

**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**

mr Đorđe Stanković

**ESTIMACIJA I KLASIFIKACIJA
JEDNODIMENZIONIH I DVODIMENZIONIH
SIGNALA KORIŠĆENJEM KOMBINOVANIH
TRANSFORMACIONIH DOMENA I
NEURALNIH MREŽA**

- Doktorska disertacija -

Podgorica, 2025. godine

UNIVERSITY OF MONTENEGRO
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING

MSc Đorđe Stanković

**ESTIMATION AND CLASSIFICATION OF
ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL
SIGNALS USING COMBINED TRANSFORM
DOMAINS AND NEURAL NETWORKS**

- PhD thesis -

Podgorica, 2025

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANDU

Ime i prezime:	Dorđe Stanković
Datum i mjesto rođenja:	13.09.1997. god, Podgorica, Crna Gora
Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa:	Inženjerska matematika, Facultad de Ingeniería, Univerzitet Buenos Aires,
Godina završetka:	2022.
Mentor:	dr Irena Orović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet
Komentor:	dr Cornel Ioana, vanredni profesor, Université Grenoble-Alpes, Gipsa-Lab
Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:	dr Miloš Daković, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Irena Orović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Cornel Ioana, vanredni profesor, Université Grenoble-Alpes, Gipsa-Lab dr Nedjeljko Lekić, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Miloš Brajović, docente, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet
Komisija za ocjenu doktorske disertacije:	dr Miloš Daković, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Irena Orović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Anđela Draganić, docent, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet
Komisija za odbranu doktorske disertacije:	dr Miloš Daković, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Irena Orović, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet dr Cornel Ioana, vanredni profesor, Université Grenoble-Alpes, Gipsa-Lab Viktor Sučić, redovni profesor, Univerzitet Rijeka, Tehnički fakultet dr Anđela Draganić, docent, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet
Datum odbrane:	24.09.2025.

Zahvalnica

Ova doktorska disertacija je nastala kao rezultat istraživanja koja sam vršio na Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici i u Gipsa-lab na univerzitetu Grenoble-Alpes. U tom smislu, ogromnu zahvalnost želim da izrazim mentorki prof. dr Ireni Orović koja je u svakoj fazi izrade doktorata davala ogroman podsticaj i podršku koji su bili veoma značajni za dobijanje rezultata i konačnog oblikovanja disertacije. Takođe veliku pomoć sam imao od strane prof. dr Cornel Ioana, u čijoj laboratoriji sam verifikovao značajan broj teorijskih rezultata kroz praktične primjene. Boravak u Grenoblu je bilo iskustvo koje je značajno uticalo na dodatno oblikovanje mog akademskog profila. Veliku zahvalnost dugujem i doc. dr Anđeli Draganić, na sugestijama i saradnji koje su uticale na produktivnost tokom istraživanja i izrade disertacije.

Na kraju, želim da zahvalim mojim roditeljima, Tatjani i Srđanu i sestri Teodori na stalnoj podršci i razumijevanju tokom raznih faza mog školovanja, a posebno tokom rada na doktorskoj disertaciji.

Đorđe Stanković

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija:	Doktorske studije elektrotehnike
Naslov doktorske disertacije:	Estimacija i klasifikacija jednodimenzionih i dvodimenzionih signala korišćenjem kombinovanih transformacionih domena i neuralnih mreža
Ključne riječi:	transformacioni domeni, detekcija estimacije, Kramer-Rao granica, spars signali, klasifikacioni algoritmi, Hopfildova mreža
Naučna oblast:	Elektrotehnika, Računarstvo
Uža naučna oblast:	Digitalna obrada signala

Rezime:

Kombinovanje različitih algoritama i tehnika razvijenih u obradi signala omogućava efikasne primjene u širokom spektru oblasti. U tom smislu, važnu ulogu igraju transformacioni domeni koji se dobijaju kao optimalni estimatori za određene klase signala. Optimalni estimatori pružaju mogućnost predstavljanja signala sa malim brojem transformacionih koeficijenata a istovremeno obezbijavaju minimalnu varijansu pri estimaciji signala zahvaćenih šumom. U ovoj tezi su razmatrani optimalni estimatori za slučaj signala sa nedostajućim odbircima i u tom kontekstu su data ograničenja vezano za minimalan broj dostupnih odbiraka za koji Kramer-Rao granica minimalne varijanse i dalje važi. Primjenom odgovarajuće transformacije u kombinaciji sa klasifikacionim algoritmima dobijeni su pristupi koji omogućavaju efikasnu redukciju šuma i prepoznavanje određenih formi signala. Poseban akcenat je stavljen na dvodimenzioni slučaj slika zahvaćenih šumom, gdje je kombinacijom pristupa kompresivnog odabiranja, klasifikacionih algoritama i konveks-optimizacionih rekonstrukcionih metoda dobijen efikasan sistem za redukciju šuma kod slike. Takođe, kombinacijom transformacionih domena (sa različitim veličinama blokova), robustne statistike i rekonstrukcionih algoritama predložen je sistem za potpunu ekstrakciju stacionarnih - Moareovih (Moiré)

formi tekstura iz određenog dvodimenzionog oblika koji može biti i prirodna slika. Razmatrani su i klasifikacioni algoritmi bazirani na skupu signala za obučavanje, za koje su predložene efikasne arhitekture za hardverske realizacije. Na ovaj način je omogućena aplikacija u realnom vremenu za širok spektar primjena, od seizmičkih signala do slika u boji. Realizovani su sistemi bazirani na klasifikacionim pristupima Parzenovog prozora i k-tog najbližeg susjednog odbiraka. Pomenute klasifikacione tehnike i konveks-optimizacioni algoritmi za rekonstrukciju korišteni su u kombinaciji sa Hopfildovom neuralnom mrežom u cilju poboljšanja njenih performansi. Kompleksna teorijska razmatranja i predloženi pristupi su verifikovani velikim brojem statističkih i numeričkih primjera kao i na slučajevima realnih signala, kako jednodimenzionih tako i dvodimenzionih.

INFORMATION ON DOCTORAL DISSERTATION

Doctoral studies:	Doctoral study of electrical engineering
Dissertation title:	Estimation and classification of one-dimensional and two-dimensional signals using combined transform domains and neural networks
Keywords:	transform domains, detection and estimation, Cramer-Rao bound, sparse signals, classification algorithms, Hopfield neural network
Scientific area:	Electrical Engineering, Computer Engineering
Specific scientific area:	Digital Signal Processing

Abstract:

Combining various algorithms and techniques developed in signal processing enables efficient implementations in a wide area of research. In that sense, using appropriate transform domains that represent optimal estimators for a specific type of signals have an important role. Optimal estimators provide the possibility of sparse representation of signals, which also provide minimal variance of estimated parameters of signals affected by noise. In this thesis, the optimal estimators are considered for cases of signals with missing samples and in this context is also given a minimum number of available samples for which the theory of lower bound of variance holds. By applying the appropriate transforms, combined with classification algorithms, approaches for pattern recognition, variable compressive sensing and noise reduction have been developed. Namely, combining transform domains (using different block sizes), robust statistics and reconstruction algorithms, a new method for the extraction of the stationary Moiré pattern from the host natural image is proposed. Also, combining the method for compressive

sensing, classification algorithms and convex optimization reconstruction, an efficient system for block characterization, variable compressive sensing and noise reduction is proposed. Classification algorithms based on training datasets of signals are also considered, for which an efficient architecture for hardware realizations are proposed. In this way, a real-time application is facilitated for a wide variety of implementations, ranging from one-dimensional seismic signals to two-dimensional images represented by three channels. In that sense, the systems based on the Parzen window and k-th nearest neighbors methods are realized. Classification techniques and convex optimization reconstruction algorithms are also used with Hopfield neural network in order to improve the performance of pattern reconstruction. Based on that, the performances of the neural network are significantly enhanced. Theoretical considerations and proposed methods are verified by various statistical and numerical examples, as well as in cases with real-world one-dimensional and two-dimensional signals.

Sadržaj

Sadržaj	3
Spisak slika	6
Spisak tabela	11
1 Uvod	12
2 Transformacioni domeni	16
2.1 Furijeova transformacija	16
2.1.1 Dvodimenziona Furijeova transformacija	18
2.2 Diskretna kosinusna transformacija	20
2.2.1 Dvodimenziona diskretna kosinusna transformacija	20
2.3 Kratkotrajna Furijeova transformacija	21
2.3.1 Veza dvodimenzionih kosinusnih transformacija blokova slika različitih veličina	23
2.4 Hermitska transformacija	26
2.4.1 Hermitska transformacija sa skalirajućim faktorom	29
2.4.2 Diskretna Hermitska transformacija realizovana pomoću sime- trične tridijagonalne matrice	31
2.4.3 Hermitska transformacija za dvodimenzione signale	32
3 Kompresivno odabiranje	34
3.1 Osnovni teorijski principi	35
3.2 Rekonstrukcija signala na osnovu dostupnih odbiraka	38
3.3 Rekonstrukcija komponenti za slučaj kada su pozicije u Furijeovom domenu poznate	39
3.3.1 OMP rekonstrukcioni algoritam	40
3.3.2 Konveksno optimizacioni - gradijentni algoritam	41
3.4 Ograničenja za matrice kompresivnog odabiranja	44

4	Kramer-Rao granica minimalne varijanse i njena ograničenja za signale sa nedostajućim odbircima	47
4.1	Optimalni estimator i donja granica varijanse za sinusoidalne signale .	49
4.1.1	Estimacija amplitude za realne sinusoide	49
4.1.2	Estimacija amplitude za kompleksne sinusoide	51
4.1.3	Estimacija amplitude i frekvencije preko izvoda drugog reda .	52
4.2	Estimiranje više parametara sinusoidalnog signala	54
4.3	Optimalni estimator za sinusoidalni signal ograničen funkcijom prozora	57
4.4	Optimalni estimator i donja granica varijanse za Hermitske signale . .	58
4.5	Kramer-Rao pristup i njegova ograničenja u slučaju sinusoidalnih signala sa nedostajućim odbircima	61
4.5.1	Ograničenja u Kramer-Rao pristupu za sinusoide sa nedostajućim odbircima	63
4.5.2	Numerički primjeri i statističke provjere	67
4.6	Optimalna detekcija sinusoidalnih signala ograničeni prozorom sa nedostajućim odbircima	73
4.7	Slučaj nedostajućih odbiraka u Hermitskom domenu i ograničenja u Kramer-Rao pristupu	74
4.7.1	Eksperimentalni rezultati	79
5	Klasifikacione metode	86
5.1	Osnovni teorijski principi	86
5.2	Metodologija	87
5.3	Teorijska osnova - metode estimacija gustine raspodjele	87
5.4	Metoda Parzenovog prozora i njena implementacija u klasifikaciji signala	90
5.4.1	Primjena Parzenovog prozora na primjere klasifikacije	91
5.5	Hardversko rješenje za Parzenovu estimaciju gustine raspodjele	92
5.5.1	Ulazni dio - skladištenje i očitavanje podataka	93
5.5.2	Klasifikacioni dio u predloženoj arhitekturi	94
5.6	Evaluacija predloženog hardverskog rješenja	99
5.6.1	Diskusija rezultata	101
5.7	Eksperimentalni rezultati za realne seizmičke signale	102
5.8	Metoda k-tog najbližeg susjednog odbirka	104
5.8.1	Arhitektura hardvera za KNN	104
5.8.2	Eksperimentalni rezultati	109
5.9	Klasterizacioni algoritam	111
5.9.1	Teorijska osnova	111
5.9.2	Optimizacija parametara	113

5.9.3	Numerički i realni primjeri rezultati	115
6	Odvajanje tekstura i redukcija šuma u transformacionim domeni-	118
	ma	
6.1	Odvajanje stacionarnih tekstura slika: model i teorijska osnova	118
6.1.1	Odvajanje stacionarnih tekstura koristeći L-estimaciju i rekon-	
	strukcione algoritme	121
6.1.2	Filtriranje L-estimacijom koristeći 2D DCT frekvencijske vektore	122
6.1.3	Rekonstrukcija stacionarnih frekvencijskih komponenti zasno-	
	vana na kompresivnom odabiranju	124
6.1.4	Primjeri	125
6.1.5	Dodatna diskusija i poređenje rezultata	130
6.2	Klasifikacija blokova, adaptivno odabiranje i redukcija šuma slika . .	134
6.2.1	Eksperimentalni rezultati adaptivne redukcije šuma	136
6.2.2	EM klasterizacija primijenjena na redukciju šuma korišćenjem	
	blokova sa varijabilnim brojem odbiraka	139
6.3	Redukcija šuma zasnovana na filtriranju u Hermitskom domenu i me-	
	todi fuzije slika	143
6.3.1	Primjeri	145
7	Rekonstrukcija slika pomoću Hopfildove neuralne mreže	147
7.1	Teorijska osnova	147
7.2	Modifikacija Hopfildove mreže za rekonstrukciju sivoskaliranih slika .	150
7.3	Eksperimentalni rezultati	151
7.3.1	Binarni obrasci	151
7.3.2	Sivoskalirani obrasci	155
8	Zaključak	158
	Bibliografija	160
	Lista objavljenih radova	175

Spisak slika

2.1	Slika razdvojena na četiri bloka	24
2.2	Redizajnirani blokovi slika	24
2.3	Prvih šest hermitskih funkcija	27
2.4	Optimizovani skalirajući parametar σ	30
3.1	Ilustracija osnovnog principa kompresivnog odabiranja	38
3.2	Rekonstrukcija signala na osnovu 30% dostupnih odbiraka: a) originalni signal; b) rekonstruisani signal; c) DFT originalnog signala; d) DFT rekonstruisanog signala	46
4.1	Zavisnosti varijanse šuma u Hermitskom domenu od reda Hermitske funkcije	61
4.2	Varijansa estimirane amplitude za različit broj realizacija	63
4.3	Vjerovatnoća tačne detekcije u zavisnosti od broja dostupnih odbiraka (fiksno $SNR = -3.01dB$)	68
4.4	Ilustracija tačne detekcije komponenti signala za dvije vrijednosti dostupnih odbiraka: a) $M = 50$; b) $M = 20$	69
4.5	Statistička verifikacija izraza za varijansu računatu za različit broj dostupnih odbiraka M	69
4.6	Vrijednosti varijanse računate u 50 iteracija sa po 1000 realizacija za različit broj dostupnih odbiraka M	70
4.7	Ilustracija pogrešnih detekcija komponenti signala za broj dostupnih odbiraka manji od minimalne vrijednosti	71
4.8	Vjerovatnoća detekcije komponente signala u zavisnosti od broja dostupnih odbiraka i SNR šuma	72
4.9	Donja granica varijanse za različite M vrijednosti	75
4.10	Zavisnost α za opseg reda k od 100 do 30, za različite vrijednosti M	75
4.11	Vjerovatnoća detekcije komponente signala računate za različito k : a) teorijski; b) statistički	80

4.12	Vjerovatnoće detekcije komponente signala računate teorijski i statistički za: a) varijansu 0.05 i b) varijansu 0.1	80
4.13	Ilustracija tačne i pogrešne detekcije za različit broj dostupnih odbiraka i varijanse šuma za $\sigma_\varepsilon = 0.05$: a) $M = 100$, b) $M = 60$, c) $M = 15$; za $\sigma_\varepsilon = 0.1$, d) $M = 100$, e) $M = 40$, f) $M = 20$	82
4.14	Statistička verifikacija varijanse za različito M	83
4.15	Realni QRS EKG signal a) originalni, b) sparsifikovani, c) sparsifikovani sa šumom	83
4.16	Hermitska transformacija: a) sparsifikovanog signala, b) sparsifikovanog signala zahvaćenog šumom	84
4.17	Predstavljanje QRS kompleksa u različitim domenima: a) Hermitski, b) Furijeov, c) DCT	84
4.18	Detekcija komponenti QRS signala a) prva komponenta $k = 2$, b) druga komponenta $k = 3$ c) treća komponenta $k = 6$	85
5.1	Arhitektura za realizaciju klasifikatora zasnovanog na Parzenovom prozoru	94
5.2	Kolo za odabiranje	95
5.3	Kolo za seletkovanje odbiraka	95
5.4	Kolo za inkrementiranje i dekrementiranje odbirka za vrijednošću $+\Delta V$ i $-\Delta V$	96
5.5	Komparatorsko kolo	97
5.6	Kola za sabiranje visokih naponskih nivoa sa izlaza komparatora	97
5.7	Blok za odlučivanje	98
5.8	Blok za odlučivanje za četiri procesa	98
5.9	Blok za odlučivanje za slučaj osam procesa	101
5.10	Gornja slika: test signal; donja slika: Odbirci tačno klasifikovani (crveno) kao seizmički signal	103
5.11	Blok šema predložene arhitekture za jednodimenzioni slučaj	105
5.12	Blok šema za slučaj slika u boji	107
5.13	Blok šema kola za selektovanje	108
5.14	Blok šema za računanje širine prozora	108
5.15	Test slike: a) Car1; b) Car2; c) Lena; d) Barbara; e) ConcordAerial; f) WestConcordAerial	109
5.16	Slike Car1 i Car2 : a) prikaz trodimenzione raspodjele piksela (plavo - Car1, crveno - Car2); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli)	110

5.17	Slike Lena i Barbara : a) prikaz trodimenzione raspodjele piksela (plavo - Lena, crveno - Barbara); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli)	110
5.18	Slike ConcordAerial i WestConcordAerial : a) prikaz trodimenzione raspodjele piksela (plavo - ConcordAerial, crveno - WestConcordAerial); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli) . .	111
5.19	Klasterizovanje skupa podataka na tri različite raspodjele: a) originalni skup podataka; b) klasterizovani	116
5.20	Klasterizovanje skupa podataka na četiri Gausove raspodjele: a) originalni skup podataka; b) klasterizovani	116
5.21	Različiti oblici tranzijentnih signala: a), c) i e); detekcija tranzijentnih pikova b), d) i f)	117
6.1	Blok šema za odvajanje komponenti stacionarnih tekstura i slika . . .	119
6.2	Prikaz sortirane matrice 2D DCT koeficijenata $\mathbf{W}_{sort}$ za blokove 8×8 (64 pozicija koeficijenata) i $N_B = 32$ blokova	123
6.3	Prikaz filtrirane matrice 2D DCT koeficijenata $\mathbf{W}_{CS}$ za blok 8×8 (64 pozicija koeficijenata) i $N_B = 32$ bloka	124
6.4	a) Originalna slika; b) Slika sa vertikalnim teksturama	125
6.5	Uvećan dio slike; a) originalna slika; b) slika sa šumom; c) filtrirana slika	126
6.6	L- estimacija i rekonstrukcija jedne stacionarne komponente: a) matrica $\mathbf{W}$ 2D DCT koeficijenata; b) sortirani elementi matrice $\mathbf{W}_{sort}$; c) matrica $\mathbf{W}_{CS}$; d) rekonstruisana komponenta	126
6.7	Amplituda i pozicija rekonstruisane komponente	127
6.8	a) Originalna slika; b) Slika sa Moareovom šarom	127
6.9	Uvećan dio; a) originalna slika; b) slika sa teksturom; c) filtrirana slika	128
6.10	L-estimacija i rekonstrukcija teksture sastavljene od tri frekvencijske komponente: a) matrica $\mathbf{W}$ 2D DCT koeficijenata; b) sortirani koeficijenti matrice, $\mathbf{W}_{sort}$; c) matrica $\mathbf{W}_{CS}$ dobijena nakon L-estimacije; d) rekonstruisane komponente teksture	128
6.11	Amplitude i pozicije za tri rekonstruisane komponente	129
6.12	a) Originalna slika; b) Slika sa stacionarnom teksturom i nestacionarnom komponentom	129
6.13	L-estimacija i rekonstrukcija multi-komponentne teksture: a) matrica $\mathbf{W}$ 2D DCT koeficijenata; b) sortirani koeficijenti matrice $\mathbf{W}_{sort}$; c) matrica $\mathbf{W}_{CS}$ nakon L-estimacije; d) rekonstruisane komponente teksture	130

6.14	Amplitude i lokacije za rekonstruisane komponente	130
6.15	a) Originalna slika; b) Slika sa nestacionarnim frekvencijskim smetnjama; c) Slika sa <i>salt and pepper</i> šumom	131
6.16	a) Originalna tekstura; b) ekstraktovana tekstura pomoću predložene metode; c) ekstraktovana tekstura pomoću notch filtra	132
6.17	Rezultati primjene idealnog notch filtra na različite blokove (pretpostavlja da su frekvencije poznate): a) blok 2, b) blok 12, c) blok 24, d) blok 30	132
6.18	Bok šema predloženog pristupa adaptivne redukcije šuma	135
6.19	a) Originalna slika <i>House</i> ; b) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; c) Slika rekonstruisana sa varijabilnim brojem odbiraka	137
6.20	a) Slika sa šumom; b) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; c) slika sa redukovanim šumom	138
6.21	a) Originalna slika <i>Arctic Hare</i> ; b) slika sa šumom; c) slika sa nedostajućim odbircima; d) Slika sa šumom redukovanim predloženom metodom	138
6.22	a) Originalna slika; b) slika zahvaćena šumom; c) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; d) slika sa redukovanim šumom	139
6.23	Originalne slike i njihove verzije sa šumom	140
6.24	a), e), i) Slike sa nedostajućim odbircima dobijene podabiranjem pristupom 2 (tri klastera); b), f), j) rezultati redukcije šuma pristupom 2; c), g), h) slike sa nedostajućim odbircima dobijene podabiranjem pristupom 3 (dva klastera); d), h), l) rezultati redukcije šuma pristupom 3	141
6.25	Trougaoni filter u Hermitskom domenu	143
6.26	Funkcija trougaonog prozora	143
6.27	Blok šema predložene metode redukcije šuma u Hermitskom domenu	144
6.28	Originalna slika, slika zahvaćena šumom i slika sa redukovanim šumom, za različite slučajeve, respektivno	145
7.1	Blok šema predloženog pristupa za rekonstrukciju sivoskaliranih slika	150
7.2	a) Ulazna slika <i>Lena</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	152
7.3	a) Ulazna slika <i>Baboon</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	152

7.4	a) Ulazna slika <i>Peppers</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	153
7.5	a) Ulazna slika <i>Barbara</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	153
7.6	a) Ulazna slika <i>Lena</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	154
7.7	a) Ulazna slika <i>Baboon</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	154
7.8	a) Ulazna slika <i>Peppers</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	155
7.9	a) Ulazna slika <i>Lena</i> sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika	155
7.10	a) Ulazna slika <i>Cameraman</i> sa 60% nedostajućih piksela; b) pogrešno identifikovana slika sastavljena od više obrazaca	156
7.11	a) Ulazna slika <i>Lena</i> sa 60% nedostajućih piksela; b) pogrešno identifikovana slika sastavljena od više obrazaca	156
7.12	a) Ulazna slika <i>Cameraman</i> sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike	157
7.13	a) Ulazna slika <i>Lena</i> sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike	157
7.14	a) Ulazna slika <i>living room</i> sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike	157

Spisak tabela

4.1	Vjerovatnoća detekcije komponente signala	72
4.2	Vjerovatnoća detekcije komponente signala za različite σ_ϵ^2 u zavisnosti od minimalnog broja dostupnih odbiraka	81
5.1	Tabelarni prikaz logičke funkcije signala AP_i u zavisnosti od K_i . . .	99
5.2	Rezultati klasifikacije test signala.	103
5.3	Rezultati klasifikacije test signala	104
6.1	Kvantitativna evaluacija pomoću SSIM za slučaj 1)	131
6.2	Kvantitativna evaluacija pomoću SSIM za slučaj 2)	133
6.3	Rezultati redukcije šuma za različite slike	139
6.4	Poređenje PSNR rezultata slika sa različitim pristupima za redukciju šuma	142
6.5	Poređenje metoda filtriranja	146

1. Uvod

Estimacija i klasifikacija parametara signala predstavlja važan segment istraživanja u širokom spektru aplikacija. Za tu svrhu, zavisno od prirode signala, koriste se razne transformacije. Stoga, krucijalan korak predstavlja odabir transformacije koja će za određenu formu signala predstavljati optimalni estimator. U tom smislu važno je da transformacioni domen obezbijedi razrijeđenu (eng. *sparse*) reprezentaciju signala. U nekim aplikacijama je značajno koristiti i kombinovane transformacione domene, pogotovo one koji se dobijaju korišćenjem različitih veličina funkcija prozora.

U posljednje vrijeme značajna pažnja se posvećuje obradi signala sa nedostajućim odbircima. O tome svjedoči veliki broj radova koji se publikuje na ovu temu, a tiče se oblasti kompresivnog odabiranja (eng. *Compressive Sensing*). Uopšteno gledano, koncept kompresivnog odabiranja se može posmatrati preko dva aspekta. Prvi je sami princip kompresivnog odabiranja, dok je drugi rekonstrukcija kompletnog signala na osnovu skupa sa nedostajućim odbircima. U kontekstu ovog pristupa, za određene tipove signala interesantno je izvesti optimalne forme transformacija kao i relacija za minimalne varijanse. Naime, određivanje optimalnog estimatora se svodi na minimizaciju vrijednosti varijanse, a Kramer-Rao granica daje minimalnu vrijednost koju obezbijедуje optimalni estimator. U ovom radu je izvedena Fišerova informacija za signale forme kompleksnih sinusoida i signale oblika Hermitskih funkcija. Date su relacije za minimalnu varijansu u zavisnosti od broja dostupnih odbiraka. Poseban akcenat je stavljen na činjenicu da relacije koje se dobijaju pomoću Kramer-Rao teorije važe samo za slučaj kad su ispunjeni određeni uslovi koji se odnose na minimalan (neophodan) broj dostupnih odbiraka. Dobijeni rezultati su važni za sve aplikacije u kojima se razmatrani estimatori koriste, pa se stoga u primjenama prezentiranim u ovoj tezi vodilo računa o ograničenjima opisanim u dijelu vezanom za Kramer-Rao pristup.

Pored estimacije, u savremenim sistemima za obradu signala značajnu ulogu igraju i klasični algoritmi. U tom smislu, mogu se posmatrati algoritmi koji su zasnovani na podacima za obučavanje, odnosno treniranje, kao i algoritmi koji ne zahtijevaju

treniranje radi procesa klasifikacije. U tezi je posebna pažnja posvećena prvoj grupi algoritama. U tu svrhu, posmatrani su Parzenov prozor (eng. *Parzen window*) i tzv. k-ti najbliži susjedni odбирak (eng. *k-Nearest Neighbours* - KNN) pristup. S druge strane, klasifikacija zasnovana na segmentaciji je vršena pomoću algoritma maksimizacije očekivanja (eng. *expectation-maximization* - EM).

Kombinovanjem prethodnih teorijskih razmatranja predloženi su pristupi za odvajanje tekstura, Moareovih (Moiré) formi, iz prirodnih formi slika. Takođe, predloženi su algoritmi za redukciju šuma koji u osnovi koriste maksimizaciju očekivanja za klasifikaciju blokova slike (stacionarni, umjereno nestacionarni i nestacionarni regioni - eng. *flat, moderate busy, busy*), kao i iterativnu rekonstrukciju iz blokova sa varijabilnim brojem nedostajućih odбирaka. Dat je jedan pristup redukciji šuma kod slika korišćenjem filtriranja u jednodimenzionom Hermitskom domenu.

Prethodni rezultati istraživanja su u značajnom dijelu generalizovani radi poboljšanja performansi sistema sa Hopfieldovim (*Hopfield*) neuralnim mrežama.

Rad na tezi se zasnivao na sljedećim osnovnim hipotezama:

1. Postoje ograničenja u minimalnom broju dostupnih odбирaka koja čine da optimalni estimator i relacija za minimalnu varijansu gube smisao ukoliko nijesu ispunjena.
2. Kombinovanje transformacionih domena slike omogućava odvajanje teksturnih Moareovih (Moiré) oblika ukoliko su oni spars u oba domena.
3. Iterativna rekonstrukcija sa varijabilnim brojem nedostajućih odбирaka efikasno redukuje šum kod prirodnih slika.
4. Kombinovanje kompresivnog odabiranja i klasifikacionih algoritama može značajno da podigne efikasnost Hopfieldove neuralne mreže.

Teorijski rezultati, statističke provjere i testiranje na realnim signalima su pokazali da je svaka od hipoteza tačna. U tom smislu, one su poslužile da se teza metodološki strukturiira kako bi se rezultati u svakom segmentu lakše pratili. Stoga, teza se sastoji od uvoda, šest glava i zaključka.

U drugoj glavi su dati teorijski osnovi 1D i 2D transformacija koje su korišćene u tezi. Razmatrane su diskretna Furijeova, diskretna kosinusna, kratkotrajna Furijeova, Hermitska transformacija. Date su veze između različitih domena. Posebno interesantan slučaj je veza između 2D diskretnih kosinusnih transformacija zasnovanih na različitim veličinama prozora. U tom smislu izvedena je i forma blokova slike kako bi se efikasno koristio Kronekerov proizvod transformacionih matrica radi

uspostavljanja veze transformacija sa različitom veličinom blokova. Pristup je generalizovan i za slučaj 2D Hermitske transformacije.

U trećoj glavi su date teorijske osnove kompresivnog odabiranja. U tom smislu navedeni su i diskutovani najznačajniji uslovi (npr. inkoherentnost matrice mjerenja) koji treba da budu ispunjeni da bi se iz dostupnih odbiraka efikasno rekonstruisao signal. Posebna pažnja je posvećena gridi rekonstrukcionim algoritmima (eng. *greedy*) kao i klasi konveksnih optimizacija.

U četvrtoj glavi su razmatrani optimalni estimatori za signale sa nedostajućim odbircima. Poseban akcenat je stavljen na signale oblika kompleksnih sinusoida bez i sa funkcijom prozora, kao i signale oblika Hermitskih funkcija. U oba slučaja su izvedeni uslovi, vezano za broj dostupnih odbiraka, pod kojim izrazi za minimalnu varijansu važe. Razmatrana je estimacija amplitude. Kod kompleksne sinusoida je interesantno naglasiti da kada ovaj uslov nije ispunjen, tada ne samo estimacija amplitude već i frekvencije i faze postaju besmisleni. Teorijska razmatranja su statistički verifikovana koristeći veći broj karakterističnih primjera. Statistička analiza i izrazi vezano za signale oblika Hermitskih funkcija je kompleksnija. Stoga su u tom slučaju dati aproksimativni izrazi. Međutim, zahvaljujući ekstenzivnim simulacijama dobijene su teorijske relacije koje se u značajnom procentu poklapaju sa statističkim primjerima. Razmatranja su generalizovana i primijenjena na realnim signalima.

Klasifikacioni algoritmi su opisani u petoj glavi. Značajan dio ove glave je posvećen algoritmima zasnovanim na estimaciji funkcije gustine vjerovatnoće. U tom smislu, razmatrani su Parzenov prozor i KNN algoritmi. Oba algoritma za klasifikacioni proces koriste setove podataka namijenjene za obučavanje. Pristup Parzenovog prozora je uspješno primijenjen na jednodimenzionim seizmičkim i vibracionim signalima, pa je to poslužilo kao motivacija da se projektuje analogno-digitalni hardver za ovu klasifikacionu metodu. Hardver je generalizovan za veći broj različitih skupova podataka za obučavanje i omogućava obradu ogromnog broja odbiraka u sekundi. Takođe, za algoritam KNN predložena je digitalna arhitektura za hardversku realizaciju. Predloženi sistem je primijenjen za klasifikaciju slika u boji. Performanse omogućavaju klasifikacije u realnom vremenu. U drugom dijelu ove glave je dat EM algoritam na osnovu koga se vrši klasifikacija bez skupova podataka za obučavanje. Ovaj algoritam je primijenjen na realne jednodimenzione signale koji se odnose na parcijalna pražnjenja u elektroenergetskim mrežama. Takođe je primijenjen i na slike u smislu klasifikacije stacionarnosti blokova slike.

U šestoj glavi su predloženi algoritmi za odvajanje tekstura Moareovih oblika, kao i algoritmi za redukciju šuma kod slike. Prvi dio ove glave se odnosi na algo-

ritam pomoću koga možemo izvršiti dekompoziciju i odvajanje stacionarnog oblika inkorporiranog u prirodnu sliku. Ovaj pristup je baziran na vezi između kosinusnih transformacija različitih veličina blokova slika. Korišćena je osobina da je stacionarna komponenta spars u oba domena. L-statistika je korišćena da se odstrane nestacionarne komponente slike. Nakon toga primijenjena je teorija kompresivnog odabiranja u cilju rekonstrukcije stacionarne komponente. Na taj način je ova komponenta u potpunosti detektovana i ekstrahovana iz prirodne slike. Ovaj pristup ima značajne primjene u medicini za otklanjanje Moire-ovih paterna. Robustnost metode je testirana i kada je u prirodnoj slici prisutna jaka nestacionarna komponenta. U drugom dijelu pete glave predložen je algoritam za redukciju šuma koji se pokazuje kao efikasan na velikom broju različitih formi prirodnih slika. Algoritam klasifikuje blokove slike pomoću varijanse singularnih vrijednosti blokova. Blokovi se klasifikuju kao stacionarni, umjereno nestacionarni i nestacionarni. Za svaki tip bloka vrši se uklanjanje određenog broja piksela. Ovaj broj je proporcionalan stacionarnosti bloka. Postupak se odvija u više iteracija, pa se na kraju procedure dobija poboljšanje odnosa signal-šum za nekoliko decibela. Pokazuje se da je procedura najefikasnija ukoliko se primijeni pet do deset iteracija. Ova glava se zaključuje sa algoritmom za redukciju šuma zasnovanim na filtriranju u jednodimenzionom Hermitskom domenu.

U sedmoj glavi je predložen pristup koji kombinuje Hopfildovu neuralnu mrežu sa konveksno-optimizacionim algoritmom za rekonstrukciju i pristupom Parzenovog prozora za klasifikaciju. Hopfildova mreža, kao oblik memorijske mreže koji se koristi za prepoznavanje različitih oblika, nema zadovoljavajuće performanse u prepoznavanju značajno oštećenih slika ili slika sa nedovoljnim brojem dostupnih piksela. Stoga je primijenjen konveksno-optimizacioni algoritam za rekonstrukciju koji obezbjeđuje da forma rekonstruisane slike bude prepoznatljiva Hopfildovoj mreži. U slučaju sivoskaliranih slika, neophodno je koristiti Parzenov prozor kako bi se poboljšala konvergencija tačnosti prepoznavanja. Rezultati su verifikovani na velikom broju eksperimentalnih primjera pokazujući da predloženi pristup značajno poboljšava domen primjene Hopfildove mreže.

Završna diskusija sa perspektivama za dalje istraživanje je data u poglavlju Zaključak. Pokazuje se da značajan broj predloženih pristupa otvara nove teme za istraživanja i dalje uopštenje predloženih metoda.

2. Transformacioni domeni

Transformacioni domeni igraju značajnu ulogu u obradi signala, jer je veliki broj algoritama kao što su oni za filtriranje, detekciju, kompresiju signala, razvijen korišćenjem nekog od transformacionih domena [1-5]. Za tu svrhu, važno je odabrati transformaciju, odnosno domen u kome će predstavljanje signala biti koncizno, tj. *sparse* [6-8]. Dakle, cilj je postići da najnačajnije informacije u vezi signala budu koncentrisane na što je moguće manjem broju transformacionih koeficijenata. Pored Furijeove transformacije, koja je jedna od osnovnih u obradi signala, (u zavisnosti od prirode problema) često se koriste Wavelet transformacija, diskretna kosinulsna transformacija, vremensko-frekvencijske transformacije i distribucije, kao npr. kratkotrajna Furijeova, kao i Hermitska transformacija [4,9-29]. Zavisno od dimenzionalnosti (jednodimenzioni, dvodimenzioni), koriste se jednodimenzione, odnosno dvodimenzione transformacije. U ovoj glavi ćemo se detaljnije posvetiti pomenutim transformacijama i nekim njihovim modifikacijama koje će biti efikasna osnova za određene pristupe predložene u tezi. Treba napomenuti da pored navedenih postoji i značajan niz drugih transformacija, ali imajući u vidu prirodu signala kojim ćemo se baviti u ovoj tezi, akcenat će biti na navedenim formama.

2.1. Furijeova transformacija

Uopšteno, predstavljanje diskretnih signala preko transformacija definisanih nekom ortogonalnom bazom može se zapisati u obliku [1-3]:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\varphi_k(n) \quad (2.1)$$

gdje je $f(n)$ diskretni signal dužine N odabiran u skladu sa teoremom o odabiranju, $\varphi_k(n)$ su bazne funkcije, a $F(k)$ transformacioni koeficijenti (k označava red koeficijenta). Kao što smo naveli, pretpostavljeno je da su bazne funkcije ortogonalne, tj.

da važi:

$$\varphi_l(n)\varphi_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{za } l = m \\ 0 & \text{za } l \neq m \end{cases} \quad (2.2)$$

Uslov ortogonalnosti je značajan, jer ukoliko je on ispunjen, onda jednostavno možemo definisati i inverznu formu transformacije [1-3].

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \varphi_k^{*T}(n) \quad (2.3)$$

gdje je $*^T$ predstavlja operaciju konjugacije i transponovanja. Prethodni zapisi mogu da se predstave u matričnoj formi. U tom slučaju:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{f} \quad (2.4)$$

odnosno, u inverznom obliku:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{F} \quad (2.5)$$

jer je ortogonalna matrica, pa je njena inverzna forma zapravo transponovana matrica. U razvijenoj formi, matrični zapis ima oblik:

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_0(1) & \cdots & \varphi_0(N-1) \\ \varphi_1(0) & \varphi_1(1) & \cdots & \varphi_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N-1}(0) & \varphi_{N-1}(1) & \cdots & \varphi_{N-1}(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Inverzna forma je:

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \varphi_0^*(0) & \varphi_1^*(0) & \cdots & \varphi_{N-1}^*(0) \\ \varphi_0^*(1) & \varphi_1^*(1) & \cdots & \varphi_{N-1}^*(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^*(N-1) & \varphi_1^*(N-1) & \cdots & \varphi_{N-1}^*(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

U slučaju Furijeove transformacije, bazne funkcije su date sa:

$$\varphi_k(n) = e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (2.8)$$

U tom slučaju, matrica φ ima oblik:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}N-1} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

odnosno, njena inverzna forma:

$$\varphi^{-1} = \varphi^{*T} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}N-1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Vidimo da je:

$$\varphi\varphi^{-1} = \mathbf{I}_{N-1} \quad (2.11)$$

Posmatrajući relacije koje definišu Furijeovu transformaciju, jednostavno se može zaključiti da je ona linearna, te da zadovoljava niz poželjnih osobina, kao što su: Furijeova transformacija konvolucija signala jednaka je proizvodu njihovih Furijeovih transformacija, Furijeova transformacija proizvoda jednaka konvoluciji Furijeovih transformacija. Periodična je sa periodom N . Pomjeranjem u vremenskom domenu implicira modulaciju u Furijeovom i slično [1,2]. Dakle, u jednodimenzionom slučaju Furijeovom transformacijom vršimo preslikavanje:

$$\mathcal{F} : f \xrightarrow{\varphi} F \quad (2.12)$$

korišćenjem kvadratne matrice φ .

2.1.1 Dvodimenziona Furijeova transformacija

Ukoliko je razmatrani signal dvodimenziona diskretna funkcija, odnosno slika, onda se za njeno predstavljanje u Furijeovom domenu koriste 2D Furijeove transformacije. U tom slučaju, imamo [1]:

$$F(k_1, k_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi\left(\frac{k_1 m}{M} + \frac{k_2 n}{N}\right)} \quad (2.13)$$

Njena inverzna forma je:

$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F(k_1, k_2) e^{j2\pi(\frac{k_1 m}{M} + \frac{k_2 n}{N})} \quad (2.14)$$

U ovom slučaju imamo preslikavanje za koje bi bilo potrebna 4D matrica, ali koje se može, preko Kronekerovih matrica, svesti na dvodimenziono:

$$\mathcal{F}_{2D} : f_{2D} \xrightarrow{\varphi^\kappa} F_{2D} \quad (2.15)$$

Posmatrana forma Furijeove transformacije je separabilna, tj. ona može biti dobijena računanjem jednodimenzione Furijeove transformacije po vrstama, a onda se računa jednodimenziona po kolonama. Osobine koje važe za jednodimenzionu mogu se direktno uopštiti na dvodimenzioni slučaj. Signal se odabira tako da bude zadovoljena teorema o odabiranju po obje koordinate.

Matrični oblik dvodimenzione Furijeove transformacije (definisana je prethodnom relacijom) ima formu:

$$\mathbf{F}_{M \times N} = \boldsymbol{\varphi}_{M \times N} \mathbf{f}_{M \times N} \boldsymbol{\varphi}_{N \times M}^T \quad (2.16)$$

gdje je $\boldsymbol{\varphi}_{N \times M}^T$ transponovana matrica od matrice $\boldsymbol{\varphi}_{M \times N}$. Inverzna forma Furijeove transformacije u matričnom obliku je data sa:

$$\mathbf{f}_{M \times N} = \boldsymbol{\varphi}_{N \times M}^{*T} \mathbf{F}_{M \times N} \boldsymbol{\varphi}_{M \times N}^* \quad (2.17)$$

Kao i u jednodimenzionom slučaju, dvodimenziona transformacija je linearna, te stoga ima niz pogodnosti za primjene. Koristi se kod signala koji se mogu efikasno predstaviti zbirom dvodimenzionih kompleksnih sinusoida. Važno je napomenuti da se primjenom jednodimenzione i dvodimenzione Furijeove transformacije na realne signale dobija dio spektra koji ima negativne frekvencije. U jednodimenzionom slučaju, jedna poluravan su negativne frekvencije, druga poluravan su pozitivne frekvencije. Odnosno, svaka realna sinusoida definisana određenom pozitivnom frekvencijom ima simetričnu komponentu na negativnoj frekvenciji i obratno. U dvodimenzionom slučaju, samo jedan kvadrant se odnosi na pozitivne frekvencije, a ostali su kombinacija pozitivnih i negativnih frekvencija. Stoga, za slučajeve realnih signala, pogodnije je umjesto Furijeove transformacije koristiti diskretnu kosinusnu transformaciju.

2.2. Diskretna kosinusna transformacija

Kao što je već naglašeno, pri radu sa realnim sinusoidama, koristi se diskretna kosinusna transformacija, data sa [2,24]:

$$DCT(k) = C(k) \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \frac{\cos(2N+1)k\pi}{2N} \quad (2.18)$$

gdje je:

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & \text{za } n = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}}, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (2.19)$$

Matrična forma diskretne kosinusne transformacije ima oblik:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{f} \quad (2.20)$$

Elementi matrice $\mathbf{T}$ dati su sa:

$$T_{n,k} = C(k) \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] \quad (2.21)$$

gdje su $n, k = 0, 1, \dots, (N-1)$. Dakle, matrica je kvadratna $N \times N$, a sa druge strane je ortogonalna, pa je njen inverzni oblik zapravo transponovana matrica. Zahvaljujući tome, inverzna forma diskrentne kosinusne transformacije je data sa:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \mathbf{D} \quad (2.22)$$

Napomenimo da je signal $\mathbf{f}$ zapisan u formi vektor kolone, a matrice $\mathbf{T}$ su kvadratne.

2.2.1 Dvodimenziona diskretna kosinusna transformacija

Po analogiji sa dvodimenzionom Furijeovom transformacijom, možemo definisati dvodimenzionu diskretnu kosinusnu transformaciju (2D DCT) kao [10,11,24]:

$$DCT(k_1, k_2) = C(k_1)C(k_2) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \frac{\cos(2M+1)k_1\pi}{2M} \frac{\cos(2N+1)k_2\pi}{2N} \quad (2.23)$$

gdje je:

$$C(k_1) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{za } k_1 = 0 \\ 1, & \text{za } k_1 > 0 \end{cases} \quad C(k_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{za } k_2 = 0 \\ 1, & \text{za } k_2 > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Matrična forma prethodne relacije je data sa:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{f} \mathbf{T}^T \quad (2.25)$$

gdje je matrica $\mathbf{T}$ data sa elementima:

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} T_{00} & \cdots & T_{0(N-1)} \\ \vdots & T_{k_1 k_2} & \vdots \\ T_{(N-1)0} & \cdots & T_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$T_{k_1, k_2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & \text{za } k_1 = 0, \quad 0 \leq k_2 \leq N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi(2k_2+1)k_1}{2N}\right), & \text{za } 1 \leq k_1 \leq N-1, \quad 0 \leq k_2 \leq N-1 \end{cases} \quad (2.27)$$

gdje su $n, k = 0, 1, \dots, (N-1)$. S obzirom da je matrica kvadratna i ortogonalna, njena inverzna matrica jednaka je transponovanoj. Zahvaljujući tome dobijamo inverznu formu diskrentne kosinusne transformacije:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^T \quad (2.28)$$

Dakle, ova transformacija je definisana za dvodimenzione signale $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, čija je priroda takva da predstavljaju kompoziciju dvodimenzionih realnih sinusoida, međutim pokazuje se kao efikasno sredstvo za obradu različitih tipova digitalnih slika.

2.3. Kratkotrajna Furijeova transformacija

Prethodno razmatrane jednodimenzione transformacije se koriste u slučajevima kada je dovoljno poznavati ukupan spektar signala, odnosno kada nije neophodno pratiti promjene spektre u vremenu. Međutim, u velikom broju aplikacija neophodno je pratiti promjene spektra u vremenu. Za tu svrhu se koriste vremensko-frekvencijske transformacije i distribucije. Najstarija (definisana za tu svrhu) i najčešće korištena je kratkotrajna Furijeova transformacija, kao i njena energetska verzija (kvadratni modul) koja se naziva spektrogram.

