i  $\phi(x)$  u odnosu na  $x$ , što nije uvijek slučaj. Da bi se izbjegle poteškoće pomenutog tipa, implementirali smo kao podrazumijevanu (engl. default) jedno–dimenzionu *secant*<sup>94</sup> metodu za lociranje gdje je  $\phi(x) = 0$  duž krive. Bitno je napomenuti, da prezentovani metod uključuje *Njutnove korekcije*<sup>95</sup> u svakoj međutački.

<sup>94</sup> *Secant* metod je procedura pronalaženja korjena u numeričkoj analizi koja koristi seriju određenih korjena sekantnih linija da bi se bolje aproksimirao korjen funkcije. Bitno je napomenuti, da se prezentovano ni u kom slučaju ne smije pomiješati sa *sekans* trigonometrijskom funkcijom!

<sup>95</sup> Njutn je pomenuti metod primijenio samo na polinome, počevši od početne procjene korjena i izdvajajući niz ispravki grešaka. Koristio je svaku ispravku da ponovo napiše izraz za polinom u funkciji preostale greške, a zatim bi riješio izraz i pronašao novu korekciju, zanemarišći članove višeg stepena/reda.

Prethodno prezentovana metoda ima opšti karakter i za cilj otkrivanje odnosno lociranje *singulariteta*<sup>96</sup> uz pomoć jedne *test funkcije*. Međutim, može se desiti da nije moguće otkriti odnosno locirati singularitet samo sa jednom testnom funkcijom.

Pretpostavimo da imamo singularitet  $S$  koji zavisi od  $n_t$  testnih funkcija. Takođe pretpostavimo, da smo pronašli dvije uzastopne tačke  $x_i$  i  $x_{i+1}$  i sve  $n_t$  testne funkcije koje mijenjaju predznak:  $\forall j \in [1, n_t] : \phi_j(x_i)\phi_j(x_{i+1}) < 0$ . Takođe pretpostavimo, da smo koristeći metod jednodimenzionalnog sekant-a, pronašli sve nule  $x_j^*$  testnih funkcija. U idealno-tačnom slučaju sve navedene nule će se poklopiti sa sljedećim:  $\forall j \in [1, n_t] : x^* = x_j^*$ , i  $\phi_j(x_j^*) = 0$ . Pošto kontinuacije nisu tačan/egzaktan već numerički postupak, prethodno pomenuto ne možemo pretpostaviti. Međutim, lokacije  $x_j^*$  će vjerovatno biti grupisane oko neke centralne tačke  $x^c$ . U ovom slučaju ćemo *dodijeliti* tačke  $x_j^*$  kao  $x^* = x^c$ . Klaster, ili grupisanje pomenutih tačaka, će postojati ukoliko važi  $\forall i, j \in [1, n_t] : ||x_i^* - x_j^*|| \leq \varepsilon$ , za neku malu vrijednost  $\varepsilon$ . U predmetnom slučaju  $x^*$  definišemo kao srednju vrijednost svih lociranih nula:  $x^* = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} x_j^*$ .

Prethodno prezentovano uzima u obzir singularitete koji zavise samo od testnih funkcija i posljedično nestaju u za određene vrijednosti istih. Međutim, pretpostavimo da imamo dva singulariteta  $S_1$  i  $S_2$ , koji zavise od testnih funkcija  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Naime, pretpostavimo da  $\phi_1$  nestaje u  $S_1$  i  $S_2$ , dok  $\phi_2$  nestaje samo u  $S_2$ . Iz pomenutog razloga nam je potrebna mogućnost da predstavimo singularitete koristeći testne funkcije koje ne nestaju u predmetnim tačkama! Da bismo predstavili sve singularitete, uvešćemo *matricu singulariteta* (kao u  $\phi(x) = 0$ ). Ova matrica je kompaktan način da se opiše odnos između singulariteta i svih testnih funkcija. Pretpostavimo da nas zanimaju  $n_s$  singulariteta i  $n_t$  testnih funkcija koje su potrebne za otkriti i locirati singularitete. Neka je onda  $S$  matrica, sa

---

<sup>96</sup> Uбудuće ćemo singularitetne tačke skraćeno nazivati *singulariteti*.

dimenzijama  $n_s \times n_t$ , i takva da je:  $S_{i,j} =$

$$\begin{cases} 0, \text{singularitet } i: \text{testna funkcija } j \text{ mora nestati} \\ 1, \text{singularitet } i: \text{testna funkcija } j \text{ ne smije nestati} \\ \text{ostali slučajevi, singularitet } i: \text{ignorišimo testnu funkciju } j \end{cases}.$$

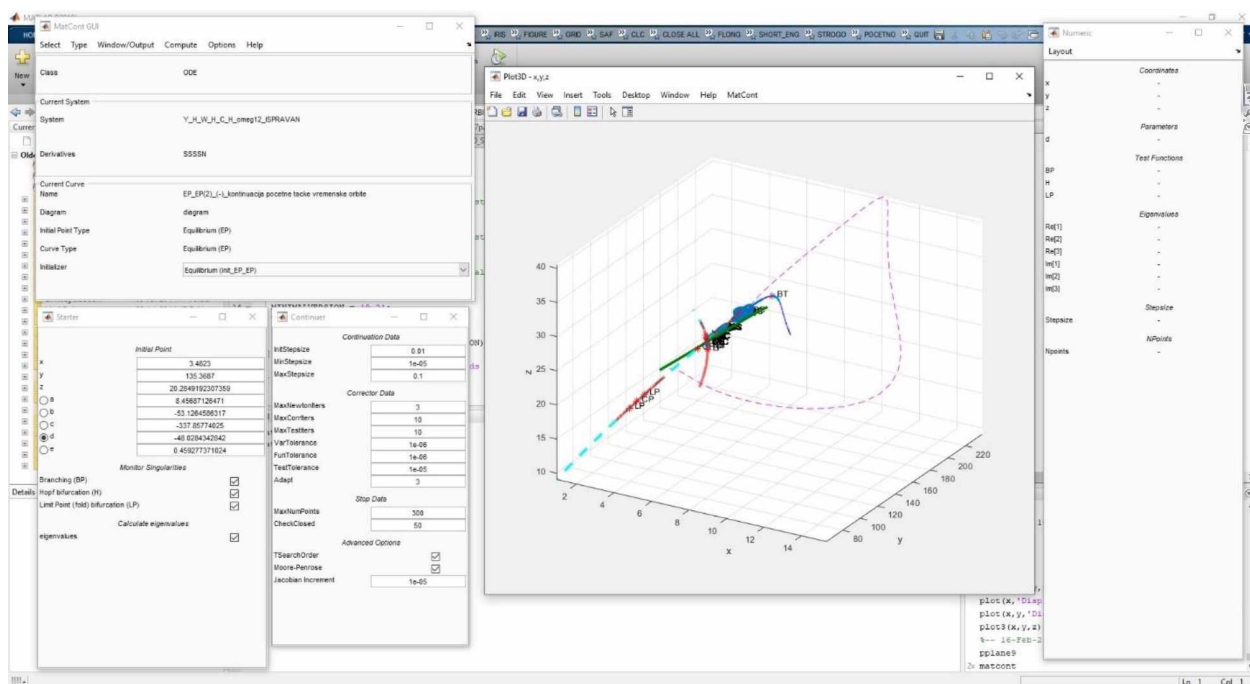
Kao dodatna, i jako bitna i korisna funkcionalnost MATCONT-a, jeste da u nekim slučajevima podrazumijevani (defaultni) algoritam za pronalaženje i određivanje lokacije singulariteta može imati problema da locira i odredi neku tačku bifurkacije. Zbog toga je pružena mogućnost korisniku definisanja specifičnog algoritma za neku lokaciju određenih vrsta bifurkacija. Zapravo, pomenuto se koristi kod određivanja i definisanja singularitetnih karakterističnih NDA objekata, odnosno za lociranje tačaka grananja ravnotežnih (ekvilibrirajumskih) krivih, kao i krivih koje definišu granične cikluse.

Primjena navedenih postulata je objašnjena u MATCONT uputstvu koje smo ranije naveli, a koje detaljno predstavlja korištene numeričke mehanizme MATCONT-a, vrste i oznake dobijenih rezultata i podataka, koje se nalaze nakon izračunavanja u radnom prostoru (*Work Space*) MATLAB programskog paketa.<sup>97</sup>

Izgled MATCONT 7p1 aplikacije za programski paket MATLAB R2018b, u Windows 10 64-bitnom operativnom sistemu je prikazan na slici 98.

---

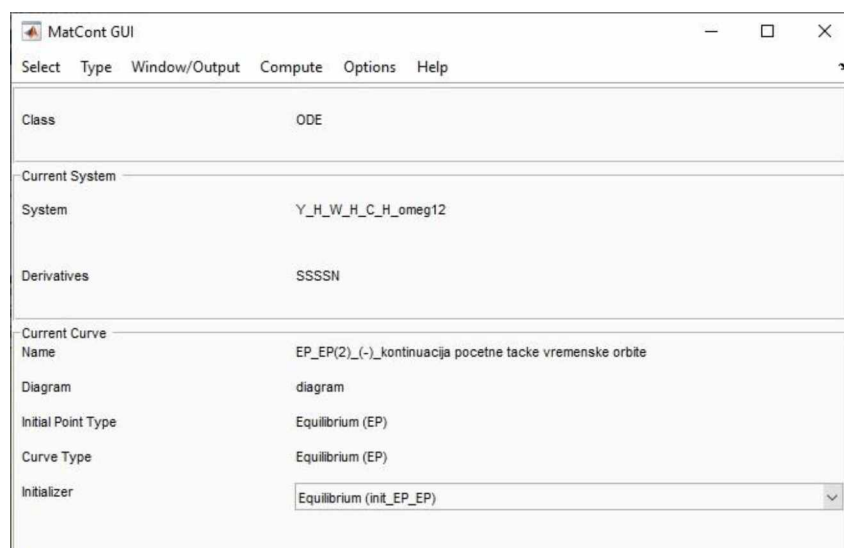
<sup>97</sup> Direktni internet link za pomenuto MATCONT uputstvo se nalazi na:  
<https://master.dl.sourceforge.net/project/MatCont/Documentation/MatContODE/ManualAug2019%20.pdf?vi=1>



Slika 98. Izgled početnih ekrana MATCONT 7p1 aplikacije u MATLAB R2018b okruženju

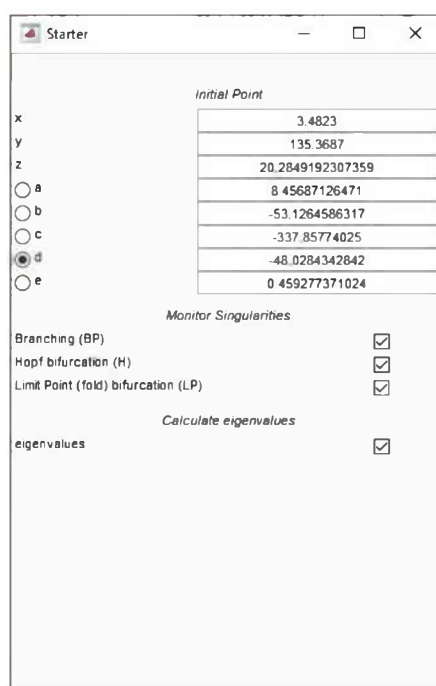
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Dodatno, prikazaćemo pojedinačno svaki od MATCONT prozora, tj. njegovog GUI okruženja na slikama od 99 do 103.



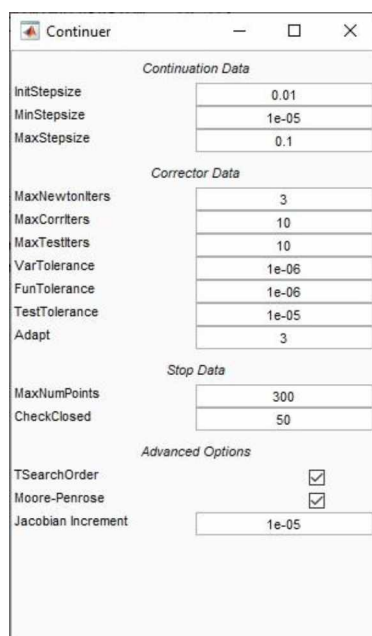
Slika 99. Glavni MATCONT GUI prozor

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



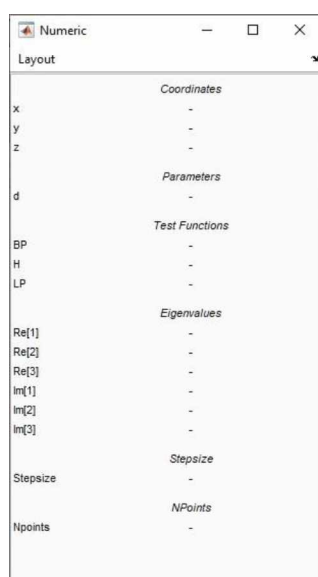
Slika 100. Izgled Starter MATCONT GUI prozora

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



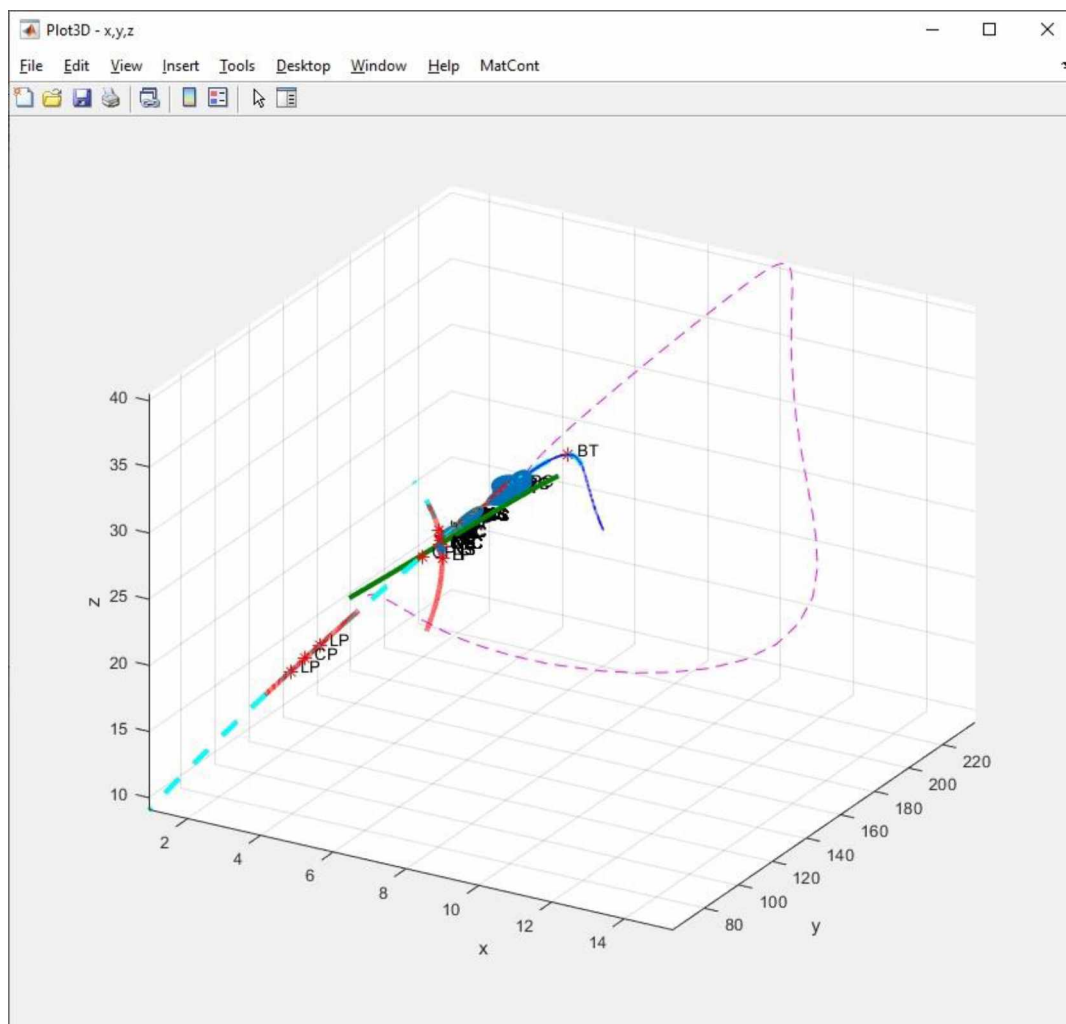
Slika 101. Prozor za podešavanje početnih parametara kontinuirane MATCONT GUI

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



Slika 102. Prozor sa numeričkim rezultatima i parametrima kontinuirane MATCONT GUI

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



Slika 103. Prozora za prikazivanje grafika u MATCONT GUI

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Prezentovani prozori su prilično samo–opisni spram okvirnih funkcija koje prikazuju, dok se značajno detaljnija pripadajuća objašnjenja mogu pronaći u MATCONT korisničkom upustvu.

#### 4. Teorija disekvilibrijuma i kreiranje makroekonomskog modela

Teorija ekonomske neravnoteže (disekvilibrijuma – TD) značajno realnije predstavlja savremene makroekonomske sisteme nego opšta teorija ravnoteže (OTR). TD nelinearna dinamička analiza bavi se višedimenzionalnim faznim prostorima. Međuzavisnosti endogenih varijabli u prostoru stanja stvaraju tok različitih i „paralelnih ekonomskih realnosti” koje zavise od početnih uslova. Modelovanjem promjena promjenljivih primjenom metode nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) definišemo sistem nelinearnih običnih diferencijalnih jednačina (NODE) prvog reda. NODE sistem je nemoguće analitički riješiti. Numeričko rješenje i vizuelizacija zahtijevaju softverski paket MATLAB, u kombinaciji sa njegovim specijalizovanim aplikacijama pplane (dvodimenzionalni (2D)) i MATCONT (trodimenzionalni (3D)). Analizom evolucije *operatora toka*, možemo predvidjeti buduće kvalitativno ponašanje cijelog sistema, odrediti optimalne vrijednosti za model i izvršiti inverzno modeliranje promenljivih. Dobijeni podaci mogu sugerisati bolje i stabilnije makroekonomske puteve koje kreatori ekonomskih politika mogu pratiti. Granice predložene metodologije imaju jake veze sa teorijom haosa. Haotično ponašanje može nastati nakon određenog broja perioda. Pronašli smo da veoma visoka tačnost proračuna, transformacija diskretnih promenljivih u kontinualne funkcije i prilagođavanje (fitovanje) podataka polinomima višeg reda, djelimično i do razumne mjere, smanjuje efekte haosa na sistem. Metodologija korištena u ovom poglavlju disertacije, i uopšte kod analize svih 2D, 3D, 4D i 7D sistema, zasnovana je na radu Sindik DV, Kaščelan V, Kaščelan L. (2023).<sup>98</sup>[178]

Pored epistemološkog pristupa prisutnog u filozofiji ekonomije, koji se nalazi i u radovima ključnih autora poput Lucasa, Barroa, Blancharda, itd., interesantan aspekt je istraživanje profesora Hoovera i saradnika sa Duke sveučilišta (između ostalih), posebno rad pod nazivom „Does Macroeconomics Need Microfoundations?” (*The Philosophy of Economics: An Anthology*. Cambridge University Press; 2007:315-333.). Pomenuto

---

<sup>98</sup> Sindik, D.V., Kaščelan, V. and Kaščelan, L., 2023. Simulation of disequilibrium and chaos in aggregates of disposable income, wealth, and consumption in EU macroeconomics using nonlinear dynamic analysis. SAGE journals: Simulation, 99(2), pp.137-167.



istraživanje postavlja pitanje o potrebi traženja mikroekonomskih osnova u makroekonomiji, koristeći argumente koji uspoređuju ekonomiju i preferencije pojedinaca/porodica sa ekonomijom cjelokupne države/entiteta. Sa druge strane, Chiarella i saradnici, u svojoj knjizi, navode da se njihov model oslanja na pretpostavkama mikroekonomske prirode, integrišući ih u svoj rad. Njihove mikroekonomske osnove, navedene su na stranicama 1. i 2., te dalje su razmatrane u trećem poglavlju knjige, stranica 61., gdje su iste korištene i inkorporirane u modele i jednačine prikazane nadalje u knjizi.

U konkretnom istraživanju sprovedenom u ovom radu, radi konkretnosti istraživanja i primenljivosti jednačina, početni sistemi sa preko stotinu jednačina su redukovani na otprilike 20 jednačina (1–10 i 11–13). Navedene jednačine su dodatno modifikovane i proširene kako bi se dobile jednačine 14–16. Ključna kritika Chiarella et al. knjige je da su koristili parametrizovane vrijednosti i „izabrane” vrijednosti u odnosu na stvarne opsege kretanja varijabli, ne uzimajući u obzir stvarne vrijednosti. Ovaj rad nastoji suptilno dopuniti ovu kritiku, testirajući i provjeravajući relevantnost jednačina i dobijenih rezultata nad stvarnim odnosno potpuno realnim podacima.

Poslijedično, sa početnom pretpostavkom da je EU otvorena ekonomija, svi podaci koji se nalaze u Eurostat i ECB(SDW) odražavaju i prikazuju egzistenciju jedne otvorene ekonomije. Makroekonomske varijable koje se prate u ovim bazama podataka dodatno sagledano odražavaju stvarno stanje i uzročno–poslijedičnu povezanost svih ekonomskih parametara, biheviorističke obrasce stanovništva EU, kulturološke i tradicijske preferencije. Predmetna studija u disertaciji pretpostavlja da su svi podaci faktički dio slike otvorene EU ekonomije, te da vremenske serije odražavaju kauzalnost cijele EU faktički otvorene ekonomije. Dodatno, 23 egzogene varijable korištene u jednačinama su „izvučene” (uzete) iz tog skupa EU podataka, čime se vjeruje da uistinu vjerno prikazuju makroekonomiju EU kao otvorenu ekonomiju.

Razumljivo je da, prema svim ekonomskim i makroekonomskim postulatima, pristup u disertaciji deluje kao izučavanje zatvorene ekonomije, jer skup jednačina nije proširen funkcijama izvoza, uvoza, tržišta novca, deviznog tržišta, itd.[41] Međutim, važno je

napomenuti da naš pristup posmatra ograničen broj varijabli u skladu sa vrstom sistema (2D i 3D) i ciljevima istraživanja.

Naime svaka varijabla, odnosno vremenska serija koju analiziramo predstavlja stvaran podatak o ponašanju sveukupne EU makroekonomije kao otvorene ekonomije. Sve te varijable, kao empirijski stvarni podaci, sadrže uzroke i posljedice koje su definisale njihove vrijednosti unutar otvorene ekonomije. Ukrštanjem pomenutih realnih podataka, odnosno vremenskih serija – posebice 23. empirijske vremenske serije sa desecima podataka za egzogene varijable, uistinu dobijamo analizu otvorene ekonomije.

Iako ne koristimo neke od standardnih varijabli koje se često pojavljuju u modelima otvorene ekonomije, kao što je to slučaj kod npr. Novo-Kejnzijanskih DSGE modela sa 18 jednačina ili Smets and Wouters model (npr. SW03, ili SW05, itd.), ovdje ideja i motivacija rada je da direktno i empirijski istražimo otvorenu ekonomiju. Prisustvo pomenutih (nedostajućih) standardnih varijabli nije eksplicitno u jednačinama 1–10, 11–13 i 14–16, ali su inherentne karakteristike otvorene ekonomije implicitno prisutne u empirijskim podacima koje analiziramo. Ova karakteristika predstavlja srž rada, kako kroz uključivanje u formule i jednačine, tako i kroz direktno određivanje i izvođenje sistemskih dinamičkih jednačina.

## 4.1 Teorija disekvilibrirajuma (TD) i opšte makroekonomske postavke KMG modela

Nelinearna dinamička analiza (NDA) je uglavnom prisutna u prirodnim naukama. NDA proučava kako pojedini djelovi utiču na cio sistem, npr. lokalni laminatni i/ili turbulentni tokovi u dinamici fluida. Brojne aplikacije i primjeri su prisutni u elektronici, dinamici fluida, termodinamici, hemiji, biologiji, fizici, kao i mnogim drugim srodnim naučnim oblastima.[10]

Kao što je već ranije pomenuto, moguće primjene NDA u društvenim naukama definitivno postoje. Makroekonomija je primjer jedne od oblasti društvenih nauka za prethodno navedeno. Uticaj najmanjeg gradivnog elementa makroekonomskog sistema (ljudi), mnoge se interakcije kauzalno dešavaju u sveukupnoj ekonomiji nekog društva. Naime, makroekonomija proučava agregatne efekte ogromnog broja takvih interakcija. Slično, interakcije singularnih atoma i/ili molekula imaju uticaj na ukupan tok rijeke. Pronalaženje tih međusobnih veza i njihovo objašnjenje u potpunosti – u oba slučaja, u današnjoj nauci je i dalje nemoguće, odnosno predstavlja nešto nepoznato ljudskom rodu. Međutim, veći klasteri, ili grupe osnovnih komponenti sistema, mogu da ostvare značajan odnosno dovoljan uticaj da se agregatno ponašanje sistema u cjelini promijeni. Upravo priroda, magnituda i targetirani uticaj pomenutih grupa na makroekonomiju su u centru ovog istraživanja!

Agregati ukupnog raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje su osnovni stubovi svake ekonomije. Makroekonomija nadalje odražava njihovu međuzavisnost putem isprepletenih socio–ekonomskih parametara, kao što su referentne kamatne stope, poreske stope, cijena i količina proizvedenih dobara/usluga, ponuda i potražnja – privrede i stanovništva, itd. Osnovna ljudska potreba je posjedovanje sredstava za potrošnju. Određeni prihod, mora da prati potrošnju. Pošto cijene i ljudske potrebe variraju u vremenu, neke proizvode i usluge neka osoba možda neće biti u mogućnosti da posjeduje i/ili sebi priušti, a sve je opet u skladu sa prihodima. Ako neka osoba ne može da obezbijedi dovoljno sredstava za potrošnju putem direktnih prihoda, ista mora finansirati potrošnju alternativnim kanalima. U takvom slučaju,

štednja ili neki drugi vid u vremenu akumuliranog imetka (engl. wealth), komplementarno mora da podržava sadašnju ili buduću potrošnju. Vrlo često, neki pojedinci ili porodice ne mogu uzeti (podići) kredit kod finansijskih institucija zbog niskog kreditnog rejtinga. Promjena agregata ukupnog raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje nije diskretna, već kontinualna u vremenu. Shodno navedenom, definišemo neprekidne funkcije za sve uključene varijable. Pored toga, postoji izvjesni stepen inherentne „inercije” u vremenskoj evoluciji varijabli, nalik fizičkom „protoku” (engl. flow), što je poznato u ekonomskoj literaturi i naziva se *ljepljivost*. NDA upravo proučava i analizira takve tokove. Posljedično, primijenimo NDA na agregate ukupno raspoloživog prihoda, imetka i potrošnje za dvodimenzionalne (2D) i trodimenzionalne (3D) sisteme. Početna motivacija i ideja je bila da pokušamo pronaći neke suštinski male dilatacije koje bi uticale na sistem u cjelini. Znajući i razumijevajući, da takav zahtjevniji zadatak se nije mogao ostvariti od strane jednog istraživača i sa današnjom tehnologijom, preformulisano je ciljno istraživanje da se pronađu u jednoj oblasti makroekonomije Evropske unije (EU) razlozi – zašto i kako, male fluktuacije  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  utiču jedni na druge. TD inherentno opisuje realnu i stvarno–prisutnu nelinearnost makroekonomskog odnosno ekonomskog sistema u cjelini, i to sa ravnotežama koje se nelinearno mijenjaju u vremenu! Implementirali smo ekonometrijski metod nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) za definisanje NDA sistema. U sistemima koji su značajno nelinearni, gotovo redovno, dolazi do „rođenja” haosa. Analizira se, kvalitativno i kvantitativno, uticaj haosa na makroekonomske agregate. Prozor predviđanja za neki sistem direktno zavisi od stanja sistema i početnih uslova, nezavisno od toga da li je sistem u biti haotičan. Bitno je napomenuti da Ljapunov eksponent (LE) zavisi od toga i kako smo odabrali početne uslove sistema. U ovom istraživanju, pored cilja da pronađemo rješenja sistema običnih nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda, zainteresovani smo da otkrijemo kakva su svojstva i stanja dobijenih rješenja. Dodatno, istraživanje se bazira na stvarnim EU makroekonomskim podacima, te naš cilj direktno postaje utvrđivanje kvalitativne i kvantitativne međuzavisnosti EU makroekonomskih varijabli. Ponekad ponašanje sistema u „jednom dijelu” NDS fazne ravni (lokalno) ima jedino matematičku vrijednost, ali isto nema nikakvo makroekonomsko značenje. Fazni portreti koje generiše NDA su inherentno osjetljivi na početne uslove, pa je shodno tome, moguće dobiti različite

i konzistentne putanje/rješenja sa istim modelom. Promjena početnih uslova može uticati na kvalitativno ponašanje i rješenja cijelog sistema. Navedeno, može biti početna tačka za drugačiju, ali posve moguću makroekonomsku stvarnost. Pomenuto, zaista predstavlja „paralelne ekonomske realnosti”. Dodatno, otkrivene NDS ravnotežne krive (EC) i/ili ravnotežne tačke (EP), uopšte NDA singulariteti, nude detaljan i dubinski uvid u izučavani sistem.

TD je relativno nov koncept u ekonomiji. Zasnovan je na ne-Valrasovskom (engl. non-Walrasian) pristupu. TD se razmatra u ranim radovima Patinkina [186][87][88], Roberta V. Clovera [63] i Akela Leijonhufvuda [164]. Slijede, detaljniji radovi Soloua i Štiglica [13], a na sličnom teorijskom putu su bili jedno vrijeme Baro i Grosman [147][44][190][149][89][122][37]. Chiarella, C., Flaschel, P., Groh, G., i Semmler, V. [167][182][118][184][21][27][22][4][60] korištenjem naprednih i rigoroznih makroekonomskih teorijskih tumačenja razvili su TD u modernu i savremenu ekonomsku teoriju. Rani radovi na TD od strane Kijarele i Flašela [68] su započeli sredinom 1980-ih godina [182]. Od svojih relativno skromnih i neprimijećenih početaka, TD je evoluirala kao napredak od Kejnsovo-Metzler-Gudvin-ovog (KMG) modela, ka samostalnoj teoriji sa karakterističnim sopstvenim postulatima. Takozvani, „radni KMG model“ predstavlja format inkapsulirane kejnzijanske analize monetarnog rasta, Rouzovog efekta<sup>99</sup>, Piguovog efekta<sup>100</sup>, Hiksovskog (IS-LM) predstavljanja Kejnsovih-komponenti, itd. [182]. Kijarela i ostali, su definisali i teorijski razvili mnoge višedimenzionalne modele, npr. 9D KMG model i njegov pod-dinamički 5D KMG model, kao i u intenzivnom obliku 22D i 39D modele [182]. Mnogobrojne dimenzije u modelima se odnose na varijable koje koegzistiraju i faktički postoje u realnim makroekonomskim sistemima. Nakon definisanja jednačina i logičke interakcije između varijabli, kao i dodatno obuhvatanjem razumnog broja varijabli u modelima, rezultirajuća matematička interpretacija vrlo egzaktno predstavlja pravi makroekonomski sistem. Višedimenzionalni TD modeli „oslikavaju” mnogo realniju

---

<sup>99</sup> Destabilizujuća/stabilizujuća uloga promjena realnih primanja zavisi od fleksibilnosti odnosa primanja i cijena, kao i marginalne sklonosti ka potrošnji, odnosno ka ulaganju [182].

<sup>100</sup> Stvarni novac ili imetak se menjaju sa inflacijom: efekat stvarne ravnoteže dovodi do ekonomske ekspanzije preko povećane potražnje za potrošnjom pod uslovom da postoji deflacija primanja i cijena [182].

„makroekonomsku sliku”, nego što je to slučaj sa znatno redukovanim i često previše pojednostavljenim modelima (posebno opštr teorije ekvilibrijuma – OTE). TD i NDA su jako važni za ekonomsku analizu, jer isti pružaju unaprijeđenu tehničko-sintetičku osnovu. Naime, znatno bolje se odražavaju realna kretanja u jako složenom sistemu, te posljedično svoje postavke „pretače” i u jednačine modela. U poređenju sa, na primjer, modelima dinamičko stohastičke opšte ravnoteže (DSGE), TD i NDA nude potpunu i fleksibilnu analizu kretanja cijelog „toka sistema”, a ne „samo” na računsko referenciranje prethodno i rekurzivno izračunate vrijednosti varijable/i. Pored toga, linearizacija nije potrebna, jer se svi proračuni i analize izvode u nelinearnom okruženju (zasnovanom na stvarnosti). Štoviše, u NDA, za isti skup jednačina modela, možemo stvoriti „paralelnu ekonomsku realnost” samo promjenom početnih uslova, bez potrebe da se sistem ponovo procjenjuje (kreira).<sup>101</sup>

Nedostaci TD su 1) relativna analitička i numerička složenost za analizu i, posljedično, za sintezu; 2) *Sui generis* postulati TD se slažu sa nekim ranije utvrđenim i poznatim ekonomskim teorijama. Današnja računarska snaga, specijalizovane aplikacije i NDA sa relativnom lakoćom prevazilaze prvi nedostatak. Dodatno, „rađanje” haotičnog ponašanja u takvim sistemima je relativno često. Drugi „nedostatak” je subjektivan i relativan. Zbog istraživačkog načina razmišljanja, posebno u društvenim naukama, inherentno i samo po sebi, neke predložene teorije uvijek imaju subjektivne djelove inkorporirane u njih. Pri tome izvor istih je najčešće njen kreator.

TD pretpostavlja da u osnovnoj strukturi privrede inherentno postoji međuzavisnost i interakcija između radnika, vlasnika imovine, firmi, vlade, cijena, očekivanja, akcija i rasta. Neke od navedenih kategorija su proizvod iracionalnog ponašanja, te ih mi vezujemo za koncept „slobodne volje”. Proces mišljenja, racionalnosti i/ili emocija, korelira sa apstraktnim pojmom „slobodne volje”, i inherentno je povezan sa ljudskim bićima. Shodno tome, u određenom stepenu, uvijek postoji ispoljavanje „slobodne volje” u svakom institucionalnom entitetu (npr. donosiocu odluka o makroekonomskoj politici), jer u njegovoj srži uvijek se nalazi neka osoba. Kao što je ranije istaknuto, nemoguće je znati, odnosno

---

<sup>101</sup> Postoji, još više prednosti – kada se metoda NDA uporedi sa drugim tzv. *main-stream* ekonomskim metodama, ali navedeno izlazi iz okvira i cilja disertacije.

odrediti, kada će neko – pojedinac ili porodica, podnijeti zahtjev za kredit, prodati kuću, kupiti auto, ili će se možda razboljeti – usljed lošijeg životnog standarda, te samim tim i nižeg kvaliteta i načina života, pa samim tim i indukovane potrebe za više sredstava za liječenje, itd. Možemo posmatrati samo agregatne, odnosno makroekonomske vrijednosti. Shodno tome, postoji određeni obrazac ponašanja u velikim razmjerama. U slučaju TD, navedeno je makroekonomska skala sa određenim i manjim mikroekonomskim postulatima u osnovama. Chiarella i drugi, zasnovali su TD na australijskoj ekonomiji [182]. Međutim, u ovom istraživanju u okviru disertacije proučavati ćemo makroekonomiju EU. Uprkos nekim sličnostima, koncept makroekonomije EU se značajno razlikuje od onog u Australiji. EU sada (trenutno) ima 27 različitih ekonomija<sup>102</sup>, jurisdikcija i političkih subjekata. Početne jednačine originalnog TD-a rekombinujemo, kako bismo ih prilagodili specifičnostima EU.

EU modifikacija originalne TD [182] prvenstveno se sastoji u integraciji radnika i vlasnika imovine, zbog njihove vrlo slične logičke i ekonomske međuzavisnosti, u jednu kategoriju: domaćinstva. Naime, kategorija domaćinstva obuhvata radnike koji žive od plate/nadnice i vlasnike imovine koji imaju neki dodatni izvor prihoda (pored plate). Dodatni izvori prihoda vlasnika imovine su: - nekretnine u svom vlasništvu; - dobit od stanova koju ostvaruju kao pružaoci plaćenog smještaja od nepokretnosti koje posjeduju; - naplaćene kamate na bankarske depozite; - proizvodne ili uslužne dobiti ostvarene angažovanjem radnika; - kapitalni investicioni dobiti; itd.

Prvobitno u TD vlasnici imovine su definisani kao pojedinci ili mala privatna preduzeća (MSP) koja mogu da zarade profit prodajom svojih proizvoda i/ili usluga, iznajmljivanjem malih privatnih udjela u kapitalu nekretnina, dobitima od akcija i/ili obveznica, ekstra dividende za angažovanje dobit od vlasništva nad akcijama, itd. Karakteristike koje obje kategorije imaju u TD, su zaista prisutne u stvarnosti za EU28, dok njihove odgovarajuće (zvanične) definicije se nalaze i u *Evropskom sistemu računa* ESA 2010<sup>103</sup>.

---

<sup>102</sup> Ovdje prezentovano istraživanje je na osnovi EU28 zemalja. Odnosno, uključuje i Veliku Britaniju (GB) prije formalnog „Bregzita” iz 2019. godine.

<sup>103</sup> Dokument koji definiše kategoriju i tipove domaćinstava u EU predstavljen i objašnjen je u *European system of accounts* ESA 2010, i nalazi se na internet linku:



EU djeluje kao jedinstvena ekonomija u pogledu slobodnog protoka ljudi, dobara, usluga i kapitala. Stanovništvo EU ima svoj *sui-generis* u poređenju sa originalnim TD jednačinama [27][118][182][21]

. U praksi, na primjer, građani EU imaju preferenciju i daju prednost domaćim gotovinskim depozitima (kratkoročni ugovoreni depoziti sa rokom dospjeća) i dionicama. Umjesto, na primjer, ulaganja u domaće i strane obveznice kao što je to bio slučaj u originalnoj TD. Izraz domaća EU odnosi se na sve pojedince i poslovne subjekte koji imaju sjedište na teritoriji jurisdikcije EU – sve zemlje i kompanije koje podliježu zakonima EU. Pomenute specifičnosti su stvorile potrebu da se originalne TD jednačine transformišu u njihov prilagođeni EU oblik.

U predmetnom procesu smo prvo odredili (pronašli) kredibilne podatke za 23 varijable, predstavljene vremenskim serijama u periodu od 2005. do 2019. godine. Predmetne varijable obuhvataju egzogene faktore relevantne za jednačine 14–16. Nakon toga, svaku od 23 varijable smo aproksimirali polinomnim funkcijama koristeći Vandermondove matrice u programskom paketu MATLAB. Iako smo sproveli i dodatne analize povezane sa vrstama fitovanja i obima, tj. broja EU članica – EMU ili ne-EMU, itd., ovi detalji nisu od suštinskog značaja za dalji tok istraživanja te neće biti dalje elaborirani u disertaciji.

Posljedično, kao rezultat dobili smo 23 polinomna izraza koji su izraženi polinomnim funkcijama. Nakon toga, ove polinomne izraze smo uvrstili u jednačine 14–16, rezultirajući polinomnim izrazom za 3 endogene varijable. Dalje smo odredili prve izvode (diferencijale) pomenutih polinomnih izraza za dohodak, bogatstvo (imetak) i potrošnju. Izrazi za  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ , koji se nalaze između jednačina 17–19 i 22–24 (strane 122. i 123.), predstavljaju konačne izraze dobijene iz jednačina 14–16 u polinomnom obliku. Nadalje, koristeći aproksimaciju vrijednosti varijable polinomnim izrazima, možemo odrediti beskonačan broj vrijednosti endogenih varijabli i njihovih promjena u određenom



vremenskom intervalu. Posljednje pomenuto, naravno važi i za egzogene varijable – predstavljene polinomnim funkcijama, ali nam to sada nije od značaja.

Primijenjujemo NNK metod kako bismo analizirali kombinirani uticaj vrijednosti endogenih varijabli na promjene istih. EViews aplikacija je pokazala da joj je potrebno više od 70-80 opservacija po varijabli kako bismo uspješno primijenili NNK metod. Otuda, smo i koristili fitovanje kontinualnim polinomnim funkcijama kako bismo proširili početni skup podataka za (na) dovoljan broj opservacija. Na kraju, primjenom NNK metode, dobijamo sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koji zbirno opisuje ovisnost promjena endogenih varijabli o njihovim vrijednostima. Koeficijenti  $C(ij)$  predstavljaju koeficijente u ovom sistemu, koji povezuju promjene endogenih varijabli sa vrijednostima istih tih endogenih varijabli, odnosno sa njihovim međusobnim kombinacijama i različitim stepenima u članovima regresije. Prezentovani pristup omogućava faznu analizu uz zadovoljene sve postulate regresione analize.

Provođenje gore pomenutih analiza, rezultira sistemom SNDJPR u kontekstu NDA metode. Ekonometrijski pristup generisao je regresiju prikazanu jednačinama 31–33 [8], sa koeficijentima  $C(ij)$  detaljno predstavljenim u Tablici 2. Koeficijenti  $C(ij)$  množe varijable  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ , odnosno, dohodak, bogatstvo (imetak) i potrošnju. Na primjer,  $C(13)$  reflektira uticaj promjene bogatstva na promjenu dohotka. Dodatno,  $C(110)$  množi proizvod varijabli  $Y_H$  i  $W_H$ , pritom predstavljajući i prikazujući brzinu promjene dohotka u odnosu na brzinu promjene između ove dvije varijable. Unatoč tome, naglašava se da ova regresija nije predmet daljnje ekonometrijske analize. Njezina svrha je isključivo određivanje međusobnih ovisnosti između endogenih varijabli i promjena istih. Fokus je na SNDJPR, a ne na dubljoj ekonometrijskoj interpretaciji regresije.

Važno je napomenuti da su veći stepeni varijabli u članovima regresije rezultat inherentne optimizacije prirode NNK metode. Kombinirajući članove sa različitim stepenima iz evaluacionih jednadžbi, NNK postiže najmanju grešku procjene, što potvrđuje i slika 106. Cilj je dobiti što je moguće precizniji regresijski fit zavisnih varijabli, a veći funkcijski harmonici – ekvivalentni većim stepenima, doprinose preciznosti praćenja krivulje.

U suštini, istraživanje je usmjereno na postizanje optimalnog regresijskog prilagođavanja zavisnih varijabli, pa i uz primjenu većih funkcijskih harmonika, kako bi se preciznije pratila krivulja, odnosno njezine promjene i dinamika.

Početne i originalne TD jednačine za domaćinstva<sup>104</sup>, i to za radnike, su [182]:

$$Y_{\omega}^{Dn} = (1 - \tau_w)[\omega L^d + \omega(L - L^{\omega}) + \omega^r \alpha_l L_2] + (1 - \tau_c)rB_{\omega} \quad (1)$$

$$L^{\omega} = L_f^{\omega} + L_g^{\omega} \quad (2)$$

$$L^d = L_f^d + L_g^d = L_f^{\omega} + L_g^{\omega} \quad (3)$$

$$C_{\omega}^{on} = c_{\omega 1} Y_{\omega}^{Dn} + c_{\omega 2} W_{\omega}^n \quad (4)$$

$$W_{\omega}^n = M_{\omega} + B_{\omega} \quad (5)$$

$$L_g^d = L_g^{\omega} \quad (6)$$

Dodatno, za vlasnike imovine, jednačine su [182]:

$$Y_c^{Dn} = (1 - \tau_c)[\rho^e p_y K + rB_c + B_1^l + p_h C_{\omega}^h - p_y \delta_h K_h] + e(1 - \tau_c^*)B_2^l \quad (7)$$

$$C_c^{on} = c_{c1} Y_c^{Dn} + c_{c2} W_c^n \quad (8)$$

$$W_c^n = M_c + B_c + p_b B_1^l + p_e E + ep_b^* B_2^{l*} + p_y K_h \quad (9)$$

$$p_b^* = 1/r_l^* \quad (10)$$

Objašnjenja članova jednačina, naročito egzogenih varijabli, u okviru jednačina 1-10 detaljno su elaborirana na stranici 112. dokumenta disertaciji. Dodatno, svaka varijabla je pojedinačno analizirana i objašnjena, pružajući dubok uvid u njenu funkcionalnost i povezanost sa širim makroekonomskim kontekstom. Predmetni pristup omogućava temeljito razumijevanje uloge svake varijable u okviru postavljenih jednačina.

<sup>104</sup> Kategorija domaćinstava podrazumijeva radnike i vlasnike imovine, sa svom njihovom imovinom, ali i obavezama [182].

Dodatno, originalni opis i definicije varijabli mogu se pronaći u knjizi Chiarella et al., na kraju VII. glave, na stranici 346. Pomenuta literatura pruža osnovne informacije o svakoj varijabli, dopunjujući i proširujući razumijevanje pojedinačnih elemenata modela. Takođe, važno je napomenuti da objašnjenja kompletnog procesa izvođenja jednačina, kao i cijelokupna makroekonomska logika i veze sa KMG modelom, nalaze se u istoj (VII.) glavi predmetne knjige, posebno na stranici 289. Navedena sekcija pruža cjelovit uvid u teorijski okvir i metodologiju koja je korištena u razvoju modela.

## 4.2 Definisanje KMG endogenih i egzogenih varijabli od interesa

Kombinovanjem jednačina od (1) do (10), na osnovu njihovog zajedničkog ekonomskog i matematičkog značenja, dobijamo sistem jednačina koji zajedno obuhvata radnike i vlasnike sredstava, koje nadalje zovemo domaćinstva. U jednačinama (1) do (10) članovi označavaju sljedeće:  $[182]^{105}$ ,  $Y_{\omega}^{Dn}$ ,  $Y_c^{Dn}$  – nominalni raspoloživi prihod radnika i vlasnika sredstava;  $\tau_{\omega}$  – poreska stopa na zarade, penzije i naknade za nezaposlene;  $\omega$  – nominalna zarada prije oporezivanja;  $L^d$  – ukupna zaposlenost zaposlenih;  $L$  – ponuda rada;  $L^{\omega}$  – ukupna aktivna radna snaga;  $\omega^r$  – iznos penzionih naknada;  $\alpha_l$  – stopa učešća potencijalne radne snage;  $L_2$  – stanovništvo starosti od 66 i više godina;  $\tau_c$  – poreska stopa na dobit, rentu i kamatu;  $r$  – nominalna kratkoročna domaća kamatna stopa (pri kojoj je cijena obveznica jednaka:  $p_b = 1$ )<sup>106</sup>;  $r_l$  – nominalna kratkoročna domaća kamatna stopa (cijena obveznica jednaka:  $p_b = \frac{1}{r_l}$ );  $L_f^{\omega}$  – radna snaga kompanija (preduzeća);  $L_g^{\omega}$  – ukupna zaposlenost u državnim kompanijama i/ili institucijama (jednaka je tzv. „radnoj snazi u javnom sektoru” – engl. *Public Sector Workforce*);  $C_{\omega}^{on}$ ,  $C_c^{on}$  – ukupna nominalna ravnotežna potrošnja radnika i vlasnika sredstava;  $c_{\omega_1}$  – sklonost ka potrošnji radnika iz ostvarenog prihoda;  $c_{\omega_2}$  – sklonost ka potrošnji radnika iz imetka (bogatstva);  $W_{\omega}^n$ ,  $W_c^n$  – nominalno bogatstvo radnika i vlasnika sredstava;  $M_{\omega}$ ,  $M_c$  – novčana sredstva radnika i vlasnika sredstava;  $B_{\omega}$ ,  $B_c$  – kratkoročni dug koji drže (posjeduju) radnici i vlasnici sredstava;  $\rho^e$  – očekivana kratkoročna stopa profita preduzeća;  $p_y$  – nivo cijena domaćih dobara bez uračunatog poreza na dodatu vrijednost;  $K$  – osnovni kapital (ili kapitalna zaliha);  $B^l$  – zalihe domaćih dugoročnih obveznica, od kojih  $B_1^l$  drže domaći vlasnici sredstava, a  $B_1^{l*}$  stranci;  $B_2^l$  – strane obveznice koje drže domaći vlasnici sredstava; ;  $c_{c_1}$  – sklonost ka potrošnji vlasnika sredstava iz ostvarenog prihoda;  $c_{c_2}$  – sklonost ka potrošnji vlasnika sredstava iz imetka (bogatstva);  $p_h$  – zakupnina po stambenoj jedinici (stanarina);  $C_{\omega}^h$  – stvarna (ravnotežna) potrošnja radnika za stanarine;  $\delta_h$  – stopa amortizacije (depresijacije)

<sup>105</sup> Poglavlje VII p. 289 [182], sastoji se od više od sto jednačina. Istraživanje u disertaciji se odnosi na domaćinstva. Zbog navedenog je smanjen broj jednačina.

<sup>106</sup> Kratkoročnim se smatraju kamatne stope sa rokom dospeljeća do godinu dana.

kapitalnih zaliha domaćinstava;  $K_h$  – kapital u stambenom sektoru (ponderisani prosek);  $e$  – kurs (jedinice domaće valute Australijskog dolara (A\$) spram jedinice strane valute): A\$/\$);  $p_b, p_b^*$  – cijena domaćih i stranih obveznica;  $p_e$  – cijena akcija;  $E$  – akcije. Nazivi i oznake, za sve članove u jednačinama, su identični kao što ih je to prvobitno prezentovano prikazano u knjizi Chiarella i ostali, Poglavlje VII p. 346–349 [182]. Svi proračuni i vrijednosti u istraživanju odnosno u okviru disertacije su izraženi u eurima (EUR). Valuta australijskog dolara (A\$) se ovdje pominje jedino iz razloga egzakznog prikaza početnih postavki TD (isto kao i u knjizi Chiarella i ostali).

Bili smo u obavezi, u cilju akademske i znanstvene preciznosti prilikom prezentacije originalnih jednačina Chiarella et al., navesti iste zajedno sa odgovarajućim i pripadajućim im objašnjenjima na način kako su to izvorno uradili autori. Ipak, u praktičnom i pragmatičnom okviru disertacije, transformisali smo originalne jednačine, što je već detaljno opisano u samoj disertaciji, posebno unutar jednačina (12)–(13), kako bismo ih prilagodili praktičnoj primjeni. Naime, za određene varijable koje su originalno definisane od strane Chiarella et al. na visoko-teoretskom nivou, nije bilo moguće pronaći povezane i relevantne podatke, ni unutar Eurostata, niti unutar ECB (SDW) baze podataka. Stoga je bilo neophodno transformisati model kako bi bio kompatibilan sa stvarnim podacima, zadržavajući suštinu originalnog modela, ali prilagođenog na EU *sui generis*, i u skladu sa opštim makroekonomskim postulatima.

### *Osnove Modela*

Da bi se realnije predstavila makroekonomija EU, te uzelo u obzir koliko je moguće više inherentnih i intrinzičnih međusobnih zavisnosti fizičkih i pravnih subjekata EU ekonomije, vršimo rekombinaciju i kreiranje određenih predmentih jednačina. Pomenute zavisnosti ostvarujemo rekombinacijom jednačina (1) do (10), i posljedično definišemo jednačine (11) i (12). Amortizacija stambenog kapitala i stopa promjene je 1) uključena u EU indeks cijena stanovanja ( $HPI_H$ ); 2) istraživanje koristi neto vrijednost kapitala stambenog fonda koji posjeduju domaćinstva ( $K_{hH}$ ) [182]. U poređenju sa posjedovanjem obveznica, građani EU preferiraju štednju i vlasništvo nad akcijama. Posljedično, jednačine (1) do (10)

se prilagođavaju isplati cjelokupne kamate na oročenu štednju od jedne godine, odnosno ista djeluje kao zamjenska protu-vrijednost isplate svih prispjelih kupona za vlasnike obveznica na godišnjem nivou. Zapravo, neto prinos kupona obveznice je ekvivalentan jednogodišnjoj isplati gotovinskog depozita i/ili godišnje isplate dividende na akcije u posjedu. U među-formulama (11) i (12) koristili smo podatke iz Eurostat baze o iznosu bruto plata, izdavanja za nezaposlene i isplate penzija za penzionere. Uključivanjem odgovarajućih koeficijenata u prosječnu bruto zaradu zaposlenih dobijamo detaljniji i fleksibilniji analitički okvir.<sup>107</sup>

Model je temeljito testiran kroz analizu empirijskih podataka, pri čemu su stvarne vrijednosti varijabli korištene za kreiranje modela i stvaranje tokova sistema (SNDJPR) u poglavljima 4.5.3, 4.5.4 i 5.3.2. Sve analize, rezultati i zaključci proizlaze iz rada s makroekonomskim modelom u dijelu doktorske disertacije, gdje teorijske jednačine uključuju empirijske podatke nakon njihovog formiranja i definiranja.

Fazni prostori ili dijagrami, kao i njihova dinamika, takođe su zasnovani na empirijskim podacima.[146] Nadalje, unutar NDA postoji metod koji se koristi za „promjenu parametara” (engl. parameter sweep). Pomenuti pristup omogućuje „klizanje” parametara koji su povezani sa varijablama u SNDJPR modelu, stvarajući nove krivulje, orbite i trajektorije. Navedena metoda pruža dodatan kvalitativni i kvantitativni uvid u različite scenarije sistema, omogućujući analizu različitih stanja u prostoru modela. Pritom se pažljivo sagledavaju različite kombinacije vrijednosti promijenjenih parametara sistema, pružajući dublje razumijevanje mogućih stanja sistema (modela) i njegove dinamike.

Dodatno, postoje koeficijenti za veličinu stanovništva EU, zaposlene, nezaposlene i penzionere. Koristeći koeficijente, prilagođavamo iznose neto i bruto prosječnih plata u EU prema starosti, broju stanovnika i zakonskim pravima. Pomenuto pruža mogućnost da se

---

<sup>107</sup> Disertacija ima širi istraživački okvir, odnosno ispituje uticaj različitih koeficijenata na različite endogene varijable. Dodatno, proučavano je hiper-haotično ponašanje u 4D i 7D sistemima, koristeći NDA, tj. između ostalog i za varijable HICP,  $r_{110}$  i  $Y_H$ .

izoluje pojam bruto zarade. Pomenute među-formule imaju prelazni ili tranzicioni karakter na putu ka definisanju finalnih EU jednačinama, i one su<sup>108</sup>

$$Y_H^{Int} = \{[(1 - \tau_\omega)\alpha_l + \alpha_{GU}\alpha_U]L_1 + \alpha_{GR}\alpha_r L_2\}\omega_G + (1 - \tau_c)r_{KHAV}B_{KHAV} \quad (11)$$

$$W_H^{Int} = M_H + B_H + \frac{B_1^L}{r^L} + e \frac{B_2^L}{r_L^*} + p_e E + HPI_H K_{hH} \quad (12)$$

$$L^\omega = \alpha_L L_1; L^r = \alpha_r L_2; L^U = \alpha_U L_1; \omega^r = \alpha_{GR} \omega_G; \omega^U = \alpha_{GU} \omega_G;$$

$$p_e E = \sum_{i=1}^n p_{Ei} E_i^{109}, \text{ gdje } i = 1, \dots, n.$$

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{I}{(1+i)^t} + \frac{F}{(1+i)^n} \quad (13)$$

Navedene jednačine su privremene, i označene su brojevima 11-13 u okviru DD. Takođe, pomenute jednačine nisu konačne, već služe kao veza između jednačina 1-10 i 14-16. Bitno je istaći da su u makroekonomskom modelu jednačine 14-16 završne, odnosno da su iste predmet daljeg istraživanja. U pomenute jednačine uvrštavamo stvarne podatke iz ECB (SDW) i Eurostata.

Dodatno, jednačine 11-13 koriste se, između ostalog, i za zamjenu određenih kategorija, tj. proširuju izraze za  $L^\omega = \alpha_L L_1$ ;  $L^r = \alpha_r L_2$ ;  $L^U = \alpha_U L_1$ ;  $\omega^r = \alpha_{GR} \omega_G$ ;  $\omega^U = \alpha_{GU} \omega_G$ . Navedena proširenja su naučno utemeljena i operativno opravdana, te dodatno, baziraju se na analizi stvarnih EU podataka, naročito grafikona. Poslijedično grafikoni pokazuju značajno veći procenat štednje EU stanovništva – u odnosu na investicije u obveznice. Takođe, parametarsko proširivanje izraza za  $L^\omega = \alpha_L L_1$ ;  $L^r = \alpha_r L_2$ ;  $L^U = \alpha_U L_1$ ;  $\omega^r = \alpha_{GR} \omega_G$ ;  $\omega^U = \alpha_{GU} \omega_G$ , je izvedeno tako da se članovi u jednačinama svode na zajednički faktor  $L_1$  i  $\omega_G$ . Navedeno omogućava izdvajanje istih faktora ispred zagrada radi olakšane dalje analize.

<sup>108</sup> Prikazane jednačine su zapravo međukorak. Za više detalja o originalnim jednačinama, vidjeti Chiarella C, et al., *Growth, and labor market dynamics: macro perspectives*. Springer Science & Business Media; 2000 Mar 16.

<sup>109</sup> Vrijednost  $p_e E$  predstavlja ukupan zbir svih vlasničkih vrijednosti u portfoliju domaćinstva, spram trenutne tržišne vrijednosti. U ovdje razmatranom portfoliju postoji  $n$  vlasničkih akcija (npr. kompanija).

### 4.3 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK) u regresionoj analizi

Ovdje prezentovano objašnjenje se nalazi u originalnoj EViews korisničkoj dokumentaciji, i prenosimo ga integralno, a sa ciljem što je moguće boljeg i preciznijeg opisa korištene NNK metode u EViews programu u ovom radu.<sup>110</sup> Takođe, na navedenim izvorima se nalaze i primjeri NNK estimacije u EViews-u. NNK metod se intenzivno koristi već u narednoj glavi.

Razmotrimo specifikaciju regresije predstavljenu jednačinom  $y_t = f(x_t, \beta) + \varepsilon_t$ , gdje je  $f$  opšta funkcija i uključene eksplanatorne promenljive  $x_t$  sa parametrima  $\beta$ . Da bi se postiglo najbolje fitovanje (aproksimacija), metod najmanjih kvadrata se koristi za odabir vrijednosti parametara koji minimiziraju zbir kvadrata reziduala:  $S(\beta) = \sum_t (y_t - f(x_t, \beta))^2 = (y_t - f(X, \beta))' (y_t - f(X, \beta))$ . Za model kažemo da je linearan po parametrima ukoliko (izvodi) derivativi  $f$  spram parametara ne zavise od parametra  $\beta$ . Posljedično, ukoliko derivativi funkcije  $f$  zavise od  $\beta$ , kažemo da je model nelinearan po parametrima. Da bismo ilustrovali pomenuto, ispitajmo model  $y_t = \beta_1 + \beta_2 \log L_t + \beta_3 \log K_t + \varepsilon_t$ . Model je linearan po parametrima – prvi izvodi nisu funkcije od  $\beta$ , i može se procijeniti korištenjem metode *Običnih najmanjih kvadrata* (OLS). Suprotno navedenom, estimaciona jednačina  $y_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} + \varepsilon_t$  ima derivative koji su zavisni od parametara  $\beta$ , i moramo je procijeniti metodom *nelinearnih najmanjih kvadrata* (NNK). Specifikacija jednačine je takva, da nije moguće preurediti članove jednačine kako bi upotrijebili metodu običnih najmanjih kvadrata sa ciljem da se minimizira suma kvadrata rezidula, već se koristi NNK metod.

Bitno je napomenuti, da EViews automatski određuje vrstu metode koju će koristiti za estimaciju neke jednačine, u običnih najmanjih kvadrata (ONK) ili NNK domenu, vodeći se sa prethodno prezentovanim kriterijumima.

---

<sup>110</sup> Izvori: [https://eviews.com/help/helpintro.html#page/content/Regress2-Nonlinear\\_Least\\_Squares.html](https://eviews.com/help/helpintro.html#page/content/Regress2-Nonlinear_Least_Squares.html), i [https://eviews.com/help/helpintro.html#page/content/optimize-Optimization\\_Algorithms.html#ww137130](https://eviews.com/help/helpintro.html#page/content/optimize-Optimization_Algorithms.html#ww137130).



NNK minimizira sumu kvadrata rezidula u odnosu na izbor  $\beta$  parametara. Iako ne postoji rješenje u zatvorenom obliku za parametre, ocjene se mogu dobiti iterativnim metodama putem *optimizacionih algoritama*.

S obzirom na važnost pravilnog podešavanja opcija za procjenu u EViews-u, korisno je da ukratko pregledamo različite osnovne algoritme optimizacije koji se koriste prilikom nelinearnih procjena. Podsjetimo se da je problem sa kojim se suočavamo u nelinearnoj proceni pronalaženje vrijednosti parametara  $\theta$  koji optimizuju (maksimiziraju ili minimiziraju) tzv. *objektivnu funkciju*  $F(\theta)$ .

Algoritmi iterativne optimizacije rade tako što uzimaju početni skup vrijednosti za parametre, npr.  $\theta(0)$ , a zatim izvedu proračune na osnovu tih vrijednosti da bi se dobio bolji skup vrijednosti parametara  $\theta(1)$ . Ovaj proces se ponavlja za  $\theta(2)$ ,  $\theta(3)$ , i tako dalje, dok se na kraju objektivna funkcija više ne poboljšava između (nakon) iteracija.

Postoje tri glavna dijela procesa optimizacije: (1) dobijanje početnih vrijednosti parametara, (2) ažuriranje vektora kandidata  $\theta$  za parametar pri svakoj iteraciji, i (3) određivanje kada smo dostigli optimum.

Objektivna funkcija je globalno konkavna i postoji samo jedan maksimum, te svaki algoritam koji poboljšava vektor parametara pri svakoj iteraciji će na kraju pronaći ovaj maksimum (pod pretpostavkom da veličina preduzetih koraka ne postane zanemarljiva). Ako objektivna funkcija nije globalno konkavna, različiti algoritmi mogu pronaći različite lokalne maksimume, ali svi iterativni algoritmi će patiti od istog problema nemogućnosti da razdvoje lokalni i globalni maksimum.

Glavna stvar koja razlikuje različite algoritme je koliko brzo pronalaze maksimum. Nažalost, ne postoje stroga pravila. Za neke probleme jedan metod može biti brži, ali ne i za neke druge probleme. EViews pruža različite algoritme, i omogućiti će nam da odaberemo koji metod želimo koristiti.

Nadalje, ukratko ćemo opisati ove metode. Algoritmi koje koristi EViews mogu se u širem smislu klasifikovati u tri tipa: metode *drugog izvoda*, metode *prvog izvoda* i metode

*bez izvoda*. Metode drugog izvoda u EViews-u procjenjuju trenutne vrijednosti parametara, te prvi i drugi izvod objektivne funkcije za svaku opservaciju. Metode prvog izvoda koriste samo prve izvode objektivne funkcije tokom procesa iteracije. Kao što ime govori, metode bez derivata ne izračunavaju derivate.

Prvo ćemo nešto reći o metodama *drugog izvoda*, koje se najčešće koriste za binarne, uređene, *cenzurisane (skraćene) modele*<sup>111</sup>, i *brojive modele* (engl. *count models*)<sup>112</sup>, gdje EViews može procijeniti model koristeći Njutn–Rapsonov (*Newton-Raphson*)<sup>113</sup> metod, ili metod tzv. *kvadratnog penjanja po brdu* (engl. *quadratic hill-climbing*)<sup>114</sup>. Vrijednosti koje predstavljaju kandidate za parametre Njutn–Rapsonovog modela  $\theta(1)$  mogu se dobiti (odrediti) linearizacijom uslova prvog izvoda  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$  za trenutne vrijednosti parametara  $\theta(i)$ :  $g(i) + H(i)(\theta(i+1) - \theta(i)) = 0$ , te slijedi da je  $\theta(i+1) = \theta(i) - H^{-1}(i)g(i)$ , gdje je  $g$  vektor gradijenata  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ , a  $H$  je Hesijanska matrica  $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ . Ukoliko je funkcija kvadratna, Njutn–Rapsonov metod će pronaći maksimum u jednoj iteraciji. Međutim, ukoliko funkcija nije kvadratna, uspjeh algoritma će zavisiti od toga koliko dobro lokalna kvadratna aproksimacija obuhvata oblik funkcije.

Metod kvadratnog penjanja po brdu je zapravo direktna varijacija Njutn–Rapsonove metode, i ponekad se pripisuje Goldfeldu i Kvantu (engl. Goldfeld and Quandt). Kvadratno penjanje na brdo modifikuje Njutn–Rapsonov algoritam dodavanjem matrice korekcije (ili

---

<sup>111</sup> *Cenzurisani regresioni modeli* su klasa modela u kojima je zavisna varijabla cenzurisana iznad ili ispod određenog praga. Često korišten model je zasnovan na verovatnoći za prilagođavanje cenzurisanom uzorku – *Tobitov model*, ali su također razvijeni i *kvantilni* odnosno *neparametarski procjenjivači*.

<sup>112</sup> Modeli brojanja su podskup modela regresije tzv. *diskretnog odgovora*. Podaci o broju su raspoređeni kao nenegativni cijeli brojevi, suštinski su heteroskedastični, desno iskrivljeni i imaju varijansu koja raste sa srednjom vrijednošću. S obzirom na skup promjenljivih prediktora, model regresije broja podataka omogućava korisniku da dobije procjene očekivanog broja događaja (npr. posjeta prodavnici) za jedinicu posmatranja (npr. kupca).

<sup>113</sup> *Njutn–Rapsonov* metod počinje sa početnom procenom korijena, označenom kao  $x_0 \neq x_r$ , i koristi tangentu  $f(x)$  u  $x_0$  da poboljša procjenu korijena. Dobijeno poboljšanje  $x_1$  se dobija određivanjem gdje linija tangente  $f(x)$  u  $x_0$  presijeca x-osu.

<sup>114</sup> U numeričkoj analizi, penjanje po brdu je tehnika matematičke optimizacije koja pripada porodici *lokalnog pretraživanja*. To je iterativni algoritam koji počinje sa proizvoljnim rješenjem problema, a zatim pokušava da pronađe bolje rješenje tako što se rješenje inkrementalno mijenja. Ako promjena proizvede bolje rešenje, nova inkrementalna promjena se pravi u novom rešenju, i tako sve dok se više ne mogu pronaći dalja poboljšanja. (Izvor: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hill\\_climbing](https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_climbing))

faktora „grebena”<sup>115</sup>) u Hesijanu.<sup>116</sup> Kvadratni algoritam ažuriranja za „penjanje” je dat na sljedeći način:  $\theta(i+1) = \theta(i) - \tilde{H}^{-1}(i)g(i)$ <sup>117</sup>, gdje je  $\tilde{H}^{-1} = -H(i) + \alpha I$ , gdje je  $I$  jedinična matrica, a  $\alpha$  je pozitivan broj kojeg bira (određuje) algoritam.

Efekat prezentovane modifikacije je da „gura” (usmjerava) procjene parametara u pravcu vektora gradijenta. Ideja je da kada smo daleko od maksimuma, lokalna kvadratna aproksimacija funkcije može biti loš vodič za njen ukupni oblik, pa bi nam možda bilo bolje da jednostavno pratimo gradijent. Korekcija može da obezbijedi bolje performanse na lokacijama koje su udaljene od optimalnog i omogućava izračunavanje vektora pravca u slučajevima kada je Hessian blizu singulara (singularne<sup>118</sup> matrice).

Za modele koji se mogu procijeniti korištenjem metoda drugog izvoda, EViews koristi kvadratno penjanje po brdu kao svoju podrazumijevanu metodu. Može se izabrati korištenje tradicionalne Njutn-Rapsonove metode ili prve metode derivata opisane u nastavku, tako što će se odabrati željeni algoritam u meniju opcije Eviews-a. Asimptotske standardne greške se uvijek računaju iz nemodifikovanog Hesijana kada se postigne konvergencija.

Metode prvog izvoda (derivativa) se koriste kada metode drugog derivativa su vrlo kompjutaciono zahtjevne, pošto treba da ocijenimo  $\frac{k(k+1)}{2}$  elemenata u svakoj matrici drugih izvoda pri svakoj iteraciji. Dodatno, druge derivate može biti teško precizno izračunati. Alternativa, je upotreba metoda koje zahtijevaju samo prve izvode objektivne funkcije u vrijednostima parametara.

---

<sup>115</sup> Ridž („greben”) regresija (engl. Ridge Regression) je metoda koja se koristi za analizu multikolinearnosti u podacima višestruke regresije. Najprikladnije je koristiti kada skup podataka sadrži veći broj prediktorskih varijabli od broja posmatranja (opservacija). Drugi najbolji scenario je kada se multikolinearnost javlja u skupu.

<sup>116</sup> Na engleskom jeziku se termin origanalno naziva: *ridge factor to the Hessian*.

<sup>117</sup> Oznaka „ $\tilde{\cdot}$ ” je stavljena ispred oznake Hesijana „ $H$ ”, jer ukoliko se stavi iznad pomenutog slova – u novijim verzijama MS Word aplikacije (npr. MS Word 2016 i 2022), ista gotovo da se uopšte i ne primjećuje.

<sup>118</sup> Singularna matrica se odnosi na matricu čija je determinanta jednaka nuli, i nema inverznu matricu (ne postoji inverzna matrica za singularne matrice).

Za druge odabrane nelinearne modele (ARCH i GARCH, GMM, State Space), EViews obezbjeđuje dvije metode određivanja prvih izvoda: Gaus-Njutnov/BHHH ili Markuardov metod (engl. Gauss-Newton/BHHH or Marquardt).

Nelinearna pojedinačna jednačina i modeli sistema, se procjenjuju primjenom Markuardovog metoda.

Gaus-Njutn/BHHH algoritam prati Njutn-Rapsonov, ali zamjenjuje negativ Hesijana aproksimacijom formiranom od zbira spoljašnjeg proizvoda vektora gradijenta za doprinos svake opservacije objektivnoj funkciji. Za funkcije najmanjih kvadrata i log vjerovatnoće, ova aproksimacija je asimptotski ekvivalentna stvarnom Hesian-u kada se procijeni na vrijednostima parametara koje maksimiziraju funkciju. Kada se procijeni daleko od maksimuma, ova aproksimacija može biti prilično loša.

Algoritam se naziva Gaus-Njutnovim za opšte nelinearne probleme najmanjih kvadrata, a često se pripisuje Berndtu, Holu, Holu i Hausmanu (BHHH) za probleme *maksimalne vjerovatnoće*.

Prednosti aproksimacije negativnog Hesijana spoljnim proizvodom gradijenta su u tome što (1) treba da procijenimo samo prve izvode, i (2) tzv. spoljni proizvod je nužno pozitivan odnosno matrica je poludefinitna<sup>119</sup>. Dok, je nedostatak je u tome, što kada su vrijednosti daleko od maksimuma, predmetna aproksimacija može pružiti „lošu sliku” za ukupni oblik funkcije, tako da može biti potrebno više iteracija da bi se postigla konvergencija.

Markuardov algoritam modifikuje Gaus-Njutnov algoritam na potpuno isti način kao što kvadratno penjanje po brdu modifikuje Njutn-Rapsonov metod (dodavanjem matrice korekcije (ili faktora „grebena”) u Hesijansku aproksimaciju.

Korekcija „grebena” rješava numeričke probleme kada je spoljni proizvod skoro singularan i može poboljšati stopu konvergencije. Kao i ranije pomenuti koncept, algoritam „gura” ažurirane vrijednosti parametara u pravcu gradijenta.

---

<sup>119</sup>  $Q$  se naziva pozitivnom poludefinitnom ako je  $Q(x) \geq 0$  za svako  $x$ , i  $Q$  ima kvadratnu formu.

Za modele koji se mogu proceniti korišćenjem metoda prvog izvoda, EViews koristi Markuardovu metodu kao svoju podrazumijevanu (difoltnu, engl. default) metodu. U mnogim slučajevima, može se izabrati korištenje tradicionalne Gaus-Njutonove metode, ponovo putem menija Opcije u EViews aplikaciji.

Bitno je napomenuti, da se asimptotske standardne greške uvijek računaju iz nemodifikovane (Gaus-Njutnove) Hesijanske aproksimacije, onda kada se postigne konvergencija.

Izbor veličine koraka je od velikog značaja kod NNK metoda. Pri svakoj iteraciji možemo tražiti optimalnu veličinu koraka duž datog (određenog) pravca. EViews vrši jednostavnu pretragu putem metode „*pokušaja i greške*” pri svakoj iteraciji, kako bi odredio veličinu koraka  $\lambda$  koji će poboljšati objektivnu funkciju. Ovaj postupak se ponekad naziva *stiskanje* ili *istezanje*.

EViews će prilikom iterativnih postupaka napraviti „grub” pokušaj da pronade dobar korak. Međutim, taj korak zapravo nije optimizovan pri svakoj iteraciji, jer je izračunavanje vektora pravca čak često važnije od izbora veličine koraka. Moguće je, da EViews uopšte neće moći pronaći veličinu koraka koja bi poboljšala objektivnu funkciju. U ovom slučaju, EViews će javiti poruku o grešci.

EViews takođe vrši „grubu” pretragu metodama „pokušaja i greške” da bi odredio *faktor razmjere*<sup>120</sup> za Markvardove i kvadratne metode penjanja na brdo.

Metode bez derivata, zapravo ne zahtijevaju izračunavanje izvoda. *Mrežna pretraga* (engl. grid search) je vodeći primjer ove metodologije. Odnosno *mrežna pretraga* jednostavno izračunava objektivnu funkciju na mreži vrijednosti parametara, i bira parametre sa najvećim vrijednostima. Metoda mrežne pretrage je kompjutaciono vrlo zahtjevna, posebno za modele sa više parametara.

---

<sup>120</sup> Skalarna vrijednost – multiplikator (broj), koj određuje i vrši „stiskanje” ili „istezanje”.

EViews koristi verziju mrežne pretrage koja se bazira na rutini *eksponencijalnog izgladivanja*<sup>121</sup> (engl. exponential smoothing routine).

Ocjene koeficijenata kovarijanse imaju sljedeću opštu formu  $\hat{\Sigma}_{NLLS} = cA^{-1}BA^{-1}$ , gdje je  $A$  estimacija informacija,  $B$  je varijansa rezidualima ponderisanih gradijenata, i  $c$  je parametar skaliranja. Za običan estimator kovarijanse važi da je  $A = B$ , i onda imamo  $\hat{\Sigma}_{NLLS} = cA^{-1}$ , gdje je sada  $c$  estimator rezidualne varijanse (sa ili bez korekcije stepeni slobode). Kao što to navodi Amemiya (1983), koristimo spoljni proizvod gradijenata (engl. *outer-product of the gradients (OPG)*) i tada imamo  $\hat{\Sigma}_{NLLS} = c \left( \frac{\partial f(\beta)'}{\partial \beta} \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} \right)^{-1}$ , i derivati se evaluiraju u tački  $b_{NLLS}$ . Slično, možemo postaviti da je matrica  $A$  jednaka jednoj-polovini Hesijanske matrice drugih izvoda (derivata) za funkciju sume kvadrata, tj.  $\hat{\Sigma}_{NLLS} = c \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} \right)^{-1}$ , i takođe evaluiran u tački  $b_{NLLS}$ .

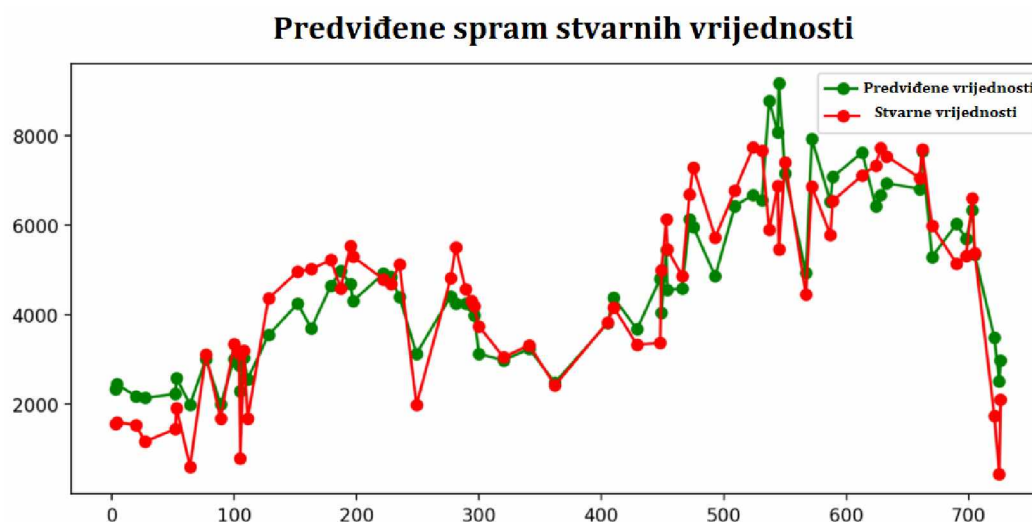
Alternativno, možemo pretpostaviti i uzeti različite matrice  $A$  i  $B$ , i na iste primijeniti *white* ili *HAC* tzv. „sendvič” estimator za koeficijente kovarijanse kao što se to primjenjuje u metodi tzv. robusnih standardnih grešaka<sup>122</sup> (engl. *Robust Standard Errors*). U tom slučaju se  $A$  ocjenjuje sa *OPG* metodom ili Hesijanom, dok se  $B$  određuje robusnom ocjenom (estimacijom) varijanse reziduala ponderisanih gradijenata. U ovom slučaju,  $c$  je skalar koji predstavlja korekciju stepeni slobode, ako se isti koriste.

Karakteristika NNK metoda ocjene (estimacije) je da imaju visoke R–kvadrate, jer na jako dobar način „prate” aproksimiranu funkciju. Međutim, navedeno ne mora da znači da imamo tzv. eksplozivnu ili pristrasnu ocjenu modela. Dodatno, pomenuto se može vidjeti na primjeru, odnosno na slici 104, kao i na određenim EViews slikama NNK regresione analize u disertaciji, a koje su kreirane u okviru istraživanja pri njenoj izradi.

---

<sup>121</sup> Eksponencijalno izgladivanje je metoda za predviđanje univarijantnih podataka vremenskih serija. Zasniva se na principu da je predviđanje zapravo ponderisani linearni zbir prethodnih posmatranja ili kašnjenja (docnji). *Metoda eksponencijalnog izgladivanja vremenskih serija* funkcioniše tako što se prethodnim opservacijama dodjeljuju eksponencijalno opadajuće težine (ponderi).

<sup>122</sup> Grupa tzv. *robustnih metoda* u ekonometriji.



Slika 104. Primjer NNK metodologije

Izvor: <https://timeseriesreasoning.com/contents/nonlinear-least-squares-nls-regression/>

Za više detalja o metodi nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK), vidjeti: Pindyck i Rubinfeld (1998, p. 265-273)<sup>123</sup>, Davidson i MacKinnon (1993)<sup>124</sup> ili Amemiya(1983)<sup>125</sup>.

---

<sup>123</sup> Pindyck, S. and Rubinfeld, L. Econometric models and economic forecasts. McGraw-Hill: New York, 1997.

<sup>124</sup> Davidson R, MacKinnon JG. Estimation and inference in econometrics. New York: Oxford; 1993.

<sup>125</sup> Amemiya T. Non-linear regression models. Handbook of econometrics. 1983 Jan 1;1:333-89.



#### 4.4 Prilagođene za EU28 makroekonomske relacije teorije disekvilibriruma (TD)

U jednačini (13) smo uveli sljedeća označavanja:  $P$  – cijena obveznice;  $n$  – broj perioda plaćanja (broj godina pomnožen sa 2);  $I$  – polugodišnje plaćanje (kupon);  $i$  – diskontna stopa;  $F$  – nominalna vrijednost obveznice;  $t$  – vrijeme plaćanja kupona. Kada su  $t$  i  $n$  jednaki jedan, imamo godišnju isplatu obveznice. Shodno tome, predstavljamo godišnju isplatu jednog kupona umjesto dva, i on je adekvatan ekvivalentu prihoda za godišnju isplatu kamate na vremenski oročenu štednju. Dalje, zanemarujemo drugi član u jednačini (13), jer on predstavlja nominalnu vrijednost obveznice u konačnoj isplati, ili u slučaju povlačenja ukupnih sredstava sa oročenog depozita [151].

U jednačine (11) i (12) uključujemo prihode generisane kratkoročnim ulaganjima u domicilne i strane obveznice kako bi kreirali jednačine (14) do (16). Obveznice u inostranstvu imaju značenje dužničke imovine koja se emituje van legalnog rezidentstva izdavaoca obveznica u EU28. Za populaciju EU28, posljednja dva člana u (14) su mnogo manja od ulaganja u kapitalni imetak (engl. *equity*), ali su zbog kompletnosti i preciznosti ovog istraživanja uračunata u ukupni raspoloživi prihod.

Kada integrišemo parametarski proširene jednačine  $L^{\omega} = \alpha_L L_1$ ;  $L^r = \alpha_r L_2$ ;  $L^U = \alpha_U L_1$ ;  $\omega^r = \alpha_{GR} \omega_G$ ;  $\omega^U = \alpha_{GU} \omega_G$ , zajedno sa formulama za obračun kupona obveznica – tokom jedne godine, analogno sa isplatom godišnje kamate na štednju prezentovanu sa  $\sum_{t=1}^n \frac{I}{(1+i)^t}$ , te uključimo član koji uzima u obzir i investicije stanovništva u akcije  $p_e E = \sum_{i=1}^n p_{Ei} E_i$ , gdje  $i=1, \dots, n$ , dobijamo relativno široko i značajno sagledavanje imetka EU stanovništva. Sve navedene informacije (podaci) nam služe kao osnova za transformaciju jednačina 11-12 u 14-16, gdje jednačine 14 i 15 direktno proizlaze iz re-kombinacije jednačina 1-3 i 5-6, odnosno 7, 9 i 10, redom. Sa druge strane, jednačine 4 i 8 stvaraju logičku i suštinsku jednačinu 16.

$$Y_H = \{[(1 - \tau_{\omega})\alpha_L + \alpha_{GU}\alpha_U]L_1 + \alpha_{GR}\alpha_r L_2\}\omega_G + (1 - \tau_c)[r_{KH_{AV}}B_{KH_{AV}} + P_G^*r_{KH}^* + P_G r_{KH}] \quad (14)$$



$$W_H = M_H + B_H + B_1^L + B_2^L + E_H + H_{PI}K_{HH} \quad (15)$$

$$C_H = c_{\omega 1}Y_H + c_{\omega 2}W_H \quad (16)$$

Jednačina (15) ( $W_H = M_H + B_H + B_1^L + B_2^L + E_H + H_{PI}K_{HH}$ ) precizno definiše koncept imovine (bogatstva) stanovništva unutar analiziranih modela. Ova jednačina se pojavljuje u disertaciji neposredno nakon prezentacije sistema jednačina (14)–(16).

Imetak ili bogatstvo, je definisano kao suma različitih finansijskih elemenata. Konkretno, imovina uključuje neoročeni novac ( $M_H$ ), oročene depozite do jedne godine ( $B_H$ ), duže oročene domaće depozite ( $B_1^L$ ) koji se nalaze unutar EU jurisdikcije (umjesto obveznica u originalnom modelu), duže oročene strane depozite ( $B_2^L$ ) izvan EU jurisdikcije (umjesto obveznica u originalnom modelu), akcije ( $E_H$ ), i posjedovanje nekretnina od strane stanovništva definisano sa  $H_{PI} K_{HH}$ . Navedeni skup elemenata pruža značajnu i realističnu sliku agregatne imovine koju posjeduju stanovnici EU.

Bitno je napomenuti da u jednačini (14), drugi član (desno od znaka sabiranja) opisuje prihode od godišnjih kamata na oročene depozite, što se ne tretira kao imetak, već se razmatra kao (dodatni) dohodak, a dio agregatnog dohotka. Pomenuti dodatni aspekt je uključen kako bi se prikazali i uzeli u obzir što je moguće širi izvori generisanja određenog dijela imovine, odnosno procesa njenog stvaranja i eventualnog uvećavanja. Važno je razlikovati navedena dva koncepta pri analizi ekonomske dinamike, odnosno u zaključcima.

U (14) do (16) uvedene su sljedeće oznake:  $B_{KHAV}$  – depoziti do 3 mjeseca;  $r_{KHAV}$  – prosječna kamatna stopa na kratkoročne depozite do 3 mjeseca;  $P_G^*$  – prihod od stranih obveznica koje prikuplja stanovništvo EU;  $r_{KH}^*$  – prosječna kamatna stopa za ulaganja u strane kratkoročne oročene depozite ili ekvivalentno u strane obveznice (posmatrano iz ugla stanovništva EU);  $P_G^r$  – prihod od domaćih obveznica stanovništva EU;  $r_{KH}$  – prosječna kamatna stopa za ulaganja u domaće kratkoročne oročene depozite ili ekvivalentno u domaće obveznice (posmatrano iz ugla stanovništva EU). Jednačine (14), (15) i (16) čine osnovu istraživanja. Za domaćinstva EU28, posljednje pomenuti sistem jednačina odgovara kategorijama ukupne neto raspoložive imovine: prihod ( $Y_H$ ), bogatstvo ( $W_H$ ) i potrošnja

( $C_H$ ). U indeksu varijabli  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  veliko slovo „ $H$ ” predstavlja domaćinstva, dok malo slovo „ $h$ ” predstavlja stanove i/ili nekretnine u posjedu.

Ukupna raspoloživa potrošnja ( $C_H$ ) je linearna kombinacija ukupno raspoloživog imetka (bogatstva) i prihoda prema koeficijentima  $c_{\omega 1}$  i  $c_{\omega 2}$ . Zbir koeficijenata  $c_{\omega 1}$  i  $c_{\omega 2}$  jednak je jedinici, i po logici stvari je sličan „*makroekonomskim spojenim sudovima*”. Periodi bez krize transferišu zarađeni prihod u imetak (bogatstvo) i/ili potrošnju, a u vrijeme krize bogatstvo se ponovno vraća natrag u prihod za potrošnju. Finansijsko „prelivanje” je uvijek prisutno u životu, i kruži između navedenih kategorija. Dodatno, pomenute kategorije predstavljaju zatvoreni jedinični krug u neto bilansu. Chiarella et al. definisali su koeficijente kao „*funkciju potrošnje na jednostavnom linearnom pristupu životnog ciklusa, koji dodaje bogatstvo radnika kao argument i determinantu njihove ukupne potrošnje u nominalnom iznosu (ali ne kao kamatnu stopu, kako god da je mjerena)*”. [182]. Chiarella et al. nisu određivali empirijske vrijednosti koeficijenata. Oni su testirali različite vrijednosti koeficijenata koji su hipotetički i teoretski mogući. U okviru disertacije pokušavamo da inkrementalno doprinesemo [182] implementacijom  $TD$  na realne podatke, te da između ostalog, odredimo i vrijednosti predmetnih koeficijenata.

Kejnsova funkcija potrošnje ( $KFP$ ), poznata je i kao samo funkcija potrošnje ( $FP$ ) [87], ima analitički izraz  $C = C_{KCF} = a + bY$ , gdje  $a$  predstavlja egzistencijalni <sup>126</sup> (fiksni) nivo potrošnje,  $b$  predstavlja graničnu odnosno *marginalnu sklonost ka potrošnji* ( $MPC$ ),  $C$  je potrošnja, a  $Y$  je prihod. Imajmo na umu da  $FP$ , ili  $KFP$ , u jednoj tački siječe pravu sa nagibom od  $45^\circ$  – tu tačku ćemo nazvati „ $T$ ”. U tački  $T$  *prosječna sklonost ka potrošnji* ( $APC$ ) je jednaka jedinici.  $APC$  uvijek ima nešto nižu vrijednost od  $MPC$ . Lijevo od  $T$ ,  $APC$  je veći od jedan, dok desno od  $T$ , te onda  $APC$  je manji od jedan. Navedeno implicira da lijevo od  $T$  potrošnja je veća od prihoda, dok za desno bi potrošnja bila manja od prihoda. Kejns je naveo i da ljudi sa niskim prihodima potroše veliki dio svog prihoda, te da bi onda praktično  $APC$  mogao biti jednak jedan. Kejns obrazlaže da ljudi troše sve što imaju, jer sa niskim primanjima ne mogu ništa uštedjeti – sve što zarade troše na osnovna

---

<sup>126</sup> Izvorni termin je na engleskom jeziku, i glasi: *subsistence* (level of consumption).

dobra. Međutim, kako prihod raste, ljudi mogu priuštiti da uštede određeni dio svojih prihoda, iako vlasnici sa visokim prihodima imaju znatno niži *APC*!

Kejns je nazvao „*fundamentalnim psihološkim zakonom*” da ljudi ne troše sav prihod, već štede jedan njegov dio.<sup>127</sup> Sve navedeno, je teorijsko stanovište postulata starog (skoro) jedan vijek. Naravno, pomenuti postulat je vremenom evoluirao. Realističnijim predstavljanjem prve dvije decenije 21. vijeka u EU makroekonomiji i korišćenjem istorijsko-ekonomskog znanja, proširujemo i modifikujemo *FP*.

Ako usvojimo pristup da je odnos između dohotka i bogatstva  $(c_{\omega_1} + c_{\omega_2}) > 1$ , složili bismo se sa principom G. R. Holdena<sup>128</sup> da je potrošnja  $C$  veća od prihoda  $Y$  ( $MPC > 1$ ). Znamo da bi u makroekonomiji (dugoročno gledano) navedeno bio ekonomski „*perpetuum mobile*”. Znači, ljudi ne mogu da izdrže dugoročnu potrošnju bez sredstava obezbijedenih dohotkom, ili kada dođe do potrebe prinuđeni su da potroše određenu količinu blagovremeno akumuliranog bogatstva (ukoliko posjeduju pomenuto bogatstvo odnosno imetak).

Alternativno, za  $(c_{\omega_1} + c_{\omega_2}) < 1$ , podržali bismo princip J.M. Kejnsa da je potrošnja  $C$  niža od prihoda  $Y$  ( $MPC < 1$ ), odnosno da preostali dio prihoda kontinuirano ide u štednju. Takođe, pomenuto ne odražava današnju stvarnost, jer se mnoge porodice i ljudi bore sa svojom kratkoročnom i dugoročnom potrošnjom, željama i/ili obavezama.<sup>129</sup> Današnja istraživanja tvrde da postoji stabilan i dosljedan svjetski trend „*ekonomske dezintegracije*” srednje klase za razliku od ekonomske ekspanzije iste 1940-ih i 1950-ih godina. Nedavno su različite studije navedeno i dokazale.

---

<sup>127</sup> Keynes JM. The general theory of employment. Q J Econ 1937; 51: 209–223.

<sup>128</sup> Holden GR. Mr. Keynes' Consumption Function and the Time-Preference Postulate. The quarterly journal of economics. 1938 Feb 1:281-96.