Posmatrajmo signal $f(n)$ dužine N . Kratkotrajna Furijeova transformacija za ovaj signal se definiše kao [15,16,18,24]:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=0}^{N-1} f(n+m)w(m)e^{-j2\pi mk/M} \quad (2.29)$$

gdje je $w(m)$ prozor dužine M , a m je tekuća koordinata. Za nepreklapajući, pravougaoni prozor, ($w(m) = 1$), možemo pisati [15,18]:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=0}^{M-1} f(n+m)e^{-j2\pi mk/M}, \quad n = 0, M, 2M, \dots, N-M \quad (2.30)$$

Odnosno, u matičnoj formi:

$$STFT(n_i, k) = \varphi_M f(n_i) \quad (2.31)$$

Primijetimo da se ova relacija odnosi na jednu poziciju prozora (fiksno n_i). Ukoliko posmatramo slučaj nepreklapajućih prozora, onda $STFT$ za čitav signal možemo zapisati u obliku [15,18]:

$$\mathbf{STFT} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{f} \quad (2.32)$$

Pri čemu je matrica $\boldsymbol{\varphi}$ definisana na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_M & \mathbf{0}_M & \cdots & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{0}_M & \boldsymbol{\varphi}_M & \cdots & \mathbf{0}_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_M & \mathbf{0}_M & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_M \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

gdje su $\boldsymbol{\varphi}_M$ matrice Furijeove transformacije dimenzije $M \times M$, dok $\mathbf{0}_M$ su nule matrice istih dimenzija. Dakle, u ovom slučaju, dobija se vektor kolona STFT, gdje grupisanjem po M elemenata dobijamo spektralni sadržaj za svaki od posmatranih trenutaka n razmatranih relacija. Preraspoređivanjem vektora u matricu dobija se vremensko-frekvencijska reprezentacija signala. Računanjem kvadratnog modula dobija se spektrogram. Relaciju (2.32) možemo dalje generalizovati. Naime, izrazimo signal preko njene Furijeove transformacije:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}_N^{-1} \mathbf{F} \quad (2.34)$$

gdje je $\boldsymbol{\varphi}_N^{-1}$ inverzna Furijeova matrica dimenzije $N \times N$, koja se može napisati kao $\boldsymbol{\varphi}_N^T$. Ako uzmemo ovo u obzir, onda prethodnu relaciju za STFT možemo predstaviti na sljedeći način:

$$\mathbf{STFT} = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_N^T \mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{F} \quad (2.35)$$

gdje je $\mathbf{A} = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_N^T$. Prethodna analiza je data za slučaj pravougaonog prozora bez preklapanja. Međutim, izvedene relacije se mogu generalizovati i za slučajeve kada funkcije prozora nisu pravougaone i kada se ne preklapaju [15]. Napomenimo da se

relacija (2.35) može generalizovati na način da obezbijedi vezu između kratkotrajne Furijeove transformacije sa različitim dužinama prozora. Ako označimo sa $STFT_M$ kratkotrajnu Furijeovu transformaciju sa prozorom dužine M , a sa $STFT_N$ transformaciju sa dužinom prozora N , onda dobijamo [15,18]:

$$STFT_M = \varphi \varphi_N^T STFT_N \quad (2.36)$$

Iako je na izgled jednostavna generalizacija, ova relacija može da posluži u mnogim primjenama kada je neophodno preći sa jedne širine prozora na drugu ili za slučajeve kada treba koristiti obje, kao na primjer u nekim scenarijima filtriranja u kontekstu kompresivnog odabiranja.

Interesantno je primijetiti da koristeći prethodni postupak, možemo povezati STFT sa nekim drugim transformacijama. Neka je inverzna forma te transformacije data sa:

$$\mathcal{L}^{-1} : L \xrightarrow{\phi} f \quad (2.37)$$

Tada je:

$$STFT = \varphi \phi L \quad (2.38)$$

Ova transformacija može da omogući kombinovanje različitih domena u cilju dobijanja što kvalitetnijeg vremensko-frekvencijskog predstavljanja. Definisanjem kratkotrajne Furijeove transformacije preko kosinusnih transformacija direktno dobijamo formu kratkotrajne kosinusne transformacije u obliku:

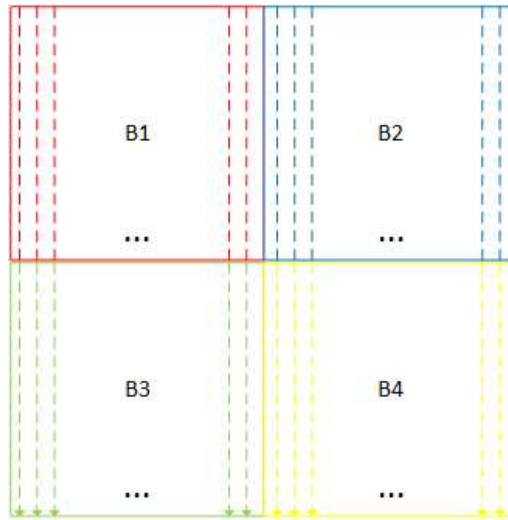
$$STFT = T T_N^T D \quad (2.39)$$

gdje je T_N matrica sa $N \times N$ elemenata za kosinusnu transformaciju definisanih sa (2.27), a T je matrica koja po dijagonalama ima podmatrice T_M dimenzije $M \times M$ analogno relaciji (2.33).

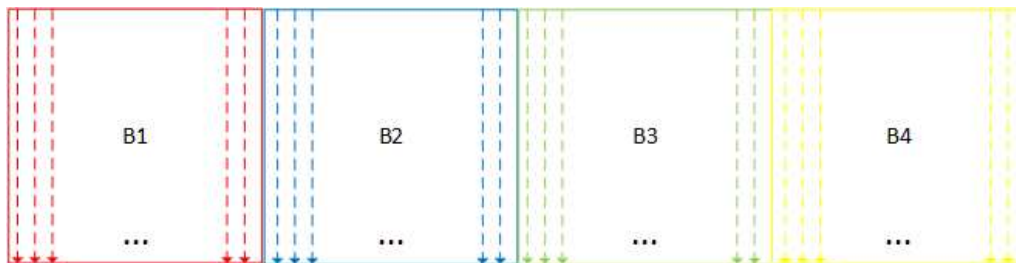
2.3.1 Veza dvodimenzionih kosinusnih transformacija blokovima različitih veličina

U ovom poglavlju će biti posvećena pažnja uspostavljanju veze između dvodimenzionih kosinusne transformacije računata po blokovima sa kosinusnom transformacijom računatom za sve blokove zajedno. Iako se na prvi pogled čini da se jednodimenzioni slučaj, razmatran u prethodnom poglavlju, može direktno primijeniti na dvodimenzioni, to zapravo nije slučaj. U jednodimenzionom slučaju, odbirci su uzimani unutar nepreklapajućih prozora. Na kraju procedure svi oni zajedno čine

odbirke ukupnog signala zadržavajući redosljed kojim je signal zadat. To nije slučaj kada se posmatraju dvodimenzioni signali. Kao ilustraciju posmatrajmo sliku koja se sastoji iz četiri bloka. Prvo, uzmimo odbirke (pikseli) prateći kolone blokova. Zatim, posmatrajmo integralno sva četiri bloka i takođe formirajmo redosljed odbiraka po kolonama integralnog bloka (slika 2.1).



Slika 2.1: Slika razdvojena na četiri bloka



Slika 2.2: Redizajnirani blokovi slike

Vidimo da vektori ukupnog signala dobijeni na ovaj način predstavljaju potpuno različite kombinacije odbiraka, pa stoga uspostavljanje direktne relacije kao za jednodimenzioni slučaj ne bi imalo smisla. Da bismo uspostavili odnos analogan jednodimenzionom slučaju, neophodno je da se integralni region/slika (dobijen od četiri bloka) redizajnira na način prikazan na slici 2.2. U ovom slučaju moguće je uspostaviti vezu između 2D kosinusne transformacije blokova sa 2D kosinusnom transformacijom integralne slike dobijene predloženim prekombinovanjem blokova. Uz vođenje računa o predloženoj geometrijskoj prekombinaciji, važno je uspostaviti relaciju kojom ćemo piksele slike i transformacione koeficijente predstaviti vektorski. Za tu svrhu, neophodno je koristiti dvodimenzionalne matrice koje će u skladu sa

prirodom problema biti značajno veće od onih u jednodimenzionom slučaju, a biće realizovane pomoću Kronekerovog tenzorskog proizvoda. Da bismo došli do željene relacije, krenućemo od već navedene jednačine:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_N \mathbf{f} \mathbf{T}_N^T \quad (2.40)$$

koja se može zapisati kao:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_N (\mathbf{T}_N \mathbf{f}^T)^T \quad (2.41)$$

Dalje, možemo koristiti sljedeću formulaciju:

$$\mathbf{d} = \text{vec}(\mathbf{D}) = \text{vec}(\mathbf{T}_N (\mathbf{T}_N \mathbf{f}^T)^T) \quad (2.42)$$

Koristeći Kronekerov tenzorski proizvod, dobijamo:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{T}_N \otimes \mathbf{T}_N) \text{vec}(\mathbf{f}) \quad (2.43)$$

gdje $\otimes$ označava Kronekerov tenzorski proizvod, $\mathbf{d}$ je vektor DCT koeficijenata dobijen iz matrice $\mathbf{D}$, očitavanjem kolona po kolona, a vektor $\text{vec}(\mathbf{f})$ je vektor piksela u prostornom domenu dobijen takođe očitavanjem po kolonama. Imajući ovo u vidu, prethodna relacija se može zapisati:

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}_{N^2 N^2}^{\mathcal{K}} \text{vec}(\mathbf{f}) \quad (2.44)$$

gdje je $\mathbf{T}_{N^2 N^2}^{\mathcal{K}} = \mathbf{T}_{NN} \otimes \mathbf{T}_{NN} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$. Vidimo da je Kronekerova matrica dimenzije $N^2 \times N^2$, ali omogućava da ovu kompleksnu relaciju svedemo na formu koja je analogna za jednodimenzioni slučaj. Za slučaj bloka $\mathbf{f}_{B_i}$ slike $\mathbf{f}$ možemo pisati:

$$\mathbf{d}_{f_{B_i}} = \mathbf{T}_{M^2 M^2}^{\mathcal{K}} \text{vec}(\mathbf{f}_B) \quad (2.45)$$

Stoga, $\mathbf{d}_{f_{B_i}}$ predstavlja vektor DCT koeficijenata dobijen iz matrice $\mathbf{D}_{f_{B_i}}$, a $\text{vec}(\mathbf{f}_{B_i})$ je vektor dobijen od bloka $\mathbf{f}_{B_i}$ (u oba slučaja, matrica se pretvara u vektor koristeći preslaganjem po kolonama). Na analogan način možemo da izvedemo vezu između koeficijenata redizajnirane slike (slika 2.2), u zavisnosti od vektora svih piksela složenih po kolonama. U tom slučaju imamo:

$$\mathbf{d}_f = \mathbf{T}_{MN, NN}^{\mathcal{K}} \text{vec}(\mathbf{f}) \quad (2.46)$$

gdje je $\mathbf{T}_{MN, NN}^{\mathcal{K}}$ Kronekerov proizvod $\mathbf{T}_{MN} \otimes \mathbf{T}_{NN} \in \mathbb{R}^{MN \times N^2}$. Posmatrajući poslednje dvije relacije, možemo uspostaviti vezu između koeficijenata računatih po

blokovima i koeficijenata računatih za preuređenu sliku. Dakle, u ovom slučaju dobijamo:

$$\mathbf{d}_{f_B} = \mathbf{D}_{\mathbf{T}_{N^2 N^2}^\kappa} \text{inv}(\mathbf{T}_{MN, NN}^\kappa) \mathbf{d}_f \quad (2.47)$$

gdje $\mathbf{d}_{f_B}$ predstavlja vektor:

$$\mathbf{d}_{f_B} = \begin{pmatrix} d_{f_{B_1}} \\ d_{f_{B_2}} \\ \vdots \\ d_{f_{B_{N/M}}} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

dužine $N \times M$, dok je dijagonalna matrica $\mathbf{D}_{\mathbf{T}_{N^2 N^2}^\kappa}$ data sa:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{T}_{N^2 N^2}^\kappa} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{M^2 M^2}^\kappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{M^2 M^2}^\kappa & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{T}_{M^2 M^2}^\kappa \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Broj dijagonalnih elemenata (podmatrica) je N/M , a $\mathbf{d}_f$ je vektor svih koeficijenata računat za redizajniranu sliku dužine $M \times N$. Oznaka inv predstavlja pseudoinverznu matricu Kronekerove matrice $\mathbf{T}_{MN, NN}^\kappa$.

2.4. Hermitska transformacija

Hermitska transformacija se u poslednje vrijeme često koristi i izučava u obradi raznih biomedicinskih signala, širokopojasnih komunikacionih signala i dvodimenzionalnih slika [6,22-29]. Bazne funkcije korištene za realizaciju Hermitske transformacije su Hermitske funkcije. Za signal $f(n)$, opšta forma Hermitske transformacije može biti zapisana u obliku:

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \varphi_k(n) \quad (2.50)$$

gdje su $\varphi_k(n)$ Hermitske funkcije tj. bazne funkcije transformacije. U praktičnim realizacijama, da bi se obezbijedila ortogonalnost, ova forma ima sklairajuće faktore i određeno ograničenje prilikom računanja Hermitskih funkcija.

Hermitska funkcija reda k je data sa [24,26]:

$$\varphi_k(n) = \frac{e^{n^2} H_k(n)}{\sqrt{2^k k!} \sqrt{n}} \quad (2.51)$$

U ovoj relaciji, korišten je Hermitski polinom p -tog reda $H_k(n)$, koji se definiše kao:

$$H_k(n) = (-1)^k e^{n^2} \frac{d^k}{dn^k} e^{-n^2} \quad (2.52)$$

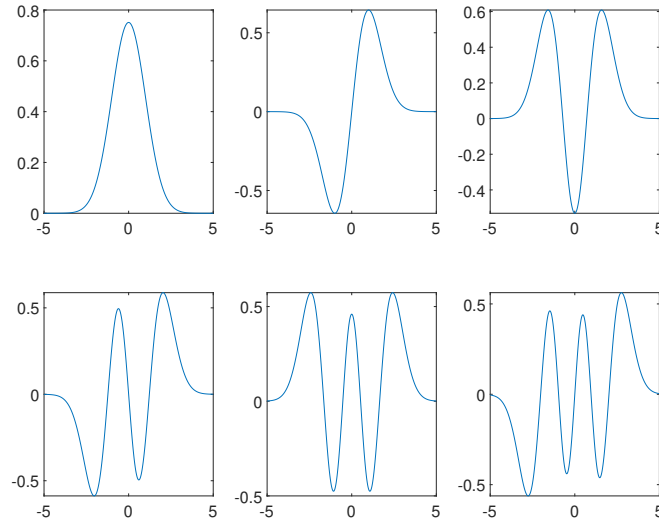
Koristeći prethodne dvije relacije, možemo napisati izraze za prve dvije Hermitske funkcije

$$\varphi_0(n) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}}, \quad \varphi_1(n) = \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \quad (2.53)$$

Sa druge strane, koristeći rekurzivnu relaciju, možemo generisati Hermitsku funkciju opšteg reda na sljedeći način [24,26]:

$$\varphi_k(n) = n\sqrt{\frac{2}{k}}\varphi_{k-1}(n) - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\varphi_{k-2}(n), \forall k \geq 2 \quad (2.54)$$

Dakle, za prve dvije hermitske funkcije $\varphi_0(n)$ i $\varphi_1(n)$ koristimo relaciju (2.53), a iz (2.54) dobijamo relaciju $\varphi_2(n)$. Daljim postupkom rekurzije dobijamo $\varphi_3(n)$, $\varphi_4(n)$ itd. Da bismo imali predstavu o obliku Hermitskih funkcija, na slici 2.3 su prikazane prvih šest funkcija.



Slika 2.3: Prvih šest hermitskih funkcija

Oblik Hermitskih funkcija nam sugerise na tipove signala koji su pogodni za obradu ovom transformacijom. Treba primjetiti da su Hermitske funkcije lokalizovane u vremenu i stoga mogu biti pogodne za analizu signala sa takvim osobinama.

Za efikasno računanje Hermitske transformacije često se koristi aproksimativna forma koja se naziva Gaus-Hermitska kvadratura aproksimacija. U ovom slučaju,

Hermitska transformacija se računa na sljedeći način [24]:

$$C(k) = \frac{1}{N} \sum_{n_i=0}^{N-1} \varphi_k^s(n_i) f(n_i) \quad (2.55)$$

gdje je

$$\varphi_k^s(n_i) = \frac{\varphi_k(n_i)}{\varphi_{N-1}^2(n_i)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.56)$$

U ovoj relaciji, Hermitske funkcije se računaju u nulama Hermitskog polinoma n_i . Dakle, za n tačaka, koristi se polinom n -toga reda, računaju se njegove nule $n_1, n_2, \dots, n_N$, te se u ovim tačkama računaju vrijednosti Hermitskih funkcija. Koristeći ovaj način računanja, obezbijeduje se ortogonalnost direktne i inverzne forme kod Gaus Hermitske aproksimacije.

Za efikasnije predstavljanje signala Hermitskom transformacijom, često se definiše takozvana bazna linija [24]:

$$b(l) = f(1) + \frac{f(N) - f(1)}{N} l \quad (2.57)$$

koja se oduzima od originalnog signala:

$$\bar{f}(l) = f(l) - b(l), \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (2.58)$$

Postupak računanja Hermitske transformacije može se sažeti u nekoliko koraka:

- Specificira se broj Hermitskih funkcija N
- Računa se N nula Hermitskog polinoma
- Računaju se vrijednosti hermitskih funkcija u svakoj od nula Hermitskog polinoma
- Hermitske funkcije se skaliraju faktorom $\varphi_{N-1}^2(n_i)$
- Računaju se Hermitski koeficijenti

Kao i za prethodne transformacije, i u ovom slučaju ćemo definisati matrične forme. Matrični oblik Hermitske transformacije (Gaus-Hermitska kvadratura aproksimacija) je dat sa [24,26]:

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\varphi}_H \mathbf{f} \quad (2.59)$$

gdje je

$$\varphi_H = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_0(n_1)}{\varphi_{N-1}^2(n_1)} & \frac{\varphi_0(n_2)}{\varphi_{N-1}^2(n_2)} & \cdots & \frac{\varphi_0(n_N)}{\varphi_{N-1}^2(n_N)} \\ \frac{\varphi_1(n_1)}{\varphi_{N-1}^2(n_1)} & \frac{\varphi_1(n_2)}{\varphi_{N-1}^2(n_2)} & \cdots & \frac{\varphi_1(n_N)}{\varphi_{N-1}^2(n_N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_{N-1}(n_1)}{\varphi_{N-1}^2(n_1)} & \frac{\varphi_{N-1}(n_2)}{\varphi_{N-1}^2(n_2)} & \cdots & \frac{\varphi_{N-1}(n_N)}{\varphi_{N-1}^2(n_N)} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Odnosno,

$$\varphi_H = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \varphi_0^s(0) & \varphi_0^s(1) & \cdots & \varphi_0^s(N-1) \\ \varphi_1^s(0) & \varphi_1^s(1) & \cdots & \varphi_1^s(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N-1}^s(0) & \varphi_{N-1}^s(1) & \cdots & \varphi_{N-1}^s(N-1) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

gdje su $\varphi_p^s(0), \varphi_p^s(1) \dots$ skalirane Hermitske funkcije računate u nulama Hermitskih polinoma.

Inverzna Hermitska transformacija u matričnom obliku je data sa:

$$\mathbf{f} = \varphi_H^{-1} \mathbf{C} \quad (2.62)$$

gdje je:

$$\varphi_H^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_1(0) & \cdots & \varphi_{N-1}(0) \\ \varphi_0(1) & \varphi_1(1) & \cdots & \varphi_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(N-1) & \varphi_1(N-1) & \cdots & \varphi_{N-1}(N-1) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Uslov ortogonalnosti matrica φ_H i φ_H^{-1} , računanjem u nulama Hermitskog polinoma, kao i skaliranjem matrice koeficijenata na način kao u relaciji (2.60).

Ortogonalnost matrice i razlozi koji dovode do Gaus-Hermitske aproksimacije će kasnije biti razmatran i detaljnije analiziran.

2.4.1 Hermitska transformacija sa skalirajućim faktorom

U prethodnim razmatranjima, Hermitske funkcije su definisane bez skalirajućeg faktora. Ukoliko uvedemo skalirajući faktor σ , omogućićemo da se njime kontroliše širina baznih funkcija, što može doprinijeti boljem predstavljanju signala lokalizovanih u vremenu. Opšti oblik Hermitske funkcije sa faktorom σ koji utiče na njeno skupljanje ili širenje je dat sa [6,28]:

$$\varphi_k(n, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma 2^k k! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} H_k \left(\frac{n}{\sigma} \right) \quad (2.64)$$

Odnosno:

$$\varphi_0(n, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma}}, \quad \varphi_1(n, \sigma) = \frac{\sqrt{2}n}{\sigma^2 \sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma}} \quad (2.65)$$

$$\varphi_k(n, \sigma) = n\sqrt{\frac{2}{k}}\varphi_{k-1}(n, \sigma) - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\varphi_{k-2}(n, \sigma), \forall k \geq 2 \quad (2.66)$$

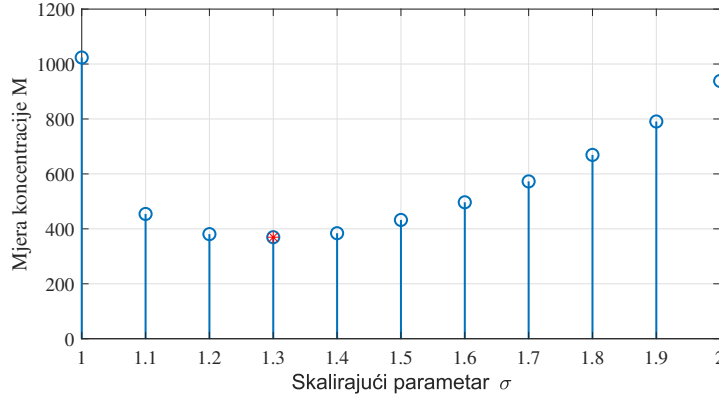
Uvođenjem skalirajućeg faktora σ , ortogonalnost Hermitskih funkcija nije poremećena. Faktor σ se bira tako da obezbijedi najkoncizniju, odnosno *sparse* prezentaciju u Hermitskom domenu. To znači da se optimalna vrijednost za σ dobija kao rješenje optimizacionog problema [28]:

$$\sigma_{opt} = \arg \min_{\sigma} (M_H) \quad (2.67)$$

Dakle, neophodno je izabrati σ takvo da mjera koncentracije M_H bude minimalna. Jednostavna forma, koji zadovoljava veliki broj praktičnih aplikacija je mjera koncentracije računata preko ℓ_1 norme Hermitskih koeficijenata, tj.:

$$M_H = \|\mathbf{C}\|_1 = \sum_{n=0}^{N-1} |C(n)| \quad (2.68)$$

Jedan jednostavan ilustrativni primjer gdje se optimalna vrijednost traži u zadanom opsegu, koristeći fiksni korak je prikazan na slici:



Slika 2.4: Optimizovani skalirajući parametar σ

Brži i precizniji način za određivanje optimalnog skalirajućeg faktora se dobija korišćenjem konveksno optimizacionog algoritma.

2.4.2 Diskretna Hermitska transformacija realizovana pomoću simetrične tridijagonalne matrice

Diskretne hermitske transformacije mogu biti dobijene kao sopstveni vektori pomoću centrirane Furijeove matrice, koja zadovoljava uslov [29]:

$$\mathbf{F}_C \tilde{\varphi}_k(n, \sigma) = jn \tilde{\varphi}_k(n, \sigma), \quad j = \sqrt{-1} \quad (2.69)$$

Posmatrajmo tridijagonalnu matricu oblika:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \varphi_0^t(0) & \varphi_1^t(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1^t(1) & \varphi_0^t(1) & \varphi_1^t(2) & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_1^t(2) & \varphi_0^t(2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \varphi_1^t(N-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_1^t(N-1) & \varphi_0^t(N-1) \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

gdje su:

$$\varphi_0^t(n) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{N\sigma^2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{M\sigma^2}(N-1-n)\right) \quad (2.71)$$

$$\varphi_1^t(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{N\sigma^2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{M\sigma^2}(N-n)\right) \quad (2.72)$$

Ova matrica zadovoljava osobine centrirane Furijeove matrice $\mathbf{F}_C$. Vršeci dekompoziciju zasnovanu na sopstvenim vrijednostima možemo pisati [29]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \quad (2.73)$$

U ovom slučaju, Hermitske funkcije se dobijaju kao sopstveni vektori matrice $\mathbf{T}$, odnosno Hermitske funkcije predstavljaju kolone matrice $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = [\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_{N-1}] \quad (2.74)$$

Ovo je u skladu sa teorijskom postavkom da su sopstveni vektori matrice $\mathbf{F}_C$ zapravo Hermitske funkcije. Dijagonalna matrica $\mathbf{\Lambda}$ je matrica sopstvenih vrijednosti. Dobijene Hermitske funkcije su veoma slične sa teorijskim definisanim vrijednostima. Postoje određene razlike koje su izraženije sa povećanjem reda funkcije p .

Važno je napomenuti da su ovako dobijene Hermitske matrice ortogonalne. Za-

pišimo je u formi:

$$\varphi_{HT} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0(0, \sigma) & \tilde{\varphi}_0(1, \sigma) & \cdots & \tilde{\varphi}_0(N-1, \sigma) \\ \tilde{\varphi}_1(0, \sigma) & \tilde{\varphi}_1(1, \sigma) & \cdots & \tilde{\varphi}_1(N-1, \sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\varphi}_{N-1}(0, \sigma) & \tilde{\varphi}_{N-1}(1, \sigma) & \cdots & \tilde{\varphi}_{N-1}(N-1, \sigma) \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Značajno je istaknuti da za računanje elemenata ove matrice nije neophodno računati nule Hermitskog polinoma. Stoga je ova forma pogodna za implementaciju, a Hermitski koeficijenti se računaju kao:

$$\mathbf{C} = \varphi_{HT} \mathbf{f} \quad (2.76)$$

Sa obzirom da je φ_{HT} ortogonalna, onda je:

$$\varphi_{HT}^{-1} = \varphi_{HT}^T \quad (2.77)$$

pa je inverzna forma data sa:

$$\mathbf{f} = \varphi_{HT}^T \mathbf{C} \quad (2.78)$$

2.4.3 Hermitska transformacija za dvodimenzione signale

Prije nego što definišemo dvodimenzionu formu Hermitske transformacije, treba naglasiti da se jednodimenziona može u nekim slučajevima primijeniti za obradu i kompresije dvodimenzionih slika [23,24]. Naime, ako posmatramo sliku $f(m, n)$, onda svaki red slike možemo posmatrati kao jednodimenzionu funkciju, odnosno za fiksno n_i , možemo je pisati kao $f_n(m)$ za $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Za svaki red slike računamo jednodimenzione Hermitske transformacije u skladu sa definisanim procedurama. Slično možemo primijeniti jednodimenzione Hermitske transformacije na kolone slike.

Računanje dvodimenzione Hermitske transformacije je dato u skladu sa matičnom relacijom:

$$\mathbf{C}_{2D} = \varphi_H \mathbf{f} \varphi_H^T \quad (2.79)$$

U ovoj relaciji, bez gubljenja opštosti mogu biti korištene matrice dobijene za realizaciju Gaus-Hermitske aproksimacije. Za triangularnu matricu imamo:

$$\mathbf{C}_{2D} = \varphi_{HT} \mathbf{f} \varphi_{HT}^T \quad (2.80)$$

Slično kao i za slučaj 2D diskretne kosinusne transformacije i u ovom slučaju možemo izvesti relaciju koristeći Kronekerov proizvod Hermitskih matrica. Dakle, relaciju (2.79) možemo zapisati kao:

$$\mathbf{C}_{2D} = \boldsymbol{\varphi}_H \mathbf{f} \boldsymbol{\varphi}_H^T = \boldsymbol{\varphi}_H (\boldsymbol{\varphi}_H \mathbf{f}^T)^T \quad (2.81)$$

Ako dvodimenzionu Hermitsku transformaciju zapišemo u formi vektora, imamo:

$$\mathbf{c} = \text{vec}(\mathbf{C}_{2D}) = \text{vec}(\boldsymbol{\varphi}_H (\boldsymbol{\varphi}_H \mathbf{f}^T)^T) \quad (2.82)$$

Koristeći Kronekerov tenzorski proizvod dobijamo:

$$\mathbf{c} = (\boldsymbol{\varphi}_H \otimes \boldsymbol{\varphi}_H) \text{vec}(\mathbf{f}) \quad (2.83)$$

odnosno:

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\varphi}_{H_{N^2 N^2}}^{\mathcal{K}} \text{vec}(\mathbf{f}) \quad (2.84)$$

gdje je:

$$\boldsymbol{\varphi}_{H_{N^2 N^2}}^{\mathcal{K}} = \boldsymbol{\varphi}_H \otimes \boldsymbol{\varphi}_H \quad (2.85)$$

U prethodnoj matrici podrazumijevana je kvadratna Hermitska matrica dimenzije $N \times N$, pa je stoga Kronekerova matrica dimenzije $N^2 \times N^2$. Analogno kao i u slučaju dvodimenzione kosinusne transformacije, jednostavno se dobija veza između Hermitskih koeficijenata blokova slike sa Hermitskim koeficijentima redizajnirane slike (slika 2.2).

$$\mathbf{c}_{f_B} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}_{H_{N^2 N^2}}^{\mathcal{K}}} \text{inv}(\boldsymbol{\varphi}_{H_{MN, NN}}^{\mathcal{K}}) \mathbf{c}_f \quad (2.86)$$

gdje je $\mathbf{c}_{f_B}$ vektor koeficijenata svih blokova (po kolonama, blok po blok). Matrica $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}_{H_{N^2 N^2}}^{\mathcal{K}}}$ je dijagonalna matrica na čijim dijagonalama su podmatrice $\boldsymbol{\varphi}_{H_{M^2 M^2}}^{\mathcal{K}}$, a $\mathbf{c}_f$ je vektor Hermitskih koeficijenata računat za redizajniranu sliku. Dimenzije blokova su $M \times M$, a $M \times N$ je dimenzija redizajnirane slike.

3. Kompresivno odabiranje

U prethodnom poglavlju, bavili smo se diskretnim signalima i napomenuli da su signali odabirani u skladu sa teoremom odabiranja. Teoremom o odabiranju se definiše najveći korak odabiranja, odnosno razmak između dva odbirka na osnovu koga je moguća tačna rekonstrukcija analognog signala iz njegovih odbiraka. Po teoremi o odabiranju, korak odabiranja treba da bude manji ili jednak recipročnoj vrijednosti dvostruke širine opsega signala. S obzirom da se u modernim komunikacijama i raznim aplikacijama radi sa ogromnim količinama podataka, cilj je da se njihov broj svede na što je moguće manju mjeru. U zadnje vrijeme, intenzivno se izučavaju i primjenjuju koncept odabiranja koji se zove kompresivno odabiranje (eng. *compressive sensing*) [30-37]. Ovaj pristup omogućava uspješnu rekonstrukciju signala iz značajno manje odbiraka u poređenju sa onim koji je zahtjevan teoremom odabiranja. Da bi se ovaj pristup mogao uspješno primijeniti, signal mora da zadovolji određene uslove, prije svega da se može koncizno predstaviti u određenom domenu (eng. *sparsity*) [38-42].

Kompresivno odabiranje podrazumijeva uzimanje manjeg broja odbiraka po slučajnom uzorku, na osnovu kojih se kasnije vrši rekonstrukcija nedostajućih odbiraka. Matematički gledano, problem kompresivnog odabiranja pripada tzv. loše postavljanim (eng. *ill-posed*) problemima, gdje se za rekonstrukciju koriste optimizacioni algoritmi. U tu svrhu koristi se Tihonova regularizacija. Da bi se dobilo na jednostavnosti u kompresivnom odabiranju je razvijen veći broj algoritama koji imaju određena ograničenja, ali pokazuju efikasnost i jednostavnost u značajnom broju aplikacija [43-48]. Jedan od pristupa - konveksnih optimizacija podrazumijeva rekonstrukciju konveksno optimalnom minimizacijom, pri čemu se najčešće koristi ℓ_1 regularizacija. Kompresivno odabiranje se koristi u obradi medicinskih slika, audio signala, komunikacijama itd.

3.1. Osnovni teorijski principi

Kako smo već naglasili, koncept kompresivnog odabiranja se primjenjuje za slučaj signala koje imaju koncizno, odnosno *sparse* predstavljanje u nekom domenu. Naime, da bi rekonstrukcija nedostajućih odbiraka bila uspješna, neophodno je da dužina signala bude značajno veća od broja nenultih koeficijenata u transformacionom domenu [24,30-33]. U tom slučaju, signal se može rekonstruisati iz manjeg skupa nekoherentnih (nasumično raspoređenih) mjerenja/odbiraka. Ako su zadovoljeni uslovi nekoherencije i razrijeđenosti, odnosno konciznosti u transformacionom domenu, problem rekonstrukcije definiše se kao problem minimizacije broja nenultih koeficijenata u razmatranom transformacionom domenu [33]. U matematičkom smislu ovo predstavlja minimizaciju ℓ_0 norme. S obzirom da su numeričke implementacije zasnovane na ℓ_0 normi prilično zahtjevne, rekonstrukcioni algoritmi su zasnovani na minimizaciji ℓ_1 norme [24,30,33].

Razmotrimo diskretni originalni signal $f(n)$ sa N originalnih uzoraka $n = 0, 1, \dots, N-1$ i skup od N odgovarajućih transformacionih koeficijenata $F(k)$, za $k = 0, 1, \dots, N-1$. Obilježimo vektor sa elementima $F(k)$ kao $\mathbf{F}$, za koji kažemo da je spars/koncizan ako je broj nenultih koeficijenata K mnogo manji od N :

$$F(k) = 0, \text{ za } k \notin K = \{k_1, k_2, \dots, k_K\}, \quad K \ll N \quad (3.1)$$

Ova relacija se takođe može zapisati na sljedeći način:

$$\text{supp}(\mathbf{F}) = \{k \in (1, 2, \dots, N) | F(k) \neq 0\} \quad (3.2)$$

koji predstavlja skup pozicija odbiraka sa nenultim vrijednostima vektora $\mathbf{F}$. Stoga, možemo dalje zapisati relaciju kao:

$$\text{card}\{\text{supp}(x)\} \leq K, \quad K \ll N \quad (3.3)$$

Uzimajući u obzir ovu relaciju, broj nenultih koeficijenata predstavlja ℓ_0 normu vektora $\mathbf{F}$ [30]. Drugim riječima, nivo konciznosti odbiraka se može računati sljedećom relacijom:

$$\|\mathbf{F}\|_0 = \text{card}\{\text{supp}(x)\} \leq K^1 \quad (3.4)$$

Treba opet napomenuti da se samo u teorijskim analizama koriste izrazi za minimizaciju ℓ_0 normom, međutim u praktičnim primjerima će se koristiti ℓ_1 norma.

Posmatrajmo M mjerenja signala $f(n)$ označena sa $\mathbf{y} = [y(0), y(1), \dots, y(M-1)]$

¹ $\|\mathbf{F}\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|\mathbf{F}\|_p^p = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^p = \sum_{k=0; F(k) \neq 0}^{N-1} 1 = K$

1)]^T ∈ ℝ^m. U matričnom obliku slijedi:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} \quad (3.5)$$

gdje matrica $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ omogućava da iz čitavog skupa odbiraka $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ uzimamo samo neke. Na primjer, posmatrajmo:

$$\begin{array}{ll} f(n), n = 1, 2, \dots, 8 & \\ y(n_m), n_m = 1, 2, 3, 4, 5 & \text{gdje je} \end{array} \quad \begin{array}{l} y(1) = f(3) \\ y(2) = f(6) \\ y(3) = f(4) \\ y(4) = f(1) \\ y(5) = f(8) \end{array} \quad (3.6)$$

Dakle, koristeći (3.5) imamo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \\ f(8) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} \quad (3.7)$$

Iz prethodne jednačine dobijamo da je $\mathbf{y} = \{f(3), f(6), f(4), f(1), f(8)\}$.

Za signal $\mathbf{y}$ se može napisati relacija kojom se povezuje sa transformacionim domenom:

$$y(n_m) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(n_m) F(k), n_m = 0, 1, \dots, M-1, M < N \quad (3.8)$$

gdje su $\alpha_k(n_m)$ težinski koeficijenti. Sistem jednačina je predstavljen preko matrične relacije u kojoj imamo M promjenjivih i N jednačina:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(0) & \alpha_1(0) & \cdots & \alpha_{N-1}(0) \\ \alpha_0(1) & \alpha_1(1) & \cdots & \alpha_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(M-1) & \alpha_1(M-1) & \cdots & \alpha_{N-1}(M-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Da bi se riješio ovaj sistem jednačina, potrebno je da matrica $\mathbf{F}$ bude koncizna. Ako su svi elementi matrice $\mathbf{F}$ nenulti, onda kompresivno odabiranje gubi smisao. Ova relacija se takođe može zapisati u obliku [30]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (3.10)$$

gdje matrica $\mathbf{A}$ označava proizvod matrice mjerenja i transformacione matrice. Naapišimo sada u matričnom obliku signal $\mathbf{f}$ pomoću Furijeovih koeficijenata $\mathbf{F}$. U tom slučaju je:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (3.11)$$

Imajući u vidu (3.5) i (3.11), dobijamo [30,33]:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{f} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (3.12)$$

Iz prethodne relacije možemo zaključiti da je matrica mjerenja $\mathbf{A}$ dobijena iz matrice inverzne transformacije $\boldsymbol{\varphi}^T$, tako što su zadržane vrste koje odgovaraju poziciji dostupnih mjerenja, dok se ostale vrste matrice odbacuju (u našem primjeru ostale bi vrste 1, 3, 4, 6 i 8). Ova matrica se obično naziva nepotpuna matrica u transformacionom domenu. Za slučaj kad se koristi Furijeov domen, elementi matrice su $\phi_{n,k} = \frac{1}{N}e^{i2\pi nk/N}$, $n, k = 0, 1, \dots, N-1$. U razvijenom obliku, matrica $\boldsymbol{\varphi}^T$ se može prikazati kao [24]:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

dok nepotpuna transformaciona matrica ima oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_0^T(n_{m_0}) & \varphi_1^T(n_{m_0}) & \dots & \varphi_{N-1}^T(n_{m_0}) \\ \varphi_0^T(n_{m_1}) & \varphi_1^T(n_{m_1}) & \dots & \varphi_{N-1}^T(n_{m_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^T(n_{m_{N-1}}) & \varphi_1^T(n_{m_{N-1}}) & \dots & \varphi_{N-1}^T(n_{m_{N-1}}) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

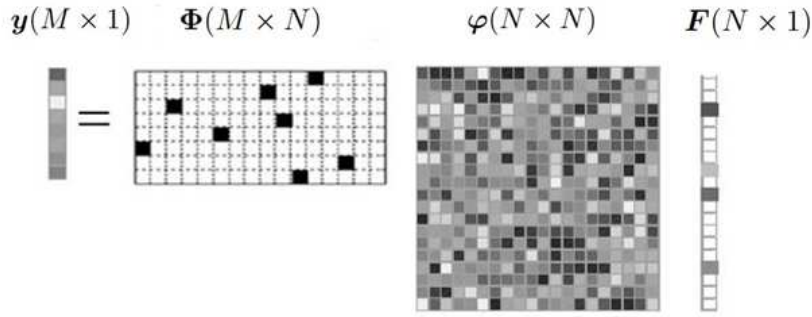
gdje $n_m = \{n_{m_0}, n_{m_1}, \dots, n_{m_{N-1}}\}$ predstavljaju pozicije dostupnih odbiraka, tj.

$$\begin{aligned} y(m) &= f(n_{m_i}), m = 0, 1, \dots, M-1 \\ n_{m_i} &\in \{n_{m_0}, n_{m_1}, \dots, n_{m_{N-1}}\} \subset \{0, 1, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

U ovom slučaju, matrica $\mathbf{A}$ ima formu:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi n_{m0}}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi n_{m0}(N-1)}{N}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi n_{m1}}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi n_{m1}(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi n_{mM-1}}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi n_{mM-1}(N-1)}{N}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Dakle, matrica $\mathbf{A}$ je dobijena uzimajući samo one vrste koje odgovaraju rednom broju dostupnih odbiraka. Na ovaj način treba da se dobije sistem jednačina, koja ima više jednačina nego nepoznatih. Postoji niz matematičkih metoda koje se koriste za rješavanje ovog problema, odnosno pronalaženje tačne vrijednosti Furijeovih koeficijenata iz kojih se nakon toga u potpunosti rekonstruiše svaki odbirak signala. Ilustracija koja pokazuje vezu između $\mathbf{y}$ i $\mathbf{F}$ je data na slici [30]:



Slika 3.1: Ilustracija osnovnog principa kompresivnog odabiranja

3.2. Rekonstrukcija signala na osnovu dostupnih odbiraka

Rekonstrukcija nedostajućih odbiraka se može svesti na problem minimizacije u obliku [24]:

$$\min \|\mathbf{F}\|_0 \text{ pod uslovom } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (3.16)$$

Drugim riječima, samo u slučaju tačnih vrijednosti na mjestima nedostajućih odbiraka, dobićemo minimalan broj Furijeovih koeficijenata, koje teorijski računamo normom ℓ_0 . Za sve druge vrijednosti, Furijeova transformacija će da bude takva da je broj nenultih koeficijenata veći od definisanog minimuma. Iako je u postavci problema ℓ_0 norma teorijski korektna, ona je nekonveksna i čini prethodnu relaciju teško rješivom. Zato se u praktičnim aplikacijama ℓ_0 norma zamjenjuje sa ℓ_1 normom, te

u tom slučaju, prethodni problem se rješava u obliku [24,30-33]:

$$\min \|\mathbf{F}\|_1 \text{ pod uslovom } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (3.17)$$

Treba istaći da je ℓ_1 norma Furijeove transformacije zapravo mjera koncentracije te transformacije. Ako je recimo signal jedna sinusoida, onda je rješenje delta impuls i to je mjera najbolje koncentracije. Svaki nedostajući odbirak bi dao izobličenu Furijeovu transformaciju čiji oblik bi odstupao od delta impulsa i ne bi predstavljao najbolju koncentraciju, odnosno minimum ℓ_1 norme. Tek kada pronađemo prave vrijednosti za nedostajuće odbirke, dobićemo delta impuls, odnosno ℓ_1 normu.

Posmatrajmo slučaj kada su pozicije nenultih koeficijenata poznate i predstavljaju skup $K \in \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$. Matrica $\mathbf{F}_K$ može se zapisati kao:

$$\mathbf{F}_K = \begin{pmatrix} F(k_1) \\ F(k_2) \\ \vdots \\ F(k_K) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Imajući u vidu vektor $\mathbf{F}_K$, možemo pisati:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_K \mathbf{F}_K \quad (3.19)$$

a matrica $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{M \times K}$ se dobija od matrice $\mathbf{A}$ izostavljajući kolone koje korespondiraju nultim koeficijentima matrice $\mathbf{F}$.

3.3. Rekonstrukcija komponenti za slučaj kada su pozicije u Furijeovom domenu poznate

Problem rekonstrukcije se značajno pojednostavljuje ukoliko iz Furijeove transformacije možemo da odredimo pozicije nenultih Furijeovih koeficijenata. Ovo je čest slučaj u praksi, jer pozicije na kojima postoji signal dominiraju u odnosu na Furijeove koeficijente koji su rezultat šuma usljed nedostajućih odbiraka. Često je i unaprijed poznato koliko frekvencijskih komponenti signal sadrži. U ovom slučaju, kod matrice $\mathbf{A}$ se izostavljaju kolone čiji redni broj odgovara pozicijama nultih Furijeovih koeficijenata, a istovremeno se izostavljaju vrste koje odgovaraju pozicijama nedostajućih odbiraka signala. Sa tako dobijenom matricom rješenje se može naći

minimizacijom greške metodom najmanjih kvadrata. Tada je:

$$e^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{F}\|_2^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{F})^H (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{F}) \quad (3.20)$$

gdje $[\cdot]^H$ predstavlja konjugovano kompleksnu transponovanu matricu. Stoga, minimalna greška se dobija iz:

$$\frac{\partial e^2}{\partial \mathbf{F}_K^{*T}} = -2\mathbf{A}_K^{*T} \mathbf{y} + 2\mathbf{A}_K^{*T} \mathbf{A}_K \mathbf{F}_K = 0 \quad (3.21)$$

Zatim, rješenje se dobija u obliku:

$$\mathbf{F}_K = (\mathbf{A}_K^{*T} \mathbf{A}_K)^{-1} \mathbf{A}_K^{*T} \mathbf{y} \quad (3.22)$$

Prethodna relacija se može generalizovati za slučaj kada transformaciona matrica nije ortogonalna. Primijenjujući QR dekompoziciju, dobija se [49]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_K &= ((\mathbf{Q}\mathbf{R})^T \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{Q}\mathbf{R})^T \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{y} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{Q}^{-1})^T (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{y} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dakle, dobijamo konačnu relaciju za matricu $\mathbf{F}_K$:

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{y} \quad (3.24)$$

U prethodnom izvođenju, razmatran je slučaj realne matrice. S obzirom da je matrica $\mathbf{Q}$ ortogonalna i da važi da je $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, dok je matrica $\mathbf{R}$ gornja trougaona matrica, ova metoda značajno olakšava numeričku proceduru. U literaturi se često koriste tri algoritma za ovu dekompoziciju: Gram-Šmit (*Gram-Schmidt*) metoda, Givensove rotacije (*Givens rotations*) i Hausholderova transformacija (*Householder transformation*).