<sup>129</sup> Predstavljamo nekoliko primjera kako bismo stekli opšti utisak o praktičnoj primjeni FP. Za sljedeće vrijednosti  $a = 500\text{€}$  (fiksna potrošnja u određenom periodu, npr. mjesečni gas, struja, gorivo za automobile, voda, komunalne usluge, itd.),  $b = 0,7$  (odnosno da neko troši 70% svojih prihoda),  $Y = 2.000\text{€}$  (prihod),  $C$  (potrošnja) ima izračunatu vrednost  $C = 500\text{€} + 0,7 * 2.000\text{€} = 500\text{€} + 1.400\text{€} = 1.900\text{€}$ . Gotovo sav prihod je potrebno potrošiti na troškove života, samo 5% je moguće usmjeriti u štednju, odnosno investiciju. Pomenuto, je (čak) relativno pozitivan scenario. Drugi slučaj bi bio da se prihod, pod uslovom da je sve ostalo jednako (*ceteris paribus*), je npr.  $Y = 1.000\text{€}$ . Tada agregatna potrošnja treba da bude  $C = 1.200\text{€}$ , što je 20% više od stvarnog prihoda!

Metodološki, navodimo da je  $(c_{\omega_1} + c_{\omega_2}) = 1$ . Nadalje, eksplicitno sugerišući da kanal ukupno raspoloživog imetka ( $W_H$ ) 130 dopunjuje Kejnsovu PF do jedinice. Dodatno, sam Kejns je eksplicitno naveo da se razlika između potrošnje i prihoda, vezana za PF analitičku formu ili  $b$  vrijednost, prenosi na štednju. Dakle, iznos uštede treba da bude jednak  $(1 - b)W = c_1W$ . Dalje,  $C = a + bY + c_1W(H) = a + bY + (1 - b)W(H)$ , što u konačnici daje  $b + c_1 = b + (1 - b) = 1$ , isto kao i u našem metodološkom pristupu. Takođe, mogli bismo doći do istih zaključaka koristeći zamjenu  $f = c_{\omega_1}a = \text{const.}$  Posljedično, imamo  $C = C_{KCF} + c_{\omega_2}W_H = (c_{\omega_1}a + c_{\omega_1}Y) + c_{\omega_2}W_H = f + c_{\omega_1}Y + c_{\omega_2}W_H \approx c_{\omega_1}Y_H + c_{\omega_2}W_H$  {gdje važi  $(c_{\omega_1}Y_H + c_{\omega_2}W_H) \gg f = c_{\omega_1}a\}$   $= c_{\omega_1}Y_H + (1 - c_{\omega_1})W_H$ , što dalje i iznova implicira  $\Rightarrow c_{\omega_1} + c_{\omega_2} = 1$ , tačno u tački  $T$ ! Spojili smo radnike iz EU i vlasnike imovine iz Chiarella et al. [27], te shodno tome postoji štednja u obje kategorije. Međutim, u posljednjih 10 do 15 godina pomenuta tačka  $T$  je (nažalost) mnogo realniji „scenario” životnog standarda, i to za većinu stanovništva diljem EU. Nivo štednje u EU28 je pao sa 12,80% u 2009. na 10,67% u 2019.<sup>131</sup> Naknade socijalnog osiguranja za nezaposlene u EU uglavnom traju do godinu dana. Očekuje se da bi neko mogao (i trebao) da nađe posao u roku od jedne godine. Postoje razlike u odnosu na to koliko dugo traju naknade za nezaposlene u EU28. Zbog pomenutog, koristimo prosječnu vrijednost na nivou EU28. Odnos prosječnog bogatstva i jednogodišnje prosječne potrošnje jednak je 6,85 puta, shodno tome koeficijenti  $c_{\omega_1}$  i  $c_{\omega_2}$  imaju vrednosti  $c_{\omega_1} = 0,8726$  i  $c_{\omega_2} = 0,1274$ . U prosjeku, nezaposleni građanin EU – bez prihoda i socijalne pomoći, može da „preživi” oko 7 godina, pod pretpostavkama da je radio prije toga cijeli život, zaradio određenu uštedevinu, te da ima određena ulaganja i posjeduje nekretninu(e). Od ključne je važnosti napomenuti da nemaju svi građani EU posljednje pomenute kvalifikacije u pogledu raznolikosti i posjedovanja bogatstva. Uzimajući u obzir prosječnu stopu *međuvremenske (intertemporalne) razmjene bogatstva* (engl. intertemporal wealth distribution), imamo preciznu predmetnu procjenu. *Intertemporalna razmjena bogatstva* pokazuje da mlađi radnici imaju manje akumuliranog bogatstva, ali

<sup>130</sup> U disertaciji definišemo  $W$  (*imetak ili bogatstvo*) kao ekonomski kompleksnu promjenjivu, vidi jednačinu (15) i povezane termine za detaljno objašnjenje. Dodatno, pošto se radi o ekonomskim sinonimima, u budućem tekstu koristiće se jedino oznaka *imetak*.

<sup>131</sup> Izvor: <https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00131/default/table>

imaju pristojan raspoloživi prihod. Pored toga, imaju visoku ličnu i profesionalnu mobilnost, odnosno raznovrsnije izgleda za nastavak željene karijere u slučaju iznenadne nezaposlenosti. Razlog za pomenuto je najčešće zbog fizičke snage i/ili poznavanja novih IT rješenja, koja su danas neophodna, tj. u velikoj mjeri se koriste i zastupljena su na svakom savremenom radnom mjestu. Radnici srednjih godina imaju prosječno bogatstvo, koje karakteriše nešto uštedevine i djelimično plaćene nekretnine, dok najstariji radnici imaju najviše akumuliranog bogatstva, često uključujući štednju, investicije i nekretnine. „Domaćinstvo” može imati različite definicije. Prema statističkoj definiciji Eurostata, koristimo najčešće zastupljenu [25]. Domaćinstva EU28 imaju u prosjeku dva zaposlena člana domaćinstva, a to važi za porodice sa ili bez djece. Prosječno domaćinstvo ima tri ili četiri člana. Pored toga, 87% porodica sa djecom ima jedno ili dvoje dece koja žive sa roditeljima [25]. Pri određivanju bruto i neto plate domaćinstva koristimo ponderisani prosjek prihoda oba zaposlena člana domaćinstva. Naravno, domaćinstvo će izbjeći situaciju da je potrebno prodati stan/kuću da bi pokrilo svakodnevne troškove života. Međutim, u disertaciji smo istraživali otpornost domaćinstva, odnosno sposobnost domaćinstva da „preživi” kada koristi sva raspoloživa sredstva za pokrivanje životnih troškova. Nasuprot tome, postavlja se glavno pitanje **kakva je dinamika, kvalitativna i kvantitativna, između  $Y_H$ ,  $W_H$ , i  $C_H$ ?** Povezano, stvarni podaci su inkorporirani u formule Chiarella et al., te tako pružaju inkrementalni naučni doprinos njihovom početnom i visokoteorijskom modelu (sistemima jednačina). Putem NDA, istraživali smo povezanost između kvalitativnih i kvantitativnih karakteristika funkcionalnih zavisnosti u faznom prostoru za pomenute stvarne podatke odnosno varijable. Na primjer, pošto je definisani fazni prostor nepromijenjiv za određeni sistem jednačina, zaključujemo da vrijednosti varijabli prikazanih putem orbita ili trajektorija u prostoru stanja konvergiraju/divergiraju prema određenoj konkretnoj vrijednosti – što predstavlja kvantitativni zaključak. Istovremeno, ukoliko pomenuta vrijednost postaje stabilna/nestabilna u vremenu, navedeno predstavlja kvalitativni zaključak. Prezetnovano se dobija, odnosno je moguće, uslijed promjena (engl. *sweep*) parametara sistema (tj. promjenom vrijednosti koeficijenata  $C(ij)$ ) – što je i bio osnovni cilj ovog istraživanja odnosno primijenjene metodologije.

## 4.5 EViews i kreiranje SNDJPR

Podaci korišćeni u istraživanju potiču iz dva glavna izvora podataka u EU: Eurostata i Evropske centralne banke (ECB), tj. njene baze podataka pod nazivom Storage Data Warehouse (SDW). SDW je javni naziv za statističku bazu podataka ECB-a, i obje baze su javne i besplatne.[197]

Metodologija sprovedena u istraživanju sastoji se od nekoliko postupaka. Prvo, definišemo polinomni oblik svih promjenljivih u jednačinama (1) do (16) prilagođavanjem (engl. *fitovanjem*) posmatranih podataka korišćenjem *Vandermondove metode matricnih koeficijenata*. Kombinujući dobijene polinomne izraze za egzogene varijable u (1) do (16), dobijamo konačne polinomne izraze za endogene varijable. Nakon formiranja konačnih polinomskih oblika za  $Y_H$ ,  $W_H$ , i  $C_H$ , proširujemo početni skup podataka koristeći dobijene polinomske funkcije da bismo definisali dodatne vrijednosti za endogene promjenljive. U tom trenutku primjenjujemo ekonometrijsku metodu *nelinearnih najmanjih kvadrata* (NNK) na novo-generisanim i proširenim skupovima endogenih varijabli.

Naredno je prikazana univerzalna jednačina, a koja služi kao početna jednačina u estimaciji 3D modela u regresionoj analizi NNK u EViews softveru, kada se koriste sve tri jednačine za varijable  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Odnosno za 2D modele, koriste se samo prve dvije jednačine, odnosno one koje su navedene za  $x$  i  $y$ . Ukratko, prilikom određivanja 2D modela primjenjuju se prve dvije jednačine, dok se pri određivanju koeficijenata 3D sistema koriste sve tri ponuđene jednačbe. Nadalje, za ovdje prezentovane i izučavane 4D i 7D sisteme se koristi poseban i namjenski opet univerzalni sistem jednačina (za evaluaciju, tj. regresionu analizu). Pomenuti pristup omogućuje prilagodljivost analize i metodologije ovisno o potrebama istraživanja, gdje se koriste različite kombinacije jednačbi – ovisno o dimenzionalnosti modela (2D, 3D, 4D ili 7D).

Pomenuti aspekt predstavlja dodatni kvalitet istraživanja, budući da se, koristeći potpuno nezavisne sisteme jednačina, zajedno s primjenom NDA, dobija kvalitativna i kvantitativna analiza koja je potpuno komplementarna. Konzistentni zaključci proizlaze iz

analize koja je provedena nad različitim, ali međusobno povezanim sistemima, čime se dodatno potvrđuje valjanost rezultata.

Izgled početnog „obrasca” za definisanje 3D NNK regresionih sistema se vrši na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\dot{x} = & c(11) + c(12)x + c(13)y + c(14)z + c(15)x^2 + c(16)y^2 + c(17)z^2 \\ & + c(111)x^2y + c(115)z^2x + c(117)xy + c(119)xz \\ & + c(120)x^2y^2 + c(121)z^2x^2 + c(122)z^2y^2 + c(123)x^3y^3 \\ & + c(124)y^3z^3 + c(125)x^3z^3 + c(126)x^4 + c(127)y^4 \\ & + c(128)z^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} = & c(21) + c(22)x + c(23)y + c(24)z + c(25)x^2 + c(26)y^2 + c(27)z^2 \\ & + c(28)x^3 + c(29)y^3 + c(210)z^3 + c(211)x^2y + c(212)y^2x \\ & + c(213)x^2z + c(214)y^2z + c(215)z^2x + c(216)z^2y \\ & + c(217)xy + c(218)yz + c(219)xz + c(220)x^2y^2 \\ & + c(221)z^2x^2 + c(222)z^2y^2 + c(223)x^3y^3 + c(224)y^3z^3 \\ & + c(225)x^3z^3 + c(226)x^4 + c(227)y^4 + c(228)z^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} = & c(31) + c(32)x + c(33)y + c(34)z + c(35)x^2 + c(36)y^2 + c(37)z^2 \\ & + c(38)x^3 + c(39)y^3 + c(310)z^3 + c(311)x^2y + c(312)y^2x \\ & + c(313)x^2z + c(314)y^2z + c(315)z^2x + c(316)z^2y \\ & + c(317)xy + c(318)yz + c(319)xz + c(320)x^2y^2 \\ & + c(321)z^2x^2 + c(322)z^2y^2 + c(323)x^3y^3 + c(324)y^3z^3 \\ & + c(325)x^3z^3 + c(326)x^4 + c(327)y^4 + c(328)z^4\end{aligned}$$

Primjena gore navedenog obrasca je korištena kod svih NNK regresionih određivanja za 3D sisteme, i koji su izučavani u okviru disertacije. Prethodne jednačine ne numerišemo kao ostale jednačine u disertaciji upravo zato što se radi o obrascu određivanja NNK regresije(a). Istovremeno, definišemo regresije derivativa (izvoda) prvog reda za uključene varijable. Sve regresije smo definisali nezavisno jednu od druge, a dodatno postoje i različite



kombinacije endogenih varijabli za 2D i 3D sisteme. Sljedeće polinomne funkcije<sup>132</sup> se koriste za izračunavanje promjenljivih:

$$x(t_s) = Y_H(t_s) = \sum_{\alpha=1}^r P_{1\alpha}^{(\gamma)}(t_s) \quad (17)$$

$$y(t_s) = W_H(t_s) = \sum_{\beta=1}^d P_{2\beta}^{(\delta)}(t_s) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} z(t_s) &= C_H(t_s) = c_{\omega 1} Y_H(t_s) + c_{\omega 2} W_H(t_s) \\ &= c_{\omega 1} \sum_{\alpha=1}^r P_{1\alpha}^{(\gamma)}(t_s) + c_{\omega 2} \sum_{\beta=1}^d P_{2\beta}^{(\delta)}(t_s) \end{aligned} \quad (19)$$

Primjer kreiranih polinomnih funkcija sa jednačinama (17) do (19) navodimo jedino sa ciljem uvida u iste i nećemo ih numerisati iz pomenutog razloga, jer postoji preko 50 sličnih, odnosno na isti način određenih, jednačina u okviru istraživanja. Dodatno, prezentovane polinomne funkcije odgovaraju sistemu  $Y_H$ – $W_H$ – $C_H$ , pri tome nismo ni prikazali pripadajuće prve izvode varijabli od interesa, koji su takođe korišteni paralelno u pomenutom istraživanju.

Iz Eurostata precizno koristimo vrijednosti za 23 egzogene varijable, odnosno 23 vremenske serije koje smo preuzeli iz Eurostata i/ili SDW. Podaci su korišteni tamo gdje su bili dostupni i imali odgovarajuću vremensku dužinu (2005–2019), ili praktično prikladnu dimenziju za potrebe ovog istraživanja (npr. m01-m12, Q1-Q4, y2005, itd.). U slučajevima gdje su podaci bili kvartalni ili mjesečni, konvertirani su u godišnje kako bi se očuvala konzistentnost s ostalim podacima. Većinom, neki podaci (varijable) su dostupni samo kao godišnje vremenske serije, mada su neki podaci također bili dostupni u drugim frekvencijama, iako su takvi slučajevi bili manje učestali.

Koeficijenti  $C(ij)$  su dobijeni primjenom NNK regresione analize. Predmetni koeficijenti proistekli su iz primjene NNK nad podacima koji su prethodno izračunati polinomnim formama u jednačinama 14-16. Postupak uključuje polinomno prilagođavanje i

<sup>132</sup> Polinomni izrazi za endogene varijable su 28., 14. i 7. stepena i imaju sve članove. Slično je i za sve egzogene varijable. Svi koeficijenti u takvim izrazima imaju najmanje 54 (ili više) cifara, zbog *dvostruke preciznosti* izračunavanja (engl. *double-precision*). Koristimo *dvostruku preciznost* kako bi proučavali efekte kako mala promjena/perturbacija u nekim djelovima može uticati na sistem u cjelini.



umetanje dobijenih formula u konačne jednačine 14-16, koristeći metodologiju opisanu u jednačinama 17-19. Disertacija koristi inovativni pristup primjenom NNK, ali samo za određivanje složenih neravnoteža u okviru dinamike promjena vrijednosti varijabli. NNK se ne koristi dalje za ekonometrijsku analizu. Važno je napomenuti da određeni koeficijenti  $C(ij)$  ne odgovaraju uvijek samo jednoj endogenoj varijabli, već predstavljaju kombinaciju dviju varijabli s eksponentima, što suštinski i matematički označava brzinu promjene jedne varijable u odnosu na drugu, kvadrat vrijednosti, kub vrijednosti, ili slično. U principu, u jednačinama 14-16 endogene varijable modeliraju vlastite promjene putem NNK regresije, što je osnovna karakteristika ove metodologije. Povezano, vrijednosti egzogenih varijabli unaprijed su uključene u izraze i vrijednosti endogenih varijabli putem polinomnog prilagođavanja odnosno uključivanja istih u građenje pomenute polinomne forme.

Izrazi za agregatno–raspoloživi (ukupni) dohodak i imetak EU28 stanovništva glase:

$$\begin{aligned} Y_H = & -0,00000000019729897273033679590810752123673 x^{28} + \\ & 0,000000034484652573826368563869048704596 x^{27} - \\ & 0,0000028611347275741144441826111471358 x^{26} + \\ & 0,0001499028335902316179372318744891 x^{25} - \\ & 0.0055656530255657553991680031333431 x^{24} + \\ & 0,15577983263179830334668677491671 x^{23} - \\ & 3,4137878058519884005608115999539 x^{22} + \\ & 60,049051377135689878750225092877 x^{21} - \\ & 862,36641719921807635667015069626 x^{20} + \\ & 10229,129931896571368274287804793 x^{19} - \\ & 100984,13118594789043099763891726 x^{18} + \\ & 833236,26423464457542167210476283 x^{17} - \\ & 5750929,4196390024341236167655561 x^{16} + \\ & 33089748,816307611991065203699257 x^{15} - \\ & 157177945,37095455211729091456613 x^{14} + \\ & 603236990,16703781309760695558143 x^{13} - \\ & 1784356721,7601717188151822481959 x^{12} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &0,0000000000029788630660929626969846140127629 x^{22} + \\
 &0,00000000005239865846220199330218747491017 x^{21} - \\
 &0,00000000075249887096967518118617590516806 x^{20} + \\
 &0,0000000089259142879819228255655616521835 x^{19} - \\
 &0,00000008811851109657085908111184835434 x^{18} + \\
 &0,00000072707996923622372560203075408936 x^{17} - \\
 &0,0000050182472426971988752484321594238 x^{16} + \\
 &0,000028874035593607064336538314819336 x^{15} - \\
 &0,00013715309881513300538063049316406 x^{14} + \\
 &0,00052638315334927517175674438476563 x^{13} - \\
 &0,0015570254032996423244476318359375 x^{12} + \\
 &0,003168993928624365329742431640625 x^{11} - \\
 &0,003377047098045392513275146484375 x^{10} + \\
 &0,0085885142940151271820068359375 x^9 - \\
 &0,147316277372095611572265625 x^8 + 1,202792898693933837890625 x^7 - \\
 &5,8877901716221787109375 x^6 + 19,187743345893546875 x^5 - \\
 &41,841558451069578125 x^4 + 57,332931951733375 x^3 - \\
 &41,635623434475140625 x^2 + 10,17288650759783203125 x + \\
 &21,8936156926076328125;
 \end{aligned}$$

U indeksima (17) do (19),  $s$  je broj novodefinisanih vremenskih intervala (produženje prvobitnog vremenskog intervala), a  $s = 132$  (broj mjeseci u 11 godina);  $a$  i  $b$  predstavljaju broj egzogenih varijabli uključenih u model,  $r = 16$  i  $d = 7$ ;  $g$  i  $d$  predstavljaju najviši red polinoma najbolje aproksimacije vrijednosti varijable (engl. *fit*), odnosno jednačine (17) i (18), respektivno, gdje je  $g = 28$ , i  $d = 7$ . Odgovarajući izvodi po vremenu za (17) i (18), su (22) i (23). Linearna kombinacija (22) i (23) definiše (24).

$$\dot{x} = \dot{Y}_H = \sum_{\alpha=1}^r P_{1\alpha}^{(Y-1)}(t_s) \quad (22)$$

$$\dot{y} = \dot{W}_H = \sum_{\beta=1}^d P_{2\beta}^{(\delta-1)}(t_s) \quad (23)$$

$$\dot{z} = c_{\omega 1} \sum_{\alpha=1}^r P_{1\alpha}^{(\gamma-1)}(t_s) + c_{\omega 2} \sum_{\beta=1}^d P_{2\beta}^{(\delta-1)}(t_s) \quad (24)$$

Novi (prošireni) skup(ovi) endogenih varijabli sada ima 132 koraka koji odgovaraju 132 perioda, ili 11 godina (2005–2015) pomnoženo sa 12 meseci. EViews softver je implementiran na novom proširenom skupu za definisanje NODE sistema korišćenjem ranije prezentovane NNK metode [17][26][21][165][83][84][165].

#### 4.5.1 Kreiranje 2D modela za $Y_H - W_H$ , $Y_H - C_H$ i $W_H - C_H$

Predstavljene 2D sisteme formiramo kombinovanjem vrednosti endogenih varijabli  $Y_H$ ,  $W_H$ , i  $C_H$  u regresijama. Kombinacije su  $Y_H - W_H$ ,  $Y_H - C_H$ , and  $W_H - C_H$ . Prvi model, sistem u 2D, za  $Y_H - W_H$  je

$$\begin{aligned} \dot{x} = & 6,60849150292 y - 0,0387159096202 y^2 + 0,901965701492 x^2 y - 4,7914410614e-05 y^2 \\ & + 0,0345166029752 y^2 x - 4,81428296836 x y - 0,00707981334326 x^2 y^2 + \\ & 1,30400617517e-06 x^3 y^3 - 0,289160634084 x^4 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -789,360304346 y - 7278,75059057 x^2 + 2,00654476396 y^2 + 1895,0078082 x^3 + \\ & 0,0116097917941 y^3 - 142,108117291 x^2 y - 4,24755739138 y^2 x + 840,915109404 x y + \\ & 0,818695258119 x^2 y^2 - 0,00012009371033 x^3 y^3 - 80,9908881783 x^4 \end{aligned} \quad (26)$$

Visoke vrijednosti R-kvadrata mogu ukazivati na rezultate „lažne regresije” (engl. *spurious regression*).<sup>133</sup> U ovom istraživanju (sistemu) to nije slučaj. Testirali smo na *stacionarnost* i *rezidualne* (engl. *residuals*) za sve 2D i 3D sisteme. Rezultati se dobijaju primjenom testa jediničnog korijena korišćenjem Augmented Dickey–Fuller (ADF) testa na: *nivou*, *prvoj diferenci* ili *drugoј diferenci* – kada i kako je to bilo potrebno spram karakteristika konkretnog sistema; odnosno sa *varijacijama opcija presjeka* i/ili *trenda*; podešenim na ispitivanje sa Švarcovim informativnim kriterijumom (Schwartz Information Criterion) na 12 kašnjenja (*docnji* ili tzv. *lagova*) ili koristeći Kviatkovski–Fillips–Šmit–Šin

<sup>133</sup> Naime, korelacija dohotka, imetka i potrošnje inherentno postoji, jer veći prihod znači veći imetak i/ili potrošnju, posljedično važi i obrnuto.

test (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin – KPSS test)<sup>134</sup>. U skoro svim slučajevima, rezultati ADF testa pokazuju nestacionarnost *reziduala*. Međutim, rezultati KPSS testa ukazuju na stacionarnost svih reziduala. Dakle, opšti zaključak je da su *reziduali* za 2D i 3D sisteme trend–stacionarni. Otuda odsustvo „lažnosti” u rezultatima regresije i potvrda regresionih izraza.

Dodatno, uradili smo autokorelacione (AC) i djelimične autokorelacione (PAC) testove za sve varijable i rezidualne, i dobili iste rezultate. Ne postoji značajna autokorelacija, osim na prvoj doznici (engl. *lag*), a i tada je manja od jedan za sve predmetne varijable. Relativno visoka preciznost *fitovanja* predmetnih varijabli je uslijed toga što se u istraživanju koristi polinomno fitovanje visokog reda, za razliku od linearnih i/ili kvadratnih kombinacija aproksimacija vrijednosti varijabli sa ili bez kašnjenja. Dodatno, sa veoma visokom preciznošću koeficijenta polinoma, dobijamo vrlo bliske vrijednosti varijabli njihovim stvarnim vrijednostima (očitanim iz baza podataka). Predstavljena metodologija uvijek generiše regresije sa visokim vrijednostima  $R^2$ .

*P-vrijednosti* u regresijama su nule, jer smo izbacili sve koeficijente sa *p-vrijednostima* koji nisu bili jednaki nuli (iako su se nalazili u prihvatljivim okvirima statističke značajnosti odnosno vjerovatnoće).<sup>135</sup> Svoju odluku smo zasnovali na već postojećem izuzetno dobrom *fitu*, kao i na želji da smanjimo ukupnu složenost na kraju dobijenog modela. Uporedili smo dvije regresije spram „*kvaliteta fita*”, odnosno jednu sa svim *p-vrijednostima* koje imaju statistički nivo prihvatljivosti ispod 5%, i *fit* gdje smo samo koristili nulte vrijednosti *p-koeficijenata*. Kvalitet fitovanja je bio skoro identičan u oba slučaja, pa smo odlučili da regresione izraze učinimo manje komplikovanim za NDA.

Tabela 1 predstavlja prikaz EViews-ovog regresionog snimka ekrana (engl. *screenshot*) za (25) i (26). Primjećujemo relativno visoku vrijednost *R-kvadrata* od 0,914573.

---

<sup>134</sup> Primjenjujemo metode koje je moguće izvesti od predmetnog nivoa testa, pa na više.

<sup>135</sup> Vjerovatnoća beznačajnosti nekog koeficijenta regresije moguće je da se razlikuje od vrijednosti egzaktno nule. Međutim, ista zavisi od inherentno–ograničenog prikaza po broju u aplikaciji, odnosno na 16-bitu čak i kod veće rezolucije numeričkog prikaza rezultatnih vrijednosti u EViews aplikaciji. Prikazana vjerovatnoća je na desetohiljaditu vrijednost, što ne znači nepostojanje još cifara nakon prikazanih u okviru stvarne *p-vrijednost*. Međutim, niže vjerovatnoće od prikazane bile bi na stotinhiljaditu i niže vrijednosti, te u praksi u najvećem broju slučajeva zaista nemaju značaja. Sve navedeno važi i za ovo istraživanje.

Upoređujući dobijenu vrijednost *R-kvadrata* sa rezultatima ekonometrijskih primenjenih istraživanja (koji su obično u rasponu od 0,35 do 0,65), dobijene vrijednosti ukazuju na odlične rezultate [182][165][84].

Tabela 1. EViews NNK (NLLS) regresioni rezultati za (25) i (26)<sup>136</sup>

System: Y_H_W_ H_OMEGA12				
Estimation method: nonlinear least squares				
Date: 31 May 2020. Time: 17:25				
Sample: 2005M01 2015M12				
Included observations: 132				
Total system (balanced) observations: 264				
	Coefficient	Standard error	t-Statistic	Probability
C(13)	6.608492	0.849645	7.777944	0
C(15)	-0.03872	0.004555	-8.49904	0
C(17)	-4.79E-05	8.66E-06	-5.53031	0
C(18)	0.901966	0.13706	6.580788	0
C(19)	0.034517	0.004869	7.089551	0
C(110)	-4.81428	0.688178	-6.99569	0
C(111)	-0.00708	0.001061	-6.67222	0
C(112)	1.30E-06	2.08E-07	6.284052	0
C(113)	-0.28916	0.052133	-5.54658	0
C(23)	-789.36	56.35737	-14.0063	0
C(24)	-7278.75	734.2353	-9.91338	0
C(25)	2.006545	0.38556	5.204228	0
C(26)	1895.008	168.2991	11.25976	0
C(27)	0.01161	0.001293	8.97697	0
C(28)	-142.108	10.45801	-13.5884	0
C(29)	-4.24756	0.296242	-14.3381	0
C(210)	840.9151	59.11406	14.2253	0
C(211)	0.818695	0.061603	13.28992	0
C(212)	-0.00012	9.93E-06	-12.0885	0
C(213)	-80.9909	8.90979	-9.0901	0
Determinant residual covariance		0.001427		
Equation: X_DOT = C(13) × Y + C(15) × Y^2 + C(17) × Y^3 + C(18) × X^2 × Y + C(19) × Y^2 × X + C(110) × X × Y + C(111) × X^2 × Y^2 + C(112) × X^3 × Y^3 + C(113) × X^4				
Observations: 132				
R-squared	0.853453	Mean dependent variable		0.172275
Adjusted R-squared	0.843921	S.D. dependent variable		0.153112
SE of regression	0.06049	Sum squared residual		0.45006
Durbin-Watson statistic	0.114087			
Equation: Y_DOT = C(23) × Y + C(24) × X^2 + C(25) × Y^2 + C(26) × X^3 + C(27) × Y^3 + C(28) × X^2 × Y + C(29) × Y^2 × X + C(210) × X × Y + C(211) × X^2 × Y^2 + C(212) × X^3 × Y^3 + C(213) × X^4				
Observations: 132				
R-squared	0.914573	Mean dependent variable		2.237997
Adjusted R-squared	0.907513	SD dependent variable		6.888352
SE of regression	2.094865	Sum squared residual		531.0035
Durbin-Watson statistic	0.104113			

SE: standard error; SD: standard deviation; NLLS: nonlinear least squares.

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>136</sup> Rezultati u tabeli su prikazani na engleskom jeziku, jer je tako i u izvornoj EViews aplikaciji.

Eventualno postojanje multikolinearnosti nije od značaja u ovom istraživanju, jer ne koristimo regresije za analizu uticaja regresora na zavisne varijable, već samo međusobne odnose varijabli u NDA. Dodatno, multikolinearnost ne smanjuje prediktivnu snagu modela, već utiče samo na proračune (određivanje) pojedinačnih parametara regresora. Navedeno je posljedica metodologije i vrste studije–istraživanja u ovoj disertaciji, i nikako ne ukazuje na problem u definiciji regresije. Postoji snažna pozitivna makroekonomska korelacija između  $Y_H$  i  $W_H$ , jer domaćinstva pretvaraju prihod u imetak i/ili povećanje potrošnje. Pod imetkom podrazumijevamo nekretnine, štednju, investicije itd. Nizak prihod znači manje imetka i potrošnje, što očigledno reprezentuje inherentno–postojeću pozitivnu korelaciju među predmetnim endogenim varijablama.

Analiza koeficijenata metodom kovarijansnih elipsi (Covariance Ellipses) ukazuje na odsustvo korelacije u većini slučajeva, i to za sve značajne<sup>137</sup> koeficijente (slika 105).

Centralna tačka ovog istraživanja i metodologije je da se, što je moguće bolje, objasne promjene endogenih varijabli, istim tim varijablama. Pomenuto implicira da bi trebalo da imamo odlične fitove derivata varijabli kombinacijama tih istih varijabli. Sve prezentovano važi samo za makroekonomske varijable koje imaju intrinzičnu i „prirodnu” korelaciju, a u ovoj disertaciji dohodak, imetak i potrošnja imaju vrlo jaku i direktnu ekonomsku vezu. U suštini, za ovo istraživanje, klasična ekonometrijska pravila, koja su obično stroga i obavezujuća za regresije, imaju mnogo manji uticaj, jer će se analiza izvršiti jedino putem NDA u faznom prostoru putem faznih portreta.

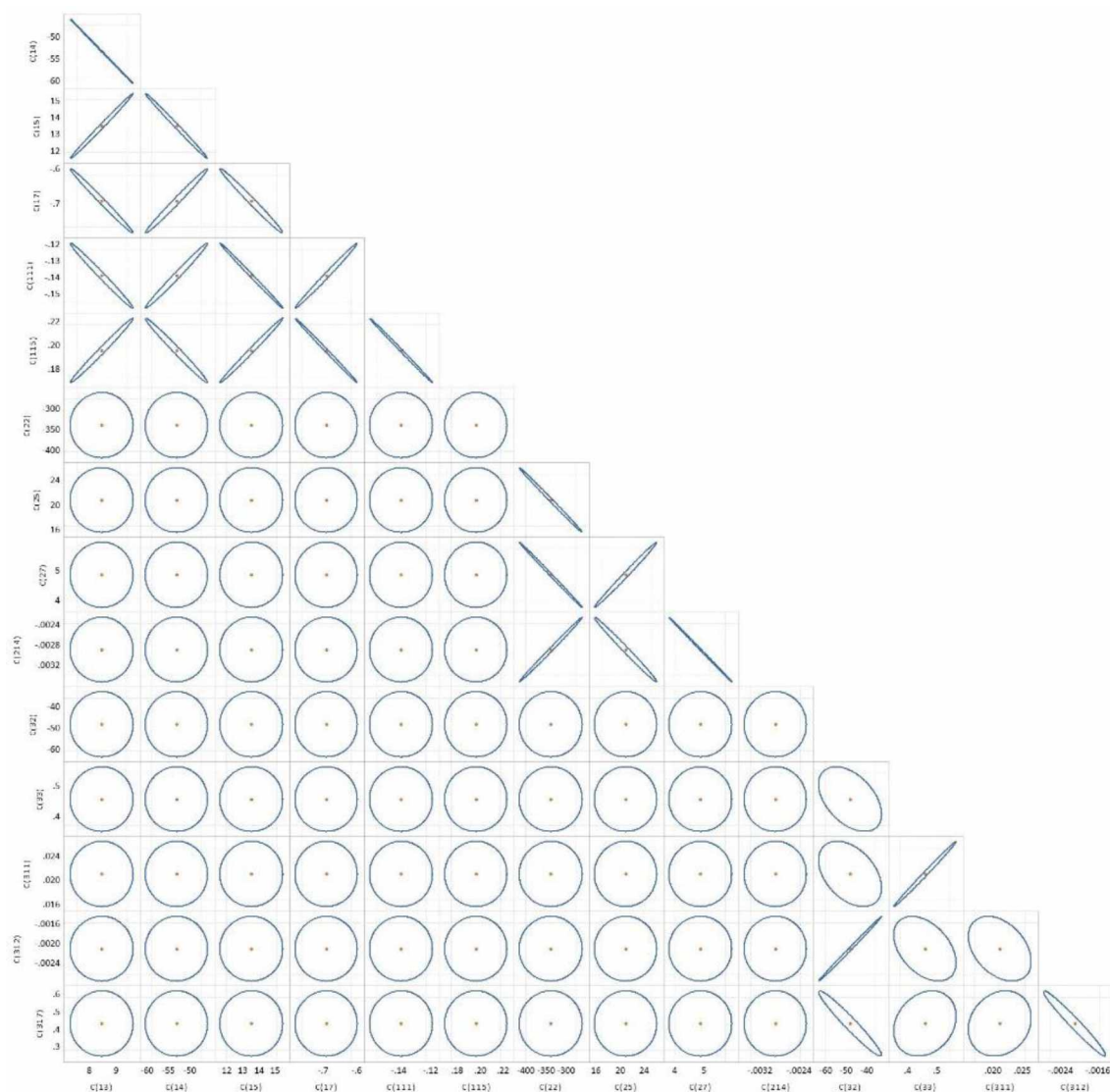
NNK razmatra kombinacije više promenljivih na različitim eksponentima, a ne samo docnje (*lag*) vrijednosti/greške nezavisnih promenljivih. Dodatno, *prilagođeni R-kvadrat* (engl. *adjusted R-squared*) je jednak 0,843921 i 0,907513, i blizu je vrijednosti *R-kvadrata*! Prilagođeni R-kvadrat je regresiona veza sa *stepenima slobode* početnog uzorka i „kažnjava” model za korišćenje beznačajnih nezavisnih varijabli. Male razlike između R-kvadrata i prilagođenog R-kvadrata potvrđuju ukupne rezultate. Standardne greške regresije (S.E.) su

---

<sup>137</sup> Značajnim koeficijentima obično nazivamo regresione koeficijente koji imaju najveću tzv. „težinu”, odnosno indukuju najveće promjene opisne varijable za promjene nezavisnih varijabli.



prikazane na slici 106 (plava linija) i nalaze se u prihvatljivim granicama statističke greške. To jest, S.E. je jednako 2,094865, i često je manje od 3% (slika 106.b).

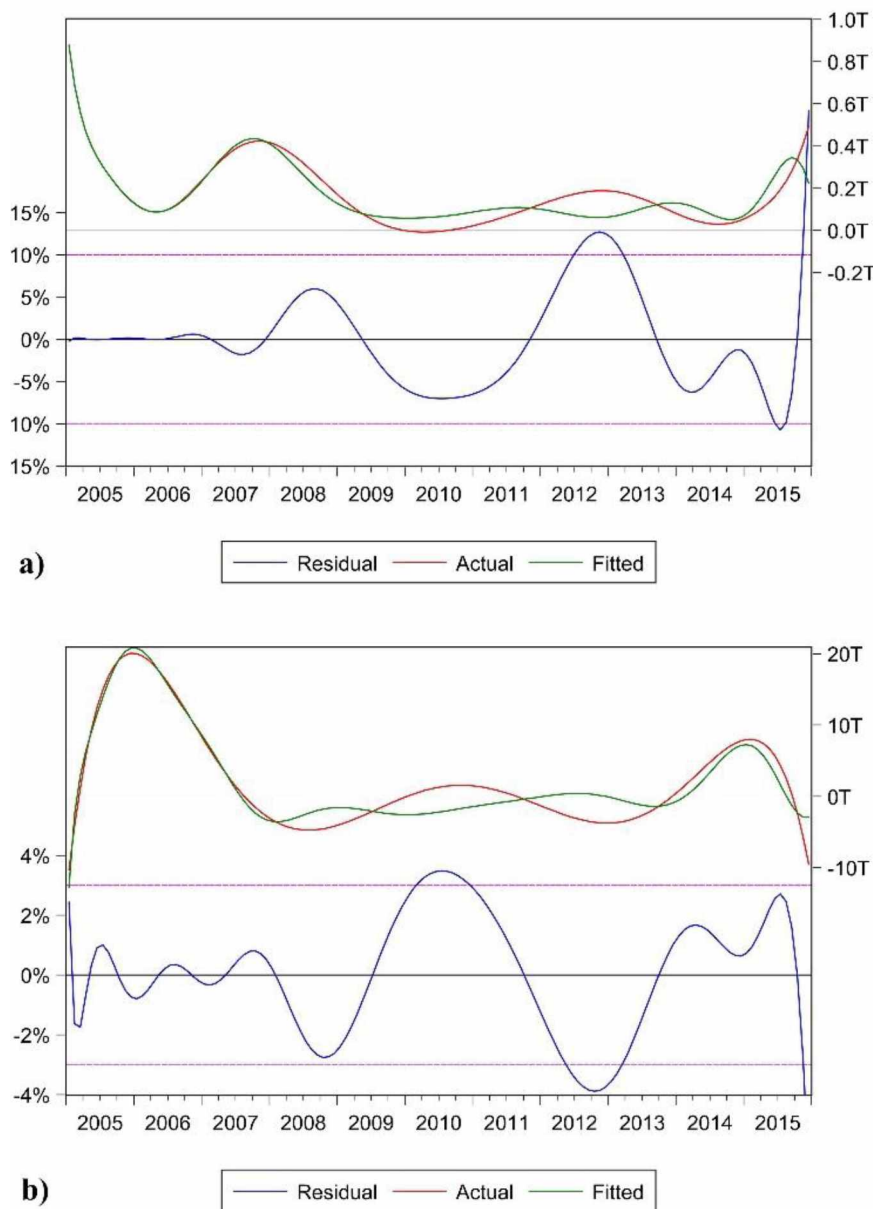


Slika 105. Analiza koeficijentata metodom Kovarijansnih Elipsi (Covariance Ellipses)

za (25) i (26), i prikazuje prihvatljivo prisustvo korelacije

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije





Slika 106. Stvarne (crvene) i prilagođene (zelene) vrijednosti derivativa (prvih izvoda) zavisnih/endogenih varijabli (u trilionima eura)<sup>138</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>138</sup> Desna osa: a) je za  $\dot{x}$  – ukupan raspoloživi dohodak (njegov izvod) stanovništva EU ( $Y_H$ ); b) za  $\dot{y}$  – ukupan imetak (izvod) stanovništva EU ( $W_H$ ). Preostale vrijednosti (plave) su u procentima i koriste lijevu osu u a) i b). Ružičaste isprekidane linije na graficima predstavljaju marginu rezidualne greške od 10% i 3%, za  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$  respektivno.

Prema vrijednosti najviši („najteži”) koeficijenti nemaju korelaciju. Određeni stepen korelacije postoji kod manje značajnih koeficijenata regresije. Posljedično, treba imati u vidu da najviši koeficijent određuje ponašanje glavne krive regresije, dok ostali koeficijenti određuju „fino” podešavanje regresionih vrijednosti.

Važno je napomenuti da, na ivicama prikazanog intervala, modelirane varijable imaju određena izobličenja zbog korelacije stepena slobode početnih skupova podataka – važi za sve varijable uključene u jednačine (1) – (13), i stepena varijable uz najveći koeficijent u polinomnom fitovanju putem Vandermondovih matrica. Pomenuto ne izaziva nikakve nedosljednosti u analizi i zaključcima evolucionih operatora u NDA, jer tok evolucionog operatora ima inherentnu „*inerciju*” ili (u ekonomiji) *ljepljivost*.

Durbin–Watson (engl. Durbin–Watson (DW)) statistička vrijednost je blizu nule ( $DW=0,104113$ ) i ukazuje na postojanje jake pozitivne autokorelacije. Numerički, ako je moguće, NNK će uvijek pokušati da procijeni *do vrijednosti* zavisne promjenljive, a ne da je premaši [165][84]. Nadalje, procjenjujemo derivativ (diferencijal ili izvod, tj. promjenu) endogenih varijabli sa pozitivnim i negativnim predznakom. Posljedično, u korelacionoj matrici imamo jaku korelaciju na prvoj docnji, ali je ista i dalje manja od jedinice. Ostale korelacione vrijednosti na ostalim kašnjenjima (docnjama, ili lag-ovima) su manje od jedan po apsolutnoj vrijednosti. Varijable koje imaju određenu makroekonomsku vezu uvijek pokazuju određeni stepen autokorelacije. U disertaciji pozitivna autokorelacija je bolja i „poželjnija” od negativne autokorelacije. Razlog za navedeno se nalazi u tome da su reziduali uglavnom istog predznaka i na istoj „strani” krive procjene (procijenjene vrijednosti su manje od stvarnih vrijednosti) [21][165][16][22][4][184].

Dodatno, za 3D sisteme imamo prihvatljive vrijednosti *R-kvadrata*, od 0,823086, 0,626367 i 0,675471, respektivno. Takođe, imamo blisku vrijednost DW između sve tri varijable u 3D sistemu. DW vrijednosti u 3D sistemima su slične rezultatima dobijenim kod 2D sistema odnosno važe već prezentovana objašnjenja.

Testirali smo i potvrdili da je  $Y_H$  nestacionarna vremenska serija, dok su njeni reziduali stacionarni. Promenljive  $W_H$  and  $C_H$  su stacionarne, a njihovi reziduali su trend–

stacionarni. Premisa originalnog modela u (16) kod Chiarella et al. ima u svojoj definiciji snažnu linearnu vezu između endogenih varijabli. Dodatno, navedeno ne predstavlja problem vezano za dobijenu DW vrijednost, jer imamo: 1) veoma visoki kvalitet fitovanja za sve varijable korišćenjem polinomnih funkcija; 2) prihvatljivu pozitivnu autokorelaciju zbog neprekoračenja vrijednosti zavisnih varijabli i 3) primjena NNK na relativno širokom skupu proširenih podataka sa *dvostrukom tačnošću (double precision)* [182][165][84].

Nadalje, definišemo 2D sistem za  $Y_H-C_H$ :

$$\dot{x} = 55,8703026552 y - 11,562928349 x^2 - 2,63682532924 y^2 + 7,5099444639 x^2 y + 1,70702523514 y^2 x - 34,8573222842 x y - 0,369944451525 x^2 y^2 + 0,000423242850597 x^3 y^3 - 0,282277778999 x^4 \quad (27)$$

$$\dot{y} = -909,309174717 x - 389,865490323 y + 14,4613766406 y^2 - 63,3218370705 x^2 y - 17,8606213969 y^2 x + 422,923220009 x y + 3,24101958971 x^2 y^2 - 0,00374050131696 x^3 y^3 + 2,91957946299 x^4 + 0,00670249001496 y^4 \quad (28)$$

Dodatno, za  $W_H-C_H$ :

$$\dot{x} = -2199,5782845 x + 19,3111629818 x^2 + 207,78679052 y^2 - 1,93967939814 x^2 y - 8,62819668047 y^2 x + 205,425861465 x y + 0,0715240896809 x^2 y^2 - 2,09639243177e-06 x^3 y^3 \quad (29)$$

$$\dot{y} = -101,273616489 x + 572,743353146 y - 53,6369547603 y^2 + 0,00470259716494 x^3 - 0,0949084413257 x^2 y + 0,338166544961 y^2 x + 10,0365059692 x y + 0,00018293223347 x^2 y^2 \quad (30)$$

Nedostajuće vrijednosti u okviru početnih podataka određene su ekstrapolacijom i/ili interpolacijom korištenjem modifikovane Akima H. [101] metode, sa funkcijom koja se u MATLAB zove *makima*. Makimina metodološka osnova uzima u obzir *apriori* i *aposteriori* vrijednosti podataka, prilikom određivanja vrijednosti koje nedostaju.

Sve 2D, 3D, 4D i 7D sisteme definišemo potpuno nezavisno. Za analizu 2D sistema koristimo *pplane*<sup>139</sup> [42] 140, dok za analizu 3D, 4D i 7D sistema koristimo specijalizovanu aplikaciju pod nazivom MATCONT ver. 7p1 za MATLAB® ver. R2018b [1][140].

Implementacijom primijenjenog numeričkog, grafičkog i bifurkacionog ispitivanja otkrivenih ravnoteža i singulariteta, vršimo dedukcionu analizu za značajne makroekonomske EU varijable.

Indukcijom i sintezom pokušaćemo da predvidimo kvalitativnu i kvantitativnu evoluciju sistema [148][1][25][44][29]. Korištenjem NDA definišemo fazne portrete, rješenja i prostore parametara za poznati protekli period od 2005. do 2015. Godine. Zatim, sa stanovišta modela, upoređujemo dobijene rezultate toka sa „relativnom budućnošću” za godine 2016. do 2019., vršeći uporednu analizu dobijenih vrijednosti.

Podaci za 2020/2021. nisu uključeni u ovo istraživanje. Statistički govoreći, pomenuto je više događaj tipa *crnog labuda* (engl. *Black Swan*) zbog Covid-19 pandemije, nego što je u pitanju „normalno” ponašanje makroekonomskog sistema. Ako je prethodna metodologija adekvatna, i zadovoljava široko postavljene naučni kriterijum o statističkoj (graničnoj) grešci, možemo dalje da vršimo predviđanja o varijabilnim vrijednostima prave budućnosti. Dodatno, vršimo izdvajanje varijabli od interesa i određujemo njihove optimalne NDA (izračunate) vrijednosti, sa ciljem da u budućnosti preporučimo bolje npr. monetarne i/ili fiskalne politike.

NDA je otkrio da broj potencijalno dosljednih i pouzdanih perioda za predviđanje je oko 21 period (tačnije 20,74 perioda). Kao što je istaknuto, univerzalna i jedinstveno prihvaćena definicija haosa ne postoji, ali postulati oko kojih će se svi složiti su: „*Haos* (engl. *chaos*) je aperiodično dugoročno ponašanje u determinističkom sistemu koji pokazuje osjetljivu zavisnost od početnih uslova.” [84] Numerička rešenja za SNDJPR sistem (22) i (24) su prikazana u faznom prostoru.

---

<sup>139</sup> Iouri Kouznetsov (2019). *Pplane9* (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/65887-pplane9-action-input1-input2-input3>), MATLAB Central File Exchange, accessed October 28, 2018.

<sup>140</sup> John C. Polking, DField and PPlane [Computer software]. (1995–2003). Available online: <https://math.rice.edu/~polking/odesoft/dfpp.html>

Korištena NDA metodologija inherentno sadrži u sebi osnov za otkrivanje i tumačenje ključne makroekonomske dinamike. Shodno tome, glavna svrha je da se otkrije osnovna, ali i skrivena (dublja) dinamika koja nastaje otkrivanjem singulariteta i kontinuitetom bifurkacija, a ne „samo” pronalaženjem rješenja (ekvilibrijuma) sistema. Kada se singularitet pojavi u 3D, „nastavljamo” (kontinuuiramo) ga numerički putem *promjene* (engl. *sweep*) parametara. U slučaju 2D sistema analiziramo vezu između trajektorija, početnih i izračunatih (simuliranih) rezultata. Značaj dobijenih rezultata utemeljen je u otkrivanju dubljih i skrivenih dinamika sistema – vezanih za njihov ekonomski smisao, za razliku od relativno bazno–površnog pristupa teorije opšte ravnoteže. Obično je SNDJPR sistem nemoguće analitički riješiti. Zbog toga koristimo simulaciju(e) da odredimo kvalitativno i kvantitativno ponašanje sistema, a da pri tome zapravo sistem i ne rješavamo (analitički)!

Istražujemo pojavu i postojanje haosa u  $C_H$ , jer ista predstavlja rezultujuću vremensku seriju kreiranu pomoću dvije endogene varijable, kao i njihovu direktnu međusobnu interakciju. Posljedično, određivanje prisustva ili odsustva haosa, daje nam odgovor na pitanje koliki je „prozor” pouzdanog predviđanja za 3D sistem(e). Pomenuto je irelevantno, odnosno ne važi za  $Y_H$  i  $W_H$ , tako da ne provjeravamo kaos u tim varijablama.

#### 4.5.2 Kreiranje 3D modela za $Y_H - W_H - C_H$ i $HICP - r_{l10} - Y_H$

Koristeći ranije prezentovane metode određivanja SNDJPR, određujemo sljedeći sistem za agregatne vrijednosti  $Y_H - W_H - C_H$ . Jednačine sa parametrima, koje smo odredili za SNDJPR, i predstavljaju endogene varijable sa njihovim promjenama (derivatima) sistema (modela)  $Y_H - W_H - C_H$  su:

$$\dot{x} = a y + b z + 13,5253578245 x^2 - 0,690104080865 z^2 - 0,138525496665 x^2 y + 0,196119583397 z^2 x \quad (31)$$

$$\dot{y} = c x + 20,9011379499 x^2 + 4,8792373844 z^2 - 0,00287830380623 y^2 z \quad (32)$$

$$\dot{z} = d x + e y + 0,021147547 x^2 y - 0,00209020475075 y^2 x + 0,436778879943 x y \quad (33)$$

Slovne oznake za parametre u (31), (32) i (33) imaju sljedeće početne vrijednosti u tački  $(x_0, y_0)$ :

$$a = 8,45687126471, b = -53,1264586317,$$

$$c = -337,85774025, d = -48,0284342842, i$$

$$e = 0,459277371024.$$

Polazna tačka ili početni uslov za (31), (32) i (33) je  $(x_0(0)-y_0(0)-z_0(0))$ , gde je  $x_0 = 3,4823$ ,  $y_0 = 135,3687$ , i  $z_0 = 20,28491923073593$ . Početna tačka u analizi SNDJPR odgovara vrijednosti endogenih varijabli na kraju prvog perioda/godine. Jasno je i očigledno, da je realnim makroekonomskim varijablama potrebno neko vrijeme da evoluiraju (pad ili rast), odnosno da dostignu svoju konačnu vrijednost za posmatrani period. U svim proračunima vezanim za ovo istraživanje, sa sinhronicitetom, uzimamo u obzir pomenuti jednokratni period zaostajanja odnosno docnju. Prethodno pomenuto ne utiče na kvalitativno i kvantitativno ponašanje SNDJPR i/ili NDA zaključke, zbog svoje relativne prirode. U tabeli 2 možemo vidjeti koje to sve promenljive posjeduju direktne međuzavisnosti u okviru sistemima (31) – (33), odnosno koliko se mijenja vrijednost pojedinih endogenih varijabli za određenu promjenu parametra (koeficijenta).

Tabela 2. Promjena koeficijenata u okviru sistema (31) – (33) sa varijablom na koju utiče

Koeficijent	Utiče na
a	Prihod – promjenom imetka
b	Prihod – promjenom potrošnje
c	Imetak – promjenom prihoda
d	Potrošnja – promjenom dohotka
e	Potrošnja – promjenom imetka

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Postoje situacije kada se dva koeficijenta mijenjaju istovremeno. Na primjer, promjena koeficijenata  $d$  i  $e$  odražava kako promjena dohotka i bogatstva utiče na potrošnju. Moguće su brojne slične kombinacije koeficijenata u okviru sistema (31) – (33); međutim, za pomenuto 3D istraživanje (sistem  $Y_H - W_H - C_H$ ) koristimo jedino koeficijente  $d$  i/ili  $e$  odnosno ispitujemo kako se mijenjaju međuzavisnosti uključenih varijabli. Sve vrijednosti su u trilionima eura (€). Ostali koeficijenti u jednačini (31) predstavljaju brzinu promjene, odnosno koliko brzo promjena apsolutne (kvadrirane) vrijednosti raspoloživog dohotka utiče na sopstvenu konačnu vrijednost ( $x^2$ ); te, kako apsolutna promjena raspoložive potrošnje utiče na raspoloživi dohodak ( $z^2$ ). Jednačine (32) i (33), na sličan način, odgovaraju svojim pripadajućim makroekonomskim značenjima. Proces derivacije modela implementirali smo počevši od svih kombinacija egzogenih varijabli i njihovih odgovarajućih koeficijenata do četvrtog stepena. Dodatno, uklonili smo beznačajne visoke koeficijente *p-vrijednosti* i ponovili proces regresije sve dok se ne ispune statistički i NDA standardi [17][26].

Koristeći ranije prezentovane metode određivanja SNDJPR, određujemo sljedeći sistem za agregatne vrijednosti  $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$ :

$$\dot{x} = a x + b y + c z + 192,343186986 y^2 + 322,072253741 z^2 - 4,50067152028 x^3 - 35,1789402697 y^3 - 35,4343668962 z^3 + 33,8682645197 y^2 x - 1,34930169058 x^2 z + 4,89641521581 y^2 z + 22,4481246513 z^2 y - 132,918990219 x y - 247,329090294 y z \quad (34)$$

$$\dot{y} = d x + e y + f z + 92,6770133508 y^2 + 156,112159879 z^2 - 2,1388435088 x^3 - 17,1636850481 y^3 - 17,1908527664 z^3 + 16,4671115966 y^2 x - 0,777882420498 x^2 z + 2,64558581804 y^2 z + 10,9952532387 z^2 y - 64,0818565311 x y - 121,802834036 y z \quad (35)$$

$$\dot{z} = g x + h y + k z - 24,3719418583 y^2 - 29,1786407713 z^2 + 0,281030944056 x^3 + 3,95589138683 y^3 + 3,37587446282 z^3 + 0,757932397698 x^2 y - 4,4668758516 y^2 x - 0,222167941237 x^2 z + 0,177322795327 z^2 x - 2,98859715485 z^2 y + 17,9326205124 x y + 27,2793928209 y z \quad (36)$$

Slovne oznake za parametre u (34), (35) i (36) imaju sljedeće početne vrijednosti u tački  $(x_0, y_0)$ :

$a = 124,720062414$ ,  $b = 232,251105774$ ,  $c = -663,825354942$ ,

$d = 60,0335542131$ ,  $e = 117,245062308$ ,  $f = -321,152731148$ ,

$g = -20,6316340722$ ,  $k = -13,0921860061$ ,  $h = 55,0547437816$ .

Analogno objašnjenje je za uticaj koeficijenata na pripadajuće varijable u okviru  $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$  sistema, kao što je to bio slučaj kod prethodnog sistema (tabela 2).

#### 4.5.3 Kreiranje 4D modela za $Y_{HS1} - GR_{TOT} - GE_{TOT} - M_H$

Jednačinu (14) možemo podijeliti na dva logička i makroekonomska dijela, odnosno na jednačine (37) i (38). Jednačina (37) predstavljena sa  $Y_{HS1}$  (varijabla  $x_1$ ) uključuje sve agregatne prihode koji su ostvareni putem: 1) dohodovnog kanala, odnosno predstavljaju primanja od sopstvenog rada – i isplaćena u vidu plata i/ili nadnica; 2) penzija; i 3) naknada za nezaposlene. Dok,  $Y_{HS2}$  (varijabla  $x_2$ ) predstavlja agregatne prihode od: 1) kapitalnih dobitaka; 2) štednju po viđenju; i 3) vremenski oročenu štednju do godinu dana (ovaj indikator ćemo koristiti kod 7D sistema). Nadalje,  $GR_{TOT}$  (varijabla  $x_3$ ) predstavlja ukupne prihode po raznim osnovama za „EU vladu” (engl. Government Revenue – GR). Oznaka TOT u indexu upućuje da se radi o ukupnim prihodima EU, ostvarenim po osnovu prikupljenih prihoda od raznih ekonomskih kategorija i agenata (promet, proizvodnja, PDV, itd.). Kao što smo već ranije naveli, „Vlada” (od engleske riječi Government) se smatra kod EU političko-ekonomskog entiteta kao upravljački savjet jedne „države”. Sve političko-ekonomske odluke u EU donosi Evropski savjet (engl. European Council), te se sve pripadajuće EU odluke i Direktive smatraju kao odluka sprovedena od strane supra-nacionalne vlade. Analogno,  $GE_{TOT}$  (varijabla  $x_4$ ) predstavlja ukupnu potrošnju (engl. Government Expenditure – GE), dok znak TOT takođe označava ukupnu vrijednost parametra. Vladina potrošnja (GE) odnosi se na rashode koje EU opredjeljuje za sveukupni razvoj unije, kao što je izgradnja puteva, bolnica, škola, zabavišta, infrastrukture, itd. Naposljetku,  $M_H$  (varijabla  $x_6$ ) označava štednju



po viđenju, ili novac koji je uvijek dostupan građanima EU koji ga posjeduju. Zajedno  $Y_{Hs1}$ ,  $GR_{TOT}$ ,  $GE_{TOT}$  i  $M_H$  predstavljaju finansijsku potentnost EU građanina (monetarni dio EU politika), tj. sa koliko novca može da se raspolaze relativno brzo, a da pritom se ne čeka na ispunjenje ročnosti depozita, kao preferiranog vida štednje u EU. Dodatno, čak i u slučaju oročenih depozita, posmatrali smo  $B_H$  (varijabla  $x_7$ ) depozite do godinu dana ročnosti, što je gledano iz ugla opšteg bankarskog poslovanja kratkoročni oročeni depozit. Naime, posmatramo odnose maksimume likvidnosti svih građana EU, neto likvidnost EU po osnovu razlika priliva i odliva u ekonomiju, sa novcem koji ostaje EU građanima uvijek na raspolaganju. Posljedično imamo:

$$Y_{Hs1} = \{[(1 - \tau_\omega)\alpha_l + \alpha_{GU}\alpha_U]L_1 + \alpha_{GR}\alpha_r L_2\}\omega_G \quad (37)$$

$$Y_{Hs2} = (1 - \tau_c)[r_{KHAV}B_{KHAV} + P_G^*r_{kH}^* + P_G r_{kH}] \quad (38)$$

Dok, su varijable  $x_1 = Y_{Hs1}$ ;  $x_3 = GR_{TOT}$ ;  $x_4 = GE_{TOT}$ ;  $x_6 = M_H$  – iz jednačine (15).

Dolje prezentovano je obrazac za određivanje regresija navedenog 4D sistem. Za ostale promjenjive  $\dot{x}_3$ ,  $\dot{x}_4$ , i  $\dot{x}_6$ , koristimo isti obrazac, jedino što se mijenja izvod odgovarajuće promjenjive na lijevoj strani izraza. Dodatno, potrebno je promijeniti prvi broj oznake trocifrenog koeficijenta, na način da, npr. ako je šesta varijabla u pitanju, nadalje svi koeficijenti za predmetnu varijablu počinju sa brojem šest, odnosno analogno je (isto važi) za sve ostale varijable u slučajevima određivanja njima pripadajućih regresija. Iz razloga racionalnosti, nećemo predstavljati detaljno izraze za sve ostale regresije SNDJPR, i u konačnici cijelog sistema, već samo za  $\dot{x}_1$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 = & c(12) x_1 + c(13) x_3 + c(14) x_4 + c(15) x_1^2 + c(16) x_3^2 + c(17) x_4^2 \\
 & + c(18) x_1^3 + c(19) x_3^3 + c(110) x_4^3 + c(111) x_1^2 x_3 \\
 & + c(112) x_3^2 x_1 + c(113) x_1^2 x_4 + c(114) x_3^2 x_4 + c(115) x_4^2 x_1 \\
 & + c(116) x_4^2 x_3 + c(117) x_1 x_3 + c(118) x_3 x_4 + c(119) x_1 x_4 \\
 & + c(120) x_1^2 x_3^2 + c(121) x_4^2 x_1^2 + c(122) x_4^2 x_3^2 + c(123) x_1^3 x_3^3 \\
 & + c(124) x_3^3 x_4^3 + c(125) x_1^3 x_4^3 + c(126) x_6 + c(127) x_6^2 \\
 & + c(128) x_6^3 + c(129) x_6 x_1 + c(130) x_6 x_3 + c(131) x_6 x_4 \\
 & + c(132) x_6^2 x_1 + c(133) x_6^2 x_3 + c(134) x_6^2 x_4 + c(135) x_6^3 x_1 \\
 & + c(136) x_6^3 x_3 + c(137) x_6^3 x_4 + c(138) x_1^2 x_6 + c(139) x_3^2 x_6 \\
 & + c(140) x_4^2 x_6 + c(141) x_1^3 x_6 + c(142) x_3^3 x_6 + c(143) x_4^3 x_6 \\
 & + c(144) x_6^2 x_1^2 + c(145) x_6^2 x_3^2 + c(146) x_6^2 x_4^2 + c(147) x_6^3 x_1^3 \\
 & + c(148) x_6^3 x_3^3 + c(149) x_6^3 x_4^3
 \end{aligned}$$

Sistem koji isputujemo pomoću MATCONT aplikacije su jednačine (39)–(42), a odgovarajuća početna stanja za uključene varijable u SNDJPR su:  $x_{10} = 3,3521$ ;  $x_{30} = 1,4577$ ;  $x_{40} = 5,3355$ ;  $x_{60} = 1,3549$ . Prezentovana početna stanja odgovaraju stvarnim vrijednostima varijabli i izražena su u trilionima eura. Navedeno važi za sve razmatrane sisteme.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 = & a x_4 + b x_6 + 0,829946191217 x_1^2 + 12,8192343675 x_3^2 - \\
 & 2,18471054511 x_4^2 - 8,72304296072 x_3 x_4 - 4,42265307912 x_3 x_6 + \\
 & 7,14808029541 x_4 x_6 - 2,69585800893 x_3^2 x_1 + 1,49273528232 x_4^2 x_3 - \\
 & 0,503482959823 x_4^2 x_6
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 = & c x_1 + d x_3 - 1,78068958572 x_1^2 - 1,76482936513 x_4^2 - \\
 & 35,7463211487 x_6^2 + 4,54249685761 x_3 x_4 - 0,617137085035 x_1^2 x_3 - \\
 & 1,26649749458 x_6^2 x_3 + 5,93377982168 x_6^2 x_4
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_4 = & -0,618042816341 x_1^2 + 0,0448141068083 x_1^3 - 0,879715250911 x_6^3 + \\
 & 1,61829734919 x_1 x_6 + 0,0490622850677 x_3^2 x_1
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & e x_1 + f x_3 + g x_4 + 0,1405912324 x_4^2 + 3,83844448903 x_1 x_3 + \\ & 0,782945051088 x_3 x_6 - 0,225243533014 x_4 x_6 - 0,291762378432 x_3^2 x_1 - \\ & 0,199863900617 x_4^2 x_3 \end{aligned} \quad (42)$$

Gore navedeni sistem ima više potencijalno promjenjivih parametara. Isti su označeni malim slovima abecede, i taksativno nabrojani:  $a = 9,72102800086$ ;  $b = -17,8500293745$ ;  $c = 24,2863743103$ ;  $d = -17,6712017517$ ;  $e = -5,83845522728$ ;  $f = -6,02597896349$  i  $g = 3,03014548$ . U jedančini (41) nismo definisali parametre, jer u istoj ne postoji slobodni linearan član nijedne varijable SNDJPR. Naime, kvadratni članovi mogu biti analizirani sa svojim promjenama – u okviru matematičke i/ili numeričke analize, međutim eksponent u tim članovima amplificira vrijednosti na nelinearan način u okviru već nelinearnog SNDJPR, što same finalne zaključke čini ambiguitetnim za praktičnu analizu. Posljednje navedno, je naročito značajno za ekonomske, odnosno makroekonomske analize, gdje često imamo promjene znaka diferencijala u oba smjera i to intermitentno. Takođe, pomenuto važi (istovjetno) kod 7D sistema, odnosno konkretno kod jednačine (49). Oba sistema 4D i 7D, su potpuno nezavisno definisani jedan od drugog, u odvojenim numeričkim, regresionim i analitičkim postupcima.

Veći broj definisanih parametara je iz razloga što se ovo istraživanje može lako proširiti. Dodatno, navedeno važi za sve prezentovane i analizirane SNDJPR.

#### 4.5.4 Kreiranje 7D modela za $Y_{HS1} - Y_{HS2} - GR_{(TOT)} - GE_{(TOT)} - T_{(TOT)} - M_H - B_H$

Dolje prezentovano je obrazac za određivanje regresija navedenog 7D sistema. Za ostale promjenjive  $\dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$  i  $\dot{x}_7$ , koristimo isti obrazac, jedino što se mijenja izvod odgovarajuće promjenjive na lijevoj strani izraza. Dodatno, potrebno je promijeniti prvi broj oznake trocifrenog koeficijenta, na način da, npr. ako je četvrta varijabla u pitanju, nadalje svi koeficijenti za predmetnu varijablu počinju sa brojem četiri, odnosno analogno je (isto važi) za sve ostale varijable u slučajevima određivanja njima pripadajućih regresija. Iz razloga racionalnosti, nećemo predstavljati detaljno izraze za sve ostale regresije SNDJPR, i u konačnici cijelog sistema, već samo za  $\dot{x}_1$ . Od uključenih varijabli u 7D sistem, ostala nam

je još nepomenuta  $T_{TOT}$  (varijabla  $x_5$ ), koja predstavlja ukupno prikupljene poreze (fiskalni dio EU politika) od strane „EU vlade”. Jedna od ključnih premisa ove disertacije je posmatranje, odnosno tretiranje, EU kao jednog i jedinstvenog političko-ekonomskog sistema. EU snaga i vrijednost, se upravo baziraju i oslanjaju na pomenuto. Napominjemo, da smo u prethodnom poglavlju definisali sve ostale jednačine.

Važi:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 = & c(101) x_1 + c(102) x_2 + c(103) x_3 + c(104) x_4 + c(105) x_5 \\
 & + c(106) x_6 + c(107) x_7 + \\
 & c(108) x_1^2 + c(109) x_2^2 + c(110) x_3^2 + c(111) x_4^2 + c(112) x_5^2 + c(113) x_6^2 \\
 & + c(114) x_7^2 + \\
 & c(115) x_1^3 + c(116) x_2^3 + c(117) x_3^3 + c(118) x_4^3 + c(119) x_5^3 + c(120) x_6^3 \\
 & + c(121) x_7^3 + \\
 & c(131) x_1 x_2 + c(132) x_1 x_3 + c(133) x_1 x_4 + c(134) x_1 x_5 + c(135) x_1 x_6 \\
 & + c(136) x_1 x_7 + \\
 & c(137) x_2 x_3 + c(138) x_2 x_4 + c(140) x_2 x_5 + c(141) x_2 x_6 + c(142) x_2 x_7 + \\
 & c(143) x_3 x_4 + c(144) x_3 x_5 + c(145) x_3 x_6 + c(146) x_3 x_7 + \\
 & c(137) x_4 x_5 + c(138) x_4 x_6 + c(139) x_4 x_7 + \\
 & c(147) x_5 x_6 + c(148) x_5 x_7 + \\
 & c(149) x_6 x_7 + \\
 & c(151) x_1^2 x_2 + c(152) x_1^2 x_3 + c(153) x_1^2 x_4 + c(154) x_1^2 x_5 + c(155) x_1^2 x_6 \\
 & + c(156) x_1^2 x_7 + \\
 & c(157) x_2^2 x_1 + c(158) x_2^2 x_3 + c(159) x_2^2 x_4 + c(160) x_2^2 x_5 + c(161) x_2^2 x_6 \\
 & + c(162) x_2^2 x_7 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c(163)x_3^2 x_1 + c(164)x_3^2 x_2 + c(165)x_3^2 x_4 + c(166)x_3^2 x_5 + c(167)x_3^2 x_6 \\
& \quad + c(168)x_3^2 x_7 + \\
& c(169)x_4^2 x_1 + c(170)x_4^2 x_2 + c(171)x_4^2 x_3 + c(172)x_4^2 x_5 + c(173)x_4^2 x_6 \\
& \quad + c(174)x_4^2 x_7 + \\
& c(175)x_5^2 x_1 + c(176)x_5^2 x_2 + c(177)x_5^2 x_3 + c(178)x_5^2 x_4 + c(179)x_5^2 x_6 \\
& \quad + c(180)x_5^2 x_7 + \\
& c(181)x_6^2 x_1 + c(182)x_6^2 x_2 + c(183)x_6^2 x_3 + c(184)x_6^2 x_4 + c(185)x_6^2 x_5 \\
& \quad + c(186)x_6^2 x_7 + \\
& c(187)x_7^2 x_1 + c(188)x_7^2 x_2 + c(189)x_7^2 x_3 + c(190)x_7^2 x_4 + c(191)x_7^2 x_5 \\
& \quad + c(192)x_7^2 x_6
\end{aligned}$$

Sistem koji isputujemo pomoću MATCONT aplikacije su jednačine (43)–(49), a odgovarajuća početna stanja za uključene varijable u SNDJPR su:  $x_{10} = 3,3521$ ;  $x_{20} = 0,1301$ ;  $x_{30} = 1,4577$ ;  $x_{40} = 5,3355$ ;  $x_{50} = 0,9623$ ;  $x_{60} = 1,3549$ ;  $x_{70} = 0,0984$ . Prezentovana početna stanja, odgovaraju stvarnim vrijednostima varijabli i izražena su u trilionima eura. Regresija određena za 7D sistem je:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 = & a x_4 + b x_6 + 0,332402361178 x_1^2 - 5,7645973016 x_3^2 + \\
& 2,36448313626 x_4^2 + 1,33322306511 x_2 x_7 + 8,58030950988 x_3 x_4 - \\
& 14,3806990461 x_3 x_6 - 23,8545083676 x_4 x_6 + 2,08495277511 x_6 x_7 - \\
& 0,607817651404 x_1^2 x_5 + 1,01379464181 x_3^2 x_1 + 0,928841266628 x_3^2 x_5 - \\
& 0,717761761535 x_4^2 x_3 + 1,38884674326 x_4^2 x_6 - 0,369535433906 x_5^2 x_4 + \\
& 4,80157668318 x_6^2 x_5
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 = & c x_1 + d x_5 - 1,6161201336 x_4^2 + 1,85163173338 x_6^2 + \\
& 3,74422903896 x_5^3 - 29,3628292051 x_1 x_7 - 1,30734955936 x_2 x_4 + \\
& 11,1958432851 x_2 x_6 + 80,3293544708 x_3 x_7 - 15,8673618412 x_5 x_6 - \\
& 0,446346907377 x_1^2 x_2 - 3,34315237196 x_3^2 x_4 + 2,01129707014 x_4^2 x_3 -
\end{aligned}$$

$$2,42910135131 x_5^2 x_1 - 10,0749546012 x_5^2 x_4 + 41,871425792 x_5^2 x_6 - 6,12654546375 x_6^2 x_3 + 3,6075010237 x_7^2 x_1 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & e x_1 + f x_3 + g x_7 - 1,04883204034 x_1^2 - 1,21859995971 x_4^2 - \\ & 25,1321928448 x_6^2 + 11,1357247876 x_7^2 - 0,27223784534 x_2 x_5 + \\ & 10,0548890857 x_3 x_4 - 1,15126960207 x_1^2 x_3 + 1,12496889489 x_1^2 x_5 - \\ & 0,624088611702 x_2^2 x_3 + 0,229969819277 x_2^2 x_4 - 1,78286440379 x_3^2 x_5 - \\ & 0,913833198278 x_4^2 x_5 + 4,85821711411 x_5^2 x_6 - 2,07256639453 x_6^2 x_3 + \\ & 4,19207830094 x_6^2 x_4 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & h x_6 + k x_7 - 0,0504727255799 x_1^2 - 0,0115792919189 x_1^3 - \\ & 0,386840851865 x_6^3 + 0,755197887393 x_1 x_6 - 0,0504823950928 x_2 x_6 + \\ & 0,867033267636 x_3 x_5 + 0,0772956934238 x_3^2 x_1 + 0,577594612111 x_3^2 x_5 + \\ & 0,0274094687281 x_4^2 x_5 - 0,635125244944 x_5^2 x_3 - 0,339477398928 x_5^2 x_4 - \\ & 0,10468093749 x_6^2 x_3 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = & m x_3 + p x_7 - 38,8592397684 x_3^2 + 10,4776650421 x_3 x_4 + \\ & 49,644932035 x_3 x_5 - 1,71019167377 x_3 x_6 + 0,0620682443479 x_1^2 x_4 - \\ & 0,941614149578 x_1^2 x_5 + 0,429718827856 x_2^2 x_5 + 1,8085721988 x_3^2 x_1 + \\ & 2,58141245785 x_3^2 x_4 - 0,978029011645 x_4^2 x_3 - 3,71191019434 x_5^2 x_3 - \\ & 3,57953395101 x_5^2 x_4 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & q x_1 + r x_3 + s x_4 - 0,214941415959 x_4^2 + 3,99957441534 x_1 x_3 - \\ & 3,93395007699 x_1 x_5 + 0,0224807145564 x_2 x_3 - 6,83775028222 x_3 x_6 + \\ & 0,0224807145564 x_4 x_5 + 0,357705170195 x_4 x_6 + 9,02701402421 x_5 x_6 + \\ & 7,24175472743 x_5 x_7 - 0,234485018354 x_3^2 x_1 + 0,221303209741 x_3^2 x_5 - \\ & 1,85164041176 x_3^2 x_7 + 0,0124091909665 x_4^2 x_3 - 0,477804814679 x_6^2 x_7 + \\ & 4,97522620755 x_7^2 x_3 - 1,51892971526 x_7^2 x_4 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7 = & -1,97260043239 x_1 x_2 + 1,97808186271 x_1 x_4 - 5,40335343702 x_1 x_6 + \\ & 10,538821176 x_2 x_3 - 1,99117494368 x_2 x_4 - 8,41557863221 x_2 x_5 + \\ & 7,31841711151 x_2 x_6 - 11,2431645084 x_3 x_4 + 54,1627353554 x_3 x_6 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &10,538821176 x_4 x_5 - 1,99117494368 x_4 x_6 - 53,321879762 x_5 x_6 + \\ &5,14388200049 x_2^2 x_1 - 146,678224572 x_2^2 x_3 + 7,88465951938 x_2^2 x_4 + \\ &160,299292863 x_2^2 x_5 - 0,746858355106 x_3^2 x_1 - 1,42705491189 x_3^2 x_7 + \\ &0,992190521963 x_5^2 x_4 \end{aligned} \quad (49)$$

Gore navedeni sistem ima više potencijalno-promjenjivih parametara. Isti su označeni malim slovima abecede, i taksativno nabrojani sa sljedećim početnim vrijednostima:

$$\begin{aligned} a &= -18,1419603857; & b &= 102,823057469; \\ c &= 4,45379632664; & d &= 19,4020102164; \\ e &= 15,1152324953; & f &= -28,8776264978; & g &= -7,65625436942; \\ h &= -1,40176776853; & k &= -3,02803652198; \\ m &= -25,3198266887; & p &= -9,27399039629; \\ q &= -2,05340261511; & r &= -3,23807150594; & s &= 1,97387695551. \end{aligned}$$

Nijedan parametar nije označen sa  $n$ , jer se isti koristio pri označavanju broja iteracija u okviru MATLAB-ove MATCONT aplikacije, odnosno da ne bi došlo do kasnije zabune ili slučajne zamjene oznake(a). Analogno tabeli 2. parametri u jednačinama od (39)–(47) imaju svoja makroekonomska značenja, koja ćemo takođe detaljno objasniti i prezentovati u daljem tekstu. Posljedično, Codim 1 bifurkacija parametra  $a$ , odnosno Codim 2 bifurkacija parametara  $a$  i  $c$  učestvuje u ispitivanju 7D sistema. Dodatno, u narednim poglavljima ćemo, između ostalog, ispitivati i pojavu hiper–haosa u 4D i 7D sistemima.

## 5. Nelinearna dinamička analiza kreiranih modela

U ovom odjeljku ćemo analizirati 2D sisteme kako bismo utvrdili eventualno odstupanje između posmatranih podataka i vrijednosti koje definiše tok sistema. Primjenom NDA u faznom prostoru utvrđujemo što „privlači” ili „odbija” tačke/krive faznog portreta, dalje definišući kvalitativnu i kvantitativnu međuzavisnost makroekonomskih relacija između endogenih varijabli. Dodatno, koherentni i nezavisno dobijeni rezultati za 2D i 3D sisteme imaju dodatu i uzajamnu vrijednost, te suštinski gledano i pozitivni metodološki značaj.

Jedan od najvažnijih zadataka ovog istraživanja je da se u faznoj ravni otkrije postojanje fokalnog(ih) ponora ili stabilnog(ih) čvora(ova), jer oni pokazuju tendenciju sistemskog toka da konvergira ka tim singularitetima. U ekonomskom smislu, to znači da će vrijednosti endogenih varijabli konvergirati ka tim vrijednostima (singularitetima), čak i ako nisu optimalni ili željeni prema široko postavljenim standardima. Odnosno, ovi singulariteti prikazuju „neminovnost ekonomskog toka” u dostizanju tih tačaka kada uzmemo u obzir sve međuzavisnosti promenljivih! U stvarnosti, on opisuje koje vrijednosti sistem „treba da ima” da bi bio stabilan i konzistentan. Takođe, makroekonomija i stvarni život su neprekidni. Ako bi nastali neki strukturni lomovi, oni bi uvijek bili vještački, odnosno suprotni neprekidnom toku, i definitivno subjektivnog i ljudskog porijekla.

Zapravo, eliminisali smo fazni pomak standardizacijom pri vremenu  $t=1$  za sve varijable, isključujući ga iz faznih dijagrama i portreta. Postoji fazna transformacija u faznim dijagramima, gdje preslikavamo vremensku domenu na fazni portret za određene varijable (2D, 3D, 4D i 7D). Fazni portret, posebno za endogene varijable poput dohotka, imetka i potrošnje, analiziramo u odnosu na singularitete. Singularitetne tačke, koje imaju matematičku i suštinsku prirodu, mogu biti privlačne, odbojne, periodične ili druge. Suštinska priroda u ekonomiji/makroekonomiji odnosi se na konvergenciju ili divergenciju vrijednosti endogenih varijabli od određenog singulariteta, što se može manifestovati u faznim portretima pri promjeni parametara SNDJPR. U makroekonomskom kontekstu,



navedeno znači da želimo npr. prilagoditi porez na dohodak kako bismo uticali na per capita bruto platu i tako regulisali „temperaturu” ekonomije (eng. heating or cooling of the economy) u skladu sa ekonomskim prilikama. Sve pomenute promjene trebale bi se sprovesti u optimalnom vremenskom okviru, a njihov efekat bi trebao trajati određeno vrijeme, na primjer 18 mjeseci. Prezentovani ciljevi proizlaze iz analize faznih prostora, portreta, dijagrama, orbita i trajektorija putem SNDJPR. Na kraju, važno je naglasiti da se ne radi o pretpostavkama već o „čitanju” same prirode faznog portreta. Fazni portret postoji nezavisno od naših pretpostavki, a kada ga identifikujemo, on postaje temelj za dalje analize. Grafički prikazi i pripadajuće im numeričke vrijednosti, olakšavaju nam identifikaciju važnih vrijednosti u rezultatima, čime se omogućava preciznije proučavanje odabranih orbita ili trajektorija.

Očitavamo vrijednosti koje nam definiira tok – sa svojim u konkretnom slučaju izgledom i pripadajućim singularitetima od interesa (točke, periodične krivulje, itd.), pa zamijenjujemo te vrijednosti u jednačine 14–16, pri čemu sve ostale vrijednosti osim onih očitanih su stvarne i realne vrijednosti od ranije, i na kraju uspoređujemo novo-dobijene teorijske rezultate za endogene varijable sa nekom od stvarnih/realnih orbita/trajektorija toka odnosno sa pripadajućim im vrijednostima.

U istraživanju analiziramo sisteme jednačina pomoću NDA metode, pri čemu proučavamo 2D, 3D, 4D i 7D sisteme, svaki sa svojim sui-generis tokom definisanim odgovarajućim jednačinama. Pomenuti tok, odnosno niz varijabli predstavljenih u faznom prostoru, karakteriše svojevrstne krivulje stabilnosti/nestabilnosti, odnosno stabilne/nestabilne tačke, itd. Važno je napomenuti da fazni dijagram nužno ne mora da odražava stvarnost potpuno egzaktno za određene početne uslove, već istraživanje se fokusira na dugoročnu prognozu pomoću kreiranog toka. Nakon odabira trajektorije ili orbite u okviru toka, možemo numerički i grafički očitati vrijednosti od interesa za određenu endogenu varijablu, kao što su dohodak, bogatstvo/imetak i potrošnja. Zatim, koristeći inverzno modeliranje putem precizno definiranih jednačina kao što su 51 i 52, simuliramo vrijednosti za te varijable ili određene parametre. Navedene simulacije provodimo uz stvarne vrijednosti svih ostalih parametara i egzogenih varijabli, ali sa očitanim vrijednostima za samo endogene

varijable prema NDA toku. Nadalje, očitane vrijednosti nisu proizvoljno postavljene niti su rezultat arbitrarnih intervencija, regulatornih odluka ili sličnih diskrecionih mjera. Umjesto toga, temelje se na objektivnim činjenicama i SNDJPR, čime se postiže legitimnost i sveobuhvatnost definiranog toka. Simulirane vrijednosti za parametre  $\tilde{\tau}_\omega$  i  $\tilde{\omega}_g$  na lijevoj strani jednačine 51 i 52 pružaju uvid u vremensko trajanje posmatrane dinamike promjena varijabli, omogućujući procjenu nivoa – koji bi varijable trebale zadržati i/ili imati, kako bi održale kontinuitet toka. Poslijedično, očitane vrijednosti iz faznog portreta koristimo kako bismo dobili simulirane vrijednosti varijabli putem inverznog modeliranja pomoću jednačina kao što su 51 i 52. Pomenuto postiže konzistentnost sa definisanim tokom, čime dobijamo dinamičku-predikciju varijabli u vremenu.

Koristeći aplikaciju pplane9 za MATLAB, analiziramo 2D sisteme. Za 2D sisteme, nećemo prezentovati bifurkacionu analizu, jer se fokusiramo u 2D analizi na otkrivanje ukupnih karakteristika toka sistema, odnosno eventualno postojanje konvergirajućih/divergirajućih tačaka i predmetnih trajektorija. Numeričkim rješavanjem sistema (25) i (26) dobijamo, na primjer, grafičko rješenje  $Y_H - W_H$  2D sistema za određivanje stabilnih i nestabilnih manifolda, kao i za otkrivanje diskrepanci između posmatranih i generisanih vrijednosti.

Generalno, navedeno važi za slike 107 – 110, a djelimično i za sliku 107, koja je zapravo prikazana samo u svrhu ilustracije metodologije/ideje. Dodatno, koristimo pojednostavljene 2D modele (25) – (30) kako bi definisali tok sistema i odredili singularitete. Na osnovu utvrđenih singulariteta iz originalnog modela (14) – (16), poreske stope i primanja odgovaraju pomenutim singularitetima.

## 5.1 Kompjuterski eksperiment i numeričke metode rješavanja SNDJPR

Složeni kompjuterski modeli se često koriste za istraživanje naučnih fenomena, gdje se kompjuterski eksperiment (KE) sastoji od pokretanja koda više puta sa različitim ulazima. Izlaz ovih eksperimenata je obično deterministički, što znači da ponavljanje eksperimenta sa istim ulazima daje identične rezultate. Međutim, ovi kodovi (programi) mogu biti kompjutaciono zahtjevni (za računanje), tako da je zajednički cilj pronaći „jeftiniji” način za predviđanje izlaza koristeći podatke. Da bismo postigli pomenuto, predloženo je modeliranje determinističkog izlaza kao realizaciju stohastičkog procesa. Ovaj statistički pristup omogućava efikasan izbor ulaza i daje procjene nesigurnosti predviđanja. U daljem pregledu razmatramo početke razvoja u ovoj oblasti, i dajemo primjere KE primjena. Dodatno, demonstriraćemo ideju KE kroz primjere iz relativno bliske prošlosti (druga polovina i kraj 20. vijeka).<sup>141</sup>[45]

U radu Chazottes i Monticelli (2022)<sup>142</sup>, predstavljen je evolutivni pregled korištenja KE tokom druge polovine 20. vijeka.. Navedeno, kreće se kroz historiju sve do kvantnog računara, čijoj praktičnoj proizvodnji i upotrebljivosti danas stremlji svaka kompanija i zemlja na svijetu. Ukoliko spojimo kvantni računar sa AI tehnologijom izgledi postaju nevjerovatni, štoviše čak i zastrašujući po čovječanstvo!

Naime, tokom 20 vijeka desilo se nekoliko ključnih momenata upotrebe KE. Svakako, neki od najupečatljivijih su:

- John von Neumann i Stanislaw Ulam bili su matematičar i fizičar koji su zajedno radili na nizu projekata, uključujući razvoj koncepta „sinergije”, koji se odnosi na način na koji pojedinačne komponente sistema mogu zajedno raditi na stvaranju složenijeg ponašanja nego što bi mogle postići zasebno.
- Fermi, Pasta, Ulam i Tsingou – FPUT eksperimenti na MANIAC-u, se odnose na seriju eksperimenata koje su proveli fizičari Enrico Fermi, John Pasta, Stanislaw

---

<sup>141</sup> Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. and Wynn, H.P., 1989. Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, 4(4), pp.409-423.

<sup>142</sup> Chazottes, J.R. and Monticelli, M., 2022. Computer experiments and visualization in mathematics and physics. A subjective short walk among some historical examples. *arXiv preprint arXiv:2203.10412*.

Ulam i Mary Tsingou 1950-ih, u kojima su proučavali ponašanje jednodimenzionalnog lanca čestica povezanih oprugama. Rezultati ovih eksperimenata bili su iznenađujući, jer su pokazali da čak i jednostavan sistem poput ovog može pokazivati složeno, nelinearno ponašanje.

- Alan Turing bio je matematičar i informatičar koji je najpoznatiji po svom radu na razbijanju njemačkog koda Enigma tijekom drugog svjetskog rata. Kasnije u svojoj karijeri počeo se zanimati za proces morfogeneze, odnosno kako se organizmi razvijaju iz jedne stanice. Predložio je teoriju o tome kako bi ovaj proces mogao funkcionisati koristeći koncept jednačina reakcije i difuzije, koje se takođe koriste u računarskim simulacijama.
- Birch i Swinnerton-Dyer bili su matematičari koji su radili na problemu u teoriji brojeva poznatom kao pretpostavka Bircha i Swinnerton-Dyera. Ova pretpostavka se odnosi na broj racionalnih tačaka na eliptičkoj krivoj, odnosno krivoj koja se koristi u algebarskoj geometriji.
- Edward Lorenz je bio meteorolog koji je otkrio koncept teorije haosa dok je proučavao vremenske obrasce. Otkrio je da čak i mala promjena početnih uslova može rezultirati drastično različitim ishodima, što je dovelo do ideje o „efektu leptira”. Takođe, otkrio je tzv „čudne” ili neobične atraktore, a koji su vrsta fraktalnog uzorka koji se može pojaviti u haotičnim sistemima.
- Martin Kruskal i Norman Zabusky bili su fizičari koji su radili na problemu dinamike fluida poznatom kao Kortevag-De Vriesova jednačina, koja opisuje ponašanje valova u plitkoj vodi. Otkrili su vrstu valova nazvanu soliton, koji zadržavaju svoj oblik dok se kreće kroz prostor i vrijeme. Također, razvili su tehniku zvanu visiometrija, koja se koristi za proučavanje ponašanja predmetnih valova.
- Michel Hénon bio je astrofizičar koji je otkrio vrstu čudnog atraktora koji se danas naziva Hénonov atraktor. Ovaj atraktor se koristi za modeliranje širokog spektra fenomena, od ponašanja galaksija do kretanja čestica u magnetskom polju.
- Fenomen poznat kao kaskada udvostručenja perioda, koji su nezavisno otkrili matematičari Mitchell Feigenbaum, Thierry Couillet i Christian Tresser. Ovaj

fenomen se javlja u nelinearnim sistemima i karakteriše se udvostručenjem perioda oscilacija kako se mijenjaju parametri sistema.

- John Hubbard i Benoit Mandelbrot bili su matematičari koji su proučavali ponašanje složenih polinoma sa kompleksnim koeficijentima. Otkrili su skup fraktalnih uzoraka koji se javljaju kada se polinomi rekursivno izračunavaju.

Karakteristično i zajedničko za sve pomenute KE je upotreba pojedinih i za taj problem prikladnih numeričkih metoda. Kao što smo već naveli, u literaturi se mogu naći reference na temu razvoja i upotrebe numeričkih metoda.