3.3.1 OMP rekonstrukcioni algoritam

Jedan od fundamentalnih algoritama za rekonstrukciju signala je OMP (*eng. Orthogonal Matching Pursuit*) algoritam. To je iterativni algoritam gdje se aproksimacije koeficijenata računaju kroz iteracije [24,44,45]. Pseudokod ovog algoritma je dat u nastavku:

Algorithm 1 OMP algoritam za 1D rekonstrukciju

Ulazi:

- Vektor mjerenja $\mathbf{y}$
- Matrica mjerenja $\mathbf{A}$
- Broj koeficijenata iz iteracija r
- Kriterijum ε

```
1:  $K \leftarrow \emptyset$ 
2:  $\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{y}$ 
3: while  $\|\mathbf{e}\|_2 > \varepsilon$  do
4:    $(k_1, k_2, \dots, k_r)$  - pozicije iz  $r$  veće od  $\mathbf{A}^H \mathbf{e}$ 
5:    $K \leftarrow K \cup \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ 
6:    $\mathbf{A}_K$  - kolone matrice  $\mathbf{A}$  izdvojene iz skupa  $K$ 
7:    $\mathbf{F}_K \leftarrow \text{pinv}(\mathbf{A}_K) \mathbf{y}$ 
8:    $\mathbf{y}_K \leftarrow \mathbf{A}_K \mathbf{F}_K$ 
9:    $\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{y}_K$ 
10: end while
11:  $\mathbf{F} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{za pozicije koje ne pripadaju } K \\ \mathbf{F}_K & \text{za pozicije koje pripadaju } K \end{cases}$ 
```

Izlaz:

- Koeficijenti rekonstruisanog signala $\mathbf{F}$
-

Prvi element skupa K se dobija preko pozicije iz maksimalne vrijednosti u transformacionom domenu $k_1 = \arg \max |\mathbf{A}^H \mathbf{y}|$. Ova komponenta se estimira na osnovu (3.20) i (3.23). Dobijena vrijednost se oduzima od početnog signala i dobija se rezidualni signal $\mathbf{e}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1$. Nakon toga druga pozicija nenulte vrijednosti se estimira na osnovu $k_2 = \arg \max |\mathbf{A}^H \mathbf{e}_1|$ sa čime se proširuje skup $K = \{k_1, k_2\}$. Čitava procedura se ponavlja iterativno da bi se dobio rezidualni signal manji od unaprijed zadate greške. U određenim aplikacijama, poznat je broj komponenti signala, tada je broj iteracija jednak broju komponenti.

3.3.2 Konveksno optimizacioni - gradijentni algoritam

U ovom algoritmu, pretpostavimo da imamo M dostupnih odbiraka na pozicijama $N_M = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$. Ovo znači da imamo $N - M$ nedostajućih odbiraka na

pozicijama iz skupa $N \setminus N_M$. Na pozicijama nedostajućih odbiraka u početnoj iteraciji možemo postaviti vrijednosti 0. Te vrijednosti će kroz iteracije biti ažurirane na način da konvergiraju vrijednostima za koje ℓ_1 norma ima minimalnu vrijednost. Vrijednosti nedostajućih odbiraka kroz iteracije se računaju kao [50]:

$$\mathbf{y}_*^{(i+1)} = \mathbf{y}_*^{(i)} - \alpha \frac{\partial \|\boldsymbol{\varphi} \mathbf{y}\|_1}{\partial \mathbf{y}_*} \bigg|_{\mathbf{y}_* = \mathbf{y}_*^{(i)}} \quad (3.25)$$

gdje je $\mathbf{y}_*^{(i)}$ vektor nedostajućih odbiraka u i -toj iteraciji, $*$ označava nedostajuće odbirke na pozicijama $n_m \in N \setminus N_M$, dok je matrica $\boldsymbol{\Phi}$ direktna transformaciona matrica (npr. DFT), a oznaku $\boldsymbol{\varphi}^T$ koristimo za inverznu transformacionu matricu. Za svaki nedostajući odbirak na pozicijama n_m , gdje je $m \in N \setminus N_M$ se formiraju dva nova vektora [24,44,50]:

$$y_1(n) = \begin{cases} y^{(i)}(n) & \text{za } n \neq n_m \\ y^{(i)}(n) + \tau & \text{za } n = n_m \in N \setminus N_M \end{cases} \quad (3.26)$$

$$y_2(n) = \begin{cases} y^{(i)}(n) & \text{za } n \neq n_m \\ y^{(i)}(n) - \tau & \text{za } n = n_m \in N \setminus N_M \end{cases} \quad (3.27)$$

gdje se vrijednosti n_m -tog nedostajućeg odbirka povećavaju i smanjuju za neku vrijednost parametra τ . Na poziciji nedostajućeg odbirka n_m , gradijent se računa kao [50]:

$$g^{(i)}(n_m) = \frac{\|\boldsymbol{\varphi} \mathbf{y}_1\|_1 - \|\boldsymbol{\varphi} \mathbf{y}_2\|_1}{2\tau} \quad (3.28)$$

U algoritmu se može koristiti parametar $\alpha = 2\tau E$, gdje E korespondira energiji inverzne transformacije.

Algorithm 2 Gradijentni algoritam za 1D rekonstrukciju

```

1:  $i \leftarrow 0$ 
2:  $\mathbf{y}^{(0)}(n_m) = y(m)$  za  $n_m \in \mathbf{N}_M, m = 1, 2, \dots, M$  i  $\mathbf{y}^{(0)}(n) = 0$  za  $n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_M$ 
3:  $\tau \leftarrow \max |y^{(0)}(n)|$ 
4: repeat
5:   repeat
6:      $\mathbf{y}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{y}^{(i)}$ 
7:     for  $n_m \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_M$  do
8:        $\mathbf{y}_1 \leftarrow \mathbf{y}^{(i)}, y_1(n_m) \leftarrow y_1(n_m) + \tau$ 
9:        $\mathbf{y}_2 \leftarrow \mathbf{y}^{(i)}, y_2(n_m) \leftarrow y_1(n_m) - \tau$ 

```

```

10:          $g(n_m) \leftarrow \|\boldsymbol{\varphi}^\dagger \mathbf{y}_1\|_1 - \|\boldsymbol{\varphi}^\dagger \mathbf{y}_2\|_1$ 
11:          $y^{(i+1)}(n_m) \leftarrow y^{(i)}(n_m) - \alpha g(n_m)$ 
12:     end for
13:      $i \leftarrow i + 1$ 
14: until dostignuta vrijednost stop kriterijuma
15:      $\tau \leftarrow \tau/3$ 
16: until dostignuta vrijednost stop kriterijuma
17:  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y}^{(i)}$ 

```

Takođe se ovaj algoritam može primijeniti na dvodimenzionalne signale. Pseudokod za rekonstrukciju dvodimenzionalnog signala je dat u sljedećoj tabeli [51]:

Algorithm 3 Gradijentni algoritam za 2D rekonstrukciju

Ulaz:

- skup pozicija dostupnih odbiraka $(k_1, k_2) \in P_a$
 - skup pozicija nedostajućih odbiraka $(l_1, l_2) \in P_m$
- ```

1: postaviti $y^{(iter=0)}(k_1, k_2) = \begin{cases} s(k_1, k_2), & \text{za } (k_1, k_2) \in P_a \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}$
2: postaviti $\tau = \max_{k_1, k_2} |y^{(iter=0)}(k_1, k_2)|$
3: postavljanje preciznosti PR_{max} i $y_p(k_1, k_2) = y^{(iter=0)}(k_1, k_2)$
4: postavljanje $iter = 0$
5: Računanje $PR = 10 \log_{10} \frac{\sum \sum_{(k_1, k_2) \in P_m} |y^{(iter)}(k_1, k_2)|^2}{\sum \sum_{(k_1, k_2) \in P_m} |y_p(k_1, k_2) - y^{(iter)}(k_1, k_2)|^2}$
6: while $iter < 100$ do
7: Računanje:

```

$$y_{l_1, l_2}^+(k_1, k_2) = y^{iter}(k_1, k_2) + \tau \delta(k_1 - l_1, k_2 - l_2), \text{ za } \forall (l_1, l_2) \in P_m$$

$$y_{l_1, l_2}^-(k_1, k_2) = y^{iter}(k_1, k_2) - \tau \delta(k_1 - l_1, k_2 - l_2), \text{ za } \forall (l_1, l_2) \in P_m$$

- ```

8:     Računanje koeficijenata u transformacionom domenu:

```

$$Y_{l_1, l_2}^+(p, q) = \mathbb{T}\{y_{l_1, l_2}^+(k_1, k_2)\}$$

$$Y_{l_1, l_2}^-(p, q) = \mathbb{T}\{y_{l_1, l_2}^-(k_1, k_2)\}$$

- ```

9: Računanje gradijentnog vektora:

```

$$G^{(iter)}(l_1, l_2) = \frac{\sum_{p=0}^{N_I-1} \sum_{q=0}^{N_I-1} |Y_{l_1, l_2}^+(p, q)| \sum_{p=0}^{N_I-1} \sum_{q=0}^{N_I-1} |Y_{l_1, l_2}^-(p, q)|}{N_I^2}$$

---

```

10: Ažuriranje vrijednosti nedostajućeg odbirka: $y^{(iter+1)}(l_1, l_2) = y^{(iter)}(l_1, l_2) -$
 $G^{(iter)}(l_1, l_2)$
11: Računanje kriterijuma $CRT = \frac{\langle G^{(iter-1)} G^{(iter)} \rangle}{\|G^{(iter-1)}\|_2^2 \|G^{(iter)}\|_2^2}$
12: Ako je $CRT \geq \cos(175^\circ)$, onda $\tau = \tau/3$ i $y_p(k_1, k_2) = y^{(0)}(k_1, k_2)$
13: $iter = iter + 1$
14: end while
15: Izlaz: rekonstruisana slika

```

---

### 3.4. Ograničenja za matrice kompresivnog odabiranja

Kao što smo istakli, rekonstrukcija signala zavisi od određenih ograničenja koja treba da zadovolji matrica kompresivnog odabiranja. Stoga, u ovom poglavlju ćemo dati više detalja u vezi s tim. Ako posmatramo broj mjerenja  $M \geq 2K$ , rješenje je jedinstveno kada podmatrice  $A_{2K}$  nisu singularne  $\{k_1, k_2, \dots, k_{2K}\}$  i to za bilo koju kombinaciju indeksa  $2K$ . Dakle, rješenje je jedinstveno ako važi da je:

$$\text{spark}\{\mathbf{A}\} > 2K \quad (3.29)$$

gdje spark predstavlja dimenzije najmanje kvadratne podmatrice iz  $\mathbf{A}$  sa determinantom jednakom nuli. Prisjetimo se da je  $\text{spark}\{A\} \leq \text{rank}\{A\} + 1$ .

Važna je i osobina izometrije koja je za linearnu transformacionu matricu  $\mathbf{A}$  ispunjena ako je [24]:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{F}\|_2^2 = \|\mathbf{F}\|_2^2 \quad (3.30)$$

Odnosno, ako je:

$$(1 - \delta_{2K})\|\mathbf{F}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{F}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2K})\|\mathbf{F}\|_2^2 \quad (3.31)$$

što se može zapisati kao:

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{F}\|_2^2 - \|\mathbf{F}\|_2^2}{\|\mathbf{F}\|_2^2} \leq \delta_{2K} \quad (3.32)$$

gdje je  $0 \leq \delta_{2K} < 1$  konstanta izometrije.

Uslov koji treba da obezbijedi da nepotpuna matrica nije singularna je nekoherentnost. Indeks koherentnosti matrice  $\mathbf{A}$  se definiše kao najveća absolutna vrijednost normalizovanog skalarnog proizvoda bilo koje dvije kolone  $\mu = \max |\mu(m, k)|, m \neq k$

$k$ , tj. [24]:

$$\mu(m, k) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \alpha_m(i) \alpha_k^*(i)}{\sum_{i=0}^{M-1} |\alpha_k(i)|^2} \quad (3.33)$$

gdje su  $\alpha_k(i)$  elementi  $k$ -te kolone matrice  $\mathbf{A}$ . U kompresivnom odabiranju, indeks koherentnosti treba da bude što je moguće manji, da bi bila ispunjena osobina nekoherentnosti.

Rekonstrukcija vektora  $\mathbf{F}$  sa njegovim  $K$  nenultim komponentima je jedinstvena ako je:

$$K < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \quad (3.34)$$

Vrijednost indeksa koherentnosti  $\mu$  ne može biti proizvoljno mala za matricu  $\mathbf{A}$  dimenzije  $M \times N$ ,  $M < N$ . Zbog toga, pokazuje se da treba da bude ispunjen uslov:

$$\mu \geq \sqrt{\frac{N - M}{M(N - 1)}} \quad (3.35)$$

Takođe, spark matrice se može računati na osnovu indeksa koherentnosti:

$$\text{spark}(\mathbf{A}) \geq \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \quad (3.36)$$

Iz relacija (3.37) i (3.39), slijedi da je:

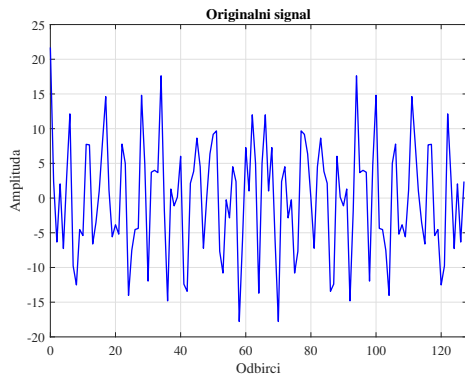
$$\|\mathbf{F}\|_0 = K < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \leq \frac{1}{2} \text{spark}(\mathbf{A}) \quad (3.37)$$

Stoga, ako je matrica  $\mathbf{F}$  rješenje sistema  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{F}$ , onda  $\mathbf{F}$  predstavlja najkonciznije (eng. *sparsiest*) rješenje.

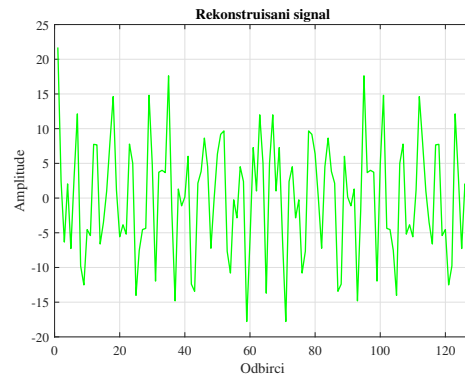
**Primjer:** Posmatrajmo signal sljedećeg oblika gdje su date amplitude komponenti signala  $A_1 = 6, A_2 = 4, A_3 = 3.2, A_4 = 8.5$ . Signal je dužine  $N = 128$ .

$$x_0 = A_1 e^{-j2\pi 45n/N} + A_2 e^{-j2\pi 120n/N} + A_3 e^{-j2\pi 87n/N} + A_4 e^{-j2\pi 23n/N} \quad (3.38)$$

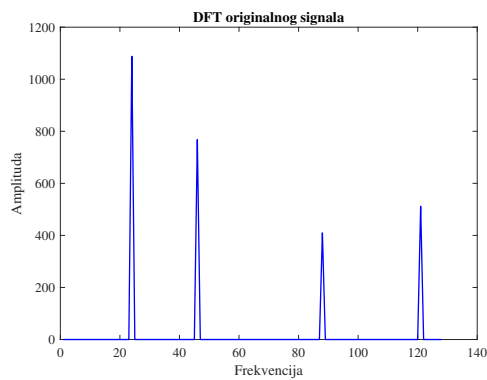
Signal se sastoji od četiri kompleksne sinusoide i sadrži četiri komponente u domenu diskretne Furijeove transformacije (DFT). Posmatrajmo slučaj gdje imamo samo 30% dostupnih odbiraka. Na slici 3.2a) je dat originalni signal, dok na slici 3.2b) rekonstruisani oblik originalnog signala sa 70% nedostajućih odbiraka. DFT komponente originalnog i rekonstruisanog signala su date na slikama 3.2c) i 3.2d) respektivno.



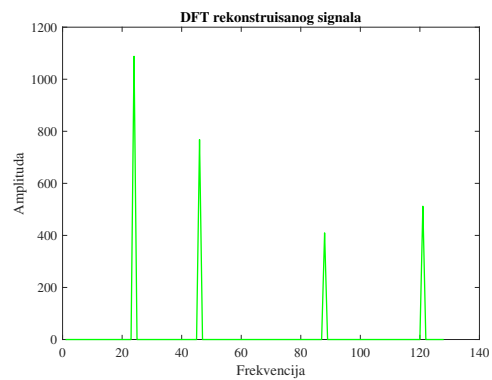
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 3.2: Rekonstrukcija signala na osnovu 30% dostupnih odbiraka: a) originalni signal; b) rekonstruisani signal; c) DFT originalnog signala; d) DFT rekonstruisanog signala

Sa slike se vidi da je signal potpuno tačno rekonstruisan iako je iz originalnog signala izostavljeno 70% odbiraka. Pozicije dostupnih odbiraka su slučajno odabrane. U ovom slučaju smo imali  $K = 4$ , pa je stoga  $M = 38$  značajno veće od  $2K$ , što znači da je broj linearno nezavisnih jednačina bio dovoljan da se dobije rješenje. Nekoherentnost je obezbijedena slučajnim odabirom dostupnih odbiraka.



## 4. Kramer-Rao granica minimalne varijanse i njena ograničenja za signale sa nedostajućim odbircima

U ovoj glavi je razmatran Kramer-Rao pristup [52-63] za procjenu granice minimalne varijanse amplitude signala. Takođe, koristeći Fišerovu matricu dati su izrazi za estimaciju varijanse skupa od tri parametra: amplitude, frekvencije i faze. Razmatrani slučajevi kompleksne i realne sinusoide, sinusoidalnih signala ograničeni funkcijom prozora kao i signala oblika hermitskih funkcija. Poseban akcenat je stavljen na slučaj signala sa nedostajućim odbircima [64-71]. U tom smislu za kompleksne sinusoidalne i signale Hermitskog oblika, izvedene su relacije za estimaciju varijanse, kao i uslovi pod kojima relacije dobijene korišćenjem Kramer-Rao teorije ne važe. Za svaki od slučajeva dati su oblici optimalnih estimatora. Teorijska razmatranja su statistički verifikovana nizom numeričkih primjera. U Hermitskom domenu razmatran je slučaj realnog signala [72-80].

Razmatrajmo signal  $\mathbf{x}$  karakterisan parametrom  $\theta$ . Označimo sa  $\hat{\theta}$  tačnu vrijednost. U ovom slučaju, imamo:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E[\hat{\theta} - \theta] = 0 \quad (4.1)$$

Ako sa  $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)$  označimo funkciju gustine raspodjele signala  $\mathbf{x}$  sa zadatim parametrom  $\theta$ , onda imamo:

$$E[\hat{\theta} - \theta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(x) - \theta) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx \quad (4.2)$$

Uvrštavajući relaciju (4.2) u (4.1), dobijamo [61]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(x) - \theta) \frac{\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx = 1 \quad (4.3)$$

Dalje izvođenje se svodi na relaciju:

$$\frac{\partial \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta} = \frac{1}{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \frac{\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) \quad (4.5)$$

dok se jednačina (4.3) može dalje zapisati kao:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx = 1 \quad (4.6)$$

Kvadrirajući obje strane relacije imamo:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx \right)^2 = 1 \quad (4.7)$$

Primijetimo da je u prethodnoj relaciji moguće razlagati parametar kao  $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) = \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}$ . Stoga, relaciju (4.6) zapisujemo kao:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right) \left( \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right) dx \right)^2 = 1 \quad (4.8)$$

Koristeći Švarcovu nejednakost, ovu relaciju možemo zapisati kao:

$$1 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right) \left( \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right) dx \right)^2 \quad (4.9)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right)^2 dx \quad (4.10)$$

čime dobijamo sljedeći izraz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \right)^2 dx \geq 1 \quad (4.11)$$

Ovo dalje možemo zapisati kao:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\theta}(x) - \theta \right)^2 p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx \geq \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta) dx} \quad (4.12)$$

Posmatrajući prethodnu relaciju možemo zaključiti da lijeva strana predstavlja relaciju za varijansu estimiranog parametra  $\theta$ , dok je desna strana u imeniocu relacija za očekivanu vrijednost, preko koje se može definisati Fišerova informacija. Stoga,

možemo pisati:

$$\text{Var}(\hat{\theta}(x)) \geq \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{I(\theta)} \quad (4.13)$$

gdje je  $I(\theta)$  Fišerova informacija. Prema Švarcovoј nejednačini, iz relacije (4.11) slijedi da su  $(\hat{\theta}(x) - \theta) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}$  i  $\frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}$  međusobno proporcionalne, tj.:

$$(\hat{\theta}(x) - \theta) \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} = c \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)} \quad (4.14)$$

Stoga slijedi da je:

$$\hat{\theta}(x) - \theta = c \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \quad (4.15)$$

Primijetimo da je u jednačini (4.8) integral jednak 1, te imajući u vidu (4.13) i (4.14) dobijamo da je  $c = 1/I(\theta)$ . Dakle, imamo:

$$\hat{\theta}(x) - \theta = \frac{1}{I(\theta)} \frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \quad (4.16)$$

gdje na kraju dobijamo konačnu relaciju za optimalni estimator i Fišerovu informaciju:

$$\frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} = I(\theta) (\hat{\theta}(x) - \theta) \quad (4.17)$$

U sljedećoj sekciji ćemo razmatrati optimalni estimator za nekoliko različitih formi signala.

## 4.1. Optimalni estimator i donja granica varijanse za sinusoidalne signale

Posmatrajmo signal  $\mathbf{s}$  zahvaćen Gausovim bijelim šumom  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Označimo ga sa:

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.18)$$

Signal je dužine  $N$  odbiraka. Primijenimo relaciju (4.17) za estimiranje varijanse amplitude. Razmatramo prvo slučaj realne sinusoide.

### 4.1.1 Estimacija amplitude za realne sinusoide

U našem prvom slučaju, razmatraćemo signal oblika:

$$s(n) = a \cos\left(\frac{2\pi n k_0}{N}\right) \quad (4.19)$$

Podimo od relacije za vjerovatnoću gustine raspodjele za estimiranje amplitude, koja je data sa:

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x(n)-s(n|a))^2}{2\sigma^2}} \quad (4.20)$$

Treba imati u vidu da su vjerovatnoće svih odbiraka ovog signala statistički nezavisne. Relacija (4.20) se dalje može zapisati u obliku:

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a) = \frac{1}{\sigma^N (2\pi)^{N/2}} e^{\sum_{n=0}^{N-1} \left( -\frac{(x(n)-s(n|a))^2}{2\sigma^2} \right)} \quad (4.21)$$

Dakle, logaritmovanjem jednačine (4.21) dobijamo:

$$\ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a)) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln(\sigma) - \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{(x(n) - s(n|a))^2}{2\sigma^2} \right) \quad (4.22)$$

Da bismo našli optimalni estimator parametra  $a$ , možemo napisati izvod po  $a$  za relaciju (4.22), gdje dobijamo:

$$E \left[ -\frac{\partial \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a))}{\partial a} \right] = \frac{1}{\sigma^2} E \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right) \right] \quad (4.23)$$

Dakle:

$$-\frac{\partial \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right) \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x(n) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} - s(n|a) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right) \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \left( x(n) \cos \left( \frac{2\pi n k_0}{N} \right) - a \cos^2 \left( \frac{2\pi n k_0}{N} \right) \right) \right] \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \left( x(n) \cos \left( \frac{2\pi n k_0}{N} \right) - a \frac{1 + \cos \left( \frac{4\pi n k_0}{N} \right)}{2} \right) \right] \quad (4.27)$$

Imajući u vidu da je:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos \left( \frac{4\pi n k_0}{N} \right)}{2} = 0, k_0 \in \mathbb{N} \quad (4.28)$$

onda se relacija (4.27) može zapisati u obliku:

$$-\frac{\partial \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{N}{2\sigma^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{N} x(n) \cos \left( \frac{2\pi n k_0}{N} \right) - a \right) \quad (4.29)$$

gdje smo dobili konačnu formulu za maksimalno logaritamsko očekivanje (*maximum log-likelihood*) za estimaciju amplitude. Posmatrajući relaciju (4.17), iz relacije (4.30) možemo izvesti optimalni estimator, kao i Fišerovu informaciju.

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{N} x(n) \cos\left(\frac{2\pi n k_0}{N}\right) \quad (4.30)$$

$$I(a) = \frac{N}{2\sigma^2} \quad (4.31)$$

Takođe, imajući u vidu relaciju (4.13) na kraju dobijamo:

$$\text{Var}(\hat{a}) \geq \frac{1}{I(\theta)} = \frac{2\sigma^2}{N} \quad (4.32)$$

Zaključujemo da je optimalni estimator zapravo diskretna kosinusna transformacija.

#### 4.1.2 Estimacija amplitude za kompleksne sinusoide

Analogno prethodnom možemo izvesti relacije i za kompleksne sinusoide [52]. Dakle, posmatrajmo kompleksni signal oblika:

$$s(n) = a e^{j \frac{2\pi n k_0}{N}} \quad (4.33)$$

U ovom slučaju, imamo:

$$-\frac{\partial \ln(p_x(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s^*(n|a)}{\partial a^*} \right) \quad (4.34)$$

S obzirom da je:

$$\frac{\partial s^*(n|a)}{\partial a^*} = e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} \quad (4.35)$$

dobijamo:

$$-\frac{\partial \ln(p_x(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s^*(n|a)}{\partial a^*} \right) \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x(n) e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} - a \right) \quad (4.37)$$

$$= \frac{N}{\sigma^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} - a \right) \quad (4.38)$$

Iz čega slijedi optimalni estimator i varijansa:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} \quad (4.39)$$

$$I(a) = \frac{N}{\sigma^2} \implies \text{Var}(\hat{a}) = \frac{1}{I(a)} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (4.40)$$

Posmatrajući ovu relaciju možemo zaključiti da je optimalni estimator zapravo diskretna Furijeova transformacija.

### 4.1.3 Estimacija amplitude i frekvencije preko izvoda drugog reda

Donja granica varijanse se takođe može izračunati preko izvoda drugog reda funkcije logaritamske vjerovatnoće (*eng. log-likelihood*). Naime, Fišerova informacija za estimirani parametar  $\theta$  ima oblik:

$$I(\theta) = \int -\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} p(\mathbf{x}|\theta) dx = E \left[ -\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.41)$$

Da bismo dokazali prethodnu relaciju, primijenimo izvod na relaciju (4.4). Slijedi:

$$-\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{p_x(\mathbf{x}|\theta)} \frac{\partial p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right) \quad (4.42)$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2} p_x(\mathbf{x}|\theta)}{(p_x(\mathbf{x}|\theta))^2} + \left( \frac{\frac{\partial p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}}{p_x(\mathbf{x}|\theta)} \right)^2 \quad (4.43)$$

Povezujući relaciju (4.4) sa (4.43), može se zaključiti da je drugi dio prethodne relacije jednak  $\left( \frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2$ . Stoga slijedi da je:

$$-\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} = \left( \frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\frac{\partial^2 p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2}}{p_x(\mathbf{x}|\theta)} \quad (4.44)$$

Primijenjujući operator očekivane vrijednosti, prethodna jednačina se dalje može razviti u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= \int \left( \left( \frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\frac{\partial^2 p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2}}{p_x(\mathbf{x}|\theta)} \right) p_x(\mathbf{x}|\theta) dx \\ &= E \left[ \left( \frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \int \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2} dx \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ova relacija se može dalje pojednostaviti, jer važi da je:

$$\int \frac{\partial^2 p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int p_x(\mathbf{x}|\theta) dx = 0 \quad (4.46)$$

i stoga se relacija (4.45) svodi na sljedeći oblik:

$$E \left[ -\frac{\partial^2 \ln(p_x(\mathbf{x}|\theta))}{\partial \theta^2} \right] = E \left[ \left( \frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = I(\theta) \quad (4.47)$$

gdje se na kraju dobija Fišerova informacija za estimirani parametar  $\theta$ . Nakon što smo dobili konačnu relaciju za Fišerovu informaciju, moguće je primijeniti i ovu metodu na prethodne slučajeve. Recimo, za signal  $s(n) = a \cos(\frac{2\pi n k_0}{N})$ , imamo

$$-\frac{\partial \ln(p_x(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right) \quad (4.48)$$

i primijenjujući izvod drugog reda na tu relaciju dobijamo:

$$-\frac{\partial \ln(p_x(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right)^2 = I(a) \quad (4.49)$$

Dakle, dobijamo:

$$\text{Var}(\hat{a}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right)^2} \quad (4.50)$$

Odnosno:

$$\text{Var}(\hat{a}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 \left( \frac{2\pi n k_0}{N} \right)} = \frac{2\sigma^2}{N} \quad (4.51)$$

Dobili smo isti rezultat kao i pristupom primijenjenim u poglavlju 4.1.1. Ista forma relacije (4.51) može biti primijenjena i za estimaciju varijanse ostalih parametara računajući izvode signala po tim parametrima.

Posmatrajmo slučaj estimacije frekvencije za razmatrani signal. U tu svrhu, za-oišimo ga u obliku:  $s(n) = a \cos \left( \frac{2\pi f_0 n}{N} \right)$ . U tom slučaju se dobija:

$$\frac{\partial s(n|f_0)}{\partial f_0} = 2\pi a n \cos(2\pi f_0 n) \quad (4.52)$$

Primijenjujući relaciju (4.51) na prethodnu jednačinu, dobijamo:

$$\text{Var}(\hat{f}_0) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} (2\pi a n \sin(2\pi f_0 n))^2} = \frac{3\sigma^2}{\pi^2 a^2 N(N+1)(2N+1)} \quad (4.53)$$

## 4.2. Estimiranje više parametara sinusoidalnog signala

U prethodnim slučajevima smo razmatrali pojedinačno estimiranje amplitude i frekvencije za različite tipove signala. U ovom poglavlju razmatraćemo estimiranje više parametara istovremeno. U tu svrhu izvešćemo izraze za elemente Fišerove matrice informacije. Posmatraćemo signal oblika:

$$s(n) = a \cos(2\pi f_0 n + \varphi) \quad (4.54)$$

Za ovaj signal ćemo da optimizujemo parametre  $a, f_0, \varphi$  i predstavimo ih kao elemente vektora  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ f_0 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Da bismo izračunali Fišerovu informaciju za svaki od parametara, koristićemo opšti oblik relacije (4.51):

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (4.56)$$

Elementi Fišerove matrice su dati sa:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{mn} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_m} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_n} \quad (4.57)$$

U našem prvom slučaju, element (1,1) se odnosi na amplitudu  $a$ .

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{11} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial a} \frac{\partial s(n)}{\partial a} \quad (4.58)$$

Radi lakšeg računanja koristeći  $\psi = 2\pi f_0 n + \varphi$ , na kraju dobijamo:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{11} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \cos^2(\psi) \approx \frac{N}{2\sigma^2}, \quad \text{za veće } N \quad (4.59)$$



Primijenimo ovu proceduru na ostale elemente:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{12} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_2} \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial a} \frac{\partial s(n)}{\partial f_0} \quad (4.61)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N 2\pi a n \sin(\psi) \cos(\psi) \quad (4.62)$$

$$= -\frac{\pi a}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2\psi) \approx 0 \quad (4.63)$$

U sljedećem koraku optimizujemo  $a$  i  $\varphi$ .

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{13} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_3} \quad (4.64)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial a} \frac{\partial s(n)}{\partial \varphi} \quad (4.65)$$

$$= -\frac{a}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \sin(\psi) \cos(\psi) \quad (4.66)$$

$$= -\frac{a}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \sin(2\psi) \approx 0 \quad (4.67)$$

Može se zaključiti da su elementi (2,1) i (3,1) takođe jednaki nuli. Estimacija se dobija preko člana (2,2)

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{22} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_2} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_2} \quad (4.68)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial f_0} \frac{\partial s(n)}{\partial f_0} \quad (4.69)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N 4\pi^2 a^2 n^2 \sin^2(\psi) \quad (4.70)$$

Primijetimo da se  $\sin^2(\psi)$  može zapisati u eksponencijalnoj formi, tj.:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{22} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N 4\pi^2 a^2 n^2 \left( \frac{e^{j\psi} - e^{-j\psi}}{2j} \right)^2 \quad (4.71)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N 4\pi^2 a^2 n^2 \left( \frac{1}{j2} \sin(2\psi) + \frac{1}{2} \right) \quad (4.72)$$

Pošto je  $\sin(2\psi) = 0$ , onda slijedi:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{22} = \frac{4\pi^2 a^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \quad (4.73)$$

$$= \frac{\pi^2 a^2 N(N+1)(2N+1)}{3\sigma^2} \quad (4.74)$$

U sljedećem koraku posmatrajmo element  $(2, 3)$ , tj. za parametre  $f_0$  i  $\varphi$ :

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{23} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_2} \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_3} \quad (4.75)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial f_0} \frac{\partial s(n)}{\partial \varphi} \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N 2\pi a^2 n \sin^2(\psi) \quad (4.77)$$

$$= \frac{\pi a^2 N(N+1)}{2\sigma^2} \quad (4.78)$$

Takođe, za element  $(3, 1)$  važi da je jednak elementu  $(1, 3)$ . Takođe, za element  $(3, 2)$  isto važi da je jednak elementu  $(2, 3)$ . Na kraju, za fazu  $\varphi$  dobijamo:

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{33} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial s(n)}{\partial \varphi} \frac{\partial s(n)}{\partial \varphi} \quad (4.79)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N a^2 \sin^2(\psi) \quad (4.80)$$

$$= \frac{a^2 N}{2\sigma^2} \quad (4.81)$$

Pošto smo izveli relacije za sve elemente Fišerove matrice, možemo je zapisati:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} N/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 a^2 N(N+1)(2N+1)}{3} & \frac{\pi a^2 N(N+1)}{2} \\ 0 & \frac{\pi a^2 N(N+1)}{2} & \frac{a^2 N}{2} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Izrazi za varijanse i kovarijanse slijede iz:

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} \geq I^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.83)$$

gdje je Fišerova inverzna matrica  $I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  data sa:

$$I^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{\pi^2 a^2 N(N^2-1)} & -\frac{6}{\pi a^2 N(N-1)} \\ 0 & -\frac{6}{\pi a^2 N(N-1)} & \frac{4(2N+1)}{a^2 N(N-1)} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Varijanse za parametre  $a$ ,  $f_0$  i  $\varphi$  su dijagonalni elementi matrice pomnožene sa  $\sigma^2$ .

$$\text{Var}(\hat{a}) \geq \sigma^2 [I^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{11} = \frac{2\sigma^2}{N} \quad (4.85)$$

$$\text{Var}(\hat{f}_0) \geq \sigma^2 [I^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{22} = \frac{6\sigma^2}{\pi^2 a^2 N(N^2-1)} \quad (4.86)$$

$$\text{Var}(\hat{\varphi}) \geq \sigma^2 [I^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{33} = \frac{4(2N+1)\sigma^2}{a^2 N(N-1)} \quad (4.87)$$

Važno je naglasiti da donje granice izvedene preko Fišerove matrice su veće od donjih granica parametara izvedene pojedinačno (za estimaciju frekvencije poređuju se relacije (4.54) i (4.87)). Slično važi i kod estimacije faze. Razlog za ovo je što parametri utiču jedni na druge i taj uticaj je uzet u obzir kod relacija dobijenih preko elemenata matrice kovarijansi.

### 4.3. Optimalni estimator za sinusoidalni signal ograničen funkcijom prozora

Analiza signala po intervalima ograničenog trajanja se vrši u cilju vremensko-frekvencijske analize. U tom smislu, signal se množi sa funkcijom prozora. U ovom poglavlju će biti izveden optimalni estimator i granica minimalne varijanse za taj slučaj. Dakle, razmatrajmo signal oblika:

$$x_h(n, m) = h(m)x(n + m) \quad (4.88)$$

gdje je  $m$  tekuća koordinata, a funkcija prozora je data sa:

$$h(m) = \begin{cases} 1, & \text{za } m = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (4.89)$$

Korišćen je pravougaoni prozor širine  $N_h$ , a signal  $x(n+m)$  je kompleksna sinusoida. U ovom slučaju, korišćenjem prethodnih izvođenja možemo pisati:

$$-\frac{\partial \ln p_{x_h}(\mathbf{x}_h|a)}{\partial a} = \frac{N_h}{\sigma^2} \sum_{n \in \Omega} \left( \frac{1}{N_h} h(m) x(n+m) e^{j \frac{2\pi k_0 n}{N_h}} - a \right) \quad (4.90)$$

Iz prethodne relacije možemo zaključiti da je u ovom slučaju optimalni estimator zapravo kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT), tj.:

$$\hat{a} = \frac{1}{N_h} \sum_{n \in \Omega} h(m) x(n+m) e^{j \frac{2\pi k_0 n}{N_h}} = STFT(n, k_0) \quad (4.91)$$

Iz (4.91) slijedi da je minimalna granica varijanse:

$$Var(\hat{a}, n) \geq \frac{\sigma^2}{N_h} \quad (4.92)$$

## 4.4. Optimalni estimator i donja granica varijanse za Hermitske signale

Posmatrajmo signal oblika Hermitskih funkcija  $s(n) = a\varphi_k(n)$  zahvaćen šumom  $\varepsilon$ . Signal sa šumom je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \varepsilon \quad (4.93)$$

Primijetimo da je  $\varphi_k(n)$  Hermitska funkcija  $k$ -tog reda razmatrana u glavi 2. Za slučaj estimacije amplitude imamo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln(p_x(\mathbf{x}|a))}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x(n) - s(n|a)) \frac{\partial s(n|a)}{\partial a} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n)\varphi_k(n) - a\varphi_k^2(n)) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\varphi_k(n) - a \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k^2(n)}_{\lambda_{k,N}} \right) \\ &= \frac{\lambda_{k,N}}{\sigma^2} \left( \frac{1}{\lambda_{k,N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\varphi_k(n) - a \right) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Iz prethodne jednačine proizilaze relacije za optimalni estimator i minimalnu granicu varijanse:

$$\hat{a} = \frac{1}{\lambda_{k,N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \varphi_k(n) \quad (4.95)$$

$$I(a) = \frac{\lambda_{k,N}}{\sigma^2} \implies \text{Var}(\hat{a}) \geq \frac{1}{I(a)} = \frac{\sigma^2}{\lambda_{k,N}} \quad (4.96)$$

Dakle, možemo zaključiti da optimalni estimator ima sljedeći oblik Hermitske transformacije:

$$X(k) = \frac{1}{\lambda_{k,N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \varphi_k(n) \quad (4.97)$$

Može se vidjeti da ova forma Hermitske transformacije uključuje određivanje parametra  $\lambda_{k,N}$ , koji zavisi od reda funkcije  $\varphi_k$  i dužine  $N$  (npr.  $\lambda_{0,50} = 3.19$ , dok je  $\lambda_{50,50} = 2.6$ ). Primijetimo da su Hermitske funkcije računate u nulama Hermitskog polinoma. Vidimo da  $\lambda_{k,N}$  zavisi od dva parametra, pa se u praktičnim aplikacijama koristi forma koja će se dobiti ako signal  $x(n)$  normalizujemo funkcijom  $\varphi_{N-1}(n)$ , tj. izraz izvedemo za  $x(n)/\varphi_{N-1}(n)$ . U tom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln p_x(\mathbf{x}|a)}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma_{norm}^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n) \varphi_k(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi_k^2(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} a \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_{norm}^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n) \varphi_k(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} - Na \right) \\ &= \frac{N}{\sigma_{norm}^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n) \varphi_k(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} - a \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Primijetimo da je  $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi_k^2(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} = N$ , dok je  $\sigma_{norm}$  varijansa posljedica normalizacije funkcijom  $\varphi_{N-1}(n)$  i može se dobiti direktnim računanjem varijanse koristeći optimalni estimator za ovaj slučaj. Iz prethodne relacije se dobija optimalni estimator:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{\varphi_k(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} \quad (4.99)$$

dok su Fišerova informacija i donja granica varijanse estimiranog parametra date u sljedećem obliku:

$$I(a) = \frac{N}{\sigma_{norm}^2} \implies \text{Var}(\hat{a}) = \sigma_H^2 \geq \frac{\sigma_{norm}^2}{N} \quad (4.100)$$

Kao optimalni estimator, u ovom slučaju dobijena je Gaus-Hermitska kvadratura aproksimacija koja se najčešće koristi za računanje Hermitske transformacije. Her-

mitsku transformaciju signala koji je zahvaćen šumom označićemo sa  $X(k)$ , te je njena Gaus-Hermitska kvadratura aproksimacija data sa:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi_k(n)}{\varphi_{N-1}^2(n)} x(n) \quad (4.101)$$

Ovakva realizacija Hermitske transformacije utiče na raspodjelu šuma u Hermitskom domenu [66]. Naime, uticaj šuma će zavisići od reda Hermitske funkcije. Izvedimo izraz za varijansu šuma kod Hermitske transformacije. Srednja vrijednost Hermitske funkcije se definiše kao:

$$\mu_x(k) = E[X(k)] = C(k) + E\{X_\varepsilon(k)\} = C(k) \quad (4.102)$$

Posmatran je slučaj Gausovog bijelog šuma. Sa druge strane, varijansa se definiše:

$$\sigma_H^2(k) = E[|X(k) - \mu_x(k)|^2] = E\{|C(k) + X_\varepsilon(k)|^2\} - \mu_x^2(k) \quad (4.103)$$

Dakle, iz prethodne relacije ostaje samo član  $E\{X_\varepsilon(k)\}$ , tako da imamo:

$$\sigma_H^2(k) = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \frac{\varphi_k(n_{i_1})}{\varphi_{N-1}^2(n_{i_1})} \cdot \frac{\varphi_k(n_{i_2})}{\varphi_{N-1}^2(n_{i_2})} E\{\varepsilon(n_{i_1})\varepsilon(n_{i_2})\} \quad (4.104)$$

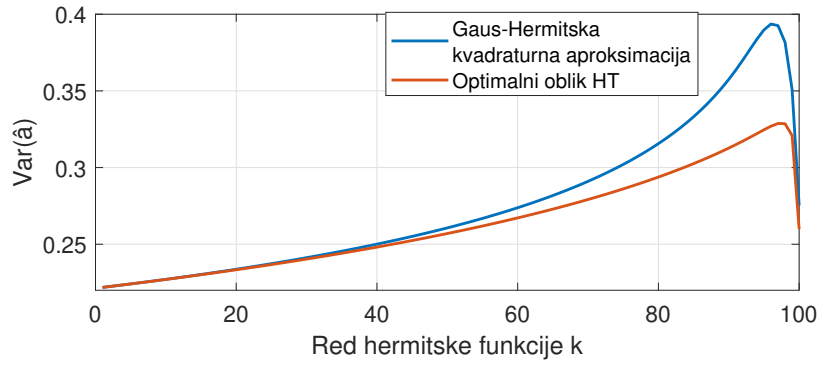
S obzirom da je:

$$r_{\varepsilon\varepsilon}(n_{i_1}, n_{i_2}) = E\{\varepsilon(n_{i_1})\varepsilon(n_{i_2})\} = \sigma_\varepsilon^2 \delta(n_{i_1} - n_{i_2}) \quad (4.105)$$

gdje za  $n_{i_1} = n_{i_2}$  konačno dobijamo [66]:

$$\sigma_H^2(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varphi_k^2(n_i)}{\varphi_{N-1}^4(n_i)} = \alpha(k, N) \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.106)$$

gdje je  $\sigma_\varepsilon^2$  varijansa Gausovog bijelog šuma. Može se primijetiti da se varijansa u Hermitskom domenu povećava u skladu sa redom Hermitske funkcije. Zavisnosti varijanase od reda funkcije su date na slici 4.1.



Slika 4.1: Zavisnosti varijanse šuma u Hermitskom domenu od reda Hermitske funkcije

Maksimalna varijansa se dobija u obliku:

$$\sigma_{H_{max}}^2 = \alpha(N-1, N)\sigma_{\varepsilon}^2 \quad (4.107)$$

Aproksimacija granice varijanse se može naći Koši-Švarcovom (*Cauchy-Schwarz*) nejednačinom, odnosno:

$$\begin{aligned} \sigma_H^2(k) &= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varphi_k^2(n_i)}{\varphi_{N-1}^4(n_i)} \leq \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varphi_k^2(n_i)}{\varphi_{N-1}^2(n_i)} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\varphi_{N-1}^2(n_i)} \\ &= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\varphi_{N-1}^2(n_i)} \end{aligned} \quad (4.108)$$

## 4.5. Kramer-Rao pristup i njegova ograničenja u slučaju sinusoidalnih signala sa nedostajućim odbircima

U ovom poglavlju ćemo razmatrati donju Kramer-Rao granicu za kompresivno odabirane signale. Dakle, potpuni signal  $\mathbf{x}$  se može predstaviti sljedećim skupom odbiraka:

$$\mathbf{\Omega} = \{x(1), x(2), \dots, x(N)\} \quad (4.109)$$

gdje je  $N$  ukupan broj odbiraka signala definisan preko Šenonove teoreme. Za slučaj skupa sa manjim brojem slučajno uzetih odbiraka  $M \ll N$  imamo:

$$\mathbf{\Theta} = \{y(1), y(2), \dots, y(M)\}, \quad \mathbf{\Theta} \subseteq \mathbf{\Omega} \quad (4.110)$$

Najprije ćemo razmatrati donju Kramer-Rao granicu varijanse za slučaj kom-

pleksne sinusoide sa nedostajućim odbircima:

$$s(n) = a e^{j \frac{2\pi n k_0}{N}} \quad (4.111)$$

U ovom slučaju imamo  $M < N$  dostupnih odbiraka koji su uzeti iz skupa  $\mathbf{N}$  i nalaze se na pozicijama  $n_m \in \mathbf{N}_M \subseteq \mathbf{N}$ . Zatim, izvodimo relaciju za varijansu gdje počinjemo od relacije za raspodjelu logaritamske vjerovatnoće, kao u relaciji (4.36), gdje slijedi:

$$-\frac{\partial \ln(p(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{N}{\sigma^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} - a \right) \quad (4.112)$$

U slučaju signala sa  $M$  dostupnih odbiraka, relacija se svodi na:

$$-\frac{\partial \ln(p(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{M}{N} \frac{N}{\sigma^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_s(n) e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} - a \right) \quad (4.113)$$

Dakle, posmatran je signal sa  $M$  dostupnih odbiraka, te je stoga rezultat za varijansu takav da je on skaliran vrijednošću  $M/N$  u odnosu na slučaj signala sa svim odbircima, odnosno:

$$I(a) = \frac{M}{N} \frac{N}{\sigma^2} \Rightarrow \text{Var}(\hat{a}) = \frac{N}{M} \frac{\sigma^2}{N} \quad (4.114)$$

Analogno se može primijeniti i na slučaj realne sinusoide:

$$s(n) = a \cos\left(\frac{2\pi n k_0}{N}\right) \quad (4.115)$$

Uzimajući u obzir sljedeću relaciju:

$$-\frac{\partial \ln(p(\mathbf{x}|a))}{\partial a} = \frac{M}{N} \frac{N}{2\sigma^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{N} x(n) \cos\left(\frac{2\pi n k_0}{N}\right) - a \right) \quad (4.116)$$

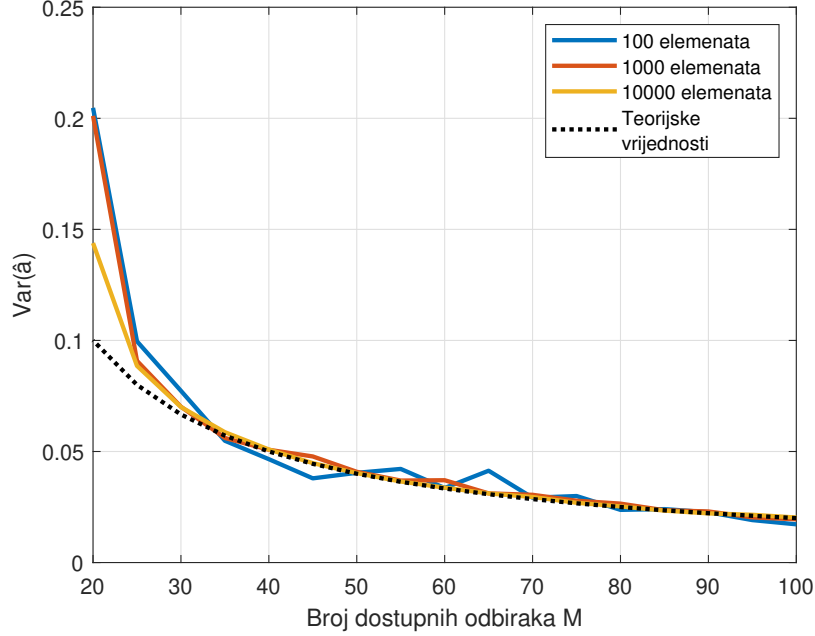
može se zaključiti da je varijansa skalirana na isti način kao u prethodnom slučaju:

$$I(a) = \frac{M}{N} \frac{N}{2\sigma^2} \Rightarrow \text{Var}(\hat{a}) = \frac{N}{M} \frac{2\sigma^2}{N} \quad (4.117)$$

Na slici 4.2 prikazani su rezultati eksperimenta gdje su statistički verifikovani izrazi za varijansu za slučaj realne sinusoide. Korišten je različit broj dostupnih odbiraka  $M$  ( $M = 20, 30, \dots, 100$ ), od ukupnog broja  $N = 100$  odbiraka. Računanje varijanse je vršeno za 100, 1000 i 10000 realizacija. Očekivano je da za veći broj realizacija tačnija estimacija varijanse. Stoga, za slučaj 10000 realizacija imamo dobro poklapanje teorijskih i eksperimentalnih vrijednosti za  $M > 30$ . Za manji broj do-



stupnih odbiraka, teorijska vrijednost se značajno razlikuje od eksperimentalnih čak i za veliki broj realizacija. Zato je interesantno analizirati da li postoje ograničenja u relacijama dobijenih Kramer-Rao pristupom.



Slika 4.2: Varijansa estimirane amplitude za različit broj realizacija

#### 4.5.1 Ograničenja u Kramer-Rao pristupu za sinusoide sa nedostajućim odbircima

Razmatraćemo slučaj kompleksne sinusoide za signal  $x(n)$  zahvaćen Gausovim bijelim šumom. Signal sa nedostajućim odbircima zapišimo u obliku:

$$y_s(n) = ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n_m}, \quad n_m \in \mathbf{N}_M = \{n_{m_1}, n_{m_2}, \dots, n_{m_M}\} \quad (4.118)$$

gdje je  $\mathbf{N}_M \subseteq \mathbf{N}$ . Furijeova transformacija ovog signala dobija oblik:

$$Y(k) = \sum_{n_m=1}^M ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n_m} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_m} = \sum_{n_m=1}^M ae^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n_m} \quad (4.119)$$

Prethodna relacija se može zapisati u obliku:

$$Y(k) = \sum_{n=1}^N \left( e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n} - er(n) \right) \quad (4.120)$$

gdje je:

$$er(n) = \begin{cases} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n}, & n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_M \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases} \quad (4.121)$$

Primijetimo da za signal  $s(n) = e^{j\frac{2\pi k_0 n}{N}}$  u Furijeovom domenu važi:

$$E[S(k)] = E \left[ \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n} \right] \stackrel{k \neq k_0}{=} 0 \quad (4.122)$$

Sa druge strane važi da je:

$$E[Y(k)] \stackrel{k=k_0}{=} E \left[ \sum_{n_m=1}^M a e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n_m} \right] = E \left[ \sum_{n_m}^M e^0 \right] = Ma \quad (4.123)$$

Odavde se može zaključiti da je:

$$E[Y(k)] = \begin{cases} Ma, & k = k_0 \\ 0, & k \neq k_0 \end{cases} \quad (4.124)$$

Varijansa šuma generisana nedostajućim odbircima, na pozicijama  $k \neq k_0$  se računa kao:

$$\sigma^2(Y_{k \neq k_0}) = E \left[ \left[ \sum_{n_m=1}^M y_s(n_m) e^{j\frac{2\pi k n_m}{N}} \right] \cdot \left[ \sum_{n_m=1}^M y_s(n_m) e^{j\frac{2\pi k n_m}{N}} \right]^* \right], \quad (4.125)$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y_{k \neq k_0}) &= E [|y_s(1)|^2 + |y_s(2)|^2 + \dots + |y_s(M)|^2] \\ &+ E \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{l=1, i \neq l}^M a e^{j\frac{2\pi(k-k_0)i}{N}} a e^{j\frac{2\pi(k-k_0)l}{N}} \right] \end{aligned} \quad (4.126)$$

Očigledno je prvi dio prethodne jednačine  $Ma^2$ . Imajući u vidu da je:

$$E \left[ \sum_{l=1}^N a e^{j\frac{2\pi(k-k_0)l}{N}} \right] = 0 \quad (4.127)$$

$$E \left[ \sum_{j=1}^N a e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)i} a e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)l} \right] \stackrel{i \neq l}{=} 0 \quad (4.128)$$

I koristeći

$$E \left[ a e^{-j \frac{2\pi}{N} (k-k_0)i} a e^{-j \frac{2\pi}{N} (k-k_0)l} \right] = \begin{cases} c, & i \neq l \\ a^2, & i = l \end{cases} \quad (4.129)$$

možemo jednostavno doći do izraza za varijansu. Naime, u relaciji (4.129) imamo  $M - 1$  element sa  $i \neq l$  (sa vrijednošću  $c$  kao u (4.130)) i samo jedan element koji je jednak  $a^2$ . Dakle, iz ove relacije slijedi:

$$c(N - 1) + a^2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{N - 1} \quad (4.130)$$

Pa je varijansa šuma na mjestima nedostajućih odbiraka:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y_{k \neq k_0}) &= M a^2 + M(M - 1) \left( -\frac{a^2}{N - 1} \right) \\ &= M \frac{N - M}{N - 1} a^2 \end{aligned} \quad (4.131)$$

Ako postoji samo jedna komponenta, kao u našem slučaju, za poziciju  $k = k_0$  varijansa ovog šuma je 0.

Kada je signal sa nedostajućim odbircima zahvaćen šumom, možemo ga modelovati na sljedeći način:

$$x(n) = y(n_m) + \varepsilon_r(n_0) + \varepsilon(n_m) \quad (4.132)$$

gdje  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n_m \in \mathbf{N}_M$ ,  $n_0 \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_M$ ,  $\varepsilon_r$  je šum izazvan nedostajućim odbircima, a  $\varepsilon$  je eksterni Gausov bijeli šum. Pošto ova dva šuma nisu korelisani, ukupnu varijansu možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\sigma_{total}^2 = \sigma^2 + M \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.133)$$

Tako da varijansa šuma nedostajućih odbiraka dobija konačan oblik:

$$\sigma^2 = M \frac{N - M}{N - 1} a^2 \quad (4.134)$$

U prethodnoj analizi smo pokazali da mna pozicijama nedostajućih odbiraka postoji šum čija vrijednost umnogome zavisi od broja dostupnih odbiraka  $M$ . Stoga, postoji vjerovatnoća da će za određene vrijednosti dostupnih odbiraka koje su manje od neke granične vrijednosti nivo šuma biti iznad nivoa signala. U tom slučaju imaćemo pogrešnu detekciju. Posljedično, relacije izvedene u skladu sa Kramer-Rao teorijom gube smisao. U tu svrhu, na osnovu vjerovatnoće da je komponenta signala tačno detektovana možemo dobiti relaciju za minimalan broj dostupnih odbiraka za koji

ranije izvedene jednačine važe. Stoga, važno je istaći da apsolutna vrijednost Furijeove transformacije na poziciji komponente signala ima Rejlijevu (eng. *Rayleigh*) raspodjelu, a apsolutna vrijednost Furijeove transformacije na pozicijama  $k \neq k_0$  ima Rajsovu (eng. *Rice*) raspodjelu. Rejlijeva raspodjela je data sa:

$$p(\eta) = \frac{2\eta}{\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}, \eta \geq 0 \quad (4.135)$$

dok je Rajsova raspodjela:

$$q(\eta) = \frac{2\eta}{\sigma_s^2} e^{-\frac{\eta^2 + M^2 a^2}{\sigma_s^2}} I_0 \left( \frac{Ma2\eta}{\sigma_s^2} \right), \eta \geq 0 \quad (4.136)$$

Vjerovatnoća da je vrijednost komponente signala u transformacionom domenu unutar  $(\eta, \eta + \Delta\eta)$  je  $q(\eta)d\eta$ . Sa druge strane, ukupna vjerovatnoća da je vrijednost šuma (na  $k \neq k_0$ ) manja od  $\eta$  je:

$$P(H) = 1 - \int_H^\infty \frac{2\eta}{\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}} d\eta = 1 - e^{-\frac{H^2}{\sigma^2}} \quad (4.137)$$

Dakle, vjerovatnoća da vrijednost komponente signala bude veća od nivoa šuma je  $P(\eta)q(\eta)d\eta$ , te uzimajući sve moguće vrijednosti za  $\eta$ , dobijamo:

$$P_E = \int_0^\infty P(\eta)q(\eta)d\eta \quad (4.138)$$

Odnosno:

$$P_E = \int_0^\infty \left( 1 - e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}} \right)^{N-1} \frac{2\eta}{\sigma_s^2} e^{-\frac{\eta^2 + M^2 a^2}{\sigma_s^2}} I_0 \left( \frac{Ma2\eta}{\sigma_s^2} \right) d\eta \quad (4.139)$$

S obzirom da razmatramo signal sa jednom komponentom, znači da ne postoji uticaj drugih komponenti na nju, što dalje znači da ta komponenta nije slučajna i jednaka je  $Ma$ . Kao rezultat toga, prethodna relacija se svodi na dio koji se odnosi na  $P(\eta)$ . Dakle, ukupna vjerovatnoća detekcije komponente šuma ( $Y_{k \neq k_0}$ ), tj. vjerovatnoća greške u detekciji će biti:

$$P_{tn} = (1 - P(H))^{N-1} = P(Y_{k=k_0} < Y_{k \neq k_0})^{N-1} \quad (4.140)$$

gdje  $P(Y_{k=k_0} < Y_{k \neq k_0})$  je vjerovatnoća detekcije komponente šuma. Da bi odredili  $P(Y_{k=k_0} < Y_{k \neq k_0})$ , imamo:

$$P(Y_{k=k_0} < Y_{k \neq k_0}) = \int_0^{Y_{k=k_0}} \frac{2\eta}{\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}} d\eta = 1 - e^{-\frac{Y_{k=k_0}^2}{\sigma^2}} \quad (4.141)$$

Posmatrajmo sada šum  $\sigma_{total}^2 = \sigma^2 + M\sigma_\varepsilon^2$ , gdje je  $\sigma^2$  varijansa šuma generisana nedostajućim odbircima, dok je  $\sigma_\varepsilon^2$  eksterni šum. Iz prethodne relacije dobijamo vjerovatnoću greške:

$$P_{tn} = \left(1 - e^{-\frac{Y_{k=k_0}^2}{\sigma^2}}\right)^{N-1} \quad (4.142)$$

gdje je  $Y_{k=k_0}^2 = M^2 a^2$ . Ova relacija se može dalje zapisati kao:

$$P_{tn} = \left(1 - e^{-\frac{M^2 a^2}{\sigma^2}}\right)^{N-1} \quad (4.143)$$

Koristeći relaciju (4.144) dobija se minimalan broj dostupnih odbiraka koji obezbjeđuje da izrazi za varijansu dobijeni pomoću Kramer-Rao teorije važe. Dakle:

$$\left(1 - e^{-\frac{M^2 a^2}{\sigma_{total}^2}}\right)^{N-1} = P_{tn} \quad (4.144)$$

Ova relacija dobija konačnu formu:

$$M = \sqrt{\frac{\sigma_{total}^2}{a^2} \ln \left( \frac{1}{1 - P_{tn}^{\frac{1}{N-1}}} \right)} \quad (4.145)$$

Pošto je bolje uzimati veću vrijednost dostupnih odbiraka od zadate prethodne relacije, konačno se dobija forma:

$$M \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 + M\sigma_\varepsilon^2}{a^2} \ln \left( \frac{1}{1 - P_{tn}^{\frac{1}{N-1}}} \right)} \quad (4.146)$$

Za zadatu vjerovatnoću, dobijamo minimalan broj dostupnih odbiraka koji obezbjeđuju pouzdanu detekciju.

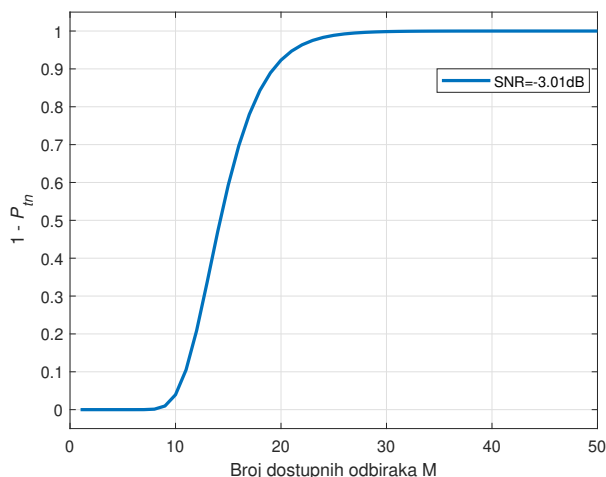
## 4.5.2 Numerički primjeri i statističke provjere

Statistička provjera teorijskih rezultata urađena je preko nekoliko numeričkih primjera. S obzirom da za vjerovatnoću greške minimalni broj dostupnih odbiraka zavisi od SNR eksternog šuma, korištena je sljedeća metodologija:

1. Za fiksno SNR, izračunaćemo donju granicu dostupnih odbiraka koja omogućava tačnu detekciju sa proizvoljno velikom vjerovatnoćom. Zatim, koristimo dva različita slučaja za koje je  $M$  veće od donje granice, pokazujući da je detekcija pouzdana. Zatim, vršimo statističku provjeru teorijskih izraza za varijanse računate za izabrane vrijednosti  $M$ .

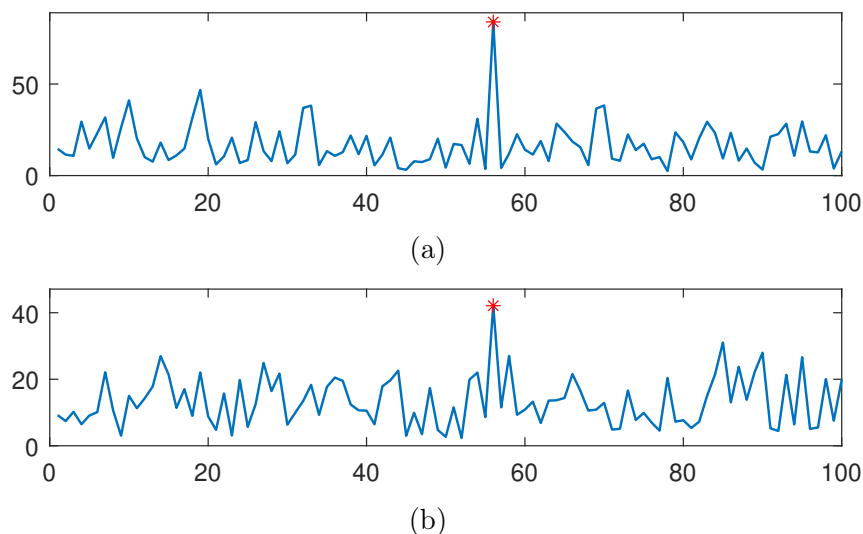
2. Nakon toga, uzećemo minimalnu vrijednost  $M$  koja je manja od donje granice. Kao posljedica vjerovatnoća tačne detekcije  $(1 - P_{tn})$  će biti mala. Preciznije rečeno, u većini slučajeva će doći do pogrešne detekcije, pokazujući da Kramer-Rao teorija nije primjenjiva za takvo  $M$ .
3. Konačno, analiziraćemo uticaj SNR-a na minimalne vrijednosti  $M$ .

*Primjer 1:* U ovom primjeru ćemo razmatrati slučaj kompleksne sinusoide sa sljedećim parametrima:  $a = 2$  i  $\sigma_\varepsilon^2 = 8$  (tj. razmatran je  $SNR = -3.01dB$ ), sa ukupnim brojem odbiraka  $N = 100$ . Vjerovatnoća detekcije tačne komponente za različite vrijednosti  $M$  je prikazana na slici 4.3 (računata u skladu sa teorijski izvedenim izrazima). Možemo primijetiti da za  $M \geq 20$ , vjerovatnoća tačne detekcije  $(1 - P_{tn})$  je veća od 92%.



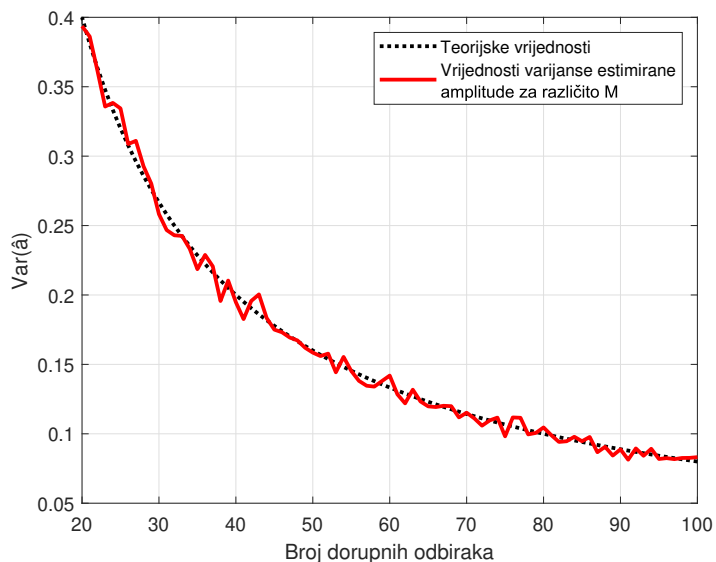
Slika 4.3: Vjerovatnoća tačne detekcije u zavisnosti od broja dostupnih odbiraka (fiksno  $SNR = -3.01dB$ )

Na slici 4.4, ilustrovaćemo detekciju komponente signala za dva slučaja  $M = 50$  i  $M = 20$ , pri čemu je ukupan broj odbiraka  $N = 100$ . Možemo primijetiti da je za oba slučaja komponenta signala tačno detektovana, što je i dokazano kroz veći broj realizacija (u slučaju  $M = 20$  na veliki broj realizacija bi bio kritičan slučaj, jer se sporadično pojavljuju pogrešne detekcije u skladu sa teorijskim rezultatom). Amplituda je detektovana u frekvencijskom domenu i u oba slučaja skalirana (pomnožena) sa  $M$ , što se slaže sa teorijskim rezultatom.



Slika 4.4: Ilustracija tačne detekcije komponenti signala za dvije vrijednosti dostupnih odbiraka: a)  $M = 50$ ; b)  $M = 20$

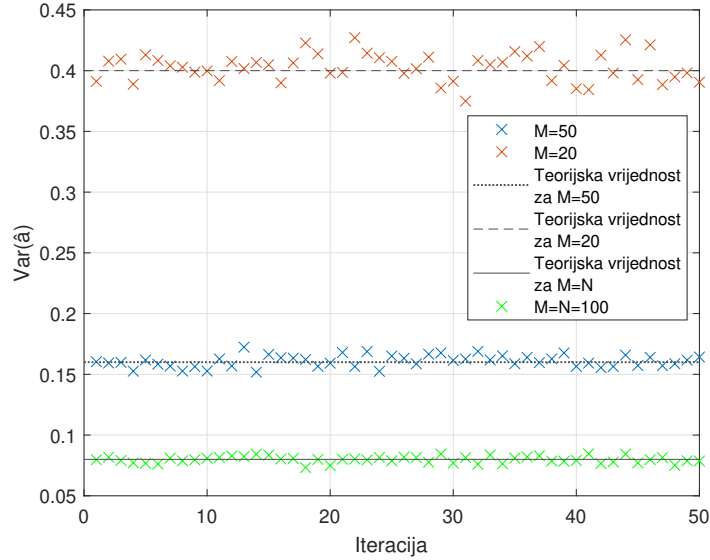
Takođe, izvršena je statistička verifikacija rezultata za varijanse uzimajući različit broj dostupnih odabraka od  $M = 20$  do  $M = 100$ . Za svako  $M$  je izvršeno po 1000 realizacija za računanje varijanse. Na slici 4.5 je data i teorijska vrijednost. Čak i za manji broj realizacija se pokazuje da eksperimentalni rezultati konvergiraju ka teorijskoj vrijednosti. Za veći broj realizacija se dobija bolja konvergencija.



Slika 4.5: Statistička verifikacija izraza za varijansu računatu za različit broj dostupnih odbiraka  $M$

Slika 4.6 predstavlja eksperimentalno dobijene rezultate varijansi za sljedeće slučajeve:  $M = 100$ ,  $M = 50$  i za  $M = 20$ . Ova statistička provjera je zasnovana na 50

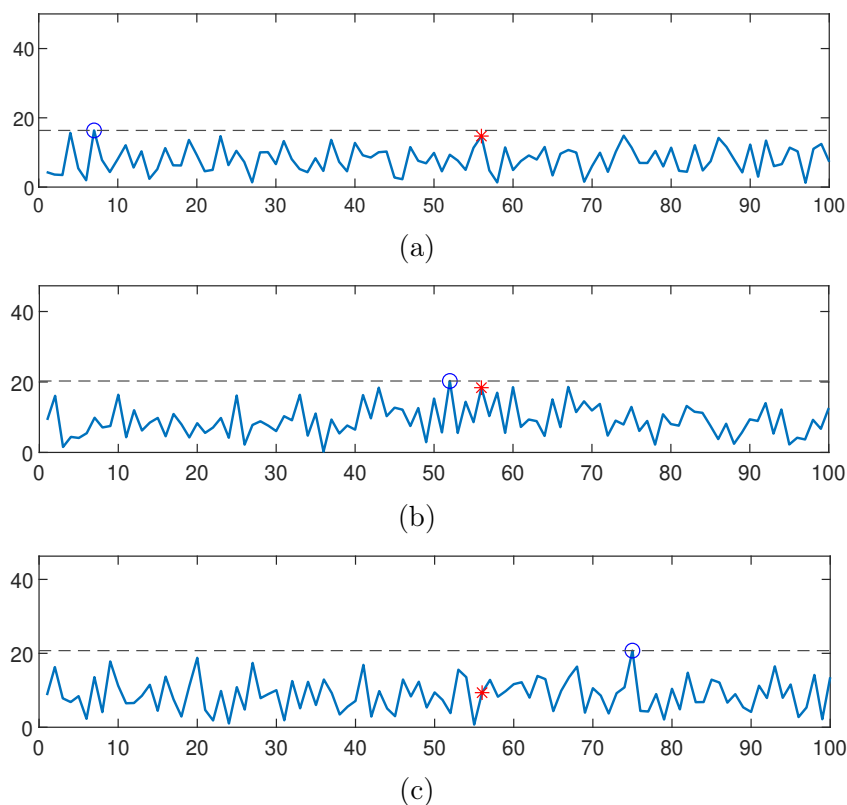
iteracija sa po 1000 realizacija. Možemo primijetiti da vrijednosti za svaki od slučaja korespondira teorijskim razmatranjima. Kako se vrijednost za  $M$  smanjuje, tako se vrijednost varijanse i njeno rasipanje povećavaju.



Slika 4.6: Vrijednosti varijanse računate u 50 iteracija sa po 1000 realizacija za različit broj dostupnih odbiraka  $M$

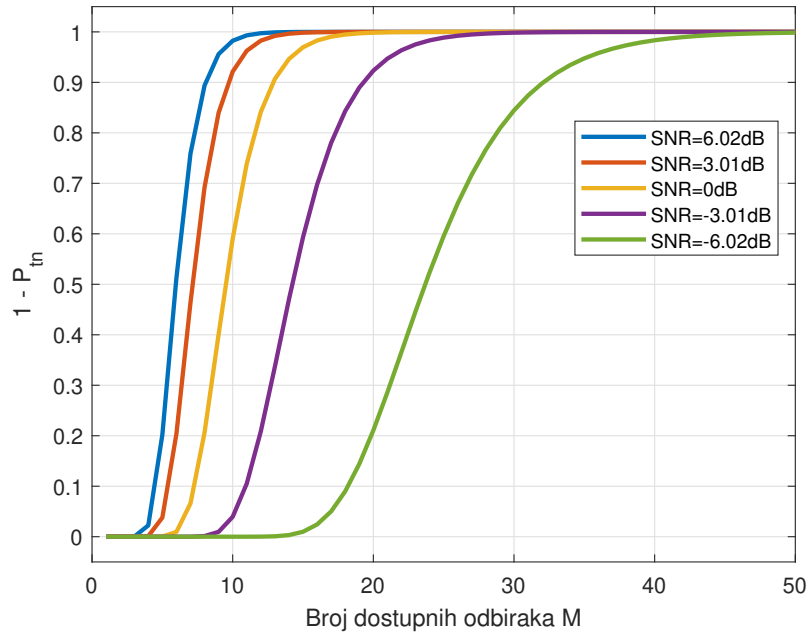
*Primjer 2:* U ovom primjeru, korist ćemo isti signal i SNR kao i u prošlom slučaju. Uzmimo manji broj dostupnih odbiraka  $M = 10$  u odnosu na donju granicu dostupnih odbiraka koju smo izveli. Prikazane su tri uzastopne realizacije za koje smo dobili pogrešnu detekciju (slika 4.7). Primijetimo da je komponenta signala označena zvjezdicom „\*“, dok je pogrešna komponenta obilježena sa „o“. Stoga, za takve vrijednosti  $M$ , računanje Kramer-Rao granice gubi smisao. Dakle, nije moguće koristiti teorijski izveden rezultat, ukazujući da Kramer-Rao granica važi za uslove date u ovom radu.





Slika 4.7: Ilustracija pogrešnih detekcija komponenti signala za broj dostupnih odbiraka manji od minimalne vrijednosti

*Primjer 3:* U prethodna dva primjera smo koristili fiksnu vrijednost za SNR. Međutim, varijansa šuma utiče na donju granicu dostupnih odbiraka. U ovom smislu za različite SNR pokazaćemo kako se mijenja minimalna vrijednost dostupnih odbiraka potrebnih za pouzdanu detekciju. Sa slike 4.8 možemo vidjeti da se povećanjem SNR smanjuje minimalni broj dostupnih odbiraka.



Slika 4.8: Vjerovatnoća detekcije komponente signala u zavisnosti od broja dostupnih odbiraka i SNR šuma

U tabeli 4.1 za dvije vrijednosti SNR-a data je vjerovatnoća tačne detekcije za određene opsege minimalne vrijednosti dostupnih odbiraka. (za SNR od  $-3.01dB$  do  $3.01dB$ ). Recimo, vidimo da je za SNR da se za  $SNR = -3.01dB$  i  $M = 25$ , vjerovatnoća 98.86%, dok je za slučaj  $SNR = 3.01dB$  i  $M = 18$ , vjerovatnoća 99.99%. Na kraju treba zaključiti da iako je analiza rađena za estimaciju amplitude signala, ukoliko nije zadovoljen uslov dat u tezi, nije moguće estimirati ni frekvenciju ni fazu.

| SNR = -3.01 dB |              |     |              | SNR = 3.01 dB |              |     |              |
|----------------|--------------|-----|--------------|---------------|--------------|-----|--------------|
| $M$            | $1 - P_{tn}$ | $M$ | $1 - P_{tn}$ | $M$           | $1 - P_{tn}$ | $M$ | $1 - P_{tn}$ |
| 14             | 0.4701       | 20  | 0.9232       | 9             | 0.8398       | 15  | 0.9984       |
| 15             | 0.5932       | 21  | 0.9470       | 10            | 0.9213       | 16  | 0.9993       |
| 16             | 0.6973       | 22  | 0.9636       | 11            | 0.9626       | 17  | 0.9997       |
| 17             | 0.7801       | 23  | 0.9752       | 12            | 0.9826       | 18  | 0.9999       |
| 18             | 0.8431       | 24  | 0.9832       | 13            | 0.9921       | 19  | 0.9999       |
| 19             | 0.8897       | 25  | 0.9886       | 14            | 0.9964       | 20  | 1.0000       |

Tabela 4.1: Vjerovatnoća detekcije komponente signala

## 4.6. Optimalna detekcija sinusoidalnih signala ograničeni prozorom sa nedostajućim odbircima

U poglavlju 4.3 smo detaljno razmatrali sinusoidalne signale u prozoru koji zapravo imaju sve dostupne odbirke. Stoga smo izveli relacije za Kramer-Rao granicu, kao i za optimalni estimator. U ovom slučaju ćemo razmatrati signale sa nedostajućim odbircima. Prisjetimo se relacije za puni oblik signala (4.88) i (4.90). Za signal sa nedostajućim odbircima imamo:

$$y_h(n, n_m) = x_h(n + n_m), \quad n_m \in \Theta \quad (4.147)$$

gdje takođe imamo:

$$\text{card}(\Theta(n)) = M_h(n) \quad (4.148)$$

pri čemu je prozor centriran na poziciji  $n$ . U slučaju kompresivnog odabiranja, kardinalnost (broj dostupnih odbiraka unutar prozora) je  $M_h(n)$  ako prozor čitavom dužinom zahvata signal. Ukupna dužina signala u prozoru je  $N_h$ . Dakle, za ovaj tip signala dobijamo:

$$-\frac{\partial \ln p_{\mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h|a)}{\partial a} = \frac{M_h(n)}{N_h} \frac{N_h}{\sigma^2} \left( \sum_{n_m \in \Theta(n)} \frac{1}{N_h} y_h(n, n_m) h(n_m) e^{-j \frac{2\pi k_0 n}{N_h}} - a \right) \quad (4.149)$$

Slijedi da je optimalni estimator kratkotrajna Furijeova transformacija signala sa nedostajućim odbircima:

$$STFT(n, k_0) = \frac{1}{N_h} \sum_{n_m \in \Theta(n)} x_h(n + n_m) h(n_m) e^{-j \frac{2\pi k_0 n}{N_h}} \quad (4.150)$$

a minimalna granica varijanse je:

$$\text{Var}(\hat{a}, n) \geq \frac{N_h}{M_h(n)} \frac{\sigma^2}{N_h} \quad (4.151)$$

Međutim, dešava se da za sinusoidu ograničenog trajanja prozor zahvata samo jedan segment signala. Dakle, relacija (4.147) važi za sve slučajeve osim kad je prozor pozicioniran blizu kraja signala. Tada je broj dostupnih odbiraka  $L_h(n) < M_h(n)$ . Posmatrajmo najnepovoljniji slučaj kada je prozor centriran na poslednji odbirak signala. Tada broj dostupnih odbiraka u prvoj polovini prozora treba da bude  $L_h(n) = M_h(n)$ . Stoga, broj dostupnih odbiraka za preciznu estimaciju frekvencije

na svakoj poziciji  $n$  treba da bude:

$$\min\{M_h(n)\} \geq 2 \sqrt{\frac{\sigma^2}{a^2} \ln \left( \frac{1}{1 - P_{tn}^{\frac{1}{N_h-1}}} \right)} \quad (4.152)$$

## 4.7. Slučaj nedostajućih odbiraka u Hermitskom do- menu i ograničenja u Kramer-Rao pristupu

U slučaju Hermitskih signala sa nedostajućim odbircima, primijenimo proceduru analogno slučaju kada su svi odbirci dostupni. Razmatrajmo skup dostupnih odbiraka, koji je podskup skupa svih odbiraka  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ . Razmatramo slučaj Gaus-Hermitske kvadrature aproksimacije. Tada je:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln p(x|a)}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma_{norm}^2(M)} \left( \sum_{r=0}^{M-1} \frac{x(n_r) \varphi_k(n_r)}{\varphi_{N-1}^2(n_r)} - \sum_{r=0}^{M-1} \frac{\varphi_k^2(n_r)}{\varphi_{N-1}^2(n_r)} a \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_{norm}^2(M)} \left( \sum_{r=0}^{M-1} \frac{x(n_r) \varphi_k(n_r)}{\varphi_{N-1}^2(n_r)} - \gamma(M) a \right) \end{aligned} \quad (4.153)$$

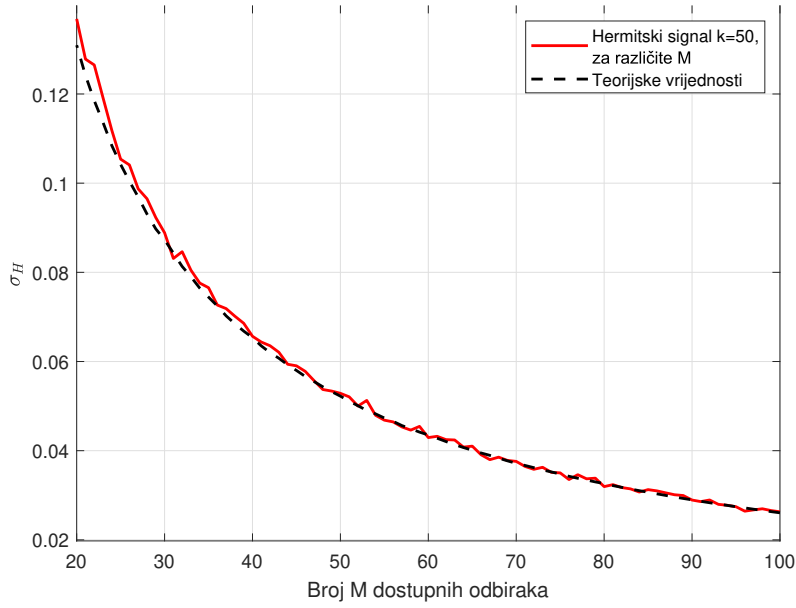
Uzimajući da je  $\gamma(M) = E \left[ \sum_{n_r=0}^{M-1} \frac{\varphi_k^2(n_r)}{\varphi_{N-1}^2(n_r)} \right] \approx M$ , dobijamo:

$$-\frac{\partial \ln p(x|a)}{\partial a} = \frac{M}{\sigma_{norm}^2(M)} \left( \frac{1}{M} \sum_{n_r=0}^{M-1} \frac{x(n_r) \varphi_k(n_r)}{\varphi_{N-1}^2(n_r)} - a \right) \quad (4.154)$$

Dakle, varijansa u ovom slučaju je  $\sigma^2 = \sigma_{norm}^2(M)/M$ , što se takođe može zapisati kao:

$$Var(\hat{a}) \geq \frac{N}{M} \frac{\sigma_{norm}^2(M)}{N} \quad (4.155)$$

Na slici 4.9 je data zavisnost donje granice varijanse estimiranog parametra prema različitom broju dostupnih odbiraka sa Hermitskim signalom reda  $k = 50$ .



Slika 4.9: Donja granica varijanse za različite  $M$  vrijednosti

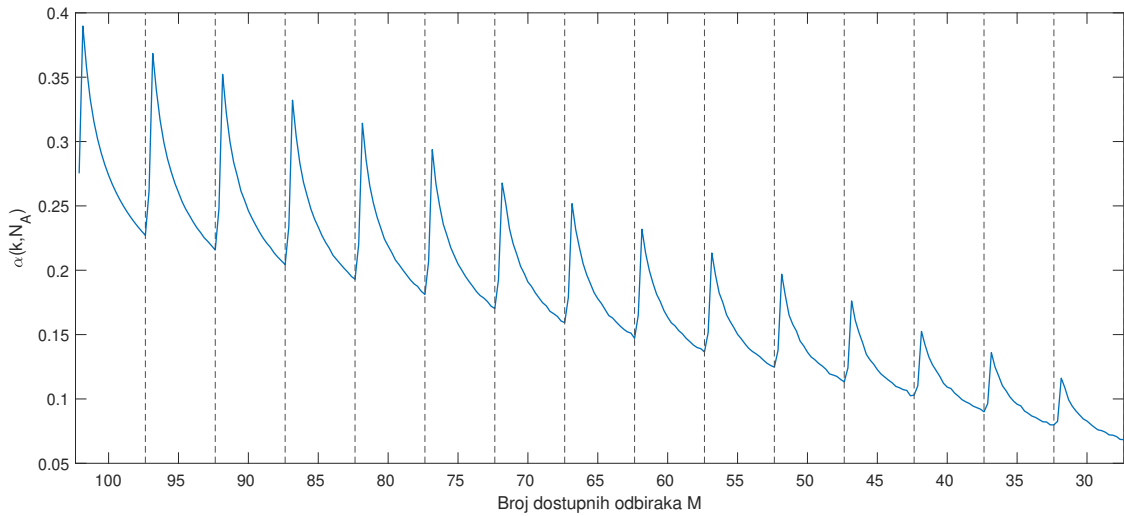
Izvođenjem relacije za varijansu, u ovom slučaju se dobija:

$$\sigma_H^2(k, M) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N^2} E \left[ \sum_{n_r=0}^{M-1} \frac{\varphi_k^2(n_r)}{\varphi_{N-1}^4(n_r)} \right] = \alpha(k, M) \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.156)$$

Maksimalni izraz za varijanse za određeno  $M$  dobijaju se za  $k = N - 1$ , odnosno:

$$\sigma_{H_{max}}^2(M) = \alpha(N - 1, M) \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.157)$$

Zavisnost varijanse za različite vrijednosti  $M$  za svako  $k$  u opsegu od 30 do 100 prikazana je na slici 4.10.



Slika 4.10: Zavisnost  $\alpha$  za opseg reda  $k$  od 100 do 30, za različite vrijednosti  $M$

Kramer-Rao granica uzima u obzir samo eksterni šum  $\varepsilon(n)$ . Međutim, i nedostajući odbirci izazivaju šum koji značajno narušava predstavljanje signala u Hermitskom domenu. Štaviše, postoji manja vrijednost nedostajućih odbiraka za koju prethodna relacija Kramer-Rao granice važi. Ako je broj dostupnih odbiraka manji, onda Kramer-Rao granica gubi smisao, jer neće se samo estimirati amplituda pogrešno, nego će i pozicija detektovanog signala (tj. red Hermitske funkcije) biti na pogrešnom mjestu. U nastavku ćemo izvesti broj dostupnih odbiraka za koje ova teorija važi. Za ovu namjenu, uticaj varijanse šuma izazvane nedostajućim odbircima je krucijalan. Za signal  $s(n) = a\varphi_p(n)$ , varijansa za Hermitsku transformaciju  $k \neq p$  se definiše kao:

$$\sigma^2 = E \{ |X(k)|^2 \} = E \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} a\varphi_p(i) \frac{\varphi_k(i)}{\varphi_{N-1}^2(i)} \frac{\varphi_k(j)}{\varphi_{N-1}^2(j)} a\varphi_p(j) \right\} \quad (4.158)$$

koja se može zapisati u matricnoj formi. Dakle, imamo:

$$\sigma^2 = E \{ \varphi_{Hs} \varphi_{Hs}^* \} \quad (4.159)$$

gdje je

$$\varphi_{Hs} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_0(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_0(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_0(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \\ \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_1(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_1(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \\ \vdots \\ \frac{\varphi_{M-1}(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_{M-1}(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_{M-1}(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \end{pmatrix} \quad (4.160)$$

Matrica  $\varphi_{Hs}$  je matrica dobijena množenjem matrice  $\varphi_H$  sa funkcijom  $s$ , čiji signal ima nedostajuće odbirke, dok  $M$  označava broj dostupnih odbiraka. U simplifikovanoj formi, bez gubljenja opštosti, elementi u rezultirajućoj matrici su od  $\varphi_1$  do  $\varphi_M$ . Iako rezultujuća matrica  $\varphi_{Hs}$  sadrži presortirane Hermitske funkcije  $\varphi_k$ , stoga imamo:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} E \left\{ \left( \begin{pmatrix} \frac{\varphi_0(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_0(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_0(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \\ \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_1(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_1(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \\ \vdots \\ \frac{\varphi_{M-1}(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_{M-1}(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \cdots + \frac{\varphi_{M-1}(M-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(M-1) \end{pmatrix} \right)^2 \right\} \quad (4.161)$$

U svakom elementu kolone imamo:

$$\frac{1}{N^2} E \left\{ \frac{\varphi_k(i)}{\varphi_{N-1}^2(i)} \frac{\varphi_k(i)}{\varphi_{N-1}^2(i)} s^2(i) \right\} = \frac{a^2}{N^2} \quad (4.162)$$

Možemo primijetiti da ima  $M$  takvih elemenata (signal je korišten u obliku  $s(i) = a\varphi_p(i)$ ), i osobina ortogonalnosti Hermitskih funkcija je korištena, što znači da  $\varphi_k(i)\varphi_p(i) = 1$ . Sa druge strane imamo ostalih  $M(M-1)$  koeficijenata oblika:

$$E \left\{ \frac{\varphi_k(i)\varphi_p(j)}{\varphi_{N-1}^2(i)\varphi_{N-1}^2(j)} s(i)s(j) \right\} \quad (4.163)$$

Da bi izračunali vrijednosti prethodne jednačine, korist ćemo sljedeći identitet:

$$\frac{\varphi_k(0)}{\varphi_{N-1}^2(0)} s(0) + \frac{\varphi_k(1)}{\varphi_{N-1}^2(1)} s(1) + \dots + \frac{\varphi_k(N-1)}{\varphi_{N-1}^2(N-1)} s(N-1) = 0 \quad (4.164)$$

Množeći svaki dio od (4.165) sa  $\frac{\varphi_p(j)s(j)}{\varphi_{N-1}^2(j)}$ , i uzimajući:

$$E \left\{ \frac{\varphi_k(i)\varphi_p(j)}{\varphi_{N-1}^2(i)\varphi_{N-1}^2(j)} s(i)s(j) \right\} = B \quad (4.165)$$

te imajući u vidu da je za jedan član  $k = p$  dobijamo:

$$(N-1)B + \frac{a^2}{N} = 0 \quad (4.166)$$

Iz čega slijedi

$$B = \frac{-a^2}{N^2(N-1)} \quad (4.167)$$

I konačno

$$\sigma^2 = \frac{Ma^2}{N^2} + M(M-1) \frac{-a^2}{N^2(N-1)} = \frac{M(N-M)}{N^2(N-1)} a^2 \quad (4.168)$$

Pošto je izvedena varijansa šuma izazvana nedostajućim odbircima, možemo dalje analizirati vjerovatnoću da komponenta šuma bude detektovana kao komponenta signala. Naime, očigledno je da za vrijednost  $M$  manju od minimalnog broja dostupnih odbiraka može da dođe do greške u estimaciji kada izvedena Kramer-Rao granica gubi smisao. Stoga ćemo koristiti gustinu funkcije vjerovatnoće za raspodjelu Hermitskih koeficijenata [66]. Hermitski koeficijenti imaju normalnu raspodjelu  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ( $k \neq p$ ), ili njihova apsolutna vrijednost je polunormalna raspodjela. Vjerovatnoća da apsolutna vrijednost Hermitskih koeficijenata za  $k \neq p$  je manja od granice  $Z$  je:

$$P_N(Z) = \int_0^Z \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\sigma}} d\zeta = \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma_X}\right) \quad (4.169)$$

Shodno tome, vjerovatnoća da  $N - 1$  koeficijenata je manja od  $Z$  je:

$$P_{NN}(Z) = \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)^{N-1} \quad (4.170)$$

U našem slučaju, vjerovatnoća da komponenta signala bude preko ograničenja (estimirana srednja vrijednost) je:

$$P_\varepsilon = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{M}{N}a}{\sqrt{2}\sigma_{total}}\right)^{N-1} \quad (4.171)$$

Primijetimo da je srednja vrijednost amplitude  $\frac{M}{N}a$ . U prethodnoj relaciji uključena je i varijansa eksternog šuma. Odnosno:

$$\sigma_{total}^2 = \sigma^2 + \sigma_H^2(k, M) \quad (4.172)$$

Prethodna relacija koja daje estimaciju broja dostupnih odbiraka zahtijeva oprez pri numeričkom računanju i korišćenje veće preciznosti pri računanju. Međutim, analiza se može značajno pojednostaviti korišćenjem sigma pravila iz teorije vjerovatnoće. Pokazuje se da takva estimacija daje sasvim dobre rezultate što ćemo kasnije statistički verifikovati. Dakle, pretpostavićemo da je da je uticaj šuma na srednju vrijednost amplitude sličan onom na nedostajućim odbircima. U tom slučaju, za pouzdanu detekciju komponente imamo:

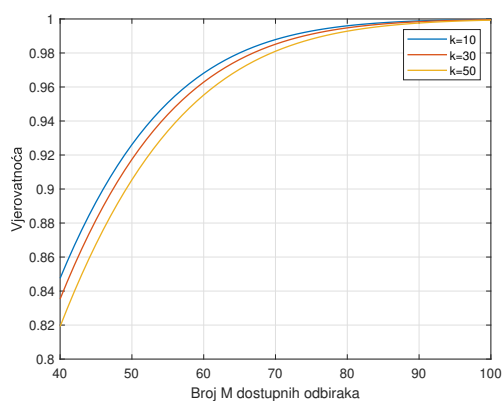
$$\begin{aligned} \frac{M}{N}a &> p\sqrt{\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}a^2 + \sigma_{H_{max}}^2(k, M)} \\ &= p\sqrt{\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}a^2 + \alpha_{max}(k, M)\sigma_\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (4.173)$$

Ukoliko je  $p = 3$ , ova relacija predstavlja pravilo tri sigme (*three sigma rule*). Koristeći  $p$  smo izračunali vjerovatnoću za različito  $M$ . Pokazuje se da će se najbolja estimacija dobiti za maksimalnu vrijednost varijanse dobijene za različite  $(k, M)$  iz relacije (4.157). Teorijska razmatranja će biti statistički verifikovana korišćenjem numeričkih primjera, kao i na realnom signalu.