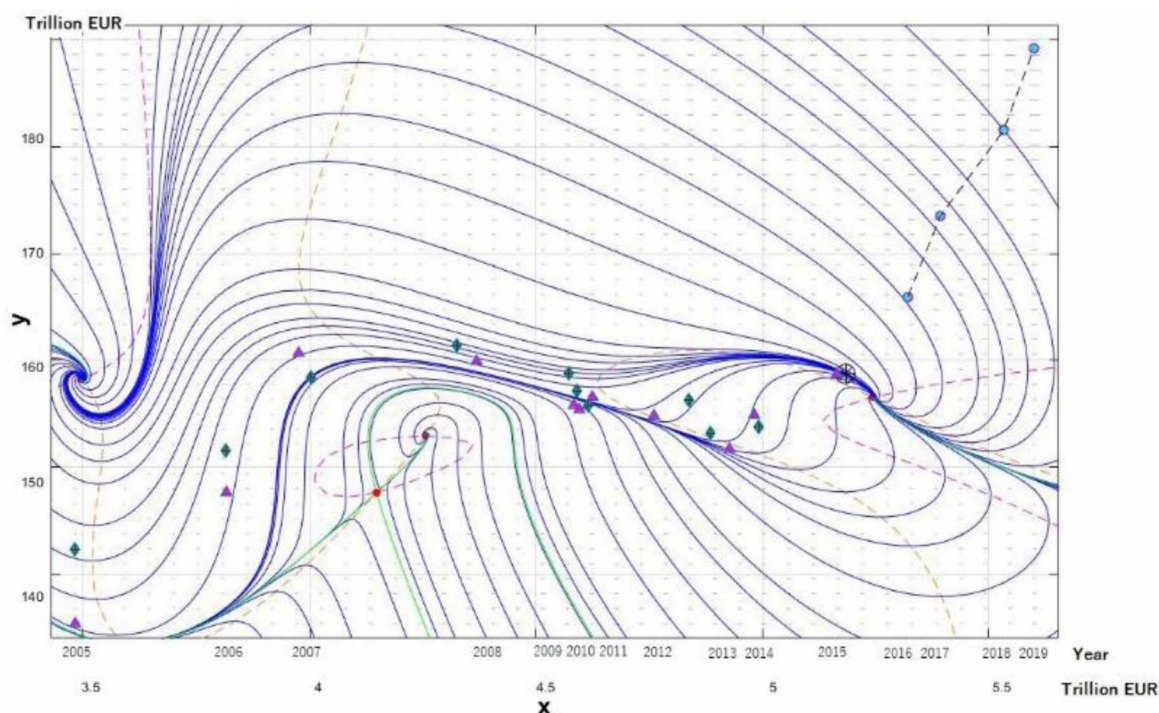
U disertaciji ćemo koristiti pomenuti KE kako bismo dubinski istražili karakteristike sistema, analizirali grafička rješenja, dali argumentovane zaključke i potvrdili postavljene hipoteze odnosno istraživačka pitanja. Rješenja dinamičkih sistema (SNDJPR), prije simulacije istih putem KE, nije moguće unaprijed predvidjeti, a kamoli ručno riješiti. Zbog toga nam KE predstavlja nezamjenjiv i ključni alat u istraživanju. Neke od ovdje prezentovanih problema nije bilo moguće riješiti čak ni prije desetak godina – jer su zahtijevali jake računarske resurse i kompjutacionu snagu, koji su tada bili dostupni samo u najmoćnijim računarskim sistemima odnosno izuzetno skupim i jako specijalizovanim računarskim konfiguracijama. Međutim, često su nedostajala i odgovarajuća softverska rješenja, što je predstavljalo dodatni izazov u istraživanju putem KE. Sve navedeno jasno pokazuje koliko je brzo napredovala nauka, računarska tehnologija i softveri, koji danas omogućavaju uspješno sprovođenje KE. Konkretno, primjena alati poput Pplane i MATCONT (obje su tipa GUI) unutar programskog paketa MATLAB, predstavlja izvanredan napredak u prilagođavanju i poboljšanju softverskih alata. Pomenuto, omogućava rješavanje izuzetno složenih problema putem KE, uz dodatne funkcionalnosti koje nekada nisu bile dostupne (npr. nekad u ranijim verzijama pod nazivom CL\_MATCONT).

Tokom istraživanja u okviru ove disertacije bilo je više prilika da izvršimo KE, i da uvidimo da dobijeni rezultati nisu zadovoljavajući sa aspekta raznih naučnih kriterijuma, te bi ih onda ponovili i zatim potvrdili ili opovrgli određene rezultate ili zaključke. Pomenuto smo mogli uraditi na relativno brz, efikasan, i jeftin način, što u slučaju određenih klasičnih eksperimenata, ne bi bilo moguće.

## 5.2 Analiza i sinteza 2D modela pomoću MATLAB PPlane aplikacije

Slika 107 ilustruje prednosti korištenja NDA u odnosu na savremene ekonomske metode i teorije. NDA omogućava korištenje istog sistema jednačina, sa različitim početnim uslovima, za određivanje alternativnog ponašanja sistema i „stvarnosti”.

U ekonometriji, ako promijenimo nekoliko vrijednosti u vremenskoj seriji, posebno prve i/ili posljednje, moramo definisati novu regresiju. U NDA sa fitovanim polinomnim podacima (kao što je ovdje predstavljeno), mi samo mijenjamo početnu tačku u okviru toka, a sve naredne vrijednosti će dalje pratiti sistemski-zavisna rješenja (trajektorije).



Slika 107. Slično vremenskim kartama, putanje zavise od početnih uslova<sup>143</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>143</sup> Predstavljena metodologija može postati standardni prijedlog za analizu sistema u ekonomiji. Računska snaga, raznovrsnost aplikacija i razrađene matematičke osnove i metode čine ovaj pristup veoma izvodljivim.



### 5.2.1 Model ukupno raspoloživog dohotka i imetka ( $Y_H - W_H$ model)

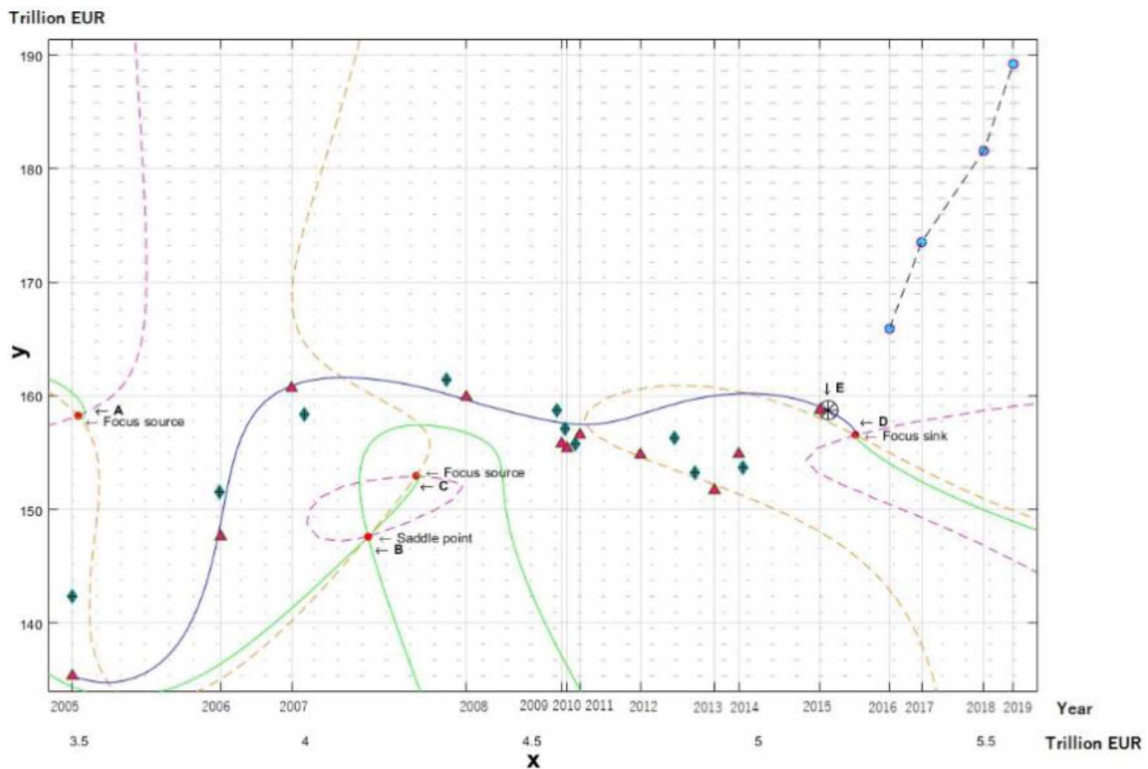
Na osnovu 2D simulacije makroekonomskih varijabli u (25) i (26), utvrđujemo sistemsko rješenje(a) i pronalazimo singularitete. Legenda za 2D analizu je prikazana na slici 108, dok je fazna NDA ravan za  $Y_H - W_H$  je prikazana na slici 109 [42][29][84]. Postoje dvije skale na x-osi: gornja za godine i donja za  $Y_H$  vrijednosti (EUR u trilionima<sup>144</sup>). Na y-osi takođe imamo vrijednosti naznačene u trilionima eura za  $W_H$ . Ljubičasti trouglovi na grafikonu označavaju vrijednosti dobijene polinomnim izrazima i predstavljaju uređene parove endogenih varijabli ( $Y_H - W_H$ ). Maslinasto-zeleni dijamanti sa križem, označavaju posmatrane/originalne vrijednosti podataka iz Eurostata i ECB-a (SDW). Prezentovano korespondira sa godinama od 2005. do 2014. Crni krug sa zvjezdicom u sredini je vrijednost za 2015. godinu i označen je slovom „E”. Crvene tačke predstavljaju tačke ravnoteže (EP). Krugovi popunjeni sa cijan bojom predstavljaju posmatrane/originalne podatke za period od 2016. do 2019. godine. Isprekidana crna linija povezuje podatkovne tačke od 2016. do 2019. i predstavlja stvarni makroekonomski trend u EU.



Slika 108. Legenda karakterističnih elemenata 2D faznih portreta

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>144</sup> Zbog popularnog naziva u ekonomiji za hiljadu milijardi koristimo termin trilion, iako se u evropskom i dužem sistemu SI označavanja misli na broj pod nazivom bilijarda, koji je jednak vrijednosti od  $10^{12}$  € (Eura).



Slika 109. Međuzavisnost  $Y_H - W_H$  u faznoj ravni sa karakterističnim tačkama i trajektorijom

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Izračunati su sljedeći ekvilibrijumi (EP) i označeni u notaciji  $(Y_H - W_H)$ : (3,4954–158,2489) Fokusni izvor (tačka A); (4,1475–147,6098) Sjedlo (tačka B); (4,2561–152,9631) Fokusni izvor (tačka C); (5,2440–156,5716) Fokusni ponor (tačka D) [29][84][4][121].<sup>145</sup>

Postoje još dva izračunata ekvilibrijuma (EP): (-0,0001–0,0000) sjedlo (trivijalna tačka) i (5,0693–65,6318) sjedlo (koje su izvan oblasti stvarno-mogućih makroekonomskih vrijednosti, te samim tim nisu od značaja za interpretaciju modela).

<sup>145</sup> Terminološki gledano, predstavljeni fokusni izvori su nestabilne karakteristične tačke (singulariteti) sistema, dok analogno, fokusni ponori su stabilne ekvilibrijumske tačke.



Magenta isprekidana linija predstavlja x-nulklinu ( $\dot{x} = 0$ ), dok narandžasta isprekidana linija predstavlja y-nulklinu ( $\dot{y} = 0$ ). U okviru fazne ravni, svjetlozelene pune linije predstavljaju razdvajanje (separatrisa) između stabilnih ( $W^S$ ) i nestabilnih ( $W^u$ ) površina (manifolda). Postoji još jedna separatrisa, međutim istu ne razmatramo i ne prikazujemo na grafikonu, jer je (takođe) izvan područja mogućih makroekonomskih vrijednosti. Pomenute linije razdvajanja, NDA definiše kao separatrise. Plava linija predstavlja putanju u faznoj ravni, a počinje od realne (stvarne) vrijednosti za 2005. godinu sa početnim uslovom  $(x_0 - y_0) = (Y_{H_0} - W_{H_0}) = (3,4823 - 135,3687)$ . Koristićemo iste oznake i u nastavku.

Osnovna ideja 2D analize je direktno analogna sa faznim ravnima, koje svakodnevno gledaju milijarde ljudi u svetu, u vidu vremenske prognoze. EP označen sa „D” je Fokusni ponor (stabilan invarijantni skup). Navedeno znači, da će sve putanje za početne uslove izabrane na stabilnim manifoldima  $W^S$  (iznad zelene pune linije) konvergirati ka predmetnim EP, u svim povezanim periodima. Posljedično, možemo reći da će relativne prošle i buduće vrijednosti, sa stanovišta makroekonomskog modela, konvergirati ka/u tačku „D”.

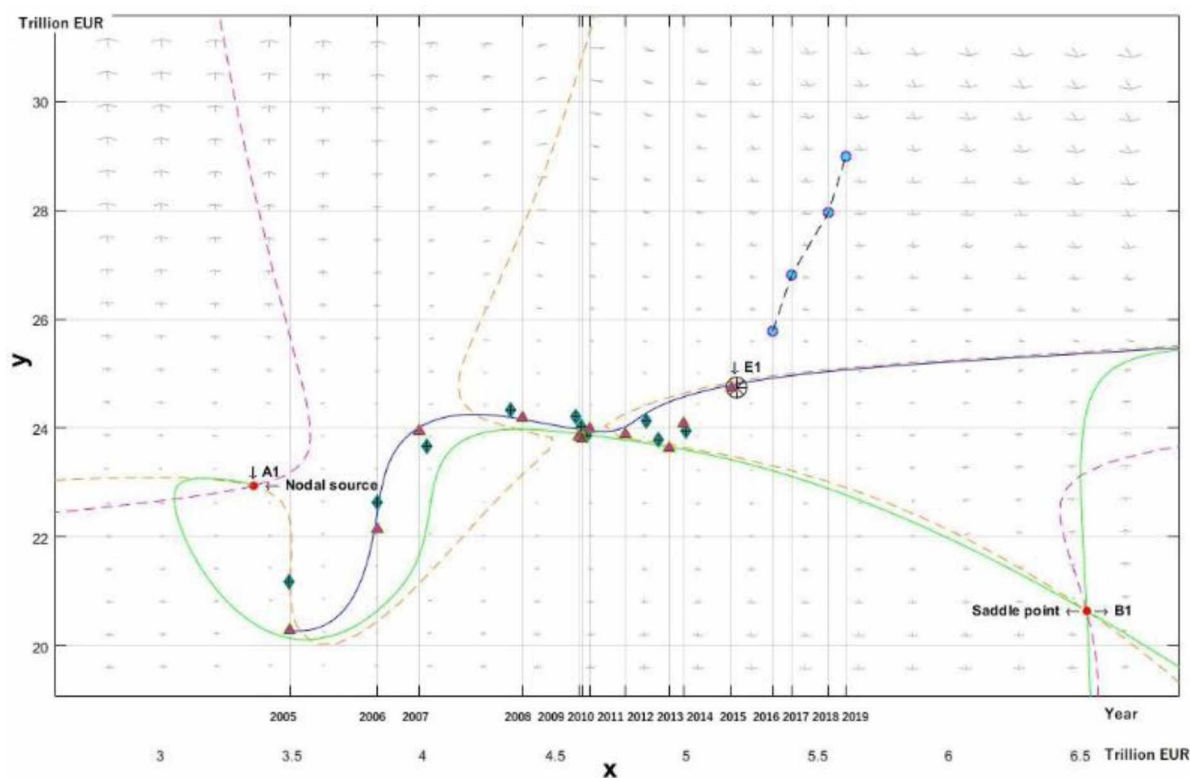
Sama ideja „relativne prošlosti” važi za godine od 2005. do 2015. godine, dok „relativna budućnost” važi za godine od 2016. do 2019. Dakle, možemo testirati naše sistemske rezultate i zaključke, od prvog na drugi period.

Tačka „D” je zapravo „tačka privlačenja vrijednosti” za kompletni stabilni manifold  $W^S$ . Što znači u ekonomskom smislu, kada uzmemo u obzir međuzavisnosti svih endogenih varijabli, vrijednost(i) za  $Y_H$  i  $W_H$  će konvergirati ka tački „D” za bilo koju arbitrarnu (proizvoljnu) kombinaciju vrijednosti agregatnih prihoda i imetka (bogatstva) odabranih u okviru  $W^S$ . Dodatno, postoji u ovom dijelu faznog portreta i nestabilni manifold, ali on nema značaja i uticaja na dio realnih makroekonomskih istraživanja. Posljednje pomenuto bazira se na činjenici da količina proizvedenih dobara u realnoj ekonomiji ne može biti negativna. Dodatno, može biti nula, ili neka druga konačna vrednost, ali ne negativna. Vrijednost tačke „D” je  $(Y_{H_D} - W_{H_D}) = (5,2440 - 156,5716)$  i predstavlja konvergentnu tačku, ali ne i

optimalnu tačku sistema – iz ugla opšte odnosno šire populacije EU! Obično, fiskalno-monetarni rezovi su vrlo neprijatni i nepopularni za vlade država. Navedeno, važi u ovom slučaju za Savjet Evrope EU.

### 5.2.2 Model ukupno raspoloživog dohotka i potrošnje ( $Y_H - C_H$ model)

$Y_H - C_H$  prezentuje značajno odstupanje u rezultatima između definisanog toka sistema i stvarnih vrijednosti. Pokazaćemo u kojoj mjeri životni standard stanovništva EU odstupa, odnosno nije neutemeljen u real-ekonomiji. Dodatno, pomenuto prezentuje i primarni značaj simuliranih rezultata. NDA fazna ravan za  $Y_H - C_H$  varijable predstavljena je na slici 110.



Slika 110. Međuzavisnost  $Y_H - C_H$  u faznoj ravni sa karakterističnim tačkama i trajektorijom

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Postoje još dvije izračunate tačke: (0,0000–0,0000) Fokalni ponor (trivijalna tačka) i sjedlo (-10,4917–5,0752). Obje su van realne makroekonomske oblasti tumačenje modela, te ih iz tog razloga dalje nećemo uzimati u obzir.

Putanja(e) se približavaju gornjoj desnoj y-nulklini. Navedeno predstavlja kvalitativni zaključak, tj. da se vrijednosti  $C_H$  i  $Y_H$  u budućnosti asimptotski približavaju (po putanji) y-nulklini, što inherentno predstavlja nultu promjenu za  $C_H$  u faznoj ravni. Kao što je već ranije pomenuto, navedeno je moguće samo ako varijable zadrže konstantan međusobni odnos, u ovom konkretnom slučaju, odnos prihoda i potrošnje ( $C_H(t)/Y_H(t) \approx const.$ ). Dodatno, svaka promjena potrošnje, na primjer, porast ili pad iste, dohodak će pratiti sa istim znakom. Dakle, obje varijable su stabilne, sa konstantnim međusobnim odnosom i pozitivno koreliraju sa svakom tačkom nakon 2015. godine.

Vektori u vektorskim poljima ne mijenjaju pravac i intenzitet „na” nulklini (u ovom konkretnom slučaju y-nulklini). Navedeno je moguće samo ako vektori koji su tangente na trajektorije (jer, trajektorija se asimptotski približava nulklini) očuvaju u svakoj tački krive konstantan odnos ( $C_H(t)/Y_H(t) \approx const.$ ) kada  $t \rightarrow \infty$ . Gore pomenuto „na” je pod navodnicima jer trajektorija (putanja) zapravo nikada ne doseže nulklinu. U makroekonomskom smislu to znači da je odnos buduće potrošnje i ukupnog raspoloživog dohotka gotovo konstantan, što dalje implicira očuvanje životnog standarda u bliskoj budućnosti za stanovništvo EU. Iako, u stvarnosti, imamo razmjenu između  $Y_H$  i  $C_H$  kao dio transfera imetka (bogatstva) u potrošnju ( $C_H$ ) kroz povećanje prihoda (što je predstavljeno u narednom poglavlju). Potrebno je obrati pažnju na razliku u vrijednosti između y-nulklina i stvarnih podataka, a koja je prikazana u tabeli 3. Makroekonomski smisao navedenog je da: čak i bez povećanja realnog dohotka, postoji mogućnost veće potrošnje na račun akumuliranog imetka (bogatstva) i/ili institucionalno („vještački”) ulivenog novca u EU ekonomiju.

Tabela 3 predstavlja procentualnu razliku stvarne vrijednosti  $Y_H$  i  $C_H$  spram njihove konvergentne vrijednosti definisane protokom, odnosno sistemskim tokom. Očigledno je da, potrošnja stanovništva EU je značajno veća nego što to makroekonomski model (tok) očekuje. Razloge za postojanje navedenog referenciramo na ECB APP.

Tabela 3. Razlika između stvarnih vrijednosti za  $Y_H$  i  $C_H$  i njihovih konvergentnih vrijednosti predviđenih modelom. Procenat pokazuje koliko je u stvarnosti povišena vrijednost  $C_H$ .

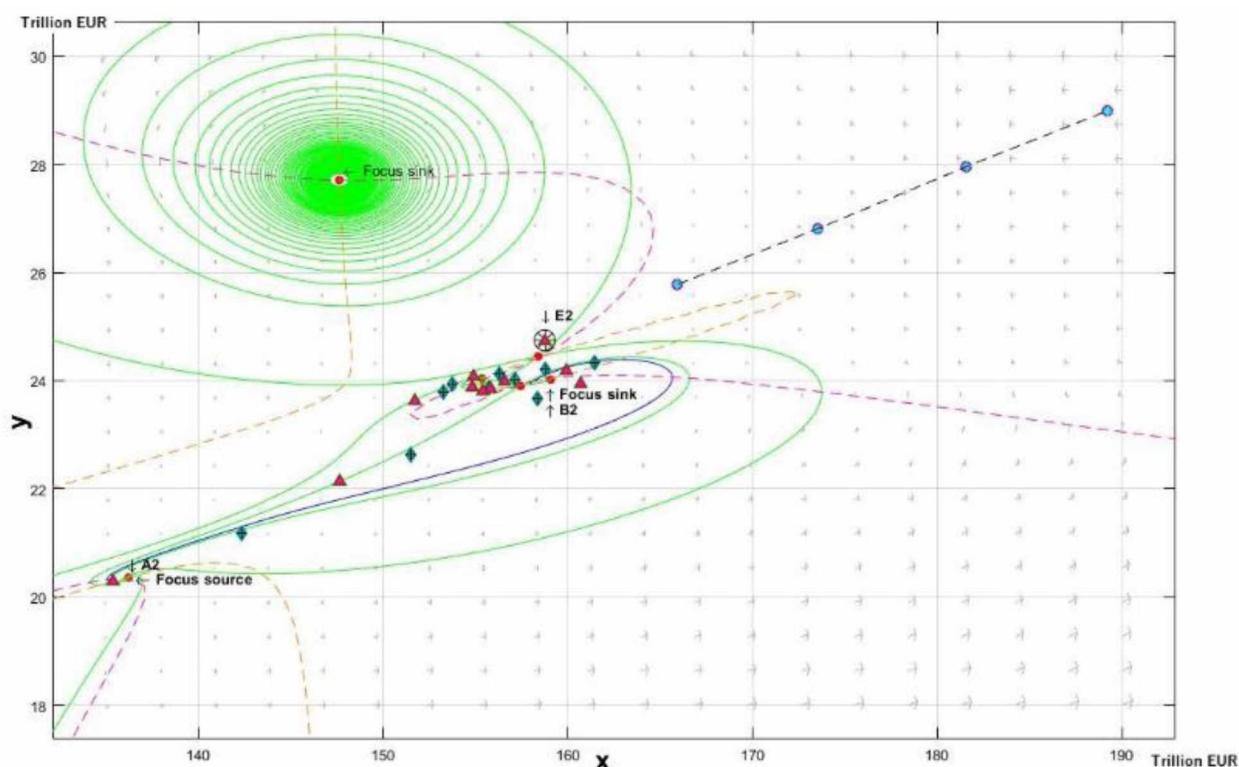
Godina	$Y_{H-2016-2019}$ (%)	$C_{H-2016-2019}$ (%)
2016	0,0062	7,33
2017	0,1338	11,62
2018	0,4583	16,39
2019	0,6699	20,69

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

### 5.2.3 Model ukupno raspoloživog imetka i potrošnje ( $W_H - C_H$ model)

Važnost ove analize je da predstavi razliku između agregatnog imetka/bogatstva i raspoložive potrošnje pri marginalnoj vrijednosti plata/nadnica. Granična *marginalna sklonost* (engl. marginal propensity – MP) plata i/ili zarada u makroekonomiji EU nije bukvalno jednaka nuli, već je veoma blizu nule (kao što je to prikazano u tabeli 3 za  $Y_{H-2016-2019}$ ).

NDA faznu ravan za  $W_H - C_H$  varijable predstavljamo na slici 111. Dinamika  $W_H - C_H$  sistema je veoma složena i nećemo je detaljno analizirati (iz NDA ugla). Pomenućemo samo, da je tačka, „B2” konvergentna EP, i označena je na grafikonu crvenom tačkom i strelicom koja na nju ukazuje (centar slike 111).



Slika 111. Međuzavisnost  $W_H - C_H$  u faznoj ravni sa karakterističnim tačkama i trajektorijom

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Povećanje potrošnje je zapravo bilo moguće, jer su se indirektni kanali APP „prelivali” ka stanovništvu EU, i dodatno kanalom transfera iz imetka (bogatstva) u potrošnju. Navedeno direktno implicira da bi se nadoknadila stagnacija prihoda ili *smanjeni paritet kupovne moći* (PPP), stanovništvo EU je moralo da potroši dio svog u vremenu akumuliranog bogatstva, na primjer, uštedevinu, akcije, nekretnine, itd.

Trajektorija bazirana na stvarnim makroekonomskim vrijednostima se nalazi na stabilnom manifoldu (površ, u 2D slučaju) odnosno na  $W^s$ , gdje smo već objasnili da diskrepance uglavnom proizilaze iz sredstava injektovanih u ekonomski sistem EU putem ECB APP. U tabeli 4 kvalitativno prikazujemo pomenute razlike.

Tabela 4. Razlika između vrijednosti definisanih modelom za  $W_{B2}$  i  $C_{B2}$  njihovih stvarnih vrijednosti. Procenat pokazuje koliko su stvarne vrijednosti varijabli povišene u poređenju sa tačkom konvergencije modela.

Godina	$W_{H-B2}$ (%)	$C_{H-B2}$ (%)
2016	4,31	7,33
2017	9,10	11,62
2018	14,14	16,39
2019	18,95	20,69

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Nažalost, ne možemo analizirati vrijednost(i) konvergencije poreza i plata direktno sa slike 111, zbog dvodimenzionalnog prikaza sistema. Poenta NDA je da analizira ponašanje sistema bez stvarnog rješavanja sistema u analitičkom obliku! Ukoliko nam nedostaje jasnoća prikaza i/ili zaključka iz faznih portreta o ponašanju varijable(i) iz generisanih NDA, tada gubimo našu tačku analitičke prednosti u odnosu na problem koji rješavamo, odnosno u odnosu na cjelokupni SNDJPR. Zbog relativno gustog grupisanja tačaka u centru slike 111, kao i druge pripadajuće dinamike u okviru više manifolda, ne možemo jednoznačno i sa sigurnošću tumačiti predmetnu sliku, a onda ni analizirati sami sistem. Dodatno, kvalitativna i kvantitativna analiza imaju svoju osnovu u odabiru relevantnih vrijednosti iz faznog portreta, daljim proračunima, analizi toka, itd. Sve prethodno pomenuto nismo mogli da utvrdimo sa određenim nivoom povjerenja i sigurnosti, zbog nedovoljno jasne reprezentacije u okviru faznog portzreta (ravni), te rješenje tražimo u korišćenju sve tri korelisane predmetne varijable (3D model). Navedeno, ujedno predstavlja i granice 2D analize [21][29][16][22][4].

### 5.3 Analiza i sinteza 3D modela pomoću MATLAB MATCONT aplikacije

Svrha 3D analize je da se utvrdi kvalitativno i kvantitativno ponašanje sistema uzimajući u obzir sve međuzavisnosti između makroekonomski-bliskih i intrinzično-povezanih varijabli. Rezultati 3D NDA su ekvilibrijske tačke i/ili krive, bifurkacione krive, singulariteti, itd., kojii zajedno definišu tok sistema. U makroekonomskom smislu, navedeno znači da otkrivamo vremenski-zavisne ekvilibrijume za endogene varijable zajedno sa njihovim odgovarajućim stabilnim ili nestabilnim stanjima; tačkama koje ukazuju na kvalitativne promjene u ponašanju makroekonomskih varijabli kao što su: stagflacija, rast, stagnacija, recesija, itd., i gdje isti su jako važni, jer otkrivaju „skriveno slojeve” makroekonomskog ponašanja, i što je najvažnije, potencijalno njihove uzroke!

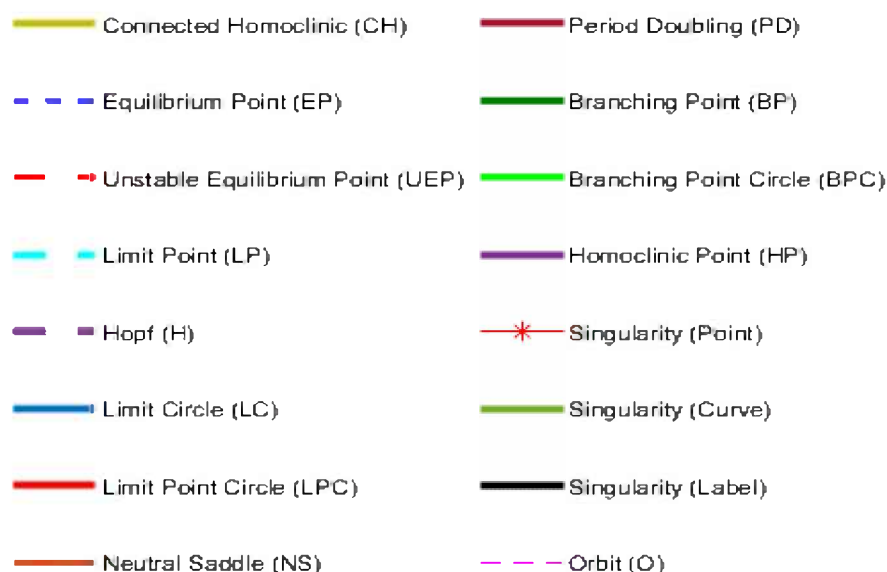
Da bismo dobili rezultate, prvo ćemo provesti *codim 1* bifurkaciju promjenom parametara. Da bismo pronašli ili odredili krivu sistemskog rješenja (ravnotežu (ekvilibrijum)), moramo analizirati njenu dinamiku u 3D, i utvrditi da li se sastoji od stabilnih ili nestabilnih djelova. Ukoliko pronađemo singularitete, tretiramo ih kao strukturne lomove, odnosno buduće polazne tačke za kontinuitet i/ili analizu bifurkacije.[9] Ekonomsko značenje kontinuiteta je da pregledamo što se dogodilo, ili što bi se moglo dogoditi, u nekoj karakterističnoj tački izvan perioda realnosti (u prošlosti i/ili budućnosti) zajedno sa različitim vrijednostima od onih koje se posmatraju za, na primer, agregatni prihod, bogatstvo ili potrošnju. Dodatno, možemo promijeniti glavni odnos uključenih varijabli u (51) i (52) izvođenjem *codim 1* bifurkacije sa promjenom (samo) parametra  $d$ , ili *codim 2* bifurkacije istovremenom promjenom parametara  $d$  i  $e$ . Takođe, možemo izvršiti kontinuitet singulariteta, ili karakterističnih tačaka na bilo kom nivou kodima. Teoretski, možemo da „nastavimo” (kontinuiramo) bilo koju značajnu tačku koja ne daje trivijalnu singularnu vrijednost, odredimo arbitrarno bilo koji razumno mali korak iteracije parametara odnosno kontinuitet. Ekonomski smisao bifurkacije[206] je izračunavanje različitih vrijednosti za zavisnu endogenu promjenljivu  $C_H$  sa ciljem prezentovanja različitih makroekonomskih scenarija. Promjenom odnosa između deskriptivnih varijabli  $Y_H$  i  $W_H$ , u zavisnoj varijabli  $C_H$ , kreiramo makroekonomski scenario koji se stalno mijenja unutar realnih granica ukupnog toka sistema.[30]



Dodatno, možemo analizirati šta bi se potencijalno moglo dogoditi sa svim varijablama uključenim u sistem, i uopšte sa cijelim sistemom, i to mijenjanjem vrijednosti i/ili odnosa prihoda u potrošnji, ili npr. što bi se desilo sa kretanjem vrijednosti imetka (bogatstva) ako bi se mijenjao sporijim/bržim tempom od prihoda, ali zadržavanjem istog ukupnog odnosa u potrošnji ubuduće, itd. Vrijednosti za varijable ne mogu biti potpuno arbitrarne (proizvoljne), jer moraju pratiti ukupnu dinamiku sistema (tok). Slično 2D sistemima, realno-pojednostavljene 3D modele kao u (31)–(33) koristimo da definišemo tok sistema i odredimo singularitete. Utvrđeni singulariteti iz originalnog modela (14)–(16), korespondiraju sa vrijednostima poreske stope i primanja. Glavna politika na koju ECB, i srodne institucije EU, mogu uticati jeste monetarna politika.[56] U današnjem makroekonomskom okruženju postoji sveukupna teorijska i praktična premisa, a to je da će se promjeni ili „upravljanju” monetarne politike prilagođavati fiskalna politika. Monetarna politika je centralna za zemlje eurozone, koje su ujedno i članice Evropskog sistema centralnih banaka. Suprotno navedenom, fiskalna politika se zasebno vodi u svakoj zemlji članici i ne postoji istinska harmonizacija na nivou EU po tom pitanju. Na primjer, porez na zarade u zemljama EU27 je 2021. godine imao vrijednosti u rasponu od 18,1% na Kipru do 46,2% u Njemačkoj. Promjenom parametara  $d$  i/ili  $e$  mijenjamo rješenje(a) cijelog NODE sistema. Promjene u NODE koeficijentima izazivaju milione, milijarde ili čak trilione numeričkih rješenja za NODE sistem. Nadalje, smanjenjem vrijednosti parametra  $d$  (analogno važi i za porast parametra), utičemo na promjenu monetarne politike – vrijednost njenih parametara mora da raste zbog znaka minus ispred koeficijenta, važi i obrnuto. Uzimajući u obzir obrnutu, ali i proporcionalnu korelaciju, simuliramo što će se dogoditi sa modelom ili makroekonomijom EU kada smanjimo uticaj dohotka na potrošnju. U ekonomskom smislu, smanjenjem dohotka ljudi će istovremeno promijeniti potrošnju i/ili imetak (bogatstvo). Dodatno, da bi zamijenili nedostajući dio svog prihoda ljudi će koristiti imetak (15) da očuvaju svoj životni standard i/ili stil života. Kako bi pomogle EU populaciji, EU institucije kreiraju odnosno prilagođavaju monetarnu politiku optimalnim razvojnim vrijednostima. Rezultate iz novodobijenih  $\tilde{\tau}_g$  i  $\tilde{\omega}_g$  upoređujemo sa realnim (stvarnim) podacima, kako bismo preporučili kreatorima EU politika koje od politika bi trebalo da



povećaju ili smanje u vrijednosti i/ili trajanju. Legenda za sve 3D MATCONT dijagrame u disertaciji je predstavljena na slici 112.

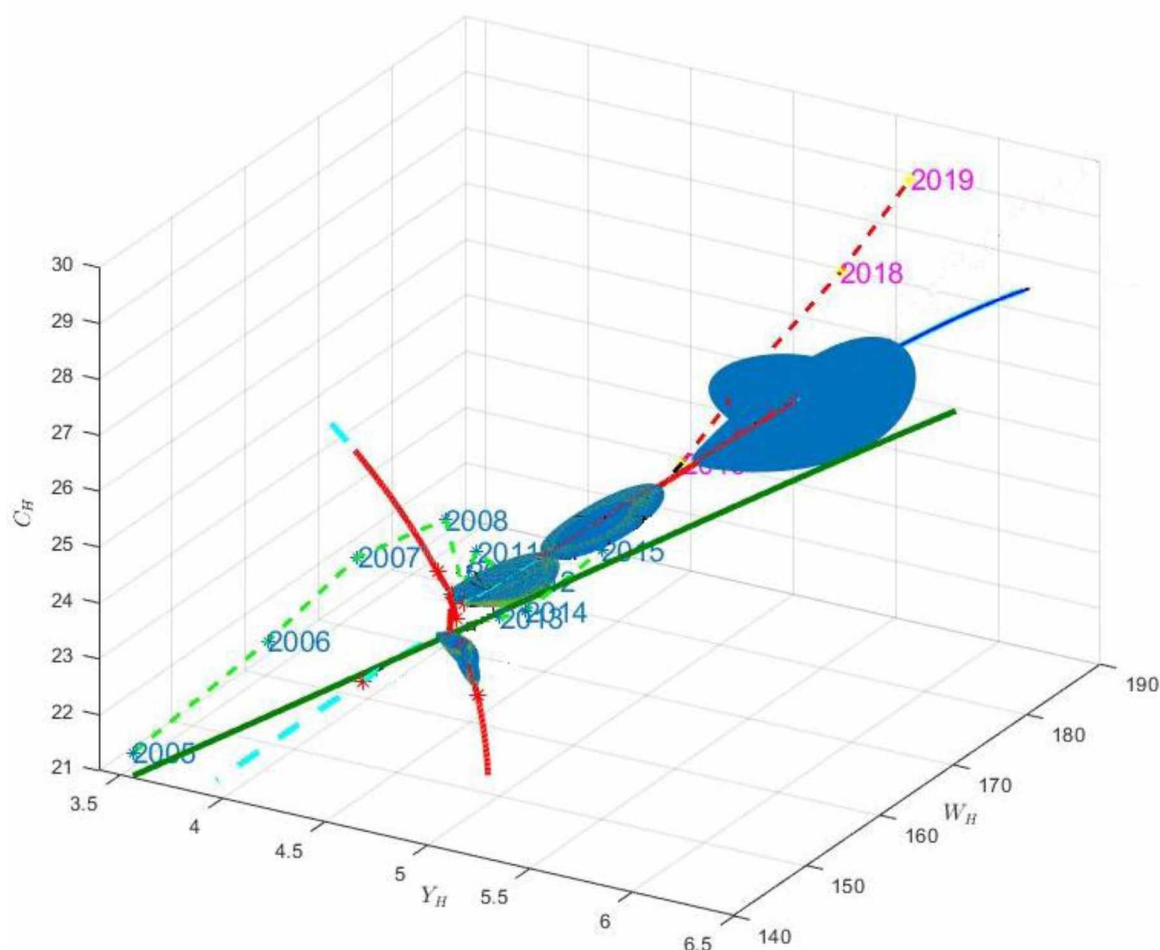


Slika 112. Legenda za sve 3D MATCONT dijagrame

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

3D sistem se sastoji od varijabli  $Y_H - W_H - C_H$ , i analiziraćemo ga pomoću MATCONT aplikacije putem promjene parametara i ispitivanjem bifurkacija sa codim 0, 1 i 2 u singularitetima koji se poklapaju sa stvarnim makroekonomskim tačkama [42][1][29][84]. Označene godine na grafikonu odgovaraju realnim vrijednostima. EP su označene isprekidanom linijom (mornaričko) plave boje i one su stabilne, dok su isprekidane jarko crvene EP nestabilne. Kao što je već pomenuto, u ovom poglavlju ćemo analizirati sistem (31)–(33). Slika 113 predstavlja sve relevantne bifurkacije na jednom dijagramu (slici). Ukupan broj bifurkacija za prezentovani i slične sisteme je teoretski neograničen, a one koje ovdje predstavljamo i proučavamo su od direktnog interesa za makroekonomsku analizu i povezane sa stvarnim podacima [29] str. 62. Sve vrijednosti su iskazane u trilionima eura (€). Prikazani dijagrami na slikama 113. i 114. pružaju ukupan pregled karakteristika

predmetnog sistema. Dijagrami sa slika će biti raščlanjeni na dijagrame bifurkacije kodima 0, 1 i 2 ili njihovih kombinacija u pojedinim slučajevima. 146

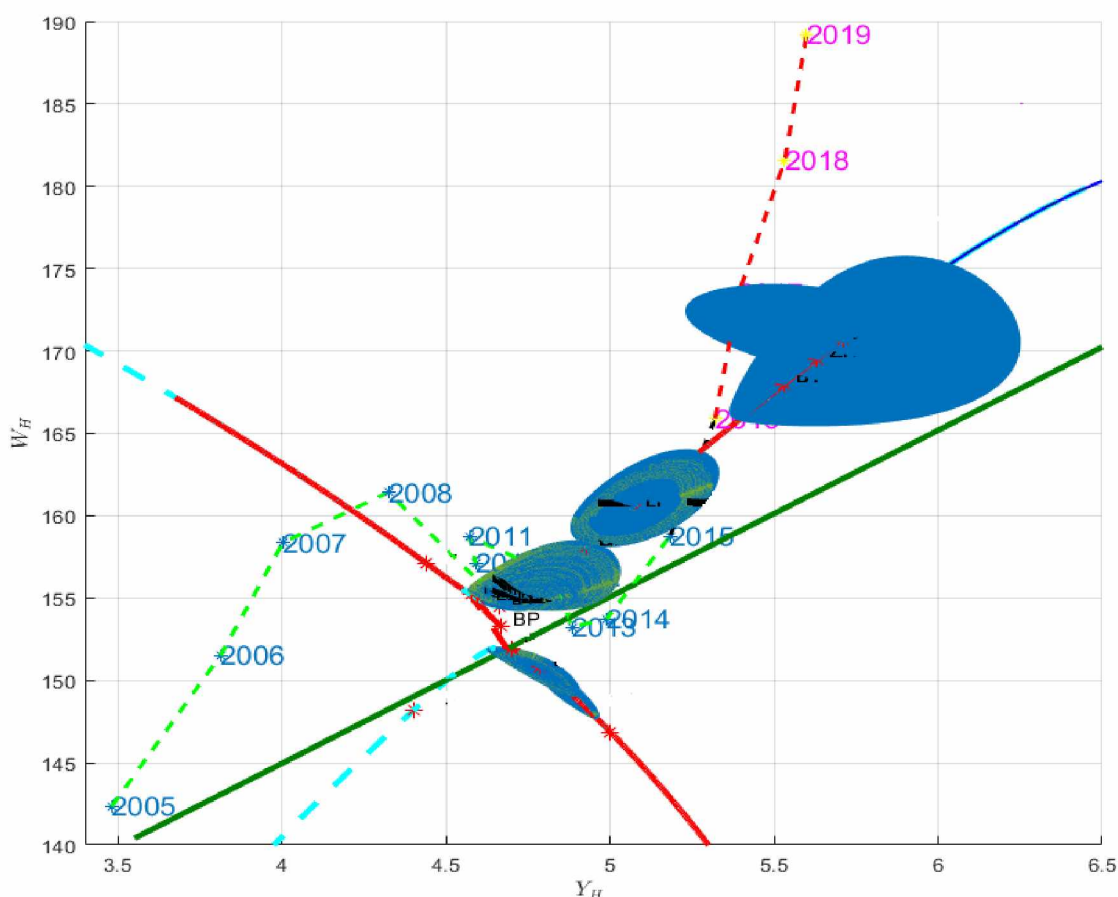


Slika 113. Višestruke bifurkacije za  $Y_H$ – $W_H$ – $C_H$  sistem u 3D (kodim 0, 1 i 2)<sup>147</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>146</sup> U primenjenim NDA istraživanjima, uvijek treba imati na umu da je „Ekvivalentno, kodimenzija (skraćeno codim) je broj nezavisnih uslova koji određuju bifurkaciju. Ovo je najpraktičnija definicija kodimenzije. To jasno pokazuje da je kodimenzija određene bifurkacije ista u svim generičkim sistemima u zavisnosti od dovoljnog broja parametara.” [29] str. 62 – Jurij A. Kuznjecov.

<sup>147</sup> Specifičnosti legende – koje važe samo za slike 113 i 114, su: svjetlozelena isprekidana linija i plavi brojevi godina predstavljaju „relativnu prošlost”, dok isprekidana crvena linija i magenta brojevi godina predstavljaju „relativnu budućnost” (sa stanovišta modela).



Slika 114. Zumirani dio  $Y_H - W_H$  projekcije sa slike 113.<sup>148</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Nakon što očitamo vrijednosti prihoda i imetka iz grafičkog rješenja sistema, kao i numeričkih vrijednosti određenih u matricama, iste možemo vratiti u početne jednačine da bismo definisali novu pripadajući im vrijednost potrošnje. Dodatno, možemo staviti vrijednosti za prihod, imetak i potrošnju, u određene i posebno izolovane jednačine za egzogene varijable kako bismo definisali kolika bi trebalo da bude njihova vrijednost, koja

<sup>148</sup> Razlika stvarnih i modelom definisanih vrijednosti je u suštini manja nego kako je to na prvi pogled vidljivo na slici 114, jer se radi o planarnoj prijekciji 3D krive sistema na ravan (obje su bliže u prostoru).

je zapravo definisana tokom.<sup>149</sup> Za prethodno pomenutu svrhu dobijamo sljedeće jednačine zamjenom (14) i (15) u (16):<sup>150</sup>

$$C_H = C_{\omega_2}(M_H + B_H + B_1^L + B_2^L + E_H + H_{PI}K_{hH}) +$$

$$C_{\omega_2}W_H + \frac{\sigma_1(\frac{C_{\omega_2}W_H + C_{\omega_1}Y_H}{W_H} - 1)}{\frac{Y_H}{W_H} - 1} + \frac{\sigma_1(\frac{C_{\omega_2}W_H + C_{\omega_1}Y_H}{W_H} - 1)}{\frac{\sigma_1}{W_H} - 1}$$

(50)

gdje je:

$$\sigma_1 = \omega_g \left( L_1 (\alpha_u \alpha_{gu} - \alpha_l (\tau_\omega - 1)) + L_2 \alpha_r \alpha_{gr} \right) - (\tau_c - 1) (r_{KHAV} B_{KHAV} + P_G^* r_{kH}^* + P_G r_{kH})$$

Rješavajući (50) po  $\tilde{\tau}_\omega$  i  $\tilde{\omega}_g$ , dobijamo (51) i (52) respektivno:

$\tilde{\tau}_\omega$

$$(1 - \frac{\sigma_3}{W_H})(\sigma_2 - \frac{\sigma_1(\omega_g(L_1(\alpha_l + \alpha_u \alpha_{gu}) + L_2 \alpha_r \alpha_{gr}) - (\tau_c - 1)(r_{KHAV} B_{KHAV} + P_G^* r_{kH}^* + P_G r_{kH}))}{\frac{\sigma_3}{W_H} - 1}) = \frac{L_1 \alpha_l \omega_g \sigma_1}{L_1 \alpha_l \omega_g \sigma_1}$$

(51)

odnosno,

$$\tilde{\omega}_g = \frac{(\frac{\sigma_3}{W_H} - 1)(\sigma_2 + \frac{\sigma_1(\tau_c - 1)(r_{KHAV} B_{KHAV} + P_G^* r_{kH}^* + P_G r_{kH})}{\frac{\sigma_3}{W_H} - 1})}{\sigma_1(L_1(\alpha_u \alpha_{gu} - \alpha_l(\tau_\omega - 1)) + L_2 \alpha_r \alpha_{gr})} \quad (52)$$

<sup>149</sup> Definišemo respektivno (51) i (52) za poresku stopu na zarade ( $\tilde{\tau}_\omega$ ), i nominalnu bruto zaradu prije poreza na dohodak ( $\tilde{\omega}_g$ ), iako navedeno možemo primijeniti za bilo koju egzogenu promijenljivu iz jednačina (14) i (15).

<sup>150</sup> Jednačine (50), (51) i (52) smo odredili koristeći MATLAB® R2018b Symbolic Toolbox.

gdje je:

$$\sigma_1 = \frac{C_{\omega_2} W_H + \sigma_2}{W_H} - 1$$

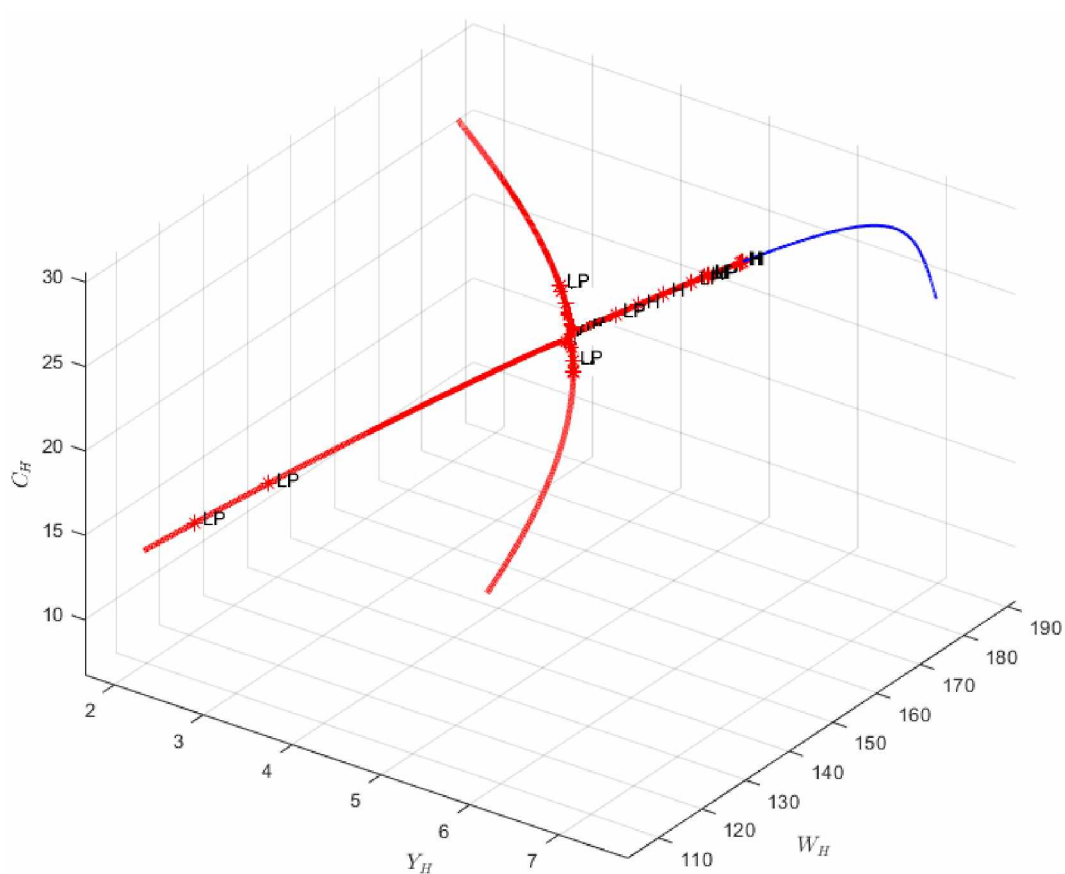
$$\sigma_2 = \frac{C_{\omega_2} W_H + \frac{\sigma_3 \left( \frac{C_{\omega_2} W_H + C_{\omega_1} Y_H}{W_H} - 1 \right)}{\frac{Y_H}{W_H} - 1}}{\frac{\sigma_3 \left( \frac{\frac{C_{\omega_2} W_H + C_{\omega_1} Y_H}{W_H} - 1}{\frac{Y_H}{W_H} - 1} - 1 \right)}{\frac{\sigma_3}{W_H} - 1}}$$

$$\sigma_3 = \omega_g \left( L_1 \left( \alpha_u \alpha_{gu} - \alpha_l (\tau_\omega - 1) \right) + L_2 \alpha_r \alpha_{gr} \right) - (\tau_c - 1) (r_{KH_{AV}} B_{KH_{AV}} + P_G^* r_{KH}^* + P_G r_{KH})$$

Koristićemo izraze (51) i (52) za inverzno modeliranje makroekonomske, fiskalne i monetarne politike EU.

### 5.3.1 Model ukupno raspoloživog dohotka, imetka i potrošnje ( $Y_H - W_H - C_H$ model) i pojava haosa

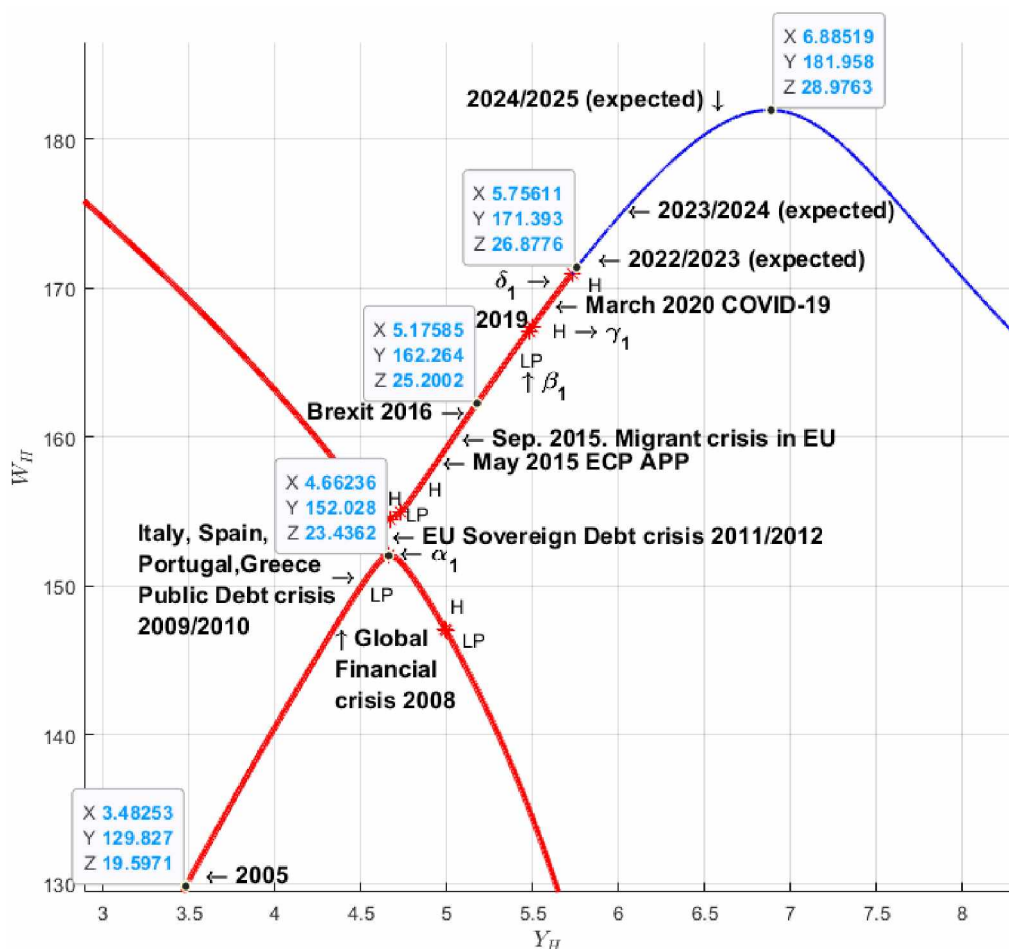
U analizi NDJPR, prvi cilj je pronalaženje singulariteta kao što su ravnotežne tačke i/ili krive. Na slici 115 predstavljamo EC definisanu kontinuitetima u  $\mathbb{Z}_+$  i  $\mathbb{Z}_-$ . Prve dvije granične tačke (LP) koje se nalaze dolje lijevo na slici 115, a koje definišemo kroz kontinuitet u  $\mathbb{Z}_-$  vremenu, imaju samo teoretsku vrijednost. Kontinuitet karakterističnih tačaka bifurkacije u  $\mathbb{Z}_+$  odgovara stvarnim podacima. Rješenja i nastavci za codim 0 (ekvilibriruma), codim 1 (bifurkacije nastale promjenom parametra  $d$ ) i codim 2 (bifurkacije nastale promjenom parametra  $d$  i  $e$ ), su sve zasnovane na (33) [29][84][68][178].



Slika 115. Fazni portret codim 0 ravnotežnih tačaka i krivih u faznom prostoru

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 116 predstavlja projekciju na  $x-y$  ravan tačaka i krivih codim 0 (ekvilibrjuma) i codim 1 (bifurkacije nastale promjenom parametra  $d$ ).



Slika 116. Projekcija na  $x$ - $y$  ravan codim 0 i codim 1<sup>151</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Oznaka LP na slikama je zapravo bifurkacija granične tačke (LP). LP-ovi imaju mnogo imena u NDA literaturi. Jedno od široko poznatih i korištenih imena je bifurkacija sjedla-čvora. Oznaka H odgovara Hopf (tj. Andronov-Hopf) bifurkaciji [29] str. 78. Generalno, u zavisnosti od tipa LP ili H, možemo imati u ekonomskom smislu suprotnu promjenu trenda u kombinaciji sa istom konvergentnom vrednošću (LP) ili sporim

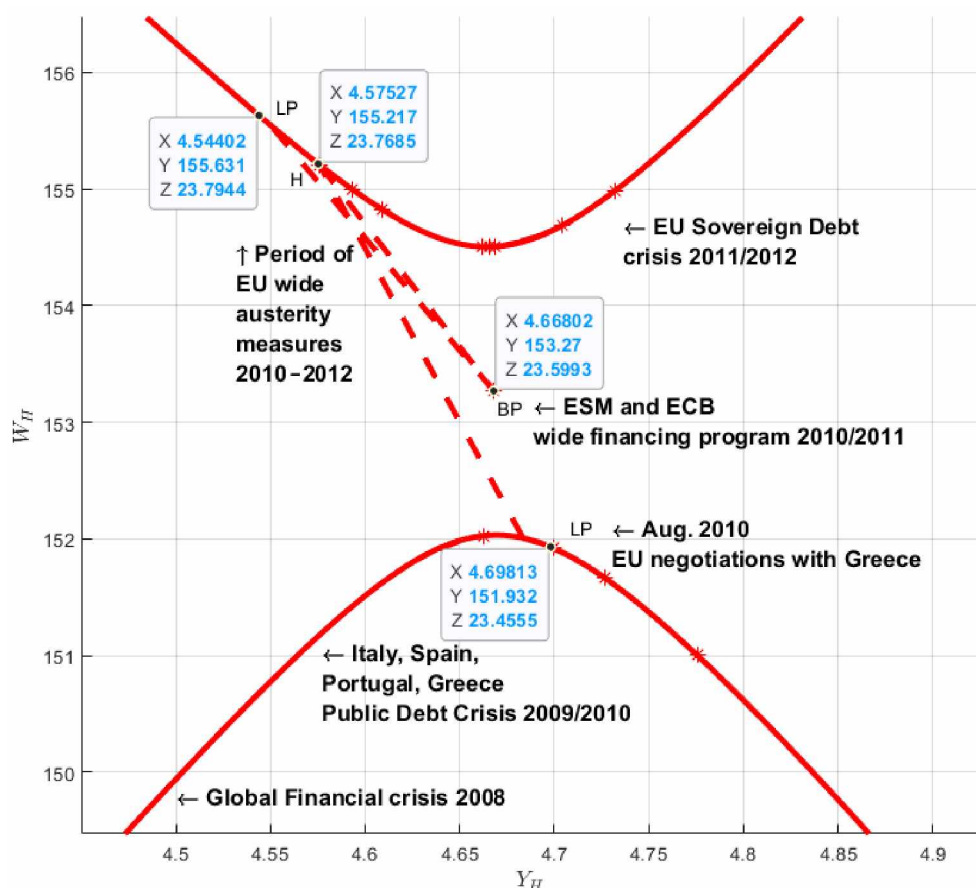
<sup>151</sup> Nemoguće je imenovati i predstaviti, na jednoj maloj slici, sve turbulentne događaje unutar EU u posljednje dvije decenije; shodno tome, označili smo samo najznačajnije događaje (sa najvećim uticajem). Zbog odnosa teksta i slike, neke strelice pokazuju približan smjer ili lokaciju na grafiku.

(„stagnirajućim”) rastom, ili recesijom (H). Ponekad, možemo imati tzv. *eksplozivnu vremensku seriju* koju karakteriše eksponencijalno povećanje Hopfovog perioda, i pozitivno  $\lambda$  kako se vrijeme povećava (teži u plus beskonačno). Posljednje navedeno predstavlja hiperinflaciju, a samim tim i sveukupnu stagnaciju u ekonomiji.

Međutim, pomenuto ne možemo jednoobrazno implementirati, jer svaki sistem ima svoje specifičnosti. Na primjer, ograničen privredni rast sa stagnacijom na kraju nekog perioda je moguć, ali za određene vrijednosti varijable i karakteristike konkretnog singulariteta. Međutim, na prvom mjestu navedeno zavisi od ukupnih uslova (karakteristika) sistema i njegovih konkretnih rješenja. Jednostavna ekonomska interpretacija NDA ne postoji. Istraživači moraju da razmotre raznovrsnost ponašanja toka i singularitete da bi mogli interpretirati rezultate.

Prateći evoluciju stvarnih podataka na ekvilibrijumskoj krivoj, te nakon kratkog kvazilinearnog uspona, dolazimo do prve LP. Položaj pomenute LP je na „vrhu” donje nestabilne (crvene) krive ekvilibrijuma. Kako bi analiza za svaku LP tačku i pripadajuće im koeficijente normalne forme uzela previše vremena i prostora, ograničićemo se na analizu tačaka i krivih koje imaju realnu makroekonomsku vrijednost i korelaciju [29] str. 103. Polazimo od početnih vrijednosti varijabli  $(x_0 - y_0 - z_0) = (Y_H - W_H - C_H) = (3,4823 - 129,8 - 19,6)$  za 2005. godinu (slika 116) i tražimo ekvilibrijume. Zatim, imajući u vidu donji levi dio dijagrama, dolazimo do gornje LP označene sa  $\alpha_1$  sa vrijednostima  $(4,662 - 152 - 23,44)$  za godine 2009/2010. Ista ima  $\alpha_{a1} = -1,373$ , što znači da je tačka nedegenerisan čvor. Nadalje, nailazimo na tačku veće kodimenzije, tj. višeg reda (codim 2) koja se pojavljuje kao tzv. *tačka grananja* (engl. Branching Point – BP) (vidi sliku 117) i ima koordinate  $(4,66802 - 153,27 - 23,5993)$ . Zumiranjem dijela slike 116 dobijamo sliku 117 koja predstavlja kodim 1 bifurkaciju (*promjena parametra d*).





Slika 117. Codim 0, 1 i 2 bifurkacije parametara  $d$  i/ili  $e$  – zumiran centralni dio

slike 116<sup>152</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Codim 1 bifurkacija direktno pokazuje kako promjena dohotka ( $Y_H$ ) indirektno utiče na imetak ( $W_H$ ), a direktno na potrošnju ( $C_H$ ). U godinama 2010/2011 (slika 116), nailazimo na BP upravo onda kada je EU bila u velikoj krizi povezanoj sa izuzetno visokim javnim dugom, i posljedično kada je pokrenut evropski mehanizam za stabilnost (engl. European Stability Mechanism – ESM), zajedno sa više raznovrsnih programima finansiranja od strane ECB. Kriza je primorala ESM i ECB da sprovedu opsežnu finansijsku podršku u EU.

<sup>152</sup> Zbog odnosa teksta i slike, neke strijelice pokazuju približan smjer ili lokaciju na grafiku.

Od 2009. do 2012.  $Y_H$  (slika 117) vrijednosti godinama osciliraju između 4.698–4.575–4.668–4.544–4.669 triliona. Navedeno nedvojbeno ukazuje da je EU tada bila u svojevrsnoj ekonomskoj recesiji. BP tačka dodatno sugerise da je tada postojao i strukturalni prekid između dohotka i bogatstva EU stanovništva, koji bi nadalje mogao imati određene haotične osobine (iako, ne nužno!). Dodatno, navedeno makroekonomski i suštinski znači da postoji iznenadna promjena u ponašanju dohotka i imetka. Umjesto da prateći tok kriva krene ka dolje-desno, ista obje varijable „okreće” ka gore-lijevo, tj. prati predmetnu ekvilibrirumsku krivu nakon BP preloma. Navedeno „ponašanje” ekvilibriruma predmetnih varijabli je specifikum ovog sistema (modela), ili sličnih SNDJPR, ali nije generalno pravilo.

Zatim, nastavljamo prateći gornji-desni dio dijagrama odnosno krive, do tačke (5,001–159,3–24,67) za 2015. godinu [29][188][84]. Stvarno-izračunata numerička vrijednost varijable  $Y_H$  je 4,9950099, i ista se koristi u svim proračunima. Međutim, zbog numeričke rezolucije grafika „najbliža” tačka joj je 5,001 triliona, pa je ona označena na slici 116. Generalno gledano, kao i iz ugla modela, relativno male razlike u koordinatama proizilaze zbog prelaska sa stvarnih na modelske podatke (u poređenju sa izračunatim vrijednostima). Sve vrijednosti su u maksimalnom rasponu preciznosti do 1%.<sup>153</sup> Pomenuto je više nego dovoljno za makroekonomsku analizu.

$LP_{\alpha_1}$  je nestabilna tačka koja predstavlja potrošnju ranije akumuliranog imetka (bogatstva) EU stanovništva. Referenca u vremenu je ubrzo nakon globalne finansijske krize 2008. Nakon perioda „trošenja štednje”, dolazi do značajnog pada ekonomske aktivnosti. Globalna finansijska kriza 2008. godine je umnogome uticala na finansijske i komercijalne sektore EU. Zanimljivo je da u budućnosti model predviđa stabilan opadajući trend nakon 2024/2025. godine (sudeći po toku sistema).

Naravno, ECB je pratila stanje makroekonomije EU u 2011/2012. Dodatno, djelovala je „umirujuće” i stabilizirajuće na tržišta i finansijski sektor koristeći svoju čuvenu izjavu (stav) „što god je potrebno” (engl. *whatever it takes*) da će ECB preduzeti u očuvanju eura i stabilnosti EU. Navedeno, je bila evropska reakcija na „efekte valova” i presipanja globalne

---

<sup>153</sup> Najčešće, znatno manje od 1%.

finansijske recesije 2008 u EU. Posljedično, pomenuta svjetska finansijska kriza (SFK) iz 2008. godine je veoma duboko uticala na EU makroekonomiju. Veći problemi u EU su počeli da postaju „vidljivi” u ljeto 2010. godine, kada se nekoliko zemalja EU suočilo sa bankrotom zbog niskog odnosa BDP-a spram javnog duga. Zemlje koje su bile u najrizičnijoj situaciju su: Grčka, Italija, Portugal i Španija. Do sredine 2011. godine cijela situacija je dostigla kulminaciju. Različiti naponi EU lidera pokušali su da obuzdaju bankrot pomenutih zemalja, posebno u slučaju Grčke. Održan je niz pregovora između lidera Evropskog Savjeta (EC) EU, ECB-a, Međunarodnog monetarnog fonda (MMF-a), Svjetske banke (SB) i Grčke. Kreditni aranžmani za zaštitu od bankrota (engl. Credit Default Swap – CDS), koji su bili garantovani od strane Grčke njenom javnom imovinom – koju su uglavnom već i do tada „držali u šaci” MMF i Goldman Sachs, uticali su negativno na izgleda za izdavanje novih zajmova, a pregovore učinile veoma teškim i mučnim [130]. Nakon pronalaženja „zajedničkih i dodirnih tačaka”, mjere štednje su sprovedene u nekoliko evropskih zemalja, na primer, u Grčkoj, Italiji, Španiji itd. Kada se činilo da se cjelokupna situacija smiruje, na horizontu su se pojavile nove deflatorne i recesione brige za EU. Mjere racionalisanja i izrazite štednje (engl. austerity measures) u javnom sektoru i potrošnji su zaustavile razvojni zamah EU, i ugrozile njene dugoročne ciljeve ograničavanja (targetiranja) inflacije i smanjenja nezaposlenosti u EU.

Pomenuto bi sigurno izazvalo opći opadajući trend, kao što je to prikazano na slikama 116 i 117 u donjem-desnom dijelu dijagrama, da nije bilo ECB APP-a koji je doveo do oporavka i prosperiteta EU. Situacija u EU je ponovo počela da se stabilizuje od 2012. do 2014. Međutim, upravo 2015. je nova i teška migrantska kriza pogodila EU. Pomenuto je intenzivno započelo u ljeto 2015. i trajalo je narednih nekoliko godina, nastavljajući se čak i do danas. Dodatno, u prvoj polovini do sredine 2016. godine, izgledi za ostvarenje „Bregzit-a”<sup>154</sup> su „uzdrnali” tržišta EU (sa pojavom velike volatilnosti, gubitkom kapitala, itd.), dok ukupna stabilnost ekonomije bloka (EU) je bila u nekoj vrsti „nadrealnog stanja”. Hipotetički gledano, da se kojim slučajem EU suočila samo sa jednim od navedenih izazova, čak i tada

---

<sup>154</sup> *Bregzit* je popularan naziv za izlazak Ujedinjenog Kraljevstva (UK) iz Evropske Unije (EU), koji je ostvaren po osnovu organizovanog referenduma u UK, juna 2016. godine.

bi ukupni NDA tok 3D modela bio naniže. Međutim, u relativno kratkom periodu EU se suočila sa nekoliko problema. ECB APP iznosio je oko 3,2 triliona eura i kvalitativno je promijenio trend pada.<sup>155</sup>

Nadalje, trend je započeo da se kreće uzlazno, i ECB je paralelno pokrenula izdavanje kredita sa niskim kamatnim stopama finansijskom sektoru u vrijednosti do/oko 1,5 triliona eura. Kriza javnog duga zemalja EU je bila samo jedan od mnogih problema koji su uticali na ekonomiju i politiku EU. Tokom navedenog vremenskog perioda troškovi života običnih ljudi u EU su porasli zbog inflacije (engl. Harmonised Index of Consumer Prices (HICP)). Harmonizovani indeksi potrošačkih cijena (HICP) mjere ponderisanu promjenu potrošačkih cijena za dobra i usluge koje troše domaćinstva unutar EU tokom određenog (posmatranog) vremena.<sup>156</sup> HICP je u navedenom periodu bio na visokom nivou, tačnije najvećem ikada do tada u EU, a posljedično zbog „jeftinog novca” koji je vještački „upumpavan” u makroekonomski sistem EU [25]. U narednih pet godina, prateći krivu ravnoteže (ekvilibriruma) sistema, dolazimo do tačke sa sljedećim vrijednosnim koordinatama varijabli (5,001–159,3–24,67) u 2015. Sve vrijednosti od  $Y_H = 5,001$  do 5,6 predstavljaju „relativno predviđanje”, i u vremenu se referenciraju na period od 2016. do 2019. godine.

Nakon  $Y_H = 5,6$  (slika 116) svi sljedeći podaci predstavljaju pravu budućnost.  $LP_{\beta_1}$  tačka ima pozitivan koeficijent normalnog kvadratnog oblika  $a_{\beta_1} = 2,088$ , što nadalje znači da je  $LP_{\beta_1}$  nedegenerisani čvor. To znači da ravnotežni manifold u blizini  $LP_{\beta_1}$  više izgleda „kao parabola”. Zanimljivo je da, period između  $LP_{\alpha_1}$  i  $LP_{\beta_1}$  podrazumijeva da porez na zarade (37) treba da bude veći za 5% – 15%, a plate (38) veće za oko 0,5%.

Navedeno važi za cijeli izučavani period, osim za godine 2017/2018 i 2019, gdje je EU trebalo da smanji poresko opterećenje na zarade za –9,04% u 2017/2018, a za –10,71% u 2019. godini. Prezentovano je bila posljedica „vještačkog povećanja novčane mase” u makroekonomiji EU, a zbog postizanja ciljne monetarne politike ECB. Promjene

---

<sup>155</sup> Više detalja na web link-u: <https://www.ecb.europa.eu/mopo/implement/app/html/index.en.html#pspp>, pristupljeno 26.04.2022.

<sup>156</sup> HICP može biti, mjesečni, godišnji, uporedni godišnji, itd.

plata/nadnica od oko 0,5% su zasnovane na godišnjem povećanju stope, i koreliraju sa naporima ECB da donekle „zauzda” promjenjivi i rastući HICP.

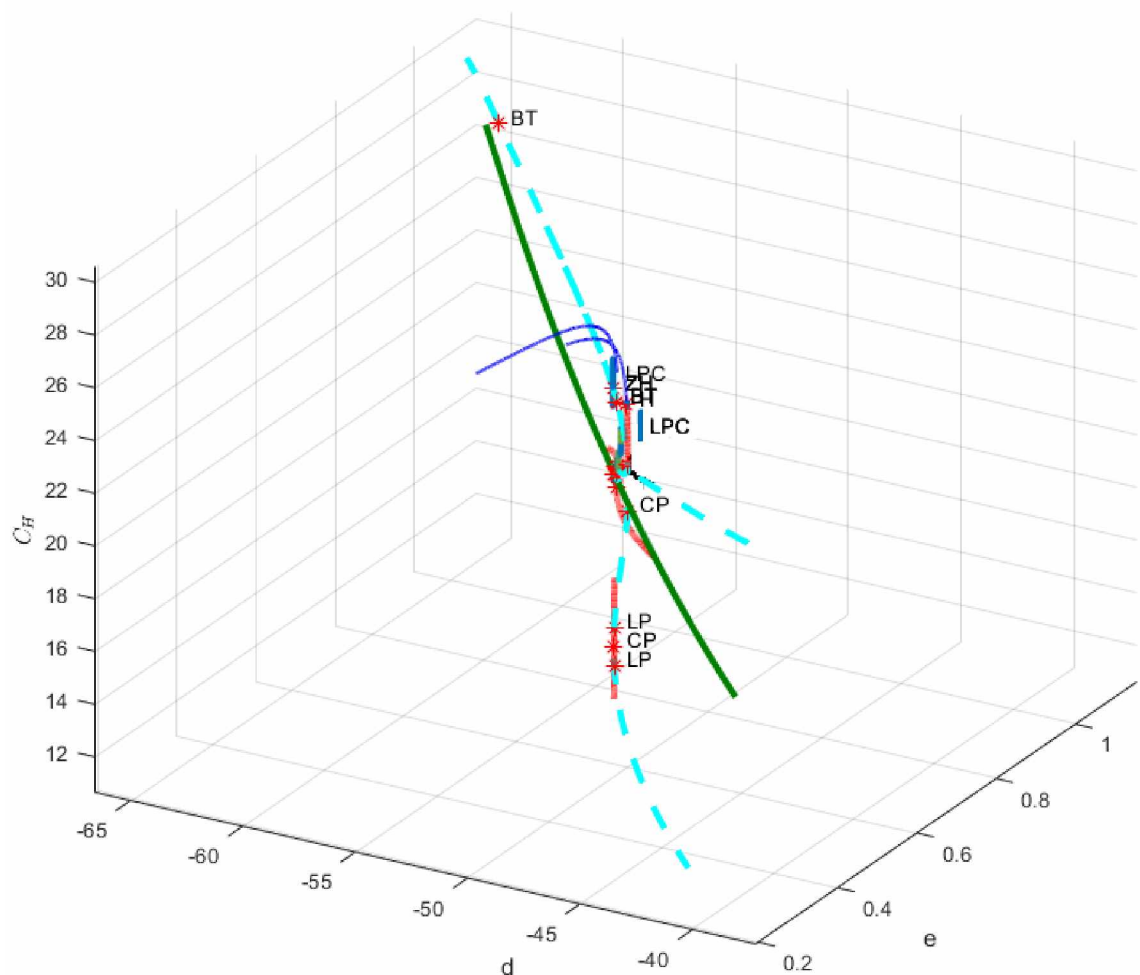
Veći porezi omogućavaju bolje socijalne naknade i isplate za penzionere i nezaposlene. Populacija EU koja se kvalifikovala za penziju (65+) je oko 1,3 puta veća od radno sposobnog stanovništva, što predstavlja veliki napor za vođenje socijalne politike, odnosno politike zapošljavanja i rada [1][29].

Prateći gornju desnu krivu na slici 116, nailazimo na nestabilnu Hopfovu tačku bifurkacije  $H_{\gamma_1}$ . Ista, ima prvi Ljapunov koeficijent  $l_1 = 3,6342560$ . Postoje dvije sopstvene vrijednosti sa  $\text{Re}\{\lambda_{1,2}\} \approx 0$  (za vrijednosti parametra). Kritične frekvencije su  $\text{Im}\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$ , dok je prvi Ljapunovljev koeficijent mali i pozitivan. Treća sopstvena vrijednost jeste  $\text{Re}\{\lambda_3\} = 2,9364$ , i  $\text{Im}\{\lambda_3\} = 0$ . Prezentovano nagovještava da u „blizini” mora da postoji nestabilni LC koji doživljava bifurkaciju iz ravnoteže (ekvilibriruma) [1][29]. Navedeno, u makroekonomskom smislu, implicira „osciliranje” oko određenih vrijednosti rezultujući sa dugoročnom stagflacijom agregatnih prihoda, imetka (bogatstva) i potrošnje.

Dalje prateći gornju desnu-krivu, dolazimo do tačke u kojoj se ravnoteža mijenja iz nestabilne u stabilnu (crveni u plavi prelaz na slici 116), u tački (5,756–171,4–26,88). Pomenuta tačka se poklapa sa stabilnom Hopfovom ravnotežom  $H_{\delta 1}$ , što znači da će se dohodak, imetak i potrošnja stalno približavati (konvergirati) „oblasti” na grafiku sa bliskim vrijednostima.  $Y_H$  je stekao uzlazni trend koji je trebao dostići vrhunac 2021/2022. Međutim, zbog iznenadnog izbijanja pandemije COVID-19 navedeno se nije dogodilo, te se sada očekuje da će se on dostići do 2024/2025, ukoliko današnje geopolitičke okolnosti to dozvole.

Nakon vrijednosti agregata od (6,885–182–28,98) trebalo bi da dođe do „stabilnog” pada  $W_H$  zbog nesinhronizovane monetarne i fiskalne politike EU [130][25].

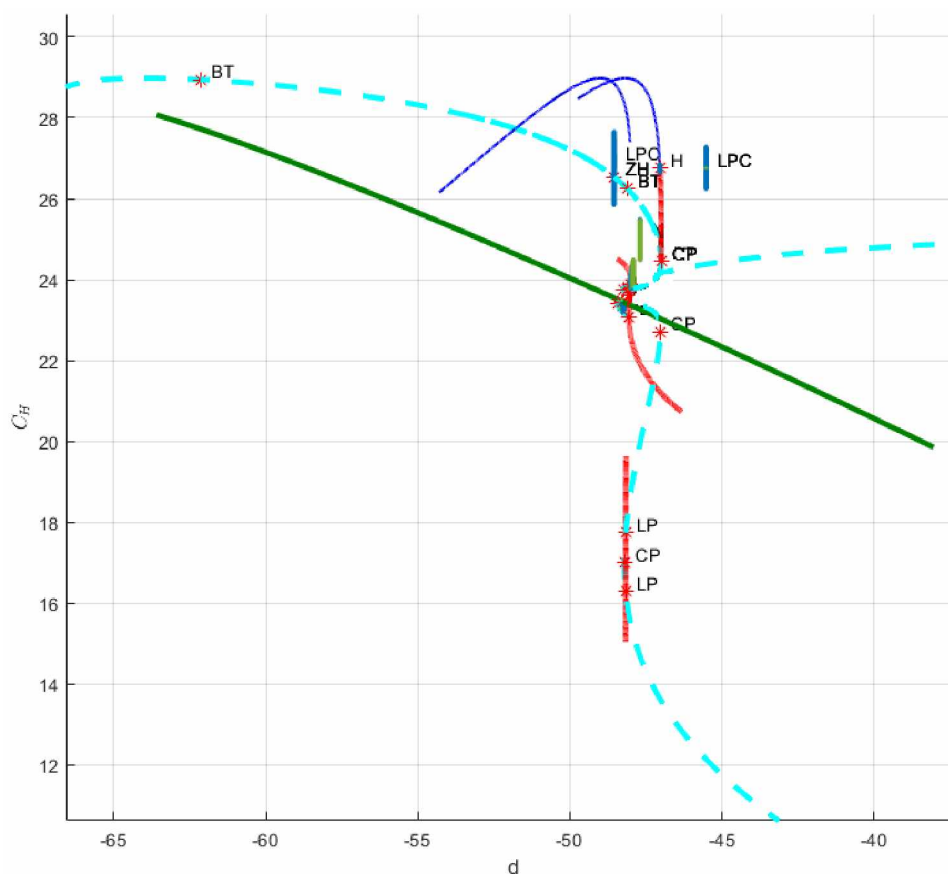
Bitno je naglasiti da bifurkacija i kontinuitet (nastavak) parametra  $d$  i/ili  $e$  u 3D faznom prostoru se razlikuju po izgledu od onoga što je opće poznato, na primjer, logistička mapa. Postoji mnogo singulariteta za sisteme (31) do (33). Čak, i njen mali dio je nemoguće predstaviti u okviru disertacije. Da bismo stvorili opštu sliku, kao ilustraciju samo, ćemo predstaviti nekoliko ključnih i zanimljivih bifurkacija prikazanih na slikama 118–123.



Slika 118. Bifurkacija parametara  $d$ ,  $e$  i  $C_H$  vrijednosti

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

U okviru disertacije smo „zagreball površinu” ogromne količine zaključaka do kojih je moguće doći pomoću NDA. Pomenuto je očigledno prema složenosti bifurkacija prikazanih na slikama 118 i 119. Dodatno, na slikama 118 i 119 zajedno su prikazane codim 0, 1 i 2 bifurkacije. Iste, jednoznačno upućuju na međusobnu korelisanost singularitetnih tačaka sa redom bifurkacije, kao i sa stvarnim događajima koji su intrinzično i inherentno povezani sa agregatnim vrijednostima potrošnje u okviru EU makroekonomije.



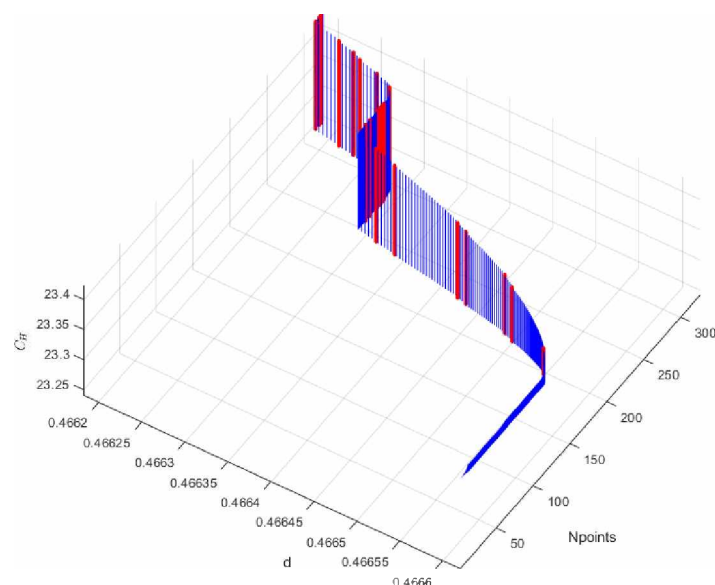
Slika 119. Bifurkacija parametra  $d$  i  $C_H$  vrijednosti (planarna projekcija slike 118)

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Referencirajući se na sliku 119, postoji slična („u ogledalu”) slika kada se prikazuju bifurkacije parametra  $e$ . Međutim, zbog analognosti prikaza i zaključaka istu ne prikazujemo.

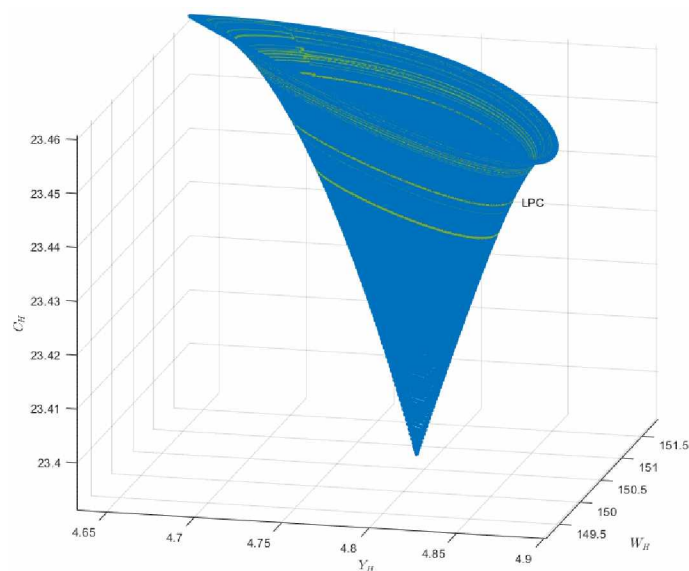
LPC predstavljeni na slici 121 su u 3D prikazuju kako se sistem ponaša za određenu vrijednost parametra  $d$ . Za razliku od slike 120, ovdje je predstavljena opšta međuzavisnost između  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ . Kako bismo u potpunosti razumjeli prezentovanu analizu (sliku), potrebno je da varijable i bifurkacije mentalno vizualizujemo (zamislamo) u 4D.





Slika 120. Bifurkacija parametra  $d$ , izračunate-iteracione tačke ( $Npoints$ ) i  $C_H$  vrijednosti

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

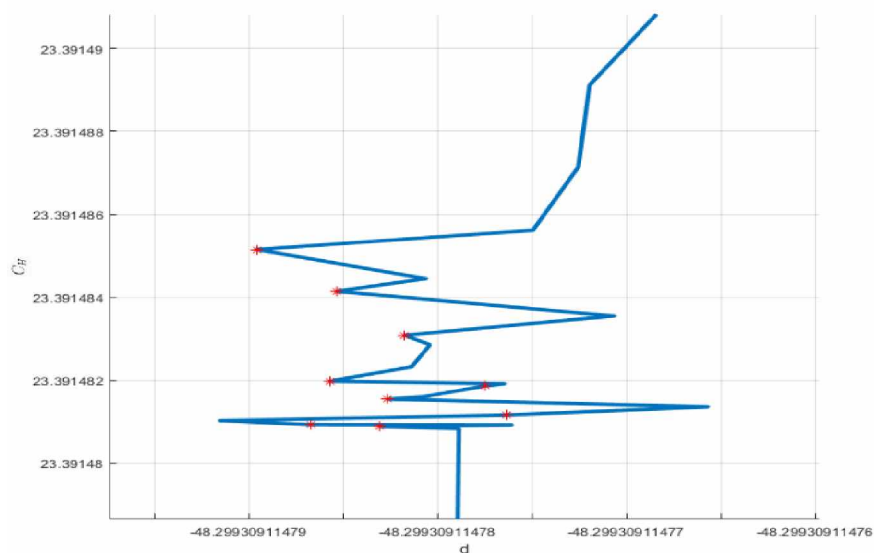


Slika 121. Bifurkacija parametra  $d$  sa  $Y_H$ – $W_H$ – $C_H$  vrijednostima, i stvaranje višestrukih LPC koji koreliraju sa slikom 120.

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



Slika 122 prikazuje kako mala perturbacija parametra  $d$  može uticati na promjenu zavisne varijable, odnosno ukupne raspoložive potrošnje ( $C_H$ ). Dodatno, ekonomski smisao je kako promjena ukupno raspoloživog dohotka direktno utiče na promjenu ukupno raspoložive potrošnje, i indirektno na ukupno raspoloživo bogatstvo.



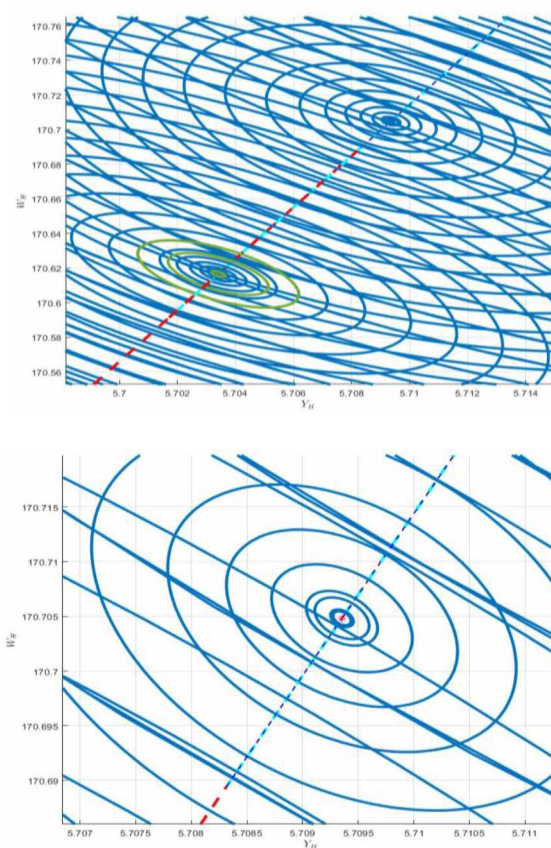
Slika 122. Bifurkacija parametra  $d$  i nagle promjene  $C_H$  vrijednosti. Crvene zvijezdice predstavljaju bifurkacione singularitete.

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Parametar  $d$  utiče na  $C_H$  na nepravilan način za ekstremno male perturbacije od jednog eura. Sprovedemo sljedeći misaoni eksperiment: pretpostavimo da osoba pođe do kioska da kupi novine. Dok pokušava da izvadi novčić iz džepa, novčić propada kroz ventilaciju na podu i trajno se gubi. Da li je moguće da opisana situacija (prema slici 122) izazove „efekat leptira” u makroekonomiji EU, koji bi vodio do haosa? Odgovor je, naravno ne. Haos u makroekonomiji je praktično nemoguć, jer postoji „previše slobodne volje” i uključene varijable ne prate striktno opisne jednačine i/ili racionalno ponašanje. Dodatno, određena kombinacija parametara i vrijednosti promenljivih treba da opstane u vremenu, odnosno da se mijenja u skladu sa pravilima bifurkacije. Navedeno ima izuzetno niske

vrijednosti verovatnoće. Izvan numeričkih i matematičkih vrijednosti, rezultati sa slike 122 nemaju nikakvo praktično značenje.

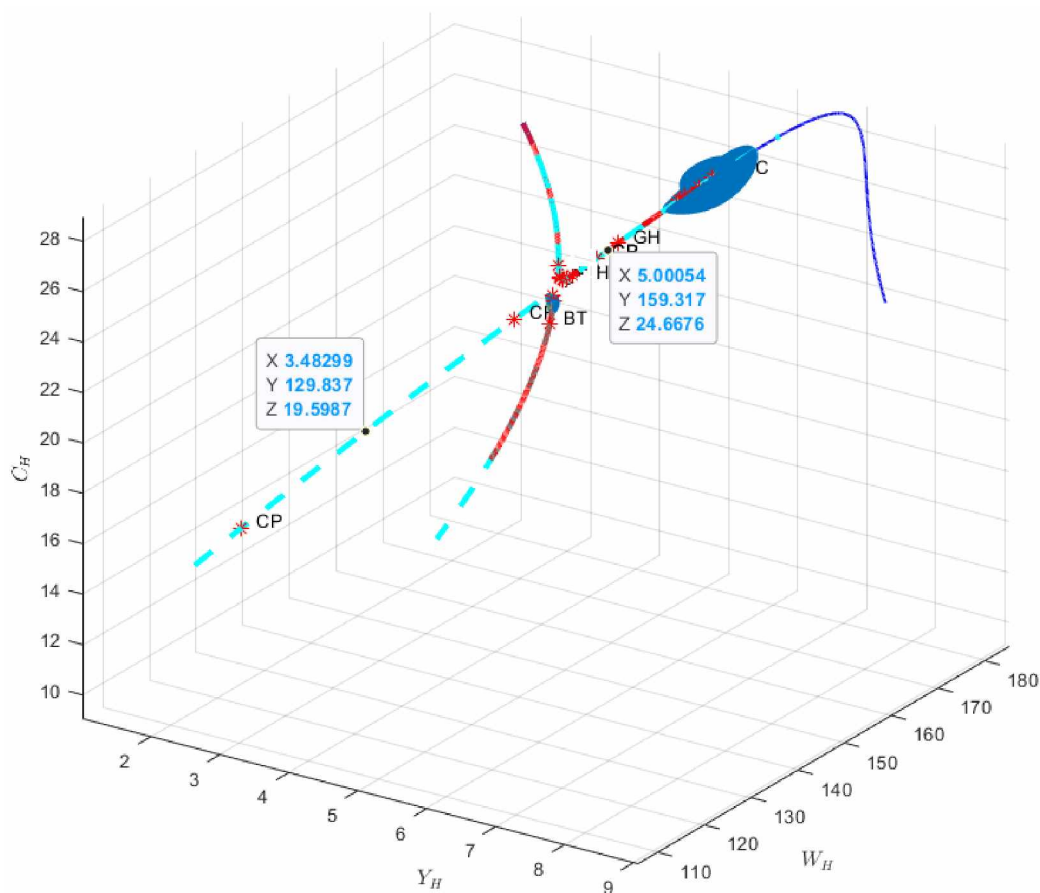
Slika 123 predstavlja zumirani region gornjeg-desnog dijela grafika prikazanog na slikama 113 i 114. Nekoliko LPC-a i stotine LC-a međusobno interaguju i vrše tzv. *razmjenu stabilnosti* u ograničenim regionima. Između LPC, i od singulariteta imamo „odskakuću” promjenu stabilnosti, gdje LC nestaju i/ili se rađaju. Lokalna dinamika ima zanimljive (čisto) matematičke karakteristike i vrijednosti. Međutim, globalna dinamika podsjeća na čuvenu teoriju makroekonomskih realnih poslovnih ciklusa (engl. Real Bussines Cycles – RBC).