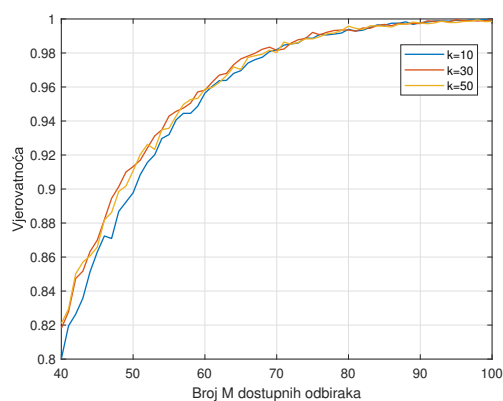


### 4.7.1 Eksperimentalni rezultati

*Primjer 1:* U ovom primjeru smo izvršili statističke provjere za estimaciju vjerovatnoće detekcije prave komponente zavisno od broja dostupnih odbiraka. U tom smislu, izvršili smo testove za različite slučajeve  $M = 30, 40, \dots, 100$  koristeći varijansu eksternog šuma od 0.1. Korišćeni su Hermitski signali sa redom funkcije ( $k = 10, 30, 50$ ), dužine  $N = 100$  odbiraka. Statistički rezultati su dobijeni za preko 10000 realizacija. Rezultati su prikazani na slikama 4.11a) i 4.11b). Takođe, za  $k = 10$  izvršeno je poređenje eksperimentalnih vrijednosti sa teorijskim vjerovatnoćama računatim prema relaciji (4.174). Poređenje je prikazano na slikama 4.12a) i 4.12b), gdje su korišćene ulazne varijanse eksternog šuma od 0.05 i 0.1 respektivno. Sa slike 4.12a) se može primjetiti da za  $M \geq 52$  imamo vjerovatnoću tačne detekcije za čak više od 99% (za slučaj varijanse od 0.05) za teorijske i statističke vrijednosti. U slučaju da je ulazna varijansa 0.1, teorijske i statističke vjerovatnoće su prikazane na slici 4.12b). Sa ove slike se može primjetiti da za više od 78 dostupnih odbiraka imamo vjerovatnoću iznad 99%. Takođe se može primjetiti neznatno odstupanje statističkih od teorijskih vrijednosti. Međutim, za veće vrijednosti vjerovatnoće, što je posebno važno za praktične primjene, teorijske i statističke vrijednosti se praktično poklapaju, tako da za 79 dostupnih odbiraka, vjerovatnoće se razlikuju za 0.31% (za teorijsku vrijednost je vjerovatnoća 99.06%, dok je za eksperimentalnu vrijednost 99.37%) u slučaju ulazne varijanse od 0.1. Za varijansu od 0.05, za 52 dostupnih odbiraka, vjerovatnoća za teorijske vrijednosti je 99.03%, dok je za eksperimentalne vrijednosti 99.19%. Pokazano je da se predložena teorijska relacija može efikasno korsistiti za estimaciju najmanjeg broja dostupnih odbiraka za koje imamo tačnu detekciju. Za teorijski proračun,  $\sigma_{H_{max}}(10, 25)$  i za  $\sigma_{H_{max}}(10, 30)$  su korišćene za varijanse od 0.1 i 0.05 respektivno.

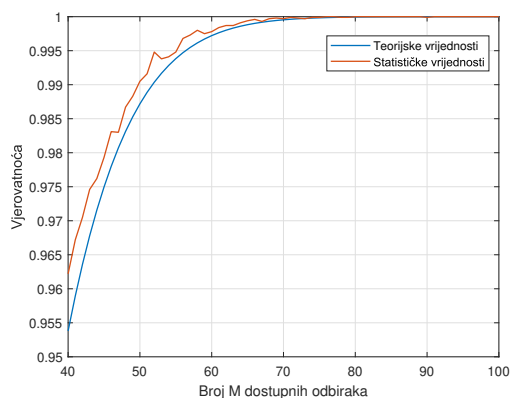


(a)

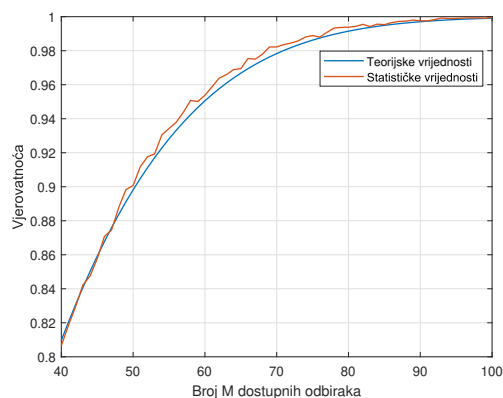


(b)

Slika 4.11: Vjerovatnoća detekcije komponente signala računate za različito  $k$ : a) teorijski; b) statistički



(a)



(b)

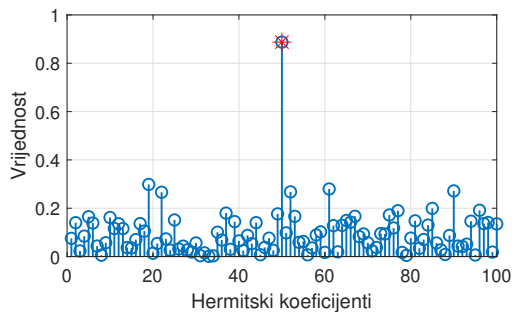
Slika 4.12: Vjerovatnoće detekcije komponente signala računate teorijski i statistički za: a) varijansu 0.05 i b) varijansu 0.1

Najmanji broj dostupnih odbiraka dobijenih teorijski i statistički ( $M_T$ ,  $M_S$ ) koji garantuju detekcije sa visokom vjerovatnoćom su date u tabeli 4.2. Varijanse 0.05 i 0.1 su razmatrane za slučajeve vjerovatnoća u rasponu od 90% do 99%.

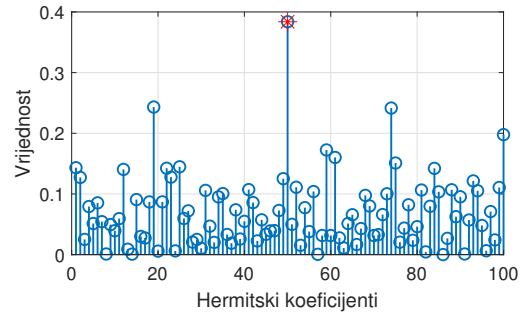
| $\sigma_\varepsilon^2$ | Vjerovatnoća | $M_T$ | $M_S$ |
|------------------------|--------------|-------|-------|
| 0.05                   | 95%          | 40    | 39    |
| 0.05                   | 97%          | 44    | 42    |
| 0.05                   | 99%          | 51    | 49    |
| 0.1                    | 90%          | 51    | 50    |
| 0.1                    | 95%          | 60    | 59    |
| 0.1                    | 99%          | 79    | 77    |

Tabela 4.2: Vjerovatnoća detekcije komponente signala za različite  $\sigma_\varepsilon^2$  u zavisnosti od minimalnog broja dostupnih odbiraka

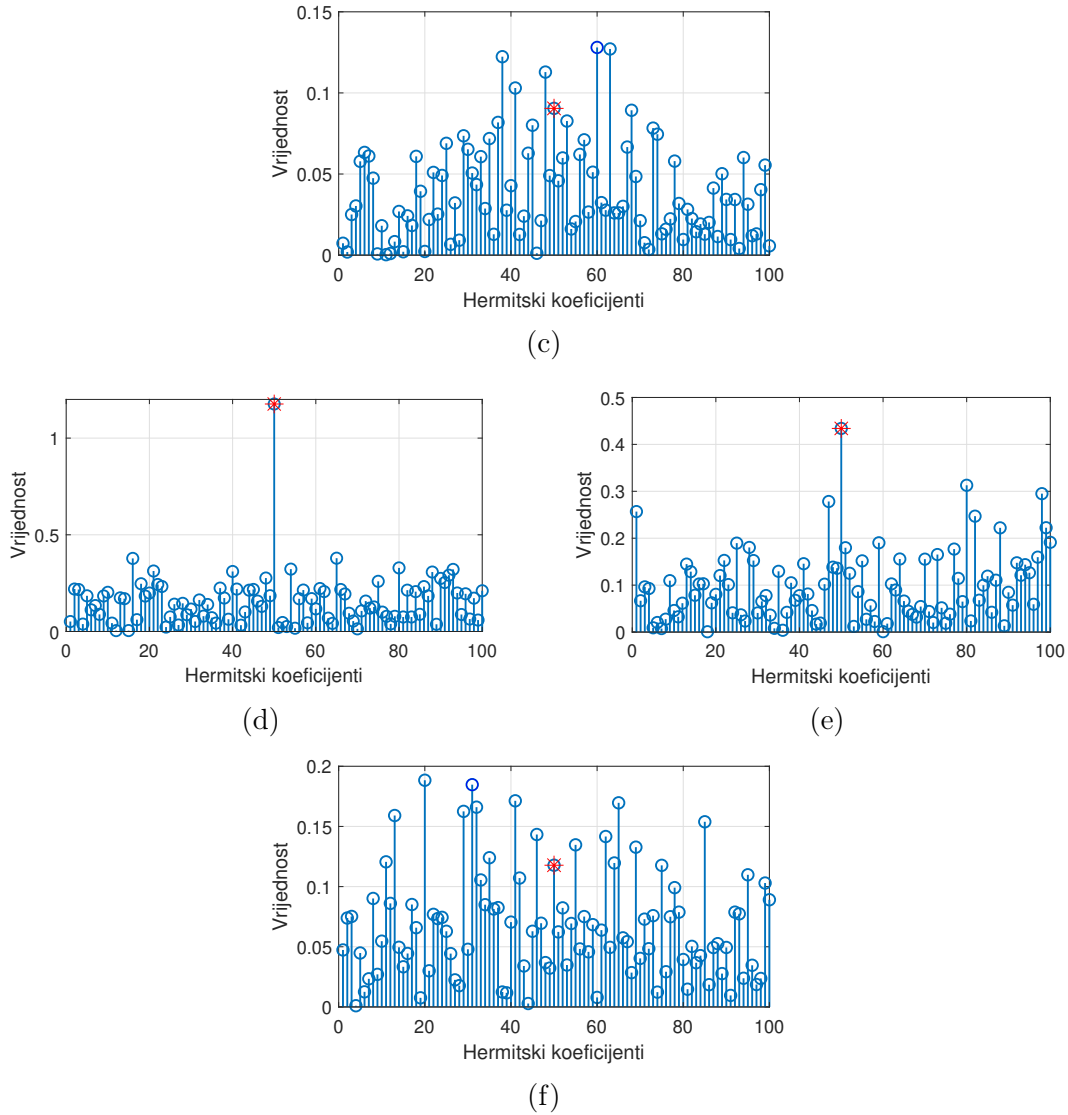
*Primjer 2:* U ovom primjeru ćemo razmatrati Hermitski signal u sljedećem obliku:  $s(n) = a\varphi_{30}$  sa amplitudom  $a = 1$ . Signal je zahvaćen Gausovim bijelim šumom sa varijansama od  $\sigma_\varepsilon = 0.05, \sigma_\varepsilon = 0.1$ . Za sve slučajeve ćemo razmatrati različite brojeve dostupnih odbiraka da bismo provjerili tačnost detekcije. Na slikama 4.13a) i 4.13b) razmatramo brojeve dostupnih odbiraka koji daju visoku vjerovatnoću detekcije za više od 95% u slučaju varijanse od 0.05. Na slici 4.13c) je korišćen broj dostupnih odbiraka čija je vjerovatnoća tačne detekcije manja od 60%. Na slikama 4.13d) i 4.13e) je primjenjena varijansa šuma od 0.1 i broj dostupnih odbiraka čija je vjerovatnoća tačne detekcije veća od 95%, dok je na slici 4.13f) prikazan rezultat za broj dostupnih odbiraka za koji je vjerovatnoća tačne detekcije manja od 42%. Dakle, na ovoj slici su ilustrovani slučajevi tačne detekcije (Slika 4.13a), 4.13b), 4.13d) i 4.13e)), i pogrešne detekcije (Slika 4.13c) i 4.13f)). Najmanji broj dostupnih odbiraka je dobijen koristeći rezultate iz Primjera 1.



(a)



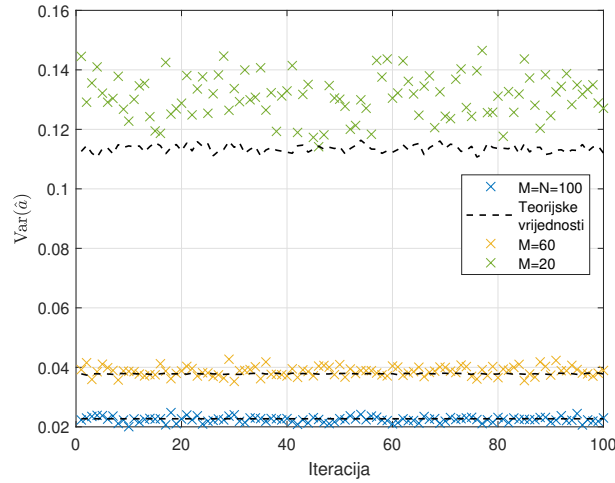
(b)



Slika 4.13: Ilustracija tačne i pogrešne detekcije za različit broj dostupnih odbiraka i varijanse šuma za  $\sigma_\varepsilon = 0.05$ : a)  $M = 100$ , b)  $M = 60$ , c)  $M = 15$ ; za  $\sigma_\varepsilon = 0.1$ , d)  $M = 100$ , e)  $M = 40$ , f)  $M = 20$

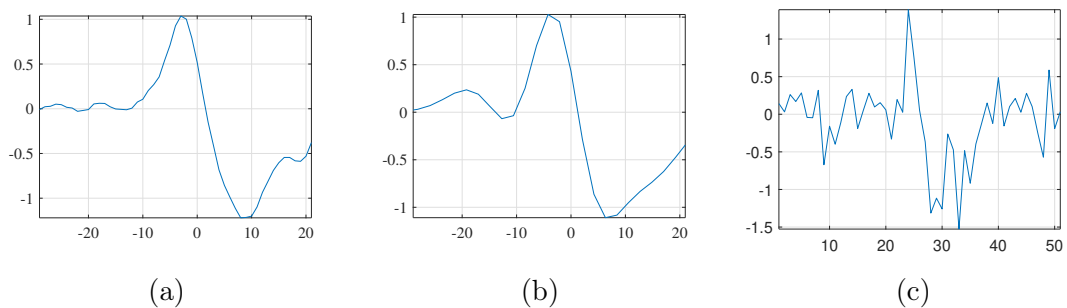
*Primjer 3:* Razmatrajmo signal  $s(n) = a\varphi_{30}$ ,  $a = 1$ . Signal je zahvaćen šumom sa varijansom  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$ . Za ovaj signal su izračunate varijanse za različite vrijednosti dostupnih odbiraka. Korišćeno je 1000 pokušaja sa različitim realizacijama Gausovog bijelog šuma sa istom varijansom, a postupak je ponovljen za 100 testova. Teorijska vrijednost, izračunata prema jednačini (4.156), prikazana je isprekidanim linijama na slici 4.14. Poređenjem statističkih rezultata sa teorijskom varijansom, može se uočiti dobro poklapanje za slučajeve  $M = 100$  i  $M = 60$ , koji predstavljaju broj dostupnih odbiraka koji prema jednačini (4.173) omogućavaju prilično pouzdanu detekciju. U slučaju  $M = 20$ , varijanse su rasute, jer je detekcija signala veoma nepouzdana. Generalno, ovaj slučaj se ne može koristiti za detekciju zbog velikog

broja pogrešnih detekcija. U našem proračunu korišćen je povoljan scenario, gdje se vrijednost koristi za računanje čak i kada komponenta signala nije detektovana kao dominantna.

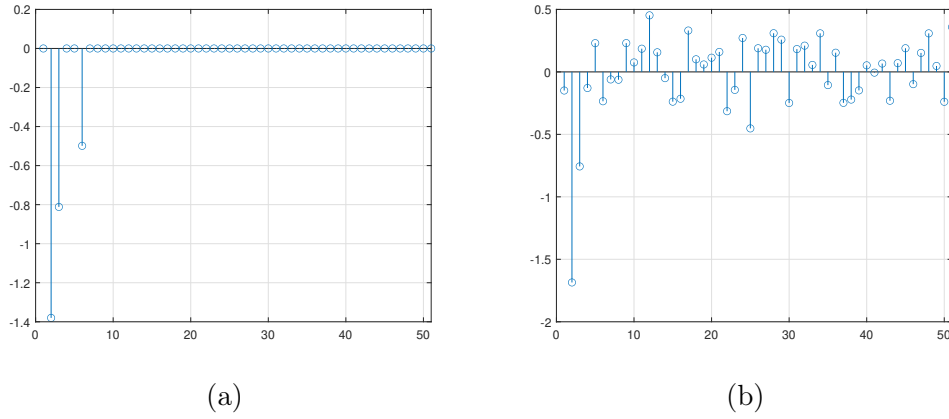


Slika 4.14: Statistička verifikacija varijanse za različito  $M$

*Primjer 4:* U ovom primjeru ćemo razmatrati realni signal i u tu svrhu koristiti QRS oblik EKG signala, koji je tipičan u primjenama Hermitske transformacije. Signal je prikazan na slici 4.15a). U našem primjeru smo sparsifikovali signal (što se često u primjenama radi) zadržavajući tri najdominantnija Hermitska koeficijenta (drugog, trećeg i šestog reda). Sparsifikovana verzija EKG signala je data na slici 4.15b), dok je sparsifikovana verzija zahvaćena šumom varijanse 0.1 prikazana na slici 4.15c). Hermitske transformacije sparsifikovanog i sparsifikovanog signala zahvaćenog šumom su date na slici 4.16a) i 4.16b) respektivno.

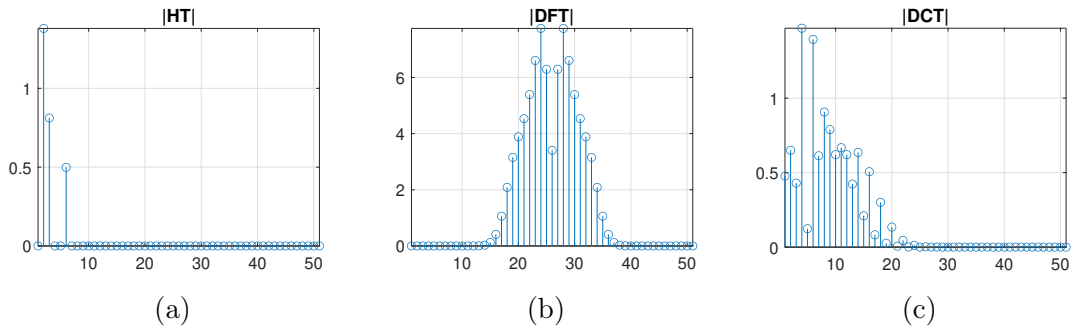


Slika 4.15: Realni QRS EKG signal a) originalni, b) sparsifikovani, c) sparsifikovani sa šumom



Slika 4.16: Hermitska transformacija: a) sparsifikovanog signala, b) sparsifikovanog signala zahvaćenog šumom

Da bi pokazali da je Hermitska transformacija optimalna za ovakve signale, napravimo poređenje korišćenja Hermitskog, Furijeovog i DCT domena. Sa slike 4.17 se može primjetiti da je predstavljanje signala koncizno u Hermitskom domenu. To je takođe i numerički pokazano računanjem  $\ell_1$  norme kao mjere koncentracije (najmanja vrijednost  $\ell_1$  norme dobijena je za Hermitsku transformaciju).



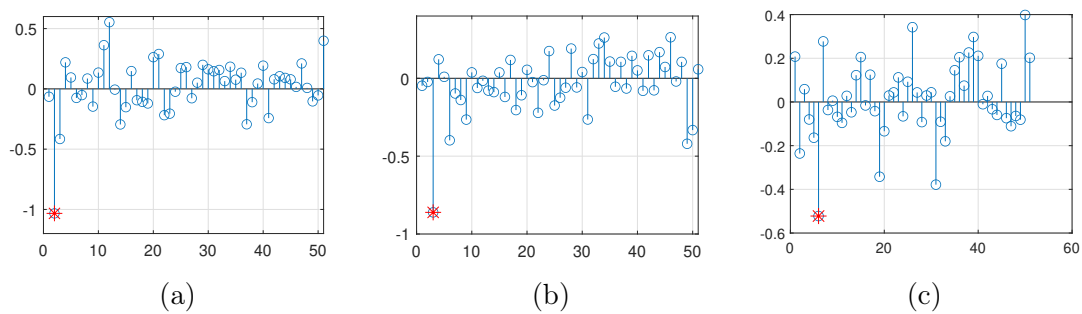
Slika 4.17: Predstavljanje QRS kompleksa u različitim domenima: a) Hermitski, b) Furijeov, c) DCT

Da bi se estimirao najmanji broj dostupnih odbiraka potrebnih za detekciju najdominantnije komponente (reda  $k = 2$ ), u relaciji (4.173) računamo varijansu nedostajućih odbiraka kao zbir varijansi produkovanih svakom komponentom pojedinačno (transformacija je linearna, pa se resultantna varijansa dobija zbirom pojedinačnih). Dakle,

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (4.174)$$

gdje su  $a_1, a_2$  i  $a_3$  amplitude komponenti signala ( $a_1 = 1.38, a_2 = 0.8, a_3 = 0.498$ ). Za prvu komponentu neophodno je uzeti više od 52% odbiraka od ukupnog broja

$N$  da bi vjerovatnoća detekcije bila iznad 99%. Uklanjajući prvu dominantnu komponentu, vršimo sličnu analizu za drugu najdominantniju komponentu (varijansa iz relacije (4.173) sadrži samo dvije komponente). U ovom slučaju, dobijamo vjerovatnoću dekecije iznad 99% za slučaj kad je broj dostupnih odbiraka veći od 70% ukupnog broja  $N$ . Konačno, nakon što uklonimo i drugu dominantnu komponentu, ostaje nam treća. Za ovu komponentu dobijamo detekciju sa vjerovatnoćom 95% za 80% dostupnih odbiraka. Dakle, ako želimo pouzdanu detekciju sa vjerovatnoćom iznad 95% za sve komponente, moramo uzeti više od 80% od  $N$  dostupnih odbiraka. U slučaju varijanse šuma 0.05, istu vjerovatnoću detekcije dobijamo za broj dostupnih odbiraka veći od 70% od  $N$ . Stoga, za ovakav tip signala rezultujući broj dostupnih odbiraka korespondira rezultatu dobijenom za najslabiju komponentu. Rezultati detekcije svake komponente koristeći odgovarajući broj dostupnih odbiraka, dati su na slikama 4.18a), 4.18b) i 4.18c).



Slika 4.18: Detekcija komponenti QRS signala a) prva komponenta  $k = 2$ , b) druga komponenta  $k = 3$  c) treća komponenta  $k = 6$

## 5. Klasifikacione metode

### 5.1. Osnovni teorijski principi

Funkcija gustine raspodjele (PDF) ima krucijalnu ulogu u različitim aplikacijama vezano za kompjutersku analizu, od modelovanja i simuliranja fizičkih pojava do statističkog prepoznavanja obrasca.

Generalno, metode estimiranja funkcije gustine raspodjele se mogu podijeliti na parametarske i neparametarske metode [81-91]. Parametarske metode se zasnivaju na podacima na osnovu kojih estimiraju funkciju gustine raspodjele [82,86,87]. Tipičan model pretpostavlja Gausovu raspodjelu, što omogućava definisanje odgovarajućeg pravila određivanja dva parametra koji karakterišu Gausovu strukturu podataka. Nakon određivanja funkcije gustine raspodjele, podaci za obuku više nisu potrebni, a izvedena relacija se koristi za pravilo odlučivanja.

U nedostatku početnih informacija o raspodjeli, koriste se neparametarske metode za estimaciju funkcije gustine raspodjele [83-85]. U mašinskom učenju, ovo podrazumijeva konstruisanje modela bez unaprijed definisane strukture podataka. Neparametarske metode za estimiranje funkcije gustine raspodjele su posebno korisne u situacijama kada raspodjela podataka odstupa od standardnih parametarskih pretpostavki. Ovi pristupi se široko koriste u analizi podataka, mašinskom učenju i obradi signala, gdje se vrše predikcije koristeći sve dostupne podatke i primijenjujući pravilo odlučivanja koje uzima u obzir odnos između novog podatka i cjelokupnog skupa podataka za obuku. Najjednostavnija neparametarska metoda je histogram, ali tačnost estimacije dobijene njime je ograničena. Često korišćene neparametarske metode estimacije funkcije gustine raspodjele uključuju metodu najbližeg susjednog odbirka (*k-th Nearest Neighbor* - KNN) [82,87,91], empirijsku funkciju raspodjele (*Empirical Distribution Function* - EDF) i estimaciju gustine pomoću jezgara (*Kernel Density Estimation* - KDE) [82,87].

Estimacija gustine pomoću jezgara (KDE) predstavlja metodu koja koristi glatku, simetričnu funkciju - jezgro (kernel) koje se postavlja u svaku tačku podataka, a zatim se sabiraju doprinosi od svake tačke ponaosob kako bi se formirala funkci-



ja gustine raspodjele [82,87]. Ova metoda pruža oblik raspodjele podataka koji je pogodniji za estimaciju od histograma. Poseban oblik estimacije gustine raspodjele pomoću jezgara, u kojem se koristi fiksni prozor, kao jezgro, poznat je kao Parzenov prozor (eng. *Parzen window*) [89,90]. Izbor prozorske funkcije i njene širine direktno utiče na tačnost estimacije.

Iako su softverske implementacije bile favorizovane zbog svoje fleksibilnosti, postoji sve veća potreba za hardverskim implementacijama [92-101]. Konkretno, hardverske implementacije obezbjeđuju znatno veću brzinu obrade i poboljšanu računsku efikasnost, što je posebno korisno za aplikacije u realnom vremenu i sisteme sa visokim zahtjevima u pogledu performansi. Osim toga, hardverske implementacije optimizuju korišćenje resursa kroz prilagođenu arhitekturu. Zbog toga, u ovoj glavi se predlaže efikasno rješenje za hardverske implementacije zasnovano na Parzenovom prozoru i metode k-tog najbližeg susjednog odbirka. Predloženo rješenje je skalabilno i nezavisno od veličine signala.

## 5.2. Metodologija

Kada se posmatra Parzenov prozor, implementacija koja direktno slijedi iz koraka algoritma bila bi veoma zahtjevana kako u pogledu složenosti hardvera (broja komponenti), tako i u pogledu vremena obrade. Stoga će fokus biti na mogućnost implementacije hardverskog rješenja korišćenjem analognih kola, koja mogu efikasno obraditi velike skupove podataka vezano za različite klasifikacione procese. Jedan od ciljeva je ispuniti skalabilnost arhitekture u smislu broja klasifikacionih procesa, što je takođe razmatrano u ovoj glavi. Nakon hardverske realizacije Parzenovog prozora, predložena je realizacija digitalnog hardvera za KNN. Primjenjivost hardverskih rješenja je demonstrirana preko realnih seizmičkih signala (za Parzenov prozor) i dvodimenzionih slika (za KNN).

## 5.3. Teorijska osnova - metode estimacija gustine raspodjele

Za slučajnu promjenljivu  $x$ , funkcija gustine raspodjele  $f(x)$  daje opis raspodjele  $x$ . Za računanje vjerovatnoće za  $x$  koristi se sljedeća relacija:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b \quad (5.1)$$

Neka je dat skup  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  slučajno raspoređenih tačaka. Kada je  $f(x)$  nepoznat, njene osobine treba da se očitaju koristeći skup  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Dakle, estimacija funkcije gustine raspodjele predstavlja stvaranje aproksimacije gustine raspodjele na osnovu posmatrane baze podataka.

Pretpostavimo da imamo beskonačnu sekvencu nezavisnih i identično raspoređenih slučajnih promjenljivih  $X_1, X_2, \dots$  sa nepoznatom gustinom raspodjele  $f$ . Cilj je da se estimira  $f$  na osnovu konačnog slučajnog odbirka  $X_1, \dots, X_n$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$ . U kontekstu parametarske estimacije funkcije raspodjele, neophodno je prethodno znanje o tome da li raspodjela odgovara određenom obliku, kao što je Gausova normalna raspodjela  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , gdje su  $\mu$  i  $\sigma^2$  parametri koji se estimiraju. Dakle, cilj je da se što tačnije estimira raspodjela parametara na osnovu posmatrane baze podataka.

Neparametarske metode estimiraju PDF na osnovu skupa nezavisnih i identično raspoređenih odbiraka. Najjednostavnija neparametarska metoda za estimaciju PDF-a je histogram. Ova metoda dijeli domene u intervalima i broji odbirke  $n_b$  koji upadaju u dati interval. Na primjer, ako promjenljiva  $X$  pripada intervalu  $[a, b]$ , onda je on podijeljen u  $M$  nepreklopujućih intervala čija je širina  $I_{bin}$  data sa [100]:

$$I_{bin} = \frac{b - a}{M} \quad (5.2)$$

Širina intervala predstavlja parametar glatkosti histograma. Naime, glatkiji histogrami imaju veće vrijednosti širine intervala, dok manje vrijednosti dovode do histograma sa većom varijabilnošću.

Za zadate slučajne odbirke  $X_1, \dots, X_n$  i širine intervala  $[x_k, x_{k+1}]$ , lokalna vjerovatnoća gustine se dobija kao [100]:

$$\hat{f}(x) = \frac{n_x}{nl_{bin}}, \quad \text{za } x_k \leq X \leq x_{k+1} \quad (5.3)$$

gdje  $n_x$  označava broj odbiraka u datom intervalu,  $n$  je ukupan broj odbiraka, širina intervala  $l_{bin} = x_{k+1} - x_k$ , a  $\hat{f}$  označava estimaciju za funkciju gustine raspodjele  $f$ .

Histogram omogućava jednostavnu implementaciju i jasnu vizualizaciju. Međutim, ima određena ograničenja, kao što su nedostatak glatkoće zbog diskontinuiteta na prelazima između intervala. Takođe, računaska složenost značajno raste sa povećanjem broja promjenljivih [85,86,100]. Ova ograničenja su podstakla razvoj složenijih metoda koje efikasnije rješavaju ove probleme. U tom smislu, razmatraćemo najprije metodu k-tog najbližeg susjednog odbirka. Ova metoda estimira gustinu na poziciji  $x$  razmatrajući k-tu distancu  $d_k$ , tj. distancu između tačke interesa i tačke na određenoj udaljenosti  $k$ . Međutim, izbor veličine te udaljenosti može da utiče na preciznost estimacije gustine raspodjele. Cijeli broj  $k$  je izabran da bude znatno ma-

nji od veličine skupa podataka  $n$ . Ako je broj odbiraka  $n$ , onda se za  $k$  često uzima  $k \approx \sqrt{n}$  [82]. Kod višedimenzionih podataka, hipersfera se formira korišćenjem  $d_k$  kao njenog radijusa, a funkcija gustine raspodjele  $\hat{f}(x)$  može da se estimira kao [82]:

$$\hat{f}(x) = \frac{k}{V_D n d_k^D(x)} \quad (5.4)$$

gdje  $n$  je ukupan broj odbiraka, a  $V_D$  zapremina jedinične sfere. Ako se distanca između dvije tačke označi sa  $d$ ,  $d_1(x) \leq d_2(x) \leq \dots \leq d_n(x)$ , onda je za jednodimenzioni slučaj  $V_D = 2$ , pa se onda estimacija gustine  $k$ -tog najbližeg susjednog odbirka može računati prema sljedećoj relaciji [82]:

$$\hat{f}(x) = \frac{k}{2n d_k(x)} \quad (5.5)$$

gdje  $d_k(x)$  označava distancu od  $x$  ka  $k$ -toj najbližoj tački.

Da bismo došli do forme Parzenovog prozora, posmatrajmo generalizaciju histograma. Ako slučajna promjenljiva  $x$  ima gustinu raspodjele  $f$ , onda važi sljedeća relacija:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} P(x - h < X < x + h) \quad (5.6)$$

Za dato  $h$ , moguće je estimirati  $P(x - h < X < x + h)$  određivanjem broja odbiraka koji upada u interval  $[x - h, x + h]$ . Jednostavni estimator se dobija za malo  $h$  i za nekoliko  $X_1, \dots, X_n$  koje upadaju u interval  $[x - h, x + h]$  [82]:

$$\hat{f}(x) = \frac{n_x}{2hn} \quad (5.7)$$

gdje  $n_x$  broj odbiraka u intervalu  $[x - h, x + h]$ .

Koristeći težinsku funkciju, prethodna relacija može biti realizovana u obliku:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n w\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad \text{gdje je } w(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{ako } |x| < 1 \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (5.8)$$

Prethodna relacija predstavlja osnovu za razvoj estimatora zasnovana na funkciji jezgra. Jedan od najpogodnijih jezgarnih estimatora gustine raspodjele je Parzenov prozor.

## 5.4. Metoda Parzenovog prozora i njena implementacija u klasifikaciji signala

Da bi se poboljšala glatkost težinske funkcije kod jednostavnog estimatora, koristi se funkcija jezgra. Naime, težinska funkcija  $w$  u jednostavnom estimatoru je zamijenjena glatkim simetričnim jezgrom  $K$ . Uticaj jezgra je maksimalan na poziciji tačke  $x = X_i$ , dok se sa njene lijeve i desne strane smanjuje. Dakle, estimator na bazi funkcije jezgra se može definisati kao [100]:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (5.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)dt = 1 \quad (5.10)$$

Ako zapišemo funkciju jezgra kao  $K_h(x) = \frac{1}{h}K(\frac{x}{h})$ , onda se prethodna relacija može zapisati kao:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) \quad (5.11)$$

Parametar  $h$  utiče na glatkost predstavljanja PDF-a i zove se širina prozora. Manja širina prozora unosi šum u prikaz estimiranog PDF-a, a za širok prozor postoji rizik od maskiranja važnih karakteristika u gustini raspodjele. Estimirana funkcija gustine raspodjele dobija se postavljanjem težinske funkcije jezgra u svaku tačku podataka, nakon čega se računa srednja vrijednost.

Metoda Parzenovog prozora je specifični tip estimacije zasnovana na jezgru, kod koga je funkcija jezgra (prozora) fiksna [89,90,100,101]. Umjesto da se direktno klasifikuju odbirci podataka, Parzenov prozor estimira PDF da bi obezbijedio uvid u raspodjelu podataka. Ovo uključuje centriranje prozora na svaku posmatranu tačku i računanje težinske srednje vrijednosti unutar prozora, umjesto da se samo izbroje odbirci unutar prozora. Sa neograničenim brojem odbiraka, ova metoda konvergira ka tačnoj gustini raspodjele.

Jezgro (kernel) je simetrična funkcija koja zadovoljava sljedeće uslove [100]:

$$K(x) \geq 0, \forall x \quad (5.12)$$

$$K(x) = K(-x), \forall x \quad (5.13)$$

$$\int K(x)dx = 1 \quad (5.14)$$

$$\int K^2(x)dx < \infty \quad (5.15)$$

$$\int K(x)|x|^3dx < \infty \quad (5.16)$$

Ako je funkcija jezgra Gausovog oblika, imamo [100]:

$$K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - X_i}{h}\right)^2} \quad (5.17)$$

Često korišćene funkcije prozora su pravougaona i trougaona. Pravougaona Parzenova prozorna funkcija  $K$  se dobija i definisana je kao:

$$K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \begin{cases} 1, & \text{za } |x - X_i| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad i = 1, \dots, k \quad (5.18)$$

gdje  $k$  označava broj odbiraka koje prozor okružuje, a  $n$  označava ukupan broj odbiraka. Estimirana gustina raspodjele za pravougaoni prozor se dobija kao:

$$\hat{f}(x) = \frac{k/n}{h} \quad (5.19)$$

gdje je broj odbiraka unutar prozora:

$$k = \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (5.20)$$

#### 5.4.1 Primjena Parzenovog prozora na primjere klasifikacije

Primjena metode Parzenovog prozora za estimaciju gustine raspodjele u klasifikacionom zadatku je opisana u nastavku [100]. Bez gubljenja opštosti, razmatramo pojednostavljeni slučaj pretpostavljajući dva različita procesa: proces  $P_1$  praćen trening signalom  $x_1$ , i proces  $P_2$ , praćen trening signalom  $x_2$ . Vrijednost odbirka  $y$  treba klasifikovati, odnosno dodijeliti procesu  $P_1$  ili  $P_2$ . Koristi se pravougaoni prozor, kao u jednačini (5.18), a broj odbiraka unutar prozora za  $P_1$  i  $P_2$  ( $k_1$  i  $k_2$ , respektivno) računa se prema jednačini (5.20).

Ista procedura je primijenjena kada imamo  $N$  procesa.

*Ograničenja:* Ako je posmatrani proces karakterisan nepreklapajućim PDF-om, onda za  $|k_1 - k_2| > \xi$ ,  $\xi$  označava minimalni razmak koji obezbjeđuje pouzdanu klasifikaciju. S druge strane, kada  $|k_1 - k_2| \leq \xi$  rezultat može biti dvosmislen. Međutim, ovo je relevantno samo kada se posmatra klasifikacija za jedan odbirak. U slučaju sekvence odbiraka, većina njih se može precizno klasifikovati.

## 5.5. Hardversko rješenje za Parzenovu estimaciju gustine raspodjele

U aplikacijama u kojima se koristi statistika protoka podataka, neophodna je obrada u realnom vremenu velikom brzinom. Shodno tome, estimacija PDF-a treba da bude implementirana pomoću hardverskih rješenja. Stoga, u ovom poglavlju je predložena efikasna hardverska implementacija za Parzenov prozor [100].

---

### Algorithm 4 Hardverska klasifikacija Parzenovim prozorom

---

1: Ulazi:

I)  $P_1 : x_1 = [x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)]$

II)  $P_2 : x_2 = [x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(n)]$

III)  $y$  - odbirak za klasifikaciju

2: Pridruživanje odbirka  $y$  odbircima  $x_1$  i  $x_2$  kao:

$$x_{1sort}^y = \text{sort}\{x_1 \cup \{y\}\}$$

$$x_{2sort}^y = \text{sort}\{x_2 \cup \{y\}\}$$

3: Računanje broja odbiraka unutar prozora:

$$k_1 = |\{x \in x_{1sort}^y \mid y - \Delta < x < y + \Delta\}|$$

$$k_2 = |\{x \in x_{2sort}^y \mid y - \Delta < x < y + \Delta\}|$$

gdje je  $\Delta = h/2$

4: Ako je  $k_1 > k_2$ , onda je  $y \in P_1$ ; inače  $y \in P_2$ ; na sljedeći  $y$

---

U rješenju datom na slici 5.1 klasifikacija odbiraka ulaznog signala je izvršena koristeći Parzenov prozor. Posmatrana su dva scenarija: prvi kada je neophodno izvršiti odabiranje ulaznog signala (slika 5.1a)) i drugi kada je signal već odabran i

odbirci su proslijeđeni kolu za selektovanje (slika 5.1b)) [100].

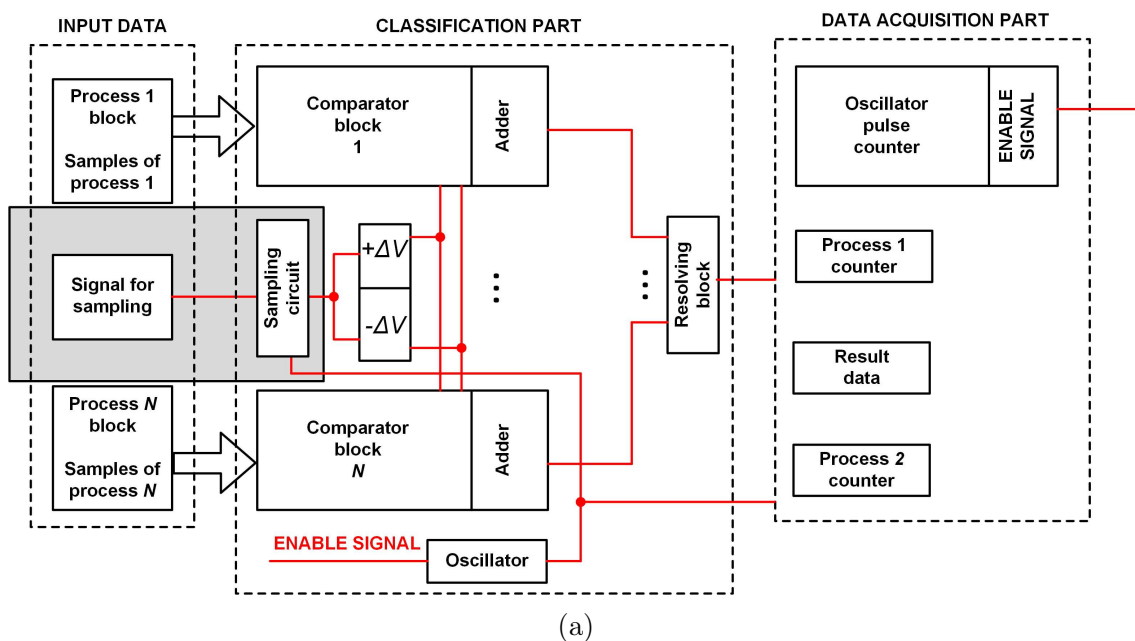
Struktura hardvera se sastoji od:

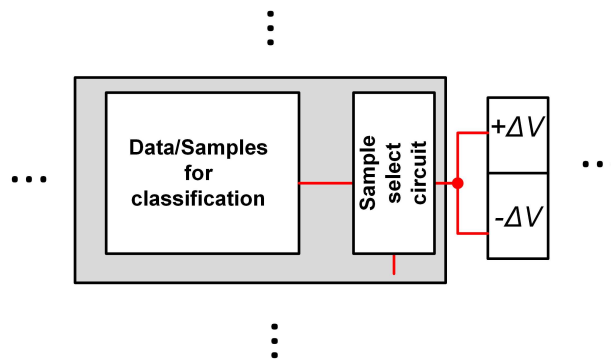
- Ulaznog dijela za podatke
- Klasifikacionog dijela
- Dijela za prikupljanje podataka
- Relaksacionog oscilatora

### 5.5.1 Ulazni dio - skladištenje i očitavanje podataka

Ulazni djelovi arhitekture su prikazani i označeni na slici 5.1. Dakle, odbirci procesa  $P_1, \dots, P_N$  se skladište po blokovima. Sa druge strane imamo dio kola preko kojeg se dovode odbirci signala, za koje treba izvršiti klasifikaciju. Razmatran je slučaj kada se vrši klasifikacija za analogni signal, pa se u skladu sa tim koristi kolo za odabiranje, kao i slučaj kada vršimo klasifikaciju već odabranog digitalnog signala (slika 5.1b). Blokovi za  $P_1, \dots, P_N$  se sastoje od *sample-and-hold* pojačavača.

Integralni dio arhitekture je relaksacioni oscilator, koji kontroliše njen rad. Dok god ENABLE signal oscilatora nije aktiviran, arhitektura ostaje neaktivna. Prije aktivacije ENABLE signala, odbirci se skladište u blokovima Proces 1, .... Proces  $N$ , a ulazni signal se dovodi u arhitekturu. Kada se ENABLE signal aktivira, on generiše impulse na izlazu oscilatora, čime se pokreće rad arhitekture.





(b)

Slika 5.1: Arhitektura za realizaciju klasifikatora zasnovanog na Parzenovom prozoru

### 5.5.2 Klasifikacioni dio u predloženoj arhitekturi

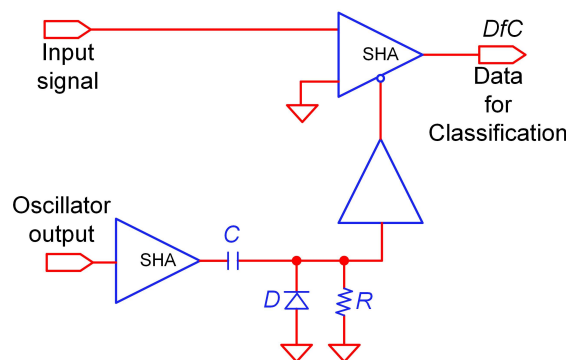
Klasifikacioni dio se sastoji od:

- Kola za odabiranje ili kola za selektovanje odbirka (zavisno od tipa signala, analogni ili digitalni)
- Kola za inkrementiranje ( $+\Delta V$ ) i dekrementiranje ( $-\Delta V$ )
- Komparatorskih blokova
- Sabirača
- Blokova za odlučivanje

U slučaju da signal nije odabiran, koristi se kolo za odabiranje. Šema kola za odabiranje je data na slici 5.2. Fundamentalna komponenta ovog kola je *sample-and-hold* pojačavač.