Slika 123. Zumirani dio gornjeg-desnog dijela grafika na slikama 113. i 114.<sup>157</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>157</sup> Nekoliko LPC-ova i stotine LC-ova interaguju, sudaraju se, prepliću i račvaju. Značajno je za primijetiti, vrijednosti u djelovima stotina ili hiljada na y-osi, odnosno u djelovima hiljada ili desetina hiljada na x-osi (respektivno).

Slika 124. Codim 1 i 2 bifurkacije (parametar  $d$  i/ili  $e$ )<sup>158</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

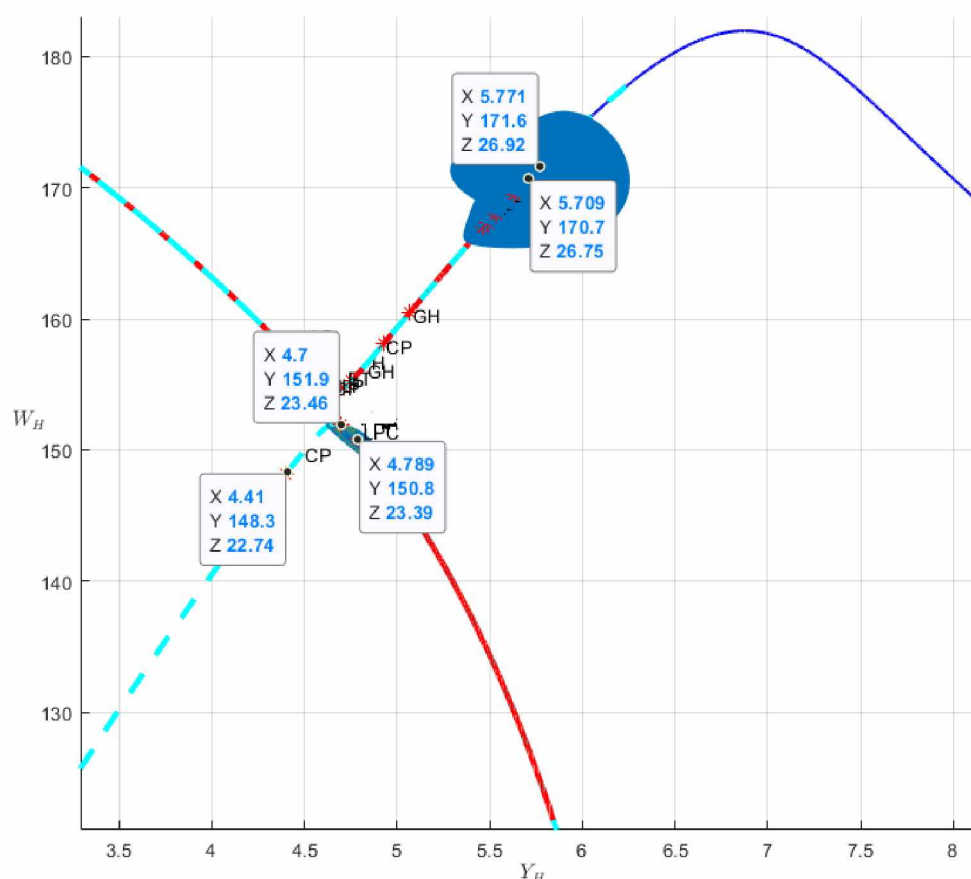
Na slici 124. predstavljamo bifurkacije codim<sup>159</sup> 1 i 2 za parametar  $d$  i/ili  $e$ . Kodim 1 bifurkacija parametra  $d$  ukazuje na to kako promjena vrijednosti  $Y_H$  indirektno utiče na  $W_H$ , a direktno na  $C_H$ . Slično, za kodim 1 bifurkacije postoji i indirektan uticaj  $W_H$  preko parametra  $e$  na  $Y_H$ , ali uglavnom  $C_H$ . Codim 2 ilustruje, između ostalog, „skok” EC iz donjeg u gornji dio (kao što je to ranije prikazano na slikama 116 i 117).

<sup>158</sup> Označene vrijednosti odgovaraju 2005. i 2015. godini.<sup>159</sup> Uбудуće ćemo englesku riječ „codim” označavati sa našom riječju „kodim”.

Višestruke LC krive nastaju u tački (4,795–151,1–23,43). Stabilnost za neke od pomenutih LC, u ovom regionu dijagrama, odskake naprijed-nazad, što ukazuje na promjenu stabilnosti između stabilnih i nestabilnih LC za specifične vrijednosti parametara. Zbog relativno malih promjena parametara, i malih promjena vrijednosti endogenih varijabli, prethodno pomenuta dinamika LC i LPC nema značajan makroekonomski uticaj. Posljedično, nećemo ga dalje analizirati. U makroekonomskom smislu, LPC i LC predstavljaju ciklično kretanje u istoj oblasti grafikona – naprijed-nazad, a koje u ekonomiji popularno nazivamo „stagnacija”.

Na slici 125 predstavljamo  $Y_H$  i  $W_H$  planarne projekcije za kodim 1 i 2 bifurkacije, prethodno prikazane na slici 124. Pozitivna promjena trenda se dešava u LP (4,698–151,9–23,46). Nakon toga, sistem je izbjegao makroekonomsku recesiju, koja je na dijagramu predstavljena (okarakterisana) sa LPC u (4,789–150,8–23,39) (Slika 125).

Prezentovani LPC se odvaja od LC. Iz pomenutog LC-a proizilazi više LPC-ova. U ekonomskom smislu, isti predstavljaju dugotrajnu „zamku” za različite vrijednosti i promjene  $Y_H$  i  $W_H$ ! [25] Prvi značajniji LPC ima period od  $T_1=13,95387$  perioda/godina (slika 125). Ipak, potencijalna stagnacija ne bi trajala toliko dugo, jer je period obim duž cijele dužine krive. U stvarnosti, navedeno bi trajalo polovinu vrijednosti  $T_1$  – znači oko 6–7 godina, što je i dalje relativno dug period za stagnaciju privrede. Ostali LPC koji proizilaze iz odgovarajućeg LC-a imaju razlike u promjeni perioda reda veličine od  $\approx 10^{-4}$ , što u makroekonomskom smislu tumačimo da ima „nepromijenjen” period. Svaka nagla promjena vrijednosti promenljivih prekinula bi kompletnu putanju kretanja i samim tim dužinu perioda, te bi krenula u nekom drugom pravcu – što je posebno moguće u ekonomiji. Ekonomija, kao društvena nauka, mnogo puta zavisi od diskrecionih odluka zatvorene grupe ljudi, ili individualno „iskrojenih” odluka. Pomenute odluke često direktno određuju i karakterišu kvalitet života stotina miliona ljudi!

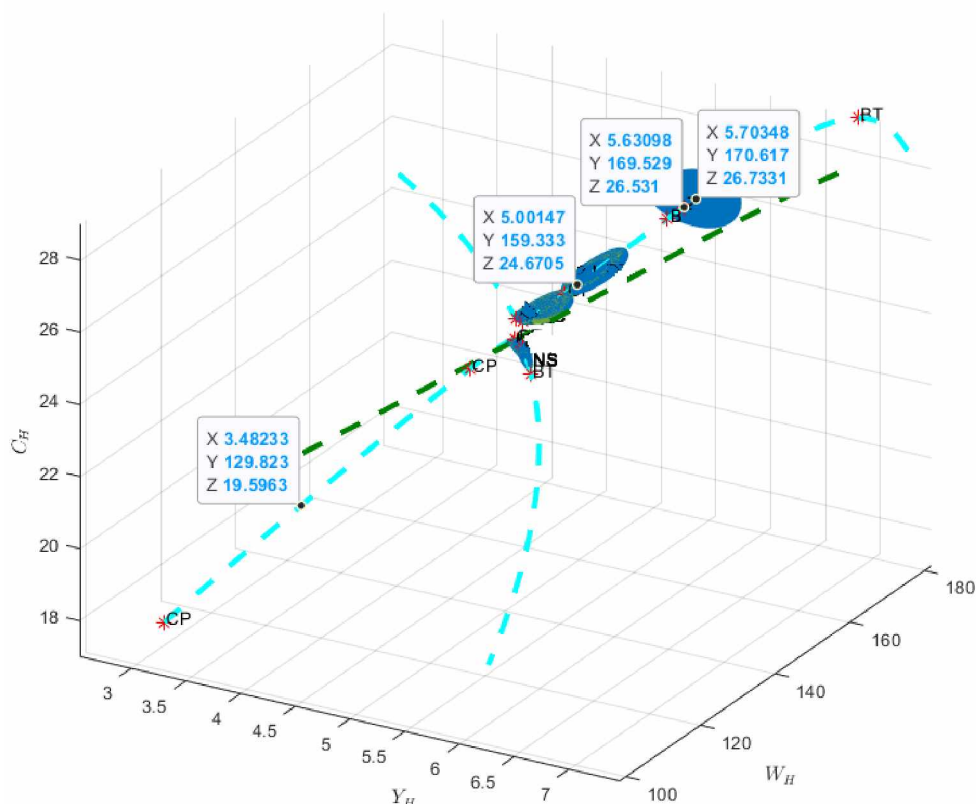


Slika 125. Codim 1 i 2 bifurkacije (parametar  $d$  i/ili  $e$ ) – planarna projekcija slike 124

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Crvena linija, kao što je ranije navedeno, predstavlja nestabilnu ravnotežu. Isprekidani crveni dio je samo grafički prikaz preklapajuće nestabilne ravnoteže i LP krive za različite kontinuitete singulariteta. Zelena linija označava LPC, a pastelno plava označava LC. Modro-plava linija označava stabilnu ravnotežu(e), i ponekad se preklapa sa različitim kontinuitetima. Ljubičasta boja linija označava Hopfovu kontinuiranu ravnotežnu krivu u prostoru viših parametara (kodim 2), tj. u našem slučaju dva parametara  $d$  i  $e$  – koji su slobodni za promjene vrijednosti. Posljedično, postoji susceptibilnost (odnosno postoji podložnost pojave Hopf bifurkacije zbog istovremene promjene kompleksnih dijelova sopstvenih vrijednosti dva parametra) za pojavu Hopfove bifurkacije. Tamno-zelena

isprekidana linija predstavlja krivu na kojoj je moguć nastanak BP. Na presjeku jedne od predmetnih krivih i tačke ravnoteže, nalazimo BP između dvije krive (vidjeti BP na slici 117, i isprekidanu zelenu liniju na slici 126).



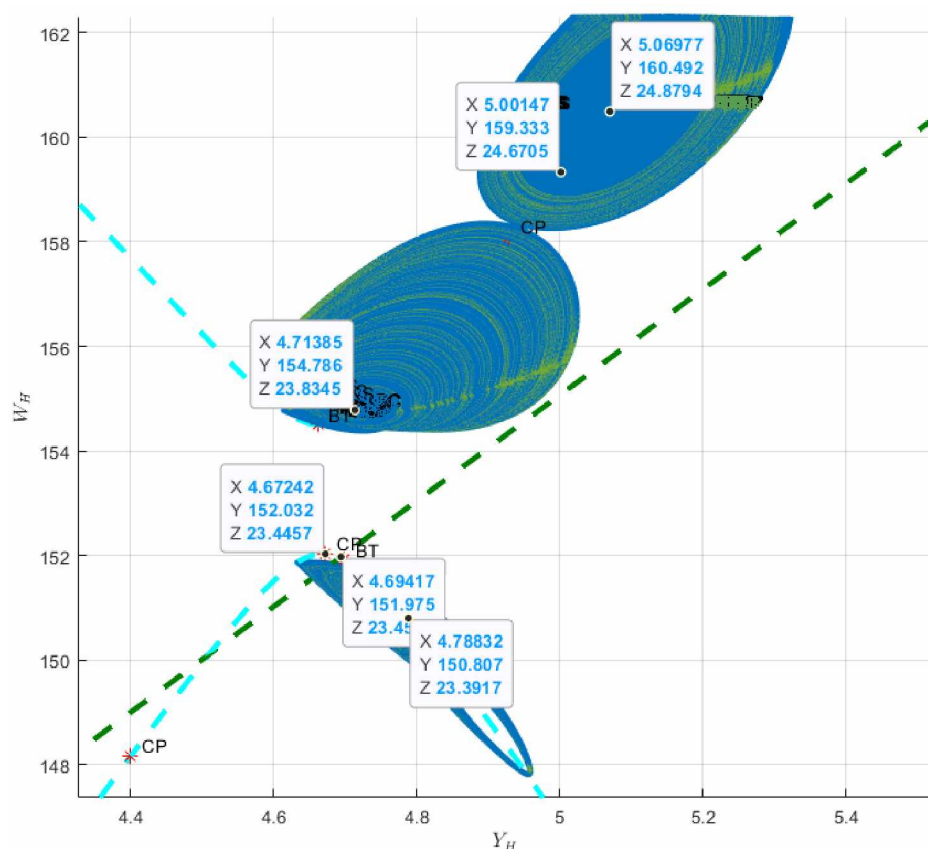
Slika 126. Codim 2 bifurkacija parametara  $d$  i  $e^{160}$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

BT koordinate su (4,6995544–151,92177–23,455451) sa vrijednošću koeficijenta normalne forme  $c = (-2,10863423e-01, 3,25679947e-02)$ , pri čemu nedegenerisani uslovi imaju relativno male, ali ipak ne-nulte vrijednosti [1][29].

<sup>160</sup> Označene vrijednosti odgovaraju godinama 2005, 2015, 2019 i 2023/2024 (predviđanje).

Prateći gornji-desni dio dijagrama na slici 127, nailazimo na generalizovanu Hopfovu (Bautinovu) tačku bifurkacije sa koordinatama (5,075–160,6–24,9), koje potiču iz prethodno otkrivenog Hopf-a.



Slika 127. Zumiran dio slike 126 i projektovan na  $x-y$  ( $Y_H-W_H$ ) ravan<sup>161</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Bogdanov–Takens (BT) bifurkacija nastaje („rađa se”) u donjem-desnom dijelu dijagrama (slike 125 i 126), gdje smo imali dio bez sjedla u ravnoteži i koji je pretrpio Andronov-Hopfovu bifurkaciju, koja je posljedično stvorila LPC. Dodatno, postoji GH tačka koja ima  $\lambda_{1,2} = -0,0000 \pm 0,4559i$ , and  $\lambda_3 = 15,5401$ . Koeficijent uslova nedegenerativnosti je relativno mali, ali ipak različit od nule  $c = 2,8449421e-03$ , što implicira blagi oblik poput

<sup>161</sup> Kodim 2 bifurkacija parametara  $d$  i  $e$ .



parabole/elipsoida (oko predmetne tačke za obližnje trajektorije). Nevedeno je u korelaciji sa „*Tačka bifurkacije razdvaja grane podkritičnih i superkritičnih Andronov-Hopfovih bifurkacija u ravni parametara. Za obližnje (prim.aut. bliske) vrijednosti parametara, sistem ima dva granična ciklusa koji se sudaraju i nestaju putem bifurkacije sjedlo-čvora periodičnih orbita.*” [29]. GH vrijednosti odgovaraju godinama 2015/2016. Početkom avgusta 2015. loši podaci kineske privrede i kompanija za indeksiranje tržišta potresli su svjetsku ekonomiju i globalna tržišta kapitala. Brzo se val nesigurnosti proširio po cijelom svijetu, a u decembru 2015. glavna svjetska tržišta i privrede su imale najgori učinak spram godina unazad. Navedeno je posebno bilo evidentno početkom 2016. Nakon kontinuiranja GH u dvoparametarskom prostoru ( $d$  i  $e$ ), pojavio se LPC, što predstavlja moguću stagnaciju. Dva takva djelimična preklapanja LPC-ova nalaze se blizu jedan drugom u gornjem-desnom dijelu dijagrama (slika 125), sa koordinatama (5,709–170,7–26,75) i (5,771–171,6–26,92). Posljednje pomenute dvije tačke pripadaju bliskoj budućnosti u trenutku pisanja ove disertacije, tj. odgovaraju otprilike 2023. i 2024. godini.

Čak i bez pandemije COVID-19, predstavljeni model pokazuje potencijalno realan rizik od stagnacije u bliskoj budućnosti. Iako su relativno velike količine novca „ubrizgane” u ekonomski sistem EU (trajnim ECB APP), nalazimo se na „tački zasićenja” gdje je nefinansijskim i drugim institucijama isti potreban kontinuirano za nesmetano funkcionisanje! To je samo po sebi vrlo loše, jer se može preokrenuti u njegovu suprotnost za relativno kratko vrijeme ukoliko kreditni kanal bude iz bilo kog razloga prekinut. Posljedično, prezentovana situacija ne doprinosi stabilnom makroekonomskom okruženju. Realnoj ekonomskoj proizvodnji i uslugama koje pružaju MSP potrebno je stabilno i nestagnirajuće ekonomsko okruženje da bi funkcionisali „glatko”. MSP predstavljaju spas za veliku većinu stanovništva EU, zapošljavajući 83,9 miliona ljudi u 2017. godini i čineći 67% svih zaposlenih u EU.<sup>162</sup>

Prateći put stvarnih podataka u 3D faznom prostoru, otkrili smo dvije Cusp tačke (CP). CP impliciraju da postoji strukturalni prekid i/ili iznenadna promjena u pravcu krivine (sa efektom histereze). Kvantitativna promjena navedenih parametara ( $d$  i  $e$ ) bila je

---

<sup>162</sup> Izvor: <https://ec.europa.eu/eurostat/web/products-eurostat-news/-/ddn-20200514-1>



relativno mala i ima prosječni raspon od 1%–2% (maksimalno do 4%). Navedeno sugerše koliko su „krhke” nestabilne (crvene) ravnoteže. U budućim trenucima vremena, tj. predviđanjima (2023/2024), parametar  $d$  se mijenja do 5,2%, a  $e$  do 17,95% (prilaskom ka GH).

Nadalje, različite tačke bifurkacije nastaju zajedno sa bifurkacijama kodim 2 (slike 125 i 126), ali ćemo prvenstveno analizirati one koje se direktno odnose na posmatrane ekonomske pojave odnosno stvarne podatke. Povezano, prateći donji-lijevi dio dijagrama (nazad u vremenu), prvo nailazimo na CP, koji nema značajan uticaj na tok sistema. Sličan zaključak važi i za sljedeću CP sa koordinatama (4,672–152–23,45). Nasuprot tome, važan BP je omogućio prelazak sa donjeg-lijevog na gornji-desni dio dijagrama (slika 117). Ako bi sistemski tok pratio donju-desnu krivu, naišli bismo na ravnotežne LC-ove koji se račvaju na LPC, a zatim na neutralni fokus na sjedlu (NS). Posljednje pomenuto nije dostignuto vrijednostima u stvarnosti, pa se shodno tome neće dalje analizirati.

Na gornjoj-desnoj krivoj nadalje nailazimo na BT sa koordinatama (4,694–152–23,46). Ovaj BT postoji između više CP-a, čak i praćen narednim CP, što ukazuje na višestruke strukturne prekide i lomove u toku sistema [29][84]. Dodatno, ovaj 3D sistem ima više stabilnih i nestabilnih invarijantnih manifolda.

Prvi CP ima koordinate (4,694–152–23,46) sa koeficijentom normalnog oblika  $c = 4,59143220e+01$  (slika 127), a drugi CP ima koordinate (4,784–150,861–23,395) sa  $c = 6,20242977e-02$ . Ovaj turbulentni period sa strukturalnim prekidima (lomovima) poklapa se sa krizom državnog duga EU u 2011/2012. godini. Prateći dalje dijagram na slici, nailazimo na još jedan BT, koji je nakon kontinuirane i promjene (engl. sweep-a) parametara izazvao kreiranje stabilnog i nestabilnog LPC-a. U makroekonomskom smislu, navedeno znači mogući i veoma značajan period stagnacije-recesije u produženom trajanju. Za specifične vrijednosti parametara  $d$  i  $e$ , pomenuto može izazvati dugotrajni ekonomski pad. Kao što je prethodno već istaknuto, sve prezentovano važi pod pretpostavkom da postoji tačna i

specifična kombinacija ukupnog raspoloživog dohotka i ukupnog imetka u ukupnoj potrošnji.<sup>163</sup>

APP ECB je „prebacio” makroekonomiju EU u ipak „mirnije vode” koje su predstavljene višestrukim LPC-ima na (5,001–159,3–24,67) u 2015. godini, sa periodom od  $T = 13,783886$  (slika 127). Međutim, u septembru 2015. i junu 2016. godine, migrantska kriza i „Bregzit” (respektivno) pogodili su EU28, što ukazuje samo stvaranje više LPC i LC.

Vrijednosti modela u 2016. godini ukazuju na recesiju, sa LPC koji nastaju u (5,07–160,5–24,88) i sa periodom od  $T = 0,59230953$  (slika 127). Dodatno, 2016. je donijela mnoge političke konfrontacije i različita mišljenja o tome kako se treba nositi sa migrantskom krizom EU. Gotovo svaka suptilna promjena u makroekonomskim podacima vidljiva je u faznom prostoru. Nakon kvazilinearnog uspona, dolazimo do BT sa koordinatama (5,531–168–26,25), koje odgovaraju 2018/2019. godini po  $Y_H$ , ali ne i  $W_H$  (slika 126)!<sup>164</sup> Posljednje pomenuto neslaganje ili odstupanje nastaje zato što oba parametra  $d$  i  $e$  utiču na odnos ukupnog raspoloživog dohotka i ukupnog imetka u ukupno raspoloživoj potrošnji. Dodatno, pomenuti parametri prate tok sistema, a da bi pratili tok vrijednosti promenljivih treba da se iste mijenjaju u skladu sa NDA NODE rješenjima. Posljedično, zaključujemo da je privremeno došlo do preraspodjele između kanala imetka i dohotka, odnosno smjer je u određenom periodu vremena bio od prvog ka drugom.

Nadalje, prateći krivu, nailazimo na Zero Hopf (ZH) sa koordinatama koje odgovaraju realnim<sup>165</sup> vrijednostima singulariteta jednakim (5,631–169,5–26,53) (slika 127) što dodatno upućuje na eventualno postojanje lokalizovanog haosa u sistemu [188][25][29]. Posljedično, sistem počinje da se kreće ka nepredvidivosti. Dalje, referenciramo se na relativno blisku budućnost 2024/2025. sa LPC u (5,703–170,6–26,73) i periodom od  $T =$

---

<sup>163</sup> Zapravo  $c_{\omega_1}$  i  $c_{\omega_2}$  vrijednosti određuju pomenuti racio između endogenih varijabli, pri kojem važe prezentovani zaključci i zavise od kretanja egzogene varijable.

<sup>164</sup> Vrijednost  $W_H$  je nešto niža nego što bi trebala biti u stvarnosti ukoliko pratimo tok modela. Navedeno upućuje da je došlo do izvjesne potrošnje imetka kako bi se potpomogla potrošnja EU stanovništva (još gori slučaj je ukoliko se isti trošio na tekuću potrošnju).

<sup>165</sup> Izračunate vrijednosti za ZH su kompleksni brojevi, kao i za razne druge singularitete. Međutim, pošto se radi o realnim i nenegativnim vrijednostima makroekonomskih varijabli – u prvom oktantu, uzimamo za grafička rješenja realne vrijednosti kompleksnih brojeva. Navedeno važi samo kod grafičke interpretacije, dok u numeričkim kalkulacijama koristimo kompletne 64-bitno zapisane kompleksne brojeve.

5,3838855. Navedeno znači da postoji potencijalna stagflacija u trajanju od oko 2,5 godine. Svaka intervencija ECB, slično kao što je to bio slučaj sa APP, može promijeniti ili pomjeriti tok bilo kog makroekonomskog trenda [1][25][29]. Iako je vrijednost EURO STOKSKS 50 u posljednjih nekoliko godina (od sredine 2016.) imala relativno stabilan rast, udio stanovništva EU27 na granici siromaštva iznosio je 21,1% u 2019. godini.

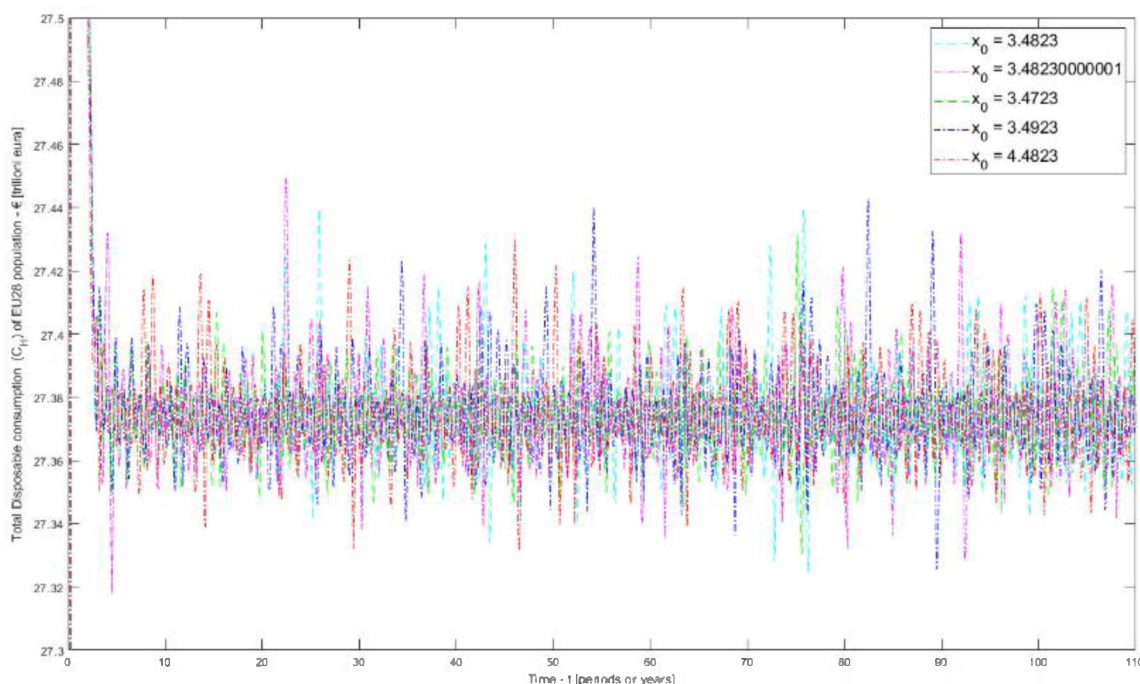
Mali LPC-ovi nastaju na donjem-desnom dijelu krive, sa periodom  $T = 0,1$  godina. Iste nismo analizirali, jer pomenuti LPC-ovi ukazuju na „stagnaciju” od mjesec ipo dana u EU makroekonomiji. Navedeno zapravo nije stagnacija, već tzv. „korekcija” (engl. correction) na tržištima i uopšte u ekonomiji. Dakle, oni nisu značajni u makroekonomskoj analizi. Mada, posljednje pomenuti LPC-ovi imaju teorijsku i inherentnu NDA vrijednost.

Jedan od najvećih izazova u ovom istraživanju bio je pronalaženje ravnoteže između stvarne makroekonomske korisnosti NDA, suprotno njenim samo numeričkim (matematičkim) interesantnim vrijednostima.

Provjeravamo da li postoji nastanak haosa u ovdje prezentovanom i izučavanom 3D sistemu. Posljedično, provjeravamo osjetljivost odnosno zavisnost sistema od početnih uslova kako bismo dokazali ili opovrgli nastanak haosa u endogenoj i determinističkoj varijabli  $C_H$ . [102][92][99][95]

Promjena  $C_H$  zavisi od malih promjena u početnim uslovima  $Y_H$ , što je prikazano na slikama 128 i 129. Prema ranije citiranoj „definiciji” haosa, jasno vidimo da postoji aperiodičnost u dugoročnom ponašanju varijable  $C_H$  i direktna zavisnost od vrijednosti početnih uslova! Na slikama 130 i 131 predstavljamo 110 perioda (godina). Ukupno odabrani period od 110 godina nema makroekonomsko već matematičko značenje – da pokaže dugoročnu aperiodičnost. Naime, mogli smo da izaberemo bilo koji relativno značajan broj (npr. 500, 1.000, itd.). Zaključujemo sa slike 128 da ne postoji periodična komponenta, već je ista potpuno stohastična. Kod posljednje rečenog moramo biti veoma oprezni, jer ponekad poslije više milijardi, triliona, ili čak i više ponavljanja i proračuna, može doći do periodičnosti! Posljednje navedeno sugerije da se ne možemo samo osloniti na grafički

prikaz kao dokaz odnosno zaključak o postojanju haosa. Povezano sa prethodno navedenim, izvršićemo više matematički rigoroznih testova.



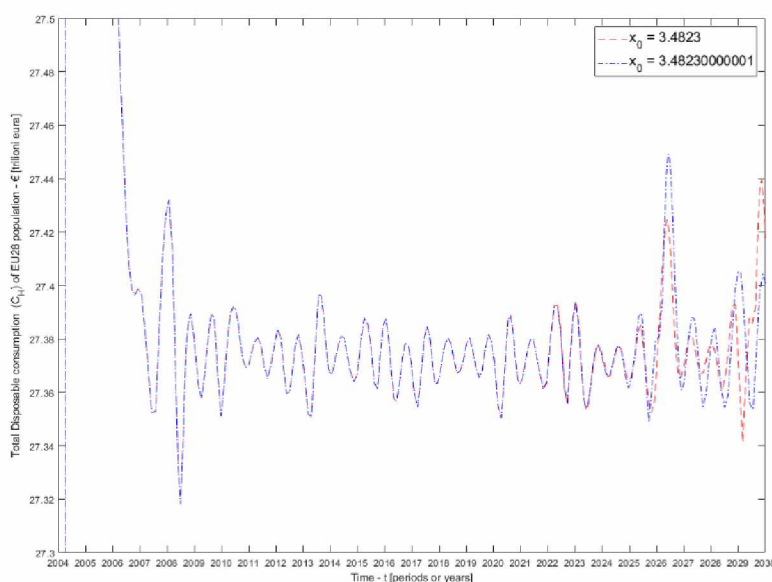
Slika 128. Promjena početne vrijednosti ukupno raspoloživog dohotka  $Y_H(x_0)$  (u trilionima €), i uticaj iste na  $C_H$ . Tačan iznos promjene početnih uslova predstavljen je na legendi slike.

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Dodatno, sistem je deterministički, odnosno bez nasumičnih komponenti ubačenih u sistem (model) u bilo kom trenutku. Sistem jasno pokazuje vrlo izraženu osjetljivost i zavisnost od početnih uslova. Relativno jako male dilatacije u početnim uslovima rezultiraju haotičnim ponašanjem sistema. Međutim, navedeno važi nakon određenog vremenskog okvira u kome su predviđanja moguća, i ima kvantitativnu mjeru u broju perioda. Razlika između dva početna uslova prikazana na slici 131, je u prosjeku manja od 0,00321669%, i mi ćemo je nadalje tretirati kao beznačajnu po makroekonomskim statističkim standardima.

Pomenuta diskrepanca se poklapa sa apriorno definisanom preciznošću u procesu numeričkog rešavanja SNDJPR sistema. Povezano, mogli smo postaviti rigorozniji(e) uslov(e) tolerancije za rešavanje SNDJPR sistema, ali kao posledicu bi imali nerazumno duže vrijeme za njegovo rešavanje, odnosno bilo bi nam potrebno mnogo više računarske (kompjutacione) snage. Važno je napomenuti, da kada vršimo SNDJPR MATCONT analizu, postoji određeni prelazni period na početku numeričkih kalkulacija od oko 2,5–3 perioda<sup>166</sup>, nakon čega numerička integracija dostiže stabilne vrijednosti.

Nadalje, rigorozno smo testirali i ispitali prisustvo haosa primjenom Gotwald-Melburnovog „0–1 testa” (engl. Gottwald-Melbourne “0–1 test”) [84][83] – u daljem tekstu označene samo kao „0–1 test haosa”); Ljapunovog eksponentnog jakobijanskog metoda (engl. Lyapunov exponent Jacobian method) [196][27]; Testnom metodom aktivacione funkcije sa neuralnim mrežama (AFNN) – gdje NN aproksimira haotičnu mapu (engl. Activation Function with Neural Network) [150][113][187].



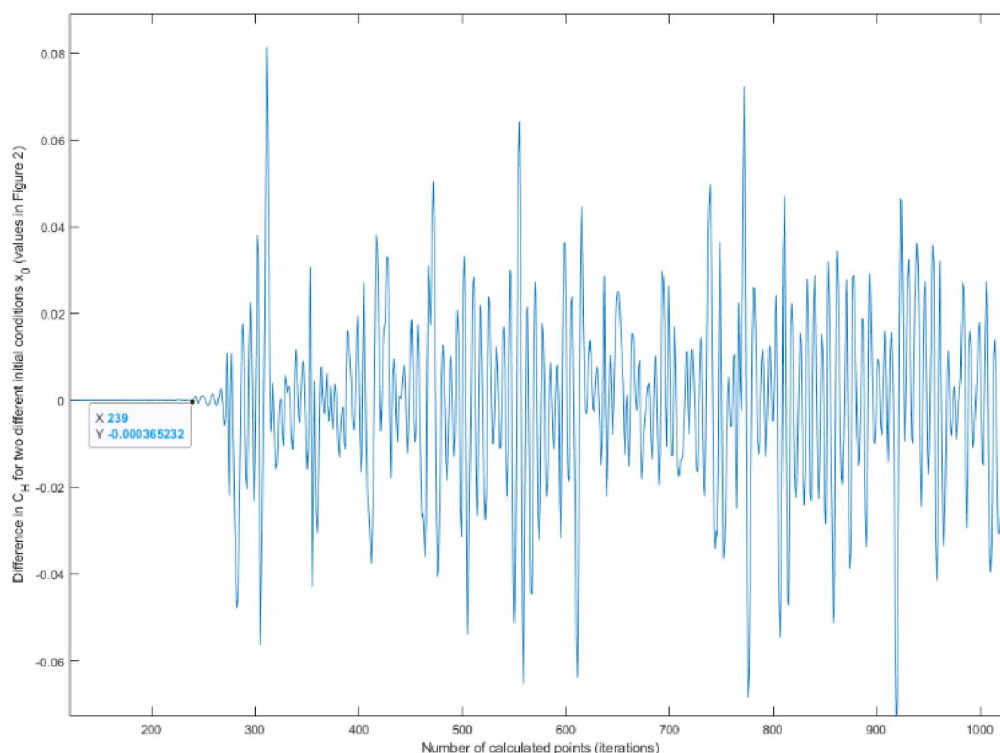
Slika 129. Uvećano, razlika u promjeni početne vrijednosti za  $Y_H$  i uticaj na  $C_H$ <sup>167</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>166</sup> Egzaktna vrijednost je 2,812 perioda.

<sup>167</sup> Iznos promjene vrijednosti za  $Y_H(x_0)$  prikazali smo na legendi slike 129.

Sistem definisan sa (31), (32) i (33) oko vrijednosti  $C_H$  varijable numerički se stabilizuje (kao što je već rečeno) nakon otprilike 3 perioda ili 97 iteracija, odnosno oko srednje vrijednosti koja iznosi 27,3835 (triliona eura). Kontinuiranjem u MATCONT-u, otkrili smo da se za male promjene početnih uslova, dvije različite putanje u faznom prostoru haotično razlikuju jedna od druge (slike 130 i 131). Svaka kriva rješenja (trajektorija) konvergirala je ka neobičnom atraktoru koji ima oblik graničnog ciklusa (LC) nakon 21 perioda (slika 132).<sup>168</sup>



Slika 130. Različiti početni uslovi za  $x_0$  izazivaju kaos u  $C_H$ <sup>169</sup>

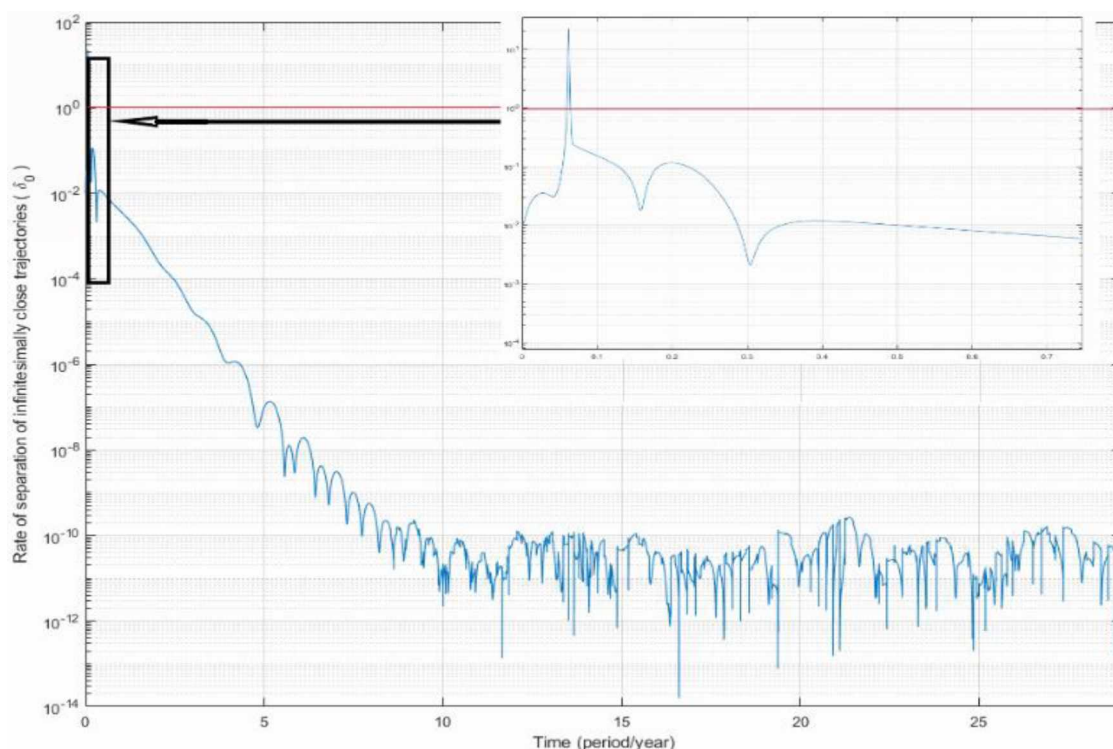
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>168</sup> LC ima karakteristike tzv. super-stabilnog atraktora odnosno stabilan je po Ljapunovu (Definicija 8 – D8).

<sup>169</sup> Razlika između 1.089 tačaka vrijednosti  $C_H$  za dva različita početna uslova  $x_0$  (vrijednosti razlike početnih uslova su prikazane na slici 129. u legendi). Poslije 239 iteracija ili 20,74 perioda razlika počinje da se povećava, počev od 0,000365232 triliona eura (365,23 miliona evra) pa naviše. Ne tvrdimo da razlika od 365 miliona do 850 milijardi eura ne čini mnogo značajnu razliku, ali ista nije bila dovoljna da makroekonomski sistem EU postane haotičan.



Ljapunovljev eksponent (LE) određen pomoću eksponencijalnog jakobijanskog metoda (engl. Lyapunov Exponent Jacobian method) [196][27] predstavljen je na slici 131.



Slika 131. Ljapunov Eksponent (LE) za sistem  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ <sup>170</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Samo LE ne može definitivno determinisati postojanje haosa.<sup>171</sup> Shodno navedenom, izvršili smo dodatne i rigorozne testove na eventualno postojanje haosa u sistemu. Naime, AFNN [150][113][187] dao nam je sljedeće rezultate u analizi  $C_H$  vrijednosti:  $H = 0$ ;  $p$ -vrijednost = 1;  $\lambda = 0,0023$  – gdje pozitivan LE ukazuje na početak nastanka haosa; dok je AFNN = (1, 1, 1); i interval poverenja (CI) = 0,0022. Hipoteza  $H = 0$  znači: „Ne odbacuje se nulta hipoteza haosa na nivou značajnosti CI (koja je u našem slučaju jednaka 0,0022).”

<sup>170</sup> Stopa separacije infinitezimalno bliskih trajektorija  $\delta_0$  posljedično eksponencijalno brzo smanjuje zapreminu u faznom prostoru.

<sup>171</sup> LE može ukazati da opravdano postoji osnovana sumnja nastanka haosa u sistemu.

[187]. Standardni nivo intervala poverenja (CI) je jednak 0,0022%, što znači da CI nije zadovoljen za samo 0,22% svih podataka uzorka. Haotično ponašanje je izvjesno, jer je verovatnoća  $p$  jednaka jedan. Za neuronsku mrežu (NN) početni red koji smo izabrali je  $(L, m, k)$  [113] = (5, 6, 5). Međutim, automatski je „spuštena” nakon izračunavanja (kalkulacija) na (1, 1, 1). Pomenuto se desilo jer za NN nije bilo potrebno mnogo slojeva (engl. layer) da definiše prenosnu funkciju (PF)<sup>172</sup> sistema sa haotičnom karakteristikom, jer je prezentovano očigledan slučaj sa stanovišta NN analize o kojoj će biti riječi u nastavku.

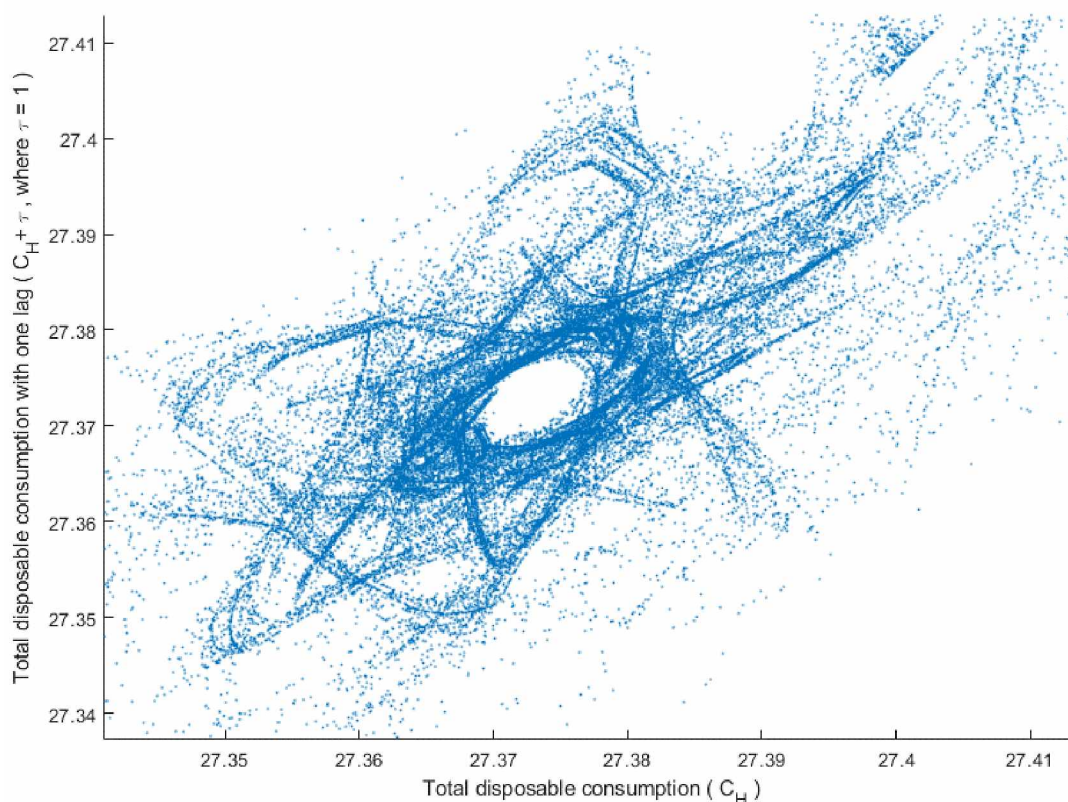
Dodatno, sprovedi smo „0–1 test haosa” na 1089 tačaka dobijenih iz  $C_H$  razlike vrijednosti za dva različita početna uslova za  $x_0$  (vremenske serije na slici 129.), sa rezultatom jednakim 0,9872. Vrijednosti za oba početna uslova  $x_0$  predstavljamo na legendi slike 129. U „0–1 testu haosa”, ako je rezultat analizirane vremenske serije blizu nule, to znači da su podaci nehaotični. Suprotno tome, ako je rezultat blizu jedan, vremenska serija je haotična. U svim testovima smo posebno vodili računa da ne pretjeramo u brojnosti uzetih podataka (engl. over-sampling), ili da previše ne smanjimo uzorke vremenskih serija (engl. under-sampling), jer bi navedeno moglo dovesti do pogrešnih zaključaka. Ponekad *tranzijenti*<sup>173</sup> traju 100 iteracija. Aperiodično ponašanje postaje očigledno tek nakon nekoliko hiljada iteracija. Pažljivo smo posmatrali održavanje stalne ravnoteže između upotrebe različitih metoda i brojnosti uzoraka podataka, te je navedeno predstavljalo dodatni izazov u istraživanju. Neobičan atraktor za  $C_H$  predstavljamo na slici 132.

---

<sup>172</sup> U prezentovanom primjeru Prenosna Funkcija (PF) je zapravo AF (engl. Activation Function).

<sup>173</sup> Prelazne vrijednosti tokom numeričkih kalkulacija, i najčešće se javljaju na početku računanja.





Slika 132. Neobični atraktor krivih koje predstavljaju rješenja za  $C_H$  u faznom prostoru<sup>174</sup>

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Za  $\lambda < 0$ , orbite bivaju privučene ka stabilanom fiksnom LC. Negativan LE je karakterističan za disipativni ili nekonzervativni sistem. Takav sistem pokazuje asimptotsku stabilnost. Što je eksponent negativniji, to je veća stabilnost. Superstabilne fiksne tačke i superstabilne periodične tačke imaju  $\lambda \rightarrow -\infty$  [187].

Ponovo primjećujemo da  $\lambda$  zavisi od  $x_0$ . Međutim, ono ima isto kvalitativno ponašanje za sve  $x_0$  u basenu privlačenja za dati atraktor.

<sup>174</sup> Super-stabilni LC se pojavljuje kada  $t \rightarrow \infty$  (Poenkare–Bendiksonova teorema – engl. Poincaré–Bendixson Theorem). Na slici je prezentovana planarna projekcija 3D atraktora nakon 46.033 izračunatih tačaka (odnosno 5.008 perioda/godina). Sistem je disipativan i zapreminski se skuplja pod protokom u faznom prostoru [84], što je vidljivo iz druge dvije (preostale) planarne projekcije/proračuna.

Broj perioda predviđanja se neznatno razlikuje od ranije navedenog, jer proračun LE zavisi od početnih uslova i koraka proračuna. Padovi (engl. dips) na slici 132 bi trebalo da se spuste do  $\lambda = -\infty$ , jer je zagarantovano da će se super-stabilan ciklus desiti negdje blizu sredine svakog pada, a takvi ciklusi imaju  $\lambda = -\infty$ . Ovaj dio „šiljka” je suviše uzak da bi se mogao razlučiti na slici 132 [84]. Korak integracije je 0,001 da bi se izbjeglo prekomjerno ili nedovoljno uzorkovanje. LE nije jedinstven pokazatelj haotičnog ponašanja. Poslije više od 100 iteracija, još uvek je bilo neizvjesno da li je LE u haosu ( $\lambda > 0$ ) ili je u pitanju tranzijent (prolazne vrijednosti kalkulacije). Iz pomenutog razloga, spojili smo LE sa AFNN-om i metodom testiranja haosa „0–1”.

Iako smo utvrdili haotično ponašanje, sa makroekonomskog stanovišta ono nema praktičan uticaj. Dodatno, u nekoliko sistemskih tačaka i vrijednosti parametara otkrili smo „nagovještaje” haosa, ali iz istog ranije navedenog razloga, nismo ga dalje izučavali.

Naći ravnotežu između makroekonomski korisnih rezultata i onih koji su samo matematički zanimljivi, bio je zaista pravi izazov u ovom radu.[178]

### **5.3.2 Model harmonizovanog indeksa potrošačkih cijena, dugoročne kamatne stope i ukupno raspoloživog dohotka EU28 ( $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$ model)**

Analiza međuzavisnosti HICP-a sa raznim varijablama ima posebni značaj za svaku makroekonomiju bilo koje države, te samim tim i političko–ekonomskog entiteta kao što je EU. Međutim, svakako od posebnog je značaja povezanost između iznosa inflacije  $HICP$  u EU; dugoročnih kamatnih stopa  $r_{l_{10}}$  kao parametra koji reguliše dugoročnu monetarnu politiku, te samim tim na indirektan način značajno utiče na politike i trendove u ekonomiji ka regulisanju inflacije, i iznosa ukupno raspoloživih agregatnih prihoda  $Y_H$  koji su direktno povezani sa  $HICP$  na način da veći prihodi stimulišu veću potrošnju, te samim tim i veću tražnju, pa posljedično utiče na porast cijena dobara i usluga odnosno inflaciju, gdje zajedno sa sa dugoročnim kamatnim stopama, koje utiču na iznos i količinu prisutnih primanja, kružno i kauzalno djeluju na pomenuta prva dva parametra.[177] Zaključujemo da prezentovane i analizirane varijable  $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$  grade zapravo jedan „kružni”

*makroekonomski* tok, gdje uzroci i posljedice, koje inherentno kreiraju varijable, duboko su isprepleteni, i određuju živote stotina miliona ljudi.[33]

Naime, pomenute kauzalnosti često nisu očigledne i iz ugla istraživanja iste je jako teško odrediti setom predefinisanih sistema jednačina, ili fiksnim relacijama za različite periode vremena. U disertaciji rješenje pomenutog problema vidimo u kreiranju nove metodologije za analizu makroekonomskih međuzavisnosti, ali i drugih srodnih odnosno povezanih varijabli u različitim oblastima i domenima nauke. Navedeno, čini ovu metodologiju, primijenjenu na više SNDJPR, izuzetno univerzalnom i pogodnom za naučna istraživanja i analize pojava ili događaja od interesa.

Kao dokaz prethodno rečenog je SNDJPR (34)–(36) koji karakteriše međusobnu povezanost i interakciju  $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$  u EU makroekonomiji. Naime, pomenuti SNDJPR je kreiran bez ikakve prethodno definisane jednačine međuzavisnosti, ili uopšte neke formule koje ih povezuje, već je kreiran na osnovu stvarnih podataka koje predmetne varijable imaju u izučavanom periodu (2005–2019)! Pomenuto čini da su predstavljene međuzavisnosti direktno korelirane stvarnim vrijednostima varijabli i njihovim promjenama odnosno dinamici. Bitno je za naglasiti da za neki drugi period u vremenu predmetni SNDJR vrlo vjerovatno ne bi odgovarao uključenim varijablama. Međutim, „neminovnost” praćenja toka SNDJPR čini da sva predviđanja u okviru narednih desetak godina (ako su u pitanju godišnji podaci odnosno vrijednosti), ili u prethodnih desetak godina prate pomenuti tok, te samim tim čine metodologiju i kreiran sistem upotrebljivim za relativno dugoročna makroekonomska predviđanja. Sve navedeno potvrđuje univerzalnost korištene metodologije u disertaciji za različite naučne oblasti, ali za logički i suštinski međusobno povezane varijable. Na taj način se izbjegava bilo kakva pristrasnost ili nekonzistentnost dobijenih rezultata (izbjegavaju se tzv. engl. „*spurious series*”). Uvjereni smo da će se prezentovana metodologija u budućnosti sve više koristiti.

Kako bi prikazali benefite korištene metodologije, za početak ćemo analizirati sliku 133, u kojoj su sve vrijednosti prikazane u trilionima eura. Na pomenutoj slici u skladu sa i ranije definisanim stilom označavanja MATCONT rezultata vidimo crvenu i plavu krivu koje predstavljaju ekvilibrijume (34)–(36) (zapravo ravnoteže ili rješenja SNDJPR). Crvena kriva

predstavlja nestabilne ekvilibrijume, a plava stabilne. Zvezdice, bez obzira na boju, predstavljaju stvarne vrijednosti koje je makroekonomski sistem EU imao u posmatranom periodu. Plavi brojevi i zvezdice, koji su povezani sa isprekidanom zelenom linijom, predstavljaju sistem u „relativnoj prošlosti” (iz sveukupnog ugla sistema). Crnom bojom i isprekidanom crnom linijom označena 2015. godina i veza između „relativne prošlosti (iz ugla sistema) i budućnosti”. Dok, je „relativna budućnost” (iz igla modela) nadalje označena magenta brojevima i žutim zvezdicama, i povezana crvenom isprekidanom linijom.

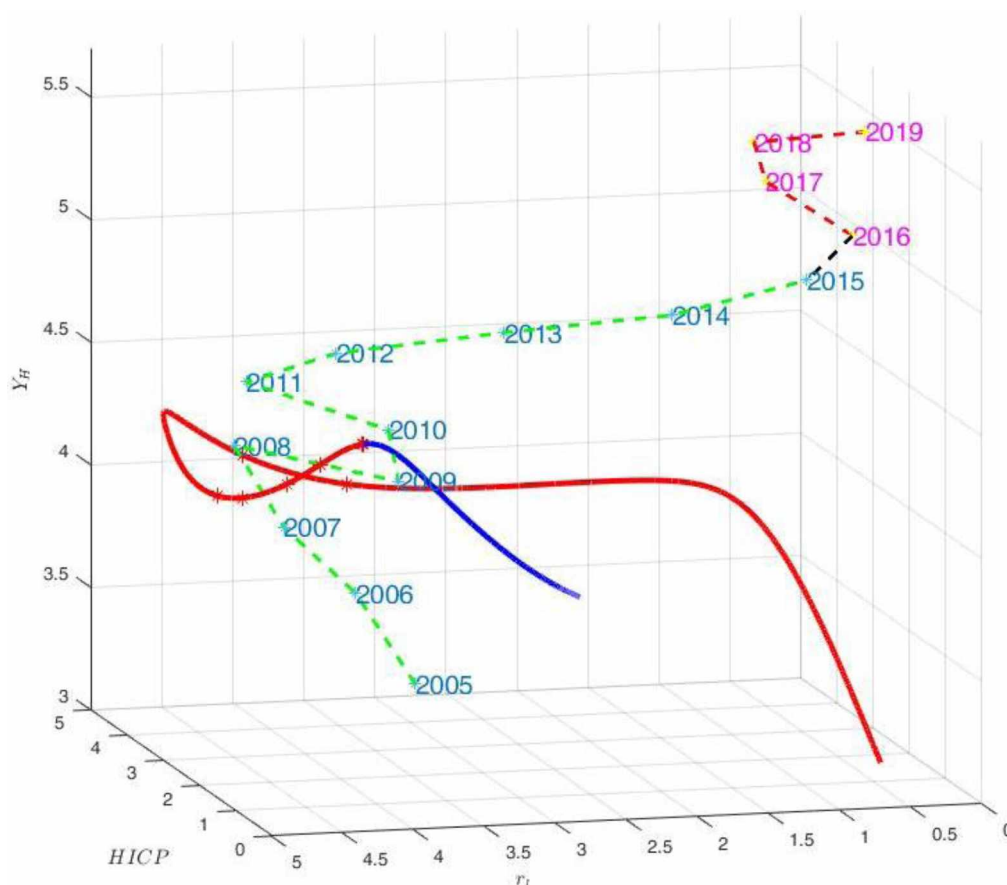
Na slici 133 se vidi integralni odnosno 3D prikaz izučavanog  $HICP - r_{l10} - Y_H$  sistema. Iz prikazanog grafika (crvena i plava kriva) i stvarnih vrijednosti EU makroekonomije (zvezdice i godine), odmah uočavamo da se stvarne vrijednosti ne slažu sa modelom i tokom SNDJPR određenim rješenjima sistema. Bitno je za napomenuti, da rješenja SNDJPR se baziraju na sistemu koji je kreiran na osnovu stvarnih podataka i određeni tok pokazuje kako bi trebalo da se vrijednosti nalaze u okvirima istog, odnosno da budu koliko je moguće bliže njegovim rješenjima. Trivijalno govoreći, vrijednosti varijabli (zvezdice i godine) bi trebalo da se poklapaju sa ekvilibrijumskim krivama, jer su iste proizvod (odnosno „kreacija”) njihovih vrijednosti. Ukoliko postoji određena diskrepanca<sup>175</sup>, to znači da su stvarne vrijednosti vještački (ljudski- subjektivnim odlukama) udaljene od računskih vrijednosti. Dodatno, ovdje nećemo analizirati codim 1 i 2 bifurkacije varijabli – kao što smo to uradili u prethodnom poglavlju, jer je van predmeta ovog istraživanja.

Ekonomsko ili makroekonomsko značenje navedenog jeste da je EU zaista imala „monetarnu disciplinu”<sup>176</sup> u periodu od 2005 do/oko 2010/2011. godine. Vrijednosti inflacije, dugoročnih kamatnih stopa i ostvarenih agregatnih primanja od strane EU stanovništva je bilo vrlo blisko teoretskim vrijednostima, odnosno tokom-definisanim vrijednostima od strane SNDJPR.

---

<sup>175</sup> Ista očigledno postoji prema slici 133.

<sup>176</sup> Obično se sličan termin veže za *fiskalnu disciplinu*. Međutim, fiskalna politika je vrlo različita diljem EU. Posljedično, možemo samo govoriti o zajedničkim imeniteljima EU, a to je monetarna politika (od strane ECB-a).

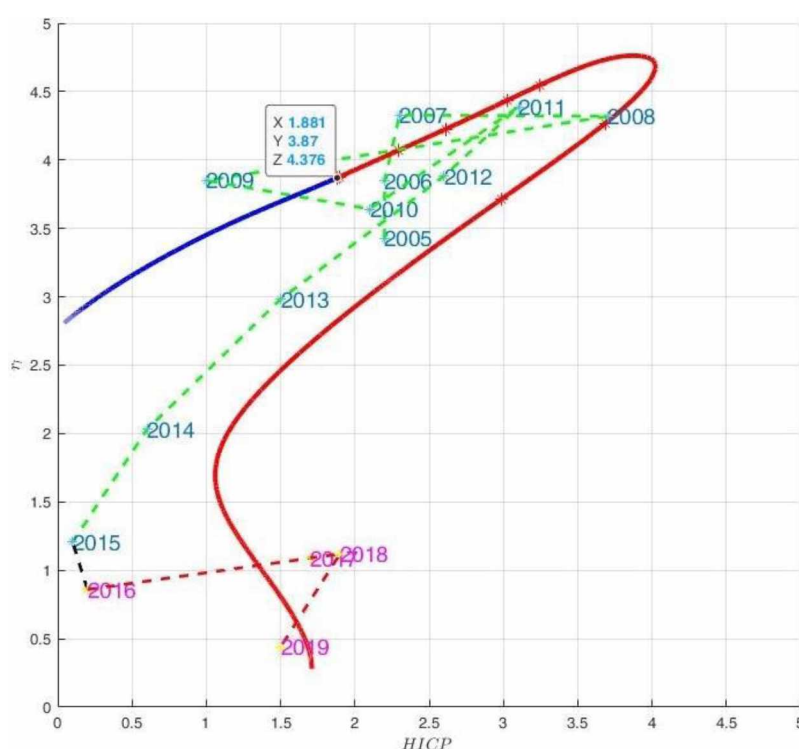
Slika 133. Ekvilibrijumske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{l_{10}}$  i  $Y_H$ 

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Nakon pomenutog perioda, počev od 2012. godine, EU makroekonomija ima sve veći nesklad između  $HICP - r_{l_{10}} - Y_H$ . Kao što smo ranije pomenuli, EU je imala vrlo burno razdoblje u periodu od 2005 do/oko 2010/2011. godine. Da bi se riješili mnogobrojni i nagomilani problemi koji su nastali zbog SFK iz 2008. godine, i posljedično krize suverenog/javnog duga u više EU zemalja tokom 2009. i 2010/2011. godine, bilo je potrebno vještački izdvojiti velike sume novca za pomoć najkritičnijim članicama. Vještački „injektiran” novac u EU makroekonomski sistem rezultovao je inicijalnim i vremenom sve većim diskrepancama u periodu od 2012. do 2015. godine, koje su se kasnije još više povećale u periodu od 2016. do 2019., u najvećoj mjeri zbog dodatnog „upumpanja”

finansijskih sredstava putem emisije ECB obveznica u EU makroekonomiju (putem ECB APP<sup>177</sup> programa). Bitno je pomenuti, da u NDA analizi se zaista vide ključne i/ili prelomne tačke toka koje odgovaraju stvarnim događajima odnosno vrijednostima varijabli.

Dodatnu i detaljniju analizu možemo provesti kada izvršimo projekcije 3D sistema na pripadajuće ravni. Pomenuto se jasno vidi na slici 134. Treba uvijek imati u vidu da su diskrepance između stvarnih vrijednosti i modelom definisanog toka (rezultata) veće kada se posmatra sistem u 3D prostoru.



Slika 134. Ekvilibrijumske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{l_{10}}$  i  $Y_H$  – ravan  $X-Y$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Prvo uočavamo na slici 134 tačku prelaza sa stabilnog dijela krive (plava) na nestabilni dio krive (crvena), koja ima koordinate  $HICP, r_{l_{10}}$  i  $Y_H = (1,881-3,87-4,376)$ .

<sup>177</sup> APP je mjesečno ubacivala u makroekonomski sistem EU 30 milijardi eura, a sporadično su iznosi rasli i do 50 milijardi tokom nekoliko godina. Više informacija je moguće pronaći na ranije prezentovanom web-linku koji je povezan sa ECB-ovim APP.



Za predmetnu projekciju odnosno 2D analizu, od značaja su nam vrijednosti za  $HICP = 1,881$  i za  $r_{l_{10}} = 3,87$  (obje vrijednosti su u procentima – %). Poznato je da stopa inflacije unutar EU je targetirana, od strane ECB-a, u iznosu „blizu ili do dva posto” (engl. close or up to two percent). Sve izvan pomenutih granica smatra se problematičnim, te se monetarnim, a ponekada i usklađenim fiskalnim mjerama – za pojedine države članice EU, HICP (inflacija) usklađuje sa prethodno navedenim. Postavlja se logično pitanje zašto je baš taj iznos od blizu ili do 2% odabran? U daljem tekstu pokušaćemo da damo odgovor, ili vjerujemo barem dio odgovora, na postavljeno pitanje.

Obično su sve povezane prognoze iskazane u vremenskom i vrijednosnom opsegu HICP, koji bi uvijek „iznenadio” razne ekonomske analitičare, pa i naučnu zajednicu u širem smislu, svojom stopom rasta ili pada, odnosno brzinom promjene. Kako bi donekle preduprijedili i/ili riješili neke od prethodno pomenutih i navedenih problema, pokušali smo definisati metodologiju koja bi riješila do sada prisutnu „pat-poziciju” kod dugoročnih inflatornih prognaza.

Sa grafika na slici 134. vidimo da je stabilan iznos inflacije u rasponu  $HICP = 0,0077 - 1,881\%$ . Navedeno je upravo u okvirima ECB-ove politike kada je u pitanju kontrola iznosa inflacije u EU! Dodatno, prateća dugoročna kamatna stopa, koja se za stabilne vrijednosti inflacije kreće u granicama od  $r_{l_{10}} = 2,87 - 3,87\%$ , je pokazatelj ili „barometar” cijene novca za dugoročne periode pozajmljivanja. Vrijednosti za  $r_{l_{10}}$  su se kretale, iznad ili u pomenutim granicama, od početka 2005. do kraja 2012. godine. Zatim su vrijednosti počele da opadaju cijelim tokom 2013. pa sve 2019. godine, i na dalje, do prvog kvartala 2022. godine. Posljedično, zaključujemo da je zaduživanje stanovništva u EU tokom perioda kada se nikako i relativno manje osjećala finansijska kriza u makroekonomiji bilo relativno skupo. Kada su valovi SFK iz 2008. godine kvantitativno–značajno došli do EU makroekonomije, zaduživanje je postalo jeftino ili značajno jeftinije, jer je trebalo održati ekonomski „zamajac” EU u pokretu i ne dozvoliti krizi da „preplavi” europska tržišta (roba, kapitala, rada, usluga). Institucionalno gledano, navedeno je jedino bilo moguće smanjivanjem dugoročnih kamatnih stopa, što je ubrzo i implementirano. Zanimljivo je da, vrijednosti za  $HICP$  i  $r_{l_{10}}$  su se pratile tokom vremena, stim što su vrijednosti za  $HICP$  bile

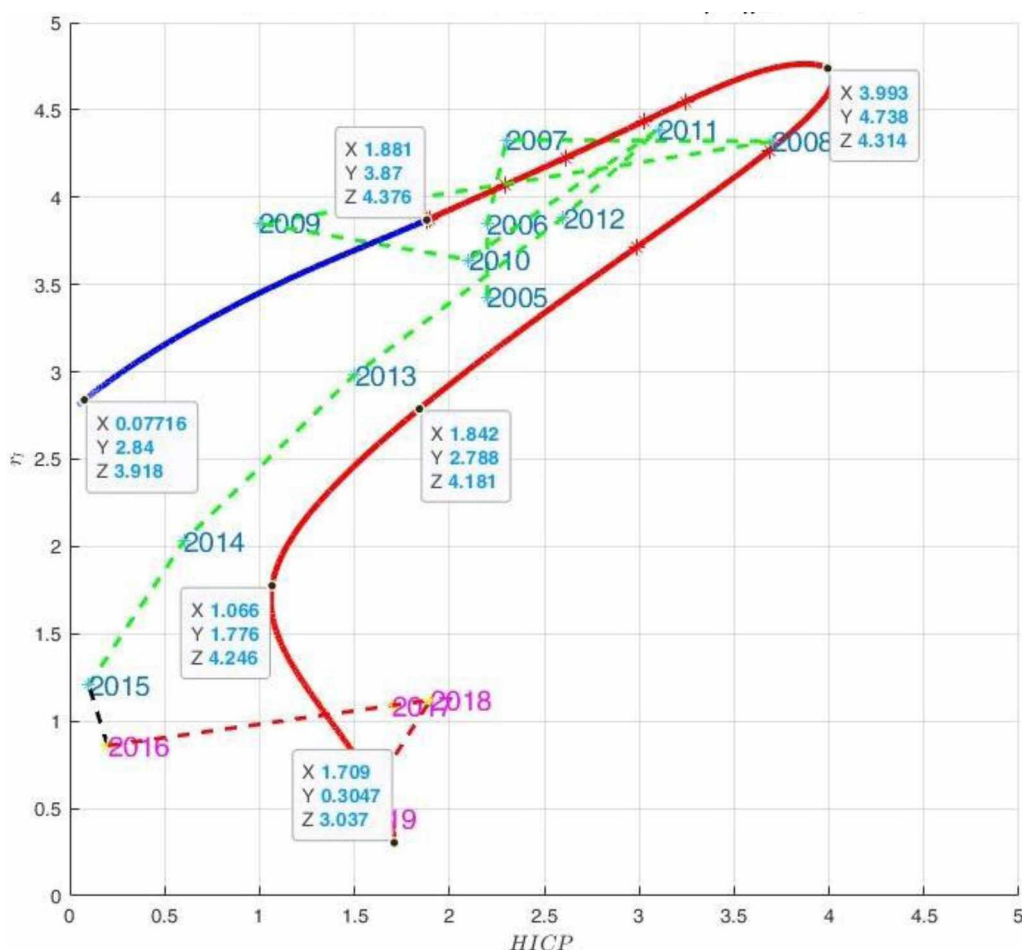
pomjerene za oko pola godine unaprijed spram  $r_{t_{10}}$ . Dodatno, posljednje pomenuto nam govori da monetarni kanal dugoročne kamatne stope, tj. njena promjena, je praćena promjenom inflacije u relativno kratkom periodu. Navedeno usklađivanje monetarne politike sa inflatornim kretanjima u EU uistinu prikazuje efikasnu ulogu ECB. Međutim, sve navedeno se promijenilo, u više domena, odnosno u svoju suprotnost početkom 2022. i tokom 2023. godine, kada je došlo do relativno značajnog rasta referentnih kamatnih stopa u EU, ali duplo ili trostruko većeg rasta inflacije u istom vremenskom periodu. Takođe, vidimo da su stvarne vrijednosti predmetnih varijabli EU makroekonomije bile u granicama između stabilne i nestabilne ravnoteže modela odnosno makroekonomskog sistema. Pomenuto, je svakako dobro. Međutim, kako je vrijeme odmicalo od (pomenute) 2013. godine, gotovo proporcionalno su se snižavali  $HICP$  i  $r_{t_{10}}$ , tj. približavali su se gradualno ka nestabilnom ekvilibrijumu, čak vremenom udaljavajući se od istog u potpunosti. Navedene diskrepance su još veće kada pogledamo 3D sistem. Detaljnija analiza je moguća sa konkretnim i karakterističnim vrijednostima na kvalitativnim prijelazima (slika 135).

Bitno je pomenuti, da bilo stabilan i/ili nestabilan ekvilibrijum i dalje predstavljaju ekvilibrijum – odnosno ravnoteže sistema, i kao takvi su poželjni!<sup>178</sup> Sve navedeno nam govori o tome da vrijednosti (stvarnih) ekvilibrijumskih krivih, odnosno rješenja sistema, direktno korespondiraju u stvarnosti sa ostvarenim performansama EU makroekonomije. Na slici 135 uočavamo karakteristične tačke, odnosno vrijednosti u sistemu, pri kojima je dolazilo do relativno nagle kvalitativne i kvantitativne promjene ponašanja cjelokupnog  $HICP, r_{t_{10}}$  i  $Y_H$  sistema. Počev od 2005. godine kada je EU imala relativno dobre (stabilne) iznose inflacije (oko 2,1%), i razumne investiciono–razvojne vrijednosti dugoročnih kamatnih stopa (oko 3,4%) – kako bi stimulisala npr. stambene i druge dugoročne kredite, i na taj način dodatno i kontrolisano „podgrijava” proizvodnju i privredu EU uopšte.

---

<sup>178</sup> Naravno, da je više poželjna stabilna (plava) ravnoteža.



Slika 135. Ekvilibrijske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{t_{10}}$  i  $Y_H$  – ravan X–Y

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Prateći razvoj vrijednosti varijabli po godinama, i upoređujući konstatno njihov položaj (vrijednost) u odnosu na ekvilibrijske krive sistema, vidimo da je zbog (ipak) na kraju previše „pregrijane ekonomije” u kombinaciji sa SFK 2008. napravljen otklon vrijednosti predmetnih varijabli ka nestabilnim vrijednostima ekvilibrijuma do vrijednosti (3,993–4,738–4,314). Nakon toga, vrijednosti se ponovo počinju kretati ka stabilnom dijelu ekvilibrijske krive 2009. godine zbog izrazitih mjera štednje i smanjenja aktivnosti unutar EU ekonomije. Da bi nadalje u 2010. godini povratak bio skoro ka istim vrijednostima za inflaciju i dugoročne kamatne stope kao što je bio 2005. godine. Pomenuti „krug” koji je

napravljen u makroekonomskim kretanjima EU u ovom periodu (2005–2010.) govori u prilog tezi o dugoročnoj izdržljivosti (engl. endurance) i stabilnosti EU ekonomije. Za očekivati je bilo da se stvari u tom trenutku vrate na pozitivne–stare vrijednosti, i da sve ubuduće bude bussiness as usual. Međutim, nova kriza je vrebala EU ispod naizgled mirne površine, u vidu krize javnog duga zemalja članica EU od kojih su neke imale toliko veliki pojedinačni dug (npr. Italija) da je centralno ECB finansiranje (engl. bailout) bilo praktično nemoguće, a da ne dođe do kolapsa eura kao EU valute, pa možda i cijele unije! Tokom dugih i teških pregovora 2011. i 2012. godine između EC, EU i pojedinih zemalja članica EU (koje su se našle u pomenutoj situaciji) stanje EU makroekonomije se ponovo pogoršalo, krećući se ka nestabilnom dijelu grafika, gdje je ista bila samo par godina ranije. Pomenuti vrlo dramatičan i dinamičan period ekonomske EU istorije, relativno je okončan 2013. godine. Međutim, zadobijene „rane” iz teških i napetih trenutaka po opstanak unije je trebalo „zacijeliti”, jer EU to nije mogla sama učiniti u kratkom vremenskom periodu – kako bi se ponovo osigurao njen napredak i razvoj. Posljedično, nastao je ECB-ov APP, samo nakon godinu ipo dana od uplovljavanja u „mirmije makroekonomske vode” i relativnog stabiliziranja iste. Inercioni trend smanjivanja dugoročnih kamatnih stopa, ali inflacije se nastavio još naredne dvije godine. Odnosno, došlo je do pada vrijednosti sa (1,842–2,788–4,181) na (1,066–1,766–4,246) u 2014. godini. Odmah uočavamo da imamo rekordno nisku vrijednost inflacije oko „samo” 1%, i istovremeno nisku vrijednost cijene novca (dugoročnih kamatnih stopa) na takođe „samo” oko 1,8% u periodu od 2016–2018. godine. Prezentovano je već tada signaliziralo da će doći do vještačkog „upumpavanja” jeftinog novca u makroekonomski sistem EU, što će po svim pravilima rezultirati povećanim investicijama, razvojem privrede i potrošnje EU stanovništva. Uistinu, navedeno se i desilo, ali je neumitno EU makroekonomja se našla u nestabilnoj zoni! Kako bi se održao određeni vid stabilnosti u EU javnim finansijama još više je stimulisana potražnja (potrošnja) sa relativno blagim i targetiranim povećanjem inflacije (ka, i do 2% – konkretno i egzaktno 1,7%), uz istovremeno smanjenje referentnih dugoročnih kamatnih stopa na oko 0,3%. Na pomenuti način došlo se do tačke na grafiku sa vrijednostima (1,709–0,3047–3,037) u 2019. godini. Indikativno je da je u cijelom ovom periodu u sadejstvu sa inflacijom i kamatnim stopama ukupni agregatni dohodak konstatno trebao opadati, a zapravo isti (ukupno raspoloživi dohodak –  $Y_H$ ) je

konstantno rastao, što je anomalija gledano spram toka SNDJPR, jer povećanje inflacije obezvrjeđuje prihode stanovništva iako pak stimuliše potrošnju i investicije. Međutim, u navedenim uslovima postavlja se pitanje kako – kojim kanalima i od kojih agenata, je ipak došlo do povećanja ukupno raspoloživog dohotka? Odgovor na postavljeno pitanje jeste da je navedeno jedino bilo moguće sa ogromnim(!) „vještačkim” količinama novca „ubačenim” u EU ekonomiju svakog mjeseca<sup>179</sup>, te se na taj način trošio nezarađeni novac u real ekonomiji za održavanje životnog standarda EU populacije. Jasno je, da se u nekom vremenskom trenutku morao „platiti” pomenuti „luksuz”. Pomenuto se naročito ispostavilo tačnim nakon 2020. godine i smanjivanja ekonomske aktivnosti u cijelom svijetu (pa i EU) tokom i neposredno nakon početka COVID-19 pandemije. U slučaju da nije došlo do pomenute pandemije, sličan „račun” bi se takođe morao platiti od strane EU makroekonomije vjerovatno koju godinu kasnije. Indikativno i interesantno je da su u nekim zemljama članicama EU (npr. Njemačka) pomenute referentne kamatne stope, deceniju i više, imale negativnu vrijednost (zavisno od ročnosti depozita, iste su bile čak u rasponu od –0,1 do –0,45% na godišnjem nivou). Zaključak kretanja prikazanog na slici 135 u najkraćem bi bio da su vrijednosti varijabli bile blizu ekvilibrijuma, i to najčešće nestabilnog ekvilibrijuma, ali se gotovo nikada nisu nalazile na samim ekvilibrijumskim krivim, što upućuje na to da same vrijednosti nisu se poklapale sa tokom sistema koji su same pomogle da se definiše u okviru SNDJPR. Sve pomenuto, upućuje i na dodatni zaključak da postojeće diskrepance između stvarnih i ekvilibrijumskih vrijednosti su posljedice vještačkog monetarnog djelovanja od strane institucionalnih entiteta (ECB). Možemo reći da navedeno prikazuje kvalitativne i kvantitativne efekte i razlike pomenute tri makroekonomske kategorije.

Kako bi nadalje upotpunili analitički okvir i deduktivnu sliku poslužićemo se grafičkim prikazom sa slike 136, koja zapravo predstavlja ekvilibrijumske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{l_{10}}$  i  $Y_H$  – projekcija na  $X-Z$  ravan 3D sistema. Najpre uočavamo da je vrijednost inflacije u periodu od 2005. do početka i neposredno nakon SFK iz 2008. (do 2010.) imala vrijednost ispod ekvilibrijumske krive! Pomenuto znači da su proizvodi i usluge

---

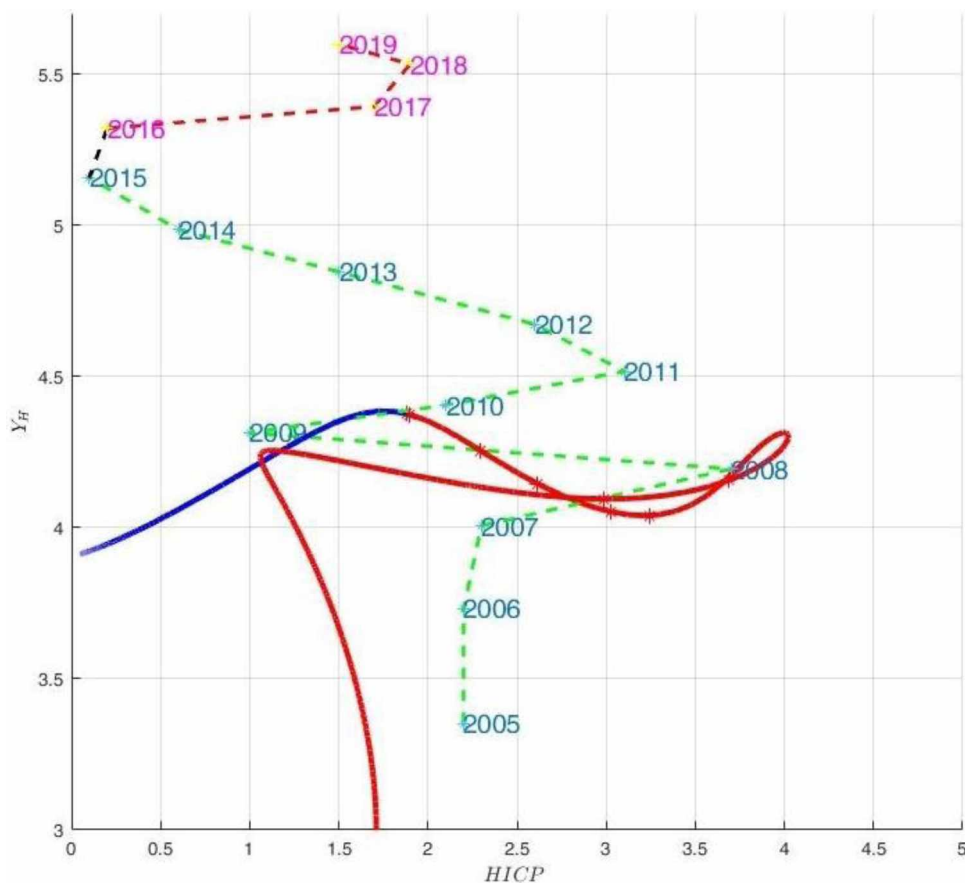
<sup>179</sup> Nekoliko desetina milijardi eura mjesečno je tokom vremenskog perioda od nekoliko godina ubacivano u ekonomski sistem EU putem ECB APP programa.

bili jeftiniji u EU u periodu od 2005–2007. – u odnosu na očekivane *tokom* (engl. flow) sistema, što je u saglasnosti sa ostalim zaključcima iz cjelokupne disertacije analize – uključujući analizu putem vještačke inteligencije i neuralnih mreža (VINM) (engl. Artificial Intelligence and Neural Networks (AI NN)). Uzrok za navedeno se pronalazi u tome da su primanja, odnosno da je ukupni agregatno raspoloživi dohodak  $Y_H$ , bila niža u navedenom periodu. Nadalje sa slike 136 uočavamo prelaz iz okvirno stabilnog domena (2008.) u nestabilni domen (2009.) kada su primanja u pitanju, dok inflacija (*HICP*) ima jak pad u istom periodu od oko 3,75% na 1%. Opet, pomenuto je kauzalno povezano (kao što smo to već naveli) sa velikim, drastičnim i naglim mjerama štednje (engl. austerity measures) koje su tada uvedene u EU, a posebno i izrazito u nekim zemljama članicama. Interesantno je uvidjeti i zaključiti da je maltene 2010. godina bila na granici između stabilnog i nestabilnog domena kada su u pitanju dohodak na oko 1,8% vrijednosti inflacije. Godinu kasnije (2011.), imamo relativno značajan i zabrinjavajući porast inflacije praćen takođe relativno standardnim i očekivanim porastom primanja. U godinama koje su slijedile, od 2011. do 2015. godine primanja EU populacije konstantno su rasla uz značajno smanjenje inflacije. Pomenuto je dijelom posljedica vještački „upumpanog” novca od strane ECB-a u makroekonomski sistem EU, pritom uz istovremeno smanjenje referentnih kamatnih stopa, kako bi se kanalisao taj novac u razvoj unije i ka održanju životnog standarda njenog stanovništva. U cjelosti gledano, posljednje navedeno je jedan vrlo dobar i pragmatičan potez donosioca politika EU, koji je omogućio relativno blagostanje stanovništva i sveukupni razvoj privrede u periodu od četiri godine. Međutim, na horizontu se već tokom ljeta i početkom septembra mjeseca 2015. nazirala sve intenzivnija migrantska kriza. Veliki influks stanovništva radno sposobne dobi (ali, i u manjem procentu starijih i mlađih), a sa relativno slabijim radnim kvalifikacijama, je predstavljao udar na ionako prezategnutu socijalnu politiku EU.<sup>180</sup> Iako, zbog jako velikih novčanih sredstava koje su ubacivane u ekonomski sistem putem već pomenutog ECB APP, nije došlo do smanjenja primanja EU stanovništva

---

<sup>180</sup> Podsjetimo se što smo ranije naveli, odnos radno sposobnog stanovništva, pri uslovima pune zaposlenosti spram primaoca penzija i socijalnih davanja je 1,3:1 – što je dugoročno neodrživo i zabrinjavajuće. Prema priznatoj i poznatoj ekonomskoj teoriji, idelan teorijski odnos za navedeno bi bio od 7:1! Čak, pri konzervativnim procjenama predmetni racio bi trebao minimalno biti 2:1 ili 3:1, što bi nadalje značilo da svaka dva ili tri zaposlena zarađuju primanja i izdvajaju putem doprinosa i/ili poreza za socijalna davanja i penzije za jednog penzionera.

u 2016. godini, došlo je do blagog porasta inflacije, što je signaliziralo promjenu u smjeru porasta inflacije u budućnosti. Posljednje pomenuto se zaista i desilo, jer 2017. imamo vrijednosti inflacije na nivou od 1,75% (sa neposredno–prethodne vrijednosti od 0,25%). U periodu od 2016–2017. porast primanja je i dalje postojao, ali u relativno neznatnom iznosu.



Slika 136. Ekvilibrijske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{l_{10}}$  i  $Y_H$  – ravan  $X-Z$

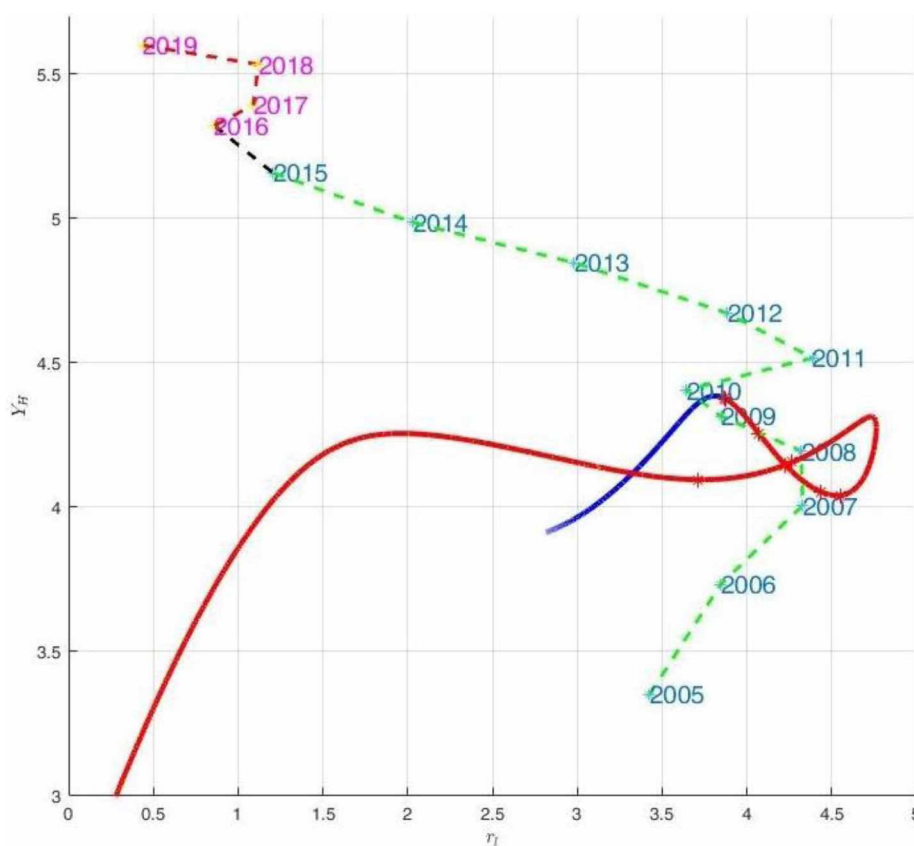
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Prateći tok, vrijednost inflacije je porasla neznatno u 2018. godini, međutim porast primanja je bio značajniji. Da bi konačno na kraju analiziranog perioda 2019. godine primanja i dalje rasla uz neznatno smanjenje inflacije. Navedene obrnuto recipročne promjene upućivale su na određenu vrstu zasićenja koju su makroekonomske politike EU dosegle, i posljedično upućivale na neminovne probleme koji će se uskoro pojaviti na

horizontu u relativno skorijoj budućnosti (par odnosno nekoliko godina). Naravno, pojavom COVID-19 pandemije dolazi do globalnog događaja tipa crnog labuda (engl. Black Swan) koji unosi tektonsko–ekonomske poremećaje u cijelom svijetu. Iz posljednje pomenutog razloga nije uključena 2020. godina u predmetnu  $HICP$ ,  $r_{t_{10}}$  i  $Y_H$  analizu, jer bi sa svojim vrijednostima značajno i dugoročno–neopravdano „iskrivila” analitički sliku i tok sistema.

U toku dalje analize  $HICP$ ,  $r_{t_{10}}$  i  $Y_H$  pristupamo slici 137 koja prikazuje direktnu vezu između vrijednosti inflacije i primanja. Gotovo sve rečeno za sliku 136 važi i za sliku 137, uz jedinu razliku što umjesto  $HICP$  analiziramo dugoročnu referentnu kamatnu stopu EU. Upravo iz posljednje navedenog razloga nećemo detaljno istu elaborirati, jer važe mnogobrojne analogije sa slikom 136. Međutim, ono što je potrebno pomenuti jeste da pri kamatnoj stopi u rasponu od 3,5% pa sve do 4,5% u vremenskom periodu od 2005. do 2011. – bez obzira na SFK iz 2008. godine(!), primanja EU stanovništva su konstantno sve vrijeme rasla! U ekonomskoj teoriji kada imamo konstantnu kamatnu stopu uz porast primanja, i od ranije poznate nam činjenice da su u tom periodu postojale značajnije oscilacije u inflatornim kretanjima u apsolutnom iznosu od oko 2%, definitivno zaključujemo da je ekonomija bila u ciklusu razvoja i rasta. Zaista, posljednje navedeno jeste bio slučaj sa EU makroekonomijom u pomenutom periodu. Dodatno, upoređujući vrijednosti  $r_{t_{10}}$  sa ekvilibrijumskim krivama, zaključujemo da su prije i poslije SFK iz 2008. porast primanja i vrijednost kamatne stope bila u nestabilnom makroekonomskom domenu. Kao uslovnu analogiju, navedeno je izgledalo kao motor automobila koji je radio pri punom broju obrtaja, međutim tako značajna opterećenja mogu rezultovati u svakom trenutku da motor prestane raditi, jer se nalazi u režimu nestabilne ravnoteže. Pomenuta analogija je korisna sa aspekta razumijevanja stvarnih kauzalnosti koje proističu iz teorijskog dijela analize. Dodatno, u ekonomiji često važi i obrnuto, odnosno kada teorijska analiza biva primijenjena od strane zaduženih za politike, tj. ista se preslikava na stvarnost i makroekonomska kretanja. Istine radi, posljednje rečeno je relativna rijetkost u svijetu, osim za očigledne ekonomske kategorije ili zakonski obligatorne norme. Takođe, potrebno je pomenuti vezano za sliku 137 da je od 2011. pa na dalje do 2016. bio prisutan konstantni pad dugoročne kamatne stope, uz istovremeni konstantan rast primanja. U periodu od 2016–2018. vrijednosti  $r_{t_{10}}$  su neznatno oscilovale

između 0,8–1,2%, ali uz i dalje rast primanja  $Y_H$ . Pomenuto predstavlja pokušaj ekonomskih i monetarnih vlasti EU (ECB) da koriguje putem manjih fluktuacija opasnosti od deflacije koja je prijetila EU makroekonomiji u navedenom periodu. Relativno drastičan pad dugoročnih kamatnih stopa na 0,4% u 2019. „zaokružuje” finale posmatranog vrlo dinamičnog ciklusa u EU, a koji je trajao deceniju ipo.



Slika 137. Ekvilibrijumske i stvarne vrijednosti za  $HICP$ ,  $r_{l10}$  i  $Y_H$  – ravan  $Y-Z$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Vrijednosti varijabli koje su iznad ekvilibrijumskih krivih govore nam o tome da su vrijednosti varijabli bile iznad sistemom očekivanih vrijednosti, što u makroekonomskom smislu znači isplata primanja koja nisu imala pokriće u realnom sektoru, već su se prelila ka stanovništvu kroz institucije iz ECB APP programa. Dodatno, vrijednosti varijabli ispod



ekvilibrjumskih, upućuju na to da su primanja prije SFK 2008. godine bila manja nego što su to trebala ili mogla opravdano biti, ali je EU štedjela u tom periodu više za slučaj pojave finansijske ili slične krize, što je na kraju i sveukupno rezultiralo dobrom ekonomskom politikom. Iako nešto poput ECB APP logično implicira da će naravno doći do sveukupnih porasta primanja, potražnje i samim tim potrošnje u EU, ovdje smo na egzaktan i analitički način predstavili kvalitativno i kvantitativno vrijednosti istih, njihovu dinamiku i međusobnu kauzalnost.