Kolo za odabiranje uzima odbirak ulaznog signala i zadržava ga na izlazu dovoljno dugo da bi se izvršila estimacija PDF-a. CR kolo funkcioniše kao diferencijator, koji definiše vrijeme tokom kojeg *sample-and-hold* pojačavač (SHA) ostaje u stanju odabiranja. Naime, CR kolom se može podešavati ovo vrijeme.

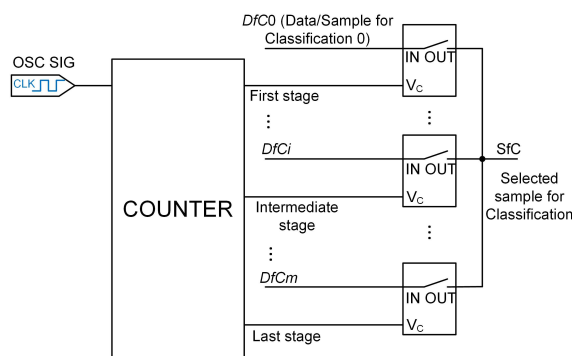




Slika 5.2: Kolo za odabiranje

Odbirak signala na izlazu ovog kola označen je sa DfC (*Data for Classification*), kao na slici 5.2.

Signal odabiran kolom na slici 5.2 se dovodi na kolo za selektovanje odbiraka (*Sample Select Circuit - SSC*), prikazano na slici 5.3.



Slika 5.3: Kolo za seletkovanje odbiraka

Ovo kolo se sastoji od oscilatora, dekadskog brojača 4017, logičkih AND kola i analognih prekidača i ovdje se kolo pobuđuje ulaznom ivicom signala iz oscilatora. Dekadski brojač (kad je aktivan) ima samo jedan izlaz na visokom naponskom nivou. Visok naponski nivo na izlazu brojača 4017 zatvara analogni prekidač, čime se obezbeđuje da selektovani odbirak bude proslijeđen dalje.

Kako bismo izbjegli operaciju sortiranja, koja je poznata po svojoj računskoj zahtjevnosti, koristićemo specifičnu analognu hardversku implementaciju. Shodno tome, prvi korak je izračunavanje granice  $\Delta$  koja se odnosi na funkciju prozora u Pazenovom pristupu:

$$y + \Delta = DfC + \Delta V = DfC + \quad (5.21)$$

$$y - \Delta = DfC - \Delta V = DfC - \quad (5.22)$$

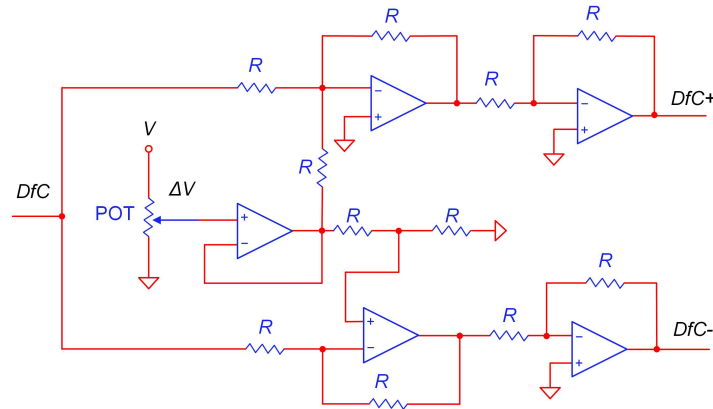
Zatim se za svaki proces odbirci  $x_i$  upoređuju (unutar komparatorskog bloka) sa  $DfC+$  i  $DfC-$  (paralelna realizacija) za  $i = 1, \dots, n$ , generišući izlaz kao:

$$C_{out}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{za } x_i \in [DfC-, DfC+] \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (5.23)$$

Na kraju je neophodno izbrojati vrijednosti „1” na izlazu komparatora koristeći analogne sabirače:

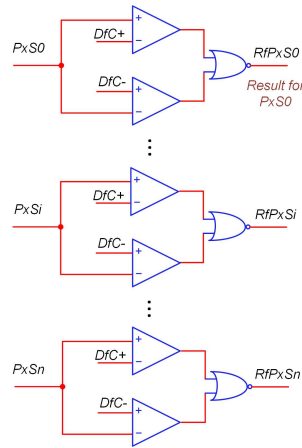
$$Sum(x_i) = \sum_{i=1}^n C_{out}(x_i) \quad (5.24)$$

Stoga, prema relacijama (5.21) i (5.22),  $DfC$  je pridružen ulazu kola za inkrementiranje/dekrementiranje, prikazanom na slici 5.4 ( $\pm\Delta V$  naponski korak koji se vezan sa širinom Parzenovog prozora). Kolo ima dva izlaza:  $DfC+$  i  $DfC-$ . Na izlazu  $DfC+$  dobija se vrijednost:  $DfC+ = DfC + \Delta V$ , dok na izlazu  $DfC-$  imamo:  $DfC- = DfC - \Delta V$ . Rezultati  $DfC+$  i  $DfC-$  su proslijeđeni komparatorskom bloku. Napomenimo da se vrijednost  $\Delta V$ , koja se odnosi na širinu prozora, zadaje empirijski. U eksperimentu je korišćena vrijednost  $\Delta V = 0.1$ .



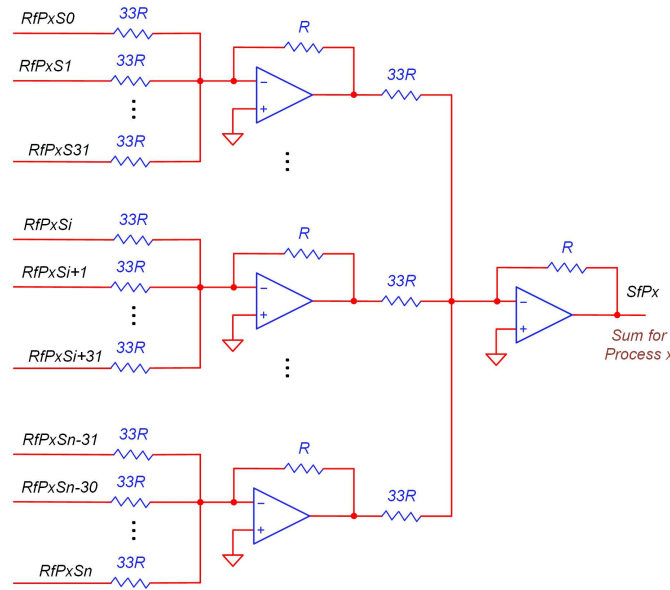
Slika 5.4: Kolo za inkrementiranje i dekrementiranje odbirka za vrijednošću  $+\Delta V$  i  $-\Delta V$

Komparatorski blok je prikazan na slici 5.5 i isti je za svaki proces (klasu)  $x$ , a u skladu je sa (5.26)). Neka je vrijednost svakog odbirka iz procesa  $x$  označena kao  $PxSi$ . Ova vrijednost se upoređuje sa  $DfC+$  i  $DfC-$ . Ako je  $PxSi$  manji od  $DfC+$  i veći od  $DfC-$ , na izlazu NOR kola (slika 5.5) pojavljuje se visok naponski nivo. U svim drugim slučajevima, naponski nivo na izlazu NOR kola biće nizak. Konačno, broj NOR kola sa visokim naponskim nivoom odgovara broju odbiraka iz procesa  $x$  čija je vrijednost unutar opsega  $DfC- < PxSi < DfC+$ , ili unutar opsega od  $\pm 10\%$  od vrijednosti odbirka  $DfC$  [100].



Slika 5.5: Komparatorsko kolo

Izlazi NOR kola u bloku komparatora označeni su kao  $RfPxSi$ . Ove oznake će biti korišćene u daljem opisu arhitekture. Izlazi NOR kola iz komparatorskog bloka ( $RfPxSi, i \in [1, ..., n]$ ) dalje se proslijeđuju na ulaze analognih sabirača (slika 5.6).



Slika 5.6: Kola za sabiranje visokih naponskih nivoa sa izlaza komparatora

Analogni sabirači su implementirani korišćenjem invertujućih pojačavača, kao što je prikazano na slici 5.6. Analogni napon dobijen na izlazu sabirača ( $SfPx$  – suma za proces  $x$ ) direktno je proporcionalan broju NOR kola u komparatorskom bloku koja imaju visok naponski nivo na izlazu. Za proces koji ima najveći broj visokih naponskih nivoa na izlazima NOR kola, izlazni analogni napon će biti najveći. Predložena arhitektura može da ima do 1024 izlaza NOR kola. Arhitektura je skalabilna i može se proširiti ili smanjiti prema potrebnom broju ulaza [100]. Na izlazu bloka komparatora nalazi se blok za odlučivanje, označen kao *Resolving block*.

Za slučaj dva procesa, blok za odlučivanje (*Resolving block*) je veoma jednostavan i sastoji se od samo jednog komparatora, kao što je prikazano na slici 5.7. Odluka se donosi na jednostavan način: ako je izlazni napon komparatora visok, veća je vjerovatnoća da odbirak pripada Procesu 1, u suprotnom, pripadaće Procesu 2.

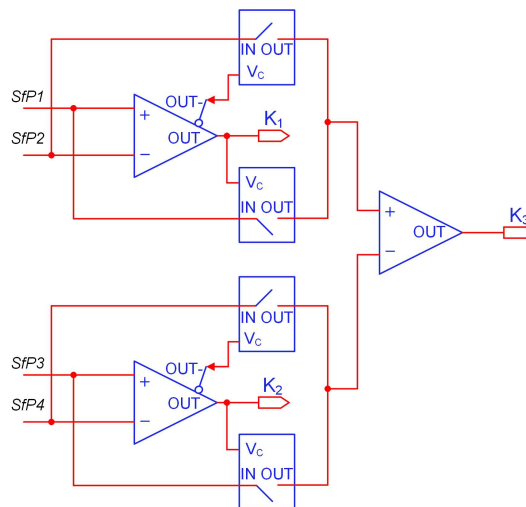


Slika 5.7: Blok za odlučivanje

Složenost komparatorskog bloka se blago povećava kada je potrebno donijeti odluku uzimajući u obzir više procesa. Na slici 5.8 je prikazan blok za odlučivanje za slučaj četiri procesa.

Neka signali koji označavaju pripadnost odbirka određenom procesu budu označeni kao  $AP_i$ , gdje je  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Izlazi komparatora  $K_j, j \in \{1, 2, 3\}$  određuju pripadnost odbirka nekom specifičnom procesu u skladu sa tabelom 5.1. Visok naponski nivo na izlazu komparatora označen je sa 1, dok je nizak naponski nivo označen sa 0. Na osnovu podataka iz tabele 5.1, mogu se lako identifikovati sljedeće Bulove relacije koje povezuju signale  $AP_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) i komparatore  $K_j$  ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ):

$$\begin{aligned} AP_1 &= K_1 K_3, & AP_2 &= \overline{K_1} K_3 \\ AP_3 &= K_2 \overline{K_3}, & AP_4 &= \overline{K_2} \overline{K_3} \end{aligned} \quad (5.25)$$



Slika 5.8: Blok za odlučivanje za četiri procesa

Slika 5.9 pokazuje realizaciju bloka za odlučivanje za slučaj osam procesa. Bulove relacije koje povezuju signale  $AP_i, i \in \{1, \dots, 8\}$  i  $K_j, j \in \{1, \dots, 7\}$  u ovom slučaju su:

$$\begin{aligned}
AP_1 &= K_1 K_5 K_7, & AP_2 &= \overline{K_1} K_5 K_7 \\
AP_3 &= K_2 \overline{K_5} K_7, & AP_4 &= \overline{K_2} \overline{K_5} K_7 \\
AP_5 &= K_3 K_6 \overline{K_7}, & AP_6 &= \overline{K_3} K_6 \overline{K_7} \\
AP_7 &= K_4 \overline{K_6} \overline{K_7}, & AP_8 &= \overline{K_4} K_6 \overline{K_7}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $AP$   |
|-------|-------|-------|--------|
| 0     | 0     | 0     | $AP_4$ |
| 0     | 0     | 1     | $AP_2$ |
| 0     | 1     | 0     | $AP_3$ |
| 0     | 1     | 1     | $AP_2$ |
| 1     | 0     | 0     | $AP_4$ |
| 1     | 0     | 1     | $AP_1$ |
| 1     | 1     | 0     | $AP_3$ |
| 1     | 1     | 1     | $AP_1$ |

Tabela 5.1: Tabela prikaz logičke funkcije signala  $AP_i$  u zavisnosti od  $K_i$

Poslednji dio arhitekture je segment za dobijanje podataka (*Data acquisition part*). Ovo je digitalni dio arhitekture koji prima podatke sa izlaza klasifikacionog segmenta, skladišti ih i čini dostupnim za dalju obradu u cilju donošenja odgovarajućih odluka. Kao što je prikazano u blok dijagramu predložene arhitekture, segment za prikupljanje podataka je dizajniran da zabeleži rezultate estimacije odbiraka ulaznog signala, izbroji koliko odbiraka pripada pojedinačnim procesima i da generiše STOP signal za završetak rada arhitekture [100]. Ovaj dio se može implementirati softverski ili hardverski. U ovom radu, glavni fokus je na analognom dijelu, koji predstavlja ključni doprinos predložene arhitekture.

## 5.6. Evaluacija predloženog hardverskog rješenja

Simulacija analognog dijela predložene arhitekture izvršena je korišćenjem PSpice softvera, verzija OrCad 22.1. Važno je naglasiti da je evaluacija predloženog hardverskog rješenja sprovedena korišćenjem jednostavnih, standardnih i široko dostupnih kola [100].

Blokovi ulaznih odbiraka sastoje se od *sample-and-hold* pojačavača, koji skladi-

šte vrijednosti odbiraka procesa. U simulaciji, AD783 *sample-and-hold* pojačavači su korišteni sa tipičnim vremenima akvizicije do 0.01% 250ns ili do 0.1% 200ns.

U simulaciji kola za selektovanje odbiraka (*Sample Select Circuit*) korišćen je dekadski brojač 4017 sa maksimalnim vremenom prelaza od 22 ns, zajedno sa analognim prekidačem MAX4645, čije je tipično vrijeme zatvaranja kontakta 12 ns, a vrijeme otvaranja kontakta 8 ns. Za simulaciju inkrement-dekrement kola, kao i za simulaciju analognog sabirača, korišćen je ultrabrzi operacioni pojačavač LT1191, sa vremenom relaksacije (do 0.1%) manjim od 110 ns. U simulaciji komparatora i bloka za donošenje odluka (*Resolving Block*) korišćeno je komparatorsko kolo LT1394, sa brzinom odziva od 7 ns.

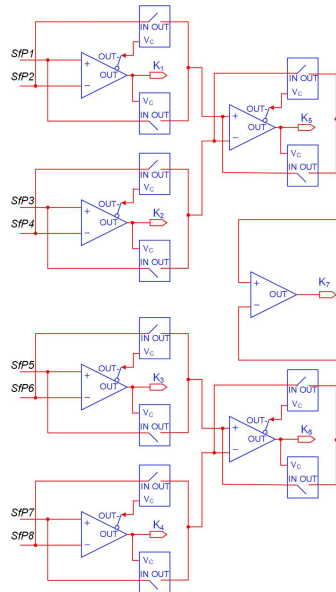
Za logičko NOR kolo u simulaciji korišćeno je MC74HC1G02 NOR kolo, sa ukupnim kašnjenjem manjim od 20 ns. U simulaciji bloka za donošenje odluka (*Resolving Block*), MAX4645 je korišćen kao analogni prekidač.

Specifikacija brzine rada pojedinih dijelova hardvera je:

- Potrebno vrijeme za odabiranje ulaznog signala je manje od 40ns (slika 5.2)
- Inkrementiranje/dekrementiranje nivoa napona iz izlaza kola selektovanja je izvršeno za manje od 270ns (slika 5.4)
- Naponski nivoi na izlazu komparatorskih blokova (slika 5.5) su uspostavljeni za manje od 30ns
- Kumulativni naponski nivo na izlazu sabirača (slika 5.6) je uspostavljen za manje od 170ns
- Naponski nivo na izlazu bloka za odlučivanje za dva procesa je dobijen za 7ns, za četiri procesa za manje od 40ns i za 16 procesa za manje od 70ns respektivno.

Dakle, pokazuje se da je ukupno vrijeme potrebno za klasifikaciju jednog odbirka manje od 420ns. Ovo znači da predloženi hardver može obraditi preko 2 miliona odbiraka u sekundi, što dalje implicira da može biti pogodan čak i za obradu visokorezolucijskih slika u realnom vremenu. Ovaj pristup otvara mogućnost primjene Prazenovog pristupa klasifikacije i smislu poboljšanja performansi neuralnih mreža koje rade sa velikim količinama podataka.

Dodatna poboljšanja mogu se postići korišćenjem specijalizovanih i optimizovanih kola, što će biti dalje razmatrano u tekstu.



Slika 5.9: Blok za odlučivanje za slučaj osam procesa

### 5.6.1 Diskusija rezultata

U cilju verifikacije efikasnosti rješenja, posmatraćemo poređenje predložene arhitekture za tri slučaja koje ćemo opisati u ovom poglavlju.

Prvi slučaj: za poređenje ćemo razmatrati slučaj analognog kola, koji uključuje operaciju za sortiranje. Posmatrana je implementacija koristeći Bitonsko sortiranje. Za PSpice simulaciju koristeći analogno bitoničko (eng. *Bitonic*) sortiranje za 1024 odbiraka je potrebno dodatnih oko 1000ns, tj. 2.5 puta više vremena za procesuiranje u poređenju sa predloženim rješenjem sa standardnim kolima.

Drugi slučaj: izvršićemo poređenje sa softverskom realizacijom. Važno je napomenuti da softverska realizacija u velikoj mjeri zavisi od takta procesora. U ovom eksperimentu, softverski kod se izvršava na CPU-u sa frekvencijom od 4 GHz. Vrijeme potrebno za obradu 1024 odbiraka prelazi  $150\mu s$ , jer operacija sortiranja sama po sebi zahtjeva  $112\mu s$ . Shodno tome, softverski algoritam zahtjeva približno 300 puta duže vrijeme obrade u poređenju sa predloženim hardverskim rješenjem.

Treći slučaj: Predloženo hardversko rješenje se može dodatno poboljšati u smislu vremena izvršenja koristeći napredne i brže analogne komponente, umjesto standardnih. Na primjer:

- umjesto *sample-and-hold* pojačavača AD783 može se koristiti HMC661LC4B sa vremenom akvizicije od 3ns,
- umjesto analognog prekidača MAX4645, mogu se koristiti brža kola ADG918,

- operacioni pojačavač LT1191 se može zamijeniti sa LMH6702 da se smanji vrijeme smirivanja na 0.2ns,
- komparatorsko kolo LT1394 se može zamijeniti sa ADCMP580 da bi se smanjilo vrijeme smirivanja na 0.2ns,
- logičko NOR kolo MC74HC1G02 se može zamijeniti sa 74AC02 da bi se smanjilo vrijeme propagacije na 3.5ns

Ukupno vrijeme za klasifikaciju jednog odbirka se svodi sa 420ns na 50ns.

Kada se upoređuju analogne verzije sa naprednim digitalnim implementacijama, izvršenje je i dalje više nego duplo manje u slučaju predloženog rješenja. Štaviše, digitalni sorteri u ovom slučaju su prilično zahtjevni u pogledu broja logičkih kola (1,6 miliona kola za 1024 odbiraka), što znači da su potrebni vrlo napredni čipovi (npr. Stratix 10 serija).

## 5.7. Eksperimentalni rezultati za realne seizmičke signale

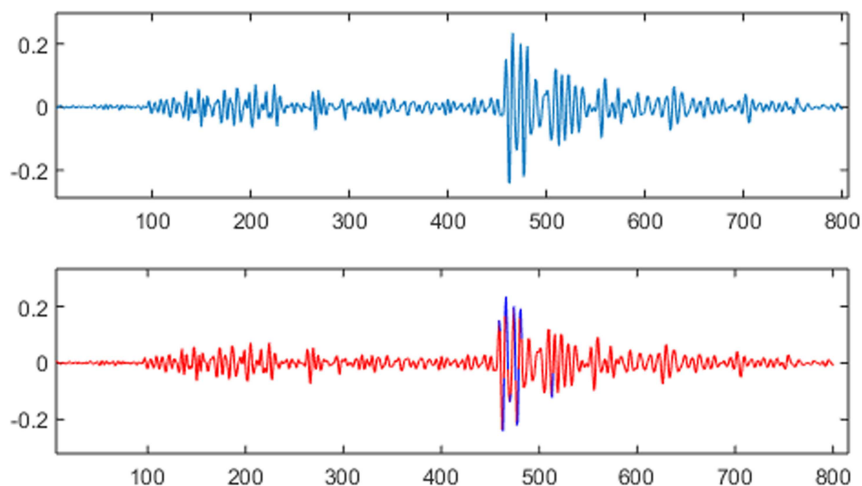
Efikasnost Parzenovog pristupa estimacije gustine raspodjele je prikazana za slučaj realnih signala. Posmatran je slučaj signala koji ima određeno statističko preklapanje.

Dakle, razmatramo dvije vrste signala: vještačke vibracije izazvane različitim vozilima i prirodne seizmičke vibracije izazvane zemljotresima [100]. Različite vrste vibracija su korišćene za proces obuke, kao na primjer vibracije pri polijetanju aviona ili prolasku kamiona. Odbirci su snimljeni koristeći senzore vibracija. Proces za obuku su definisani kao Proces 1 koji sadrži 10000 odbiraka različitih seizmičkih signala i Proces 2 koji sadrži 10000 odbiraka različitih vibracija vozila. Klasifikacija je odrađena za sekvence od 800 odbiraka koji pripadaju nepoznatom testnom seizmičkom signalu.

Na slici 5.10(a) prikazan je seizmički signal. Klasifikacija se vrši pojedinačno za svaki odbirak. Crvena linija na slici 5.10(b) predstavlja tačno klasifikovane odbirke u poređenju sa originalnim signalom (plava linija). Rezultati pokazuju da je kod seizmičke vibracije 97,9% odbiraka tačno klasifikovano, dok je 2,1% odbiraka pogrešno klasifikovano. Na osnovu ovih numeričkih rezultata možemo zaključiti da signal pripada kategoriji prirodnih seizmičkih vibracija [100]. Takođe, može se uočiti da je ovaj pristup pogodan za detekciju niskofrekvencijskih djelova seizmičkih signala. Konkretno, za testirane niskofrekvencijske seizmičke signale (sa frekvencijskim



komponentama u opsegu od 1 do 3 Hz), svi odbirci su tačno klasifikovani (100% uspješnosti).



Slika 5.10: Gornja slika: test signal; donja slika: Odbirci tačno klasifikovani (crveno) kao seizmički signal

Dodatno, Tabele 5.2 i 5.3 prikazuju rezultate nekoliko eksperimenata u kojima su kao test signali korišćeni različiti seizmički i vibracioni signali. Rezultati iz Tabele 2 odnose se na seizmičke signale koji su korišćeni kao test signali, dok Tabela 3 prikazuje rezultate u slučaju kada su vibracioni signali vozila korišćeni kao test signali.

| Test signali<br>(seizmički) | % odbiraka klasifikovano<br>kao seizmički signal<br>(tačna klasifikacija) | % odbiraka klasifikovano<br>kao signal vibracije<br>(pogrešna klasifikacija) |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Signal 1                    | 97.88%                                                                    | 2.12%                                                                        |
| Signal 2                    | 98.55%                                                                    | 1.45%                                                                        |
| Signal 3                    | 99.34%                                                                    | 0.66%                                                                        |

Tabela 5.2: Rezultati klasifikacije test signala.

| Test signali<br>(vibracije) | % odbiraka klasifikovano<br>kao signal vibracije<br>(tačna klasifikacija) | % odbiraka klasifikovano<br>kao seizmički signal<br>(pogrešna klasifikacija) |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Signal 1                    | 94.76%                                                                    | 5.24%                                                                        |
| Signal 2                    | 95.90%                                                                    | 4.10%                                                                        |
| Signal 3                    | 99.14%                                                                    | 0.86%                                                                        |

Tabela 5.3: Rezultati klasifikacije test signala

## 5.8. Metoda k-tog najbližeg susjednog odbirka

U ovom poglavlju ćemo predložiti arhitekturu za realizaciju metoda k-tog najbližeg susjednog odbirka za estimiranje PDF-a. Naime, iako su softverske realizacije fleksibilne, hardverske implemetacije obezbijavaju veću brzinu računanja i optimizaciju resursa, kao što je to pokazano u slučaju Parzenovog prozora. Hardversko rješenje je zasnovano na ranije navedenoj relaciji za jednodimenzioni slučaj:

$$p(x) = \frac{k}{2nd_k(x)} \quad (5.27)$$

U primjerima će biti korišten trodimenzioni slučaj kada se ukupna vjerovatnoća računa kao proizvod vjerovatnoća svake od komponenti. Stoga je i takva implementacija bazirana na jednodimenzionim slučajevima.

### 5.8.1 Arhitektura hardvera za KNN

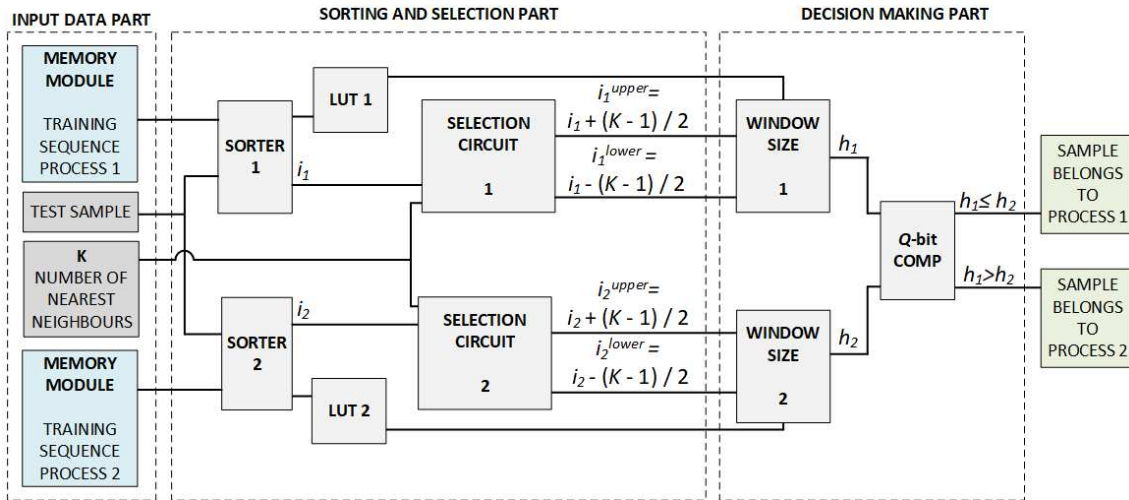
Arhitektura hardvera metode KNN se sastoji iz tri komponente: ulazni dio za podatke, dio za sortiranje i selektovanje i dio za donošenje odluka. Arhitektura je prikazana na slici 5.11.

Dio za ulazne podatke je odgovoran za smještanje ulaznih sekvenci i parametara neophodnih za obradu KNN algoritma. U njegov sastav ulaze sljedeće komponente:

- Memorijski moduli: Smještaju sekvence za obuku (Proces 1 i Proces 2) koje predstavljaju različite klase ili procese u klasifikaciji (slika 5.11 i 5.12).
- Test odbirak: Ulazni test odbirak koji se klasifikuje.
- Parametar  $K$ : Ovaj parametar određuje broj najbližih susjednih tačaka za klasifikaciju

Iz ulaznog dijela, podaci se šalju ka dijelu za sortiranje i selektovanje na dalju obradu. Dio za sortiranje i selektovanje sortira sekvence za obuku. Stoga, ovaj dio se sastoji iz:

- Sortera: jedan sorter za svaki proces. Pretpostavili smo da imamo dva procesa, odnosno dva kola za sortiranje. Pozicija test odbirka unutar sortirane sekvence se označava sa  $i_p$ , gdje je  $p = 1, 2$ . Metode za sortiranje, npr. digitalni sorteri, kao što je bitonički digitalni sorter, se može implementirati.
- Tabele pretraživanja: jedna tabela pretraživanja po procesu. Tabele pretraživanja pomažu u čuvanju preračunatih vrijednosti ili drugih relevantnih informacija da bi se olakšalo efikasno selektovanje.
- Kola za selektovanje: Svako kolo za selektovanje identifikuje i selektuje  $K$  najbližih susjednih tačaka iz sortirane sekvence. Kolo za selektovanje određuje granice brojača ( $i_p^{upper}$  i  $i_p^{lower}$ ,  $p = 1, 2, \dots$ ) kojim se uključuju relevantne susjedne tačke.



Slika 5.11: Blok šema predložene arhitekture za jednodimenzioni slučaj

Izlazni podaci kola za selektovanje su prosljeđeni ka dijelu za donošenje odluka pri klasifikaciji. U ovoj fazi se vrši konačna klasifikacija računanjem distance i upoređivanjem. Ovaj dio uključuje: izračunatu širinu prozora (Prozor 1 i 2) i Q-bitni komparator pod pretpostavkom da su signalni predstavljeni sa Q bita.

Arhitektura za trodimenzioni slučaj (recimo, za sliku u boji) se može jednostavno realizovati na osnovu jednodimenzionog slučaja, proširujući funkcionalnost za obrađivanje podataka u tri dimenzije (R, G i B ose). Ovo proširenje uvodi dodatnu kompleksnost dok čuva modularnost i kompjutersku efikasnost originalnog dizajna.

Arhitektura za trodimenzioni slučaj je prikazana na slici 5.12. Razdvojena je na tri glavne faze, kao za jednodimenzioni slučaj: dio za ulazne podatke, dio za sortiranje i selektovanje i dio za odlučivanje.

Struktura za ulazne podatke je prilagođena da omogući trodimenzione ulaze. Predviđeni su memorijski moduli za tri dimenzije, npr. u slučaju slike za kanale boja R, G i B. Parametar  $K$ , predstavlja broj najbližih susjednih odbiraka i konzistentan je za sve dimenzije. Ova modularna organizacija omogućava nezavisno obrađivanje svake dimenzije, zadržavajući skalabilnost.

Za svaki kanal (R, G i B), operacije za sortiranje i selektovanje su izvršene nezavisno. Ovakva paralelna primjena obrađuje višedimenzione podatke istovremeno obezbjeđujući minimalno kašnjenje.

Dio za odlučivanje koristi rezultate za svaku od dimenzija da bi pridružio test odbirak najprikladnijoj klasi. Za svaki proces ( $p = 1, 2$ ), širine prozora su računate odvojeno za R, G i B dimenzije. Ove širine prozora se množe, dajući kumulativnu mjeru za svaki proces. Izvršena mjerenja za procese  $p = 1$  i  $p = 2$ , označena kao  $h_1$  i  $h_2$  se porede. Proces sa manjom mjerom  $h_p$  je selektovan kao proces kome pripada test odbirak. Dakle, proceduru odluke možemo prikazati kao:

$$\text{Odluka} = \begin{cases} \text{Proces 1,} & \text{ako je } h_1 \leq h_2 \\ \text{Proces 2,} & \text{ako je } h_1 > h_2 \end{cases} \quad (5.28)$$

U nastavku ćemo detaljnije opisati pojedine djelove arhitekture.

**Blok za selektovanje:** Dio za sortiranje i selektovanje sa slike 5.12 se sastoji od tri bloka za selektovanje. Svaki blok za selektovanje ima jedan sorter, jednu tabelu i jedno kolo za selektovanje po procesu. Kao što smo ranije pomenuli, sorter je odgovoran za sortiranje ulaznih trening odbiraka u rastućem redoslijedu. Nakon sortiranja, tabela pretraživanja mapira sortirane indekse i korespondirajuće vrijednosti. Dalje, kolo za selektovanje identifikuje i uzima relevantne podatke za dalje obrađivanje.

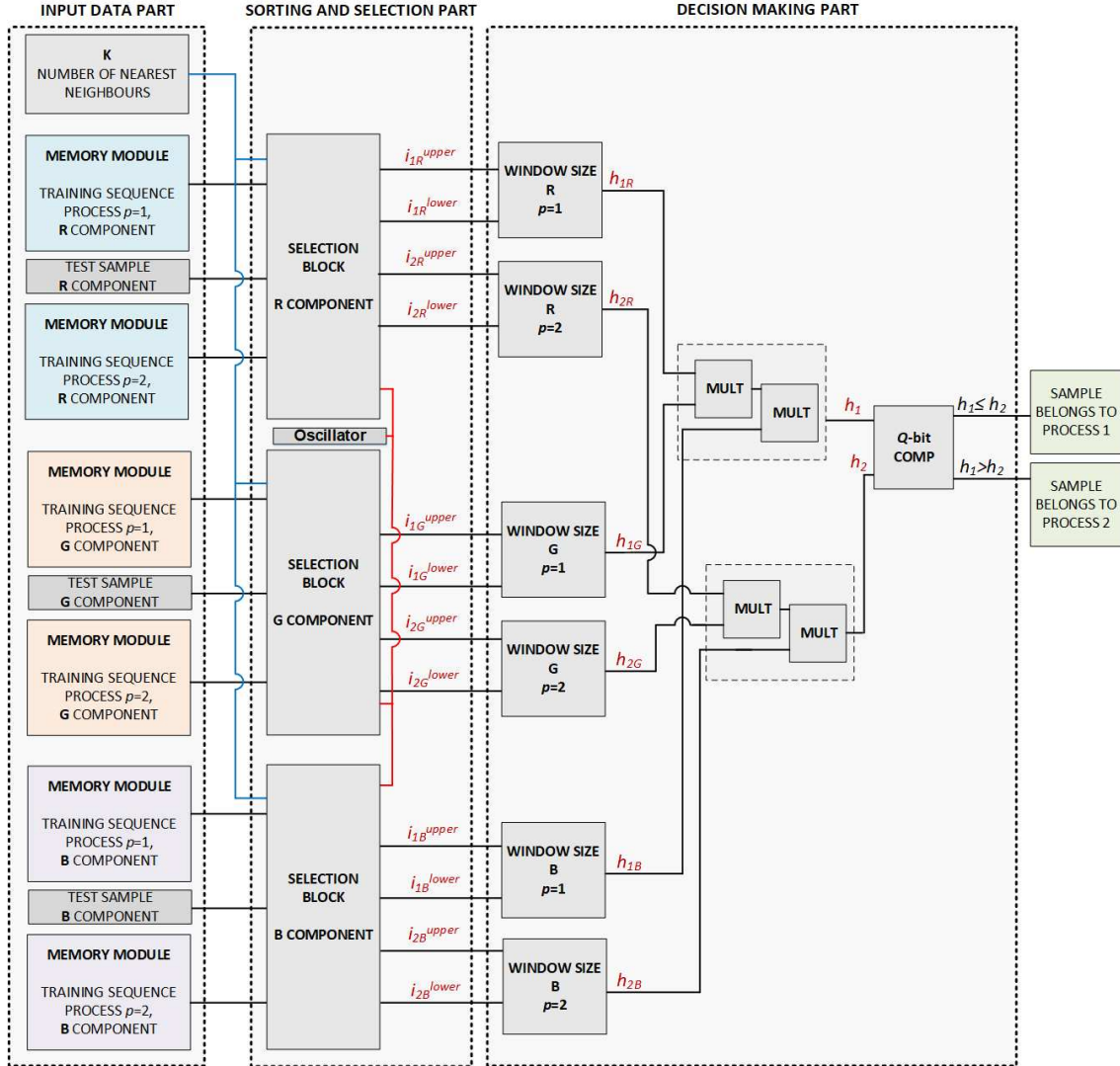
Blok šema kola za selektovanje je prikazana na slici 5.13. Potpuni oduzimač (*Full Subtractor*) u prvoj fazi računa  $K - 1$ . Ova vrijednost se prosljeđuje pomjeračkom registru (*Shift register*), koji dijeli  $K - 1$  sa 2 kroz pomjeraj, generišući vrijednost  $(K - 1)/2$ . U sljedećoj fazi, potpuni sabirač (*Full adder*) i potpuni oduzimač rade paralelno. Potpuni sabirač sumira  $i_p$  i  $(K - 1)/2$ . Kao rezultat, gornja granica  $i_p^{upper}$  je dobijena kao:

$$i_p^{upper} = i_p + \frac{K - 1}{2} \quad (5.29)$$

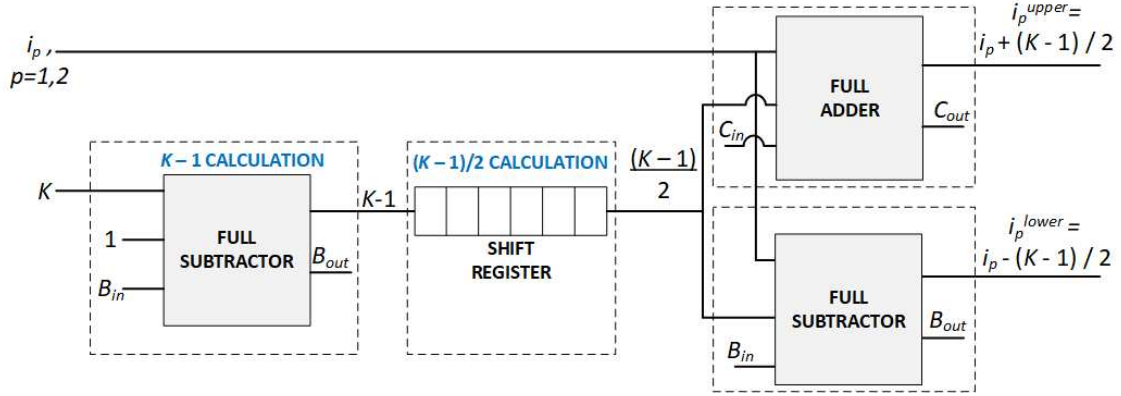
Analogno, potpuni oduzimač računa razliku između  $i_p$  i  $(K - 1)/2$ . Kao rezultat

toga, donja granica  $i_p^{lower}$  je:

$$i_p^{lower} = i_p - \frac{K - 1}{2} \quad (5.30)$$



Slika 5.12: Blok šema za slučaj slika u boji



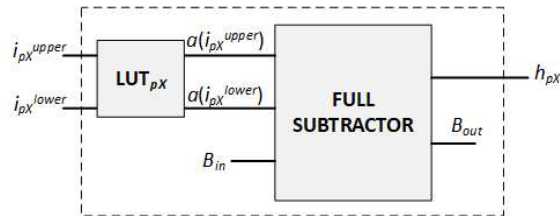
Slika 5.13: Blok šema kola za selektovanje

**Računanje širine prozora:** Kolo za računanje širine prozora računa rastojanje između dvije vrijednosti odbirka na pozicijama  $i_{pX}^{upper}$  i  $i_{pX}^{lower}$ , gdje  $p$  korespondira Procesu 1 ili Procesu 2. Za slike u boji, granice  $i_{pX}^{upper}$  i  $i_{pX}^{lower}$  su računate za svaku dimenziju (R, G, B)  $X = R, G, B$ . Stoga, imamo ukupno šest kola za računanje širine prozora (blok šema sa slike 5.12). Tabele pretraživanja  $LUT_{pX}$  na osnovu pozicija  $i_{pX}^{upper}$  i  $i_{pX}^{lower}$  nalaze vrijednosti odbiraka na tim pozicijama. Potpuni oduzimač računa razliku između dvije vrijednosti odbiraka, dobijenih iz tabele pretraživanja ( $LUT$ ):

$$h_{pX} = a(i_{pX}^{upper}) - a(i_{pX}^{lower}), \quad p = 1, 2; \quad X = R, G, B \quad (5.31)$$

Blok šema kola za računanje širine prozora prikazana je na slici 5.14. Na ovoj šemi su ulazi  $a(i_{pX}^{upper})$  i  $a(i_{pX}^{lower})$ , dok su izlazne vrijednosti distance  $h_{pX}$  računate za svaki proces i za svaku dimenziju R, G i B. Kumulativna veličina  $h_p$  se računa množeći rezultate za sve dimenzije:

$$h_p = h_{pR} \times h_{pG} \times h_{pB}, \quad p = 1, 2 \quad (5.32)$$



Slika 5.14: Blok šema za računanje širine prozora

**Komparator:** Izlazi multiplikatora se dovode na komparator. Komparator poredi širine prozora  $h_p$ , gdje je  $p = 1, 2$ , da bi se odredilo kojem procesu pripada test odbirak.

## 5.8.2 Eksperimentalni rezultati

U ovom poglavlju razmatra se primjena KNN algoritma za klasifikaciju slika u boji. Posmatraćemo slike koji imaju određeni stepen statističkog preklapanja.

Korišćene su slike u boji iz Matlabove baze podataka veličine  $256 \times 256$ . One su predstavljene matricama R, G, i B. Slike su prikazane na slici 5.15.

Proces obuke uključuje dvije slike, za svaki kanal boje posebno.

Za test fazu, korišćeni su blokovi veličine  $64 \times 64$ .

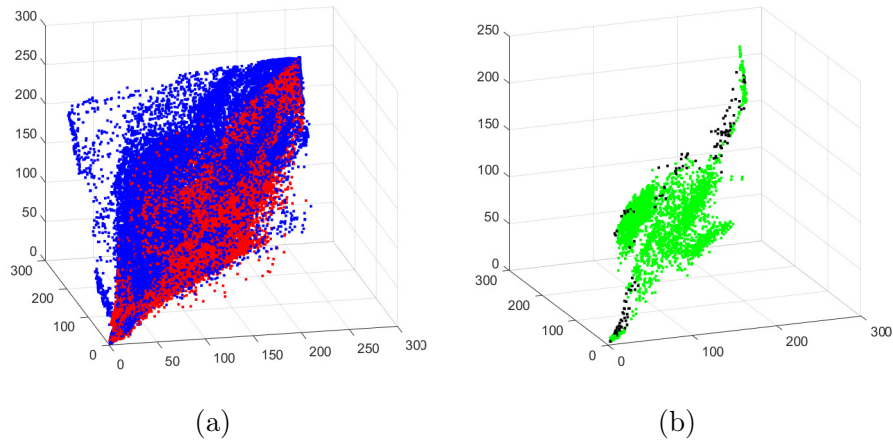


Slika 5.15: Test slike: a) Car1; b) Car2; c) Lena; d) Barbara; e) ConcordAerial; f) WestConcordAerial

*Primjer 1:* Posmatrane su slike auta (*Car1* i *Car2*), prikazane na slikama 5.15a) i 5.15b). Slike su korišćene kao trening podaci za dvije različite klase. Cilj je klasifikovati test odbirke i odrediti kojoj klasi pripadaju. Za svrhu testiranja korišćen je specifični skup (region) odbiraka za koje je poznato da pripadaju prvoj klasi. Klasifikacioni algoritam obrađuje ove test odbirke na osnovu trening podataka i dodjeljuje

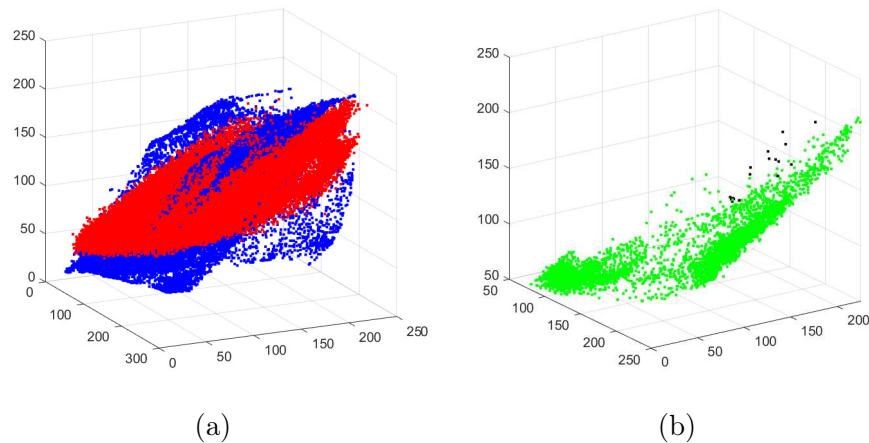


ih jednoj od te dvije klase. Većina test odbiraka, tj. 95.02% je tačno klasifikovano da pripada prvoj klasi *Car1*, dok je 4.98% pogrešno klasifikovano. Raspodjele vrijednosti piksela i rezultati klasifikacije su dati na slici 5.16.



Slika 5.16: Slike Car1 i Car2 : a) prikaz trodimenzione raspodjele piksela (plavo - Car1, crveno - Car2); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli)

*Primjer 2:* U ovom primjeru razmatrali smo slike *Lena* i *Barbara*, a skup odbiraka koji pripada Leni je korišćen za evaluaciju. Klasifikator uspješno pridružuje 99.56% odbiraka slici *Lena*. Mali pogrešan procenat klasifikacije, 0.44%, prikazuje prisutnost statističkog preklapanja, ali ne utiče na ukupnu preciznost. Na slici 5.17 prikazana je raspodjela vrijednosti piksela i rezultati klasifikacije za slučaj Lena-Barbara.

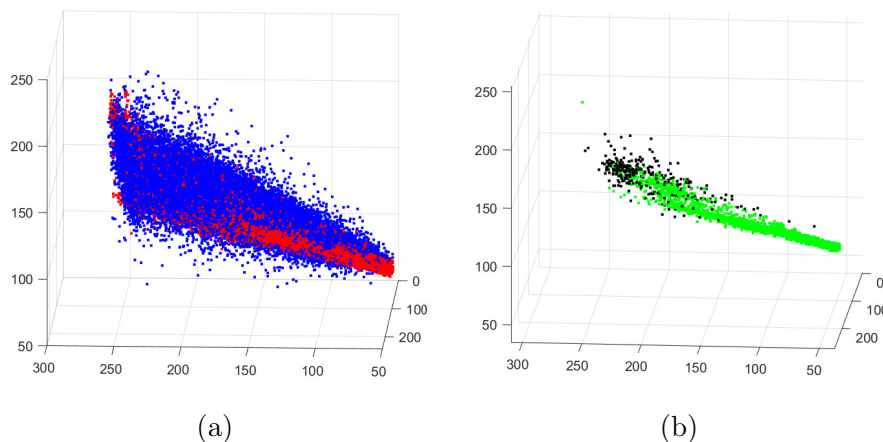


Slika 5.17: Slike Lena i Barbara : a) prikaz trodimenzione raspodjele piksela (plavo - Lena, crveno - Barbara); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli)

*Primjer 3:* Za slike *ConcordAerial* i *WestConcordAerial*, 92.72% test odbiraka je tačno klasifikovano da pripada slici *ConcordAerial*. I u ovom slučaju, se pokazuje da



test region može biti efikasno klasifikovan. Rezultati su prikazani na slici 5.18.



Slika 5.18: Slike ConcordAerial i WestConcordAerial : a) prikaz trodimenzionalne raspodjele piksela (plavo - ConcordAerial, crveno - WestConcordAerial); b) rezultati klasifikacije (zeleno - tačno klasifikovani pikseli)

Razmotrimo kompleksnost računanja predložene arhitekture. Ako pretpostavimo da imamo  $N$  trening odbiraka,  $K$  susjednih odbiraka i da su svi odbirci  $Q$ -bitni, onda imamo:

- Vrijeme za pojedine operacije -  $O(N)$  za pristup odbircima,  $O(3N \log_2 N)$  za sortiranje,  $O(3N)$  za ažuriranje tabelom pretraživanja,  $O(3K)$  za selektovanje odbiraka,  $O(3N)$  za računanje rastojanja, množenje i poređenje. Stoga, ukupno vrijeme kompleksnosti je proporcionalno  $O(3N \log_2 N)$ .
- Zahtjevnost hardvera - memorija za skladištenje odbiraka za obuku zahtjeva  $O(NQ)$  operacija. Aritmetičke jedinice za oduzimanje, sabiranje i množenje zahtjevaju  $O(Q)$  operacija dok veličina tabele za pretraživanje treba da bude  $O(NQ)$ . Stoga, ukupna hardverska kompleksnost je određena veličinom tabele pretraživanja  $O(NQ)$

## 5.9. Klasterizacioni algoritam

### 5.9.1 Teorijska osnova

U prethodnom poglavlju smo opisali dvije glavne neparametarske metode za klasifikaciju odbiraka. Naime, za metode Parzenovog prozora i  $k$ -tog najbližeg susjednog odbirka je potrebno unaprijed imati u vidu raspodjele za zadate klase jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih signala, da bi se klasifikovali novi test odbirci. Međutim,

u slučaju kada je neophodno izvršiti kategorizaciju bez korišćenja trening skupa, koriste se drugačiji matematički pristupi. U tu svrhu, definisan je algoritam za klasterizaciju (grupisanje) podataka, koji je zasnovan na pristupu maksimizacije očekivanja. (*Expectation-Maximization* - EM). Skup podataka može biti karakterisan različitim vrstama raspodjela, a u našem razmatranju koristićemo pretpostavku da skupovi podataka imaju mješavinu Gausovih raspodjela (eng. *Gaussian mixture model*).

Naime, postavimo relaciju za Gausovu raspodjelu u obliku:

$$P_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.33)$$

gdje je  $\boldsymbol{\theta} = \{\mu, \sigma^2\}$ . U slučaju D-dimenzionog vektora za  $\mathbf{x}$ , ova relacija dobija oblik:

$$P_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (5.34)$$

gdje je  $\boldsymbol{\Theta} = \{\mu, \Sigma\}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{D \times D}$  je kovarijansa i  $|\Sigma|$  je determinanta kovarijanse. Za dati skup  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , čiji elementi  $x_i$  označavaju mjerenja, logaritamska maksimalna vjerovatnoća (*maximum log-likelihood*) se može pisati:

$$L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{x}) = \frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (5.35)$$

Da bismo optimizovali skup parametara  $\boldsymbol{\Theta}$ , potrebno je izvode funkcije  $L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{x})$  po parametrima  $\mu$  i  $\sigma$  izjednačiti sa nulom. Dakle, izvod po parametru  $\mu$  daje:

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{x})}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = 0 \quad (5.36)$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5.37)$$

Analogno se može zapisati i za izvod po parametru  $\sigma$ :

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{x})}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right) = 0 \quad (5.38)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (5.39)$$

Dakle, da bi dobili vrijednost za  $\sigma$  kao u relaciji (5.39), potrebno je prvo izračunati vrijednost za  $\mu$ . Imajući u vidu broj mjerenja  $x_i$ , kao i oznake  $\Omega_j, j = 1, 2, \dots, K$ , razmatraćemo a posteriori vjerovatnoću jednog mjerenja  $x_i$  koji bi pripadao jednoj od oznaka  $\Omega_j$ . Naime, funkcija gustine za pojedinačnu mjeru  $x_i$  može da se zapiše u sljedećem obliku:

$$f(x_i|\Pi, \Theta) = \sum_{j=1}^K \pi_j P_G(x_i|\Theta_j) \quad (5.40)$$

gdje  $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K\}$  označava skup a priori raspodjela tačaka za razmatrani  $x_i$  koji pripada oznaci  $\Omega_j$ . Ovaj skup takođe zadovoljava uslov da je:

$$0 \leq \pi_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1 \quad (5.41)$$

U tom slučaju ukupna raspodjela za razmatrani skup podataka se može zapisati:

$$P(x|\Pi, \Theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\Pi, \Theta) \quad (5.42)$$

čija se logaritamska vjerovatnoća (*log-likelihood*) može predstaviti kao:

$$L(\Theta, \Pi|x) = \sum_{i=1}^N \log \left\{ \sum_{j=1}^K \pi_j P_G(x_i|\Theta_j) \right\} \quad (5.43)$$

## 5.9.2 Optimizacija parametara

Nakon što smo izveli logaritamsku vjerovatnoću za ukupnu raspodjelu, potrebno je optimizovati parametre za razmatrani dio podataka u skladu sa njima odgovarajućom raspodjelom. U tom slučaju ćemo izvesti relaciju za  $j$ -ti klaster za parametre  $\mu_j$  i  $\sigma_j$ . Dakle, imamo:

$$\frac{\partial L(\Theta, \Pi|x)}{\partial \mu_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j P_G(x_i|\Theta_j)}{\sum_{l=1}^K \pi_l P_G(x_i|\Theta_l)} \frac{x_i - \mu_j}{\sigma_j^2} = 0 \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial L(\Theta, \Pi|x)}{\partial \sigma_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j P_G(x_i|\Theta_j)}{\sum_{l=1}^K \pi_l P_G(x_i|\Theta_l)} \left( -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right) = 0 \quad (5.45)$$

Ove relacije se takođe mogu zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial L(\Theta, \Pi|x)}{\partial \mu_j} = - \sum_{i=1}^N r_{ij} \frac{x_i - \mu_j}{\sigma_j^2} = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial L(\Theta, \Pi|x)}{\partial \sigma_j} = \sum_{i=1}^N r_{ij} \left( -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right) = 0 \quad (5.47)$$

gdje je:

$$r_{ij} = \frac{\pi_j P_G(x_i|\Theta_j)}{\sum_{l=1}^K \pi_l P_G(x_i|\Theta_l)} \quad (5.48)$$

Ažurirane vrijednosti za parametre  $\mu_j$  i  $\sigma_j$  se dobijaju kao:

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^N r_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N r_{ij}} \quad (5.49)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N r_{ij} (x_i - \mu_j)^2}{\sum_{i=1}^N r_{ij}} \quad (5.50)$$

U sljedećem koraku ćemo izvesti relaciju za ažuriranje vrijednosti parametra  $\pi_j$ . Da bismo to postigli, potrebno je koristiti Lagranževu metodu (eng. *Lagrange multiplier*). Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \pi_j} &= \frac{\partial}{\partial \pi_j} \left[ Q(\Pi) - \lambda \left( \sum_{j=1}^K \pi_j - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \pi_j} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} \log \pi_j - \lambda \left( \sum_{j=1}^K \pi_j - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \pi_j} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K r_{ik} \log \pi_k - \lambda \left( \sum_{k=1}^K \pi_k - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

gdje je  $Q(\Pi)$  očekivana vrijednost od svih podataka sa logaritamskom vjerovatnoćom  $r_{ij}$ . U cilju efikasnosti optimizacije, napišimo izraz za očekivanje  $Q$  u obliku:

$$\begin{aligned} Q(\Pi|\Theta) &= E \left[ \sum_{i=1}^N \log (\pi_j P_G(x_i|\Theta_j)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} \log (\pi_j \cdot P_G(x_i|\Theta_j)) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} \left( \underbrace{\log \pi_j}_{\Pi} + \log P_G(x_i|\Theta_j) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

gdje za optimizaciju uzimamo samo prvi dio ( $\Pi$ ). Dalje, razvijajući relaciju (5.52) dobijamo:

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_j} = \sum_{i=1}^N \frac{r_{ij}}{\pi_j} - \lambda = 0 \quad (5.53)$$

Iz čega slijedi da je:

$$\pi_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N r_{ij} \quad (5.54)$$

Vraćajući se na uslov iz relacije (5.41), može se zaključiti da je:

$$\sum_{j=1}^K \pi_j = \sum_{j=1}^K \left( \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N r_{ij} \right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} \quad (5.55)$$

Pošto važi:

$$\sum_{j=1}^K r_{ij} = 1, \text{ za } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.56)$$

onda se  $\lambda$  može izračunati kao:

$$\sum_{j=1}^K \pi_j = \frac{1}{\lambda} N \implies \lambda = N \quad (5.57)$$

Što znači da se relacija (5.57) za novu vrijednost parametra  $\pi_j$  može zapisati kao:

$$\pi_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_{ij} \quad (5.58)$$

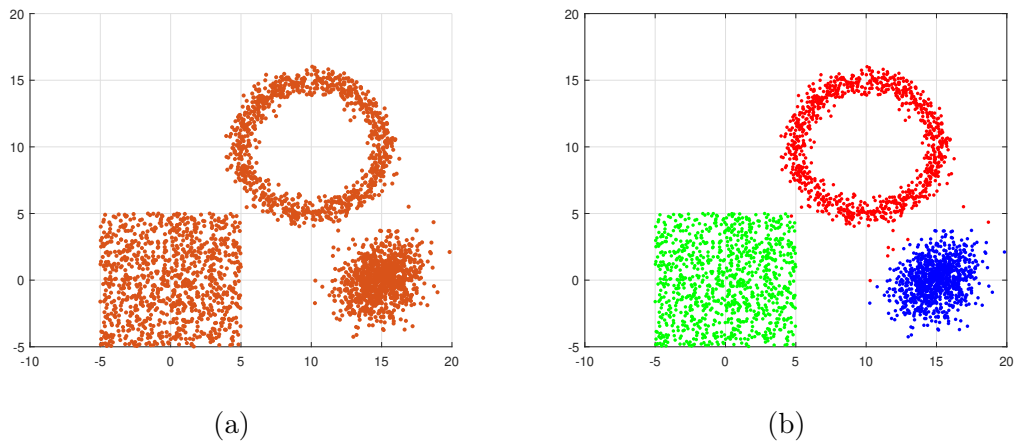
Nakon što smo izveli relacije za optimizaciju parametara  $\mu$ ,  $\sigma$  i  $\pi$ , EM algoritam možemo sumirati preko četiri koraka:

1. korak - Iniciranje početnih vrijednosti za  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  i  $\pi_i$  za  $i$ -tu raspodjelu od ukupno  $N$  raspodjela.
2. E korak - Računa se vrijednost za  $r_{ij}$  u skladu sa (5.48), koristeći parametre iz prethodne iteracije.
3. M korak - Nakon računanja  $r_{ij}$ , ažuriraju se vrijednosti za parametre  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  i  $\pi_i$  u skladu relacijama (5.49), (5.50) i (5.58) redom.
4. korak - Provjeravanje konvergencije koristeći maksimalnu logaritamsku vjerovatnoću (ili korištenjem vrijednosti praga). Ako nije postignuta dovoljna konvergencija, proces se ponavlja od drugog E koraka.

### 5.9.3 Numerički i realni primjeri rezultati

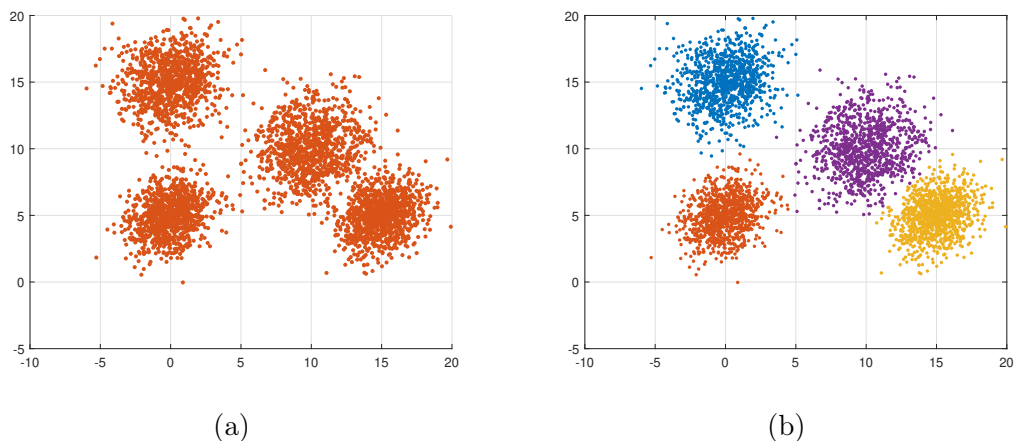
U ovom dijelu ćemo prikazati primjenu EM algoritma za slučajeve više numeričkih i realnih primjera. Na slici 5.19a) su prikazani podaci koji imaju miješanu ras-

podjelu, odnosno raspodjela se sastoji: cirkularna, uniformna i Gausova raspodjela u dvodimenzionom prostoru. Na slici 5.19b) je prikazan rezultat nakon izvršenja klasterizacije pretpostavljajući tri raspodjele. Primijetimo da je EM algoritam velikom tačnošću klasifikovao odbirke u tri različita klastera, gdje svaki klaster odgovara određenoj raspodjeli.



Slika 5.19: Klasterizovanje skupa podataka na tri različite raspodjele: a) originalni skup podataka; b) klasterizovani

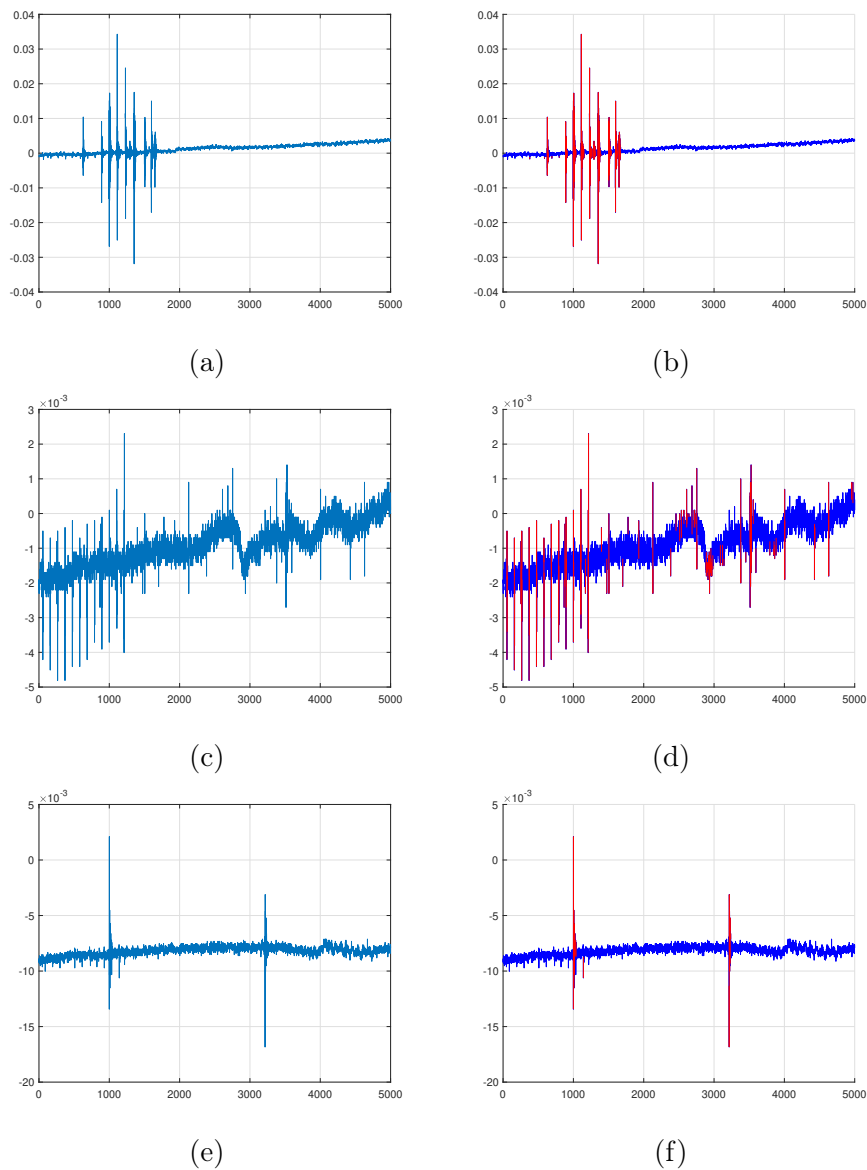
Na slici 5.20 je prikazana simulacija gdje originalni podaci pripadaju različitim Gausovim raspodjelama (uzete su četiri raspodjele). Pokazuje se (slika 5.20b)) da EM algoritam uspješno klasterizuje originalne podatke.



Slika 5.20: Klasterizovanje skupa podataka na četiri Gausove raspodjele: a) originalni skup podataka; b) klasterizovani

Prethodna dva primjera su izabrana tako da omoguće jednostavnu vizuelnu verifikaciju efikanosti EM algoritma. Razmotrimo sada slučaj sa realnim tranzijentnim

signalima dobijenim u elektroenergetskim mrežama u cilju detektovanja djelimičnog pražnjenja (eng. *partial discharge*). Signali sadrže nagle promjene koje izazivaju određene pikove. U praktičnim primjenama je važno odvojiti i klasifikovati signale koji se odnose na pražnjenja. Stoga, primijenili smo EM algoritam, kako bi detektovali pikove signala i odvojili ih u jedan klaster. U tu svrhu posmatrani su signali na slikama 5.21a), 5.21c) i 5.21e). Za ove signale je primijenjen EM algoritam, da bi se izvršila klasterizacija dijelova signala koji sadrže pikove. Rezultati klasterizacije su dati na slikama 5.21b), 5.21d) i 5.21f). Pokazuje se da se na ovaj način efikasno odvajaju dijelovi signala od interesa što predstavlja jedan od najznačajnijih koraka u procesu njihove klasifikacije.



Slika 5.21: Različiti oblici tranzijentnih signala: a), c) i e); detekcija tranzijentnih pikova b), d) i f)

## 6. Odvajanje tekstura i redukcija šuma u transformacionim domenima

U prvom dijelu ove glave ćemo razmatrati algoritam za dekompoziciju slika, odnosno odvajanje slika forme stacionarnih tekstura. Ova tehnika je zasnovana na metodi konciznosti reprezentacije [102-104] u dva različita domena (*sparse-to-sparse* reprezentacija), a ostvarena je kroz vezu između diskretnih kosinusnih transformacija računatih na različite veličine blokova. L-statistika [70,93,105] se koristi za otklanjanje nestacionarne komponente iz vektora frekvencijskog domena, ostavljajući manji broj koeficijenata koji se odnose na stacionarne teksture. Rekonstrukcionim algoritmima [106,107] se vrši potpuno rekonstruisanje stacionarne komponente. Originalna slika se razmatra kao nestacionarna komponenta koja predstavlja nepoželjni dio u ovom koraku procedure [108]. Na ovaj način se u potpunosti može odvojiti stacionarna komponenta, čak i za slučajeve kada originalna slika sadrži dodatnu nestacionarnu smetnju. U ovom slučaju, slika zahvaćena šumom se posmatra kao nestacionarni nepoželjni dio. Predložena metoda je motivisana izazovima pri otklanjanju Moareovih (Moiré) struktura sa slika [108-119].

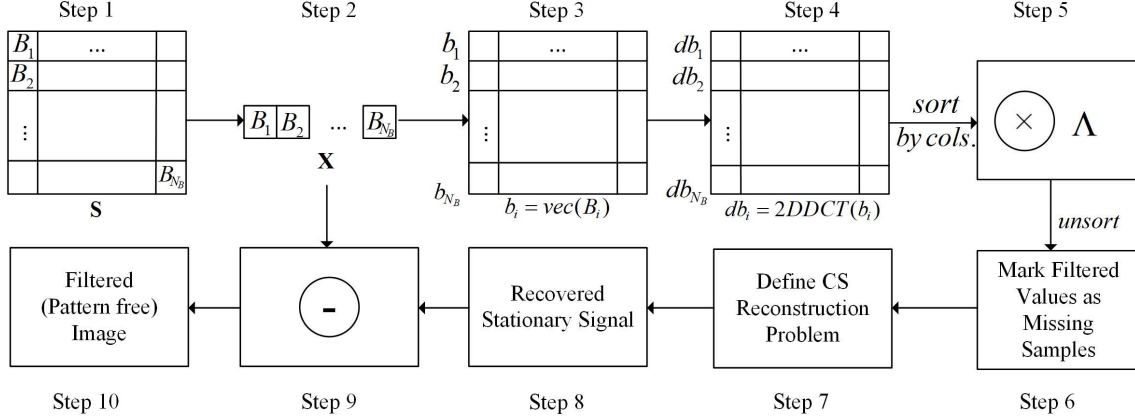
U drugom dijelu glave, razmatrana su dva pristupa za redukciju šuma kod slika [120-135]. Prvi je zasnovan na uklanjanju piksela i rekonstrukciji blokova slike korišćenjem gradijentnog algoritma. Ovaj postupak se iterativno ponavlja. Zavisno od karakteristike bloka, uklanja se različiti broj odbiraka. Taj broj je proporcionalan stacionarnosti bloka. Za detekciju stacionarnosti, korištena je EM klasterizacija. Drugi pristup je zasnovan na filtriranju u jednodimenzionom Hermitskom domenu.

### 6.1. Odvajanje stacionarnih tekstura slika: model i teorijska osnova

U ovom poglavlju razmatramo odvajanje nepoželjnih stacionarnih komponenti u slučaju dvodimenzionog signala, pri čemu je nestacionarni signal (slika) zahvaćena



aditivnim stacionarnim signalom u obliku sinusoidalnog paterna [108]. Pristup je zasnovan na ekstrakciji manjeg broja stacionarnih koeficijenata koji se nakon toga koriste za rekonstrukciju čitavog stacionarnog signala, koristeći prednosti spars rekonstrukcije. Nakon rekonstrukcije, stacionarni signali (smetnje) se oduzimaju od slike i dobija se slika bez šuma. Blok šema pristupa je data na slici 6.1.



Slika 6.1: Blok šema za odvajanje komponenti stacionarnih tekstura i slika

Sliku dijelimo na blokove  $8 \times 8$ . Ovi blokovi sadrže stacionarne komponente - smetnje. Blokovi su preuređeni, na način diskutovan u glavi 2. Dalje, svaki od blokova se tretira kao vektor, formirajući matricu prikazanu u trećem koraku. Računa se 2D DCT za svaki vektor  $b_i$ , te se na osnovu toga dobija  $db_i$  (računanje se vrši pomoću Kronekerovih matrica). Matrica iz četvrtog koraka sadrži lokalne frekvencijske karakteristike razmatranih blokova slika. Nakon toga se primijenjuje filtriranje L-estimacijom koristeći L-filtriranje označeno sa  $\Lambda$  (peti korak). Kao rezultat L-filtriranja dobija se određeni manji broj frekvencijskih koeficijenata stacionarne komponente [108]. Preostali dio ovih koeficijenata je uklonjen i tretiraće se kao nedostajući odbirci (šesti korak). Da bi se rekonstruisale nedostajuće vrijednosti, koriste se algoritmi za rekonstrukciju, u smislu kompresivnog odabiranja [106,107]. Da bi realizovali rekonstrukciju (sedmi korak), koristi se veza između 2D DCT domena zasnovano na blokovima slike i 2D DCT domena zasnovano na preuređenoj slici (poglavlje 2.3.1). Zahvaljujući ovome, stacionarni signal se jednostavno rekonstruiše (osmi korak), te nakon toga odvađa od originalne slike (deveti korak).

Imajući prethodno u vidu, model signala kojeg razmatramo je dat sljedećom relacijom [108]:

$$S(n, m) = I(n, m) + x_s(n, m) + x_n(n, m), \quad (6.1)$$

$$n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, N$$

Preuređene blokove označimo sa  $x(n, m)$  (u skladu sa slikom 6.1). Imajući u vidu izvođenja data u poglavlju 2.3.1, četvrti korak sa slike 6.1 se realizuje relacijom:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B1} \\ \mathbf{d}_{B2} \\ \mathbf{d}_{B3} \\ \mathbf{d}_{B4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

gdje  $\mathbf{b}_{B_i} \in \mathbb{R}^{M^2 \times 1}$  sadrži prostorne odbirke bloka  $M \times M$ ,  $M = 8$ , dok  $\mathbf{d}_{B_i} \in \mathbb{R}^{M^2 \times 1}$  sadrži lokalne dvodimenzione diskretno kosinusne frekvencijske sadržaje  $i$ -tog bloka. Prethodnu relaciju možemo zapisati i u obliku:

$$\vec{\mathbf{d}}_B = \mathbf{D}_{T_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}}} \vec{\mathbf{b}} \quad (6.3)$$

gdje je:

$$\vec{\mathbf{d}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B1} \\ \mathbf{d}_{B2} \\ \mathbf{d}_{B3} \\ \mathbf{d}_{B4} \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

a dijagonalna matrica  $\mathbf{D}_{T_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}}}$  je data sa:

$$\mathbf{D}_{T_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Napomenimo da su podmatrice  $\mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}}$  Kronekerove matrice. Ukoliko je broj blokova  $N_B$ , relacija (6.3) se generalizuje:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B1} \\ \mathbf{d}_{B2} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{BN_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{M^2 \times M^2}^{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N_B} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Svaki od vektora  $\mathbf{d}_{B_i}$  sadrži 2D DCT lokalne frekvencije bloka slike. Dalje, primijetimo da je:

$$\vec{\mathbf{b}} = \text{vec}(\mathbf{X}) = \text{inv}(\mathbf{T}_{L^2 \times M^2}^{\mathcal{K}}) \vec{\mathbf{d}}_{\mathbf{X}} \quad (6.7)$$

gdje je  $\mathbf{X}$  dobijeno preuređivanjem blokova iz  $\mathbf{S}$  na način kao u poglavlju 2.3.1.

Shodno tome, dimenzija matrice  $\mathbf{X}$  je  $M \times L$ , gdje je  $L = N_B M$ . Dakle, 2D DCT koeficijenti matrice  $\mathbf{X}$  se dobijaju kao:

$$\mathbf{D}_X = \mathbf{T}_M \underbrace{\mathbf{X}}_{M \times L} \mathbf{T}_L^T \quad (6.8)$$

Koristeći vektorsku notaciju, prethodna relacija se može prikazati:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{d}}_X &= \text{vec}(\mathbf{D}_X) = \text{vec}(\mathbf{T}_M \mathbf{X} \mathbf{T}_L^T) \\ &= (\mathbf{T}_L \otimes \mathbf{T}_M) \text{vec}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{T}_{L^2 \times M^2}^\mathcal{K} \vec{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Koristeći (6.3) i (6.7), dobijamo vezu između 2D DCT realizovano po blokovima i 2D DCT čitave slike  $\mathbf{X}$ :

$$\vec{\mathbf{d}}_B = \mathbf{D}_{T_{M^2 \times M^2}^\mathcal{K}}^{\text{inv}}(\mathbf{T}_{L^2 \times M^2}^\mathcal{K}) \vec{\mathbf{d}}_X \quad (6.10)$$

Prethodna relacija se jednostavnije može zapisati:

$$\vec{\mathbf{d}}_B = \mathbf{A} \vec{\mathbf{d}}_X \quad (6.11)$$

gdje je  $\mathbf{A} = \mathbf{D}_{T_{M^2 \times M^2}^\mathcal{K}}^{\text{inv}}(\mathbf{T}_{L^2 \times M^2}^\mathcal{K})$ .

### 6.1.1 Odvajanje stacionarnih tekstura koristeći L-estimaciju i rekonstrukcione algoritme

L-estimatori su zasnovani na skupovima sortiranih elemenata, gdje se za dalju obradu koristi  $L$  elemenata oko medijana, dok se za ostale vrijednosti uzima vrijednost 0. Primjenjuje se operacija sortiranja nad koeficijentima koji pripadaju istoj frekvencijskoj poziciji i odbacuju se oni sa najvećim i najmanjim vrijednostima [93,108]. U ovom poglavlju ćemo koristiti L-estimaciono filtriranje, koje će biti prilagođeno za uklanjanje nestacionarnih frekvencijskih koeficijenata zadržavajući određene koeficijente koje pripadaju stacionarnoj komponenti. Koristićemo vektor  $\vec{\mathbf{d}}_B$ :

$$\vec{\mathbf{d}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B1} \\ \mathbf{d}_{B2} \\ \mathbf{d}_{B3} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{BN_B} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

gdje je svaki  $\vec{d}_{B_i}, i = 1, \dots, N_B$  vektor veličine  $M^2 \times 1$ . Da bi se razmatrala lokalna frekvencijska informacija za svaku specifičnu frekvencijsku poziciju, formira se sljedeća matrica:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B_{N_B}}(1) & \mathbf{d}_{B_{N_B}}(2) & \dots & \mathbf{d}_{B_{N_B}}(i) & \dots & \mathbf{d}_{B_{N_B}}(M^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{B_3}(1) & \mathbf{d}_{B_3}(2) & \dots & \mathbf{d}_{B_3}(i) & \dots & \mathbf{d}_{B_3}(M^2) \\ \mathbf{d}_{B_2}(1) & \mathbf{d}_{B_2}(2) & \dots & \mathbf{d}_{B_2}(i) & \dots & \mathbf{d}_{B_2}(M^2) \\ \mathbf{d}_{B_1}(1) & \mathbf{d}_{B_1}(2) & \dots & \mathbf{d}_{B_1}(i) & \dots & \mathbf{d}_{B_1}(M^2) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Filtriranje L-estimacijom će biti izvršeno po kolonama matrice  $\mathbf{W}$ . Primijetimo da svaka kolona  $\mathbf{W}$  sadrži 2D DCT koeficijente locirane na istoj poziciji za sve razmatrane blokove.

### 6.1.2 Filtriranje L-estimacijom koristeći 2D DCT frekvencijske vektore

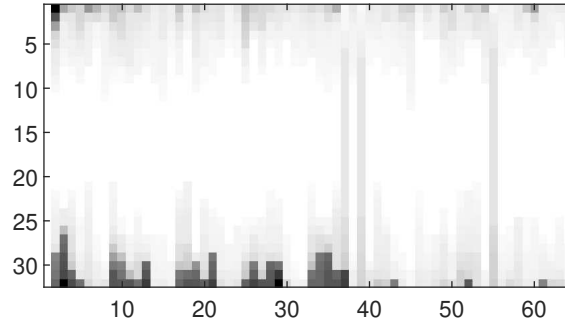
U skladu sa principom L-estimacije, kolone  $\mathbf{W}$  se prvo sortiraju kao [108]:

$$\mathbf{W}_{sort}(j, i) = sort \{ \mathbf{W}(j, i) \}, \quad \text{for } j = [1, 2, \dots, N_B] \quad (6.14)$$

Napomenimo da se originalne pozicije elemenata čuvaju da bi se oni nakon sortiranja vratili u prvobitni redosljed:

$$\mathbf{p}(j, i) = argsort \{ \mathbf{W}(j, i) \}, \quad \text{for } j = [1, 2, \dots, N_B] \quad (6.15)$$

Dakle, *sort* označava operaciju sortiranja koja se primenjuje po kolonama matrice  $\mathbf{W}$ , dok operacija *argsort* čuva prethodne pozicije sortiranih elemenata. Prikaz matrice  $\mathbf{W}_{sort}$  za 64 koeficijenta iz 32 bloka veličine  $(8 \times 8)$  prikazana je na slici 6.2. Može se primjetiti da su najveće i najmanje vrijednosti, koje uglavnom odgovaraju nestacionarnim komponentama, locirane u gornjim i donjim redovima matrice, dok su redovi oko sredine uglavnom popunjeni nulama (slika 6.2). Međutim, stacionarne komponente prožimaju se kroz sve redove. Na slici 6.2 se mogu uočiti tri stacionarne komponente.



Slika 6.2: Prikaz sortirane matrice 2D DCT koeficijenata  $\mathbf{W}_{sort}$  za blokove  $8 \times 8$  (64 pozicija koeficijenata) i  $N_B = 32$  blokova

Definišimo sada L-estimacioni filtar na sljedeći način:

$$\Lambda(j, i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \in \{1, p\} \cup \{N_B - q, N_B\} \\ 1, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (6.16)$$

tj.:

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & j & M^2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow N_B - q \\ \\ \\ \longleftarrow p \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} \quad (6.17)$$

gdje parametri  $p$  i  $q$  označavaju broj najvećeg i najmanjeg 2D DCT koeficijenta filtrirani za svaku poziciju  $j$ . Filtrirana verzija matrice  $\mathbf{W}$  je dobijena množenjem odgovarajućih elemenata matrice  $\mathbf{W}$  i  $\Lambda$ :

$$\mathbf{W}_{f_{ij}} = \mathbf{W}_{sort_{ij}} \Lambda_{ij} \quad (6.18)$$

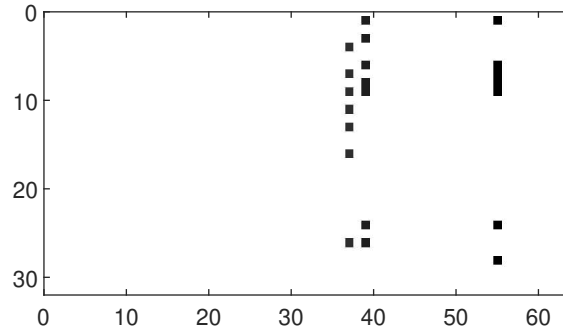
Pa je:

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \mathbf{W}(N_B - q - 1, 1) & & \mathbf{W}(N_B - q - 1, M^2) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{W}(p + 1, 1) & & \mathbf{W}(p + 1, M^2) \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Primjetimo da većina elemenata matrice  $\mathbf{W}_f$  koji ostaju nakon filtriranja sa  $\mathbf{\Lambda}$  imaju vrijednost 0. Matrica  $\mathbf{W}_f$  se preuređuje tako da se elementi vrate na originalne pozicije:

$$\mathbf{W}_{CS} = \mathbf{W}_f(p) \quad (6.20)$$

Dobijena  $\mathbf{W}_{CS}$  matrica je prikazana na slici 6.3. Crne tačke predstavljaju nenulte vrijednosti, dok su ostale vrijednosti jednake nuli.



Slika 6.3: Prikaz filtrirane matrice 2D DCT koeficijenata  $\mathbf{W}_{CS}$  za blok  $8 \times 8$  (64 pozicija koeficijenata) i  $N_B = 32$  bloka

### 6.1.3 Rekonstrukcija stacionarnih frekvencijskih komponenti zasnovana na kompresivnom odabiranju

Pokazali smo da se L-estimacijom uklanja određeni broj najvećih i najmanjih elemenata koristeći funkciju filtriranja  $\mathbf{\Lambda}$ . Filtrirane vrijednosti uglavnom obuhvataju nestacionarne djelove slike koji se u ovoj fazi tretiraju kao smetnje. Shodno tome, preostali odbirci uglavnom odgovaraju stacionarnom signalu. Označimo vektor preostalih vrijednosti kao [108]:

$$\vec{d}_{CS} = \text{vec}(\mathbf{W}_{CS}) \quad (6.21)$$

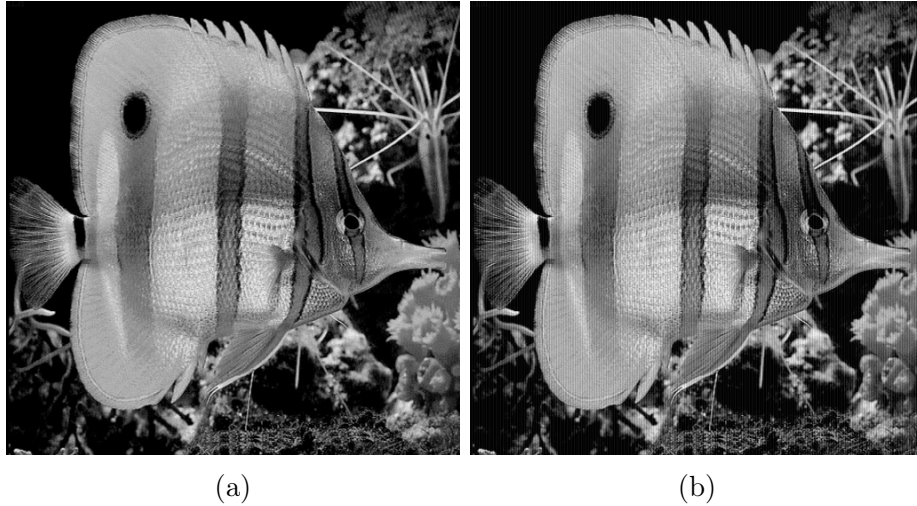
U kontekstu kompresivnog odabiranja (CS),  $\vec{d}_{CS}$  odgovara vektoru dostupnih odbiraka. Da bismo iskoristili vezu između dva transformaciona domena, matrica kompresivnog odabiranja  $\mathbf{A}_{CS}$  se konstruiše tako što se iz  $\mathbf{A}$  (6.11) izostave svi redovi koji odgovaraju nultim pozicijama u vektoru  $\vec{d}_{CS}$ . Dakle, radimo sa redukovanim skupom odbiraka u vektoru  $\vec{d}_{CS}$ . Imajući u vidu da je ovaj signal spars i u punom 2D DCT domenu, predstavljenom koeficijentima  $\vec{d}_X$ , problem minimizacije se može definisati kao [108]:

$$\min |\vec{d}_X|_1 \text{ uz uslov } \vec{d}_{CS} = \mathbf{A}_{CS} \vec{d}_X \quad (6.22)$$

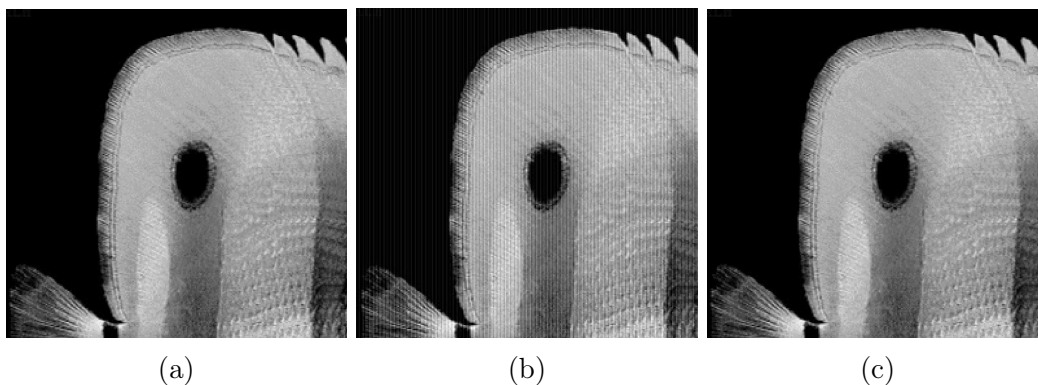
Problem  $\ell_1$  minimizacije iz (6.22) može se rješavati korišćenjem različitih pristupa konveksne optimizacije ili alternativno korišćenjem nekih od „greedy” algoritama.

#### 6.1.4 Primjeri

*Primjer 1:* Posmatrajmo test sliku prikazanu na slici 6.4a) i njenu verziju sa Moareovim teksturama u obliku vertikalnih linija, slika 6.4b). Ova slika je odabrana zbog forme i detalja koji mogu nepogodno uticati pri detekciji stacionarnih komponenti.

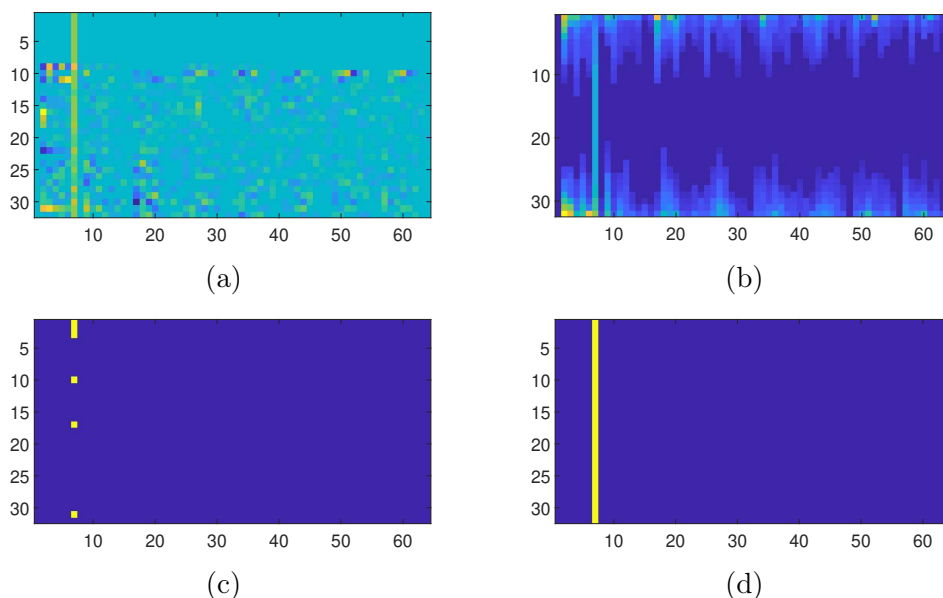


Slika 6.4: a) Originalna slika; b) Slika sa vertikalnim teksturama



Slika 6.5: Uvećan dio slike; a) originalna slika; b) slika sa šumom; c) filtrirana slika

Naime, interesantno je ilustrovati efikasnost predložene metode u slučaju kad se struktura slike preklapa sa strukturom teksture koja se odvaja. Na slikama 6.5a) i 6.5b) su prikazane originalna slika i slika sa stacionarnim komponentama, dok je na slici 6.5c) prikazana slika sa uklonjenim (stacionarnim) teksturama. Kao rezultat činjenice da je tekstura tačno rekonstruisana, filtrirana slika korespondira originalnoj. I u ovom primjeru smo koristili blokove  $8 \times 8$ , a posmatrana su 32 bloka. Matrica 2D DCT koeficijenata za razmatrana 32 bloka data je na slici 6.6a). Sortirani elementi matrice su prikazani na 6.6b). Rezultat L-estimacionog filtriranja je prikazan na slici 6.6c).

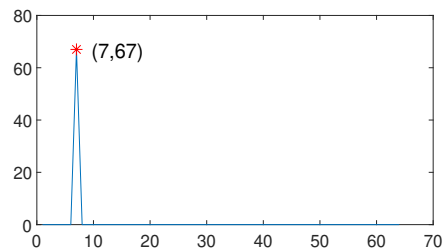


Slika 6.6: L- estimacija i rekonstrukcija jedne stacionarne komponente: a) matrica  $\mathbf{W}$  2D DCT koeficijenata; b) sortirani elementi matrice  $\mathbf{W}_{sort}$ ; c) matrica  $\mathbf{W}_{CS}$ ; d) rekonstruisana komponenta

Na slici 6.6d) je prikazan rezultat rekonstruisane stacionarne komponente. Na-

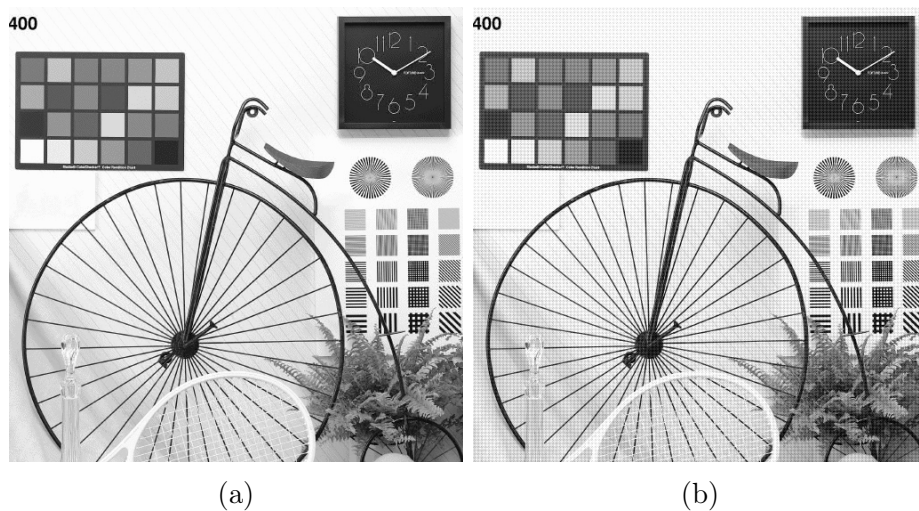


ime, stacionarna komponenta se može tačno rekonstruisati i odvojiti od originalne slike. Komponenta je detektovana na poziciji (7,1) sa amplitudom 67 (slika 6.7).