Kao neki kratki i opšti zaključak ovog poglavlja možemo reći da je u cijelom posmatranom i analiziranom periodu, odnosno od 2005–2019. godine, primanja stanovništva su bila manja nego što bi to bilo tokom sistema očekivano u periodu od 2005–2007, a nakon toga su okvirno bila na istom nivou od 2008–2011. godine, da bi nakon pomenutih perioda konstantno rasla u relativno manjem ili većem iznosu do 2019. godine. Inflacija je u cijelom ovom periodu oscilovala, i imala relativno veće „zamahe” od oko 2% po apsolutnoj vrijednosti relativno u jednom ili drugom smjeru od njene prosječne vrijednosti. Dok, dugoročne referentne kamatne stope su u prva dva pomenuta perioda mijenjale stabilnost i vrijednost, da bi nakon 2011. maltene doživjele konstantni pad. Posljedično i združeno, sve tri varijable su pokazale kompleksnost i nerazdvojivost međusobnih odnosa pri analizi.

## 5.4 Analiza 4D modela i hiperhaosa pomoću MATCONT-a

Kada analiziramo sisteme reda većeg od tri, potrebno je imati u vidu da je grafička reprezentacija istih svedena na 3D prikaz, jer je posljednje pomenuti prikaz najviše i prirodno blizak ljudskoj standardnoj percepciji. Sama reprezentacija varijabli u 4D, i višim dimenzijama, bi predstavljala konceptualni i analitički problem. Iz navedenog razloga, iako analiziramo sisteme sa više varijabli od tri, prikazivaćemo tri od četiri i više varijabli na jednom 3D dijagramu odnosno u 3D grafičkom prikazu. Bitno je istaći da kretanja tri varijable u 3D u sebi inherentno imaju i sve podatke spregnutog kretanja/vrijednosti četvrte (i/ili više varijabli) neprikazanih na grafiku. Na pomenuti način imamo pregledne dijagrame i posljedično uzete u obzir sve specifičnosti koje ima cijeli sistem. Na slici 138 prikazane su ekvilibrijumske krive za  $x_3$ ,  $x_4$  i  $x_6$  koje respektivno predstavljaju  $G_R$ ,  $G_E$  i  $M_H$ . Navedene varijable  $G_R$ ,  $G_E$  i  $M_H$  predstavljaju *prihod EU vlade*<sup>181</sup>  $G_R$  (engl. government revenue), *rashode EU vlade*  $G_E$  i *depozite po viđenju*  $M_H$  (bez ikakve ročnosti i/ili ograničenja za podizanje sa računa). Izbor varijabli nam govori o tome kolike su kvantitativno i kvalitativno rezerve stanovništva u gotovom novcu na računima finansijskih institucija i koje su na raspolaganju u svakom trenutku vlasnicima istih – u principu to je likvidna aktiva domaćinstava. Dodatno, zaključujemo, da sa obzirom na prihode i rashode EU, koliki se dio tih sredstava (spred) prelijeva u likvidnost građanja, odnosno depozite koji su ekvivalent gotovom novcu zbog same svoje prirode. Treba imati sve vrijeme u vidu, da je četvrta varijabla sistema zapravo promjena u vremenu iznosa dohodovno-agregatne stavke (socijalna primanja, davanja i zarade) EU stanovništva ( $Y_{Hs1}$ ). [33]

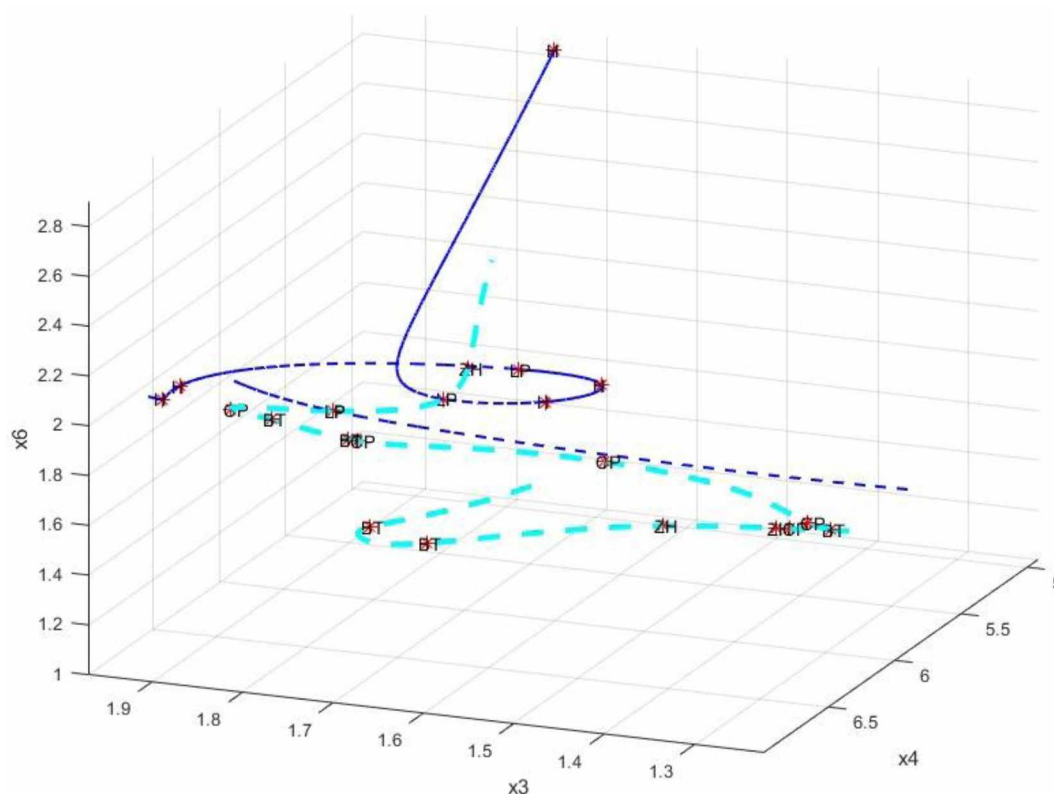
Nadalje, potrebno je prvo uočiti da se izdvajaju dvije krive. Tamno plava kriva predstavlja ekvilibrijum sistema, odnosno rješenja SNDJPR, dok svijetlo plava kriva predstavlja sjedlastu krivu (u prostoru) i ima kvalitativno ambivalentni prirodu, jer ista

---

<sup>181</sup> Evropska vlada u doslovnom smislu riječi ne postoji. Međutim, tretiramo Evropsku komisiju (engl. European Commission) kao „evropsku vladu”, jer je sastavljena od šefova vlada svih evropskih država, i odluke obavezne za EU donesene su od strane upravo tog tijela. Ista, personifikuje evropsku vladu odnosno EU koja ima svoje prihode. U EU prihode uključene su razne dohodovne komponente – po raznim osnovima, i jedino ne uključuju poreze koje razmatramo kao posebnu kategoriju prihoda, a u sprezi sa pojedinim varijablama koje smo ovdje ranije prezentovali.

predstavlja presjek stabilnih i nestabilnih manifolda. Manifoldi nisu prikazani na slici, jer bi dodatno i nepotrebno iskomplikovali dijagramski prikaz, a ne bi doprijenijeli kvalitativnom i kvantitativnom tumačenju modela. Prilaz sjedlastoj krivoj sa nekog pripadajućeg joj i određenog stabilnog ili nestabilnog manifolda ima inherentno i korespondirajuću karakteristiku stabilnosti u predmetnom dijelu prostora. Naime, sve vrijednosti sistema koje prilaze krivoj sa stabilnog manifolda konvergiraju pomenutoj krivoj, dok suprotno sve vrijednosti sistema koje se nalaze na nestabilnom manifoldu divergiraju od predmetne krive. Posljednje pomenuto nema posebnu suštinsko-analitičku vrijednost, jer sjedlasta kriva nam govori o tome da na putanji koju opisuje egzistira promjena stabilnosti sistema, i kao takva u ekonomskom smislu predstavlja prostornu regiju volatilnosti posmatranih (izučavanih) varijabli. Dodatno, u kontekstu ekonomske analize zaključujemo da pri nižim vrijednostima varijabli sistem ima promjenjivu stabilnost, a kako njihove vrijednosti rastu sistem zauzima položaj ekvilibrijumske stabilnosti prezentovane tamno plavom krivom. Detaljna analiza kretanja pojedinih varijabli i njihove međusobne zavisnosti će biti urađena ponaosob za svaku od mogućih projekcija predmetnog 3D sistema.

Ekonomsko značenje dijagrama prezentovanog na slici 138 se može u globalu predstaviti kao efikasnost EU da stvori tzv. državu blagostanja (engl. welfare state) svojim stanovnicima. Modaliteti koje ispituje zapravo predstavljaju istraživanje da li ima, kada i koliko viška finansijskih sredstava u EU „kasi” kada se oduzmu agregatni „vladini” rashodi od prihoda, odnosno naposljetku koliko je od sredstava u slučaju pozitivnog stanja na balansnom računu preliveno na račune stanovnika EU u vidu visoko likvidne štednje. Pošto se količina gotovog novca (engl. cash) koje se nalazi u posjedu kod EU stanovništva može jedino i okvirno estimirati, prvi najbolji pokazatelj likvidnosti istih jeste upravo novac na raspolaganju na računima u finansijskim institucijama, a koji je momentalno dostupan stanovništvu za potrošnju (za robe ili usluge odnosno investicije).



Slika 138. Ekvilibrijske krive za  $x_3$ ,  $x_4$  i  $x_6$  koje respektivno predstavljaju  $G_R$ ,  $G_E$  i  $M_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

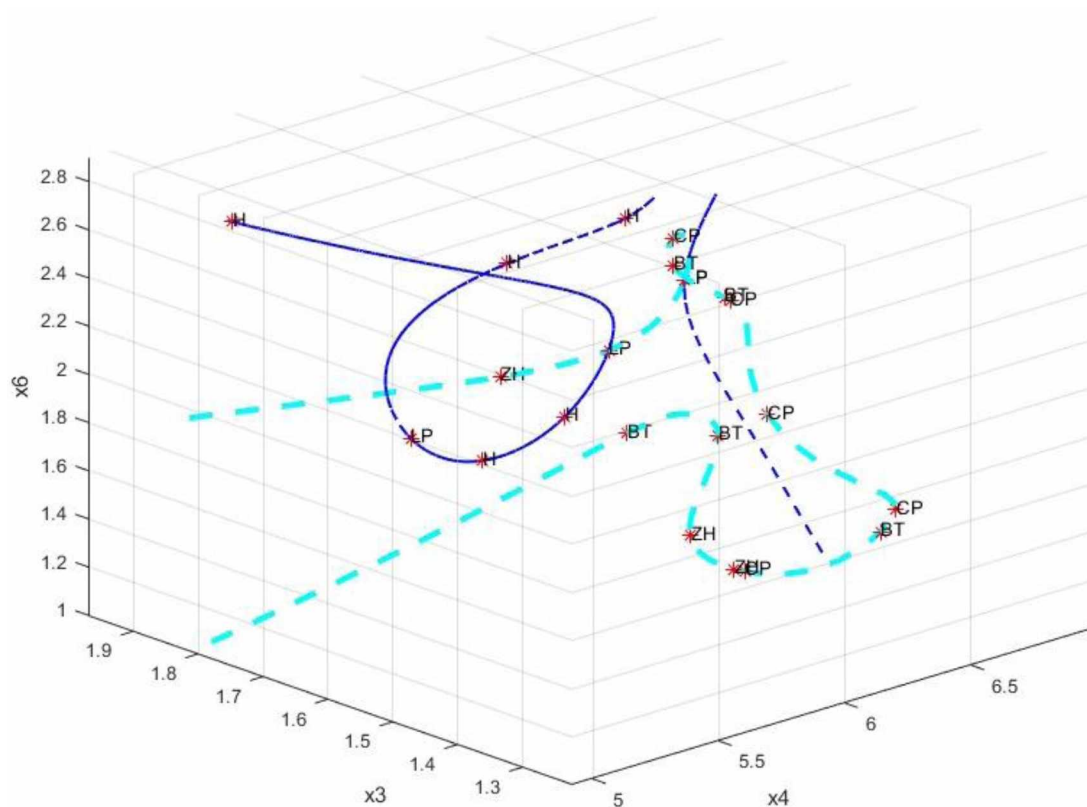
Na slici 139 je prikazan dijagram sa slike 138 iz suprotnog ugla. Navedeno je urađeno sa namjerom da se prikaže kako prostorno-sistemska nestabilnost unose rashodi  $G_E$  tzv. EU vlade, dok dohodovna strana „vuče” stabilnu ekvilibrijsku krivu (tamno plava) ka većim nivoima raspoložive likvidnosti stanovništva EU. Pomenuto je i intuitivno logično, jer idiosinkratski šok za neku ekonomiju svakako predstavljaju povećana fiskalna opterećenja domaćinstava. Posljedično, dio monetarne politike mora biti usklađen zbog očuvanja stabilnosti EU populacije. Navedeni zaključak ukazuje da stavovi i tvrdnje pojedinih ekonomskih teorija, koje usko povezuju djelovanje monetarnih i fiskalnih politika na stanovništvo, posljedično imaju izvjesna empirijska utemeljenja. Bitno je naglasiti da na obje ekvilibrijske krive u prostoru (slike 138 i 139), uočavamo razne singularne tačke, koje se

javljaju uzduž pomenutih krivih. Ukoliko bi započeli kontinuirane i analizu bifurkacija iz svake od pomenutih tačaka na krivim, išli bi dalje u značajno dublju analizu odnosno sintezu. U disertaciji to ne radimo za predstavljeni 4D sistem, jer ista prevazilazi okvire ovog rada. Međutim, zadovoljićemo se okvirnim i sumarnim zaključkom, da su najčešće predmetne singularne tačke tipa BT (Bogdanov-Takens), ZH (Zero Hopf) i CP (Cusp Point). Dodatno, u najvećem broju se nalaze na LP krivoj, koja ima promjenu stabilnosti.

Kao što su to ekonomska empirijska istraživanja dokazala, predvidivost u ekonomskim modelima, metodama i istraživanjima je jako mala i uvijek je uslovljena izuzetno kompleksnim odnosom između brojnih promjenjivih, i pripadajućih im parametara. BT unosi određeni broj stabilnih i nestabilnih manifolda, i pomenuti broj se mijenja od BT tačke do tačke, sa realnim dijelom dvojnog algebarskog multiplikatora (množioca) jednakim nuli. Sve navedeno je u kombinaciji sa ZH tačkama, koje obično znaju predstavljati početne tačke haosa za bifurkacione kontinuirane. Dodatno, između pomenutih tačaka imamo CP koje unose strukturne lomove i nagle promjene ponašanja rješenja sistema, uz mogući histerezesni efekat (kada određena promjena neke vrijednosti padne ili premaši određenu vrijednost ne dolazi odmah do posljedične promjene zavisne vrijednosti – u posmatranom trenutku, već tek nešto kasnije). Kada uzmemo u obzir sve posljednje pomenuto, zaključujemo da je dinamika modela/sistema izuzetno kompleksna, i ima veliki broj varijacija. Za dio ekonomske analize, zadovoljavamo se, kao što je već rečeno, analizom ekvilibriruma (EQ krivih kada je u pitanju 3D).

Povezano, ekonomska interpretacija prethodno pomenutog je da: nivo i dinamika ostvarenih vladinih (EU, tj. EC) prihoda kombinovano sa rashodima, čini štednju u vidu raspoloživog novca kod EU građana jako nestabilnom u smislu da se ista smanjuje i ne prati određeni kauzalni obrazac. Niži prihodi ( $G_R$ ), intuitivno i logički gledano, utiču na manje  $M_H$ , odnosno uz povećane rashode ( $G_E$ ) imamo povećan  $M_H$ . Rezultantno  $M_H$  ima nestabilni karakter, i može naglo i značajno se promijeniti uz najmanje promjene parametara monetarne politike EU. Međutim, u obrnutoj situaciji, imamo slučaj većih ( $G_R$ ), manjih ( $G_E$ ), pa

posljedično većeg i stabilnog  $M_H$ . Osim ciklične i stabilne RBC<sup>182</sup> promjene, dolazi se do većih i stabilnijih iznosa  $M_H$ , kako po vrijednosti, tako i konzistentnosti istog u vremenu. Navedeno za  $M_H$  važi i za dio dohodovne strane EU stanovništva koji predstavlja endogena varijabla.



Slika 139. Pogled iz suprotnog ugla na ekvilibrijumske krive  $x_3$ ,  $x_4$  i  $x_6$ ,

koje respektivno predstavljaju  $G_R$ ,  $G_E$  i  $M_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Za budžet EU je bitnije da prihodna strana bude veća od rashodne strane, bez obzira na vrstu i način troška budžetskih sredstava EU, odnosno postavlja se pitanje: da li potrošnja

<sup>182</sup> Posljedica su stanja makroekonomije EU prije i nakon SFK iz 2008. godine, odnosno drugih (ovdje u disertaciji prezentovanih) kritičnih događaja za EU.

ide ka stvaranju društva blagostanja ili na investicione javno-privatne projekte. Prezentovano dokazuje, da najveći dio sredstava EU – direktno i/ili indirektno, ipak „pronađe put” do građana EU. Zaključak baziramo i na analizi racija nominalnih godišnjih iznosa za  $G_R$  i  $G_E$ , gdje je  $G_E$  u pojedinim godinama bilo dvostruko veće od  $G_R$ . Posljednje pomenuto je upravo onaj noseći stub ideje EU, i oslonac uspjeha EU kao političko-ekonomskog entiteta. Zadovoljan građanin, je zadovoljan i zdrav đak, student, penzioner, radnik, tj. aktivni učesnik u društvu, te je kreator i stvaralac novih projekata i ideja u ekonomiji, pospješujući tako sveukupnu zaposlenost, potražnju i potrošnju na domaćem (internom) EU tržištu, stvarajući preduslove za pozitivan platni bilans i stabilnu valutu (euro). Nadasve pozitivan, privlačan i ohrabrujući zaključak za „NextGenerationEU” naraštaj, ali i za postojeću EU populaciju.

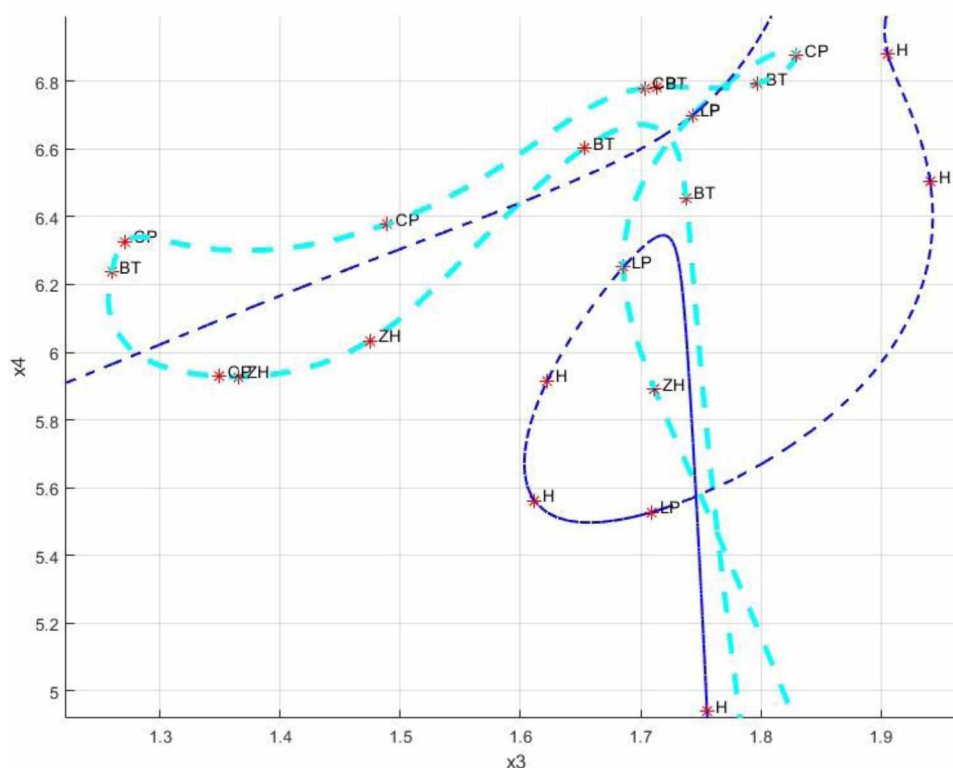
Na slici 140 je prikazana planarna projekcija 4D sistema sa slikama 138. i 139., a za promjenjive prihod i rashod EU vlade<sup>183</sup>, tj.  $G_R(x_3)$  i  $G_E(x_4)$  respektivno. Kao što je već pomenuto, sa slike 140 vidimo da cijeli 4D sistem ima stabilno kretanje (ekvilibrijum) prikazano tamno-plavom krivom, za veće iznose prihoda i rashoda EU. Ukoliko uzmemo u obzir samo sliku 140 mogli bi doći do djelimičnih i/ili parcijalno-pogrešnih zaključaka, bez 3D prikaza kretanja rješenja sistema (modela). Ostale varijable takođe diktiraju kvalitativne i kvantitativne zaključke u analizio modela, što smo prezentovali i naveli u prethodnim pasusima ovog poglavlja. Međutim, ono što je evidentno sa dijagrama (slike 140) jeste da su stabilna kretanja u akviziciji i distribuciji prihoda i rashoda EU jako blizu promjenjivim odnosno djelimično stabilnim i/ili nestabilnim krivama predstavljenim svijetlo-plavom isprekidanom linijom. Nadalje, vidi se da se stabilni ekvilibrijumi doslovno nalaze između krivih sa promjenjivom stabilnošću. Navedeno ukazuje između ostalog i na to da relativno male promjene monetarne i/ili fiskalne politike mogu narušiti iznose prihoda, samim tim i rashoda EU vlade, te učiniti da se životni standard građana značajnije promijeni, a svakako da se smanje iznosi za agregatna socijalna primanja i davanja, iako kod radne populacije štednja po viđenju ostaje relativno nepromijenjena. Bilo kakvo „pogađanje” pomenutih socijalnih kategorija u društvu – penzionera i korisnika socijalnih davanja, je pored toga što

---

<sup>183</sup> U daljem tekstu disertacije ćemo prihode i rashode EU vlade – koju personifikuje EC, iz razloga pragmatičnosti, oslovljavati samo kao: prihodi i/ili rashodi EU.



je ekonomski donekle neopravdano za EU, svakako je i politički nepopularno. Zato je potrebno voditi promišljenu, preciznu i relativno inertnu ekonomsku politiku EU, što ECB zasigurno radi već barem dvije decenije.



Slika 140. Ekvilibrijumske krive za  $x_3$  i  $x_4$  koje respektivno predstavljaju  $G_R$  i  $G_E$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Nadalje, na slici 141 je prikazana planarna projekcija za promjenjive prihod i štednju po viđenju EU vlade, tj.  $G_R(x_3)$  i  $M_H(x_6)$  respektivno. Analitički gledano, posebno pogađa činjenica da je u najvećem dijelu vremenskog perioda u kome analiziramo model EU makroekonomije (2005–2019), tačnije sredinom navedenog perioda, stabilna ekvilibrijumska kriva (tamno-plava) se pratila zajedno sa krivom promjenjive stabilnosti (svijetlo-plavom), tj. blago je rasla sa gotovo linearnim trendom. Ponovo, navedeno ukazuje na jako tanku liniju koja razdvaja stabilni iznos prihoda EU od fisklanih politika, spram iznosa i/ili eventualne promjene (dijela) monetarne politike i generisane novčane baze

okvirima monetarne politike. Posljedično, vidimo jako veliki skok likvidnosti građana EU, a koja je dostupna istim na neoročenim računima u okviru EU finansijskih institucija, a prouzrokovanim sa APP programom koji je startovao na proljeće 2015. godine. Prvobitne godine nestabilnosti tokom izučavanog perioda su posljedica dispariteta koji je bio prisutan između ostvarenih agregatnih realnih primanja EU stanovništva i fiskalne politike pretežno svih EU članica tada, odnosno spram rashoda i potrošnje EU vlade. Ukratko rečeno, tada je EU u vremenu ekonomskog blagostanja, razvoja (engl. boom) real ekonomije i povećanih prihoda, štedjela finansijska sredstva za „crne dane”, tj. potencijalne probleme u okvirima EU i/ili svjetske ekonomije koji bi eventualno mogli nastati. Kao što znamo SFK iz 2008. se zaista i desila, te snažno pogodila EU, ali bi posljedice bile umnogome gore da nije bilo finansijskih „amortizera” (akumulirane štednje u raznim oblicima), a koji su nastali tokom perioda restriktivnije EU monetarne politike – iako je ekonomija EU tada napredovala „punim jedrima” naprijed. Dodatnu potvrdu posljednje pomenutog ćemo vidjeti u jednom od narednih poglavlja kod analitičko-sintetičke metode u kojoj koristimo tzv. inverzno modeliranje (IM) varijabli odnosno postojećih parametara sistema.

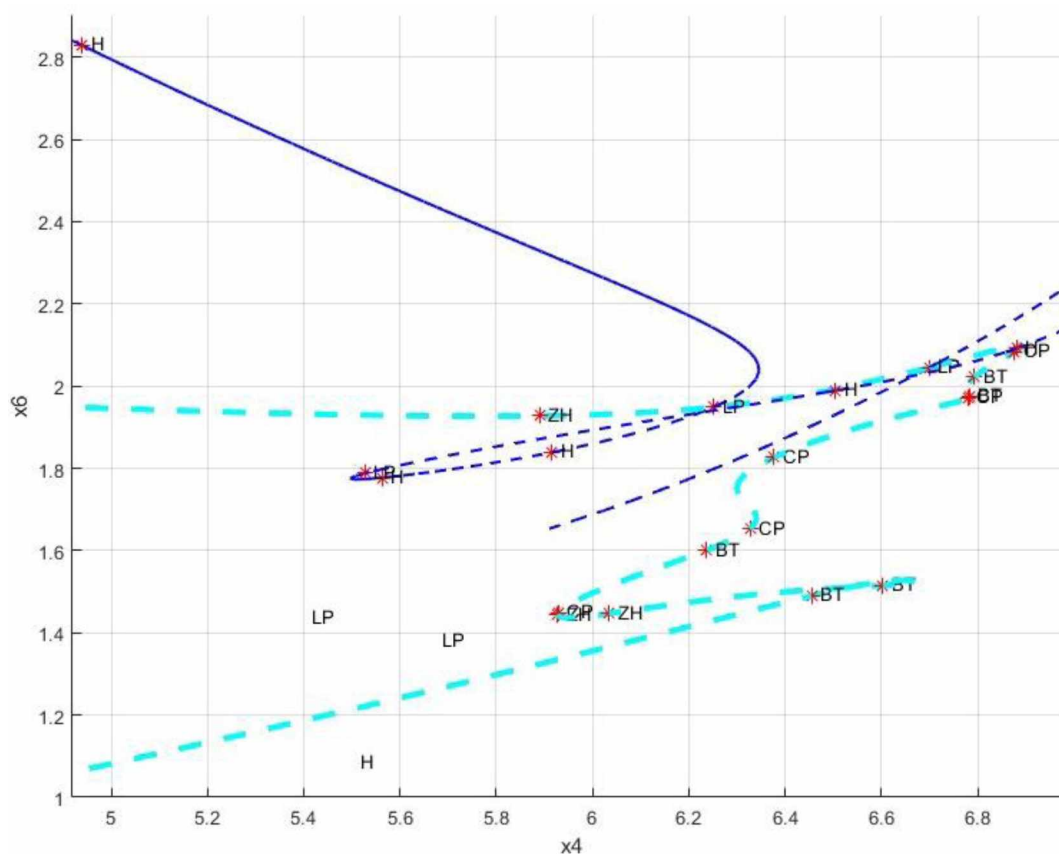
Posljedično na slici 142. je jedina preostala planarna projekcija koja prezentuje promjenjive: prihod i štednju po viđenju EU vlade<sup>184</sup>, tj.  $G_E(x_4)$  i  $M_H(x_6)$  respektivno. Iz ranije objašnjenih razloga, nije praktično, niti pregledno, da na matematičkom 4D dijagramu predstavimo sve izučavane varijable modela/sistema, ali sve vrijeme moramo imati u vidu i prisustvo  $Y_{H_{S1}}$  varijable u sistemu (iako nije prikazana na predstavljanim slikama). Sa slike uočavamo da za niže vrijednosti potrošnje imamo nestabilni odnos sa iznosom štednje na računima građana EU. Dodatno, uočava se kritičan limit potrošnje vlade EU ( $G_E$ ) pri kome zapravo počinje štednja ( $M_H$ ), odnosno agregatna primanja (gledano spram potrošnje) dozvoljavaju stanovništvu da uštede dio svojih prihoda i stave isti „sa strane” u vidu kratkoročnih neoročenih bankarskih depozita. Pomenuta sredstva su uvijek na raspolaganju EU stanovništvu, te se sa makroekonomskog gledišta smatraju jednako likvidnim kao i gotovina. Za određene i stvarne kombinacije međusobnih parova vrijednosti potrošnje vlade

---

<sup>184</sup> U daljem tekstu disertacije ćemo prihode i rashode EU vlade – koju personifikuje EC, iz razloga pragmatičnosti, oslovljavati samo kao: prihodi i/ili rashodi EU.



jednom periodu. Naravno, pomenuti upliv jako povećane likvidnosti odrazio se na veći životni standard građana EU, veću platežnu moć, većeg dijela dohotka koji je kanalan u štednju, sveukupnog razvoja u svim segmentima faktorske proizvodnje (edukacije, tehnologije i kapitala). Ukratko rečeno, ECB APP je predstavljao jedan ogroman pozitivni šok smanjenih kamatnih stopa, održavane targetirane inflacije, uz sveukupni razvoj EU ekonomije. Riječ je o direktnoj i uspješnoj primjeni neokejnzijanskog modela upravljanja makroekonomskim parametrima jedne velike i otvorene ekonomije. Kao još jedna od posljedica svega navedenog, a svakako poželjnog i uspješnog scenarija, je bilo odvajanje stabilne krive međuzavisnosti  $G_E$  i  $M_H$  na „visoko” iznad „prijetećih” nestabilnih krivih, odnosno makroekonomskih trendova.



Slika 142. Ekvilibrijumske krive za  $x_4$  i  $x_6$  koje respektivno predstavljaju  $G_E$  i  $M_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Kada govorimo o stabilnosti predmetnih krivih za varijable sistema, upoređujemo ih u 2D i/ili 3D grafičkom ambijentu. Međutim, kada želimo odrediti koji je prozor i mogućnost naših predviđanja trendova predmetnih varijabli u budućnosti, moramo izvršiti drugu i dodatnu vrstu analize. Naime, postavlja se logičko pitanje: kada poznajemo dio faznog prostora sistema/modela, zapravo koliko smo sigurni u naše buduće prognoze (izraženo u periodima) da su uistinu smislene i svrsishodne? Apsolutni i univerzalni odgovor na postavljeno pitanje ne postoji, već se uvijek mora analizirati model/sistem od slučaja do slučaja. Naime, u ovdje prezentovanom 4D sistemu (ranije smo ispitivali stanje haosa za 3D sistem) možemo jedino govoriti o pojavi hiperhaosa, i ispitivanju sistema na isti. U ekonomskom, odnosno makroekonomskom, smislu hiperhaos predstavlja matematički-konceptualno sve ono što znamo iz svakodnevnog života i nazivamo slučajnošću i stohastičnom zavisnošću toliko mnogo pojedinačnih činilaca (ljudi) u makroekonomiji, koji tek kada se agregatno posmatraju, mogu pružiti neki (djelimični) uvid na „fina kolebanja i valove” unutar posmatranog sistema. Otuda je i naša početna ideja o „jedinstvu mnogih u cjelinu” (lat. *E pluribus unum.*), bila inspiracija i osnov početnog, pa i daljeg, istraživanja u okviru disertacije.

Na slici 143 vidimo prikazane najveće Ljapunove eksponente (LE) za varijable dohodovno-agregatne stavke EU stanovništva ( $Y_{Hs1}$ ), prihod vlade  $G_R$ , rashod vlade  $G_E$  i raspoloživa štednju po viđenju ( $M_H$ ). Uz pomoć pomenutih LE i njihovog međusobnog odnosa sopstvenih vrijednosti donosimo zaključke o postojanju hiperhaosa (engl. Hyperchaos) u sistemu (modelu). U biti, hiperhaotični sistem je dinamički sistem sa ograničenim skupom atraktora, na kome postoje najmanje dva pozitivna Ljapunova eksponenta. Pošto na atraktoru zbir Ljapunovih eksponenta nije pozitivan, mora postojati bar jedan negativan Ljapunov eksponent. Ako je sistem u kontinualnom vremenu, onda je duž trajektorije (putanje) Ljapunov eksponent jednak nuli. Posljedično, minimalni broj dimenzija, u kontinualnom vremenu, u kojima može doći do hiperhaosa je četiri (4). Dok, slično, hiperhaos u diskretnom vremenu zahtijeva najmanje tri (3) dimenzije.[210]

Sjajnu i relativno kratku prezentaciju osnova numeričkog određivanja i izračunavanja hiperhaosa prezentovao je na svom predavanju na radionici u Amsterdamu 2010, pod

nazivom „11th Workshop on Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics ” Prof. dr Anton O. Belyakov<sup>185</sup> na predavanju pod nazivom „On the Numerical Calculation of Lyapunov Exponents” [196]. Narednih par pasusa su izvodi iz pomenutog predavanja.

Posmatrajmo nelinearni autonomni sistem  $\dot{x} = f(x)$ , sa početnim uslovom  $x(0) = x_0$ . Definišimo linearizovani sistem matrica  $Q' = A(x)Q$  i  $Q(0) = I$ , gdje je  $I$  identitetska (jedinična) matrica, a  $A(t)$  je Jakobijanska matrica funkcije  $f$  iz  $\dot{x} = f(x)$ . Definišimo  $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t))$ . Spektar LE jednak je  $\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \sup \frac{1}{t} \log(\alpha_k(Q(t))) \}$ , gdje je  $\alpha_k(Q(t))$   $k$ -ta singularna vrijednost matrice  $Q(t)$  u izrazu  $Q' = A(x)Q$ ,  $Q(0) = I$ , i važi  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Posljedično, upravo na slici 143 su prikazane međusobne relacije znaka LE i kvalitativnog ponašanja SNDJPR.

Zapravo, u praktičnim slučajevima koristimo se metodom Gram-Šmit ortonormalizacije (ortogonalizacije) (engl. Gram–Schmidt ortonormalization), koju kasnije primjenjujemo (kodno implementiramo) u numeričkim metodama, što će nešto kasnije biti i prezentovano. Na kraju svakog koraka u okviru numeričkih proračuna koristimo Gram-Šmit ortonormalizacije. Nadalje, koristimo se numeričkom metodom tzv. „žabljeg skoka” (engl. leapfrog integration), jer nam najviše odgovara upravo pri ortonormalizaciji.

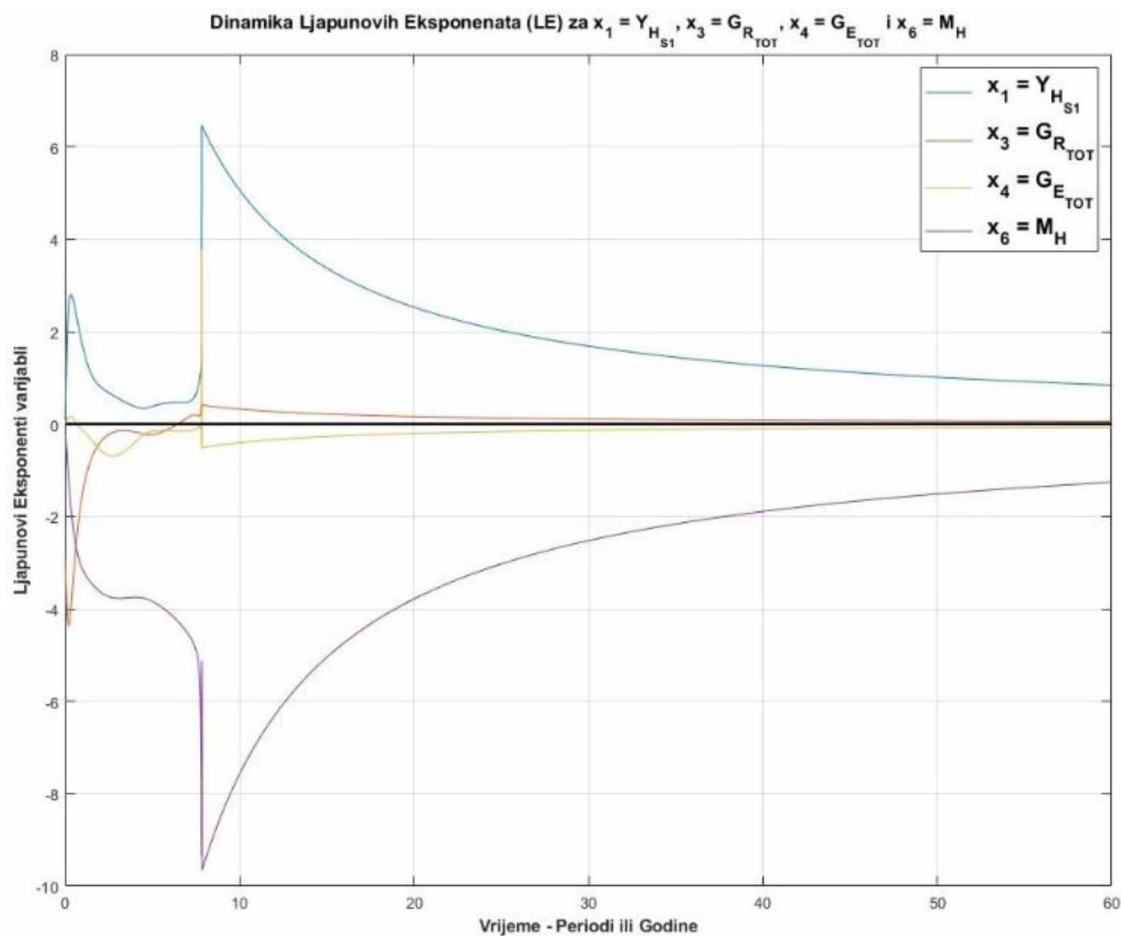
Metoda se sastoji u sljedećem:  $x_{n+1} = x_n + v \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2}$ , gdje su  $v = f(x_n)$  i  $a = A(x_n)v$ . Dok, za rješenja linearizovanih sistema koristimo Heunov (engl. Heun) metod (RK2 metoda, ili Runge-Kutta metoda drugog reda). Zapravo, u tom slučaju se radi o modifikovanom Ojlerovom (engl. Euler) metodu ili metodu eksplicitnog trapezoidnog pravila, koji glasi:  $\widetilde{Q}_{n+1}$ <sup>186</sup> =  $Q_n + A(x_n) Q_n \Delta t$ , odnosno  $Q_{n+1} = \frac{(\widetilde{Q}_{n+1} + Q_n + A(x_{n+1}) \widetilde{Q}_{n+1} \Delta t)}{2}$ .

U okviru MATLAB-a za rješenje koristimo skup programskih rutina pod nazivom

<sup>185</sup> Profesor i predavač na Institutu za matematičke metode u ekonomiji na Bečkom tehnološkom univerzitetu, kao i na Ruskom državnom Univerzitetu Lomonosov u Moskvi.

<sup>186</sup>  $Q$  sa nadvučenom tildom ( $\sim$ ), tj. ocijenjena vrijednost.

*chebfun*, čija se izvorna ideja bazira na primjeni izvornih i modifikovanih funkcija Čebiševa (rus. Пафнутиј Львович Чебишев<sup>187</sup>).



Slika 143. Ljapunovi eksponenti (LE) za varijable dohotka od zarada i primanja EU stanovništva ( $Y_{HS1}$ ), prihoda vlade  $G_R$ , rashoda vlade  $G_E$  i raspoložive štednje po viđenju ( $M_H$ )

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

<sup>187</sup> Pafnuty Lvovich Chebyshev (rus. Пафнутиј Львович Чебишев), (16. maj 1821. – 8. decembar 1894.), je bio ruski matematičar, i smatra se osnivačem odnosno ocem ruske matematike.



Na slici 144 znak minus („-“) u izlomljenim zagradama na slici označava negativan LE, znak plus („+“) označava pozitivan LE, dok znak („0“) označava nultu vrijednost za LE (kretanje po trajektoriji). Posljedično, može se vidjeti da hiperhaos postoji u sistemima koji imaju barem dva LE pozitivna, što nam je i cilj da ispitamo u predmetnom 4D sistemu. Ukoliko sistem bude imao dva (2) pozitivna LE karakterišemo ga kao hiperhaotični sistem. Bitno je naglasiti da prilikom numeričkog ispitivanja znaka LE u kontinualnom vremenu postoji (takođe) tzv. *tranzijent* (prelazni period) u kome sistem (računar) „traži“ stabilno numeričko rješenje(a), te se iz tog razloga isti ne uzima za relevantan, već nakon određenog broja početnih perioda, što zavisi od vrste i tipa sistema.

### Jednodimenzioni sistem

$\langle - \rangle$  stabilne (privlačne) fiksne tačke

### Dvodimenzioni sistemi

$\langle -, - \rangle$  fokus;  $\langle 0, - \rangle$  granični krug

### Trodimenzioni sistemi

$\langle -, -, - \rangle$  fokus

$\langle 0, -, - \rangle$  granični krug

$\langle 0, 0, - \rangle$  torus

$\langle +, 0, - \rangle$  neobični atraktor (haos)

### Četvorodimenzioni sistemi

(i više)

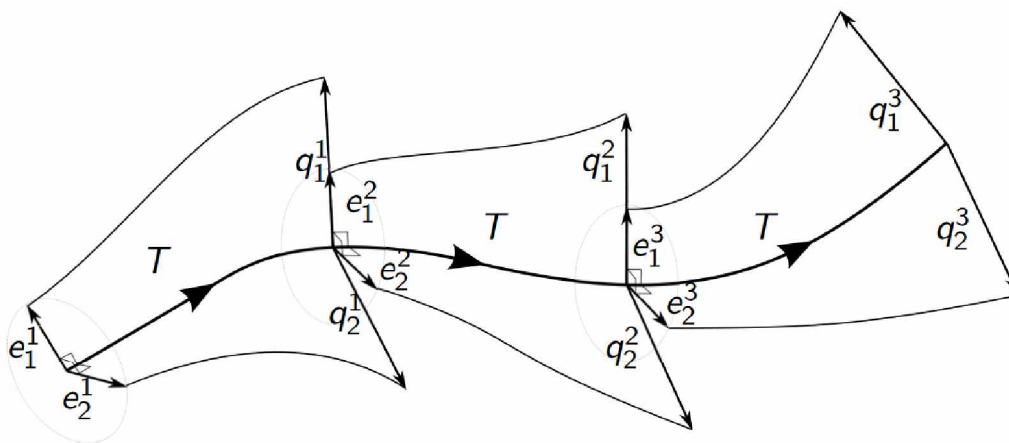
...

$\langle +, +, 0, - \rangle$  hiperhaos

Slika 144. Raspored znakova LE kod: karakterističnih tačaka, fokusa, krugova, torusa, neobičnih atraktora (haosa) i hiperhaosa

Izvor: Predavanja Prof. dr Anton O. Belyakov na seminaru u Amsterdamu [116]

Gram-Šmit ortonormalizaciju, vršimo na sljedeći način:  $e_0^s = \frac{f(x^s)}{\|f(x^s)\|}$ <sup>188</sup>;  $\tilde{e}_1^s = q_1^{s-1} - (q_1^{s-1}, e_0^s) e_0^s$ ;  $e_1^s = \frac{\tilde{e}_1^s}{\|\tilde{e}_1^s\|}$ ;  $\tilde{e}_2^s = q_1^{s-1} - (q_2^{s-1}, e_0^s) e_0^s - (q_1^{s-1}, e_1^s) e_1^s$ ;  $e_2^s = \frac{\tilde{e}_2^s}{\|\tilde{e}_2^s\|}$ , te na kraju određujemo LE kao  $\Lambda = \frac{1}{sT} \sum_{s=1}^S \log \|q_k^s\|$ , za  $\Lambda_0 = 0$ . Na slici 145 je grafički prikazan prethodno prezentovani numerički postupak.



Slika 145. Gram-Šmit ortonormalizacija

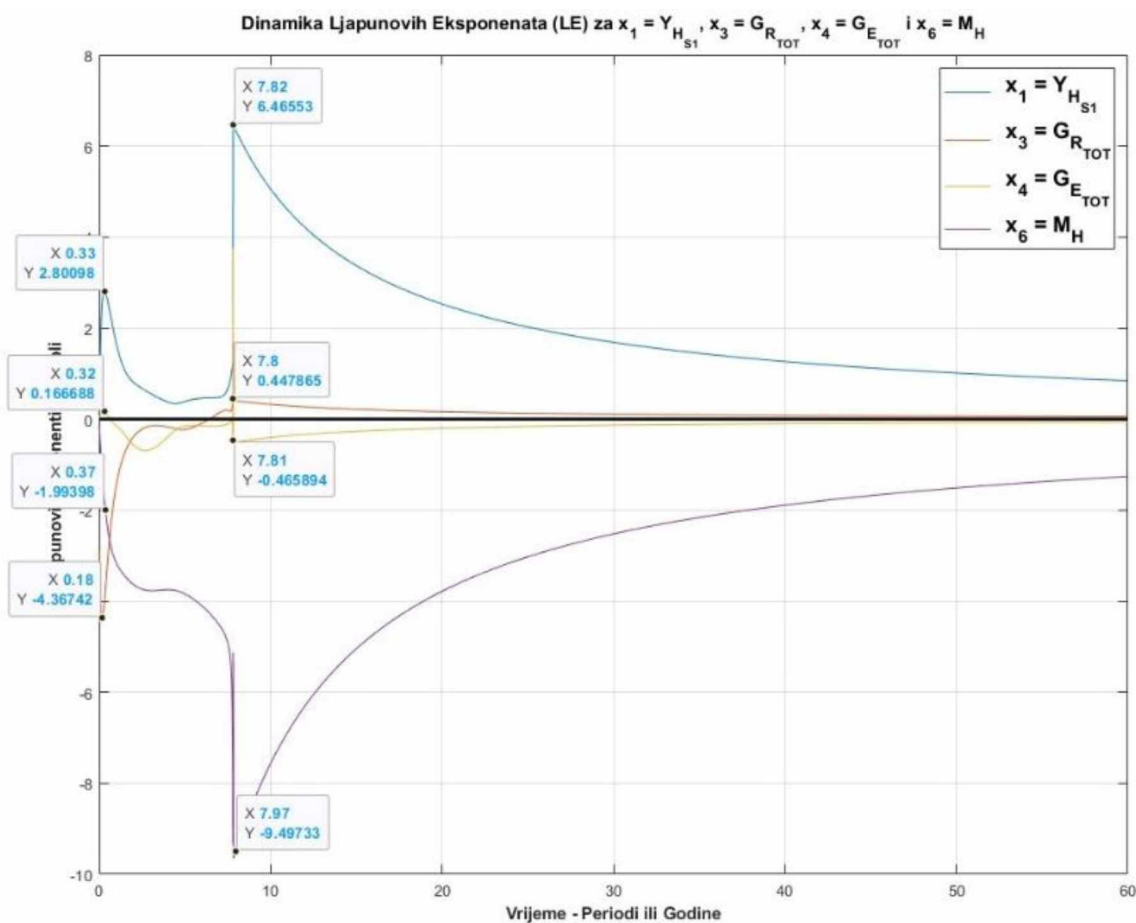
Izvor: Predavanja Prof. dr Anton O. Belyakova na seminaru u Amsterdamu [116]

Prezentovano (hiperhaos) se može jasno vidjeti kod Rosslerovog sistema, međutim iz razloga racionalnosti nećemo detaljnije isti prezentovati

Na slici 146 su prikazane vrijednosti karakterističnih tačaka tranzicionog perioda i početka (starta) hiperhaosa u sistemu. Vidimo da se tranzicioni period završio nakon različitog vremena, tj. u dijapazonu periodnih vrijednosti od 0,18–0,37. Međutim, možemo smatrati da su svi tranzicioni periodi završeni do 0,4 perioda (godine). Kasnije uočavamo da hiperhaotično ponašanje sistema počinje u rasponu od 7,8–7,97 perioda, što ujedno predstavlja i maksimalni interval (prozor) povjerenja za prognozu sistema. Sve nakon (okvirno gledano) osmog perioda predstavlja izrazito haotično (hiperhaotično) kretanje

<sup>188</sup> Crvenom bojom su označeni početni, odnosno prethodno-iterativni, jedinični vektori (koji razvlače prostor), a sa ciljem lakšeg praćenja iznesenog u jednačinama.

vrijednosti varijabli, i ne možemo se osloniti na smislenu i razumnu prognozu budućih kretanja sistema/modela. Navedeno je bitno naglasiti, jer u skladu sa hipotezama disertacije potvrđujemo opseg povjerenja prognoza koje pružaju modeli, a u zavisnosti od kada počinje haos i/ili hiperhaos.

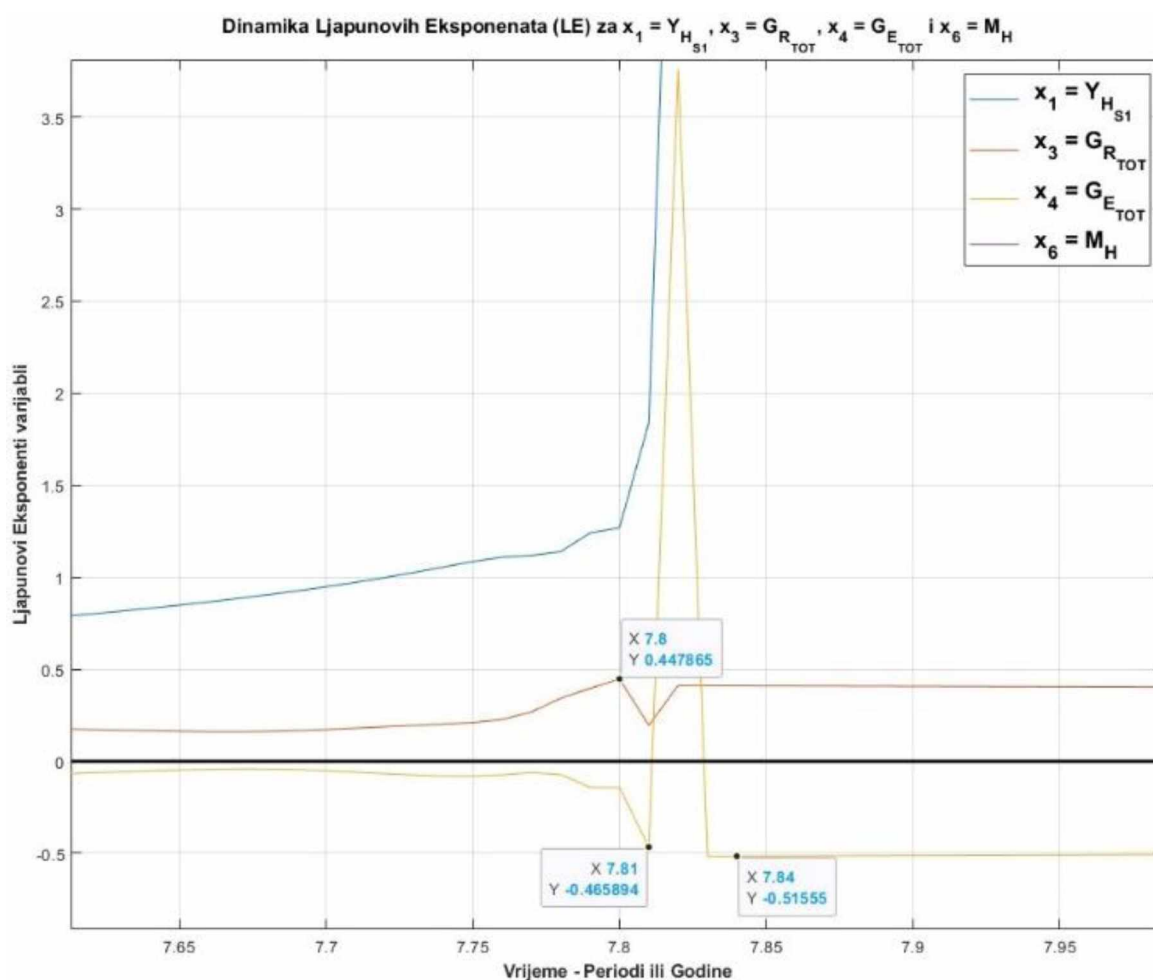


Slika 146. Ljapunovi eksponenti (LE) za varijable dohotka od zarada i primanja EU stanovništva ( $Y_{H_{S1}}$ ), prihoda vlade  $G_R$ , rashoda vlade  $G_E$  i raspoložive štednje po viđenju ( $M_H$ ) sa vrijednostima karakterističnih tranzicionih i hiperhaotičnih tačaka

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 147 pokazuje da varijable, koje u našem slučaju imaju pozitivne LE, su upravo one koje se tiču dohotka od zarada i primanja EU stanovništva ( $Y_{H_{S1}}$ ) i prihoda vlade  $G_R$ .

Primjetno je da obje varijable su direktno povezane sa navikama, ponašanjem, planovima, željama, i sl. stanovništva EU, i predstavljaju vrlo subjektivnu kategoriju. Ukoliko se zapitamo: da li je navedeno stvarno slučaj i sa varijablom prihoda vlade  $G_R$  (pošto je jasno samo od sebe za  $Y_{H_{S1}}$ ), odgovor je jasan da jeste, jer najveći dio prihoda vlade  $G_R$  se uplaćuje od strane EU stanovništva, koji posljedično „balansiraju” svoja lična primanja i izdatke zbog plaćanja obaveza koje imaju – u vidu poreza, taksi, doprinosa, i sl., te su više nego direktno korelisane.



Slika 147. Ljapunovi eksponenti (LE) za varijable dohotka od zarada i primanja EU stanovništva ( $Y_{H_{S1}}$ ), prihoda vlade  $G_R$ , rashoda vlade  $G_E$  i raspoložive štednje po viđenju ( $M_H$ ) (zoom grafika)

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Dodatno, vidimo da rashodi vlade  $G_E$  kratkotrajno imaju pozitivan LE, pa se ubrzo vraćaju u negativne vrijednosti. Pomenuto, je očekivano, s obzirom da se isti nalaze na granici stabilnosti, jer direktno zavise od dohotka od zarada i primanja EU stanovništva ( $Y_{Hs1}$ ) odnosno prihoda vlade  $G_R$ . Ukoliko nema stabilnih primanja – uplate obaveza vladi/državi, nema ni stabilne potrošnje za predmetno društvo. Navedeno, je samo po sebi intuitivno poznato i logično, međutim dodata vrijednost u istraživanju 4D sistema je kvantifikovanje istog uz kvalitativnu potvrdu nad realnim podacima.

Čak i dosadašnja analiza SNDJPR predstavlja samo zagrebanu površinu svih potencijalnih analiza i zaključaka koje iste mogu da donesu. Svaki od ovih sistema može predstavljati osnovu za dalju analizu.

## 5.5 Analiza 7D modela i hiperhaosa pomoću MATCONT-a

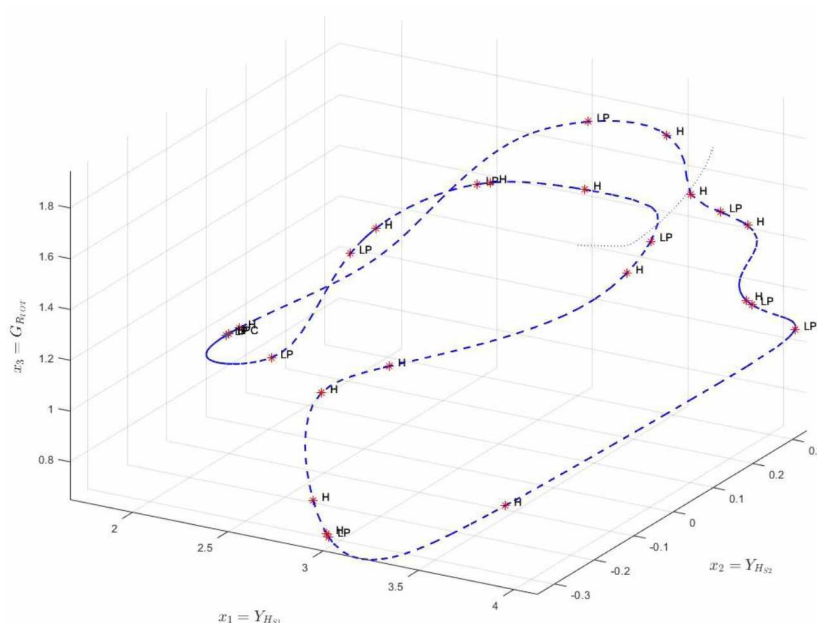
Metodološki gledano, analiza 7D sistema je vrlo slična prethodnoj analizi 4D sistema, te ćemo samo ukratko prezentovati jedino ključne zaključke. Kao što je već rečeno, u predstavljenim analizama smo samo zagrebali površinu svih potencijalnih puteva istraživanja, analiza i zaključaka. Dodatno, niti na jednom predstavljenom grafikutrajektorije (rješenja) se ne presijecaju, iako zbog prostornog prikaza i ugla gledanja možda na prvi pogled tako djeluje. Međutim, to apsolutno nije slučaj, jer bi bilo u suprotnosti sa teoremom o postojanju rješenja DJPR.[33]

Prvo što primjećujemo na slici 148 jeste zatvoreni krivolinijski tok trajektorija. Kada se analizira veliki broj varijabli koje su međusobno zavisne navedeno je očekivano, jer postoji na nivou makroekonomskog sistema idiosinkratska isprepletenost zavisnosti svih korištenih varijabli. Kvalitativno posmatrano zaključujemo da sistem je u biti „zatvoren” – na način da sve što se proizvede i zaradi, na kraju se potroši u istom tom makroekonomskom okruženju. Dodatno, „izvori” prihoda stanovništva EU ( $Y_{Hs1}$  i  $Y_{Hs2}$ ) imaju svoje „ušće” u vidu vladinih prihoda ( $G_R$ ). Međutim, nas u disertaciji prvenstveno interesuje odgovor na pitanje: kako zavise vladini prihodi u vremenu od prihoda EU stanovništva? Navedeno pitanje sa jedne strane direktno ukazuje na stepen funkcionalnosti EU makroekonomije, dok sa druge strane ukazuje na stepen države blagostanja (EU) spram njenih stanovnika.

Sa slike 148, koja predstavlja integralni 3D dijagram sistema (modela), odmah se uočava da je u dva navrata postojao vremenski period sa relativno konstantnim prinosima od kapitalnih dobitaka, i isti koincidira sa periodima stabilnosti u EU (prije SFK iz 2008. i u periodu nakon početka ECB APP). U međuvremenu, između dva pomenuta perioda postojali su tranzicioni periodi u EU makroekonomiji gdje se dodatno čak javljao i histerezesni efekat varijabli, u smislu da povećanje primanja vlade nije prethodno i/ili paralelno rezultovalo povećanjem primanja od strane dohotka kod EU stanovništva. Naravno, da pomenuti režim izdataka je bilo teško finansijski „ispratiti” od strane građana jedan određeni vremenski period, ali ipak dugoročno gledano isti je ostavio „zalog” za budućnost u vidu otpornijeg EU makroekonomskog okruženja. Kejnsovi postulati da bez potrošnje nema ni razvoja i napretka

ekonomije, direktno su vidljivi na slici 148. Naime, ukoliko posmatramo krajnji desni oblik krive vidimo da ima (postoji) aktuelno rast i modelom očekivani pad uz vraćanje u cirkularnost RBC postulatima. Kombinacija neokejnzijanskog (NK) i RBC modela kreira od EU makroekonomije izvjesnu vrstu makroekonomskog hibrida u teoretskom smislu. Ekonomsko značenje rečenog predstavlja činjenični rast primanja, uz prateću povećanu štednju, dok se izdaci za vladine prihode takođe povećavaju – nema ništa neobično u navedenom. Međutim, postoje racionalna očekivanja koja vuku korijen iz NK teorije da će uskoro i neminovno nastupiti RBC, i sve tako u krug. Prezentovano je rađeno na stvarnim podacima, i zaista empirijski potvrđuje mikroekonomske osnove unutar EU makroekonomije, a kao egzemplarnog modela jedne velike otvorene ekonomije u teorijskom i praktičnom smislu.

Kao što smo već naveli, kod prethodna dva izučavana sistema/modela, ovdje nećemo sprovesti bifurkacionu analizu singularnih tačaka i analizu pripadajućih im promjenjivih, zbog obimnosti, već ćemo se zadržati na analizi i proizašlim zaključcima codim 1 bifurkacione, odnosno ekvilibrijumske analize.

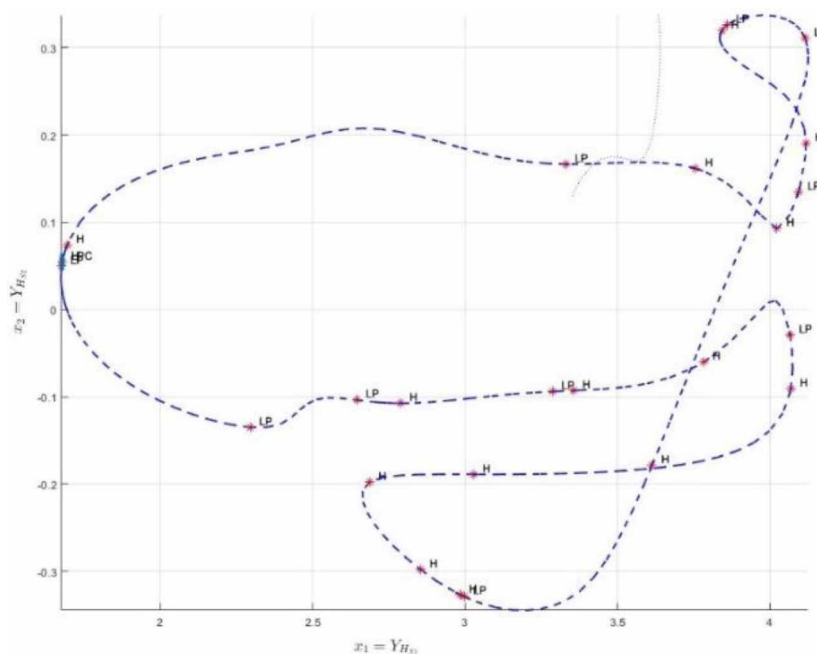


Slika 148. Trajektorije (ekvilibrijumska rješenja) 7D sistema sa singularnim tačkama

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



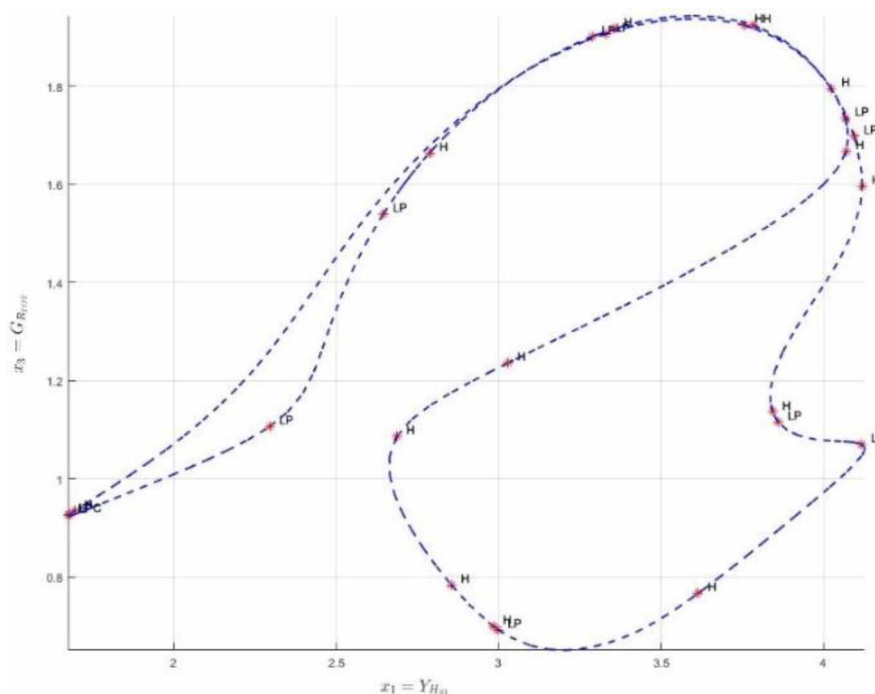
Na slici 149 je prikazana projekcija trajektorija (ekvilibrijumska rješenja) 7D sistema sa singularnim tačkama na  $x$ - $y$  ravan za promjenjive  $Y_{Hs1}$  i  $Y_{Hs2}$ . Sa grafika zaključujemo gotovo sve isto što je navedeno za prethodni 3D dijagram. Jedinu razliku predstavljaju dva kvazi-kružna kretanja trajektorija u desnoj polovini grafika, koja ukazuju na to da je između dohotka i štednje građana EU postojao (u određenom periodu vremena) korelisani odnos po principu „spojenih sudova”. Ponovo navedeno nije iznenađujuće, ali i ukazuje na situacije potrošnje ličnog dohotka u cjelini, odnosno na pomoć u životnoj potrošnji stanovništva EU iz kanala štednje. Pomenuto zasigurno nije „dobar” i poželjan scenario, ali je ipak razumljiv imajući u vidu sezonsku komponentu životnih potreba najvećeg dijela EU populacije. Parcijalno detrendiranje prezentovanih varijabli je moguće ukoliko postoje stimulativni i dodatni izvori potrošnje kao npr. ECB APP. Međutim, kao što smo već naveli, isti (APP) imaju i svoje negativne konsekvence.



Slika 149. Projekcija trajektorija (ekvilibrijumska rješenja) 7D sistema sa singularnim tačkama na  $x$ - $y$  ravan za promjenjive  $Y_{Hs1}$  i  $Y_{Hs2}$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

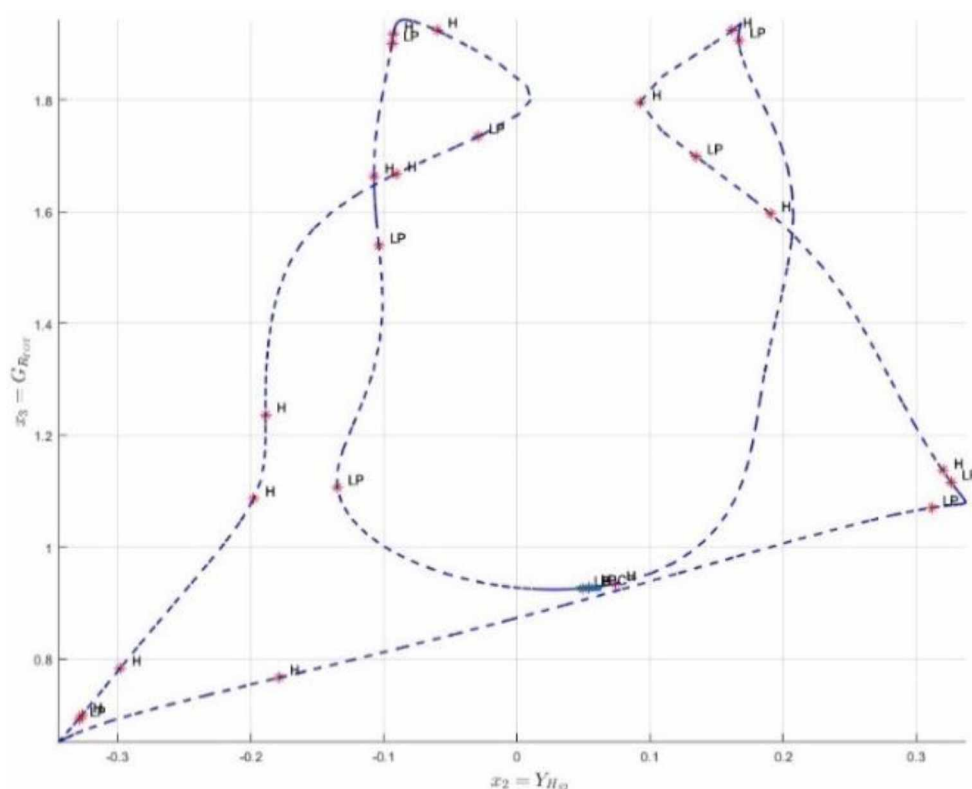
Slika 150 prikazuje projekciju trajektorija 7D sistema sa singularnim tačkama na  $x-z$  ravan za promjenjive  $Y_{Hs1}$  i  $G_R$ . Generalni zaključak sa slike 150 je da očigledno postoji direktna korelacija između dohotka stanovništva EU i vladine potrošnje. Iako, u određenim segmentima javlja se kvantitativna diskrepanca između njih, kvalitativno sistem prati i prikazuje poštovanje ekonmskih postulata. Razlike su unešene vještački, tj. sa APP „upumpanim” novcem u EU makroekonomski sistem, odnosno povlačenjem dijela novčane mase iz sistema usljed povećane inflacije i javnog duga, smanjenih kamatnih stopa i prije svega mjera štednje (engl. austerity measures) koje su bile na snazi tokom krize nekih zemalja u periodu od 2010. do najmanje 2012. godine. Samo okvirno ćemo navesti da se neki strukturni lomovi kod ponašanja sistema upravo javljaju u sadejstvu sa Hopfovim singularitetima i LP promjenama u stabilnim odonso nestabilnim manifoldima. Detaljna analiza svake ili većine tačaka prevazilazi svrhu i predmet ove disertacije, te stoga dalje neće biti razmatrane.



Slika 150. Projekcija trajektorija (ekvilibrijska rješenja) 7D sistema sa singularnim tačkama na  $x-z$  ravan za promjenjive  $Y_{Hs1}$  i  $G_R$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 151 prikazuje projekciju trajektorija 7D sistema sa singularnim tačkama na  $y$ - $z$  ravan za promjenjive  $Y_{H_{S2}}$  i  $G_R$ . Vrlo je slična i analogna analiza kao i kod slike 149, osim sa naravno razlikom da štednja i vladina potrošnja upadaju u recesione, pa čak i stagflacione, „vrtloge” ukoliko dohodak ne prati sa istom ili bliskom stopom rasta štednju, odnosno posljedično i indirektno vladinu potrošnju. Pošto štednja građana EU je još osjetljivija kategorija od primanja, ista ima naglije i oštrije promjene, jer ne znači da će svako moći štedjeti od svojih primanja kada se oduzmu standardni troškovi.



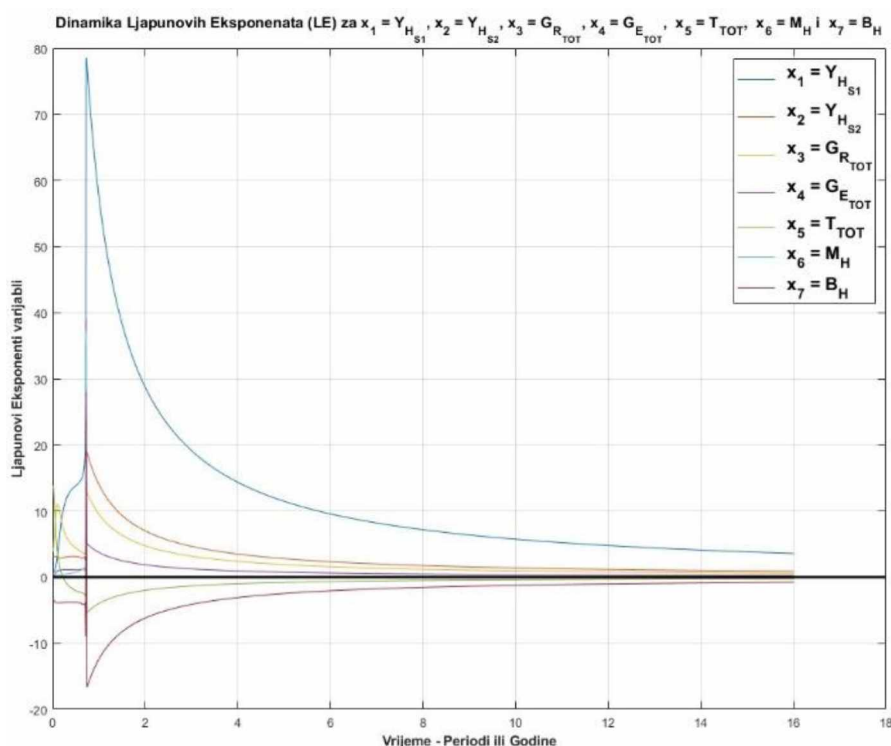
Slika 151. Projekcija trajektorija (ekvilibrijumska rješenja) 7D sistema sa singularnim tačkama na  $y$ - $z$  ravan za promjenjive  $Y_{H_{S2}}$  i  $G_R$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Kao generalni zaključak prezentovanog 7D modela možemo reći da čak i u relativno najtežim trenucima za EU ista je trošila jako puno na ubacivanje novca u sistem, povećanje

dohotka, samim time i privatne odnosno javne potrošnje balansirajući ponudu i tražnju u raznim makroekonmskim sferama na gotovo (skoro) optimalan način. Prezentovano jeste za poštovanje i pohvalu realizatorima odluka unutar EU.

Za razliku od 4D sistema, LE kod 7D sistema na slici 152 imaju duplo duži tranzijent. Navedeno ne bi predstavljalo problem što se isti povećao sa nekih (oko) 0,4 perioda na oko 0,74 perioda, da se trenutak kada počinje hiperhaos u sistemu ne javlja okvirno početkom drugog perioda. Prezentovano nam skraćuje mogućnost efikasnog predviđanja, na 1,3 perioda, što u konačnici rezultira sa (pouzdanijim) relativno kratkoročnim na srednjeročne makroekonomske prognoze. Suštinski razlog za navedeno se nalazi u tome da povećani broj stohastičnih vremenskih serija u jednom jedinom sistem povećava i entropiju cjelokupnog sistema. Povezano, entropija se definiše kao mjera neuređenosti ili poremećaja sistema što prikladno odgovara proučavanju haotičnosti u okviru determinističkog sistema sa stohastičnim komponentama.

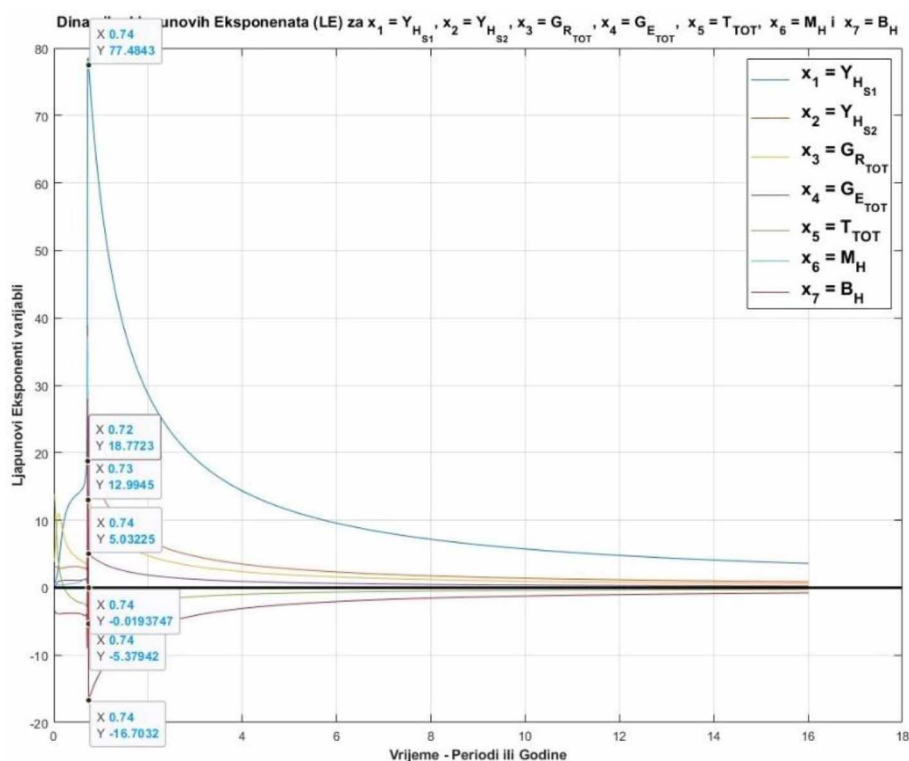


Slika 152. Ljapunovi EkspONENTI (LE) za sve varijable 7D sistema

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Entropijska istraživanja i uticaj na makroekonomske sisteme/modele, takođe je razmatran kao jedan od alternativnih „puteva” izučavanja EU makroekonomskog sistema. Pošto se pomenute metodologije razlikuju koncepcijski, nijesu prezentovane u ovom radu.

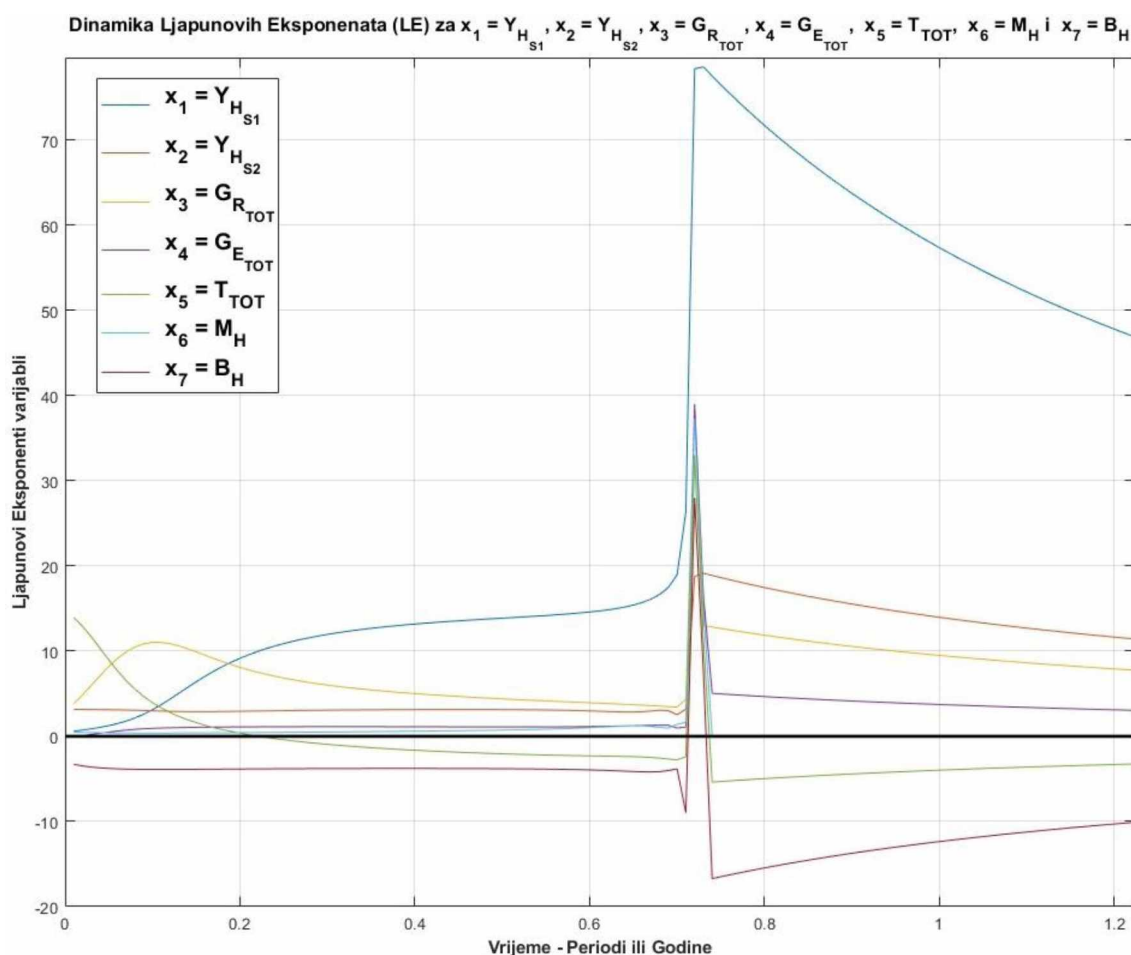
Dok, na slici 153 vidimo egzaktnu vrijednost završetka tranzijenata. U određenoj mjeri je očekivano da pozitivne LE imaju upravo varijable sa najvećim idiosinkratskim uticajem na kretanja vrijednosti u sistemu/modelu. Dakle, pozitivan LE imaju varijable  $Y_{HS1}$ ,  $Y_{HS2}$ ,  $G_R$  i  $G_E$ , dok negativan LE imaju varijable  $T_{TOT}$ ,  $M_H$  i  $B_H$ . Periodi tranzijenata su takođe prikazani na slici 153., i iznose u rasponu od 0,72 do 0,74. Dodatno, vidimo da najveću vrijednost otklona LE imaju upravo dohodovna primanja  $Y_{HS1}$ , što je intuitivno i logično, jer sve počinje i završava se na istima u makroekonomskom toku. Otkloni ostalih LE su (okvirno gledano) međusobno prilično bliski po apsolutnim vrijednostima.



Slika 153. Ljapunovi eksponenti (LE) za sve varijable 7D sistema  
sa vrijednostima završetaka tranzijenata

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 154 i 155 prikazuju zumirane djelove slike 152. Dodatno, pomenute slike prikazuju potvrdu tvrdnje LE znakova, tj. koji su to LE pozitivni, a koji negativni. Uočavamo na slici i vrijednosti divergencije predmetnih varijabli prilikom „ulaska” u hiperhaotično stanje.



Slika 154. Ljapunovi Eksponenti (LE) za sve varijable 7D sistema

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

## 5.6 Teorija inverznog modeliranja (TIM)

Teorija inverznog modeliranja (TIM) predstavlja jako koristan alat u komparativnoj analizi – vrijednosti promjenjivih spram situacija kako je nešto moglo biti i u kojoj mjeri drukčije u odnosu na početne premise (ukoliko se svi, ili dio parametara sistema promijeni). Naime, kada dobijemo određene vrijednosti primjenom neke validne metode, okrenućemo početne i ulazne postavke određene varijable – izolujemo je, te sa ranije pomenutim i dobijenim rješenjima se vratimo u novo-definisane relacije među varijablama, kako bi donijeli nove kvalitativne i kvantitativne zaključke. Kada izanaliziramo ravnotežne položaje (ekvilibrijume) varijabli od interesa – na numerički i grafički način, izvlačimo značajne podatke iz tih vrednosti i inkorporiramo ih u matematičke formule. Predmetnim postupkom, dobijamo vrednosti za te odabrane varijable na metodološki inverzan način, dok istovremeno pratimo definisani tok sistema. Rezultati koje dobijemo korištenjem ovog metoda govore nam o tome koji praktični model i vrednosti odgovaraju stvarnom i realnom stanju istraživanog sistema. Ova analiza ravnotežnih položaja i njihova primena putem TIM omogućava nam bolje razumevanje kako se sistem ponaša i kako ga možemo optimalno prilagoditi za konkretne potrebe. Kod posljednje pomenutih metodoloških kategorija, jako je bitno za praktičnu primjenu analitičkih zaključaka da sprovodioci makroekonomskih politika znaju osim smjera kretanja involvirane varijable i iznos njenog kretanja u konkretnom smjeru. Praktičan primjer baziran na ranije pomenutim SWD ECB i Eurostat podacima biće prikazan u daljem tekstu.

Nakon definisanja toka sistema i otkrića singulariteta, možemo invertovati podatke varijabli modela kako bi dobili (odredili) njihove vrijednosti u okviru makroekonomskih i/ili fiskalnih politika. Povezano sa politikom kamatnih stopa, dvije najvažnije egzogene varijable su poreska stopa na zarade ( $\tilde{\tau}_\omega$ ) i nominalna bruto zarada prije poreza na dohodak ( $\tilde{\omega}_g$ ). Posljedično, definisaćemo njihove odgovarajuće jednačine. Ranije definisane i prezentovane jednačine (51) i (52), služe istoj i nadalje prezentovanoj predmetnoj TIM svrsi.



Formule za poresku stopu na zarade ( $\tilde{\tau}_\omega$ ) i nominalnu bruto zaradu prije poreza na dohodak ( $\tilde{\omega}_g$ ) iz (14) su:

$$\tilde{\tau}_\omega = \frac{\omega_G(L_1(\alpha_l + \alpha_{GU}\alpha_U) + \alpha_{GR}\alpha_r L_2) - Y_H - (1 - \tau_c)[r_{KH_{AV}}B_{KH_{AV}} + P_G^*r_{KH}^* + P_G r_{KH}]}{L_1\alpha_l\omega_g} \quad (53)$$

$$\tilde{\omega}_g = \frac{Y_H + (\tau_c - 1)[r_{KH_{AV}}B_{KH_{AV}} + P_G^*r_{KH}^* + P_G r_{KH}]}{L_1(\alpha_{GU}\alpha_U - \alpha_l(\tau_\omega - 1)) + L_2\alpha_{GR}\alpha_r} \quad (54)$$

Važno je istaknuti da smo odredili vrijednosti za  $\tilde{\tau}_\omega$  i  $\tilde{\omega}_g$  koristeći formule (53) i (54). Navedeno smo postigli tako što smo u pomenute formule unijeli pažljivo prikupljene podatke sa grafika, ili još tačnije, numeričke vrijednosti iz matrica koje predstavljaju rezultate izračunavanja za  $Y_H - W_H - C_H$  u karakterističnim i/ili singularnim tačkama. Pomenute tačke imaju poseban značaj, poput prevoja ili oštih prelaza na krivim. Takođe, kombinovali smo iste sa već poznatim i ranije korištenim vrijednostima parametara. NDA proračun i definisani tokovi su temelj za sve prikazane grafike. Dodatno, svaka tačka na grafiku ima odgovarajuću vrijednost u MATLAB radnom prostoru koja je određena sa dvostrukom preciznošću (engl. double precision). Upotrebom TIM i navedenih jednačina (53) i (54), uočavamo diskrepance između vrijednosti dobijenih putem modela i stvarnih vrijednosti. Na primer, postoji niz razloga za povećanje indeksa cijena stanova (HPI) širom Evrope. Posebno tokom posljednje decenije, postalo je znatno teže biti vlasnik kuće ili stana. „Bregzit” je doveo do precijenjenih vrijednosti kako novih, tako i postojećih nekretnina. Unos jeftinog kapitala u makroekonomski sistem EU, koji je trajao gotovo deceniju nakon globalne finansijske krize 2008. godine, rezultirao je niskim – čak i negativnim kamatnim stopama u nekim zemljama članicama, a što je opet posljedično dovelo do dugoročnog inflacionog pritiska na tržište nekretnina i prijetilo tada uspješnom targetiranju HICP. Izmenjeni zakoni o nekretninama i vlasništvu za građane EU i UK, uvođenje novih „tarifa”, i drugi faktori doprinose uzrocima pomenutog povećanja indeksa cijena stanova (HPI).

U ovom istraživanju zaključuje se da je HPI EU u prosjeku bio 1,4051% viši nego što bi trebalo da bude, spram vrijednosti dobijenim iz modela. Ova vrijednost se ne čini

previsoka, ali kada se uračuna anatocizam (obračun kamata na kamatu)<sup>189</sup> na godišnjem nivou, sa već visokim cijenama nekretnina i rastućim kamatama u EU na hipotekarne kredite, u konačnici primjećujemo značajno povećanje troškova života. Dodatno, zaključili smo da bi vrijednost poreza na bruto zaradu trebala da se smanji za 3,81%, dok bi bruto zarada/plata trebalo da se poveća za 1,19%. Ponovo, respektivno posmatrano, pomenuto smanjenje odnosno povećanje ne izgleda previše, ali vremenom pomoću složeno-kamatnih efekata u kalkulacijama dobijaju relativno značajan zamah.

Posljedično, u analizi koja je ranije prezentovana na slici 109 imamo situaciju da vrijednost bogatstva ( $W_H$ ) ima tendenciju opadanja ka tački EP „D” (slika 109). Posljedično, kod EU stanovništva javlja se potreba da se „nedostajući” iznos raspoloživog dohotka ( $Y_H$ ) zamijeni drugim sredstvima odnosno iz drugih izvora odnosno potrošačkih kanala. Najčešći transmisioni kanal za dopunjavanje nedostajuće potrošnje jeste iz transmisije akumuliranog bogatstva (štednje, ili drugih izvora). Navedeno se zapravo u stvarnosti i dogodilo, pogotovo u vremenima raznih ekonomskih kriza koje su zadesile EU u proteklih deceniju ipo. Samo neke od pomenutih kriza su: – svjetska finansijska kriza iz 2008. godine; – kriza državnog (javnog) duga EU iz 2011/2012. godine; – migrantska kriza unutar EU iz 2015. godine; – Bregzit iz juna 2016. godine; - ustavna neslaganja država članica EU tokom 2018/2019. godine; itd [130].

Kao što je rečeno, glavni razlog za veći agregatni prihod i bogatstvo, koji je bio na raspolaganju stanovništvu EU od 2016. do 2019. Godine, je ECB-a (APP), a koji se javlja u različitim oblicima i pod različitim uslovima, tokom vremena. Pod pretpostavkom multiplikacije novca, što je u slučaju finansijskih institucija u iznosu od oko 1:10, ECB APP je prvobitno „ubrizgao” direktno u EU makroekonomiju oko 3,2 triliona eura. Prema Bazelu III, minimalni koeficijent kapitala prvog reda (engl. Tier I capital requirements) iznosi 10,5%, tj. predmetni procenat se mora dobiti dijeljenjem kapitala banke prvog reda sa ukupnom aktivom ponderisanom rizikom (RWA). To znači da je, indirektno, makroekonomija EU za samo nekoliko godina „apsorbovala” u sebi dodatnih oko 32 triliona eura! Navedeno su ogromne količine novca, koje brzo i indirektno, nalaze svoj put u

---

<sup>189</sup> Primjena složenog kamatnog računa na obim i vrstu dugovanja u vremenu.

konsolidaciji bilansa finansijskih institucija, u kreditima za EU stanovništvo, i jako bitno: ka malim i srednjim preduzećima (MSP) (engl. SMEs).

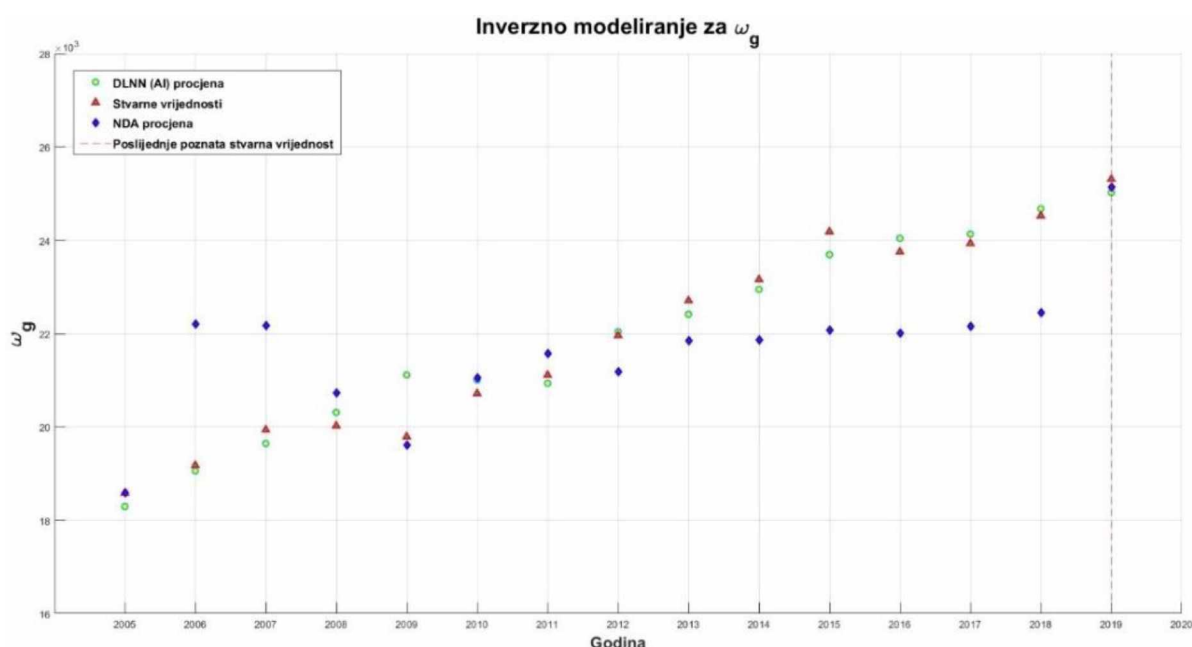
Posljedično, povećava se ukupan raspoloživi prihod i bogatstvo EU stanovništva, praktično, u tačnom iznosu kao što je to prikazano ranije na slici 109 (gornji desni ugao). Prikazani način finansiranja i trošenja dugoročno je neodrživ i mora se mijenjati. Potencijalno, glavni negativni efekti su veća inflacija i slabiji euro u odnosu na američki dolar. Pozitivna strana, u poređenju sa 2008. godinom i TARP programom FED-a SAD, jeste da je većina ECB APP fondova (sredstava) zapravo našla put do realne ekonomije (stanovništva EU i njenih MSP), a ne da su predmetna sredstva pretežno korištena u stabilizaciji bilansa stanja finansijskih institucija.

Na slici 155 je prikaza vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM na  $Y_H$  uz komparaciju DL NN (AI) predikcije, stvarnih vrijednosti varijable i NDA procjene. Grafičke oznake na predmetnoj slici svih uključenih varijabli su prikazane na legendi slike (gore-lijeva). Uočavamo sa slike da vrijednosti određene pomoću AINN metode, vrlo blisko i vjerodostojno prate stvarne vrijednosti. Posljedično, način praćenja vrijednosti je takav da prije 2012. godine prognozirane vrijednosti su nešto niže od stvarnih, dok nakon pomenute godine su nešto veće. Razlike su jako male, odnosno u prosjeku su manje od jednog procenta. Dodatno, postoje trenuci u vremenu kada se AINN vrijednosti gotovo poklapaju sa stvarnim vrijednostima i NDA predikcijom.<sup>190</sup> Posmatrajući grafik sa slike 155 praktično uočavamo dva vremenska perioda, prije i nakon 2012. godine. Oba perioda imaju dužinu trajanja od 7 godina, i zbog lakšeg referenciranja u daljem tekstu nazivaćemo ih: I period (počev od 2005. do 2011. godine) i II period (počev od 2013. pa do 2019. godine). Sredinu intervala predstavlja 2012. godina kao maltene „bazna” (referentna) godina. Korištenjem tehnika TIM, odnosno jednačina (51), (52), (53) i (54) računski (numerički) smo dobili (odredili) vrijednosti koje nam ukazuju da je porez na prihod u I periodu trebao odnosno mogao biti niži, jer je EU imala sve parametre uspješne ekspanzije ekonomije sa viškovima sredstava na računima finansijskih institucija. Navedeno jeste kontrast situaciji od samo nekoliko

---

<sup>190</sup> Nekoliko puta tokom posmatranog intervala.

godina ranije, kada je usljed EZ-EU tranzicionih, opšte-integracionih (implementacije zakonskog, socijalnog, radnog, finansijskog, itd. okvira EU), kao i globalnih promjena, EU je imala relativno visoku stopu inflacije i nezaposlenosti (klasična RBC sintagma). Nadalje, u II periodu imamo veća primanja, te posljedično EU stanovništvo ima veću platnu sposobnost tokom tog razdoblja. Dodatno sa slike primjećujemo da postoji određena diskrepanca između NDA predikcije (tamno plavi dijamanti) spram stvarnih vrijednosti (crveni trouglovi) i AINN vrijednosti određenih prenosnom funkcijom (zeleni prazni krugovi).



Slika 155. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM na  $Y_H$  uz komparaciju DL NN (AI) predikcije, stvarnih vrijednosti varijable i NDA procjene

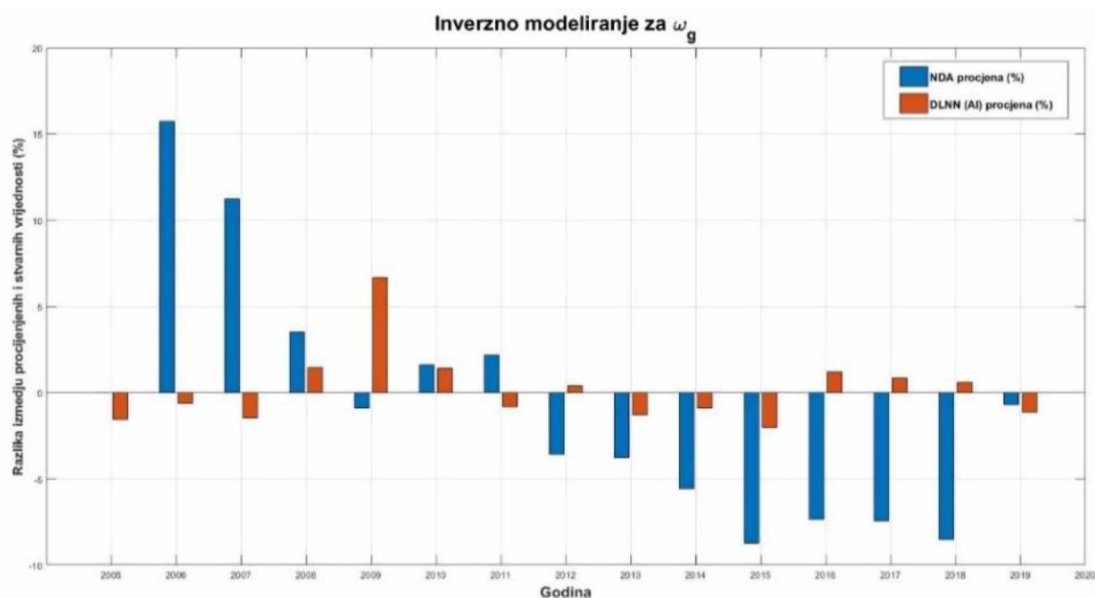
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Pomenuta diskrepanca je takva da NDA u startu I perioda ima očekivano veće vrijednosti prihoda EU stanovništva, sudeći po toku sistema, dok se postepeno približava ostalim vrijednostima, kako se krećemo ka 2012. godini, da bi se u II periodu očekivala manja primanja (sudeći po toku). Navedeno za II period je posljedica činjenice da NDA „sudi” (donosi zaključke) prema: jednačinama sistema, promjenama vrijednosti SNDJPR i opšteg

toka sistema; i nije nikako mogla predvidjeti uključivanje događaja kao što je ECB APP u sistem, niti njegov tajming. Postepeno se i NDA predikcije približavaju stvarnim vrijednostima, samim tim i AINN predikciji na kraju ukupnog perioda. Prednost analize koju smo prezentovali ističe se kroz integralno-analizirane dinamičke promjene, odnosno širok kroz širok spektar zaključaka koje NDA predikcija omogućava. Ranije iznesene zaključke smo pomenuli prilikom analize  $Y_H - W_H - C_H$  sistema, dok ovdje prikazujemo i potvrđujemo iznesene tvrdnje.

Usporedimo neposredno-kvantitativno NDA sa AINN metodom. Na slici 156 vidimo razliku u prognozi kada koristimo NDA i AINN. Naime, slika 156 prikazuje TIM primijenjenu na varijablu  $\omega_g$  sa  $Y_H$ , uz komparaciju nastale greške između: DL NN (AI) predikcije i NDA procjene, spram stvarnih podataka. Kao što ćemo nešto kasnije vidjeti, postoje razlike i među istim metodama, a zavisno od toga koliko smo varijabli inverzno modelirali jednačinama i očitavanjima. Slika prikazuje već konstatovane kvalitativne diskrepance i daje im kvantitativne dimenzije. U definisanom I periodu NDA ima pozitivne vrijednosti razlike počev od oko 16%, pa se postepeno smanjuje kako idemo ka 2012. godini na nekih (oko) 2%. Tada nastaje promjena znaka u negativnom smjeru, i postepeno raste tokom većine trajanja II perioda, da bi na samom kraju intervala se gotovo izjednačila sa AINN predikcijom.

Kao što smo već kazali, prvi period je imao niža primanja od modelom očekivanih, a drugi veća od očekivanog. Zapravo pozitivan znak NDA diskrepance ukazuje na to da su za upravo tu vrijednost prihodi trebali biti veći od nominalnih, odnosno sa negativnim znakom manji od tada postojećih. Interesantno je da 2012. godine dolazi do promjene znaka predmetne varijable odnosno procjene, te da se apsolutna vrijednost razlike smanjuje na najmanju mjeru u 2011. godini, naravno izuzev granica samog vremenskog intervala.

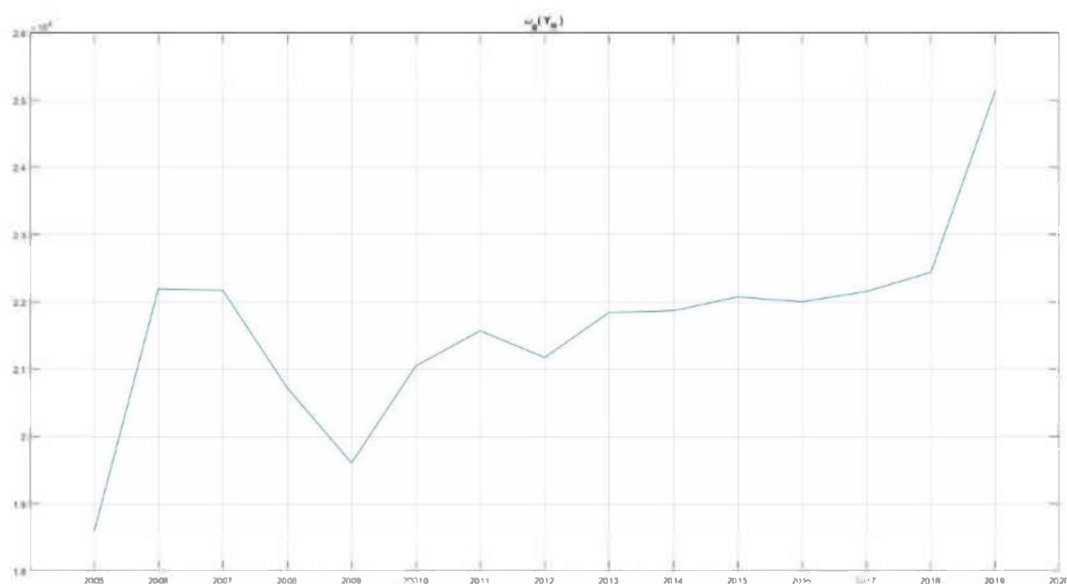


Slika 156. TIM primijenjena na varijablu  $\omega_g$  sa  $Y_H$ , uz komparaciju nastale greške između:

DL NN (AI) predikcije i NDA procjene – spram stvarnih podataka

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 157 prikazuje vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$  varijablom. Sa slike uočavamo da su u I periodu prihodi trebali biti nešto (malo) veći od nominalnih, a u drugom periodu su trebali biti veći od tada nominalnih. Posljednje navedeno nije u potpunosti konzistentno sa ranije opšte-iznesenim zaključcima, jer smo TIM primijenili na „samo” jednu varijablu i dobijamo partikularni zaključak, suprotno od sve tri varijable kako je to dalje prikazano. Dodatno, pored toga što slika 157 potvrđuje prethodno već prethodno rečeno ista je posebno opisna i reprezentativna zbog prikaza vrijednosti prihoda u toku vremena, a što je opet drugačije od prethodnih slika (grafika) koji se fokusiraju na razlike odnosno odstupanja. Za potpunije i detaljnije zaključke potrebno je da primijenimo TIM na sve tri inicijalno egzogene (sada endogene) varijable.

Slika 157. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$  varijablom

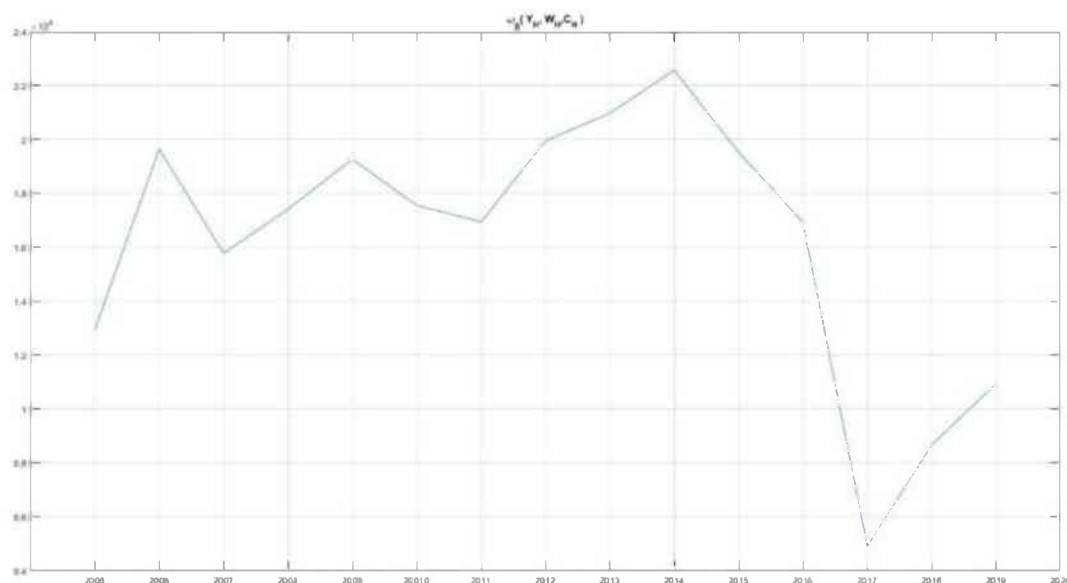
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Međutim, bitno je pomenuti da primjena TIM zavisi od broja varijabli koje su uključene u istu. Kod jednačina (51) i (52) koristimo vrijednosti tri (3) varijable ( $Y_H - W_H - C_H$ ) za određivanje izolovanih endogenih jednačina, koje u tom slučaju postoje privremeno egzogene. Praktično analogna analiza se može uraditi, kako je to prikazano na slikama 156 i 157, i sa jednom varijablom  $Y_H$ , a koja koristi jednačine (53) i (54). Komparativni prikaz dva pomenuta TIM pristupa, koji koriste isti metodološki okvir ali različiti broj varijabli, prikazan je na slikama od 163 do 168.

Posljedično, vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  varijablama, daju izgled krive primanja, kao što je to prikazano na slici 158. Slika prikazuje da su primanja u biti trebala biti nešto veća u I periodu, dok u II periodu su trebala biti manja od tada nominalnih, što je u potpunosti konzistentno sa našim opštim zaključcima vezanim za  $\omega_g$ . Naravno, ne mogu se idealno isprognostirati vrijednosti primanja za populaciju od oko 500 miliona ljudi na period od 15 godina – precizno u procenat, ali prikazana(e) metodologija



vrlo dobro i prilično vjerodostojno prikazuje kvalitativne i kvantitativne zaključke odnosno pripadajuće vrijednosti.



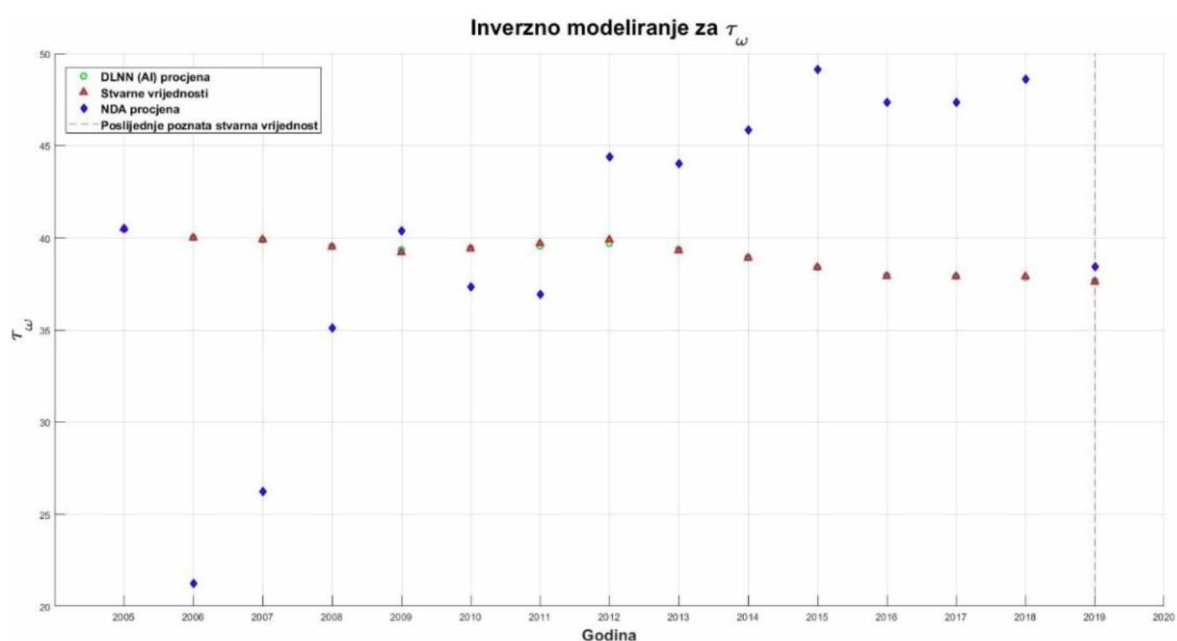
Slika 158. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  varijablama

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Analogno ranije prezentovanom, na slici 159 vidimo vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM na  $Y_H$  uz komparaciju DL NN (AI) predikcije, stvarnih vrijednosti varijable i NDA procjene. Uzimajući u obzir iznose prihoda, NDA procjena je, prateći ukupni tok sistema, „zaključila” da su porezi na primanja trebali biti niži tokom I perioda, dok u II periodu su trebali biti veći od nominalnih.<sup>191</sup> Posljednje navedeno nam vrlo ilustrativno prikazuje kako AINN i NDA „zaključuju“, donoseći zaključke objektivno („bez milosti”). Izuzetno nepopularna mjera u politici, pa samim tim i u ekonomiji neke države, je upravo mjera fiskalne politike povećanja poreza na prihod poreskih obveznika. Posljedično, pomenuta fiskalna mjera bi se sukobila sa mjerama monetarne politike ECB odnosno EU, jer bi pokušaj da se ekonomija opet „zagrije” i poveća njena aktivnost, zapravo bi bila

<sup>191</sup> Isključujući dvije krajnje vrijednosti intervala – početnu i završnu, jer isti imaju stvarne (srednje) vrijednosti poreza na prihod.

„ohlađena” – sa povećanim porezima na prihod, i dobili bi suprotni efekat. Precizno govoreći, monetarni neto učinak bi bio približno ravan nuli. Naravno, u I periodu bi mjera smanjenja poreza na prihod naišla na odobravanje poreskih obveznika, ali u tom slučaju EU ne bi stvorila preduslove, i uslovno rečeno, monetarne „krizne zalihe” za period koji je tada bio nepoznat i predstojao, a bio je pun različitih izazova (pomenuto je navedeno u analizi  $Y_H - W_H - C_H$  sistema na slikama 116 i 117 i propratnom tekstu). Predikcija AINN  $\tau_\omega$  je gotovo idealna, i odgovara stvarnim vrijednostima – zapravo replicira što se dogodilo, međutim ne daje nam nikakve druge uvide u uzroke i posljedice.



Slika 159. Vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM na  $Y_H$  uz komparaciju DL NN (AI) predikcije, stvarnih vrijednosti varijable i NDA procjene

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

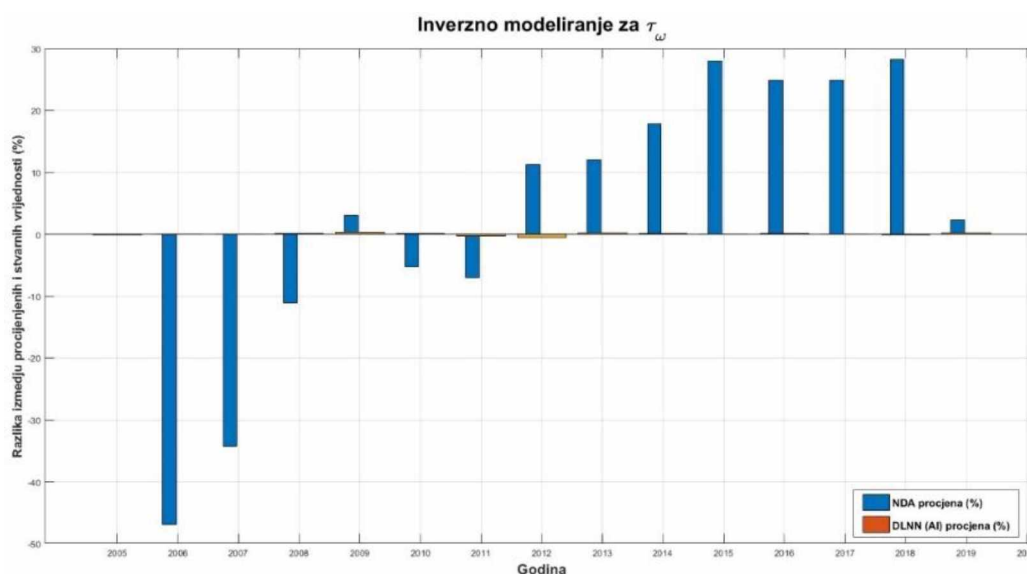
Slika 160 prikazuje TIM primijenjenu na varijablu  $\tau_\omega$  sa  $Y_H$ , uz komparaciju nastale greške između: DL NN (AI) predikcije i NDA procjene – spram stvarnih podataka. Nesumnjivo, a posmatrano sa slike, AINN je briljantno kreirala prenosnu funkciju sistema za  $\tau_\omega$  i izvršila predikciju trenda odnosno vrijednosti predmetne varijable. Kada uporedimo

rezultate dobijene sa AINN i NDA uočavamo značajne diskrepance. Naime, AINN predviđa da su porezi na prihod se upravo trebali kretati onako kako se u stvarnosti i desilo. AINN pristup apriori i inherentno predstavlja rezultate bez dublje analize odnosno ne uzimajući u obzir način na koji su rezultati dobijeni ili razloge zbog kojih su prikazani. Nasuprot pomenutom, NDA dublje analizira nastale promjene u toku dinamičkog sistema i pokušava kvantitativno i kvalitativno identifikovati suptilne nijanse koje su uzrokovale promjene u predmetnom toku, pri tome uzimajući u obzir savremeno razumijevanje makroekonomske situacije i događaja povezanih sa Evropskom unijom za posmatrani vremenski period. NDA nastoji dublje razumijeti razloge promjene toka sistema odnosno istražiti relevantne „nijanse” uzroka i posljedica koje su dovele do promjene globalne i/ili lokalne dinamike sistema (modela). Primijenjena NDA analiza nam prezentuje da je u I periodu trebalo doći do smanjenja poreza na prihod u iznosu od preko 40% u 2006. godini, te kasnije respektivno takođe je trebalo biti smanjenja  $\tau_{\omega}$  od preko 30% 2007. godine, da bi neposredno prije početka SFK 2008. to smanjenje trebalo biti oko 10%. NDA uočava da je opšti tok makroekonomije EU imao dobre performanse, te da bi povećanje platežne moći stanovništva u predmetnom periodu bilo blagotvorno za još veći ili intenzivniji razvoj EU ekonomskih aktivnosti. Vidimo da je 2009. godine NDA neočekivano prognozirala potrebno povećanje poreza na prihod u iznosu od oko 3-4% – iz razloga povećane novčane mase koja se javila tada unutar EU makroekonomskog sistema zbog mjera kriznog kreditiranja odnosno „štampanja”<sup>192</sup> novca, te NDA prateći tok predlaže da se isti smanji sa pomenutim kvantitativnim povećanjem poreza. Dok, već u naredne dvije godine (2010. i 2011.), zbog široko-primijenjenih mjera štednje diljem EU (kako ne bi došlo do drastičnog smanjenja ekonomske aktivnosti na nivou unije) NDA predlaže ponovno smanjenje poreza na prihod u iznosima od oko 6-8%, odnosno kako ne bi došlo do „gušenja” ekonomskog oporavka EU i njenog stanovništva prevelikim i naglo-radikalnim mjerama. Zapravo, značajan broj ekonomista u EU i svijetu je raspravljao o tome da li su primijenjene mjere štednje na Grčku,

---

<sup>192</sup> Zapravo, novac se ne štampa doslovce u toliko ogromnim količinama već se emituju EU-obveznice, koje pružaju kanal povećane likvidnosti solventnim kompanijama, malim i srednjim preduzećima, te posljedično i građanima EU. Svakako, postoji i donekle povećan M1 iz primarne monetarne emisije, ali je isti (čak) zanemarljiv, i moglo bi se reći gotovo nepromijenjen na mjesečnom/godišnjem nivou spram trilionskih iznosa koje obezbjeđuju u makroekonomski sistem emitovane EU obveznice.

Italiju, Španiju, Portugal, itd. možda bile preoštre i sprovedene u jako kratkom periodu. Kasnije nakon 2021. godine pa sve do kraja intervala NDA bi povećavala porez na prihod u rasponu od 12–27% na primanja EUZ stanovništva, bazirajući svoju odluku na praćenju toka, a koji se „deformisao” pod uticajem ECB APP programa, tj. došlo je naglog i jako velikog upliva monetarnih sredstava u makroekonomski sistem EU – na „vještački” način, i bez pokrića u ekvilibrijumu real-ekonomije („posmarano” iz ugla NDA). Vidimo da NDA pokušava da odredi i zadrži ekvilibrijumske vrijednosti koje prate sistemski tok, nasuprot strukturnim lomovima i šokovima koji se događaju iznenada i posljedica su kreatora monetarnih politika i inherentno imaju idiosinkratsku prirodu donosioca odluke(a). Međutim, svaki alat ima svoju specifičnu primjenu kada govorimo o komparaciji AINN i NDA metoda.

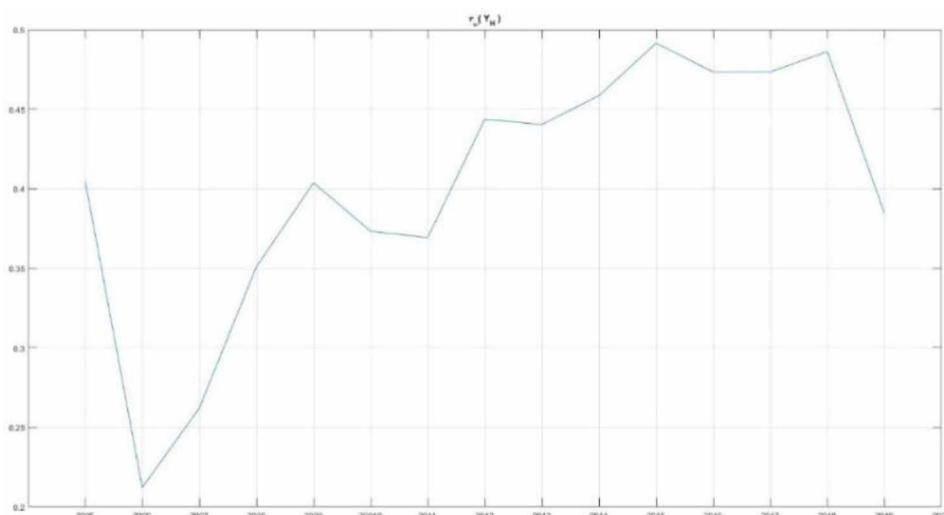


Slika 160. TIM primijenjena na varijablu  $\tau_{\omega}$  sa  $Y_H$ , uz komparaciju nastale greške između:

DL NN (AI) predikcije i NDA procjene – spram stvarnih podataka

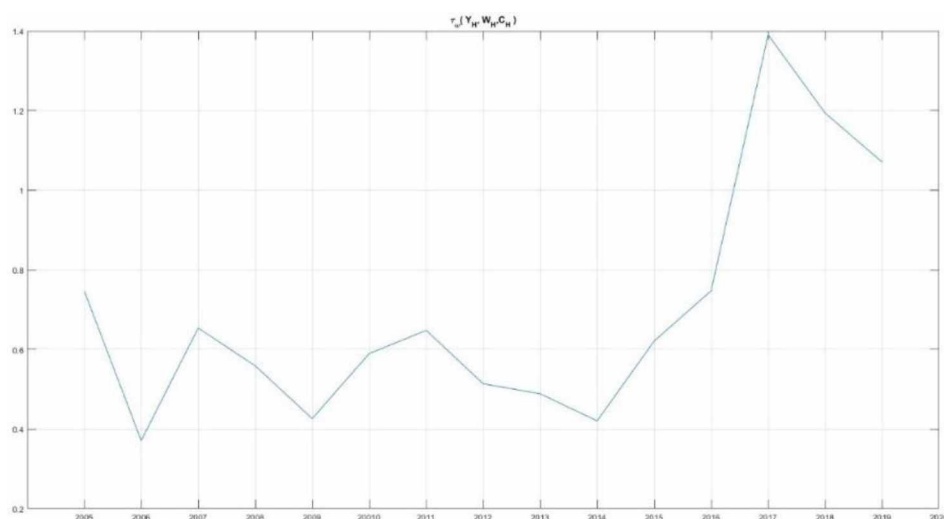
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Slika 161 prikazuje vrijednosti varijable  $\tau_{\omega}$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$  varijablom, koje su upravo detaljno objašnjene i prezentovane u prethodnom tekstu, te ih nećemo ovdje ponavljati. Predmetna slika direktno prikazuje vrijednost poreza na prihod u vremenu, a suprotno od prethodnih grafika koji prikazuju razlike i odstupanja uključenih varijabli.



Slika 161. Vrijednosti varijable  $\tau_{\omega}$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$  varijablom

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije



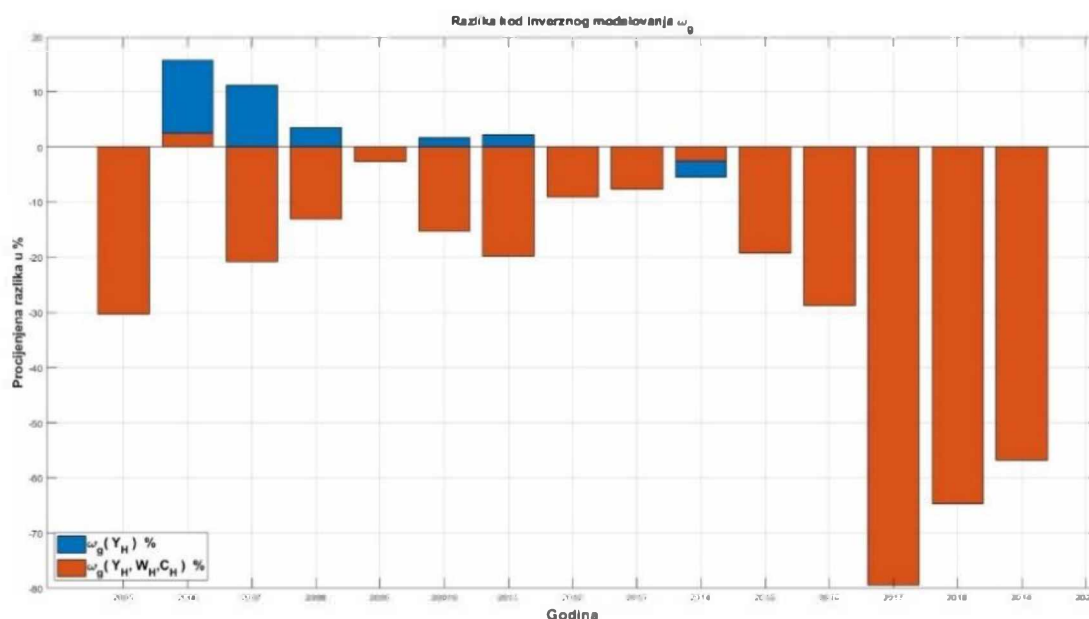
Slika 162. Vrijednosti varijable  $\tau_{\omega}$  nakon primjene TIM sa  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  varijablama

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Bitno je pomenuti da analiza i zaključci dobijeni primjenom TIM zavise od broja i prirode varijabli, a koje su uključene u metodološku TIM osnovu za potrebe analize odnosno sinteze predmetnog dinamičkog sistema. Kod jednačina (51) i (52) koristimo vrijednosti tri (3) varijable ( $Y_H - W_H - C_H$ ) za određivanje predmetnih izolovanih varijabli u posmatranim

jednačinama. Međutim, ista analiza se može uraditi samo sa varijablom  $Y_H$  i povezano-definisanim jednačinama (53) i (54). Komparativni prikaz pomenuta dva TIM pristupa, koji koriste isti metodološki okvir ali različiti broj ulaznih varijabli u predmetne jednačine, prikazan je na slikama 163–168.

Na slici 163 prikazujemo vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$  (plava boja) i zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  (oranž boja). Uočavamo da kada primjenjujemo TIM sa samo  $Y_H$  imamo prognozu potrebe povećanja primanja u I periodu i smanjenja u II periodu iz već objašnjenih razloga.



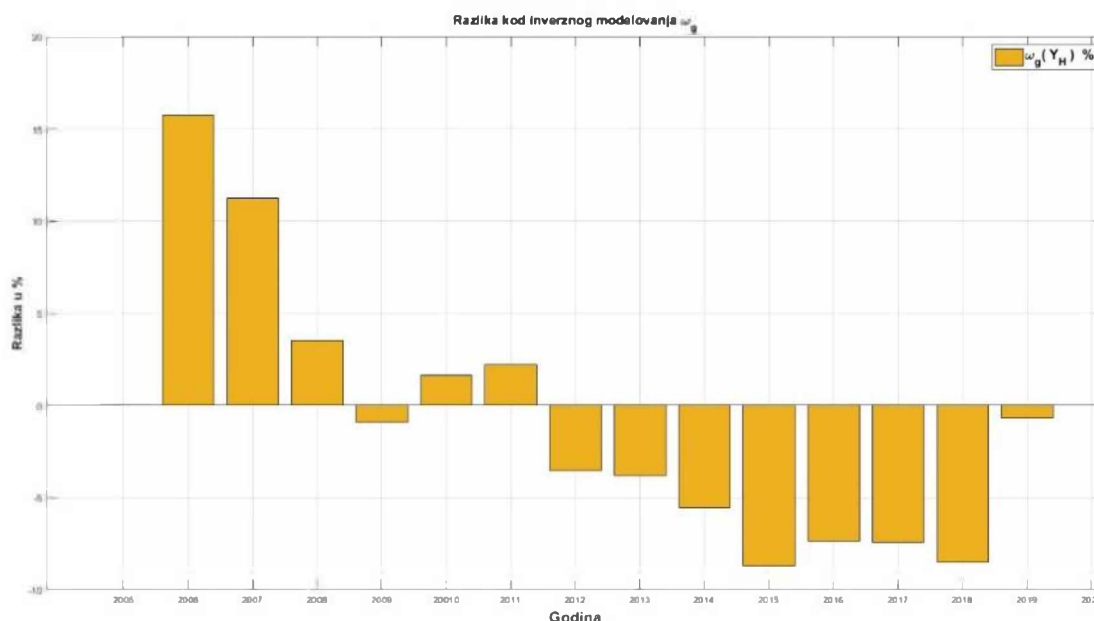
Slika 163. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$  i zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Dok, kada primjenjujemo TIM zajedno sa  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  imamo prezentovani zaključak da je potrebno tokom I perioda smanjiti primanja u prosjeku nekih oko 20%, a u drugom periodu čak u prosjeku oko 40%, pa i više posmatrano individualne godine. Posljednje pomenute fiskalne mjere bi zasigurno izazvale tolike nemire da bi socijalni mir, stabilnost i vladavina prava (moguće) unutar pojedinih zemalja članica EU došle pod znak

pitanja. Posljedično, navedeno ne bi moglo biti primijenjeno, ali nam govori da su zaista primanja i kupovna moć EU stanovništva bili neopravdano visoki – u ovom periodu, i nisu imali pokrića u real ekonomiji za prezentovane iznose povećanja koji su, opet, posljedica ECB APP programa, ali i novca koji je ubačen u sistem tokom krize javnog duga nekih zemalja u periodu od 2010–2012. godine.

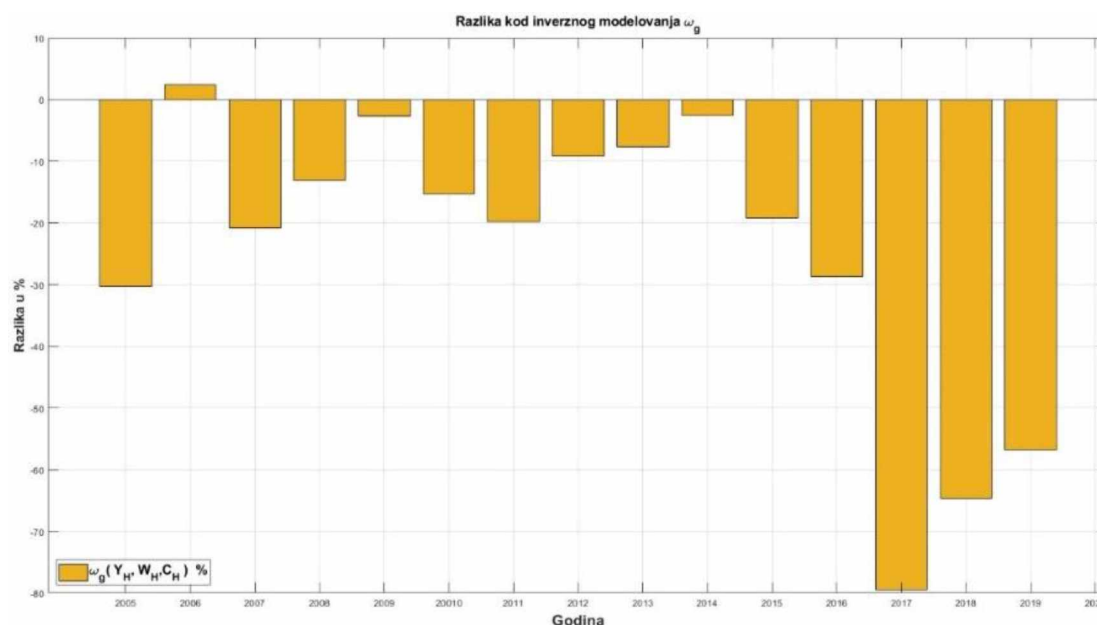
Zbog konzistentnosti i integralnosti ilustrativnog prikaza na slici 164 prikazujemo vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$ . Na slici 165 prikazujemo vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ . Analiza istih je već prezentovana u prethodnom tekstu, te je nećemo dodatno elaborirati i/ili proširivati.



Slika 164. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

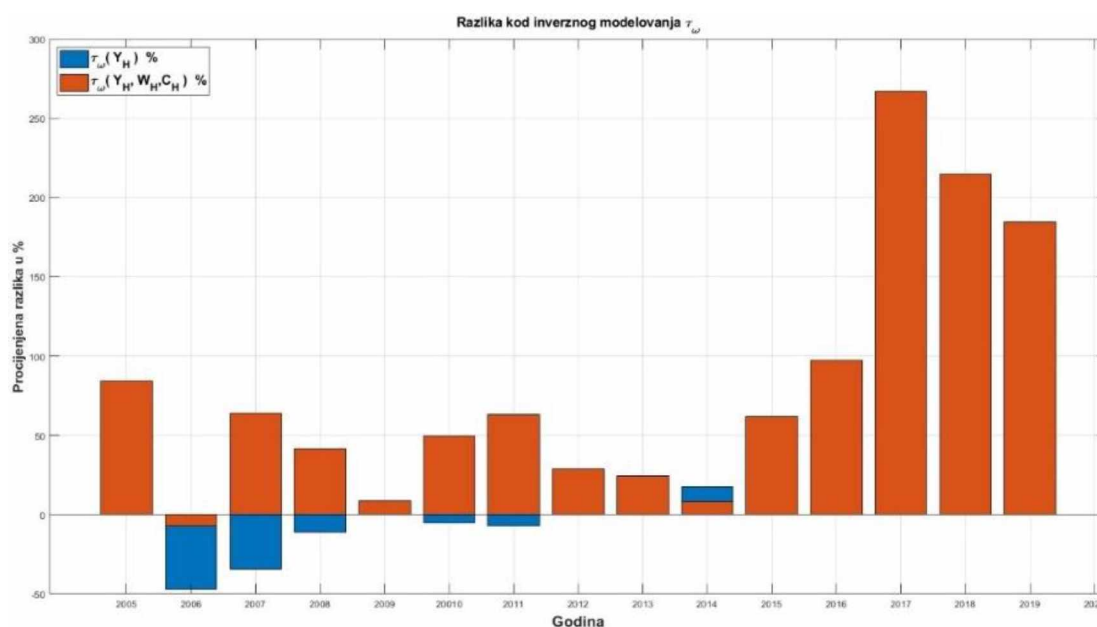


Slika 165. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  nakon primjene TIM zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ 

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Na slici 166 prikazujemo vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$  (plava boja) i zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  (oranž boja). Kada primjenjujemo TIM sa samo  $Y_H$  imamo prognozu potrebe smanjivanja poreza na prihod u I periodu, i povećanja poreza u II periodu. Povezano, kada primjenjujemo TIM zajedno sa  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$  imamo prezentovani zaključak da je potrebno tokom oba perioda povećati poreze na prihod, ali u gradualnom porastu – od u prosjeku 50% do čak nevjerovatnih i nemogućih u praksi (u prosjeku) od oko 160%! Posljednje izneseni podatak ima jedino visoko teorijski karakter, i nije ga moguće u pomenutom kvantitativnom iznosu primijeniti u praksi za I, a ni za II period. Vrijednost istog se nalazi u okvirima kvalitativnog zaključka: da je trebalo doći do vrlo značajnog povećanja poreza kada postoji blagostanje u makroekonomskom sistemu ili kada su u isti vještački ubačene ogromne količine novca. Kao što je opšte poznato u mnogim makroekonomskim krugovima u svijetu, često, monetarna politika je više umjetnost nego primijenjena nauka – kako je to jednom bivši guverner FED Alan Greenspan konstatovao. Posljedično, ne možemo, i ne trebamo, uzimati dobijene informacije od modela bukvalno (engl. face value),

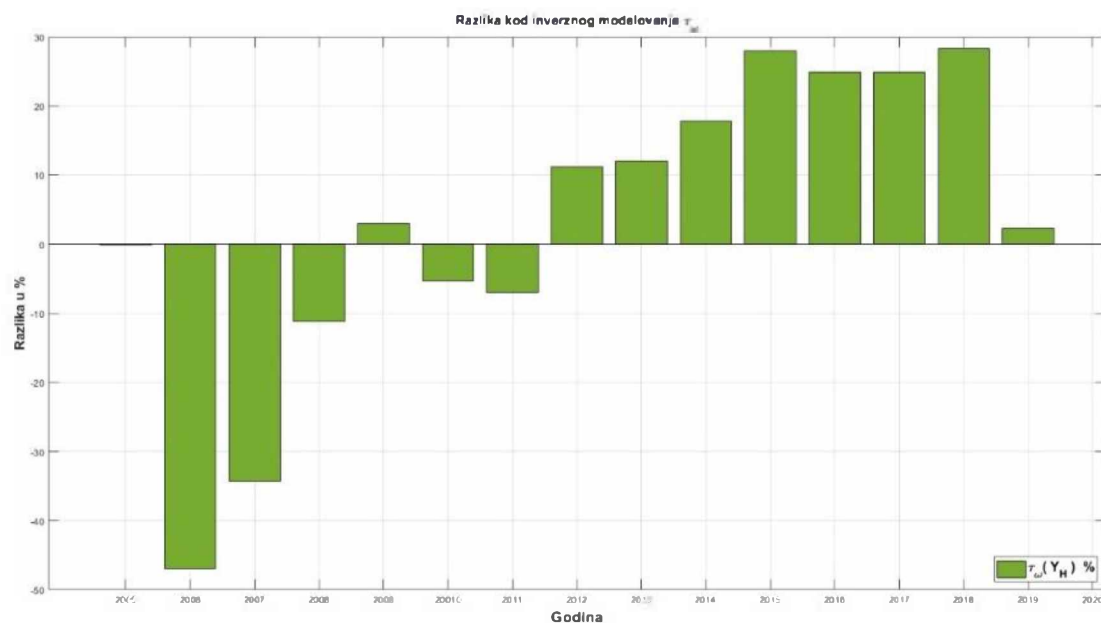
već ih trebamo tumačiti zajedno i u skladu sa ostalim informacijama koje imamo, odnosno kooperativno-analitički sa bliskim im metodama. Teoretski posmatrano, do povećanja poreza na dohodak jeste trebalo doći u II periodu, mada u praksi bi to značilo zaustavljanje pogona za ekonomiju sa ubacivanjem velike količine novca u istu, što bi opet nadalje rezultiralo sa neželjenom i značajnom po vrijednosti dugoročno-inflatornom komponentom prisutnom u EU makroekonomiji.



Slika 166. Vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$  i zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

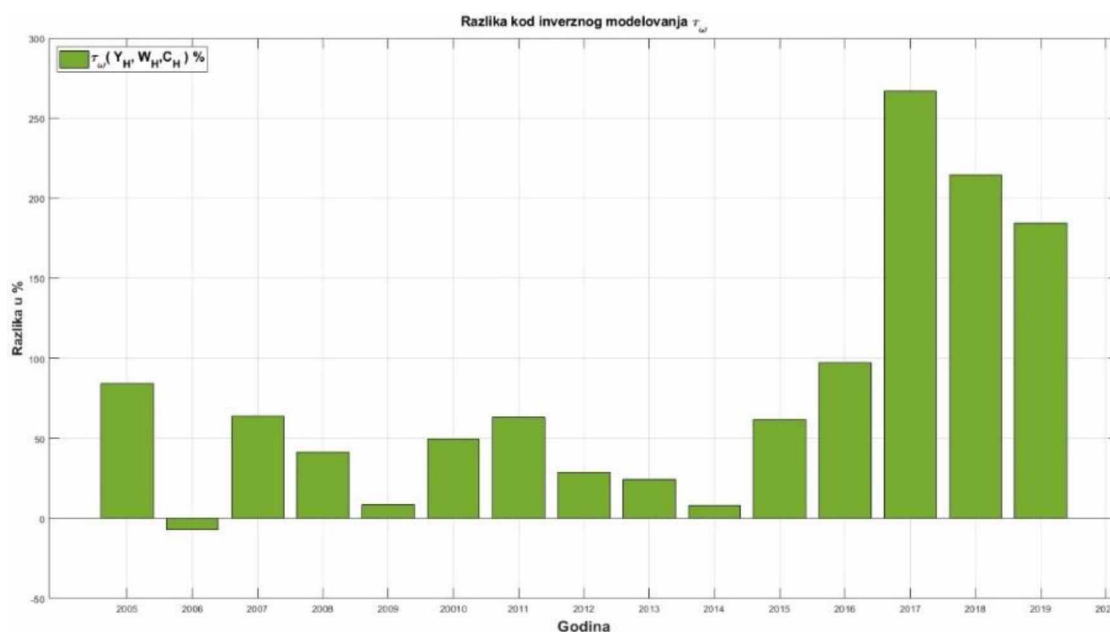
Ponovo, zbog konzistentnosti i integralnosti ilustrativnog prikaza, prikazujemo na slici 167 vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$ . Dok, na slici 168 prikazujemo vrijednosti varijable  $\tau_\omega$  nakon primjene TIM zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ . Takođe, analiza istih je već prezentovana u prethodnom tekstu, te je nećemo dodatno elaborirati i/ili proširivati.



Slika 167. Vrijednosti varijable  $\tau_{\omega}$  nakon primjene TIM sa samo  $Y_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Visoke vrijednosti na grafiku 168 imaju više kvalitativnu nego kvantitativnu vrijednost. U sprezi sa ranije prikazanim zaključcima, tj. njihov kvalitativni zaključak o povećanju poreza na dohodak, jeste održiv i makroekonomski opravdan, iako u praksi ne u iznosu prikazanom na grafiku.



Slika 168. Vrijednosti varijable  $\tau_{\omega}$  nakon primjene TIM zajedno  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Sve predloge za makroekonomskim mjerama potrebno je dva puta mjeriti, a jednom sjeći, jer su stotine miliona života i sudbina u pitanju, kada govorimo o EU makroekonomiji. Stim u vezi, pokazatelje analize, zaključke i rezultate možemo prezentovati kreatorima politika, ali zaista trebamo imati razumijevanja da na kraju odluka se svede na jako uski krug ljudi koji imaju pravo odlučivanja. Tada je jako bitno, da donosioci odluka predstavljaju jako stručne i iskusne ljude po osnovu makroekonomskih akademskih i praktičnih znanja. EU elektronski sistem bi trebalo da navedeno i omogući, odnosno dolazimo do zaključaka da politička-ekonomija biva preteča svih makroekonomskih odluka, bez obzira na to koliko iste bile potvrđene ili opovrgnute od strane stručne i/ili akademske javnosti. Ukratko, svi kvalitativni i kvantitativni zaključci mogu samo da pokažu optimalni pravac i smjer za kretanje ekonomskih politika.

## 5.7 Ilustrativni prikaz TIM u izdvajanju parametara modela

Primijenjena NDA analiza i sinteza u naučnim istraživanjima pruža fleksibilan matematički aparat koji se „ciljano stavlja” u funkciji teme ili domena istraživanja. Zbog pomenute karakteristike, NDA može nam pružiti mogućnost primjene TIM (ili direktno bez upotrebe TIM) za kvalitativne i kvantitativne parametarske analize u sistemima i modelima. U najširem smislu, govorimo o kreiranju sistemski-povezanih i izvedenih izraza koje izoluju određeni parametar na lijevoj strani izraza, dok desna strana uključuje sve ostale varijable i parametre sistema. Ranije smo pomenuli i naveli koje su to prednosti i nedostaci primijenjene NDA metodologije. Međutim, pomenuli bi i da tehničko-matematički dio izdvajanja varijabli na lijevoj strani izraza danas se relativno lako rješava upotrebom modernih softvera u koje zasigurno spada i programski paket MATLAB sa njegovim mnogostrukim rješenjima za numeričku i simboličku obradu podataka odnosno izraza.

Dolje u tekstu prezentovani izrazi imaju samo ilustrativni karakter, spram do sada prezentovane i obrađene metodologije. Koristeći dolje prikazane i definisane izraze za određivanje pojedinih izvorno endogenih varijabli, koje posredstvom TIM postaju egzogene varijable, možemo ispitati i istražiti kako se promjena određenih varijabli od interesa odslikava na njihova kretanja. Na primjer, kretanje dolje prezentovane varijable  $\tau_c$  (porez na kapitalnu dobit) se može ispitati u funkciji svih ostalih varijabli i parametara sistema, pa čak dodatno i spram ranije pronađenog ekvilibrijuma odnosno konkretnog rješenja sistema. Dodatno, uz  $\tau_c$  odredili smo izraze za:  $-\alpha_r$  (procenat/koefficient stanovništva koji su stariji od 64 godine i u penziji, ili su radno neposobni i primaju naknadu);  $-\alpha_l$  (procenat radnog/zaposlenog stanovništva od radno sposobnog stanovništva definisanog sa  $L_1$ );  $-\alpha_{gu}$  (procenat prosječne plate/prihoda koji se izdvaja kao pomoć i/ili naknada za nezaposleni dio radno sposobnog stanovništva); i  $-\alpha_{gr}$  (procenat prosječne plate/naknade koji se izdvaja za radno nesposobno stanovništvo, odnosno za isplate penzije i/ili socijalnih davanja). U okviru disertacije su izvršena određena istraživanja nad predmetnim parametrima i ocijenjene njihove zavisnosti i međusobne interakcije sa pojedinim varijablama. Međutim, predstavljanje istih bi prevazišlo svrhu i obim ovog rada koji se referencira na postavljene hipoteze i istraživačka pitanja, te ga nećemo ovdje prezentovati. Dodatno, razlog zašto smo

prezentovali samo izraze za pomenute parametre (bez detalja i rezultata) jeste da prikazemo mogućnosti TIM metodologije, kada se radi o bilo kom parametru i/ili varijabli sistema.

Kao što se vidi iz izraza, izvedeni izrazi imaju prilično kompleksan oblik odnosno izraz. Programski paket MS Office i njegov program MS Word Mondo 2016 nisu mogli da obrade predmetne izraze u bilo kom standardnom obliku, sa tzv. *Equation Editor*-ima kao što su: 1) Unicode; 2) LaTeX; 3) Text, već bi došlo do „pada” cjelokupnog programa Word (engl. crash), tj. sistem bi „krašovao” – kako se to popularno kaže među današnjim korisnicima IT tehnologija. Oznaka „\*” kod varijabli iz jednačina (1)–(10) ovdje, zbog tehničkih ograničenja, ima slovnu oznaku *star*. Iz posljednje navedenog razloga, jedini matematički simbolički izrazi u okviru disertacije, koji nisu otkucani u LaTeX formatu, već su unešeni (ubačene) kao slike, su upravo ovdje (dolje) u tekstu prikazani izrazi izolovanih parametara. Takođe, neki izrazi su jedva vidljivi, jer imaju veliki broj članova i substitucionih varijabli u tom izrazu, kao što je to na primjer naročito slučaj kod  $\tau_c$ . Bitno je napomenuti, da (maltene) bez obzira na kompleksnost izraza, njihov simbolički dugačak i/ili kompleksan zapis, obrada istih u numeričkom i simboličkom obliku ne predstavlja gotovo nikakv problem za MATLAB, te njihovu analizu, sintezu, komparaciju, iscrtavanja grafika i sl. obavljamo bez ikakvih problema.

Primjenom TIM metode možemo direktno koristiti prikazane formule, samo je potrebno unijeti vrijednosti varijabli i njihovih parametara (sa krive) kako bismo dobili vrijednosti izolovanih varijabli od interesa. Simboličko rješavanje ovih jednačina daje kompleksan analitički oblik, što se može smatrati manom TIM metode. Međutim, računar može bez problema rješavati ili koristiti ove formule za određivanje vrijednosti TIM varijabli, što posljedično čini ovu metodu prihvatljivom za naučno istraživanje, ali i praktičnu primjenu. Naime upravo zahvaljujući današnjim modernim računarima, TIM metoda postaje veoma prihvatljiva i korisna za različite svrhe. Predmetna metoda je korisna kako za akademska naučna istraživanja, gdje se zahtijeva preciznost i teorijski rigorozni pristup, tako i za praktičnu primjenu u stvarnom svijetu, gdje se koriste empirijski podaci za rješavanje problema i donošenje odluka. Sve pomenuto, čini TIM metod vrlo svestranim i dragocijenim alatom u polju nauke.

$$\tau_c =$$

$$\alpha_r =$$

$$\frac{(\tau_c - 1) \left( C_{H, \text{mcgal}2} + C_{\omega, 1} \left( \frac{r_{k, H} r_{k, H, \text{star}}}{r_{k, H}} \left( \frac{P_E}{r_{k, H, \text{star}}} + B_{K, H, \text{av}} r_{k, H} r_{k, H, \text{star}} \right) - L_1 \alpha_l \omega_R \left( \frac{\alpha_n \alpha_{\text{gu}}}{\alpha_l (\tau_{\omega} - 1)} - 1 \right) (\tau_{\omega} - 1) \right) - C_{\omega, 2} (B_{1, L, \rho} + B_{2, L, \rho} + B_{H, \rho} + E_{H, \rho} + M_{H, \rho} + H_{P, L, \rho} K_{H, L, \rho}) \right)}{C_{\omega, 1} L_2 \alpha_{\text{gy}} \omega_R}$$

$$\alpha_l =$$



$\alpha_{gu}$  =

$$\frac{C_{H,\omega\omega\omega 1/2} - C_{\omega\omega 2} (B_{1,L,p} + B_{2,L,p} + B_{H,p} + E_{H,p} + M_{H,p} + H_{p,L,p} K_{k,H,p}) + C_{\omega\omega 1} \left( \alpha_l \omega_g \left( L_1 + \frac{L_2 \alpha_r \alpha_{gr}}{\alpha_l (\tau_c - 1) (\tau_{\omega} - 1)} \right) (\tau_{\omega} - 1) + r_{k,H} r_{k,H,star} (\tau_c - 1) \left( \frac{P_R}{r_{k,H,star}} + \frac{P_{R,star}}{r_{k,H}} + B_{K,H,av} r_{k,H} r_{k,H,av} r_{k,H,star} \right) \right)}{C_{\omega\omega 1} L_1 \alpha_u \omega_g}$$

$\alpha_{gr}$  =

$$\frac{C_{H,\omega\omega\omega 1/2} - C_{\omega\omega 2} (B_{1,L,p} + B_{2,L,p} + B_{H,p} + E_{H,p} + M_{H,p} + H_{p,L,p} K_{k,H,p}) + C_{\omega\omega 1} \left( \alpha_l \omega_g \left( L_1 + \frac{L_2 \alpha_r \alpha_{gr}}{\alpha_l (\tau_c - 1) (\tau_{\omega} - 1)} \right) (\tau_{\omega} - 1) + r_{k,H} r_{k,H,star} (\tau_c - 1) \left( \frac{P_R}{r_{k,H,star}} + \frac{P_{R,star}}{r_{k,H}} + B_{K,H,av} r_{k,H} r_{k,H,av} r_{k,H,star} \right) \right)}{C_{\omega\omega 1} L_1 \alpha_u \omega_g}$$

## **6. Komparativna analiza nelinearne dinamičke analize (NDA) i vještačke inteligencije i neuralnih mreža (AINN)**

Nauka je oduvijek napredovala u interakciji između analize i sinteze, pri čemu svaki pristup nudi jedinstven uvid u svijet prirode. Integralni analitičko-sintetički okvir predstavlja moćnu paradigmu u naučnim istraživanjima, premošćujući jaz između ova dva pristupa kako bi se olakšalo dublje razumijevanje kompleksnih fenomena. U disertaciji smo istraživali integralni analitičko-sintetički okvir i njegov inkrementalni doprinos unaprjeđenju nauke. Analitička i sintetička metodologija predstavlja dva fundamentalna pristupa naučnom istraživanju. Analitičke metode uključuju razbijanje složenih sistema ili fenomena na manje djelove, kako bismo razumjeli njihova individualna svojstva i ponašanja. Ovaj redukcionistički pristup bio je instrumentalan u razjašnjavanju osnovnih principa koji upravljaju različitim naučnim domenima. Suprotno, sintetičke metode uključuju sastavljanje ili kombiniranje različitih komponenti kako bismo stvorili holistički pogled na sistem ili fenomen. Holistički pristup nastoji da razumije kako različiti elementi međusobno interaguju da bi proizveli svojstva koja se pojavljuju. I analitički i sintetički pristup imaju svoje prednosti i slabosti, što ih čini vrijednim alatima u različitim naučnim kontekstima.

Integralni analitičko-sintetički okvir predstavlja dinamičan i evoluirajući pristup koji nastoji da integriše ove dvije metodologije u jedinstven sistem istraživanja. Pomenuti okvir prepoznaje da složeni prirodni fenomeni često zahtijevaju i redukcionističku analizu i sintetičku integraciju kako bi se postiglo sveobuhvatno razumijevanje. Ključne komponente ovog okvira uključuju: 1) interdisciplinarna saradnja predstavlja integralni analitičko-sintetički okvir koji potiče saradnju između istraživača iz različitih disciplina. Kombinirajući svoje ekspertize, naučnici mogu koristiti analitičke tehnike kako bi dekonstruisali složene probleme, i sintetičke metode kako bi ih rekonstruirali iz temelja, što dovodi do dubljeg razumijevanja; 2) hijerarhijsko razmišljanje čini da pomenuti okvir promoviše i podstiče dubinsko rezonovanje u naučnoj analizi i sintezi, gdje istraživači analiziraju fenomene na više nivoa organizacije. Na primjer, u biologiji, naučnici mogu proučavati biološki proces na molekularnoj, ćelijskoj, tkivnoj, organskoj i nivou organizma, pri čemu svaki nivo doprinosi sveobuhvatnijem razumijevanju. 3) emergentna (izvorno-kauzalna, ili početno-uzročna) svojstva pomažu nam u razumijevanju integralnog istraživačkog analitičkog odnosno sintetičkog okvira. Pomenuti pristup nam između ostalog potvrđuje da cjelina je

veća od zbira svojih dijelova, pri tome naglašavajući važnost proučavanja gdje ispitujemo na koji način interakcije između komponenti dovode do novih svojstava.

Dodatno, integralni analitičko-sintetički okvir, predstavlja ključni pomak u naučnoj metodologiji. Podsticanjem saradnje, hijerarhijskog razmišljanja i fokusiranja na emergentna svojstva, predmetni okvir značajno doprinosi našem razumijevanju složenih fenomena u različitim naučnim disciplinama. Kako nauka nastavlja napredovati, integracija analitičkih i sintetičkih pristupa obećava otključavanje novih granica znanja i inovacija. Kroz sinergiju prezentovanih metodologija stičemo dublje razumijevanje intrigantnog funkcioniranja prirodnog svijeta. Inherentna idiosinkrastičnost određenih fenomena u današnjoj nauci počinje da predstavlja početak, ali i izuzetak od pravila izolacionističkog proučavanja. Ovaj složeni koncept označava da se neki aspekti naučnih istraživanja više ne mogu posmatrati kao samostalni entiteti, već su postali neodvojivi dio sveukupne slagalice znanja.

Nauka je nekada težila analiziranju pojedinačnih fenomena izolovano, ali danas shvatamo da je svaki dio tog „naučnog mozaika” međusobno povezan i doprinosi cjelini. Posljedično, promjena paradigme naglašava interdisciplinarni karakter savremene nauke. Više ne možemo posmatrati pojedinačne discipline kao hermetički zatvorene kutije, već ih moramo sagledavati kao dio šireg sistema znanja. Pomenuti pristup oslikava dublje razumijevanje svijeta koji nas okružuje. Moderne naučne discipline se sve više preplavljaju novim otkrićima, a razumijevanje njihovih međusobnih veza postaje ključno za razvoj znanja. Nauka više nije samo izolovano istraživanje pojedinih pojava, već je postala globalno traganje za komadima „slagalice” koji zajedno čine sliku naše kompleksne stvarnosti.

Navedeni pristup proširuje granice razmišljanja u širem smislu. Osim što transformiše način na koji razumijemo prirodu i društvene pojave, takođe utiče na naše shvatanje suštine znanja i kako se ono integriše u našu svakodnevnu percepciju svijeta. Na taj način, inherentna idiosinkrastičnost fenomena u današnjoj nauci postaje ključna komponenta u formiranju našeg holističkog pogleda na svijet i njegove duboke veze sa modernim naučnim istraživanjima.

## **6.1 Primjena vještačke inteligencije (AI) i neuralnih mreža (NN) u makroekonomiji EU**

Domen naučnih istraživanja neprestano evoluiraju, te integracija AI sa NDA, postavila se kao moćna simbiotska veza koja preoblikuje „pejzaž” naučnog ispitivanja. AI sa svojom sposobnošću obrade kompleksnih podataka i prepoznavanja obrazaca, u kombinaciji sa NDA koja istražuje zanimljive promjene dinamike složenih sistema, te nudi nov i sinergetski pristup unaprjeđenju našeg razumijevanja makroekonomskih zakonitosti. U disertaciji smo upravo koristili ovaj simbiotski odnos između AI i NDA.

AI obuhvata niz tehnologija i algoritama koji omogućavaju mašinama da obavljaju zadatke koji obično zahtijevaju ljudsku inteligenciju. Navedeni zadaci uključuju učenje iz podataka, „razmišljanje”, rješavanje problema, pa čak i autonomno donošenje odluka. U naučnim istraživanjima, AI je pronašla primjene u različitim oblastima: 1) Analiza podataka: AI može brzo i precizno obraditi velike količine podataka, omogućavajući istraživačima da identifikuju obrasce, korelacije i ekstremne vrijednosti koje možda nisu očigledne putem tradicionalnih metoda; 2) Prediktivno modeliranje: Algoritmi mašinskog učenja mogu izgraditi prediktivne modele učeći iz istorijskih podataka, pomažući naučnicima da prognoziraju ishode i trendove u složenim sistemima; 3) Obrada slika i signala: AI se koristi za prepoznavanje slika, detekciju objekata i analizu signala u oblastima kao što su astronomija, biologija i medicina; 4) Obrada prirodnog jezika: Modeli bazirani na AI pomažu u obradi i razumijevanju velikih količina tekstualnih informacija, olakšavajući pregled literature i ekstrakciju znanja.

Analiza nelinearnih dinamičkih sistema je matematički okvir koji se koristi za proučavanje složenih sistema karakterisanih nelinearnim interakcijama i povratnim vezama. Ovaj pristup dobio je na značaju u različitim naučnim disciplinama, uključujući fiziku, biologiju, ekologiju, ekonomiju i neurologiju. Ključni elementi analize nelinearnih dinamičkih sistema uključuju: 1) Atraktore i haos: Identifikacija atraktora i haotičnog ponašanja unutar sistema pomaže u otkrivanju osnovnih obrazaca i ponašanja; 2) Analizu bifurkacija: Ispitivanje tačaka bifurkacije otkriva nagle tranzicije i promjene faza u sistemima; 3) Analizu kompleksnih mreža: Analiza kompleksnih mreža, poput neuronskih mreža ili ekoloških mreža, pomaže u razumijevanju njihove strukture i dinamike. Predmetna

disertacija je pokušala, inkrementalno, da NDA uključi u ekonomski, odnosno makroekonomski analitičko-sintetički okvir.

Simbiotski odnos između AI i NDA karakteriše njihovo međusobno amplifikovanje učinaka kod: 1) dolazi do unaprijeđenja analize podataka kada koristimo AI zajedno sa NDA, odnosno povećava se efikasnost analize podataka automatizacijom, pri tome vršimo ekstrakciju značajnih obrazaca i veza iz velikih skupova podataka; 2) suštinski gledano neke od najbitnijih karakteristika su predviđanje i prognoza trendova, pri čemu algoritmi mašinskog učenja koji su integrisani sa analizom nelinearnih dinamičkih sistema mogu obezbijediti preciznije predikcije i prognoze ponašanja sistema; 3) istraživanje visokodimenzionalnih prostora putem NDA omogućava efikasno proučavanje i više-dimenzionalnih parametarskih prostora, odnosno omogućava istraživačima da razumiju efekte više promenljivih i pripadajućih im parametara na ukupnu dinamiku predmetnog sistema. 4) jedna relativno novijih a ajko značajnih karakteristika je monitoring u realnom vremenu. Pomenuti sistemi za praćenje u realnom vremenu, a koje pokreće AI tehnologija, omogućava istovremeno monitoring i donošenje zaključaka nad podacima iz tzv. vrlo velikih baza podataka (engl. Very Large Database (VLD)). NDA koristi dostupne podatke u kreiranju SNDJPR, i posljedično pristupa njihovoj automatskoj obradi odnosno rješavanju sistema. Doduše, analiza i sinteza NDA rezultata visoko zavisi od metodologije, ali i od naučnog pristupa problemu od strane istraživača.

Uopšteno posmatrano, simbioza između AI i NDA ima dalekosežne implikacije u naučnim istraživanjima: – Otkrivanje lijekova: AI podržava analizu NDA i ubrzava otkrivanje novih lijekova simuliranjem ponašanja molekularnih sistema i predviđanjem haotično-stohastičnih mikro-interakcija reagenasa; – Nauka o klimi: NDA pomaže u modeliranju složenih klimatskih sistema, poboljšavajući AI sposobnost predviđanja uticaja klimatskih promjena; – Neurologija: razumijevanje nelinearnih dinamika mozga i složenih povezanosti je ključno za otkrivanje tajni kognicije i neuroloških poremećaja.

Simbioza između AI i NDA predstavlja revolucionarnu paradigmu u naučnim istraživanjima. Predmetna koherentno-disciplinarna saradnja omogućava istraživačima da istraže složene sisteme sa dosad neviđenom dubinom i preciznošću, otvarajući vrata otkrićima koja su ranije bila nedostupna. Dok tehnologija nastavlja da napreduje, sinergija između vještačke inteligencije i analize nelinearnih dinamičkih sistema nesporno će

preoblikovati naše razumijevanje prirodnog svijeta i ubrzati napredak u različitim naučnim oblastima. Budućnost naučnog istraživanja obilježena je ovim novim, harmoničnim spojem ljudske inventivnosti, inovativnosti i računarske moći.

Konkretno, u istraživanju uvidjeli smo da su NDA i AINN komplementarne metode, u smislu da pružaju veću praktičnost i korisnost dobijenih rezultata. Posebno ćemo pomenuti ekonomski značaj AINN analize, naglašavajući njen precizan način identifikacije transfernih funkcija, suplementarno sa analizom koju pruža NDA u istraživanju širokog spektra potencijalnih scenarija (putem odabira početnih stanja, i pripadajućih im orbita, odnosno krivih rješenja sistema – ekvilibrijumi), te sve to u okvirima složenog makroekonomskog „pejzaža” Evropske unije.

NDA se pojavljuje kao metodološki prikladan pristup u okviru modeliranja varijabli sa diskretnim vrijednostima, jer su upravo diskretni podaci najčešće dostupni i prisutni u ekonomskim (makroekonomskim) istraživanjima. Njegova snaga leži u sposobnosti da detektuje i analitički prihvati dinamičku evoluciju sistema u vremenu, što ga čini posebno relevantnim za modeliranje situacija u kojima izbori se dinamički razvijaju, npr. kao što je to ponašanje potrošača, kreditna aktivnost, ili pak donošenje odluka o ekološkoj politici, itd. Metodologija NDA nudi mogućnost istraživanja širokog spektra realnih i potencijalnih scenarija, pružajući istraživačima dragocjene uvide u to kako se dinamika sistema mijenja sa različitim početnim stanjima i opštim uslovima.

Sa druge strane, AINN se izdvaja sa svojom preciznošću u identifikaciji transfernih funkcija. Ova preciznost je od suštinskog značaja, posebno u kontekstima gdje i mala odstupanja od stvarnih vrijednosti mogu imati značajne ekonomske posljedice. U oblasti makroekonomske analize, gde se donosioci politike oslanjaju na precizno modeliranje kako bi donosili adekvatne odluke, jer sposobnost AINN-a da blisko podudara stvarne podatke sa modeliranim predviđanjima je dragocjen induktivno-deduktivni resurs. Međutim, pomenuta preciznost ima svoju „cijenu”. Analiza pomoću AINN obično zahtijeva napredne računarske resurse i značajnu količinu podataka kako bi se neuronske mreže efikasno obučile (istrenirale). Osim toga, AINN se obično koristi za istraživanje jedne optimalne objektivne funkcije, što može biti ograničavajuće kada se suočavamo sa sistemima koji pokazuju nelinearnost u više dimenzija. Suprotno tome, fleksibilnost NDA metodologije dolazi do izražaja kada istraživači trebaju razmotriti potencijalno mnogobrojne scenarije i razumijeti

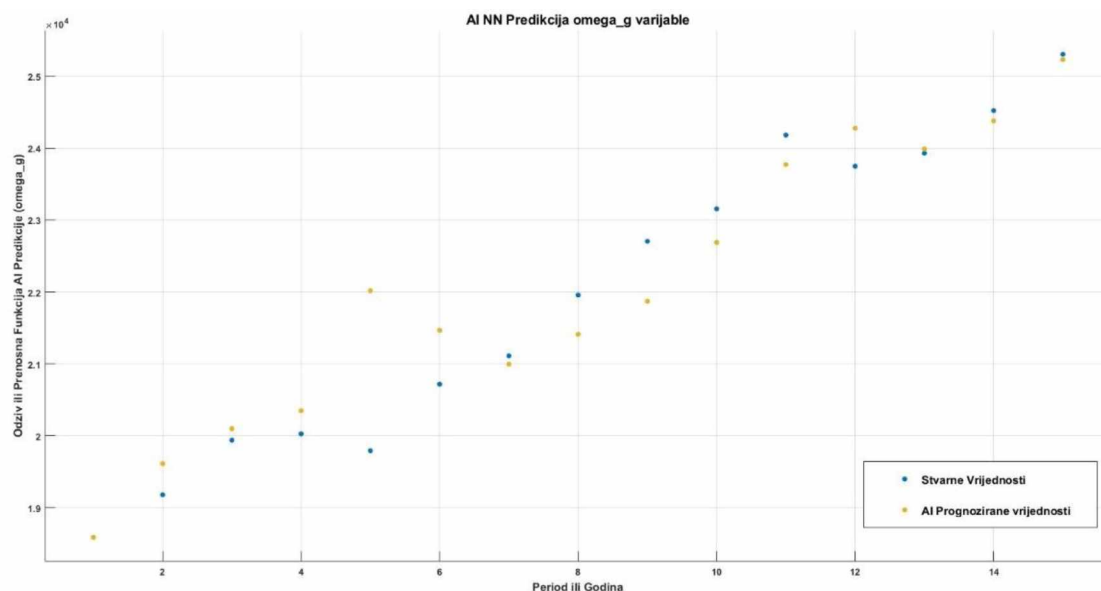
dinamičku međuigru faktora unutar složenih sistema. Pomenuta fleksibilnost omogućava sveobuhvatniju analizu nelinearnih veza i dublje razumijevanje složenih sistemskih ponašanja, a koja se u našem konkretnom slučaju javljaju u makroekonomskom sistemu EU.

Zaključno, izbor između metodologija NDA i AINN u kontekstu modeliranja izvorno dinamički-diskretnog sistema jeste složena odluka. Iako AINN briljira u preciznosti i nezamjenjiv je u situacijama gde čak i mala odstupanja imaju značajan uticaj, NDA nudi širu paletu mogućnosti za istraživanje različitih scenarija. Obje metode imaju svoju intrinzičnu vrijednost, dok sam izbor treba da bude vođen konkretnim analitičkim potrebama istraživanja, obavezno uzimajući u obzir ekonomske specifikume koji proizlaze iz odabira metode istraživanja.

Korištenje vještačke inteligencije (engl. Artificial Intelligence – AI) je globalno postalo vrlo rasprostranjeno u različitim sferama društva, nauke i proizvodnje, naročito u prvoj polovini dvadesetih godina 21. vijeka. AI najčešće koristi koncept neuralnih mreža (engl. Neural Networks) za određivanje parametara, hiperparametara i prenosnih funkcija sistema, sa ciljem predikcije vrijednosti i kretanja varijabli od interesa. U daljem tekstu ćemo koristiti engleski akronim za vještačku inteligenciju (AI) i za neuralne mreže (NN)[106], jer se isti međunarodno lakše prepoznaju i referenciraju na specifična i konkretna znanja, aktivnosti i vještine u okviru primijenjene naučne analize. Princip rada i konceptualnu osnovu AI NN nećemo previše detaljno objašnjavati.

Jedna od negativnih posljedica „boom”-a primjene AI u današnjem vremenu, jeste pokušaj integracije iste i u domenima gdje njena primjena ne daje optimalne rezultate. Imajući rečeno u vidu, višestruko je ispitivana upotrebljivost, svrsishodnost i eventualna prednost primjene AI NN spram NDA. Posljedično, na slici 169 je prikazan međusobni odnos stvarnih vrijednosti (podaci iz SDW ECB i Eurostat baza podataka) sa dobijenim rezultatima primjenom AI tehnologije na iste sa ciljem buduće (kasnije) predikcije kretanja varijable  $\omega_g$  odnosno bruto primanja EU stanovništva. Prvo što zaključujemo jeste relativna bliskost po vrijednosti (u vremenu) stvarnih i prognoziranih rezultata prenosnom funkcijom određenom AI NN metodom. Naizgled, rečeno bi moglo predstavljati univerzalan način za prognozu kretanja varijabli od interesa u makroekonomskim i drugim sistemima. Međutim, kasnije ćemo vidjeti da to nije u potpunosti slučaj, kao i razloge zašto je tako.





Slika 169. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  – komparacija stvarnih podataka i AI NN predikcije

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Naime, da bi postigli rezultate prikazane na slici 169 korištene su metode, čije rezultate prikazujemo na slici 170. Korišten je kvadratni optimizovani hiperparametarski Support Vector Machine<sup>193</sup> (SVM) metod u okviru AI NN mreža programskog paketa MATLAB.

Arhitektura NN inspirisana je ljudskim mozgom, i sastoji se od visoko povezanih neurona koji međusobno komuniciraju putem električnih signala kako bi obradili informacije. Slično tome, vještačke NN koriste vještačke neurone, takođe poznate kao čvorovi (engl. nodes), kako bi zajedno rješavali probleme. Pomenuti vještački neuroni su softverski moduli, dok su same NN softverski programi ili algoritmi koji koriste računarske sisteme za matematičke proračune. NN su prošli tzv. *treniranje* (obuku) kako bi se uspostavila veza između prediktora i kontinuiranih odgovora na osnovu kolekcije posmatranja. Ova posmatranja obuhvatala su mjeseci unutar petnaestogodišnjeg perioda, a svako od njih je uključivalo matricu vrijednosti dvostruke preciznosti od 64 bita za različite uključene promenljive. Za obuku neuronskih mreža koristili smo Levenberg-Markuardt

<sup>193</sup> Korišten je originalno-engleski naziv, koji je odmah i široko prepoznat u svijetu i međunarodnoj naučnoj zajednici. Razloga je što, prevod na naš jezik ne bi jednoznačno upućivao na predmetni metod jednako efikasno kao engleski naziv.

(LMA ili samo LM) algoritam, i algoritam slučajne podjele podataka. Srednje-kvadratna greška (SKG) (engl. MSE) se koristila kao kriterijum učinka u našem kontekstu, gdje smo koristili LMA da minimizira funkciju kroz set parametara. LMA je najčešće korišten algoritam tzv. *regiona povjerenja*, koji interno modelira pouzdan region ciljne funkcije, koristeći kvadratnu ili drugu funkciju, i pogodan je za minimizaciju, kako linearnih, tako i nelinearnih funkcija.

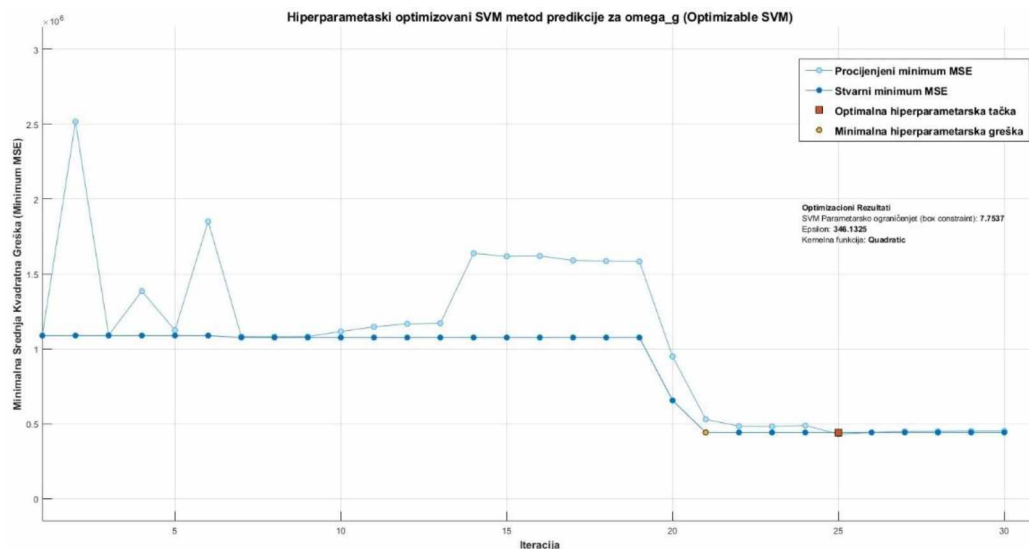
*Podaci za obuku* predstavljaju kolekciju podataka koja se koristi za obuku modela, dok se *validacioni skup* koristi za poboljšanje performansi modela prilagođavanjem nakon svake *epohe*. *Testni skup* pruža uvid u konačnu tačnost modela nakon završetka faze obuke i omogućava upoređivanje dobijenih rezultata. MSE za NN se izračunava koristeći ulazne argumente, kao što su NN, ciljevi, izlazi i težine grešaka. Dodatno, *regularizacija* i *rano zaustavljanje* su dva opciono-specifična parametra za konfiguraciju mreže kada se koriste predmetne tehnike. *Gradijentno spuštavanje* je *iterativni optimizacioni algoritam*, koji se koristi za obuku modela *mašinskog učenja* (engl. Machine Learning – ML) i NN. *Troškovna funkcija* mjeri razliku između predviđenog izlaza i stvarnog izlaza mreže, odnosno vodi proces optimizacije ka pronalaženju najboljeg seta parametara koji *minimizira funkciju troškova*.

Proces „podučavanja” neuronskih mreža (NN), kako bi obavljale određene zadatke, poznat je kao obuka ili treniranje NN. Da bi se postigao predmetni cilj, NN se obučavaju koristeći različite *skupove podataka*, bilo da su *obilježeni* ili *neobilježeni*. Pomenuta početna obuka pomaže NN da bolje obrađuju nepoznate ulazne podatke sa većom preciznošću. Osnovna NN se sastoji samo od tri međusobno povezana sloja vještačkih neurona: *ulazni sloj*, *skriveni sloj* i *izlazni sloj*. Ulazni sloj prima informacije iz spoljnog svijeta i obrađuje ih putem ulaznih čvorova, koji analiziraju i kategorizuju podatke prije nego što ih prosljeđuju sljedećem sloju. Skriveni slojevi mogu sadržati veliki broj vještačkih neurona i prihvataju izlaz iz ulaznog sloja ili drugih skrivenih slojeva. Svaki skriveni sloj obrađuje izlaz iz prethodnog sloja i prenosi ga narednom sloju. Izlazni sloj pruža konačne rezultate obrade podataka i može sadržati jedan ili više čvorova, zavisno o vrste problema koji se rješava. Nasuprot tome, tzv. *duboka neuronska mreža* (engl. Deep Neural Network – DNN), poznata i kao mreža dubokog učenja (DLN), ima mnogo slojeva skrivenih neurona koji su međusobno povezani i broje milione, milijarde, trilione, itd. čvorova. Veze između čvorova se predstavljaju *težinom* (engl. weight), koja može biti *pozitivna* ili *negativna* numerička i/ili

logička vrijednost (zavisno od vrste i tipa NN), odnosno u zavisnosti od toga da li jedan čvor povećava ili smanjuje aktivnost drugog (najčešće susjednog) čvora. Čvorovi sa većim vrijednostima težine imaju i veći uticaj u odnosu na ostale čvorove. Iako je teoretski sposobna da mapira bilo koji tip ulaza na bilo koji tip izlaza, *duboka neuronska mreža* zahtijeva znatno više obuke od jednostavnijih mreža i može zahtijevati milione ili milijarde primjera podataka za efikasno obavljanje zadataka. U okviru istraživanja, koristili smo relativno jednostavnu neuronsku mrežu, što je zapravo pogodno za rješavanje regresionih problema.

*Konstanta impulsa* (engl. *momentum constant – parameter*) ili *parametar* označava se sa  $\mu$  i predstavlja *hiperparametar* koji se koristi u algoritmu NN *optimizacije gradijentnog spuštanja*. Njegova svrha je poboljšanje konvergencije i izbjegavanje „zapadanja” u lokalne minimume. Tokom procesa obuke neuronskih mreža, koriste se podaci za validaciju kako bi se procijenila performansa generalizacije modela i konačno fino podesili hiperparametri cijele NN. Optimalna vrijednost za  $\mu$  i druge *hiperparametre* često se pronalazi kroz eksperimentisanje ili korištenje validacionog skupa podataka. U vezi sa vještačkim neuronskim mrežama (NN), termin „*epoha*” se odnosi na potpuni prolazak kroz cijeli skup obučavajućih podataka tokom procesa obuke, gdje svaki dio obučavajućih podataka služi jednom za treniranje mreže. Visoke vrijednosti R-kvadrata dodatno potvrđuju kvalitet i efikasnost obuke NN u kreiranju objektivnih funkcija za predviđanje odgovora na osnovu prediktora. Navedeno predstavlja jednu od glavnih prednosti NN!

Broj *epoha* potrebnih za obuku mreže zavisi od nekoliko faktora, uključujući veličinu mreže, dostupnu količinu obučavajućih podataka i složenost problema koji se rješava. Obično se performanse mreže procjenjuju nakon svake epohe, a obuka se nastavlja dok se ne postigne zadovoljavajući nivo tačnosti. Srednje-kvadratna greška (MSE) je metrika koja kvantifikuje bliskost regresione linije sa datim setom tačaka podataka. MSE je zapravo *funkcija rizika* koja odražava očekivanu vrijednost tzv. *gubitka kvadratne greške*. MSE se izračunava uzimanjem prosjeka kvadrata grešaka između tačaka podataka i odgovarajućih predviđanja. Dodatno, postoji parametar *Box Constraint* (BC) koji se koristi za kontrolu maksimalne kazne primijenjene na zapažanja (intra-kalkulisane opservacije) koja krše marginu, što pomaže u sprječavanju pretjeranog prilagođavanja putem regularizacije. Kada povećamo ograničenje okvira, SVM klasifikator koristi manje vektora podrške. Međutim, pomenuto takođe može rezultirati dužim vremenom obuke (treniranja NN).

Slika 170. Rezultati optimizovanog hiperparametarskog kvadratnog SVM metoda za  $\omega_g$ 

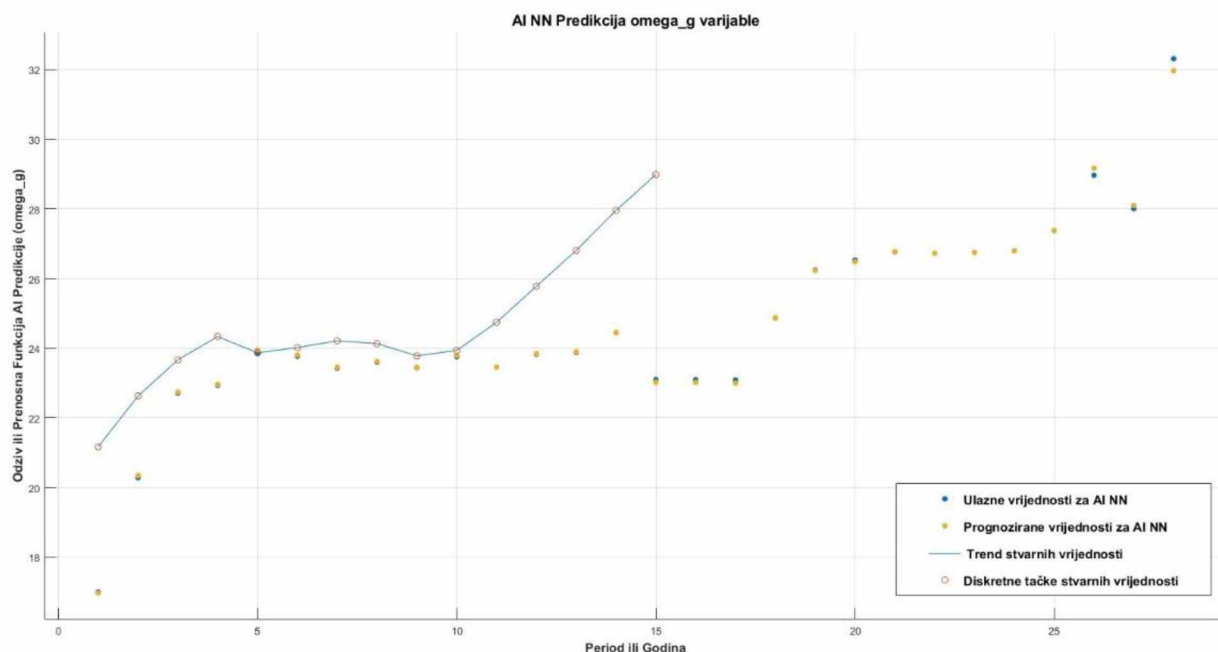
Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

Konačno, na slici 171 vidimo vrijednosti varijable  $\omega_g$  u usporedbi sa ulaznim podacima, AI NN predikcije i stvarne vrijednosti predmetne varijable sa pripadajućim tačkama i trendom. Primijecujemo na slici 171 da do desetog perioda (2015. godina) AI NN relativno dobro prognozira kretanja varijable  $\omega_g$ . Uistinu, vrijednosti AI NN predikcije su nešto niže, jer navedeno ima veze sa zaključcima koji će biti prezentovani u nastavku, a tiču se činjenice da EU je u prosjeku više oporezivala relativno niže dohotke u periodu od 2005-2010. godine, a kasnije od 2011-2015. ih je relativno manje oporezivala kada su bili veći.<sup>194</sup> Navedena „nelogičnost” ne može biti interpretirana od strane AI NN jednostavno, te sa tim u vezi i postoji predmetna diskrepanca. AI uvijek traži optimalno matematičko rješenje, ali isto nije nužno optimalno socio-ekonomsko rješenje. Kao što smo već naveli, štedeći u doba relativnog blagostanja, da bi se obezbijedila zdrava poreska baza i stabilni izvor primanja za kasnije i vremenom potrošnju EU vlade, a trošenjem akumuliranih sredstava u vrijeme krize, EU je zaista uspjela da očuva (u prosjeku) životni standard svojih građana. Nadalje, između desetog i petnaestog perioda, vidimo da se stvarne vrijednosti (crveni prazni krugovi) i AI NN prognoza vrijednosti varijable  $\omega_g$  (plavi i žuti puni krugovi) znatno razlikuju, pogotovo ukoliko uočimo trend kretanja stvarnih vrijednosti (plava linija na slici 171). Za „vještačku”

<sup>194</sup> Zapravo, porezi na primanja su bili u prosjeku konstatni – u drugo-pomenutom periodu, a primanja relativno znatno veća u istoimenom periodu.

promjenu, i sam trend plave linije sa grafika, zaslužan je ECB APP. Kasnije, od petnestog do tridesetog perioda, vidimo vrijednosti koje AI NN predviđa, kako „on ili ona misli” spram svih podataka, uzimajući u obzir *a-priori* i *a-posteriori* kretanja u sistemu. U suštini, sve nakon petnaestog perioda je čisto predviđanje iz ugla AI NN (nakon 2019. godine). U pomenutom predikcionom periodu, vidimo da AI NN smatra da su vrijednosti u makroekonomskom sistemu EU trebale ostati iste za period od 2016–2019. godine, uz blagi pad usljed nastale (modelom očekivane) recesije, koju bi posljedično prouzrokovao dug period negativnih i/ili niskih referentnih kratkoročnih i dugoročnih ECB kamatnih stopa, nešto povećane inflacije i visoke likvidnosti privrede i stanovništva (engl. *money oversupply*). Nadalje, nakon tri godine recesije, bi se ponovo javio rast primanja EU stanovništva u relativno kratkom periodu, i za očekivati je u tom trenutku ponovnu korekciju referentnih kamatnih stopa na gore, makroekonomska i fiskalna stabilizacija unije u trajanju od oko pet godina, te nadalje ponovo rast primanja u skladu sa RBC i NK teorijom. Međutim, zasigurno znamo, da se 2020. godine dogodila COVID–19 pandemija, koja je globalno produženo trajala u znatnoj mjeri i kroz 2021. godinu, te predstavlja neočekivan, nepredvidiv i katastrofalan događaj globalnog karaktera, čije posljedice su svakako promijenile bilo kakva makroekonomska predviđanja, ubacujući strukturni šok u sistem (odnosno model). Nadalje, 2022. godina je praćena tektonskim geopolitičkim promjenama, koje su uključivale promjenu unipolarnog svijeta u multipolarni, redistribuciju bogatstva u obliku energenata, finansija i političko-vojnih saveza. Posljednje navedeno se produžilo kroz cijelu 2023. godinu, i po svemu sudeći će trajati decenijama. U tako volatilnom internacionalnom okruženju EU nije i ne može ostati ostrvo, te se promjene nesagledivih posljedica tek očekuju za EU i cijelu globalnu ekonomiju.

Fer je za reći, da niti jedna prognoza, model ili sistem jednačina ne mogu u velikoj mjeri i potpuno vjerodostojno modelirati socio-ekonomski sistem (pogotovo ne globalni), kada postoji iracionalno ponašanje u samom sistemu, tj. njegovih gradivnih i nosećih faktora, a to su – ljudi. Iako, su neke zemlje mnogo manje osjetile posljednje geopolitičke lomove, kao što su to npr. SAD, nasuprot tome EU, naročito njen tzv. „motor” Njemačka, su gotovo „ošamućeni”, bez relativno jeftine energije koju su godinama (decenijama) dobijali od bivših geostrateških saveznika.



Slika 171. Vrijednosti varijable  $\omega_g$  – komparacija ulaznih podataka,<sup>195</sup> AI NN predikcije

i stvarne vrijednosti predmentne varijable sa pripadajućim trendom

Izvor: Istraživanje autora u okviru doktorske disertacije

U zaključku ovog poglavlja, možemo reći da: objektivna funkcija AINN (prenosna funkcija sistema) je efikasna u identifikaciji nelinearnih veza između varijabli i pruža veoma precizna predviđanja budućih vrijednosti. Međutim, pomenuti pristup je ograničen u smislu razumijevanja šireg spektra ponašanja sistema, gdje suprotno od AINN, NDA metoda ima prednost! Nedostaci NDA uključuju analitičku složenost i visoku računarsku zahtijevnost. Dok se pomenuti drugi nedostatak može ublažiti savremenom tehnologijom, prvi zavisi od ekspertize istraživača i iskustva u primjeni NDA u specifičnim istraživačkim oblastima. Dok oba pristupa imaju svoje prednosti i mane, glavna razlika leži u opštoj fleksibilnosti pristupa NDA, koji omogućava dinamičniju procjenu početnih uslova i tokova cjelokupnog sistema u prošlom, sadašnjem i budućem vremenu (kontinuitetom).

<sup>195</sup> AI NN često kreira svoje podskupove stohastičnih ulazno-testnih podataka u okvirima skupa početnih stvarnih vrijednosti, a koji zadovoljavaju uslove prvih ograničenja varijabli (FOMC), odnosno nalaze se u okvirima krajnjih vrijednosti vremenske serije izučavane varijable. Na pomenuti način se, slično MCMC (MC – Monte Carlo) metodi, kreiraju potencijalno različita ulazna scenarija i testiraju odstupanja različitih odziva, te se odabere najoptimalnija prenosna funkcija (slika 158).

Dodatno, AINN pristup pruža pouzdanu transfernu funkciju za odabranu i konkretnu(!) istraživačku vrijednost (domen) koji se izučava. Suprotno, NDA metoda nudi niz transfernih funkcija, koje se predstavljaju putem različitih pristupa i odabira početnih uslova, i istraživač sam mora izabrati najprikladniju za izučavani problem. Iako neuronske mreže imaju sposobnost da implicitno otkriju složene nelinearne veze između zavisnih i nezavisnih varijabli, kao i sposobnost da identifikuju različite moguće interakcije između promenljivih koje ih predviđaju, pristup neuronskim mrežama je ograničen u smislu da se fokusira na određivanje jedne objektivne funkcije kao svoj krajnji cilj.

NDA ima ipak prikladniji metodološki pristup za istraživanje u okviru disertacije, ali upoređivanje sa AINN pokazuje izuzetno tijesnu konkurenciju između praktičnosti i korisnosti rezultata dobijenih ovim dvjema metodama. Ekonomska važnost AINN analize leži u njenoj sposobnosti da identifikuje transfernu (objektivnu) funkciju sistema sa relativno malim odstupanjima vrijednosti, dok NDA pruža alternativne i fleksibilne analize potencijalno mogućih i stvarnih scenarija u prostoru svih makroekonomskih stanja za zadati sistem/model – na taj način pružajući veći dijapazon moguće-izučavanih slučajeva odnosno makroekonomskih scenarija, koji se mogu desiti u jednom tako kompleksnom sistemu kao što je makroekonomija EU.



## 6.2 Komparativna analiza NDA i AINN

Predstavili smo inkrementalni doprinos primjene NDA u društvenim naukama, sa posebnim naglaskom na makroekonomiju. Prezentovana metodologija otvara dalje vrata istraživačima da istu mogu primijeniti na raznovrsne među-povezane skupove podataka koji su relevantni za određeno polje istraživanja. Ono što čini ovaj istraživački rad relativno specifičnim jeste njegov dvostruki pristup analizi.

Prva linija analize fokusira se na stvaranje SNDJPR, što uključuje povezivanje endogenih i egzogenih varijabli. Predmetna linija istraživanja usmjerena je na razumijevanje unutrašnjih mehanizama i dinamike sistema, te posljedično kreiranju jednačina međuzavisnosti varijabli.

Druga linija analize je povezana preko NDA i postavlja varijable u prostor stanja, kao što su  $Y_H - W_H - C_H$ , i analizira ih korištenjem naprednih NDA računarskih alata.

Ekonometrija igra ključnu ulogu u povezivanju ovih dviju linija analiza, pružajući pored kreiranja početnih sistema jednačina i dublje razumijevanje odnosa između različitih varijabli.<sup>196</sup>[14][62][157]

Takođe, ovo istraživanje baca svjetlo na značajnu alokaciju finansijskih resursa unutar makroekonomske strukture Evropske unije. Važno je primijetiti da je znatan dio tih resursa dodijeljen direktno i/ili indirektno EU stanovništvu, što svakako predstavlja izuzetno pozitivan ishod kada su u pitanju široki (veliki) programi kreditiranja. Kako bismo očuvali EU stabilnost i u budućnosti, EU bi trebalo da pažljivo vodi politiku oporezivanja zarada, kao i da efikasno upravlja akumuliranim javnim dugom.

Posebno treba istaći značaj ECB APP koji je značajno doprinio rastu i razvoju evropske ekonomije. Makroekonomija EU, iako otvorena, dijeli mnoge karakteristike sa zatvorenim ekonomijama. Velika populacija, diverzifikovana finansijska ulaganja širom EU, kontrolisani rizik poslovanja zakonske i druge norme (Direktive), orijentacija ka unutrašnjem ekonomskom rastu, itd. Navedeno, uistinu čini temelj za stabilnu i prosperitetnu budućnost EU građana.

---

<sup>196</sup> Dimitrios A. Applied econometrics: a modern approach using EViews and Microfit. London: Palgrave Macmillan, 2006.

NDA analiza ukazuje na različite periode i vrijednosti istih, kada su u pitanju izdvajanja za prihode EU stanovništva. Na primjer, prije finansijske krize iz 2008. godine (od 2005. godine), postojao je period nedovoljnog ili bolje reći smanjenog izdvajanja za prihode zbog većeg i rastućeg BDP, a relativno konstatnih poreza na prihode. Sa druge strane, u periodu od 2012. do 2019. godine, zabilježena je (uslovno rečeno) prekomjerna potrošnja na zarade i naknade (tj. prihode EU stanovništva). Navedeno sugerije na promjene u ekonomskim obrascima tokom vremena, i ukazuje na ulogu EU institucija u zaštiti životnog standarda svojih građana kada dođe do recesije.

Dodatno, nadamo se da će ovo istraživanje biti inspiracija mnogima da koriste ekonomsku dinamiku, razvijajući nove analitičke perspektive, te doprinesu razvoju još boljih politika za budućnost EU. Takođe, imajući u vidu analize i podatke, vidimo da su stagnacija i ekonomska recesija bile „izazovi na horizontu” za EU makroekonomiju i prije COVID-19 pandemije. Pandemija je imala ogroman uticaj na globalnu ekonomiju, i to je bio svojevrsni događaj tipa „Crnog labuda” – nemoguć za predvidjeti sa ogromnim globalnim implikacijama. Ipak, programi kao što je „NextGenerationEU” pružaju nadu, i trasiraju put, ka boljoj i svjetloj budućnosti za Evropu. Evropski način života, sa svojim jedinstvenim karakteristikama, ostaje ključna tačka čvrstog oslonca EU prosperiteta, dok koordinacija ECB i članica EU osigurava efikasno upravljanje monetarnom i fiskalnom politikom, čak i u vremenima velikih kriza.

Najveći inkrementalni doprinos nauci u ovoj disertaciji jeste što povezujemo NDA istraživanja i singularne tačke prostora stanja sa stvarnim događajima, odnosno dinamika upravo tih singulariteta „otkriva” kvalitativne i kvantitativne pojave u makroekonomiji. Navedeno je realizovano uz pomoć poznatih ekonomsko-istorijskih činjenica i numeričkog rješenja sistema.[15] Dodatno, pojedini parametri u SNDJPR bivaju mijenjani (engl. sweep) u određenim granicama, rasponima i smjerovima, te njihovom promjenom ukazuju na ostale promjene koje se događaju u sistemu, ukoliko dođe do drukčijeg racija varijabli u predmetnom sistemu, a što sve opet odgovara realnim (stvarnim) postavkama, ili za potrebe analize potencijalno-mogućih scenarija koji su se mogli dogoditi, odnosno mogu se dogoditi u budućnosti zavisno od početnih uslova (tačaka) sistema.

Iako nije direktno povezano, predstavljena metodologija u disertaciji koristi NNK ekonometrijske metode da bi zajedno sa polinomnim fitovanjem tačaka kreirala SNDJPR,

koji kasnije NDA proučava. Prezentovana metoda se može koristiti u istraživanjima bilo kojih povezanih i suštinski korelisanih vremenskih serija, kao što je već navedeno.

Takođe, jedan od jako bitnih i direktno-ekonomskih doprinosa nauci jeste rekreiranje, transformacija i prilagođavanje izvornog sistema jednačina TD na specifikum EU makroekonomije. Neki finansijski instrumenti koji su više popularni kod stanovništva neke regije, ili ekonomsko-političkog entiteta, manje su popularni u drugoj, pa smo navedeno i uključili u jednačine kada je u pitanju EU makroekonomski sistem. Novonastali sistem jednačina (model) u određenim djelovima je dodatno izmijenjen parametarskim povezivanjem koeficijenata od značaja sa varijablama. Zapravo urađeno je definisanje zajedničkih varijabli za određene jednačine, npr. neto prihodi, kako bi se posljedično dobile jednačine u kojima možemo pratiti i analizirati promjene koeficijenata i kako iste utiču na endogene varijable. Na pomenuti način proširili smo analitičko-dedukcioni opseg koristeći iste početne podatke.

Višedimenziona analiza varijabli od interesa takođe predstavlja dodati inkrementalni naučni doprinos. Pored utvrđivanja nastanka hiperhaosa, njegovog kvalitativno i kvantitativno definisanja, određivanje prozora predviđanja je jako bitno, jer nam prezentuje granice povjerenja u kojima naši nalazi i tvrdnje imaju naučnu utemeljenost, dok izvan pomenutih intervala ulazi se u neodređenost – dugoročne prognoze se mogu ali i ne moraju obistiniti. Kao što smo već naveli, dugoročna makroekonomska predviđanja su jako teška i nezahvalna za uraditi. Međutim, nauka pokušava, pa često i uspijeva, da poboljša svoj metode pa samim tim i rezultate. Posljednje navedeno je svakako bila intencija ove disertacije.

Prezentovana doktorska disertacija otvara nove puteve razmišljanja u analizi-sintezi makroekonomskih pojava. Možda i njen najveći inkrementalno-naučni doprinos tek treba da se desi, na način da ćemo eventualno probuditi znatiželju kod uže i/ili šire naučne zajednice za nastavkom i/ili produbljivanjem prezentovanih metodologija, modela i uopšteno „početne tačke razmišljanja” o makroekonomskim pojavama i kretanjima u društvu.

## Zaključak

U našem narodu poznata je stara poslovice da „*Konac djelo krase*”. Imajući pomenuto na umu, potrudimo se da prezentujemo kroz rekapitulaciju postavljenih ciljeva, hipoteza, istraživačkih pitanja, itd: što, na koji način, i gdje u disertaciji je prikazano i/ili potvrđeno. Takođe, potrudimo se da ovdje prezentujemo sve glavne zaključke iz rada, kako bi se odmah stekla okvirna slika cjelokupno obavljenog istraživanja.

Na kraju ovog izuzetnog naučnog puta, želim istaći da je ovo naučno putovanje predstavljalo i jedno zaista izuzetno životno iskustvo, i uistinu sam zahvalan što me ono učinilo prvenstveno boljim osobom, pored neminovne i obimne akvizivije naučnih znanja i iskustava.

U konkretnom slučaju i direktno vezanom za ovu doktorsku disertaciju, u startu prije početka istraživanja i naučnog rada na istim, postavljeni su ciljevi. Pomenute ciljeve smo diferencirali na nekoliko inicijalnih, istraživačko-konsekvencnih i zaključnih ciljeva. Sa zadovoljstvom i ponosom, možemo reći da smo sve postavljene ciljeve i ispunili. Naime, okvirno govoreći glavni i integralni cilj je bio da identifikujemo tačke stabilnosti u ekonomskom sistemu kroz analizu promjena različitih faza i varijacije parametara. Na osnovu dobijenih rezultata, namjera je da se oblikuju zaključci o najefikasnijim ekonomskim politikama, bilo da se radi o fiskalnim ili monetarnim mjerama. Pomenuti optimalni pristupi ekonomskim politikama mogu biti od velike koristi pri utvrđivanju ključnih parametara za makroekonomiju EU. Ovaj istraživački projekat teži da dublje razumije ekonomske mehanizme i veze između različitih promenljivih u ekonomiji. Analizirajući različite scenarije i promjene u ekonomskim parametrima identifikovali smo tačke gdje se sistem stabilizuje ili postiže najbolje rezultate. Na osnovu predmetnih singularnih tačaka, možemo predložiti optimalne politike koje će pomoći u očuvanju stabilnosti i unapređenju ekonomskih performansi makroekonomskog sistema. Navedeno je prilično detaljno urađeno u glavi 5.3, odnosno naročito detaljno u poglavlju 5.3.1 i suplementarno metodološki ali na druge makroekonomske parametre i temu u poglavlju 5.3.2. Vjerujemo, da isti jednoznačno potvrđuju ostvarenje ovog cilja, pa i šire, tj. u domenu potvrde istih rezultat u dva različita modela. Razumijevanje optimalnih vrijednosti fiskalnih i monetarnih politika može biti od suštinskog značaja za oblikovanje budućih efikasnih politika (npr. kod ECB-a), a koje će podržati ekonomski rast, stabilnost i blagostanje unutar EU. Dodatno, disertacija ima

potencijal da doprinese boljem razumijevanju upravljanja ekonomskim politikama EU članica u okvirima unije.<sup>197</sup>

Kod kreiranja SNDJPR prvi korak je uspostavljanje opštih teorijskih disekvilibrirumskih jednačina koje su adekvatne za konkretni ekonomski sistem. Predmetne jednačine moraju biti tako formulisane da se mogu primijeniti u nelinearnoj dinamičkoj analizi, koristeći koncepte teorije haosa i inverznog modeliranja. Ovaj korak je ključan, jer nam omogućava da precizno modeliramo ponašanje ekonomske promjenjive u sistemu – kada su prisutni disekvilibrirumi ili odstupanja od ravnotežnih stanja. Ovako formulirane jednačine omogućavaju nam da razumijemo dinamičke interakcije između različitih ekonomskih faktora i kako se oni mijenjaju tokom vremena.[111]

Korištenje teorije haosa i inverznog modeliranja dodatno obogaćujemo našu analizu i posljedično sintezu. Teorija haosa nam omogućava da istražimo kompleksne, neravnotežne obrasce u ekonomskim vremenskim serijama i da (donekle) razumijemo kako to male promjene u početnim uslovima mogu dovesti do značajnih promjena u ekonomskim izlazima. Inverzno modeliranje, sa druge strane, omogućava nam da rekonstruišemo strukturu i parametre ekonomske jednačine na osnovu dostupnih izraza i podataka, uslovno govoreći unazad. Prateći prezetnovani proces stvaramo teorijski okvir koji omogućava dublje razumijevanje dinamike ekonomskih sistema, kao i njihovih ravnoteža/neravnoteža. Prezentovani modeli mogu poslužiti kao osnova za dalju analizu i donošenje adekvatnih ekonomskih odluka, što je od suštinskog značaja za efikasno upravljanje ekonomijom.

Da bismo postigli cilj generisanja neprekidnih funkcionalnih zavisnosti ekonomskih varijabli od izvornih diskretnih funkcija (prekidnih i npravo samim tim i nediferencijabilnih), sa ciljem proširivanja obima originalnog intervalskog uzorka početnih podataka radi kreiranja pripadajućeg sistema simultanih jednačina (SSJ), tj. sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (SNDJPR), razvili smo sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda koristeći diferencijabilne funkcije koje predstavljaju ekonomske promenljive. Kroz pomenuti pristup, uspostavili smo međusobne veze između promenljivih od interesa za istraživanje. Pomenuti SNDJPR služi kao osnova za modeliranje dinamike ekonomskog sistema. Diferencijabilne funkcije omogućavaju nam da precizno opišemo kako se ekonomske varijable mijenjaju tokom vremena, uzimajući u obzir njihove

---

<sup>197</sup> *In varietate concordia* (prev. Ujedinjeni u različitosti), je moto/kirilatica EU.

međusobne interakcije. Prezentovani metod nam omogućava da dublje razumijemo dinamičke procese u ekonomiji, odnosno kako različite promjenjive međusobno utiču jedna na drugu. Analiza SNDJPR može nam pružiti uvid u složene obrasce ponašanja ekonomskih varijabli i njihove efekte na cjelokupan ekonomski sistem. Navedeni pristup nam omogućava da možemo bolje razumijeti dinamičku prirodu ekonomskih procesa i koristiti dobijene modele za predviđanje budućih ekonomskih događaja, tj. stvaranje optimalnih odluka u ekonomskom upravljanju. Pomenuto je ključno za bolje razumijevanje i upravljanje ekonomske stvarnosti i njenom složenosti. Navedeno je vrlo detaljno urađeno u glavi 3, integralno posmatrano kroz sva poglavlja.

Kako bismo ostvarili prethodni cilj, morali smo proširiti raspon početnih podataka, te smo generisali neprekidne funkcionalne zavisnosti između ekonomskih varijabli i njihovih izvornih diskretnih funkcija, koje uključuju i prekide odnosno nediferencijabilne tačke u kontinualni funkcionalni tok. Pomenuti korak je preduzet kako bismo povećali opseg originalnog intervalskog uzorka podataka. Kroz prezentovani proces, stvorili smo sistem simultanih jednačina (SSJ), ili drugim riječima, sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (SNDJPR). U svakom pogledu nam kreirani sistem omogućava da bolje razumijemo i modeliramo dinamiku ekonomskih promenljivih u kontekstu nelinearnih i neprekidnih promjena tokom vremena. Predmetni pristup ima za cilj da nam omogući veću preciznost i sposobnost predviđanja ponašanja (kretanja) ekonomskih zavisnosti odnosno promenljivih u integralno-posmatranom sistemu (modelu). Kroz generisane funkcionalne zavisnosti i stvaranje sistema simultanih jednačina, možemo analizirati kompleksne interakcije između različitih ekonomskih varijabli i bolje razumijeti kako se iste mijenjaju tokom vremena. Metodologija korištena u disertaciji pomaže proširenju obima dostupnih podataka za istraživanje i omogućava nam da stvorimo sofisticirane (naprednije) modele, a koji su korisni za dublje razumijevanje i analizu ekonomskih dinamika. Pomenuti modeli mogu biti od suštinskog značaja za donošenje adekvatnih ekonomskih odluka i upravljanje ekonomskim sistemom, pogotovo u složenim uslovima, odnosno naročito kada je potrebno poznavati suptilne i/ili latentne uzroke postojećih stresnih promjena u prudencionoj makroekonomskoj analizi. Navedeno je implemtirato u poglavlju 4.3.

U procesu istraživanja od krucijalnog značaja je bilo identifikovanje singularnih karakterističnih tačaka sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Predmetne tačke su posebno značajne, jer predstavljaju specifične tačke u dinamičkom ponašanju



sistema i koje se razlikuju od ostalih. Singularne karakteristične tačke, obično označavaju posebne uslove ili stanja u kojima sistem može pokazati jedinstveno ili neobično ponašanje. Pronalaženje pomenutih tačaka pomaže nam da bolje razumijemo dinamiku sistema i kako se ponaša u različitim situacijama. Predmetne singularne karakteristične tačke mogu ukazivati na kritične trenutke ili uslove u ekonomskom sistemu koji zahtijevaju posebnu pažnju pri analizi. Pomenuti cilj je od izuzetne važnosti, jer nam omogućava da bolje identifikujemo ključne tačke u dinamičkom ponašanju sistema odnosno da bolje razumijemo kako se promjene u parametrima i/ili početnim uslovima mogu odraziti na ekonomske rezultate. Navedeno je od suštinskog značaja za donošenje kvalitetno-efektivnih odluka u ekonomskom planiranju i upravljanju. Posljedično, proveli smo detaljno istraživanje prirode pronađenih relevantnih singularnih tačaka i pripadajućih im parametara. Predmetni proces je ključan kako bismo bolje razumeli što ove tačke predstavljaju u kontekstu našeg istraživanja. Analiza karaktera pomenutih singularnih tačaka nam omogućava da identifikujemo ključne osobine i svojstva sistema u blizini odnosno okolini tih tačaka. Razumijevanje, kako se sistem ponaša u okolini singularnih tačaka je od suštinskog značaja, jer nam pomenuto omogućava da bolje predvidimo i interpretiramo ponašanje sistema u različitim scenarijima, kako u sadašnjosti (analize), tako i u budućnosti (predikcije). Takođe, istražili smo i parametre koji su relevantni za singularne tačke od interesa za ovo istraživanje, što nam pomaže da razumijemo kako promjene u parametrima sistema mogu uticati na ponašanje sistema i u blizini ovih tačaka. Navedeno je važno za analizu osjetljivosti sistema na promjene u parametrima, i može nam pomoći u donošenju odluka o upravljanju makroekonomskim sistemom.

U suštini, istraživanje karaktera singularnih tačaka i pripadajućih parametara doprinosi dubljem razumijevanju dinamike sistema, te nam omogućava da bolje upravljamo i modeliramo ekonomske procese. Predmetna analiza i sinteza je implementirana integralno u okviru 5 glave.

Posljedično prethodno iznesenom, sproveli smo analizu kontinuiranih bifurkacija ili promjena u karakteru singulariteta SNDJPR. Pomeniti dio istraživanja se odnosi na proučavanje kako se singulariteti sistema ponašaju, i kako se njihove osobine mijenjaju, kontinuirano kroz različite vrednosti parametara u vremenu unaprijed i/ili unazad. Putem pomenute analize, dobili smo dublje razumijevanje dinamičkih promena u sistemu kada se parametri mijenjaju. Bifurkacije označavaju tačke u prostoru parametara gdje se ponašanje



sistema dramatično mijenja, što može imati značajan uticaj na ekonomske rezultate i stabilnost sistema odnosno promjenu stabilnosti. Praćenje i razumijevanje navedenih kontinuiranih bifurkacija pomaže nam da bolje modeliramo i predviđamo ponašanje ekonomske dinamike u različitim situacijama. Pomenuto može biti od velike koristi za donošenje ekonomski ispravnih odluka i upravljanja sistemom u uslovima promjenljivih parametara ili spoljnih šokova, bez obzira na političke implikacije (što je, doduše, rijetko slučaj). Posljednje prezetnovani aspekt istraživanja, doprinosi razumijevanju složenosti ekonomske dinamike odnosno njenih odgovora na različite faktore. Takođe, predmetna analiza i sinteza je implementirana integralno u okviru 5 glave disertacije.

Posmatrano iz ugla istraživanja odnosno sinteze prethodnih analitičkih aktivnosti, uspjeli smo da uspostavimo vezu između matematičkih rezultata dobijenih u okviru teorijske analize i stvarnih ekonomskih kretanja. Navedeno, je od suštinskog značaja za cijelo istraživanje, jer nam omogućava da prenesemo apstraktne matematičke modele na stvarni svijet ekonomskih fenomena. Dodatno, putem ove analize možemo bolje razumjeti kako se teorijski modeli i rezultati primjenjuju na stvarne ekonomske situacije. Povezano, identifikovali smo kako matematičke karakteristike sistema odražavaju stvarne ekonomske faktore i promjene, što nam omogućava da donosimo zaključke o tome koliko su naši teorijski modeli relevantni, ili ne, za objašnjavanje stvarnih dešavanja u ekonomiji. Takođe, ostvareni rezultati u okviru ovog cilja pomažu nam da bolje razumijemo i praktičnu primjenu naših matematičkih modela, tj. kako se oni mogu koristiti za analizu i prognozu makroekonomskih kretanja. Pomenuto je ključno za stvaranje veze između teorijske analize i stvarnog ekonomskog svijeta, te konsekvntno doprinosi boljem razumijevanju i upravljanju ekonomskim pojavama u praksi.[154][158]

Postavljeni ciljevi istraživanja su bili pomoć i pokazatelj smjera na potvrdi postavljenih hipoteza. Predmetno testiranje hipoteza je suštinski dio istraživačkog procesa, jer omogućava da se provjeri valjanost teorijskih pretpostavki koje su postavljene u okviru ciljeva. Hipoteze predstavljaju pretpostavke o odnosima između različitih varijabli u ekonomskom sistemu, te povezano, formulisali smo ih kao tvrdnje koje smo zatim potvrditi putem empirijske analize, nad stvarnim podacima EU. Metodološki okvir, koji se zasniva na deduktivnom pristupu, omogućava nam da sistematično istražimo prošlo i postojeće stanje u ekonomskom sistemu. Kroz analizu podataka i primjenu relevantnih teorijskih okvira, možemo identifikovati obrasce i trendove u ekonomskim varijablama. Posljedično,

sposobnost predviđanja budućih trendova – opisnih i zavisnih varijabli, doprinosi dubljem razumijevanju dinamike cjelokupne ekonomske situacije u izučavanom sistemu. Disertacija doprinosi unaprijeđenju teorijskog i praktičnog razumijevanja posmatranog ekonomskog sistema. Analiza prošlosti, sadašnjosti i budućnosti omogućava nam da pružimo dragocjen uvid u to kako se ekonomske promjenive povezuju, i kako se može upravljati ekonomskim izazovima. Pomenuta istraživanja su od suštinskog značaja za razvoj ekonomske nauke, u donošenju odluka koje na pozitivan način koriste ljudima, u stvarnom svijetu i izvan (samo) teoretskih okvira.

Pri testiranju hipoteza u ovom istraživanju, analizirali smo praktično sljedeće egzogene i endogene varijable: - raspoloživi bruto dohodak: varijabla koja predstavlja ukupan bruto dohodak koji je dostupan u ekonomskom sistemu nakon plaćanja poreza i drugih nameta. Isti je važna mjera ekonomske produktivnosti i dostupnih resursa; - ukupni imetak: gdje, ukupni imetak obuhvata vrijednost svih aktivnih sredstava i resursa u ekonomskom sistemu. Navedena varijabla može ukazivati na nivo bogatstva i kapaciteta neke šire ili uže ekonomske zajednice; - ukupna raspoloživa potrošnja domaćinstava: ista, mjeri ukupne troškove potrošnje u ekonomskom sistemu. Pomenuto uključuje potrošnju domaćinstava, i može ukazivati na nivo ekonomske aktivnosti i potrošnje konstitutivnih djelova društva (porodice); - porez na dohodak: pri čemu porez na dohodak predstavlja iznos koji pojedinci ili kompanije plaćaju državi – na osnovu svojih prihoda. Navedena varijabla svakako direktno utiče na raspoloživi dohodak i povezane mu troškove; - depoziti po viđenju: predmetni depoziti predstavljaju sredstva koja su dostupna na zahtijev, i mogu se koristiti za svakodnevne transakcije i potrebe, te se smatraju visoko-likvidnim oblikom sredstava u ekonomskom sistemu; - oročeni depoziti do godinu dana: gdje, oročeni su depoziti sredstva koja su deponovana na određeni vremenski period i donose prihode vlasniku u vidu kamate. Isti su varijabla koja može ukazivati na nivo štednje i investiranja u ekonomiji. Posljedično, integralna i paralelna analiza svih ovih varijabli omogućava nam da istražimo kako se ekonomske promenljive međusobno povezuju, te kako zajedno i partikularno utiču na ekonomsku dinamiku.

Testiranje hipoteza pomoglo je da bolje razumijemo veze između prezetnovanih faktora, kao i da identifikujemo uzročne odnose koji oblikuju ekonomski sistem. Dodatno, iste su dokazane kroz integralni materijal ove disertacije

Kod H1, potvrdili smo da izlaganjem uobičajenih singulariteta raspoloživog dohotka u određenom trenutku za odgovarajuće vrijednosti varijabli i parametara razmatranog sistema, dolazi se do ekvilibrijskog položaja. Ekvilibrijski položaj predstavlja stabilno stanje u kojem su ekonomske promjene i fluktuacije svedene na minimum. Kroz kontinuirano „održavanje” pomenutih karakterističnih singulariteta, sistem postiže ravnotežu, što može biti od suštinskog značaja za dugoročnu stabilnost i održivost ekonomskog sistema iz ugla realnog svijeta (glava 5., naročito poglavlje 5.3.1). Pored ispitivanja prirode same stabilnosti, potvrdili smo i da trajanje određenih stabilnih i/ili nestabilnih stanja također u vrlo značajnoj mjeri modelira dinamiku sistema.

Nadalje, kod H2 (glava 5., naročito poglavlje 5.3.1 i slika 82., ali i druge slične/pripadajuće slike) pokazali smo da postoji odstupanje između stvarnih vrijednosti razmatrane varijable i vrijednosti koja odgovara ekvilibrijskom položaju – pri intenciono-utvrđenom kontinuiranom „očuvanju” (održanju) vrijednosti singulariteta raspoloživog dohotka, i predstavlja ključni aspekt analize ekonomske stabilnosti. Navedeno odstupanje ukazuje na neminovno prisustvo dinamičkih faktora i promjena u ekonomskom okruženju. Međutim, izborom samog metodološkog okvira, odnosno visoke tačnosti fitovanja izvornih podataka te 64-bitnim zapisima vrijednosti u kalkulacijama, uspjeli smo djelimično i do razumne mjere da smanjimo i držimo u granicama statističke prihvatljivosti pomenute diskrepance. Kada stvarna vrijednost varijable odstupa od ekvilibrijske vrijednosti, to može ukazivati i na postojanje disbalansa ili neravnoteže u ekonomskom sistemu. Ovakve fluktuacije mogu biti rezultat različitih faktora kao što su promjene u ponudi i potražnji, promjene u politici ili eksterni šokovi. Analiza ovih odstupanja može pomoći u razumijevanju stabilnosti sistema i identifikaciji potrebnih korektivnih mjera, kako bi se sistem vratio u ekvilibrijski položaj. Navedena odstupanja mogu takođe poslužiti kao pokazatelj potrebe za prilagođavanjem ekonomske politike kako bi se očuvala stabilnost i održivost sistema. Praćenje i analiza odstupanja su stoga od suštinskog značaja za ekonomske analitičare i donosiocima odluka kako bi se obezbijedila koliko je moguće više odnosno duže ravnoteža u ekonomskom sistemu.

U okviru potvrde H3 pokazali smo da kontinuiranjem singulariteta raspoloživog dohotka, u zajedničkom kontekstu sa ukupnim imetkom i potrošnjom u određenom trenutku, za odgovarajuće vrijednosti razmatranih varijabli i parametara, postiže se ekvilibrijski položaj. Pomenuti proces označava suštinsku tačku ravnoteže u ekonomskom sistemu.

Raspoloživi dohodak igra ključnu ulogu u ovom kontekstu, jer predstavlja raspoloživi resurs koji pojedinci ili domaćinstva mogu koristiti za svoju potrošnju i/ili štednju. Kada se singulariteti raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i potrošnje usaglasu za određene vrijednosti varijabli i parametara, sistem ulazi u ekvilibrijumski položaj. Predmetni ekvilibrijumski položaj ukazuje na to da nema tendencije za promjenama ili odstupanjima u ekonomskim aktivnostima u tom trenutku. Sve varijable i parametri se stabilizuju i održavaju u stanju ravnoteže. Pomenuto može biti od suštinskog značaja za analizu ekonomske stabilnosti, jer sugerise da su sile ponude i potražnje usklađene te da (eventualno) nema tendencije za nepredvidivim fluktuacijama ili disbalansima. Upravljanje ekvilibrijumskim položajem može biti ključni cilj ekonomske politike kako bi se održala stabilnost i održivost opšte ekonomske aktivnosti. Praćenjem i razumijevanjem procesa kontinuiranja singulariteta raspoloživog dohotka – zajedno sa ukupnim imetkom i potrošnjom, ekonomski analitičari i donosioci odluka, mogu bolje shvatiti dinamiku ekonomske ravnoteže odnosno donijeti čak i relevantne političke odluke.

Kod H4, smo pokazali da postoji primjetno odstupanje između stvarnih vrijednosti razmatrane varijable i vrijednosti koja odgovara ekvilibrijumskom položaju, koji je identificiran kroz kontinuitet singulariteta raspoloživog dohotka, u kombinaciji sa ukupnim imetkom i potrošnjom. Navedeno odstupanje (vrijednosti varijable) ukazuje i na to da ekonomska situacija u datom trenutku nije u potpunosti u skladu sa teorijskim modelom ravnoteže, koji je utvrđen analizom singulariteta raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i potrošnje. Razlog ovog odstupanja može biti mnogostruke prirode, uključujući promjene u ekonomskim faktorima, vanjske šokove i/ili političke intervencije, koje nisu bile uzete u obzir (niti mogu biti) u teorijskom modelu. Međutim, analiziranje ovih odstupanja od strane istraživača u svom analitičko-dedukcionom okviru, je od suštinskog značaja za razumijevanje dinamike ekonomskog sistema. Pomenuta dinamika, može pomoći u identifikaciji potrebnih korektivnih mjera, kako bi se ekonomija vratila u ekvilibrijumski položaj i postigla stabilnost. Dodatno, takva odstupanja mogu poslužiti i kao važan pokazatelj potrebe za revizijom ekonomske politike, odnosno: kako bi se to moglo adekvatno odgovoriti na promjenjive uslove i izazove (trenutne i buduće) posmatrane ekonomske cjeline. Analiziranje odstupanja omogućava ekonomistima i donosiocima odluka da bolje razumiju kako ekonomski sistem funkcioniše (u realnosti), te im pruža i smjernice za optimizaciju ekonomske politike radi postizanja dugoročne stabilnosti i održivosti.

Interesantna je potvrda H5, gdje u ponašanju EU makroekonomskog modela, koji obuhvata raspoloživi dohodak, ukupni imetak i ukupnu raspoloživu potrošnju, može se uočiti pojava haosa nakon određenog broja vremenskih perioda. Pomenuta pojava haosa ukazuje na nepredvidive fluktuacije i nestabilnosti u ekonomskim varijablama, koje se ne mogu jednostavno objasniti ili kontrolisati unutar postojećeg modela. Haos u ovom kontekstu označava stanje dinamičkog nereda, gdje i male promjene u početnim uslovima ili parametrima mogu rezultirati znatnim i nepredvidivim promjenama u ponašanju sistema. Navedeno može biti vrlo izazovno za analitičare i donosioce odluka, jer otežava predviđanje budućih ekonomskih dešavanja i razvoja. Predmetna pojava haosa može biti posljedica različitih faktora, kao što su to npr. vanjski šokovi, promjene u politici, ili kompleksne interakcije između različitih ekonomskih varijabli. Analiza ovog tipa haosa zahtijeva upotrebu naprednih metoda i modela, kao i duboko razumijevanje makroekonomske dinamike u okviru EU. Sve navedeno smo prezetnovali u okviru glave 5., tj. naročito u poglavlju 5.3.1, te povezanih slika od 128. do 132. sa pripadajućim objašnjenjima u tekstu. Razumijevanje i upravljanje haosom u makroekonomskim modelima su izuzetno važni zadaci, jer pomažu u oblikovanju efikasnih politika i mjera koje se mogu primijeniti, kako bi se ekonomska stabilnost očuvala i negativne ekonomske promjene minimalizovale. Navedeno takođe potvrđuje važnost stalnog praćenja i ažuriranja metoda moderne ekonomske analize, a sa ciljem kako bi se adekvatno odgovorilo na dinamičke promjene i izazove u modernom ekonomskom okruženju.

Pored testiranja i potvrde navedenih hipoteza, u metodološkom smislu, istraživanje je takođe odgovorilo i na niz drugih istraživačkih pitanja. Pomenuta dodatna pitanja, mogu doprinijeti dubljem razumijevanju problema i konteksta istraživanja, kao i pružiti dodatne uvide i informacije. Okvirno gledano, sve dodatne aspekte istraživanja upravo dopunjuju istraživačka pitanja, te doprinose dubljem razumijevanju problema koji se istražuje. Ovisno o prirodi istraživanja, navedena pitanja mogu biti od suštinskog značaja, pored paralelne potvrde hipoteza, i za dobijanje cjelovite i/ili šire slike o temi istraživanja uz pružanje relevantnih informacija i smjernica za donošenje odluka.

Kada je u pitanju IP1, istraživanjem u okviru ove disertacije smo odgovorili da postupak određivanja karakterističnih singularnih tačaka u faznim prostorima raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i potrošnje stanovništva EU, kao i primjena kontinuuacione bifurkacione analize parametarskih prostora na ove tačke, može stvoriti mogućnosti za

alternativnu i paralelnu analizu stabilnosti. Navedeno se odnosi na proučavanje specifičnih dinamičkih svojstava funkcionalnih zavisnosti između navedenih varijabli u prošlim, sadašnjim i budućim vremenskim periodima. Dodatno, određivanje karakterističnih singularnih tačaka u faznim prostorima pomaže identifikaciji ključnih tačaka ili stanja ravnoteže u ekonomskom sistemu EU. Predmetne tačke mogu biti od suštinskog značaja za razumijevanje stabilnosti i dinamike sistema. Korištenje kontinuuacione bifurkacione analize parametarskih prostora nad ovim tačkama, omogućava nam se da bolje razumijemo kako se sistem ponaša u različitim uslovima, odnosno kako se stabilnost može promijeniti sa promjenama u određenim parametrima sistema. Posljedeično, prezetnovana analitička metoda takođe omogućava istraživačima da generišu mogućnosti za alternativne scenarije i procjene kako bi bolje predvidjeli buduće promjene. Pomenuto je od izuzetno velike važnosti za planiranje i upravljanje ekonomskim politikama i resursima. Ovakav pristup takođe omogućava da ispitamo kako se funkcionalne zavisnosti između raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i potrošnje razvijaju tokom vremena. Ovo je posebno značajno za praćenje ekonomske dinamike, identifikaciju potencijalnih rizika, ali i prilika, te za donošenje relevantnih i utemeljenih odluka u budućnosti. U konačnici, potvrda ovog pristupa ukazuje na njegovu vrijednost kao alata za dublje razumijevanje, uopšte, ekonomske dinamike u modelima/sistemima, ali i konkretno za podršku boljem upravljanju makroekonomskim sistemom EU.

Kod IP2 istraživanjem smo potvrdili da: primjenom inverznog modeliranja možemo precizno definisati potrebne iznose monetarnih i fiskalnih parametara, a sve sa ciljem kako bismo postigli poželjna odnosno realna ekvilibrijumska stanja u makroekonomskim politikama. Prezentovana metodologija omogućava identifikaciju ključnih faktora, pa opet i prilika, za postizanje željenih ekonomskih ciljeva. Inveržno modeliranje smo zapravo koristili kako bi utvrdili kako treba promijeniti parametre politike – kao što su to npr. kamatne stope, poreske stope ili budžetski izdaci, da bi se postigli specifični makroekonomski ciljevi, kao što su: ekonomska stabilnost, targetirana inflacija ili rast bruto domaćeg proizvoda. Kroz precizno definisanje tih parametara, ekonomski analitičari i donosioci odluka mogu razviti strategije za upravljanje ekonomijom i optimizaciju politika. Pomenuto je od suštinskog značaja za makroekonomske politike, jer omogućava bolju kontrolu nad ekonomskim ishodima, te dodatno pruža određenu minimizaciju rizika. Inveržno modeliranje takođe pruža mogućnost da se razmotre različiti scenariji i njihovi



uticaji na ekonomiju, u širokom dijapazonu jedne i/ili više povezanih varijabli. Potvrda da inverzno modeliranje može precizno definisati potrebne parametre politike za postizanje poželjnih ekvilibrijumskih stanja, ukazuje na važnost ove analitičke metode u oblikovanju i implementaciji diversifikovanih makroekonomskih politika, ali i sprege monetarno-fiskalnih korekcija – pod uslovom da su moguće i izvodive, kod raznih vrsta agenata i faktora (uključujući moderni neo-klasični ekonomski pristup).

Vezano za IP3, odgovorili smo potvrdno da primijenjena NDA metoda pruža bolje rezultate pri tumačenju dinamike kretanja raspoloživog dohotka, ukupnog imetka i raspoložive potrošnje u poređenju sa metodama AINN, npr. kao što je to metoda dubinskog učenja pomoću neuronskih mreža. Predmetna potvrda ukazuje na prednosti NDA metode u analizi ekonomskih varijabli od interesa u ovom radu. Kada su u pitanju istraživanja koja imaju metodološki okvir i postavke bazirane na svemu do sada iznesenom, navešćemo i nekoliko razloga zbog kojih bi svakako NDA metoda mogla biti preferirana nad metodama dubinskog učenja: - preciznost u tumačenju: NDA metoda može pružiti preciznije rezultate i dublje razumijevanje dinamike ekonomskih varijabli, što je ključno za ekonomske analize i donošenje odluka; - mogućnost tumačenja uzroka i posljedica: NDA omogućava ekonomistima da bolje razumiju uzroke i posljedice promjena u varijablama, što može biti od velikog značaja za oblikovanje politika. - robusnost i stabilnost: uobičajeno je NDA manje osjetljiva na šum i neregularnosti u podacima u poređenju sa metodama dubinskog učenja, što je važno u realnim ekonomskim okruženjima; - sposobnost raditi sa ograničenim podacima: u mnogim slučajevima, ekonomski podaci mogu biti ograničeni. NDA metoda može efikasno raditi sa manjim brojem podataka i pružiti relevantne rezultate, ukoliko se primijene npr. NNK metode kao što je to ranije prezetnovano; - transparentnost: Rezultati NDA metode obično su više transparentni, što je opet bitno za ekonomske analitičare i donosioce odluka. Međutim, određeno poznavanje NDA jeste preduslov za efikasno i smisleno korištenje iste u raznorodnim naučnim istraživanjima. Iako dubinsko učenje pomoću neuronskih mreža može biti (i jeste) moćan alat u mnogim oblastima, u analizi ekonomske dinamike NDA metoda ima svoje prednosti, zbog inherentne sposobnosti da pruži jasne i precizne informacije. Prezentovani zaključak, odnosno ranije prezentovane i povezane potvrde, do kojih smo došli istraživanjem, mogu biti korisna smjernica za istraživače i analitičare koji se bave ekonomskim modeliranjem i prognozama, da upravo odaberu NDA kao svoj istraživački alat.



Model koji čini središnji dio disertacije temelji se na jednadžbama 1–10, pri čemu fiskalna i monetarna politika nisu izravno uključene u taj model putem jednadžbi. Međutim, u disertaciji su predstavljene različite metodološke analize, od kojih je Poglavlje 5.3.2 nositelj nove vrste metodološkog okvira. Ovdje se naglašava da, čak i bez jednačina, primjenom objašnjene metodologije možemo dobiti kvalitetnu i pouzdanu kvantitativnu i kvalitativnu analizu međusobne sprege i povezanosti endogenih varijabli unutar nekog fenomena, u slučaju disertacije, makroekonomskih pojava. Konkretno, u pomenutoj analizi (poglavlju) istražuje se (proučava): HICP (parametar za praćenje inflacije u EU),  $r_t$  dugoročne kamatne stope kao pokazatelj trenda kamatnih stopa na štednju i  $Y_H$  prihod (agregatni) koji proizlazi iz više izvora. Fiskalna i monetarna politika očituju se kroz promjene temeljnih fiskalnih i monetarnih parametara u ekonomiji. Analiziraju se i promjene novca koje se dalje odražavaju na prihod, imetak i potrošnju stanovništva EU. Važno je napomenuti da se ne radi o izoliranim monetarnim događajima, već o promjenama novca koje se direktno ili indirektno odražavaju na živote stanovništva EU.

Fiskalna politika se, prema tekstu disertacije, uzima kao prosjek fiskalnih opterećenja na dohodak, odnosno vrste primanja stanovništva EU. Sa obzirom na različite fiskalne politike članica EU, raspon tih razlika u fiskalnoj politici iznosi od oko 15% do preko 60%. Stoga se analiza fiskalnih kretanja odvija na razini EU kao političko-ekonomske jedinice (prosjek). Poslijedično, smatramo potrebnim izvući zaključke koji će pridonijeti razumijevanju potrebnih intervencija u ekonomiji. Nadalje, postavlja se pitanje o eventualnoj nužnosti povećanja poreza na prihode putem fiskalnog kanala ili smanjenja agregatnog dohotka populacije putem monetarnog kanala. Pomenuti kanali predstavljaju ključne alate u oblikovanju ekonomske politike i uticaja na makroekonomske parametre. Fiskalni interventni kanal obuhvaća analizu mogućnosti povećanja poreza na prihode stanovništva. Uvođenjem poreza na prihode, vlada može direktno uticati na finansijska sredstva koja su na raspolaganju građanima. Pitanje je treba li ojačati fiskalne mjere kako bi se postigla veća prihodovna struktura ili prilagoditi poresku politiku kako bi se potaknulo ekonomsko rasterećenje.

Iako formalno nemamo varijable koje direktno predstavljaju monetarnu politiku u jednačinama, primjenjujemo pristup inverznog modeliranja kako bismo izanalizirali ključne tačke i krive, uzimajući u obzir stvarne vrijednosti i događaje u ekonomiji. Proces

identifikovanja značajnih trenutaka uključuje grafičko i/ili numeričko očitavanje vrijednosti endogenih varijabli, koje se zatim koriste u određenim jednačinama, poput 51. ili 52., kako bismo dobili vrijednosti za određene monetarne ili fiskalne parametre. Navedeni postupak je poznat kao inverzno modeliranje i omogućuje nam procjenu uticaja i kretanja monetarne i fiskalne politike u skladu sa tokom.

Sa druge strane, monetarni kanal usmjeren je na analizu opcija koje uključuju smanjenje agregatnog dohotka populacije. Promjene u monetarnoj politici, poput regulacije novčane mase ili kamatnih stopa, imaju potencijal utjecati na ukupnu razinu dohotka. Razmatra se, da li je smanjenje dohotka nužno za postizanje ekonomske stabilnosti, ili da li bi promjene u monetarnim instrumentima mogle pridonijeti željenim rezultatima. Imajući u vidu složenost ekonomske situacije, donošenje odluka o fiskalnim i monetarnim mjerama zahtijeva sveobuhvatnu analizu kako bi se osigurala održiva i optimalna ekonomska ravnoteža. Važno je uzeti u obzir šire društvene i ekonomske implikacije tih mjera, posebno u kontekstu specifičnosti Europske unije, kako bi se postigao harmoničan i održiv ekonomski razvoj.

Takođe, sa obzirom na to da kanali transmisije fiskalne i monetarne politike djeluju indirektno, njihov uticaj se procjenjuje na temelju stvarnih podataka. Proces uključuje određivanje singularnih tačaka ili krivulja, očitavanje vrijednosti endogenih varijabli u relevantnom trenutku, povratak u odgovarajuću jednačinu (npr. 51. i/ili 52.), te dobijanje vrijednosti za određeni monetarni i/ili fiskalni parametar. Dobijene vrijednosti zatim se uspoređuju sa stvarnim podacima kako bi se analizirale diskrepance u vrijednostima i vremenskim trajanjima. Konačno, donošenje zaključaka uključuje razmatranje potrebe za povećanjem poreza na prihode ili smanjenjem agregatnog dohotka stanovništva EU. Pritom se ističe da, iako ove mjere mogu imati slične učinke, njihov utjecaj može se razlikovati u pogledu priliva radne snage, stranih investicija, socijalnih izdataka i razine državne blagostanja.

Unatoč ograničenjima u modelu zbog odsutnosti svih varijabli koje su formalno potrebne za kompletnu reprezentaciju otvorene (makro)ekonomske strukture, predstavljena i primijenjena metodologija za analizu je univerzalna i inovativna. Zapaženo je da u znanstvenoj literaturi nismo pronašli ekvivalentnu metodologiju koja bi bila ravnopravna

ovoj, iako postoje određeni dijelovi koji su joj u dosta manjoj mjeri slični. Kombinacija korištenih naučnih elemenata u ovoj metodologiji je čini jedinstvenom.

Kao rezultat, možemo slobodno tvrditi da primijenjena metodologija za analizu vremenskih serija – kada su te serije suštinski i direktno povezane, može se koristiti u različitim kontekstima. Primjerice, može se primijeniti za analizu protoka vode i generiranja električne energije kod nuklearnog reaktora, ili za proučavanje raspodjele temperature u šoljici kave tijekom kružnog miješanja žlicom u određenom smjeru. Istovremeno, ista metodologija se pokazala korisnom za analizu dinamike i povezanosti makroekonomije EU ili svijeta, posebno kada su u pitanju određene međusobno povezane varijable. Pomenuta sposobnost prilagodbe i široka primjenjivost čini metodologiju istraživanja izuzetno relevantnom i inovativnom u raznim disciplinama.

Nadamo se da smo kroz pružene odgovore na postavljene hipoteze i istraživačka pitanja uspjeli da dočaramo srž ovog istraživanja. Ako bih kojim slučajem trebao u jednoj rečenici sublimirati cjelokupnu ideju, motivaciju, pogled na ovo istraživanje to bi zasigurno bio sljedeći citat čuvenog Aleksandra Fleminga<sup>198</sup>: „Najveća otkrića često ne leže u pronalaženju novih stvari, već u viđenju poznatih stvari na nove načine.”.

---

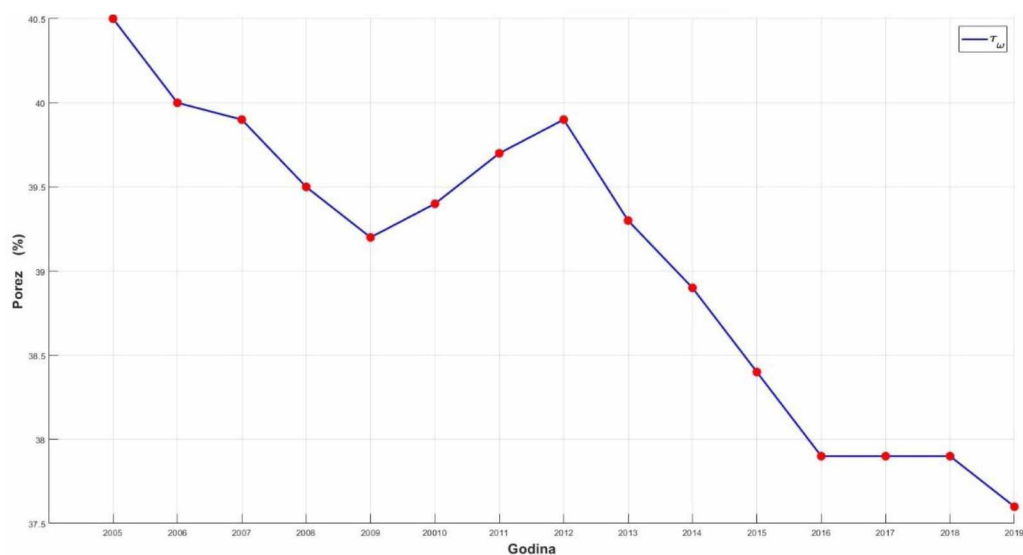
<sup>198</sup> Ser Aleksander Fleming (6. avgust 1881. – 11. mart 1955.) je bio škotski ljekar i mikrobiolog, najpoznatiji po otkriću prve široko-efikasne antibiotske supstance na svijetu, koja je spasila živote milionima, a koju je nazvao *penicilin*.

## **PRILOG**

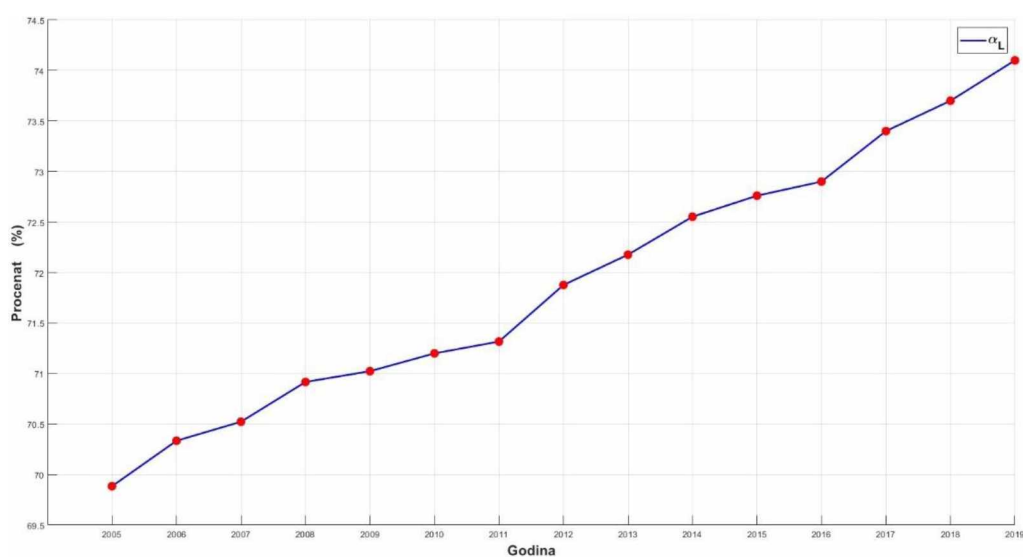
## PRILOG A

### Egzogene varijable<sup>199</sup>

**Prilog 1** – Prosječna vrijednost poreza na dohodak –  $\tau_{\omega}$  (%)

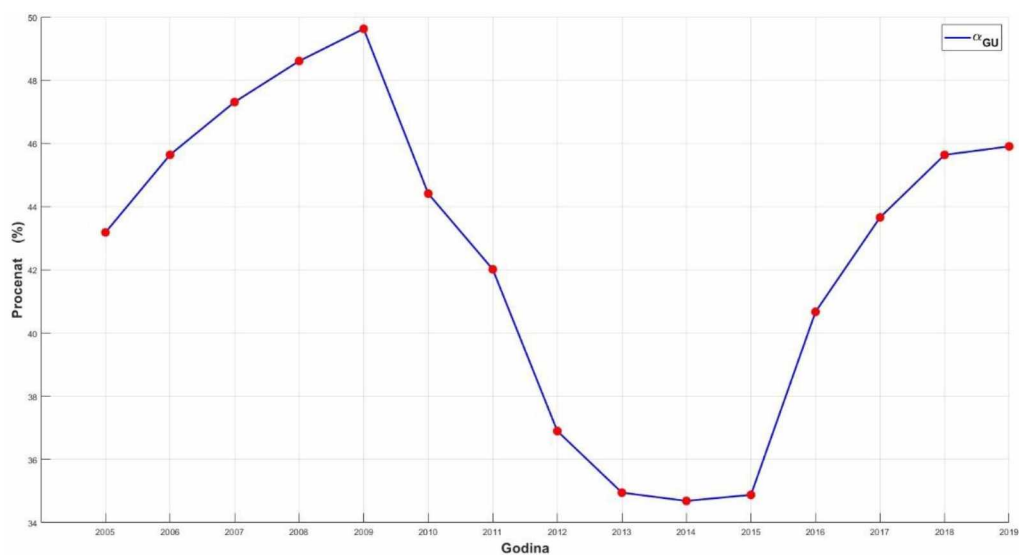


**Prilog 2** – Zaposleni od radno sposobne populacije –  $L_1$  (%)

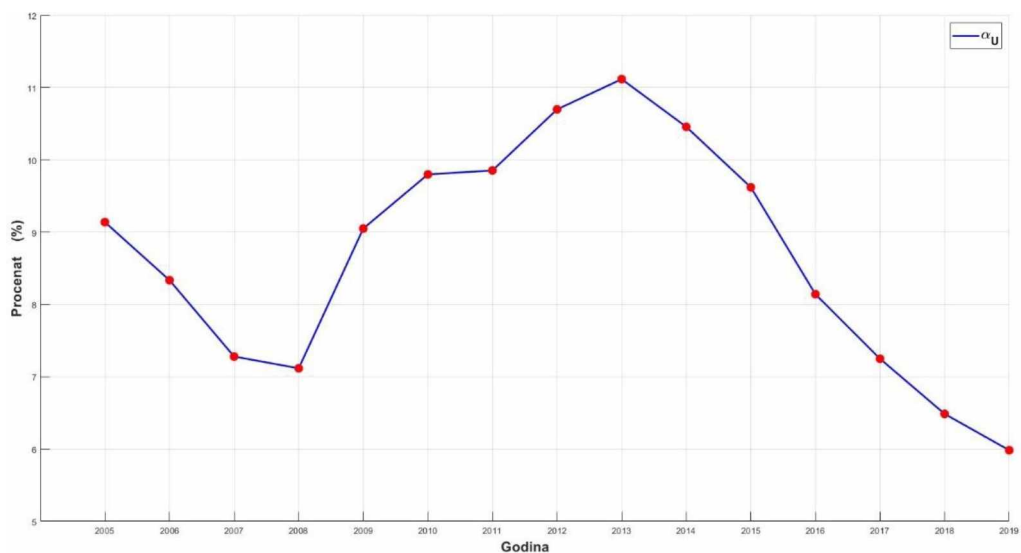


<sup>199</sup> Grafici u *Prilogu A* su urađeni u programskom paketu MATLAB R2023b.

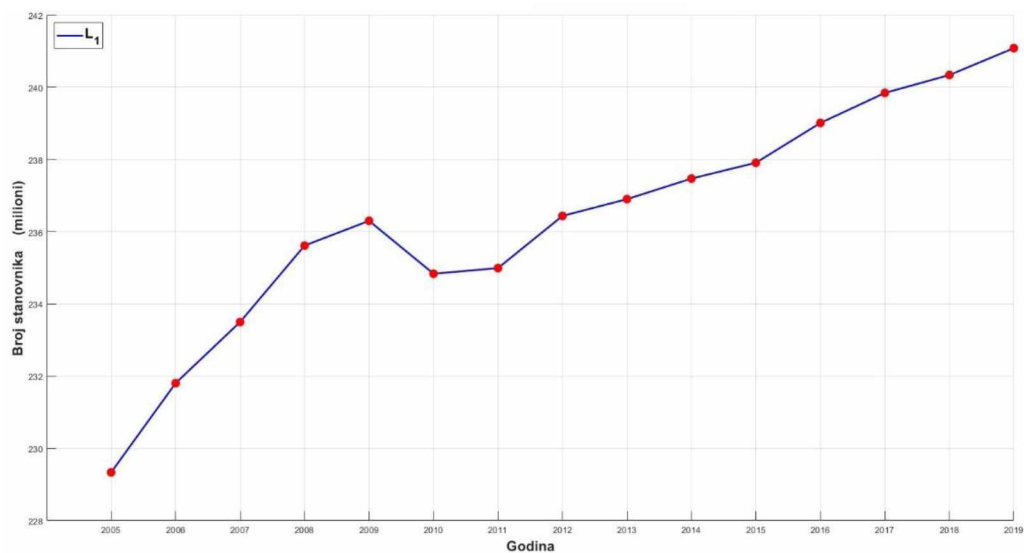
**Prilog 3 –** Procenat prosječne plate koji se izdvaja za nezaposlene –  $\alpha_{GU}$  (%)



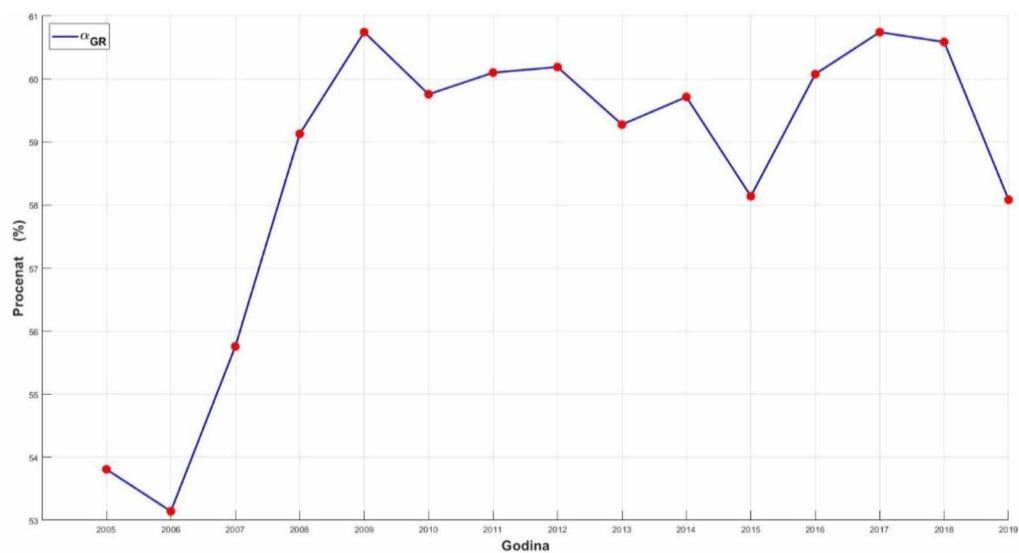
**Prilog 4 –** Procenat nezaposlenih od radno sposobnog stanovništva –  $\alpha_U$  (%)



**Prilog 5 – Radno sposobno stanovništvo u EU28 –  $L_1$  (miliona)**

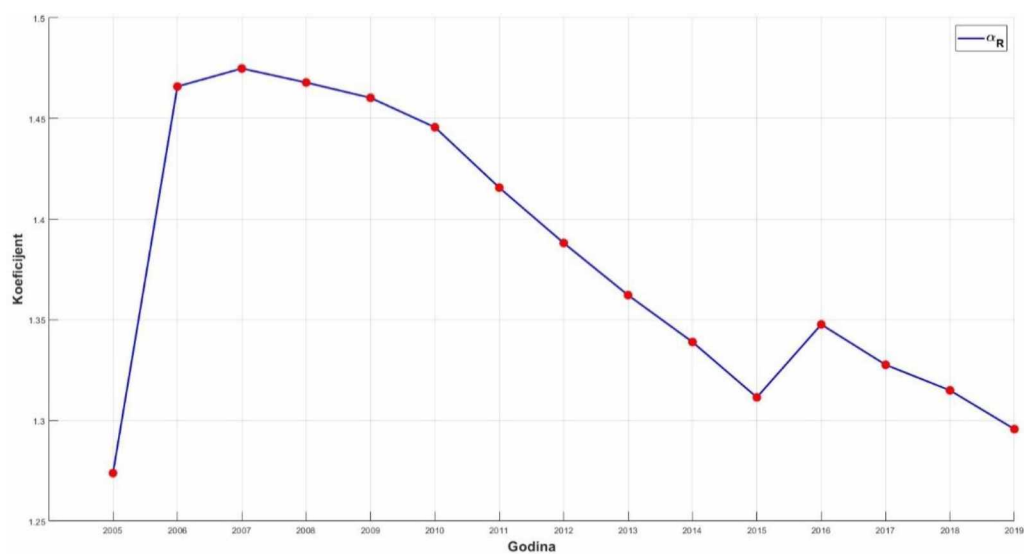


**Prilog 6 – Procenat prosječne plate koja se izdvaja za penzije i socijalna davanja –  $\alpha_{GR}$  (%)**

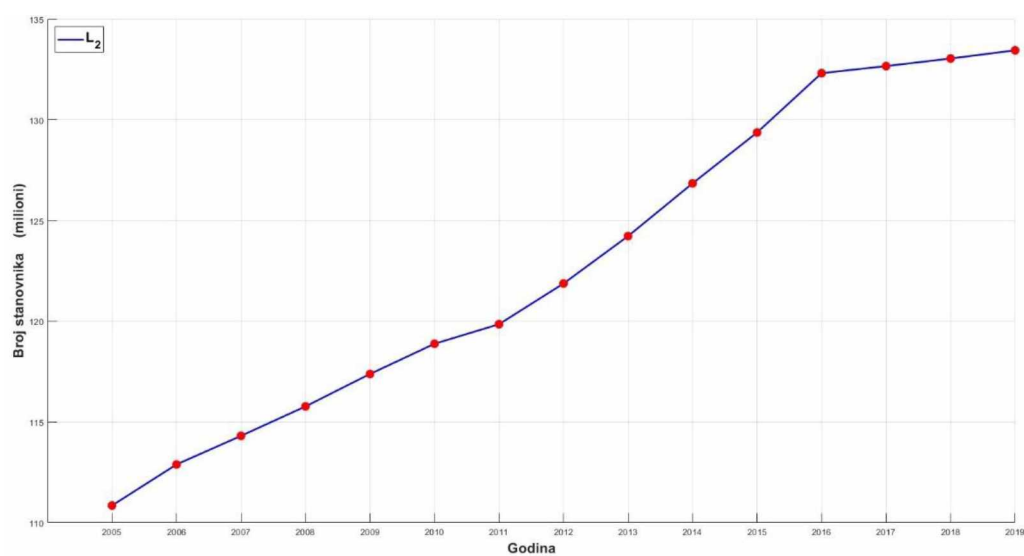




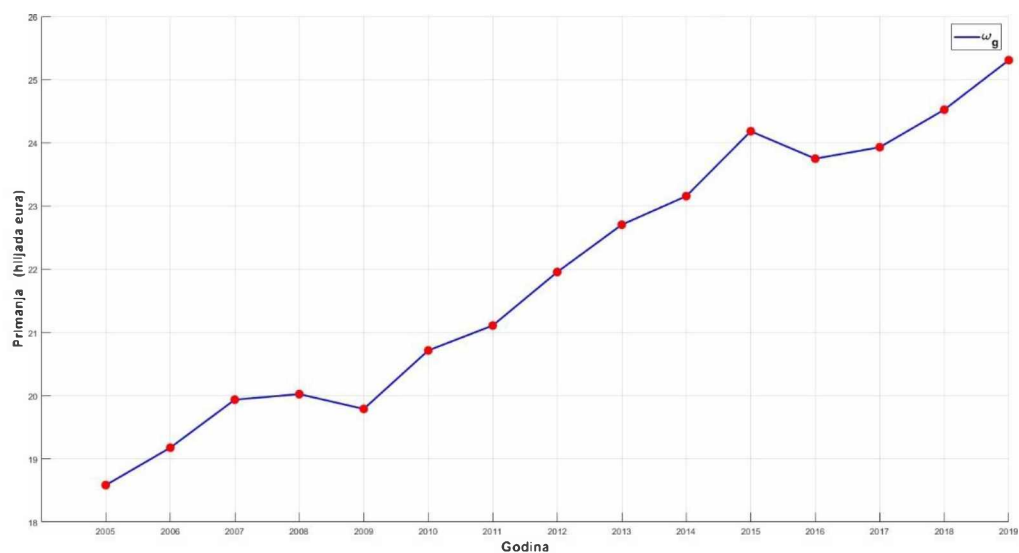
**Prilog 7** – Procenat 64+ stanovništva spram  $L_1$  koji su u penziji ili radno nesposobni i primaju naknadu –  $\alpha_R$  (%)



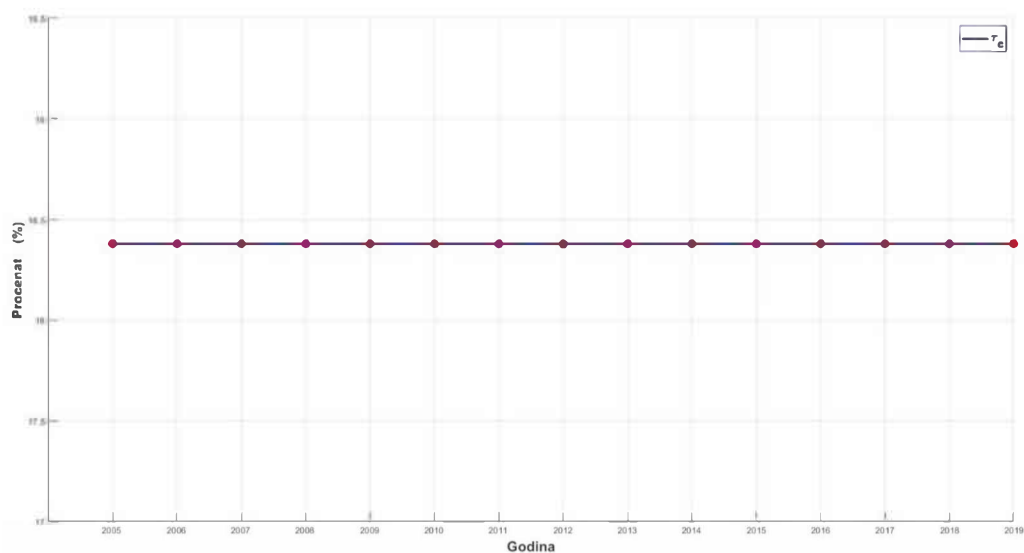
**Prilog 8** – Stanovništvo starije od 64 godine –  $L_2$  (milijonima)



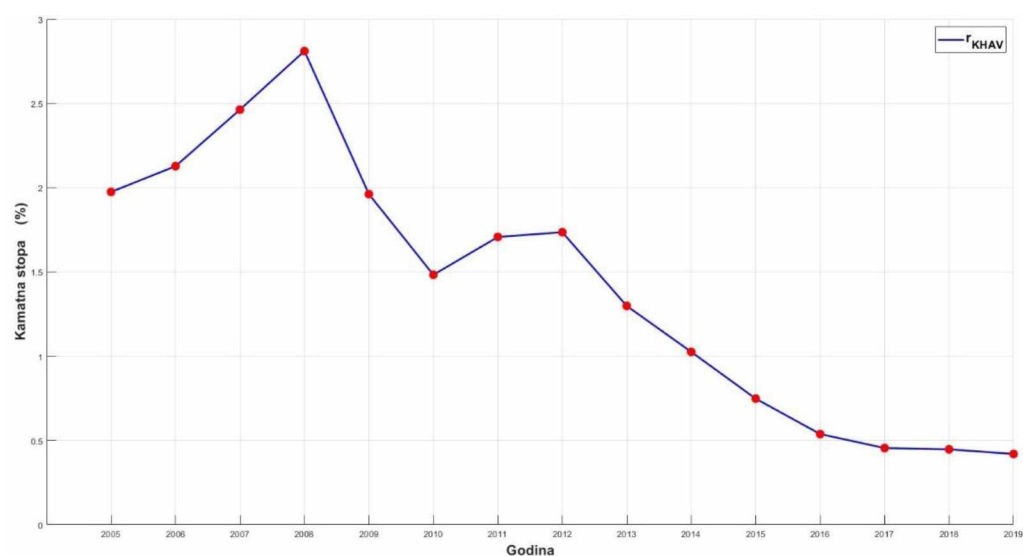
**Prilog 9** – Ponderisana primanja per-capita –  $\omega_g$  (hiljada eura)



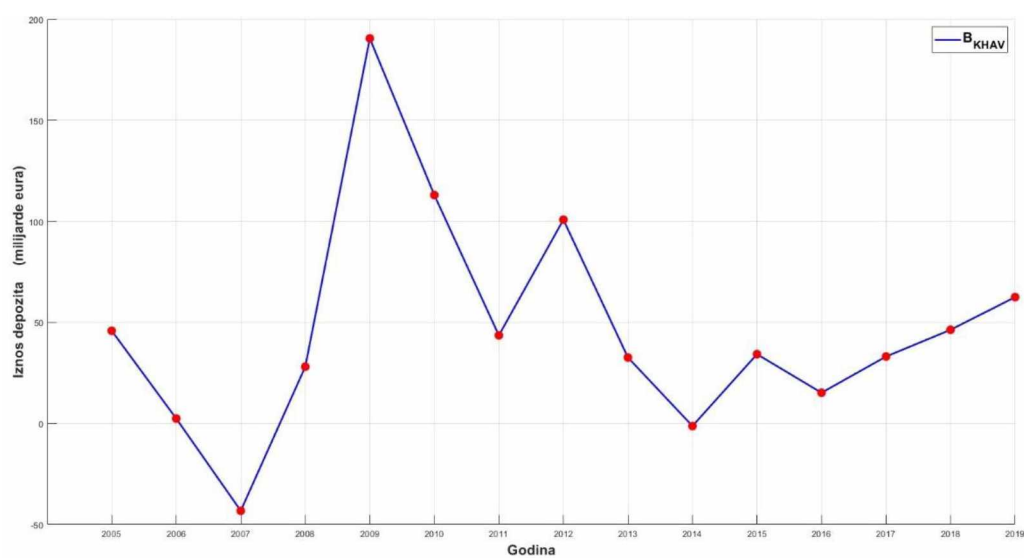
**Prilog 10** – Prosjek poreza na kapitalnu dobit svih država u EU28 –  $\tau_c$  (%)



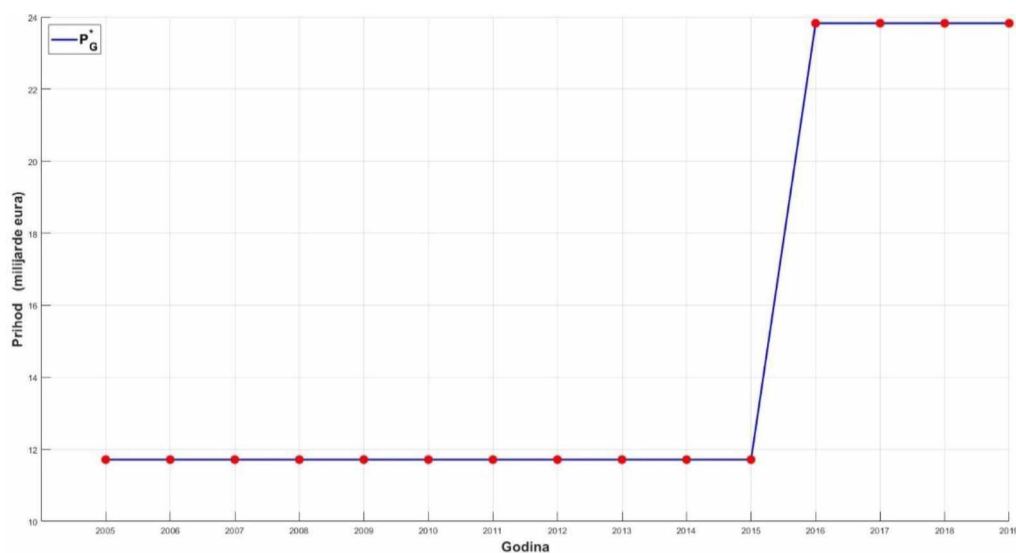
**Prilog 11** – Prosječna kamatna stopa na depozite do 1 godine –  $r_{KHAV}$  (%)



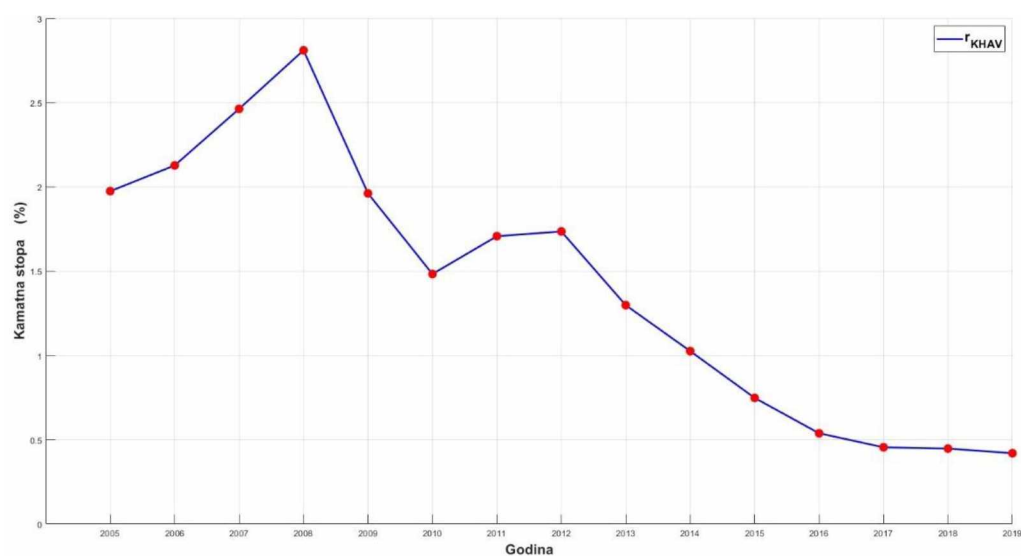
**Prilog 12** – Depoziti EU28 stanovništva do 1 godine (milijarde eura) –  $B_{KHAV}$  (%)



**Prilog 13** – Prihod od stranih obveznica za EU28 stanovništvo (milijarde eura) 200 –  $P_G^*$

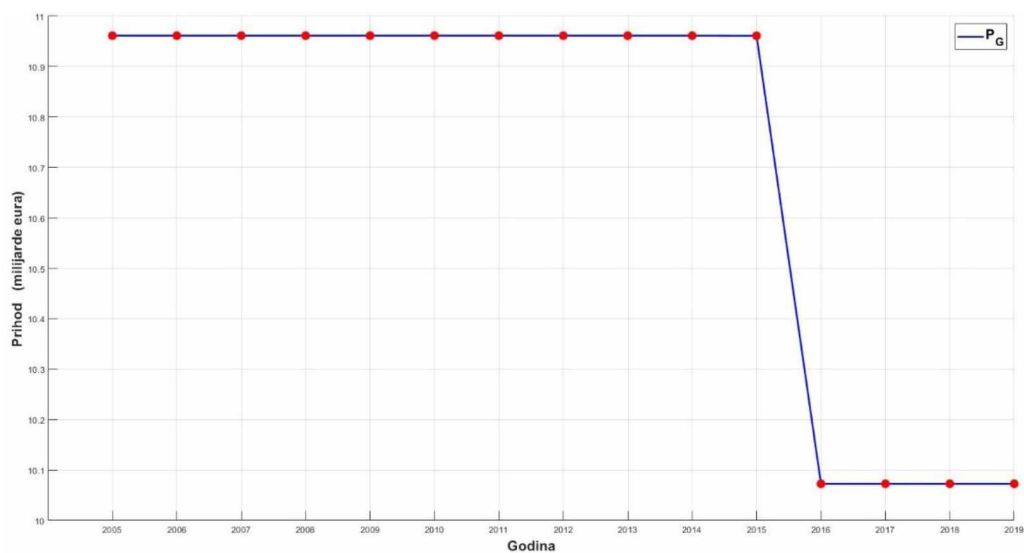


**Prilog 14** – Prosječna kamatna stopa za ulaganja u strane kratkoročne oročene depozite ili ekvivalentne obveznice –  $r_{KH}$  (%)

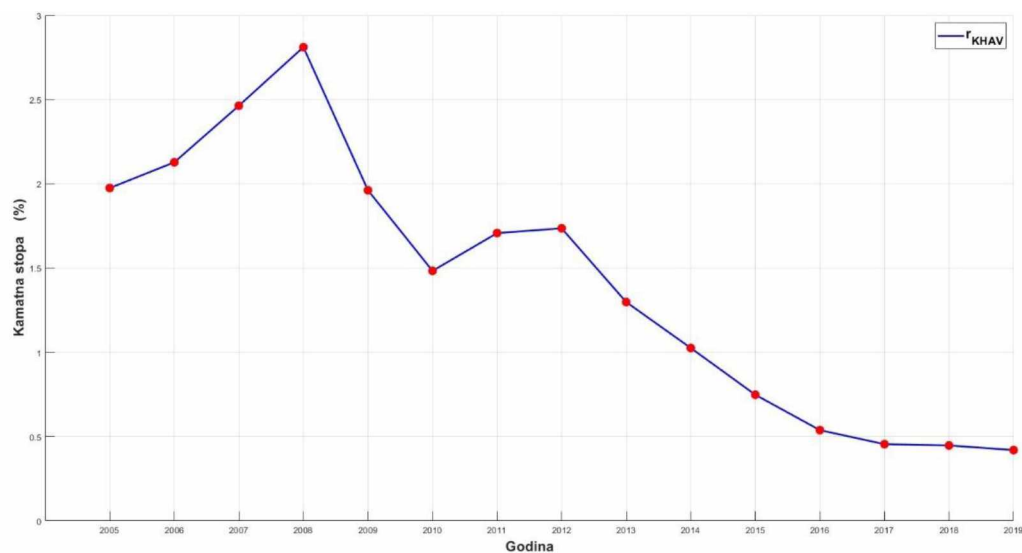


<sup>200</sup> Pojedine godine imaju istu vrijednost, jer doslovce su takvi i originalni podaci preuzeti sa Eurostata ili ECB SDW. Navedeno vrijedi za sve grafike iz cijelog *Priloga*, a koji imaju predmetne karakteristike.

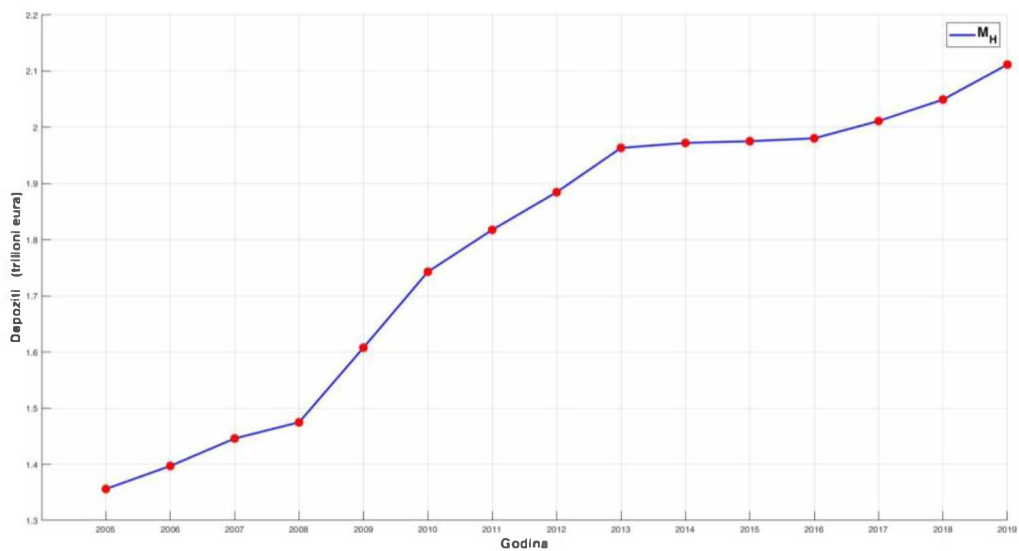
**Prilog 15 – Prihod od domaćih obveznica za EU28 stanovništvo (milijarde eura) –  $P_G$**



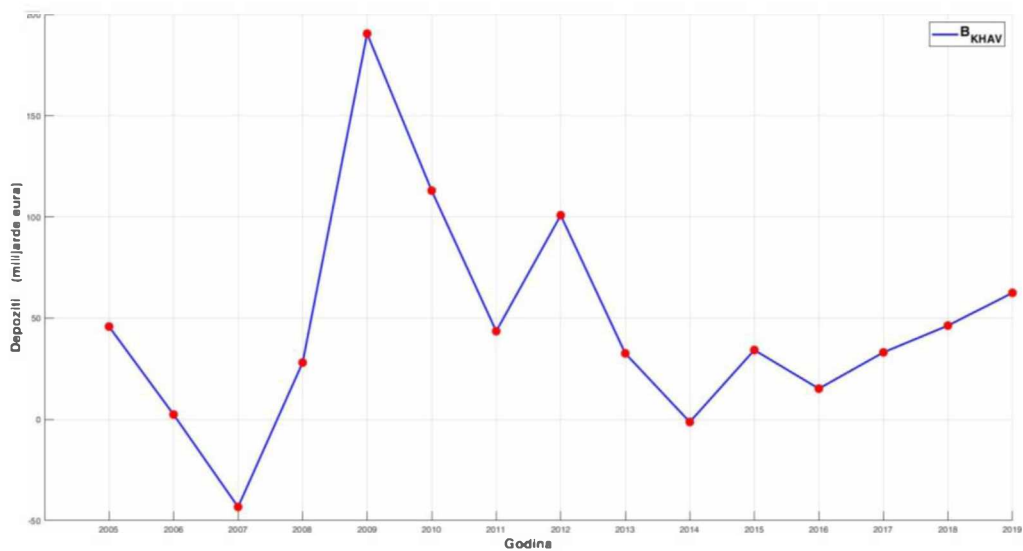
**Prilog 16 – Prosječna kamatna stopa na depozite do 1 godine –  $r_{KHAV}$  (%)**



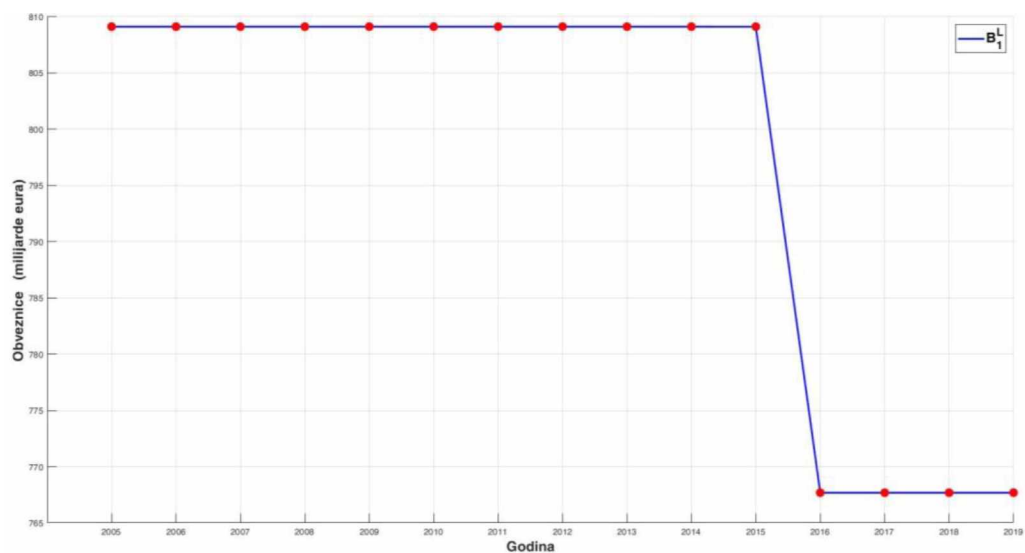
**Prilog 17** – Neuročeni (po viđenju) depoziti stanovništva EU28 (trilioni eura) –  $M_H$



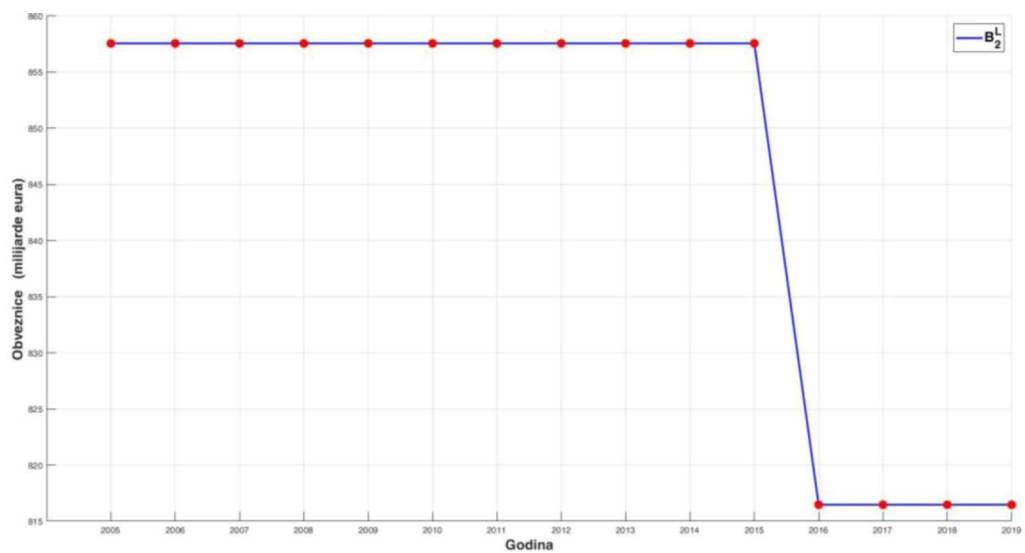
**Prilog 18** – Depoziti do 3 mjeseca EU28 stanovništva (milijarde eura) –  $B_{KHAV}$



**Prilog 19** – Obveznice sa ročnošću većom od 1 godine u EU28 (milijarde eura) –  $B_1^L$

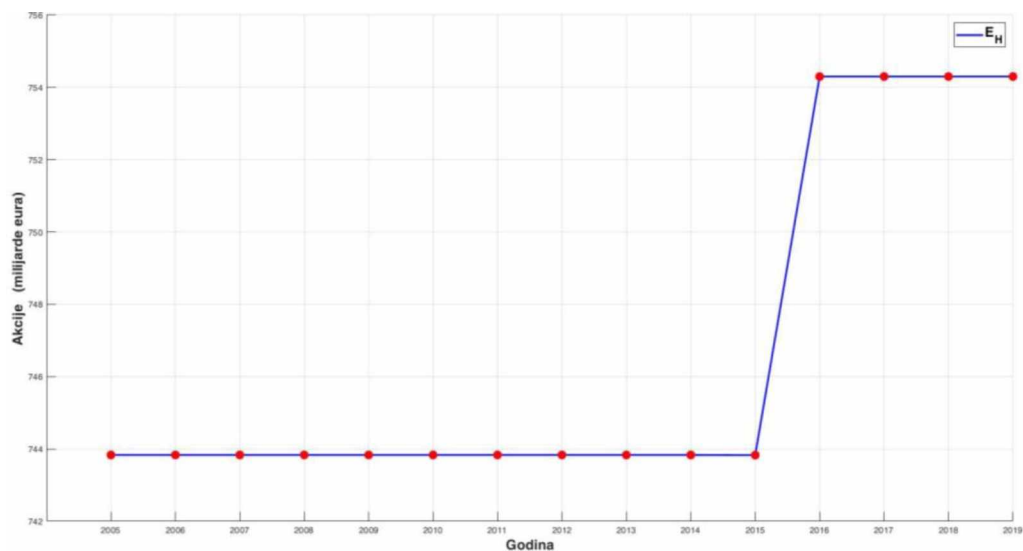


**Prilog 20** – Obveznice sa ročnošću većom od 1 godine izvan EU28 (milijarde eura) –  $B_2^L$

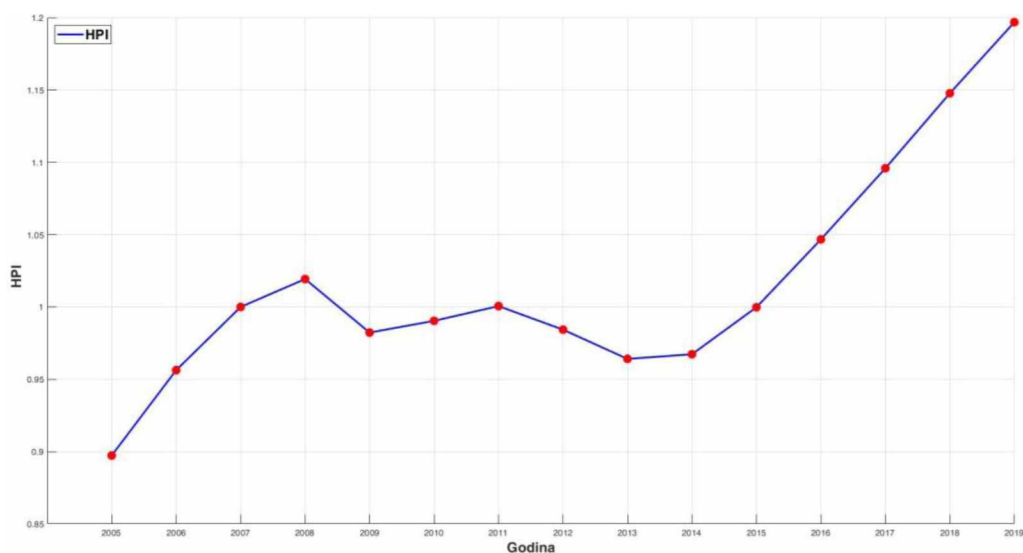




**Prilog 21 – Vlasništvo akcija u kompanijama za EU28 (milijarde eura) –  $E_H$**

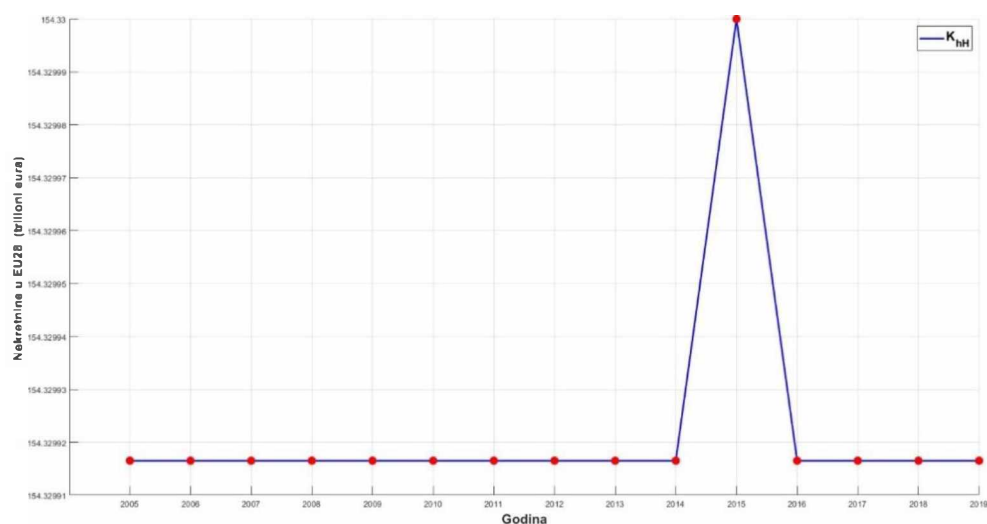


**Prilog 22 – Housing Price Index (HPI)<sup>201</sup> za EU28 (milijarde eura) –  $H_{PI}$**



<sup>201</sup> Index cijena nekretnina u EU28, pokazuje kolika je apresicijacija odnosno depresicijacija cijena nekretnina u EU.

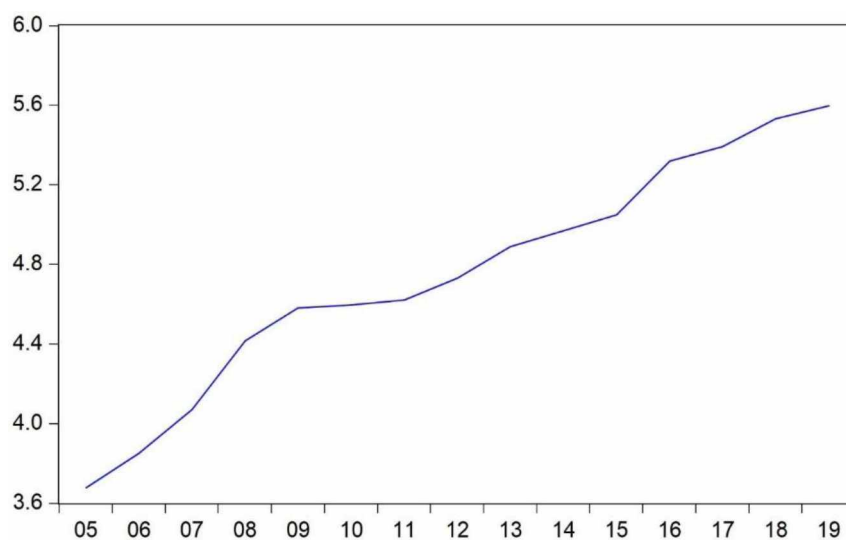
**Prilog 23** – Prosječna agregatna vrijednost nekretnina u EU28 (trilioni eura) –  $K_{hH}$



## PRILOG B

### Endogene varijable<sup>202</sup>

**Prilog 24** – Agregatni dohodak za EU28 stanovništvo (trilioni eura) –  $Y_H$



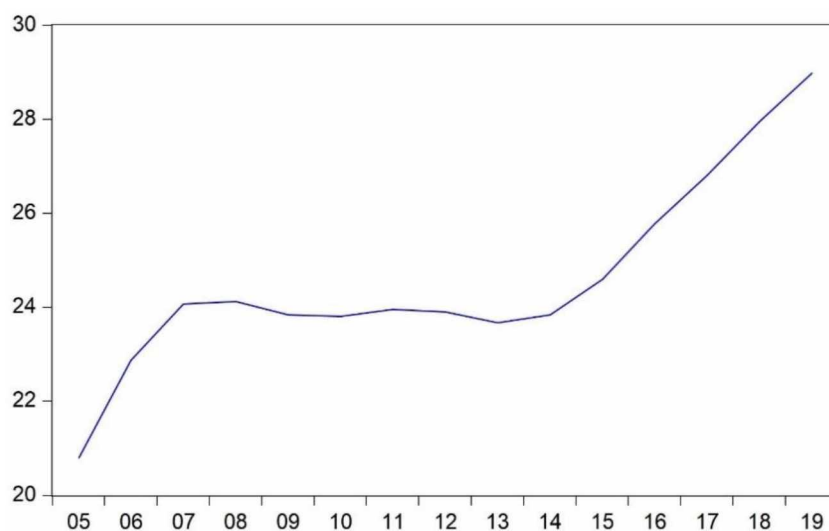
**Prilog 25** – Agregatni imetak za EU28 stanovništvo (trilioni eura) –  $W_H$



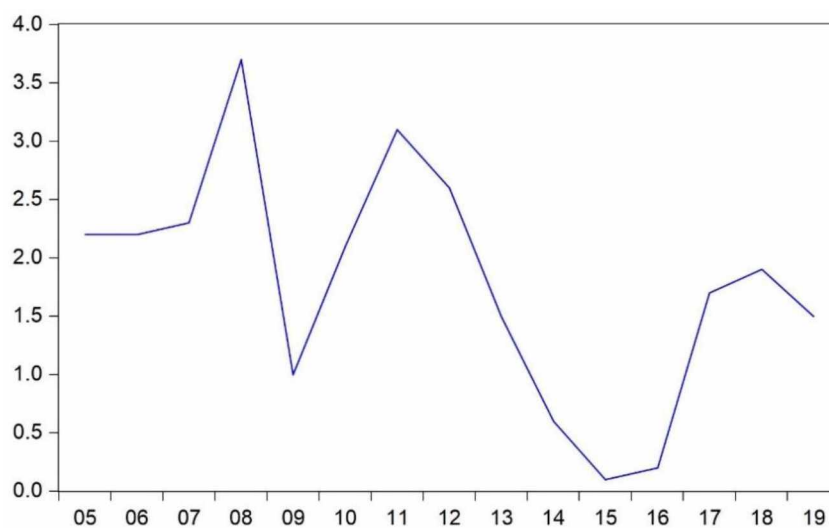
---

<sup>202</sup> Grafici u *Prilogu B* su urađeni u programu EViews 10.0 i 10.2.

**Prilog 26** – Agregatno raspoloživa potrošnja za EU28 stanovništvo (trilioni eura) –  $C_H$



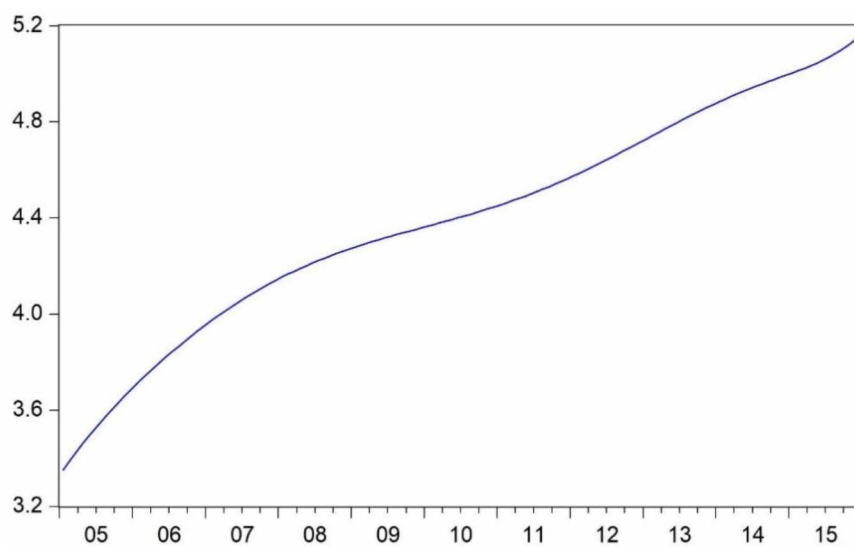
**Prilog 27** – Harmonized Index of Consumer Prices (HICP) (inflacija) za EU28 stanovništvo (%) –  $HICP$



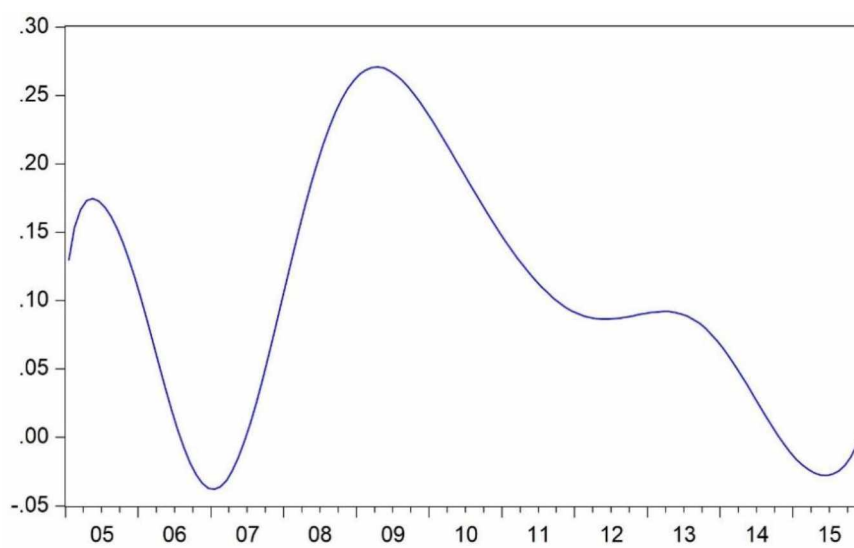
## PRILOG C

### Egzogene i endogene varijable za 3D ( $HICP - r_l$ i $Y_H$ ), 4D i 7D modele (sisteme)

**Prilog 28** – Dohodovna komponenta agregatnog dohotka u EU28 (trilioni eura) –  $Y_{HS1}$

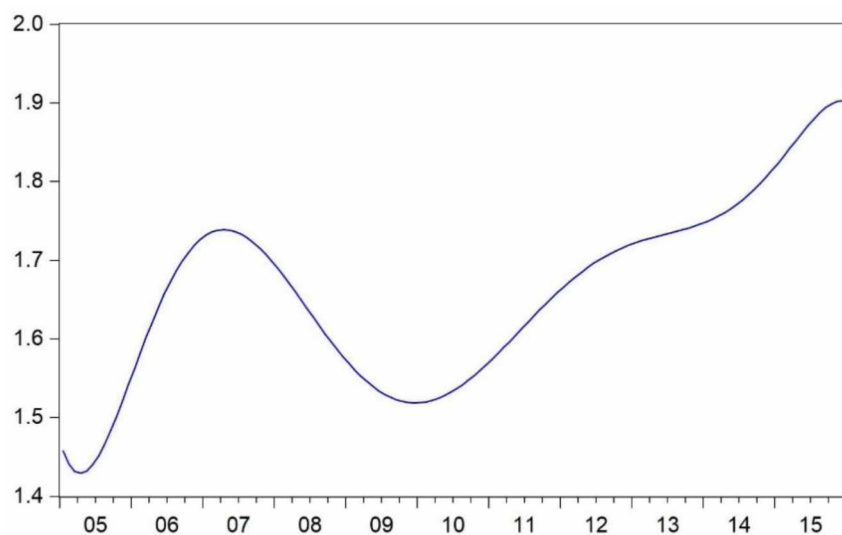


**Prilog 29** – Kapitalna komponenta agregatnog dohotka u EU28 (trilioni eura) –  $Y_{HS2}$



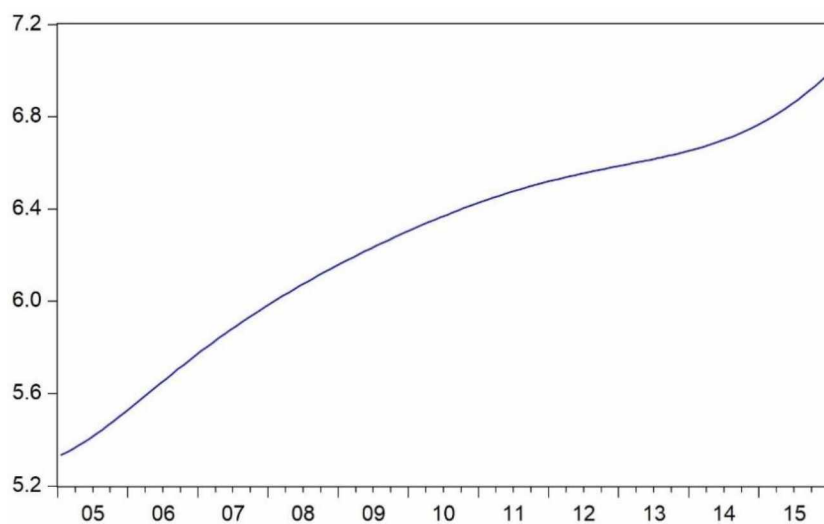
**Prilog 30** – Ukupni prihodi „EU28 vlade” (EC) po raznim osnovama (trilioni eura) –

$G_{R_{TOT}}$

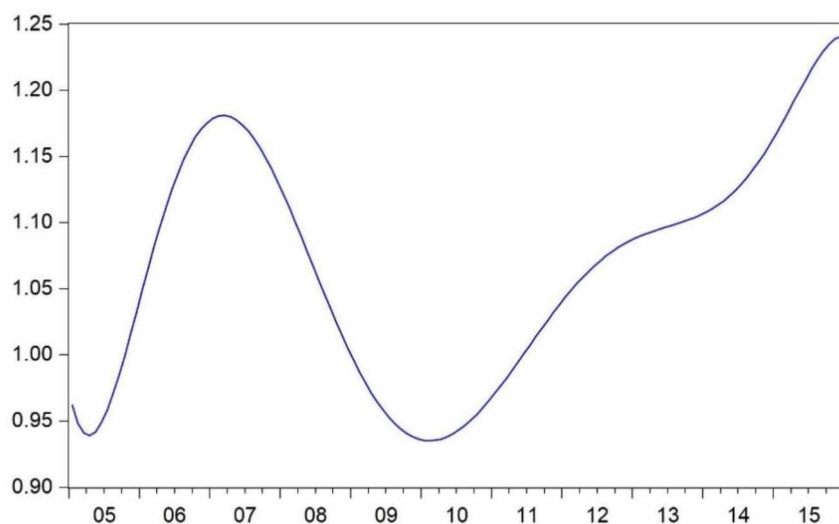


**Prilog 31** – Ukupni rashodi „EU28 vlade” (EC) po raznim osnovama (trilioni eura) –

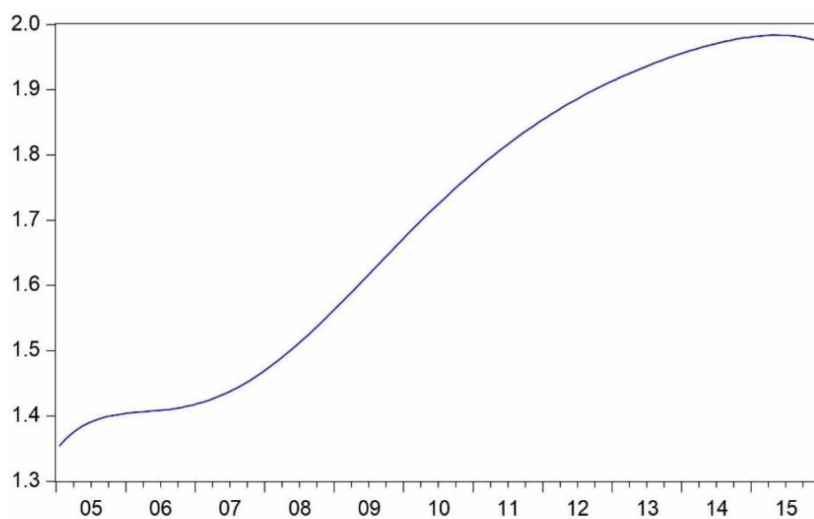
$G_{E_{TOT}}$



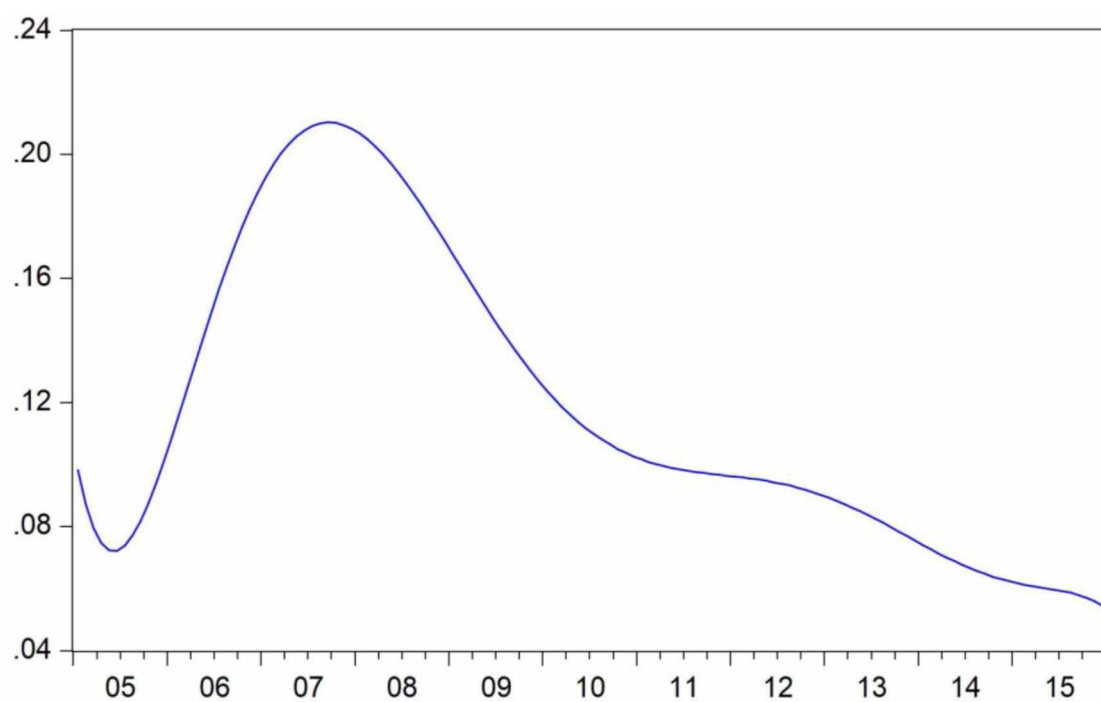
**Prilog 32** – Ukupno prikupljeni porezi od „EU28 vlade” (EC) (trilioni eura) –  $T_{TOT}$



**Prilog 33** – Neoročeni (po viđenju) depoziti EU28 stanovništva (trilioni eura) –  $M_H$



**Prilog 34** – Oročeni depoziti do 1 godine EU28 stanovništva (trilioni eura) –  $B_H$





## PRILOG D

## Statistički pregled rezultata regresija i fitovanja promjena (izvoda)

Prilog 35 – Regresioni rezultati za 3D sistem –  $Y_H$ ,  $W_H$  i  $C_H$ 

System: SISTEM\_Y\_H\_W\_H\_C\_H\_OMEGA12  
 Estimation Method: Least Squares  
 Date: 05/31/20 Time: 16:53  
 Sample: 2005M01 2015M12  
 Included observations: 132  
 Total system (balanced) observations 396

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(13)	8.456870	0.468123	18.06550	0.0000
C(14)	-53.12645	2.966620	-17.90807	0.0000
C(15)	13.52536	0.793217	17.05127	0.0000
C(17)	-0.690104	0.037671	-18.31935	0.0000
C(111)	-0.138525	0.008101	-17.10030	0.0000
C(115)	0.196120	0.011133	17.61660	0.0000
C(22)	-337.8577	32.02657	-10.54929	0.0000
C(25)	20.90114	2.115921	9.878033	0.0000
C(27)	4.879237	0.442360	11.03001	0.0000
C(214)	-0.002878	0.000258	-11.14813	0.0000
C(32)	-48.02843	6.195128	-7.752614	0.0000
C(33)	0.459277	0.043437	10.57337	0.0000
C(311)	0.021148	0.002186	9.673008	0.0000
C(312)	-0.002090	0.000270	-7.752049	0.0000
C(317)	0.436779	0.075587	5.778520	0.0000

Determinant residual covariance 0.000335

Equation:  $X\_DOT = C(13)*Y + C(14)*Z + C(15)*X^2 + C(17)*Z^2 + C(111)*X^2*Y + C(115)*Z^2*X$

Observations: 132

R-squared	0.823086	Mean dependent var	0.172275
Adjusted R-squared	0.816066	S.D. dependent var	0.153112
S.E. of regression	0.065666	Sum squared resid	0.543318
Durbin-Watson stat	0.071262		

Equation:  $Y\_DOT = C(22)*X + C(25)*X^2 + C(27)*Z^2 + C(214)*Y^2*Z$

Observations: 132

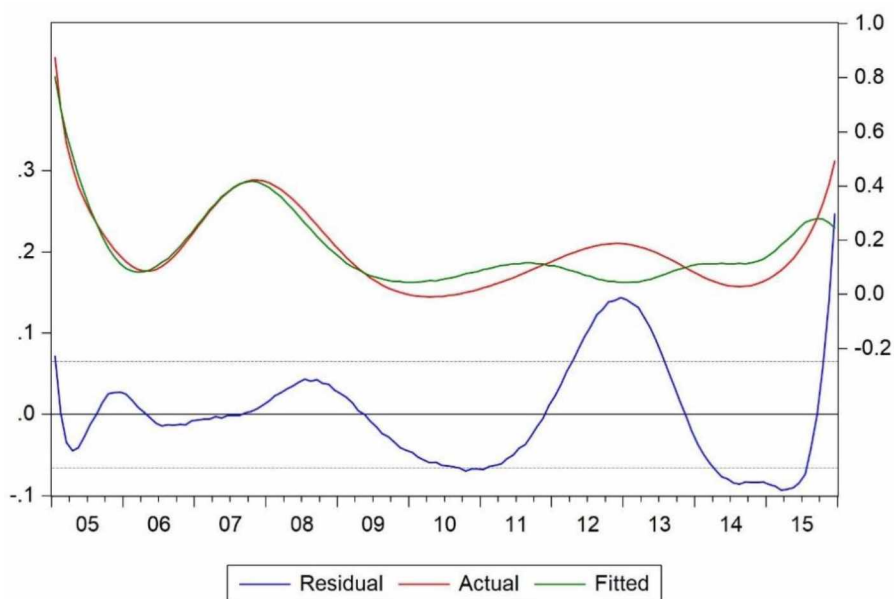
R-squared	0.626367	Mean dependent var	2.237997
Adjusted R-squared	0.617610	S.D. dependent var	6.888352
S.E. of regression	4.259597	Sum squared resid	2322.453
Durbin-Watson stat	0.153435		

Equation:  $Z\_DOT = C(32)*X + C(33)*Y + C(311)*X^2*Y + C(312)*Y^2*X + C(317)*X*Y$

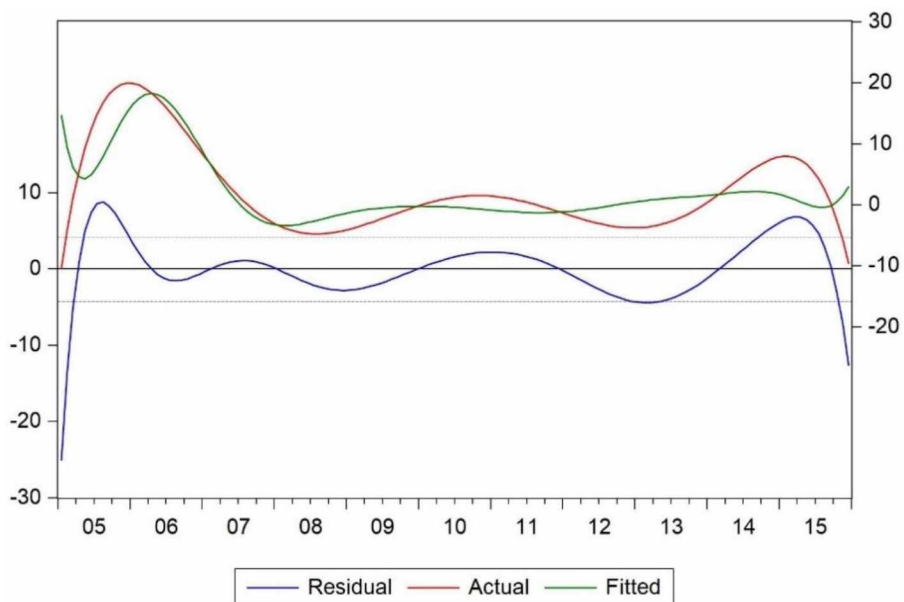
Observations: 132

R-squared	0.675471	Mean dependent var	0.435461
Adjusted R-squared	0.665249	S.D. dependent var	0.859661
S.E. of regression	0.497380	Sum squared resid	31.41807
Durbin-Watson stat	0.135695		

**Prilog 36** – Fitovanje promjena (izvoda) za agregatni dohodak<sup>203</sup> (3D sistem) –  $Y_H$

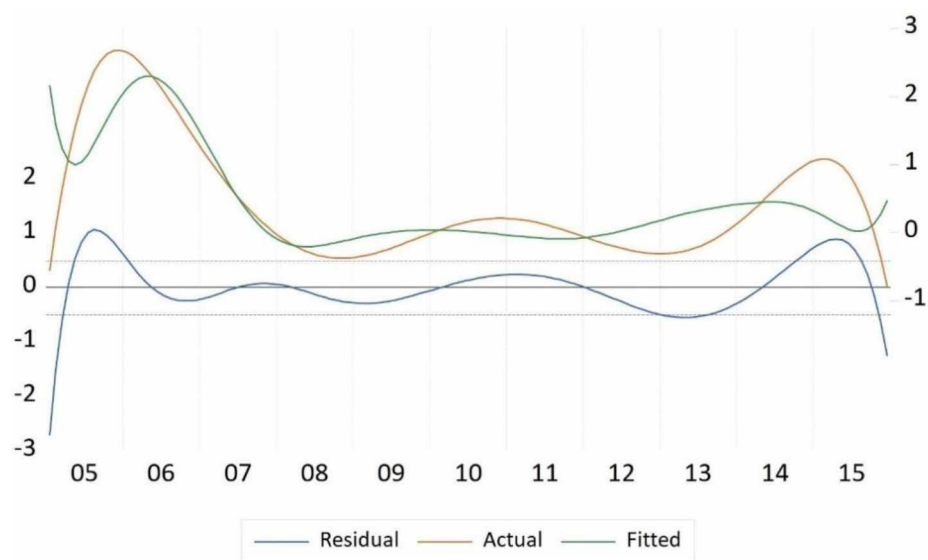


**Prilog 37** – Fitovanje promjena (izvoda) za agregatni imetak (3D sistem) –  $W_H$



<sup>203</sup> Svi iznosi na graficima u Prilogu D su u trilionima eura.

**Prilog 38** – Fitovanje promjena (izvoda) za raspoloživu potrošnju (3D sistem) –  $C_H$



**Prilog 39 – Regresioni rezultati za 3D sistem –  $HICP, r_L$  i  $Y_H$** 

System: HICP\_R\_L\_Y\_H  
 Estimation Method: Least Squares  
 Date: 03/04/20 Time: 15:52  
 Sample: 2005M01 2015M12  
 Included observations: 132  
 Total system (balanced) observations 396

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob
C(11)	124.7201	2.761430	45.16502	0.0000
C(12)	232.2511	7.359877	31.55638	0.0000
C(13)	-663.8254	14.79294	-44.87448	0.0000
C(15)	192.3432	5.071936	37.92303	0.0000
C(16)	322.0723	7.233621	44.52435	0.0000
C(17)	-4.500672	0.069622	-64.64461	0.0000
C(18)	-35.17894	0.943208	-37.29710	0.0000
C(19)	-35.43437	0.801657	-44.20140	0.0000
C(111)	33.86826	0.784375	43.17868	0.0000
C(112)	-1.349302	0.127643	-10.57089	0.0000
C(113)	4.896415	0.195372	25.06197	0.0000
C(115)	22.44812	0.333685	67.27347	0.0000
C(116)	-132.9190	2.638121	-50.38396	0.0000
C(117)	-247.3291	4.081403	-60.59904	0.0000
C(21)	60.03355	1.358376	44.19508	0.0000
C(22)	117.2451	3.620400	32.38456	0.0000
C(23)	-321.1527	7.276800	-44.13378	0.0000
C(25)	92.67701	2.494938	37.14602	0.0000
C(26)	156.1122	3.558293	43.87276	0.0000
C(27)	-2.138844	0.034248	-62.45224	0.0000
C(28)	-17.16369	0.463974	-36.99277	0.0000
C(29)	-17.19085	0.394343	-43.59360	0.0000
C(211)	16.46711	0.385842	42.67837	0.0000
C(212)	-0.777882	0.062789	-12.38883	0.0000
C(213)	2.645586	0.096106	27.52788	0.0000
C(215)	10.99525	0.164143	66.98584	0.0000
C(216)	-64.08186	1.297719	-49.38037	0.0000
C(217)	-121.8028	2.007684	-60.66832	0.0000
C(31)	-20.63163	0.734354	-28.09493	0.0000
C(32)	-13.09219	1.026649	-12.75235	0.0000
C(33)	55.05474	1.050665	52.39990	0.0000
C(35)	-24.37194	0.804147	-30.30781	0.0000
C(36)	-29.17864	0.652673	-44.70638	0.0000
C(37)	0.281031	0.041913	6.705068	0.0000
C(38)	3.955891	0.128778	30.71872	0.0000
C(39)	3.375874	0.079851	42.27732	0.0000
C(310)	0.757932	0.067355	11.25285	0.0000
C(311)	-4.466876	0.123516	-36.16427	0.0000
C(312)	-0.222168	0.012979	-17.11762	0.0000
C(314)	0.177323	0.008150	21.75734	0.0000
C(315)	-2.988597	0.043356	-68.93099	0.0000
C(316)	17.93262	0.514906	34.82698	0.0000
C(317)	27.27939	0.384204	71.00241	0.0000

Determinant residual covariance 6.85E-13

Equation  $X\_DOT = C(11)*X + C(12)*Y + C(13)*Z + C(15)*Y^2 + C(16)*Z^2 + C(17)*X^3 + C(18)*Y^3 + C(19)*Z^3 + C(111)*Y^2*X + C(112)*X^2*Z + C(113)*Y^2*Z + C(115)*Z^2*Y + C(116)*X*Y + C(117)*Y*Z$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.993204 Mean dependent var -0.236843  
 Adjusted R-squared 0.992455 S.D. dependent var 1.053345  
 S.E. of regression 0.091494 Sum squared resid 0.987803  
 Durbin-Watson stat 0.527414

Equation  $Y\_DOT = C(21)*X + C(22)*Y + C(23)*Z + C(25)*Y^2 + C(26)*Z^2 + C(27)*X^3 + C(28)*Y^3 + C(29)*Z^3 + C(211)*Y^2*X + C(212)*X^2*Z + C(213)*Y^2*Z + C(215)*Z^2*Y + C(216)*X*Y + C(217)*Y*Z$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.995509 Mean dependent var -0.232370  
 Adjusted R-squared 0.995015 S.D. dependent var 0.637435  
 S.E. of regression 0.045007 Sum squared resid 0.239024  
 Durbin-Watson stat 0.502015

Equation  $Z\_DOT = C(31)*X + C(32)*Y + C(33)*Z + C(35)*Y^2 + C(36)*Z^2 + C(37)*X^3 + C(38)*Y^3 + C(39)*Z^3 + C(310)*X^2*Y + C(311)*Y^2*X + C(312)*X^2*Z + C(314)*Z^2*X + C(315)*Z^2*Y + C(316)*X*Y + C(317)*Y*Z$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.995898 Mean dependent var 0.172275  
 Adjusted R-squared 0.995407 S.D. dependent var 0.153112  
 S.E. of regression 0.010377 Sum squared resid 0.012599  
 Durbin-Watson stat 0.740240

Prilog 40 – Regresioni rezultati za 4D sistem –  $Y_{HS1}$ ,  $G_{TOT}$ ,  $G_{ETOT}$  i  $M_H$ 

System: SISTEM\_4D  
 Estimation Method: Least Squares  
 Date: 08/07/20 Time: 08:22  
 Sample: 2005M01 2015M12  
 Included observations: 132  
 Total system (balanced) observations 528

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(104)	9.721028	0.905111	10.74015	0.0000
C(106)	-17.85003	3.316252	-5.382591	0.0000
C(108)	0.829946	0.042715	19.42978	0.0000
C(110)	12.81923	0.708935	18.08238	0.0000
C(111)	-2.184711	0.165909	-13.16813	0.0000
C(143)	-8.723043	0.526785	-16.55903	0.0000
C(145)	-4.422653	0.332928	-13.28410	0.0000
C(138)	7.148080	0.822094	8.694971	0.0000
C(163)	-2.695858	0.138811	-19.42110	0.0000
C(171)	1.492735	0.078167	19.09682	0.0000
C(173)	-0.503483	0.045729	-11.01019	0.0000
C(301)	24.28637	0.633973	38.30824	0.0000
C(303)	-17.67120	0.824977	-21.42023	0.0000
C(308)	-1.780690	0.086033	-20.69780	0.0000
C(311)	-1.764829	0.041534	-42.49085	0.0000
C(313)	-35.74632	0.717908	-49.79235	0.0000
C(343)	4.542497	0.146399	31.02816	0.0000
C(352)	-0.617137	0.028443	-21.69723	0.0000
C(383)	-1.266497	0.176824	-7.162455	0.0000
C(384)	5.933780	0.116983	50.72345	0.0000
C(408)	-0.618043	0.031826	-19.41942	0.0000
C(415)	0.044814	0.002421	18.51172	0.0000
C(420)	-0.879715	0.041871	-21.01006	0.0000
C(435)	1.618297	0.081376	19.88656	0.0000
C(463)	0.049062	0.002020	24.29284	0.0000
C(601)	-5.838455	0.202600	-28.81766	0.0000
C(603)	-6.025979	0.221519	-27.20293	0.0000
C(604)	3.030145	0.118765	25.51381	0.0000
C(611)	0.140591	0.027100	5.187961	0.0000
C(632)	3.838444	0.134889	28.45623	0.0000
C(645)	0.782945	0.238459	3.283350	0.0011
C(638)	-0.225244	0.060091	-3.748397	0.0002
C(663)	-0.291762	0.021810	-13.37726	0.0000
C(671)	-0.199864	0.011953	-16.72069	0.0000

Determinant residual covariance 5.11E-17

Equation:  $X1\_DOT = C(104)*X4 + C(106)*X6 + C(108)*X1^2 + C(110)*X3^2 + C(111)*X4^2 + C(143)*X3*X4 + C(145)*X3*X6 + C(138)*X4*X6 + C(163)*X3^2*X1 + C(171)*X4^2*X3 + C(173)*X4^2*X6$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.992979 Mean dependent var 0.182168  
 Adjusted R-squared 0.992398 S.D. dependent var 0.088694  
 S.E. of regression 0.007733 Sum squared resid 0.007236  
 Durbin-Watson stat 0.076287

Equation:  $X3\_DOT = C(301)*X1 + C(303)*X3 + C(308)*X1^2 + C(311)*X4^2 + C(313)*X6^2 + C(343)*X3*X4 + C(352)*X1^2*X3 + C(383)*X6^2*X3 + C(384)*X6^2*X4$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.971575 Mean dependent var 0.043025  
 Adjusted R-squared 0.969726 S.D. dependent var 0.105928  
 S.E. of regression 0.018431 Sum squared resid 0.041783  
 Durbin-Watson stat 0.083414

Equation:  $X4\_DOT = C(408)*X1^2 + C(415)*X1^3 + C(420)*X6^3 + C(435)*X1*X6 + C(463)*X3^2*X1$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.909741 Mean dependent var 0.164533  
 Adjusted R-squared 0.906898 S.D. dependent var 0.068736  
 S.E. of regression 0.020973 Sum squared resid 0.055865  
 Durbin-Watson stat 0.077332

Equation:  $X6\_DOT = C(601)*X1 + C(603)*X3 + C(604)*X4 + C(611)*X4^2 + C(632)*X1*X3 + C(645)*X3*X6 + C(638)*X4*X6 + C(663)*X3^2*X1 + C(671)*X4^2*X3$   
 Observations: 132  
 R-squared 0.979878 Mean dependent var 0.061964  
 Adjusted R-squared 0.978570 S.D. dependent var 0.041420  
 S.E. of regression 0.006064 Sum squared resid 0.004522  
 Durbin-Watson stat 0.066844

Prilog 41 – Regresioni rezultati za 7D sistem –  $Y_{HS1}$ ,  $Y_{HS1}$ ,  $G_{TOT}$ ,  $G_{TOT}$ ,  $T_{TOT}$ ,  $M_H$  i  $B_H$ 

System: SYSTEM_7D				
Estimation Method: Least Squares				
Date: 04/28/2020 Time: 23:32				
Sample: 2005Q1-2019Q4				
Included observations: 132				
Total system (balanced) observations: 854				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C104	-18.14158	5.429519	-42.83716	0.0000
C106	162.8221	2.105771	48.62918	0.0000
C108	9.324202	0.919255	32.19432	0.0000
C110	5.754497	0.258985	21.43805	0.0000
C112	2.344482	0.058769	40.22529	0.0000
C142	1.333223	0.055251	24.12594	0.0000
C143	8.981115	0.917893	49.77495	0.0000
C145	-14.36370	0.529575	-27.31511	0.0000
C138	-42.86151	0.477394	-49.81905	0.0000
C149	2.054953	0.030572	68.19824	0.0000
C174	0.077198	0.000000	68.19824	0.0000
C153	1.512795	0.031524	32.15951	0.0000
C105	0.028481	0.005214	15.80885	0.0000
C171	0.717762	0.014368	47.95388	0.0000
C172	1.388847	0.024824	55.94810	0.0000
C170	-0.359520	0.034525	-10.08057	0.0000
C181	4.807577	0.109107	28.50001	0.0000
C201	4.457795	0.215543	20.71193	0.0000
C205	19.40201	1.045380	18.49952	0.0000
C211	1.114129	0.054189	29.82239	0.0000
C215	1.851622	0.264340	6.910713	0.0000
C219	3.744229	0.342559	10.93046	0.0000
C230	-29.31263	0.835545	-35.14274	0.0000
C238	1.107193	0.108878	12.07572	0.0000
C241	11.15564	0.227859	49.13483	0.0000
C246	86.29251	2.891493	33.73188	0.0000
C247	10.86720	0.848488	19.75811	0.0000
C251	0.444747	0.020119	21.43805	0.0000
C255	-3.341152	0.084081	-39.76099	0.0000
C271	2.911201	0.046369	41.38177	0.0000
C278	3.429101	0.116798	29.73760	0.0000
C279	-10.57465	0.232395	-42.39659	0.0000
C279	41.87143	0.789132	53.20257	0.0000
C363	6.159445	0.203125	30.11165	0.0000
C387	3.697101	0.755842	4.774268	0.0000
C391	15.11522	0.862471	15.32481	0.0000
C393	-29.87153	0.322174	-89.89574	0.0000
C397	7.86254	0.454889	18.81153	0.0000
C398	-1.048322	0.108122	-8.802811	0.0000
C311	-1.216003	0.046861	-26.03781	0.0000
C313	11.13872	0.821208	17.02853	0.0000
C340	-27.22238	0.329142	-82.71952	0.0000
C343	16.45488	0.143037	79.29550	0.0000
C352	-1.151279	0.078111	-15.12621	0.0000
C354	1.324894	0.066377	12.87375	0.0000
C358	0.024989	0.130429	0.184085	0.0000
C359	0.229979	0.044730	5.134429	0.0000
C368	-1.782364	0.235779	-7.561622	0.0000
C372	-0.913533	0.015257	-59.77025	0.0000
C378	4.888217	0.077734	6.292627	0.0000
C383	-2.072664	0.352387	-5.737388	0.0000
C384	4.182979	0.259235	16.15150	0.0000
C400	1.451156	0.015566	102.0510	0.0000
C407	3.028937	0.040258	75.21527	0.0000
C408	-0.056473	0.008303	-6.670049	0.0000
C410	-0.015178	0.002179	-42.84441	0.0000
C420	0.388844	0.015222	25.47548	0.0000
C435	0.755188	0.031952	23.65253	0.0000
C441	-0.050482	0.004463	-11.23498	0.0000
C444	0.897333	0.018779	48.19167	0.0000
C453	0.077594	0.008245	9.455850	0.0000
C456	0.577595	0.026249	6.214151	0.0000
C470	0.071628	0.015544	4.611940	0.0000
C477	0.635125	0.109577	5.792588	0.0000
C478	0.235477	0.015542	15.16265	0.0000
C483	-0.948481	0.007436	-14.07728	0.0000
C500	35.19183	0.111039	29.82239	0.0000
C507	-0.273950	0.193189	-48.75581	0.0000
C510	-38.89254	2.772382	-14.02514	0.0000
C540	16.47717	0.131475	79.69395	0.0000
C544	49.14457	2.254177	16.92714	0.0000
C545	-1.70162	0.037913	-45.22754	0.0000
C513	0.005298	0.001181	19.45386	0.0000
C554	0.941814	0.038969	24.15095	0.0000
C550	0.428719	0.057589	7.461760	0.0000
C563	1.808972	0.078447	22.76458	0.0000
C565	2.281432	0.201469	9.359520	0.0000
C571	-0.978325	0.015745	-42.11740	0.0000
C571	-3.711919	0.331498	-11.19905	0.0000
C576	-3.157934	0.054257	-7.889026	0.0000
C581	2.051403	0.097145	21.40058	0.0000
C603	-3.238972	0.155363	-20.74885	0.0000
C604	1.917977	0.058787	33.07051	0.0000
C611	0.714844	0.007256	29.67185	0.0000
C632	3.998572	0.166284	27.63820	0.0000
C634	-3.832959	0.092519	-42.88339	0.0000
C637	0.021481	0.005111	3.820218	0.0001
C645	0.637755	0.184553	37.15153	0.0000
C638	0.357705	0.028489	12.72723	0.0000
C647	8.077314	0.701398	61.02043	0.0000
C648	2.741755	0.332523	21.71046	0.0000
C653	-0.224465	0.018940	-11.87074	0.0000
C666	0.221303	0.031159	7.120251	0.0000
C668	1.811844	0.033084	12.01113	0.0000
C671	0.012409	0.012124	10.59502	0.0000
C680	-0.477862	0.086229	-5.416236	0.0000
C689	4.975225	0.365381	13.57890	0.0000
C690	-1.151833	0.088477	-16.07847	0.0000
C731	-1.872600	0.084827	-20.52285	0.0000
C733	0.978082	0.015208	64.71848	0.0000
C735	6.603193	0.091993	58.75857	0.0000
C737	15.53862	0.452111	21.25879	0.0000
C738	-1.991175	0.089459	-22.26027	0.0000
C740	8.415578	0.015527	60.60053	0.0000
C741	7.316417	0.270364	28.15211	0.0000
C743	-11.24376	0.295177	-38.09827	0.0000
C745	54.15274	0.053380	81.60588	0.0000
C747	63.37188	0.011458	87.24575	0.0000
C857	1.513882	0.448125	11.52013	0.0000
C858	-16.67672	1.744784	-38.18858	0.0000
C859	7.844694	0.536562	14.60222	0.0000
C860	169.2392	3.885300	40.19450	0.0000
C863	-7.745858	0.061140	-11.54417	0.0000
C864	1.427055	0.035178	38.02090	0.0000
C878	0.992151	0.109535	9.048647	0.0000
Determinant residual covariance		1.03E-52		
Equation: X1.DOT=C104*X1+C106*X2+C108*X3+C110*X4+C112*X5+C142*X6+C143*X7+C145*X8+C138*X9+C149*X10+C174*X11+C153*X12+C105*X13+C171*X14+C172*X15+C170*X16+C181*X17+C201*X18+C205*X19+C211*X20+C215*X21+C219*X22+C230*X23+C238*X24+C241*X25+C246*X26+C247*X27+C251*X28+C255*X29+C271*X30+C278*X31+C279*X32+C363*X33+C387*X34+C391*X35+C393*X36+C397*X37+C398*X38+C311*X39+C313*X40+C340*X41+C343*X42+C352*X43+C354*X44+C358*X45+C359*X46+C368*X47+C372*X48+C378*X49+C383*X50+C384*X51+C387*X52+C372*X53+C383*X54+C384*X55+C372*X56+C352*X57+C354*X58+C368*X59+C372*X60+C352*X61+C354*X62+C368*X63+C372*X64+C352*X65+C354*X66+C368*X67+C372*X68+C352*X69+C354*X70+C368*X71+C372*X72+C352*X73+C354*X74+C368*X75+C372*X76+C352*X77+C354*X78+C368*X79+C372*X80+C352*X81+C354*X82+C368*X83+C372*X84+C352*X85+C354*X86+C368*X87+C372*X88+C352*X89+C354*X90+C368*X91+C372*X92+C352*X93+C354*X94+C368*X95+C372*X96+C352*X97+C354*X98+C368*X99+C372*X100+C352*X101+C354*X102+C368*X103+C372*X104+C352*X105+C354*X106+C368*X107+C372*X108+C352*X109+C354*X110+C368*X111+C372*X112+C352*X113+C354*X114+C368*X115+C372*X116+C352*X117+C354*X118+C368*X119+C372*X120+C352*X121+C354*X122+C368*X123+C372*X124+C352*X125+C354*X126+C368*X127+C372*X128+C352*X129+C354*X130+C368*X131+C372*X132+C352*X133+C354*X134+C368*X135+C372*X136+C352*X137+C354*X138+C368*X139+C372*X140+C352*X141+C354*X142+C368*X143+C372*X144+C352*X145+C354*X146+C368*X147+C372*X148+C352*X149+C354*X150+C368*X151+C372*X152+C352*X153+C354*X154+C368*X155+C372*X156+C352*X157+C354*X158+C368*X159+C372*X160+C352*X161+C354*X162+C368*X163+C372*X164+C352*X165+C354*X166+C368*X167+C372*X168+C352*X169+C354*X170+C368*X171+C372*X172+C352*X173+C354*X174+C368*X175+C372*X176+C352*X177+C354*X178+C368*X179+C372*X180+C352*X181+C354*X182+C368*X183+C372*X184+C352*X185+C354*X186+C368*X187+C372*X188+C352*X189+C354*X190+C368*X191+C372*X192+C352*X193+C354*X194+C368*X195+C372*X196+C352*X197+C354*X198+C368*X199+C372*X200+C352*X201+C354*X202+C368*X203+C372*X204+C352*X205+C354*X206+C368*X207+C372*X208+C352*X209+C354*X210+C368*X211+C372*X212+C352*X213+C354*X214+C368*X215+C372*X216+C352*X217+C354*X218+C368*X219+C372*X220+C352*X221+C354*X222+C368*X223+C372*X224+C352*X225+C354*X226+C368*X227+C372*X228+C352*X229+C354*X230+C368*X231+C372*X232+C352*X233+C354*X234+C368*X235+C372*X236+C352*X237+C354*X238+C368*X239+C372*X240+C352*X241+C354*X242+C368*X243+C372*X244+C352*X245+C354*X246+C368*X247+C372*X248+C352*X249+C354*X250+C368*X251+C372*X252+C352*X253+C354*X254+C368*X255+C372*X256+C352*X257+C354*X258+C368*X259+C372*X260+C352*X261+C354*X262+C368*X263+C372*X264+C352*X265+C354*X266+C368*X267+C372*X268+C352*X269+C354*X270+C368*X271+C372*X272+C352*X273+C354*X274+C368*X275+C372*X276+C352*X277+C354*X278+C368*X279+C372*X280+C352*X281+C354*X282+C368*X283+C372*X284+C352*X285+C354*X286+C368*X287+C372*X288+C352*X289+C354*X290+C368*X291+C372*X292+C352*X293+C354*X294+C368*X295+C372*X296+C352*X297+C354*X298+C368*X299+C372*X300+C352*X301+C354*X302+C368*X303+C372*X304+C352*X305+C354*X306+C368*X307+C372*X308+C352*X309+C354*X310+C368*X311+C372*X312+C352*X313+C354*X314+C368*X315+C372*X316+C352*X317+C354*X318+C368*X319+C372*X320+C352*X321+C354*X322+C368*X323+C372*X324+C352*X325+C354*X326+C368*X327+C372*X328+C352*X329+C354*X330+C368*X331+C372*X332+C352*X333+C354*X334+C368*X335+C372*X336+C352*X337+C354*X338+C368*X339+C372*X340+C352*X341+C354*X342+C368*X343+C372*X344+C352*X345+C354*X346+C368*X347+C372*X348+C352*X349+C354*X350+C368*X351+C372*X352+C352*X353+C354*X354+C368*X355+C372*X356+C352*X357+C354*X358+C368*X359+C372*X360+C352*X361+C354*X362+C368*X363+C372*X364+C352*X365+C354*X366+C368*X367+C372*X368+C352*X369+C354*X370+C368*X371+C372*X372+C352*X373+C354*X374+C368*X375+C372*X376+C352*X377+C354*X378+C368*X379+C372*X380+C352*X381+C354*X382+C368*X383+C372*X384+C352*X385+C354*X386+C368*X387+C372*X388+C352*X389+C354*X390+C368*X391+C372*X392+C352*X393+C354*X394+C368*X395+C372*X396+C352*X397+C354*X398+C368*X399+C372*X400+C352*X401+C354*X402+C368*X403+C372*X404+C352*X405+C354*X406+C368*X407+C372*X408+C352*X409+C354*X410+C368*X411+C372*X412+C352*X413+C354*X414+C368*X415+C372*X416+C352*X417+C354*X418+C368*X419+C372*X420+C352*X421+C354*X422+C368*X423+C372*X424+C352*X425+C354*X426+C368*X427+C372*X428+C352*X429+C354*X430+C368*X431+C372*X432+C352*X433+C354*X434+C368*X435+C372*X436+C352*X437+C354*X438+C368*X439+C372*X440+C352*X441+C354*X442+C368*X443+C372*X444+C352*X445+C354*X446+C368*X447+C372*X448+C352*X449+C354*X450+C368*X451+C372*X452+C352*X453+C354*X454+C368*X455+C372*X456+C352*X457+C354*X458+C368*X459+C372*X460+C352*X461+C354*X462+C368*X463+C372*X464+C352*X465+C354*X466+C368*X467+C372*X468+C352*X469+C354*X470+C368*X471+C372*X472+C352*X473+C354*X474+C368*X475+C372*X476+C352*X477+C354*X478+C368*X479+C372*X480+C352*X481+C354*X482+C368*X483+C372*X484+C352*X485+C354*X486+C368*X487+C372*X488+C352*X489+C354*X490+C368*X491+C372*X492+C352*X493+C354*X494+C368*X495+C372*X496+C352*X497+C354*X498+C368*X499+C372*X500+C352*X501+C354*X502+C368*X503+C372*X504+C352*X505+C354*X506+C368*X507+C372*X508+C352*X509+C354*X510+C368*X511+C372*X512+C352*X513+C354*X514+C368*X515+C372*X516+C352*X517+C354*X518+C368*X519+C372*X520+C352*X521+C354*X522+C368*X523+C372*X524+C352*X525+C354*X526+C368*X527+C372*X528+C352*X529+C354*X530+C368*X531+C372*X532+C352*X533+C354*X534+C368*X535+C372*X536+C352*X537+C354*X538+C368*X539+C372*X540+C352*X541+C354*X542+C368*X543+C372*X544+C352*X545+C354*X546+C368*X547+C372*X548+C352*X549+C354*X550+C368*X551+C372*X552+C352*X553+C354*X554+C368*X555+C372*X556+C352*X557+C354*X558+C368*X559+C372*X560+C352*X561+C354*X562+C368*X563+C372*X564+C352*X565+C354*X566+C368*X567+C372*X568+C352*X569+C354*X569+C372*X570+C352*X571+C354*X572+C368*X573+C372*X574+C352*X575+C354*X576+C368*X577+C372*X578+C352*X579+C354*X579+C372*X580+C352*X581+C354*X582+C368*X583+C372*X584+C352*X585+C354*X586+C368*X587+C372*X588+C352*X589+C354*X589+C372*X590+C352*X591+C354*X592+C368*X593+C372*X594+C352*X595+C354*X596+C368*X597+C372*X598+C352*X599+C354*X599+C372*X600+C352*X601+C354*X602+C368*X603+C372*X604+C352*X605+C354*X606+C368*X607+C372*X608+C352*X609+C354*X609+C372*X610+C352*X611+C354*X612+C368*X613+C372*X614+C352*X615+C354*X616+C36				

## Literatura

1. Ackerman, F., Nadal, A., & Gallagher, K. P. (2004). *The flawed foundations of general equilibrium theory: critical essays on economic theory* (Vol. 62). Routledge.
2. Adams, A., Clarke, D., & Quinn, S. (2015). *Microeconometrics and MATLAB: An Introduction*. Oxford University Press.
3. Aguirre, L. A. (1996). A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part 11: Modelling and Control.
4. Akima, H. (1970). A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the ACM (JACM)*, 17(4), 589-602.
5. Al-khedhairi, A., Askar, S. S., Elsonbaty, A., & Elsadany, A. A. (2020). Zero-Hopf bifurcation in continuous dynamical systems using multiple scale approach. *Ain Shams Engineering Journal*, 11(4), 1377-1385.
6. Alonso, L. M., & Marder, E. (2020). Temperature compensation in a small rhythmic circuit. *Elife*, 9, e55470.
7. Alp, E., & Seven, Ü. (2019). The dynamics of household final consumption: The role of wealth channel. *Central Bank Review*, 19(1), 21-32.
8. Amemiya, T. (1983). Non-linear regression models. *Handbook of econometrics*, 1, 333- 389.
9. Andronov, A. A. (1971). Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane.
10. Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., Maier, A. G., & Gutzwiller, M. C. (1974). Qualitative theory of second-order dynamic systems. *Physics Today*, 27(8), 53-54.
11. Antoci, A., Galeotti, M., Russu, P., & Luigi Sacco, P. (2018). The cultural implications of growth: Modeling nonlinear interaction of trait selection and population dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(5), 055906.
12. Arrowsmith, D. K., Cartwright, J. H., Lansbury, A. N., & Place, C. M. (1993). The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(04), 803-842.

13. Ascher, U. M., Mattheij, R. M., & Russell, R. D. (1995). *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
14. Asteriou, D., & Hall, S. G. (2007). Applied Econometrics: a modern approach, revised edition. *Hampshire: Palgrave Macmillan*, 46(2), 117-155.
15. Azariadis, C. (2018). Riddles and Models: A Review Essay on Michel De Vroey's A History of Macroeconomics from Keynes to Lucas and Beyond. *Journal of Economic Literature*, 56(4), 1538-76.
16. Backhouse, R. E., & Boianovsky, M. (2012). *Transforming modern macroeconomics: exploring disequilibrium microfoundations, 1956–2003*. Cambridge University Press.
17. Backhouse, R., & Boianovsky, M. (2005). Disequilibrium macroeconomics: an episode in the transformation of modern macroeconomics. In *Anais do XXXIII Encontro Nacional de Economia [Proceedings of the 33rd Brazilian Economics Meeting]* (No. 012). ANPEC-Associação Nacional dos Centros de Pós-Graduação em Economia [Brazilian Association of Graduate Programs in Economics].
18. Bagliano, F. C., & Bertola, G. (2004). *Models for dynamic macroeconomics*. Oxford University Press on Demand.
19. Bakri, T., Kuznetsov, Y. A., & Verhulst, F. (2015). Torus bifurcations in a mechanical system. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 27(3-4), 371-403.
20. Barrell, R., Costantini, M., & Meco, I. (2015). Housing wealth, financial wealth, and consumption: New evidence for Italy and the UK. *International Review of Financial Analysis*, 42, 316-323.
21. Barro, R. J., & Grossman, H. I. (1971). A general disequilibrium model of income and employment. *The American Economic Review*, 61(1), 82-93.
22. Bayar, A., & Mc Morrow, K. (1999). Determinants of private consumption (No. 135). Directorate General Economic and Financial Affairs (DG ECFIN), European Commission.
23. Bazykin, A. D. (1998). *Nonlinear dynamics of interacting populations*.



24. Bender, C. M., Feinberg, J., Hook, D. W., & Weir, D. J. (2009). Chaotic systems in complex phase space. *Pramana*, 73(3), 453.
25. Bensaïda, A. (2014). Noisy chaos in intraday financial data: Evidence from the American index. *Applied Mathematics and Computation*, 226, 258-265.
26. BenSaïda, A. (2015). A practical test for noisy chaotic dynamics. *SoftwareX*, 3, 1-5.
27. Bensaïda, A., & Litimi, H. (2013). High level chaos in the exchange and index markets. *Chaos, Solitons & Fractals*, 54, 90-95.
28. Berliner, L. M. (1992). Statistics, probability and chaos. *Statistical Science*, 69-90.
29. Bernard, L., & Nyambuu, U. (2016). *Dynamic Modeling, Empirical Macroeconomics, and Finance*. Springer.
30. Bindel, D. S., Demmel, J. W., Friedman, M. J., Govaerts, W. J., & Kuznetsov, Y. A. (2005). Bifurcation analysis of large equilibrium systems in MATLAB. In *International Conference on Computational Science* (pp. 50-57). Springer, Berlin, Heidelberg.
31. Bischi, G. I., Chiarella, C., & Gardini, L. (2010). *Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences*. Springer, Berlin.
32. Bischi, G. I., Chiarella, C., & Sushko, I. (Eds.). (2012). *Global analysis of dynamic models in economics and finance: essays in honour of Laura Gardini*. Springer Science & Business Media.
33. Blanchard, O. J. B. (2017). *Macroeconomics: Global Edition*. Financial Times Prentice Hall.
34. Bober, W. (2013). *Introduction to Numerical and Analytical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. CRC Press.
35. Bober, W., Tsai C-T. & Masory, O. (2009) *Numerical and Analytical Methods with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton.
36. Boeing, G. (2016). Visual analysis of nonlinear dynamical systems: chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction. *Systems*, 4(4), 37.
37. Bolotin, Y. L., & Yanovsky, V. V. (2007). The world of chaos. *Вопросы атомной науки и техники*.
38. Bosi, S., & Desmarchelier, D. (2018). Pollution and infectious diseases. *International Journal of Economic Theory*, 14(4), 351-372.

39. Bosschaert, M. M., Janssens, S. G., & Kuznetsov, Y. A. (2020). Switching to nonhyperbolic cycles from codimension two bifurcations of equilibria of delay differential equations. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 19(1), 252-303.
40. Boyer, M. (2020). Inequalities: Income, Wealth and Consumption. *Cahier Scientifique Cs*, 2020S-26.
41. Branko, V. (2009). Osnovi finansijskog tržišta. *Beograd: Zavet*.
42. Bronshtein, I. N., Semendyayev, K. A., Musiol, G., & Muehlig, H. (2007). Handbook of Mathematics.
43. Burda, M., & Wyplosz, C. (2013). Macroeconomics: a European text. Oxford university press.
44. Cavalieri, D. (2004). On some equilibrium and disequilibrium theories of endogenous money: a structuralist view. *On Some Equilibrium and Disequilibrium Theories of Endogenous Money*, 1000-1033.
45. Chazottes, J. R., & Monticelli, M. (2022). Computer experiments and visualization in mathematics and physics. A subjective short walk among some historical examples. *arXiv preprint arXiv:2203.10412*.
46. Chiang, C. A. (2000). Elements of dynamic optimization. Waveland Press.
47. Chiang, C. A. (2005). Fundamental methods of mathematical economics. McGraw-Hill.
48. Chiarella, C. (2000). *Disequilibrium, growth and labor market dynamics: macro perspectives*. Springer Science & Business Media.
49. Chiarella, C., & Flaschel, P. (2000). *The dynamics of Keynesian monetary growth: macro foundations*. Cambridge University Press.
50. Chiarella, C., Flaschel, P., & Franke, R. (2011). Foundations for a disequilibrium theory of the business cycle. *Cambridge Books*.
51. Chiarella, C., Flaschel, P., Groh, G., Koper, C., & Semmler, W. (1999). Towards applied disequilibrium growth theory: VI. Substitution, money-holdings, wealth-effects and further extensions.
52. Chua, L. O., Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., & Turaev, D. V. (2001). *Methods Of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part II)* (Vol. 5). World Scientific.

53. Clower, R. W. (1965). A Keynesian counter revolution: a theoretical appraisal. *The theory of interests*.
54. Commendatore, P., Kubin, I., Bougheas, S., Kirman, A., Kopel, M., & Bischi, G. I. (Eds.). (2017). *The Economy as a Complex Spatial System: Macro, Meso and Micro Perspectives*. Springer.
55. Craig, S. G., Kohlhasse, J. E., & Papell, D. H. (1991). Chaos theory and microeconomics: An application to model specification and hedonic estimation. *Review of Economics and Statistics*, 73(2), 208-215.
56. Crowley, P., & Trombley, C. (2015). Macroeconomic Synchronization and Monetary Unions: Is the Euro Area more Synchronous than other Monetary Unions and are Monetary Unions more Synchronous than non-Monetary Unions?.
57. Cvitanovic, P. (1984). *Universality in chaos*. Adam Hilger Ltd, Bristol.
58. Cvitanovic, P., Artuso, R., Mainieri, R., Tanner, G., Vattay, G., Whelan, N., & Wirzba, A. (2005). *Chaos: classical and quantum*. ChaosBook.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen), 69.
59. Danca, M. F. (2018). Lyapunov exponents of a discontinuous 4D hyperchaotic system of integer or fractional order. *Entropy*, 20(5), 337.
60. Daniel, C., & Wood, F. S. (1980). *Fitting equations to data: computer analysis of multifactor data*. John Wiley & Sons, Inc..
61. Das, D., Banerjee, D., & Bhattacharjee, J. K. (2014). Super-critical and sub-critical Hopf bifurcations in two and three dimensions. *Nonlinear Dynamics*, 77, 169-184.
62. Davidson, R., & MacKinnon, J. G. (1993). *Estimation and inference in econometrics* (Vol. 63). New York: Oxford.
63. Day, R. H. (1987). The general theory of disequilibrium economics and of economic evolution. In *Economic Evolution and Structural Adjustment: Proceedings of Invited Sessions on Economic Evolution and Structural Change Held at the 5th International Conference on Mathematical Modelling at the University of California, Berkeley, California, USA July 29–31, 1985* (pp. 46-63). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
64. De Bondt, G., Gieseck, A., Herrero, P., & Zekaite, Z. (2019). Disaggregate income and wealth effects in the largest euro area countries. *Available at SSRN 3515397*.

65. De Gooijer, J. G. (2017). Elements of nonlinear time series analysis and forecasting. Berlin, Germany: Springer.
66. De Magalhães, L., & Santaaulàlia-Llopis, R. (2018). The consumption, income, and wealth of the poorest: An empirical analysis of economic inequality in rural and urban Sub-Saharan Africa for macroeconomists. *Journal of Development Economics*, 134, 350-371.
67. Dhooze, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., & Sautois, B. (2008). New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(2), 147-175.
68. Donzelli, F. (2008). Marshall vs. Walras on equilibrium and disequilibrium. *History of Economics Review*, 48(1), 1-38.
69. Drazin, P. G. (2002). Introduction to hydrodynamic stability (Vol. 32). Cambridge university press.
70. Duffy, D. G. (2003). Advanced engineering mathematics with MATLAB. Chapman and Hall/CRC.
71. Dumortier, F., Llibre, J., & Artés, J. C. (2006). Qualitative theory of planar differential systems (Vol. 2). Berlin: Springer.
72. Faggini, M., & Parziale, A. (2012). The failure of economic theory. Lessons from chaos theory. *Modern Economy*, 3(01), 1.
73. Feigenbaum, M. J. (1979). The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 21(6), 669-706.
74. Feigenbaum, M. J. (1983). Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3), 16-39.
75. Franses, P. H., & Van Dijk, D. (2000). Non-linear time series models in empirical finance. Cambridge University Press.
76. Fuchs, A. (2014). Nonlinear dynamics in complex systems. Berlin: Springer.
77. Gerritsma, M., Van der Steen, J. B., Vos, P., & Karniadakis, G. (2010). Time-dependent generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 229(22), 8333-8363.
78. Ghil, M. (2010, May). Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. In EGU General Assembly Conference Abstracts (p. 13469).

79. Ghosh, T. (2013). Bifurcation Analysis of Endogenous Growth Models (Doctoral dissertation, University of Kansas).
80. Giavazzi, F., Amighini, A., & Blanchard, O. J. B. (2017). Macroeconomics: a European perspective. Financial Times Prentice Hall.
81. Gimmelli, G., Kooi, B. W., & Venturino, E. (2015). Ecoepidemic models with prey group defense and feeding saturation. *Ecological Complexity*, 22, 50-58.
82. Gonchenko, V. S., & Ovsyannikov, I. I. I. (2003). On bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with a homoclinic tangency to a “neutral” saddle fixed point. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 300(0), 167-172.
83. Gottwald, G. A., & Melbourne, I. (2004). A new test for chaos in deterministic systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2042), 603-611.
84. Gottwald, G. A., & Melbourne, I. (2009). On the implementation of the 0–1 test for chaos. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8(1), 129-145.
85. Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., Al-Hdaibat, B., De Witte, V., Dhooze, A., Mestrom, N., Neirynck, A.M. Riet & Sautois, B. (2019). MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab. University of: Gante (Belgium), Utrecht (The Netherlands) & Twente (The Netherlands).
86. Grasman, J., & Van Straten, G. (Eds.). (2012). Predictability and nonlinear modelling in natural sciences and economics. Springer Science & Business Media.
87. Greene, W. H. (2003). *Econometric analysis*. Pearson Education India.
88. Gujarati, D. (2011). Econometrics by Example/Damodar Gujarati. *Number*, 330, G84.
89. Gurumoorthy, A. V., & Picardo, J. (2011). Evaluation of MATCONT of MATLAB for constructing bifurcation diagrams of chemical process systems. *The IUP Journal of Chemical Engineering*, 3(3), 19-29.
90. Hamri, N. E. (2018). Chaos in Nonlinear Fractional Systems. In *Advanced Synchronization Control and Bifurcation of Chaotic Fractional-Order Systems* (pp. 333-403). IGI Global.
91. Hayward, T., & Preston, J. (1999). Chaos theory, economics and information: the implications for strategic decision-making. *Journal of Information Science*, 25(3), 173-182.

92. Henon, M. (1969). Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quarterly of applied mathematics*, 291-312.
93. Hilborn, R. C. (2000). Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. Oxford University Press on Demand.
94. Hill, R. C., Griffiths, W. E., & Lim, G. C. (2018). Principles of econometrics. John Wiley & Sons.
95. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press.
96. Hobbs, B., & Ord, A. (2018). Nonlinear dynamical analysis of GNSS data: quantification, precursors and synchronisation. *Progress in Earth and Planetary Science*, 5(1), 1-35.
97. Hommes, C. H. (1997). Models of complexity in economics and finance. System Dynamics in Economic and Financial Models, Wiley Publishers, 3-41.
98. Hu, Z., & Chen, W. (2013). Modeling of macroeconomics by a novel discrete nonlinear fractional dynamical system. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013.
99. Hutz, B. (2018). An Experimental Introduction to Number Theory (Vol. 31). American Mathematical Soc.
100. Itoh, M., & Chua, L. (2017). Chaotic oscillation via edge of chaos criteria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(11), 1730035.
101. Itoh, M., & Chua, L. (2017). Dynamics of Hamiltonian systems and memristor circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(02), 1730005.
102. Jordan, D., Smith, P., & Smith, P. (2007). Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers (Vol. 10). Oxford University Press on Demand.
103. Kaldor, N. (1975). What is wrong with economic theory. *The Quarterly Journal of Economics*, 89(3), 347-357.
104. Kalia, M., Kuznetsov, Y. A., & Meijer, H. G. (2019). Homoclinic saddle to saddle-focus transitions in 4D systems. *Nonlinearity*, 32(6), 2024.
105. Kaščelan, V., Kaščelan, L., Sindik, D.V. (2023), EU insurance premiums and claims in conditions of economic crisis – NDA analysis; in: Kocović J., Mladenović, Z., Boričić, B. and Jovanović Gavrilović, B. : Challenges and insurance market's

- responses to the economic crisis, Monograph, Chapter 6, p. 93-112, Faculty of Economics Belgrade, ISBN: 978-86-403-1789-4 University of Belgrade, Faculty of Economics and Business Publishing Centre
106. Khaledi-Nasab, A., Chauhan, K., Tass, P. A., & Neiman, A. B. (2021). Information processing in tree networks of excitable elements. *Physical Review E*, 103(1), 012308.
  107. Kia, B., Lindner, J. F., & Ditto, W. L. (2017). Nonlinear dynamics as an engine of computation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2088), 20160222.
  108. Klein, A., & Spreij, P. (2003). Some results on Vandermonde matrices with an application to time series analysis. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 25(1), 213-223.
  109. Knoll, D.A. & Keyes, D.E. (2004). Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193, 357–397.
  110. Korliras, P. G. (1975). A Disequilibrium Macroeconomic Model. *The Quarterly Journal of Economics*, 56-80.
  111. Korliras, P. G. (1980). A Disequilibrium Macroeconomic Model: The Implications of a Correction. *The Quarterly Journal of Economics*, 95(1), 199-200.
  112. Kuipers, F., Gürsoy, U., & Kuznetsov, Y. (2019). Bifurcations in the RG-Flow of QCD. *Journal of High Energy Physics*, 2019(7), 1-65.
  113. Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed. Applied Mathematical Sciences 112, Springer-Verlag, New York.
  114. Kuznetsov, Y. A. (2010). Bifurcation Phenomena Lecture 4: Bifurcations in n-dimensional ODEs.
  115. Kuznetsov, Y. A. (2019). Codim 1 bifurcations of n-dimensional ODEs.
  116. Kuznetsov, Y. A., De Feo, O., & Rinaldi, S. (2001). Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(2), 462-487.
  117. Kuznetsov, Y. A., Govaerts, W., Doedel, E. J., & Dhooge, A. (2005). Numerical periodic normalization for codim 1 bifurcations of limit cycles. *SIAM journal on numerical analysis*, 43(4), 1407-1435.



118. Leijonhufvud, A. X. E. L. (1968). On Keynesian economics and the economics of Keynes.
119. Letellier, C., & Rossler, O. E. (2007). Hyperchaos. *Scholarpedia*, 2(8), 1936.
120. Lim, Y. B., Sacks, J., Studden, W. J., & Welch, W. J. (2002). Design and analysis of computer experiments when the output is highly correlated over the input space. *Canadian Journal of Statistics*, 30(1), 109-126.
121. Lindstrom, M. J., & Bates, D. M. (1990). Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*, 673-687.
122. Lipovina-Božović, M., Kaščelan, L., & Kaščelan, V. (2019). A Support Vector Machine approach for predicting progress toward environmental sustainability from information and communication technology and human development. *Environmental and Ecological Statistics*, 26, 259-286.
123. Lipsman, R. L., & Rosenberg, J. M. (2017). Multivariable Calculus with MATLAB. Springer International Publishing AG.
124. Liu, Z. (2010). Chaotic time series analysis. Mathematical Problems in Engineering, 2010.
125. Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), 130-141.
126. Lorenz, E. N., & Haman, K. (1996). The essence of chaos. *Pure and Applied Geophysics*, 47(3), 598-599.
127. Lundengård, K. (2017). Generalized Vandermonde matrices and determinants in electromagnetic compatibility (Doctoral dissertation, Mälardalen University).
128. Luo, A. C. (2008). Global transversality, resonance and chaotic dynamics. World Scientific.
129. Luo, A. C. (2012). Regularity and complexity in dynamical systems. New York: Springer.
130. Luo, A. C. (2014). *Toward analytical chaos in nonlinear systems*. John Wiley & Sons.
131. Luo, A. C. (2020). On dynamics of infinite-equilibrium systems. *International Journal of Dynamics and Control*, 8(1), 21-43.
132. Luo, A. C., & Guo, S. (2020). Towards Analytical Chaotic Evolutions in Brusselators. *Synthesis Lectures on Mechanical Engineering*, 5(2), 1-108.



133. Lyche, T., & Merrien, J. L. (2014). Exercises in Computational Mathematics with MATLAB. Springer.
134. Macau, E. E. (Ed.). (2019). A mathematical modeling approach from nonlinear dynamics to complex systems. Springer.
135. Macklem, T. (1994). Wealth, disposable income and consumption: some evidence for Canada (No. 71). Bank of Canada.
136. Mainardi, F. (2020). On the advent of fractional calculus in econophysics via continuous-time random walk. *Mathematics*, 8(4), 641.
137. Manasse, P., Roubini, N., & Schimmelpfennig, A. (2003). Predicting sovereign debt crises.
138. Margab, E. B., Azarm, S., Balachandran, B., Duncan, J. H., Herold, K. E., & Walsh, G. C. (2011). An Engineer's Guide to MATLAB With Applications Form Mechanical, Aerospace, Electrical, civil dan Biological Systems Engineering.
139. Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2004). Numerical methods using MATLAB (Vol. 4). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
140. McKenzie CR, Takaoka S. (2012). EVIEWS 7.2. IHS Global.
141. Menuet, M., Minea, A., & Villieu, P. (2017). *Public debt, endogenous growth cycles and indeterminacy* (No. 2467). Orleans Economics Laboratory/Laboratoire d'Economie d'Orleans (LEO), University of Orleans.
142. Menuet, M., Minea, A., & Villieu, P. (2019). Budget Rules, Distortionary Taxes, and Aggregate Instability: A reappraisal.
143. Montazeri, H., Soleymani, F., Shateyi, S., & Motsa, S. S. (2012). On a new method for computing the numerical solution of systems of nonlinear equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
144. Neal, F., & Shone, R. M. (1976). Economic model building. Macmillan International Higher Education.
145. Neirynck, N., Al-Hdaibat, B., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., & Meijer, H. G. (2016, February). Using MatContM in the study of a nonlinear map in economics. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 692, No. 1, p. 012013). IOP Publishing.
146. Nolte, D. D. (2010). The tangled tale of phase space. *Physics today*, 63(4), 33-38.

147. Novovic Buric, M., Kascelan, L., & Kascelan, V. (2023). Economic and demographic determinants of premium reserve in Western Balkan countries during and after the crisis. *International Journal of Finance & Economics*, 28(1), 1116-1136.
148. Pangallo, M., Heinrich, T., & Doyné Farmer, J. (2019). Best reply structure and equilibrium convergence in generic games. *Science advances*, 5(2), eaat1328.
149. Patinkin, D. (1956). Money, interest, and prices; an integration of monetary and value theory.
150. Patinkin, D. (1959). Keynesian economics rehabilitated: a rejoinder to Professor Hicks. *The Economic Journal*, 69(275), 582-587.
151. Patinkin, D. (1972). Friedman on the quantity theory and Keynesian economics. *Journal of Political Economy*, 80(5), 883-905.
152. Pchelintseva, I. Y., Pchelintsev, A. N., & Litovka, Y. V. (2020). Modeling of metal distribution when coating flat metal plates in electroplating baths. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, e2830.
153. Pereira-Pinto, F. H. I., & Savi, M. A. (2020). Complex dynamics of multi-regional economic interactions. *Nonlinear Dynamics*, 1-21.
154. Petráš, I. (2011). Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media.
155. Picardo, J. R., & Gurumoorthy, A. V. (2011). Evaluation of MATCONT of MATLAB for Constructing Bifurcation Diagrams of Chemical Process Systems. *IUP Journal of Chemical Engineering*.
156. Pinder, G. F. (2018). *Numerical methods for solving partial differential equations: a comprehensive introduction for scientists and engineers*. John Wiley & Sons.
157. Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (1998). Econometric models and economic forecasts.
158. Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications (Vol. 198). Elsevier.
159. Polking, J. C. (2009). *Ordinary differential equations using MATLAB*. Pearson Education India.

160. Purica, I. (2015). *Nonlinear Dynamics of Financial Crises: How to Predict Discontinuous Decisions*. Academic Press.
161. Pusuluri, K., & Shilnikov, A. (2018). Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model. *Physical Review E*, 98(4), 040202.
162. Puu, T. (2013). *Attractors, bifurcations, & chaos: Nonlinear phenomena in economics*. Springer Science & Business Media.
163. Radi, B., & El Hami, A. (2018). *Advanced Numerical Methods with Matlab*. Iste.
164. Ratkowsky, D. A. (1990). *Handbook of nonlinear regression models. (No Title)*.
165. Remani, C. (2013). *Numerical methods for solving systems of nonlinear equations. Lakehead University Thunder Bay, Ontario, Canada, 77*.
166. Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
167. Ruckstuhl, A. (2010). Introduction to nonlinear regression. *IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign, Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften*, 365.
168. Ruelle, D., & Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25, 12*, 1-44.
169. Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. and Wynn, H.P. (1989). Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, 4(4), pp.409-423.
170. Schleer-van Gellecom, F. (Ed.). (2013). *Advances in Non-linear Economic Modeling: Theory and Applications (Vol. 17)*. Springer Science & Business Media.
171. Sethna, J. (2006). *Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity (Vol. 14)*. Oxford University Press.
172. Shankar, P. M. (2018). *Differential Equations: A Problem Solving Approach Based on MATLAB*. CRC Press.
173. Shone, R. (2001). *An introduction to economic dynamics*. Cambridge University Press.
174. Shone, R. (2002). *Economic Dynamics: Phase diagrams and their economic application*. Cambridge University Press.
175. Shykhmamedov, A., Karatetskaia, E., Kazakov, A., & Stankevich, N. (2020). Hyperchaotic attractors of three-dimensional maps and scenarios of their appearance. *arXiv preprint arXiv:2012.05099*.

176. Siauww, T., & Bayen, A. (2014). An introduction to MATLAB programming and numerical methods for engineers. Academic Press.
177. Sindik D. (2015). *Implikacije Instrumenata Novog Svjetskog Poretka – Specifikacija CDS Aranžmana*. Magistarski Rad, 2015.
178. Sindik, D. V., Kaščelan, V., & Kaščelan, L. (2023). Simulation of disequilibrium and chaos in aggregates of disposable income, wealth, and consumption in EU macroeconomics using nonlinear dynamic analysis. *Simulation*, 99(2), 137-167. <https://doi.org/10.1177/00375497221130100>
179. Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6), 747-817.
180. Smale, S. (1998). Finding a horseshoe on the beaches of Rio. *The Mathematical Intelligencer*, 20(1), 39-44.
181. Smale, S. (2000). Diffeomorphisms with many periodic points. In *The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2* (pp. 636-653).
182. Solow, R. M., & Stiglitz, J. E. (1968). Output, employment, and wages in the short run. *The Quarterly Journal of Economics*, 82(4), 537-560.
183. Startz, R. (2009). EViews illustrated for version 7. Quantitative Micro Software.
184. Startz, R. (2019). EViews Illustrated. University of California: Santa Barbara, CA, USA.
185. Stewart, J. (2009). Calculus: Concepts and contexts. Cengage Learning.
186. Stine, R. A., Foster, D. P., & Waterman, R. P. (2001). Business analysis using regression: A casebook. Springer Science & Business Media.
187. Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
188. Suárez-Ántola, R. (2019). An analytical approach to bifurcations and stability in simplified mathematical models of nuclear reactors. *Progress in Nuclear Energy*, 114, 171-190.
189. Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for industrial and applied mathematics.
190. Verbeek, M. (2008). *A guide to modern econometrics*. John Wiley & Sons.
191. Vieru, A. (2008). General definitions of chaos for continuous and discrete-time processes. arXiv preprint arXiv: 0802.0677.

192. Viguie', R. G., & Kerschen, G. T. (2009, January). Design procedure of a nonlinear vibration absorber using bifurcation analysis: application to the drill-string system. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (Vol. 48982, pp. 381-389).
193. Wang, J., Shi, J., & Wei, J. (2011). Predator–prey system with strong Allee effect in prey. *Journal of Mathematical Biology*, 62(3), 291-331.
194. Wiggins, S. (2003). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
195. William, B., & Guo, C. (2015). Bifurcation of macroeconometric models and robustness of dynamical inferences.
196. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: nonlinear phenomena*, 16(3), 285-317.
197. Wood, F. S. (1973). The use of individual effects and residuals in fitting equations to data. *Technometrics*, 15(4), 677-695.
198. Wooldridge, J. M. (2016). Introductory econometrics: A modern approach. Nelson Education.
199. Xing, M., Song, X., Yang, Z., & Chen, Y. (2020). Bifurcations and excitability in the temperature-sensitive Morris–Lecar neuron. *Nonlinear Dynamics*, 100, 2687-2698.
200. Xing, T., Barrio, R., & Shilnikov, A. (2014). Symbolic quest into homoclinic chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(08), 1440004.
201. Xing, T., Wojcik, J., Zaks, M. A., & Shilnikov, A. L. (2013). Computational quest f or Kaos-land. arXiv preprint arXiv:1310.1122.
202. Xu, Y., & Luo, A. C. J. (2018). A series of symmetric period 1 motions to chaos in a two- degree-of-freedom van der Pol–Duffing oscillator. *J. Vibr. Test. Syst. Dyn*, 2, 119-153.
203. Yaici, M., & Hariche, K. (2019). A particular block Vandermonde matrix. In ITM Web of Conferences (Vol. 24, p. 01008). EDP Sciences.
204. Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T. S., & Morris, J. (2005). Applied numerical methods using MATLAB. John Wiley & Sons.
205. Zeng, Y., & Wu, S. (Eds.). (2013). State-space models: Applications in economics and finance (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

- 206. Zhang, W. B. (2005). Differential equations, bifurcations, and chaos in economics (Vol. 68). World Scientific Publishing Company.
- 207. Zhang, Z., & Karniadakis, G. E. (2017). Numerical Methods for Stochastic Partial Differential Equations with White Noise, volume 196 of. Applied Mathematical Sciences.

## Biografija

Damir V. Sindik rođen je 28. oktobra 1975. godine u Kotoru, SFRJ. Magistrirao je na Ekonomskom fakultetu u Podgorici, na Univerzitetu Crne Gore (UCG), stekavši titulu akademski magistar ekonomije – bankarstva, sa najvećom ocjenom (10). Master teza mu je bila „Implikacije instrumenata Novog svjetskog poretka – Specifikacija CDS aranžmana”. Diplomirao je na Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici (UCG), kao Diplomirani Inženjer Elektrotehnike – Elektronike, takođe sa najvećom ocjenom.

Tokom dvadesetogodišnjeg rada u Centralnoj banci Crne Gore (CBCG) u Podgorici, radio je na poslovima vezanim za nadgledanja platnih sistema. Dizajnirao je i implementirao neke od nacionalnih IT sistema i ORACLE baza podataka, te učestvovao u pojedinim projektima evropskih centralnih banaka, istraživačkim radovima i operativnim analizama. Član je nacionalne radne grupe za implementaciju *blockchain* tehnologija u plaćanjima, uključujući *Central Bank Digital Currency (CBDC)* u saradnji sa jednom od vodećih svjetskih kompanija u navedenom domenu *Ripple (USA)*.

Učesnik je projekata od nacionalnog značaja u saradnji sa *World Bank (WB)* i *International Monetary Fund (IMF)*. Aktivni učesnik je brojnih seminara i skupova centralnih banaka, a neki od njih su: *Swiss National Bank (SNB) – Academic Study Center Gerzensee, Bern*, na temu modeliranja DSGE modela kroz Novokeynzijske višedimenzionalne modele monetarne politike; *European Central Bank (ECB), Frankfurt*, vezano za moderne infrastrukture tržišta i platne sisteme; više seminara, kurseva i radionica u organizaciji *Deutsche Bundesbank (DBB), Frankfurt*, i *Banca di Italia (BdI), Roma*, vezano za različite vrste platnih sistema, digitalnog i elektronskog novca, platnih instrumenata; *Bank of England (BoE), London*, vezano za upravljanje poslovanjem u slučaju iznenadnih događaja i održavanja kontinuiteta poslovanja; *Banque de France (BdF), Paris*, povezano sa internom revizijom, poslovnom revizijom i upravljanjem rizicima; *KPMG* seminari, kursevi i radionice, oko upravljanja IT operativnim rizikom; *Centralna banka Slovenije (BS), Ljubljana*, na teme evropskih platnih i klirinških sistema; sertifikovani ORACLE DBA kursevi, i administracija različitih serverskih Windows i Linux platformi.

Istraživački interesi obuhvataju programiranu-simulaciju kompleksnih sistema koristeći primijenjenu matematiku, teoriju haosa, analizu podataka pomoću MATLAB AI Deep Learning i primijenjenu nelinearnu ekonometriju.

1. Autorstvo - Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo - nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.
3. Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, bez promjena, preoblikovanja ili upotrebe djela u svom djelu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja djela.
4. Autorstvo - nekomercijalno - dijeliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerade.
5. Autorstvo - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, bez promjena, preoblikovanja ili upotrebe djela u svom djelu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.
6. Autorstvo - dijeliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence iako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda



Prilog 1.

Izjava o  
autorstvu

Potpisani-a \_\_\_\_\_ Damir V. Sindik  
Broj indeksa/upisa \_\_\_\_\_ D 4/16

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

NELINEARNA DINAMIČKA ANALIZA DISEKVILIBRIJUMA I HAOSA U AGREGATIMA  
RASPOLOŽIVOG DOHOTKA, IMETKA I POTROŠNJE U MAKROEKONOMIJI EVROPSKE UNIJE

---

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedio/la autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

U Podgorici, 04.07.2024.

Potpis doktoranda

Sindik Damir

Prilog 2.

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora Damir V. Sindik  
Broj indeksa/upisa D 4/16  
Studijski program Doktorske Studije  
Naslov rada NELINEARNA DINAMIČKA ANALIZA DISEKVILIBRIJUMA I  
HAOSA U AGREGATIMA RASPOLOŽIVOG DOHOTKA, IMETKA I  
POTROŠNJE U MAKROEKONOMIJI EVROPSKE UNIJE

Mentor Prof. dr Vladimir Kaščelan

Komentor Prof. dr Lilijana Kaščelan

Potpisani/a Damir V. Sindik

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao/laza objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina imjesta rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

U Podgorici, 04.07.2024.

Potpis doktoranda



## IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorskudisertaciju pod naslovom:

NELINEARNA DINAMIČKA ANALIZA DISEKVILIBRIJUMA I HAOSA U AGREGATIMA  
RASPOLOŽIVOG DOHOTKA, IMETKA I POTROŠNJE U MAKROEKONOMIJI EVROPSKE UNIJE

---

---

koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade**
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poledini lista).

U Podgorici, 04.07.2024.

Potpis doktoranda