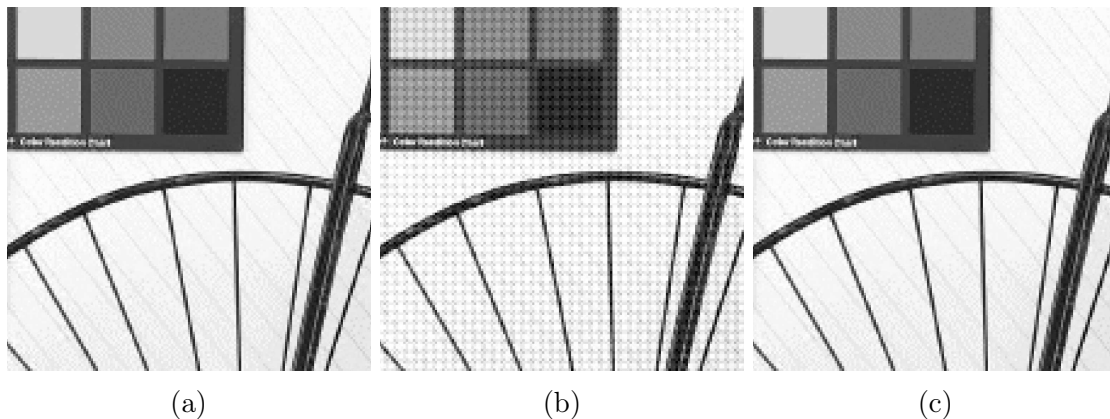


Slika 6.7: Amplituda i pozicija rekonstruisane komponente

*Primjer 2:* U ovom primjeru posmatramo teksture sa multikomponentnim frekvencijskim sadržajima (tri stacionarne komponente pozicionirane na različitim frekvencijama, sa različitim amplitudama) koje izazivaju smetnje na slici. Na slikama 6.8a) i 6.8b) su prikazane originalna i slika sa teksturom. Uvećani djelovi slika su prikazani na slikama 6.9 (6.9a) je originalna slika, 6.9b) je slika sa teksturom i 6.9c) je slika od koje je odvojena tekstura). Procedura detekcije komponenti teksture je prikazana na slici 6.10.

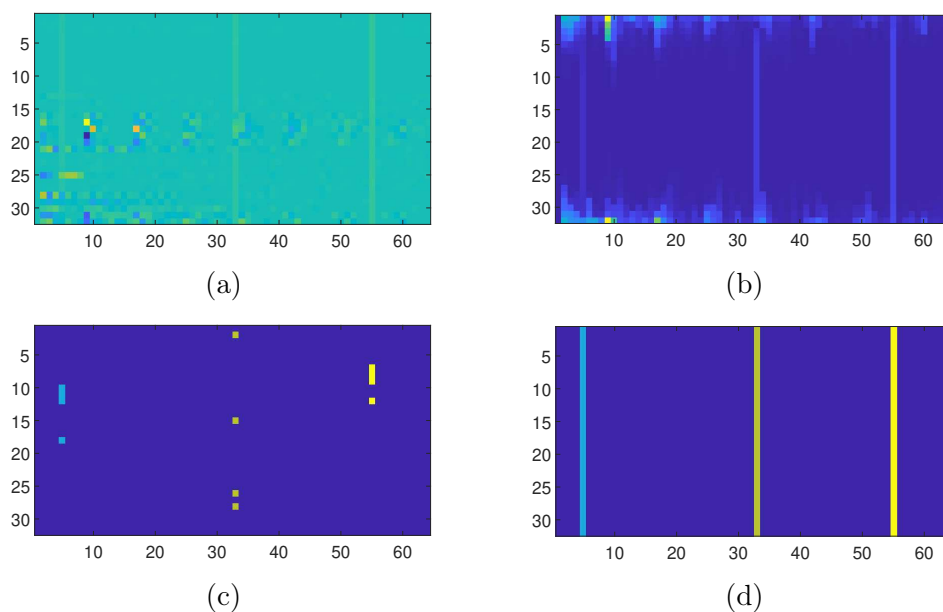


Slika 6.8: a) Originalna slika; b) Slika sa Moareovom šarom

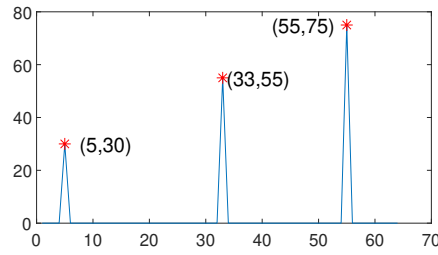


Slika 6.9: Uvećan dio; a) originalna slika; b) slika sa teksturom; c) filtrirana slika

Dakle data je matrica DCT koeficijenata, matrica sa sortiranim elementima, rezultat dobijen nakon filtriranja L-estimacijom, kao i rekonstruisane komponente tekture (slika 6.10). Dobijene su pozicije za frekvencije komponenti: (1,5), (5,1) i (7,7) sa amplitudama 30, 55 i 75 respektivno. Pozicije komponenti i amplitude su date na slici 6.11.

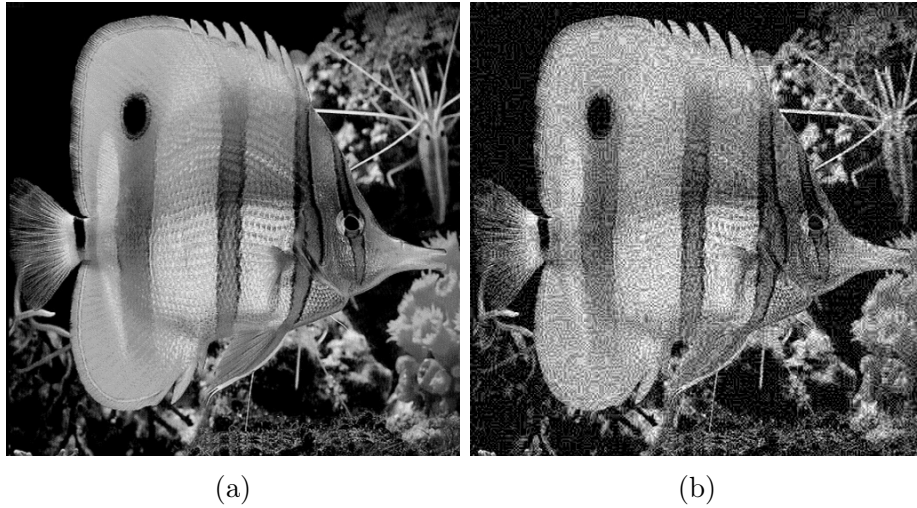


Slika 6.10: L-estimacija i rekonstrukcija tekture sastavljene od tri frekvencijske komponente: a) matrica  $\mathbf{W}$  2D DCT koeficijenata; b) sortirani koeficijenti matrice,  $\mathbf{W}_{sort}$ ; c) matrica  $\mathbf{W}_{CS}$  dobijena nakon L-estimacije; d) rekonstruisane komponente tekture

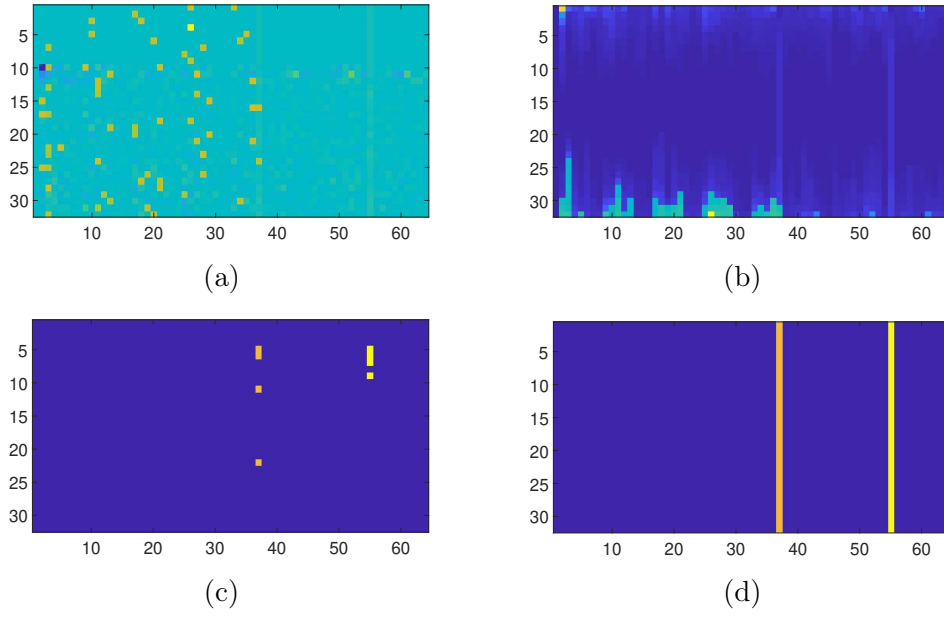


Slika 6.11: Amplitude i pozicije za tri rekonstruisane komponente

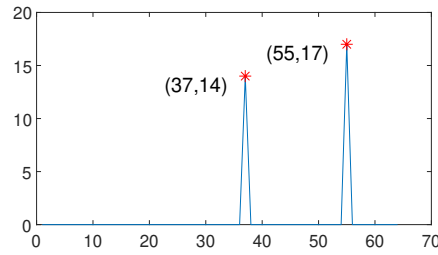
*Primjer 3:* U ovom primjeru posmatramo sliku koja je zahvaćena ne samo stacionarnim teksturama, već i snažnim nestacionarnim smetnjama koje variraju od bloka do bloka. Originalna slika sa stacionarnim i nestacionarnim smetnjama prikazana je na slici 6.12. Matrice  $\mathbf{W}$  2D DCT lokalnih frekvencijskih koeficijenata, zajedno sa pratećim matricama  $\mathbf{W}_{sort}$  i  $\mathbf{W}_{CS}$ , date su na slikama 6.13a), 6.13b) i 6.13c) respektivno. Rekonstruisane vrijednosti stacionarnih komponenti za razmatrana 32 bloka date su na slici 6.13d). Primijetimo da, uprkos dodatnim snažnim nestacionarnim smetnjama, stacionarne komponente mogu biti precizno rekonstruisane kao i u prethodnim primjerima. Detektovane stacionarne komponente prikazane su na slici 6.14. Frekvencijske pozicije komponenti u  $8 \times 8$  blokovima su (5,5) i (7,7), sa amplitudama 14 i 17 respektivno. Frekvencijske komponente su prikazane na pozicijama vektora koeficijenata, gdje 37 odgovara poziciji (5,5), a 55 poziciji (7,7).



Slika 6.12: a) Originalna slika; b) Slika sa stacionarnom teksturom i nestacionarnom komponentom



Slika 6.13: L-estimacija i rekonstrukcija multi-komponentne tekture: a) matrica  $W$  2D DCT koeficijenata; b) sortirani koeficijenti matrice  $W_{sort}$ ; c) matrica  $W_{CS}$  nakon L-estimacije; d) rekonstruisane komponente tekture



Slika 6.14: Amplitude i lokacije za rekonstruisane komponente

### 6.1.5 Dodatna diskusija i poređenje rezultata

Radi poređenja, razmotrimo najprije jedan od novijih pristupa korišćen za uklanjanje tekstura šuma koji je zasnovan na konceptu detekcije pikova u 2D Furijeovom domenu. Prije filtriranja, potrebno je primijeniti detekciju pikova kao što je pokazano, a to je moguće samo ako su amplitude komponenti stacionarne Moareove tekture iznad amplituda komponenti slike i šuma, što u praksi nije uvijek slučaj. Dakle, pokazuje se da nije moguće odvojiti tekture od komponenti slike, bez degradacije kvaliteta slike [108].

Najbolji scenario za filtriranje u frekvencijskom domenu se može postići korišćenjem *notch* filtra, što podrazumijeva idealnu situaciju kada su pozicije stacionarnih komponenti tekture unaprijed poznate. Shodno tome, radi poređenja i diskusije,

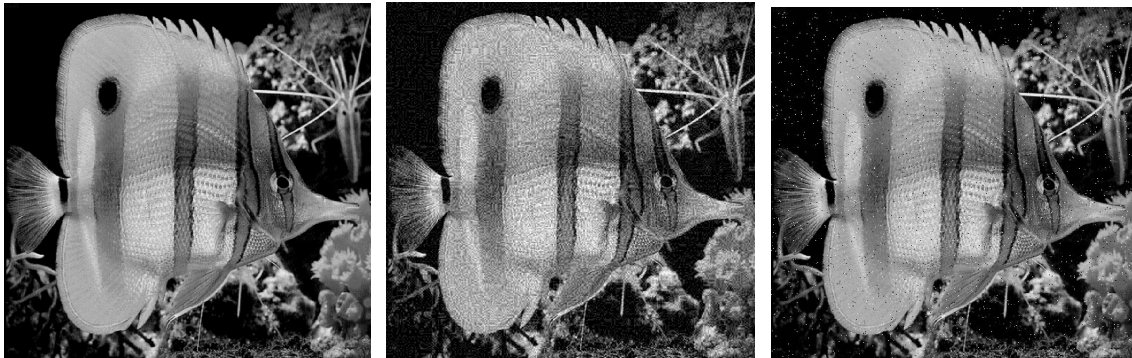
razmotrićemo slučaj idealnog notch filtra. Posmatra se tekstura sa dvije komponente, sa frekvencijskim odzivom  $H(k_1, k_2) = \delta(k - k_{01}, k - k_{02})$ , gdje se pretpostavlja da su  $k_{01}$  i  $k_{02}$  poznati.

Radi verifikacije robustnosti našeg pristupa, posmatrana su dva slučaja: 1) originalna slika sa superponiranim stacionarnim komponentima i 2) originalna slika sa superponiranim stacionarnim komponentima zahvaćena nestacionarnim komponentama šuma (slika sa šumom) i impulsnim (eng. *salt and pepper*) šumom. U oba slučaja, potrebno je izdvojiti teksturu i uporediti je sa originalnom teksturom.

Slučaj 1) Originalna slika bez šuma, data na slici 6.15a), označena je sa  $I$ , a originalna tekstura šuma označena je sa  $P$ . Dalje, ekstraktovana tekstura dobijena korišćenjem predloženog pristupa označena je sa  $P_{ext}$ , dok je tekstura šuma dobijena pomoću idealnog *notch* filtra označena sa  $P_{notch}$ . Slika koja nastaje nakon uklanjanja stacionarnih komponenti označena je sa  $I_{ext}$ , dok je slika koja nastaje nakon uklanjanja  $P_{notch}$  označena sa  $I_{notch}$ . Za kvantitativnu mjeru koristi se indeks strukturne sličnosti (SSIM), a rezultati su dati u tabeli 6.1.

| (Originalna slika, Estimirana slika) | SSIM |
|--------------------------------------|------|
| $P, P_{ext}$                         | 1    |
| $I, I_{ext}$                         | 1    |
| $P, P_{notch}$                       | 0.38 |
| $I, I_{notch}$                       | 0.86 |

Tabela 6.1: Kvantitativna evaluacija pomoću SSIM za slučaj 1)



(a)

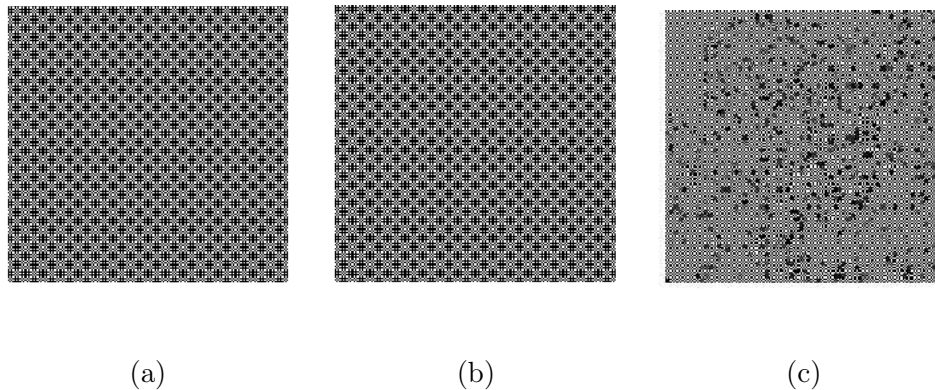
(b)

(c)

Slika 6.15: a) Originalna slika; b) Slika sa nestacionarnim frekvencijskim smetnjama; c) Slika sa *salt and pepper* šumom

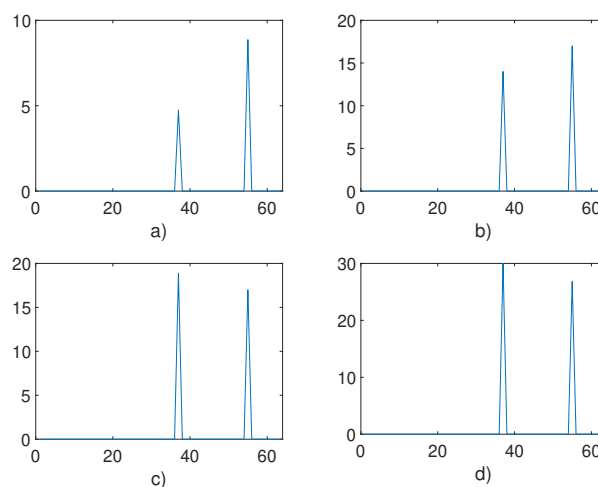
Možemo primijetiti da je kod predloženog pristupa dobijena slika identična originalnoj slici bez šuma (SSIM=1), dok je ekstraktovana tekstura šuma identična original-

noj. Iako je predloženi pristup u osnovi dizajniran za izdvajanje teksture, on takode obezbijuje idealno filtrirane slike. U slučaju primjene *notch* filtra, amplitude komponenti teksture na izlazu filtra imaće pogrešne vrijednosti, jer se one preklapaju sa komponentama slike. Dakle, u ovom slučaju, većina estimiranih parametara stacionarne strukture biće sa značajnom greškom. Slika 6.16a), b) i c) prikazuju originalnu teksturu, teksturu ekstraktovanu predloženom metodom i strukturu dobijenu pomoću notch filtra, respektivno.



Slika 6.16: a) Originalna tekstura; b) ekstraktovana tekstura pomoću predložene metode; c) ekstraktovana tekstura pomoću notch filtra

Kako bismo bolje shvatili rezultate dobijene primjenom idealnog notch filtra, posmatrajmo njegovu primjenu na četiri nasumično odabrana bloka sa slike, (slika 6.17). Napomenimo da tačne vrijednosti frekvencijskih komponenti teksture iznose 14 i 17, međutim, rezultati filtriranja variraju od bloka do bloka, dajući pogrešne vrijednosti.



Slika 6.17: Rezultati primjene idealnog notch filtra na različite blokove (pretpostavlja da su frekvencije poznate): a) blok 2, b) blok 12, c) blok 24, d) blok 30



Slučaj 2) Posmatramo scenario kada je slika superponirana sa stacionarnom teksturom, zahvaćena nestacionarnom smetnjom i impulsnim šumom (salt and pepper sa gustinom šuma od 0.15) (slika 6.15c). U ovom slučaju, komponente stacionarne teksture se intenzivno preklapaju sa komponentama slike, nestacionarne komponente i šuma. Ovo dodatno pogoršava rezultate dobijene pomoću idealnog notch filtra. U poređenju sa prethodnim slučajem, sada imamo sliku sa šumom  $In$  kao referentnu sliku. Slika koja nastaje nakon uklanjanja ekstrahovane teksture predloženim pristupom označena je sa  $In_{ext}$ . Slika dobijena nakon filtriranja teksture pomoću notch filtra označena je sa  $In_{notch}$ . Kvalitet filtriranja data je u tabeli 6.2.

| (Referentna slika, Estimirana slika) | SSIM |
|--------------------------------------|------|
| $P, P_{ext}$                         | 1    |
| $In, In_{ext}$                       | 1    |
| $P, P_{notch}$                       | 0.29 |
| $In, In_{notch}$                     | 0.48 |

Tabela 6.2: Kvantitativna evaluacija pomoću SSIM za slučaj 2)

Važno je istaći da je i u slučajevima 1) i 2) originalna tekstura identična ekstrahovanoj korišćenjem predloženog pristupa (SSIM=1). Shodno tome, dobijena slika nakon uklanjanja obrasca identična je originalnoj čistoj slici, odnosno slici sa šumom, u zavisnosti od posmatranog scenarija. Ovo dalje znači da postignuti SSIM pokazuje da je predložena metoda efikasnija od ostalih pristupa navedenih u literaturi. Na primjer kod metoda zasnovana na cikličnom Moareovom učenju [113], prosječni postignuti SSIM iznosi između 0.78 i 0.95. Rezultati su slični i u poređenju sa drugim metodama zasnovani na drugim modelima neuralnih mreža [114-118]. Metode zasnovane na mrežama dosta dobro funkcionišu, ali većina njih je zasnovana na velikim skupovima slika. Kod složenijih tekstura, treniranje sa ograničenim skupovima podataka (nedovoljan broj različitih vrsta podataka) može dovesti do takozvane prenaučivosti (*overfitting*) [119]. Takođe, procedura treniranja zahtijeva da su dostupne slike sa Moareovim teksturama i njihove originalne verzije bez šuma, što ponekad ograničava primijenjivost. Kada su u pitanju zahtjevi računanja, treba istaći da su za metode zasnovane na neuralnim mrežama neophodni ogromni resursi.

## 6.2. Klasifikacija blokova, adaptivno odabiranje i redukcija šuma slika

U ovom poglavlju ćemo opisati metodu redukcije šuma zasnovanu na varijabilnom broju uklonjenih piksela iz blokova slike. Kompletan algoritam je dat na slici 6.18 [136]. Ulazni parametri algoritma su slika  $I_{M \times N}$ , veličina bloka  $B$ , broj iteracija u proceduri za uklanjanje šuma  $D$ . Primijetimo, da je u zavisnosti od stepena stacionarnosti bloka broj nedostajućih odbiraka različit. Stoga,  $P_1$  i  $P_2$  označavaju procenete nedostajućih odbiraka za stacionarne i nestacionarne blokove respektivno. Dakle, najprije se razmatra slučaj kada se blokovi karakterišu kao stacionarni ili nestacionarni.

Analizirajmo algoritam. Slika  $I$  se smiješta u privremenom parametru  $I_{temp}$ . Slika  $I_{temp}$  je sparsifikovana i dijeli se u blokove veličine  $B \times B - I_{B_{ij}}$ . Sljedeći korak je računanje varijanse  $\sigma$  za blok  $I_B^{ij}$  i provjera sljedećeg uslova:

$$\sigma < Threshold \quad (6.23)$$

Ako je varijansa bloka manja od unaprijed zadatke granice (*threshold*), blok se označava stacionarnim i shodno tome potreban je manji broj dostupnih odbiraka za uspješnu rekonstrukciju. Ako uslov (6.23) nije zadovoljen, onda je blok karakterisan kao nestacionaran i potreban je veći broj dostupnih odbiraka za rekonstrukciju [136]. U ovom poglavlju, granica je dobijena empirijski (uzeta je četvrtina ukupne vrijednosti varijanse slike).

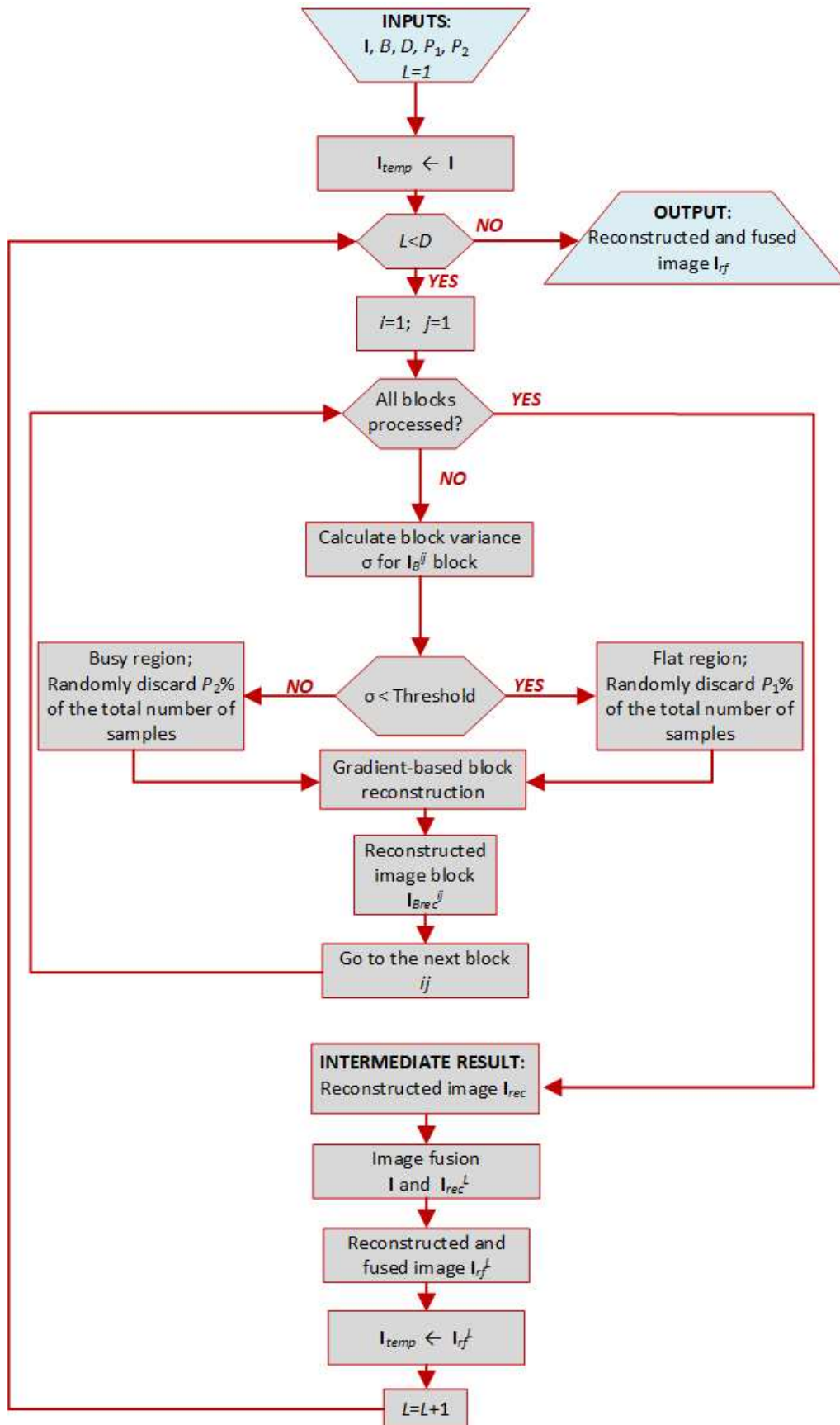
Blok se rekonstruiše korišćenjem konveksno optimizacionog algoritma (opisanog u poglavlju 3.3.2) [136]. Ova procedura se obavlja za sve blokove slike. U svakoj iteraciji  $L$  primijenjuje se fuzija originalne slike  $I$  i slike rekonstruisane u datoj iteraciji -  $I_{rec}^L$ .

Fuzija slike [136-140] je proces kombinovanja nekoliko slika u jednu sliku koja zadržava neke željene karakteristike svake od njih. Ako imamo  $L$  izvornih slika  $\{I_{rf}^1, I_{rf}^2, \dots, I_{rf}^L\}$ , cilj je da se kreira rezultatna slika koja integriše važne karakteristike od svake  $I_{rf}^k$  slike. Proces fuzije se može opisati u sljedećem obliku [136]:

$$I_{rf} = IF\{I_{rf}^1, I_{rf}^2, \dots, I_{rf}^L\} \quad (6.24)$$

gdje  $IF$  označava fuziju slike (eng. *image fusion*).





Slika 6.18: Bok šema predloženog pristupa adaptivne redukcije šuma

Fuzija slike dekomponuje  $I_{rf}^k, k = 1, \dots, L$  u nekoliko komponenti ili podopsega koristeći određenu transformaciju  $T$ :

$$I_{rf}^k \rightarrow T\{X_{k,1}, \dots, X_{k,P}\} \quad (6.25)$$

i onda se  $X_{k,p}$  komponente kombinuju uz željeno pravilo fuzije, formirajući rezultatne komponente  $X_{rf}^L$ :

$$X_{rf}^l \leftarrow \{X_{1,l}, \dots, X_{L,l}\} \quad (6.26)$$

Rezultantna slika se formira primijenjujući inverznu transformaciju  $T^{-1}$ :

$$I_{rf}^l \leftarrow T^{-1}\{X_{rf}^l\} \quad (6.27)$$

U predloženom algoritmu se, kao transformacija, koristi wavelet dekompozicija u dva nivoa. Dakle, dvije slike se spajaju u svakoj iteraciji - rekonstruisana slika  $I_{rf}^k, k = 1, \dots, L$  i originalna slika  $I$ . Primijenjeno je pravilo fuzije kojim se favorizuju niskofrekvencijske komponente filtrirane slike i visokofrekvencijske komponente originalne slike [136].

### 6.2.1 Eksperimentalni rezultati adaptivne redukcije šuma

Predložena metoda je testirana na većem broju slika [136]. Broj dostupnih odbiraka je  $P_1$  i  $P_2$  za stacionarne odnosno nestacionarne blokove, respektivno. Pozicije odbiraka koji se uklanjaju su slučajno uzete (u skladu sa pristupom zahtjevanim kompresivnim odabiranjem). Dimenzije slika su  $256 \times 256$ , a dimenzije blokova  $B \times B = 32 \times 32$ . Testirane su različite dimenzije blokova, ali se ova dimenzija bloka pokazala najoptimalnija.

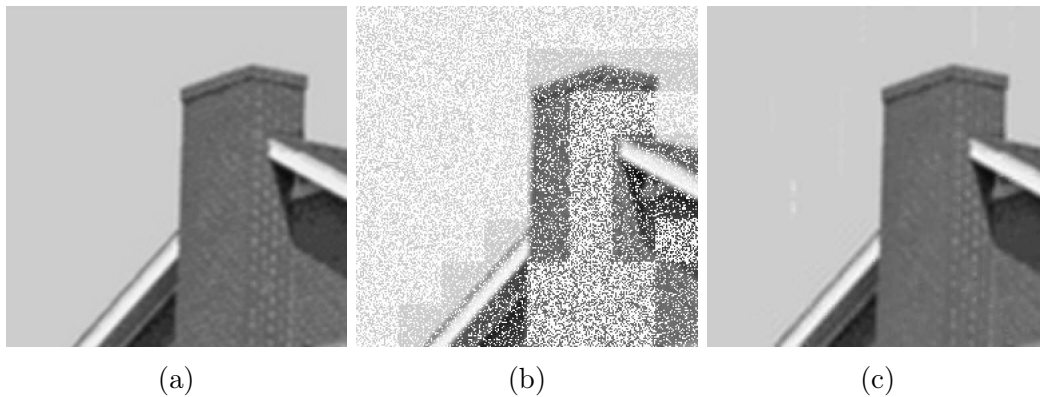
*Primjer 1:* Kako bismo demonstrirali efikasnost rekonstrukcije predloženim pristupom, prvo smo razmatrali sliku bez šuma. Naime, cilj je bio pokazati da predloženi adaptivni pristup daje bolje rezultate u poređenju sa rekonstrukcijom zasnovanom na jednakom broju nedostajućih odbiraka po bloku. Pošto u ovom primjeru ne razmatramo sliku zahvaćenu šumom, filtriranje se ne primijenjuje i koristi se  $D = 1$ . U primjeru je prikazana slika *House*. Parametri  $P_1$  i  $P_2$  su odabrani na sljedeći način: procenat nedostajućih odbiraka za stacionarne regione je  $P_1 = 60\%$  od ukupnog broja odbiraka, dok se za nestacionarne regione odbacuje  $P_2 = 20\%$  odbiraka.

Originalna slika prikazana je na slici 6.19a). Broj stacionarnih regiona je 43, dok je broj nestacionarnih 21. Dakle, ukupan broj nedostajućih odbiraka iznosi:

$$43 \times B \times B \times P_1/100 + 21 \times B \times B \times P_2/100 = 30720$$

što je oko 47% od ukupnog broja odbiraka. Slika 6.19b) prikazuje sliku s nedostajućim odbircima za svaki blok. Sa slike 6.19b) može se vidjeti da su stacionarni blokovi više pododabrani u poređenju sa nestacionarnim.

Radi poređenja, ista slika je rekonstruisana korišćenjem konvencionalnog pristupa gdje se u svakom bloku razmatra 47% nedostajućih odbiraka. Slika 6.19c) prikazuje rekonstruisanu sliku prema predloženoj proceduri. Kao mjera kvaliteta rekonstrukcije računat je PSNR. Vrijednosti PSNR-a za rekonstrukcije korišćenjem tradicionalnog i pristupa zasnovanog na varijabilnom broju odbiraka iznose 30,41dB i 33,17dB respektivno.

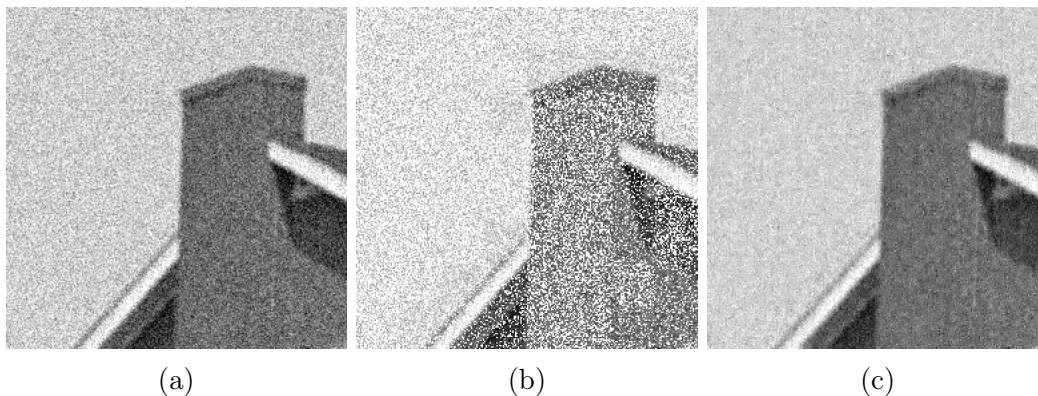


Slika 6.19: a) Originalna slika *House*; b) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; c) Slika rekonstruisana sa varijabilnim brojem odbiraka

U narednim primjerima razmatraćemo slike zahvaćene Gausovim šumom. Za slučaj sa šumom, uzet je manji procenat nedostajućih odbiraka za stacionarne regione -  $P_1 = 40\%$  od ukupnog broja odbiraka, a za nestacionarne kao u prethodnom primjeru,  $P_2 = 20\%$ .

*Primjer 2:* Razmatrajmo sliku „House” zahvaćenu šumom. Na slici 6.20 dati su rezultati. U proceduri je korišćena  $D = 3$  iteracija.

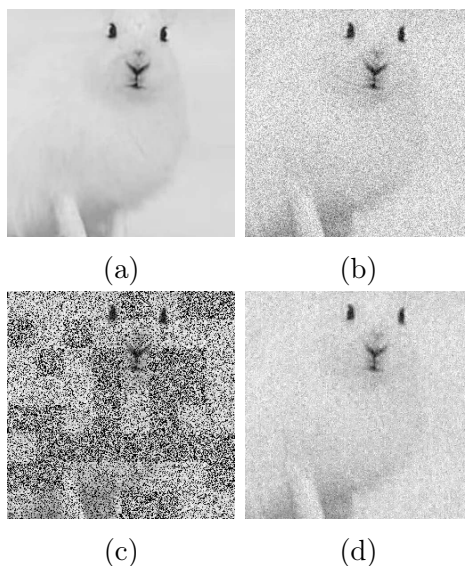
Broj nestacionarnih regiona je 25, dok je broj stacionarnih regiona 39. Te vrijednosti su dobijene u prvoj iteraciji. Dakle, broj nedostajućih odbiraka iznosi 29082, što je 44,4% od ukupnog broja odbiraka. Važno je naglasiti da, pošto koristimo relativno jednostavnu metodu za karakterizaciju bloka, šum će uticati na broj stacionarnih i nestacionarnih blokova. Međutim, taj uticaj nije značajan. PSNR za sliku zahvaćenu šumom iznosi 19.99dB, dok se nakon redukcije šuma predloženim metodom dobija 24.05dB. Slika sa šumom, slika sa nedostajućim odbircima i slika sa redukovanim šumom prikazane su na slikama 6.20a)-c).



Slika 6.20: a) Slika sa šumom; b) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; c) slika sa redukovanim šumom

*Primjer 3:* U sljedećem primjeru posmatra se slika „Arctic Hare”. Broj stacionarnih regiona je 36, dok je broj nestacionarnih 28. Stoga, procenat nedostajućih odbiraka za čitavu sliku iznosi 42.5%. Korištene su  $D = 3$  iteracije. PSNR za sliku sa šumom je 20.32dB, dok za sliku sa redukovanim šumom iznosi 24.75dB.

Originalna slika i slika zahvaćena šumom su prikazane na 6.21a) i 6.21b) respektivno. Slika sa nedostajućim odbircima je prikazana na slici 6.21c), dok je slika sa šumom redukovanim predloženom metodom prikazana na slici 6.21d). Primijetimo da u ovom slučaju, zbog same karakteristike slike, nedostajući pikseli su prikazani kao crni pikseli.

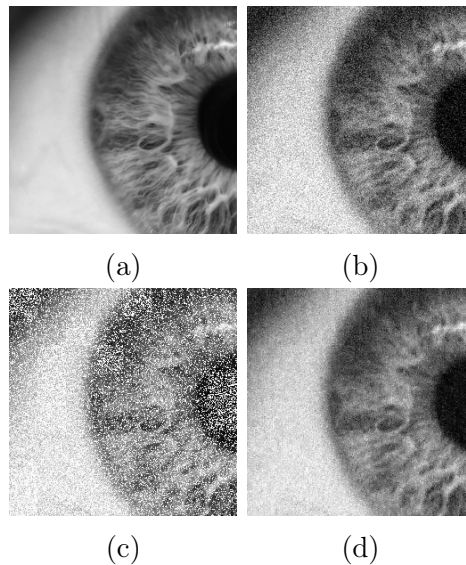


Slika 6.21: a) Originalna slika *Arctic Hare*; b) slika sa šumom; c) slika sa nedostajućim odbircima; d) Slika sa šumom redukovanim predloženom metodom

*Primjer 4:* Razmatrana je slika „Human iris”. Broj stacionarnih regiona je 12, a nestacionarnih 52, što u našem slučaju rezultuje sa 27.5% nedostajućih odbiraka

za čitavu sliku. PSNR slike sa šumom je 19.98dB, a primjenom predloženog metoda šum se redukuje i dobija se PSNR=23.56dB. Slike 6.22a) i 6.22b) prikazuju originalnu sliku i sliku zahvaćenu šumom respektivno. Slika sa nedostajućim odbircima prikazana je na slici 6.22c). Slika 6.22d) prikazuje sliku sa šumom redukovanim predloženom metodom.

Rezultati za razmatrane slike su dati u tabeli 6.3. Na osnovu tabele 6.3, može se zaključiti da je izlazni PSNR za minimum 3.5dB veći od ulaznog PSNR-a.



Slika 6.22: a) Originalna slika; b) slika zahvaćena šumom; c) slika sa varijabilnim brojem nedostajućih odbiraka; d) slika sa redukovanim šumom

| Slika       | Broj stacionarnih blokova | Broj nestacionarnih blokova | Procenat nedostajućih odbiraka | Ulazni PSNR [dB] | Izlazni PSNR [dB] |
|-------------|---------------------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------|-------------------|
| House       | 39                        | 25                          | 44.4                           | 19.99            | 24.05             |
| Arctic Hare | 36                        | 28                          | 42.5                           | 20.32            | 24.75             |
| Human Iris  | 12                        | 52                          | 27.5                           | 19.98            | 23.56             |

Tabela 6.3: Rezultati redukcije šuma za različite slike

## 6.2.2 EM klasterizacija primijenjena na redukciju šuma korišćenjem blokova sa varijabilnim brojem odbiraka

U ovom poglavlju ćemo razmatrati primjenu EM algoritma [141-145] za karakterizaciju stacionarnosti blokova slika. Ovaj metod obezbjeđuje precizniju klasifikaciju što omogućava tačniju rekonstrukciju slike na osnovu blokova sa varijabilnim brojem

odbiraka. U svrhu efikasnije EM klasterizacije posmatrajmo blokove da je dekomponovana pomoću metode singularnih vrijednosti (eng. *Singular Value Decomposition* - SVD) [24]. U tom slučaju imamo:

$$\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{U}_{ij} \mathbf{\Sigma}_{ij} \mathbf{V}_{ij}^T \quad (6.28)$$

gdje  $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  označava blok slike,  $\mathbf{U}_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je ortogonalna matrica,  $\mathbf{\Sigma}_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pravougaona, dijagonalna i nenegativna matrica, a  $\mathbf{V}_{ij}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je transponovana matrica. S obzirom da je naš pristup zasnovan na kvadratnim blokovima, imamo da je  $n = m$ . Nakon što dobijemo singularne vrijednosti bloka, izostavićemo prvu vrijednost koja se odnosi na komponentu sa najvećom energijom, a za ostale singularne vrijednosti izračunaćemo varijansu. Singularne vrijednosti predstavljaju dijagonalne elemente matrice, pa se za blok  $(i, j)$  može pisati:

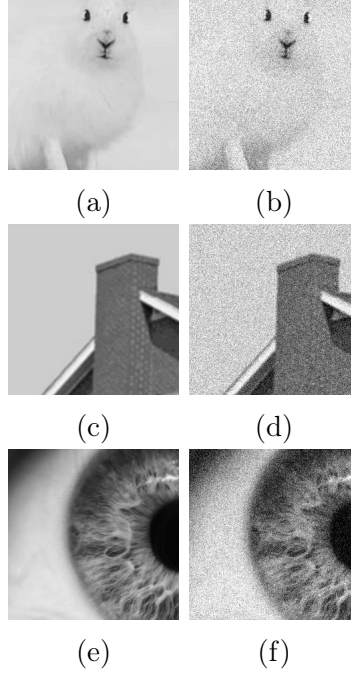
$$[d_{\Sigma}]_n^{ij} = [\Sigma_{nn}]_{ij}, \quad n = 1, \dots, B \quad (6.29)$$

Odnosno

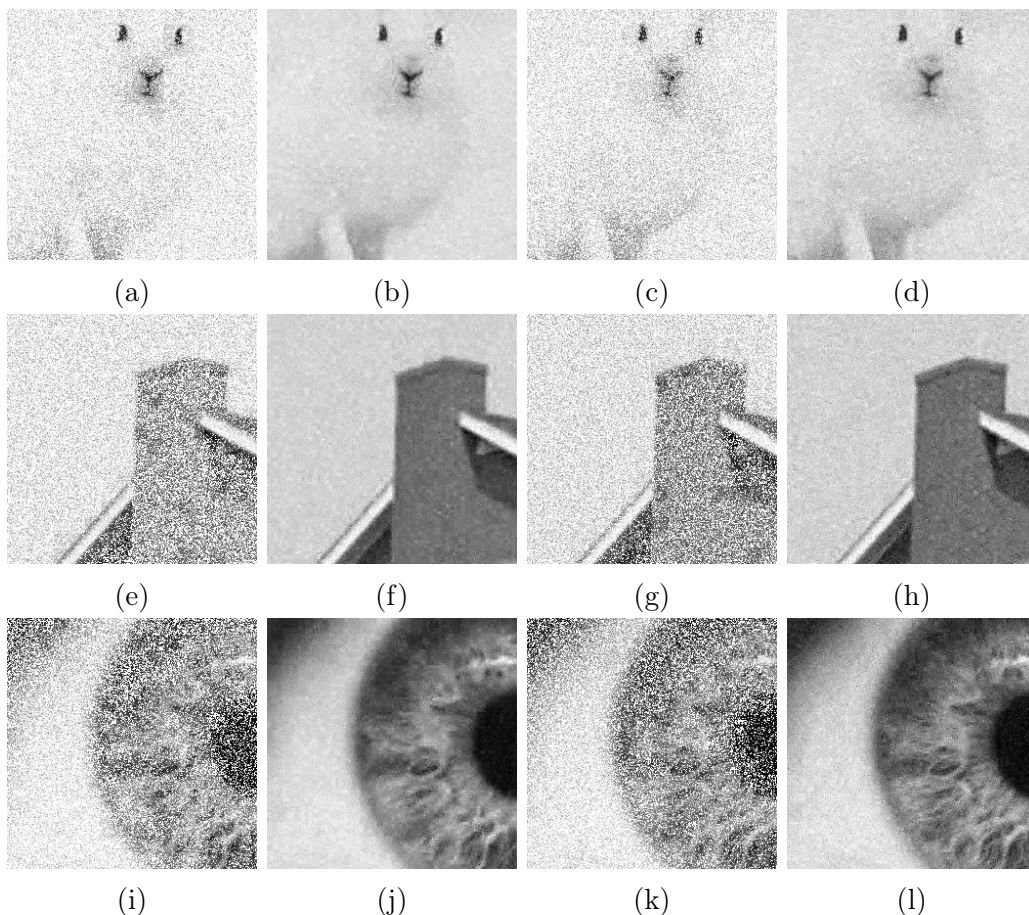
$$\sigma_B^{ij} = \text{var}(\text{vec}([d_{\Sigma}]_n^{ij})), \quad n = 2, \dots, B \quad (6.30)$$

gdje je  $B$  dimenzija bloka.

Nakon što se za svaki blok izračuna varijansa  $B - 1$  singularnih vrijednosti, dobijene varijanse se kategorišu u tri klastera.



Slika 6.23: Originalne slike i njihove verzije sa šumom



Slika 6.24: a), e), i) Slike sa nedostajućim odbircima dobijene podabiranjem pristupom 2 (tri klastera); b), f), j) rezultati redukcije šuma pristupom 2; c), g), h) slike sa nedostajućim odbircima dobijene podabiranjem pristupom 3 (dva klastera); d), h), l) rezultati redukcije šuma pristupom 3

U tabeli 6.4 su dati rezultati dobijeni uzimanjem istog broja nedostajućih odbiraka u svim blokovima (Pristup 1, tabela 6.4) i rezultati dobijeni kategorizacijama blokova korišćenjem EM pristupa (Pristup 2 i 3, tabela 6.4). Naime, ovaj pristup kategorizacije koristili smo za dva slučaja. Prvi, kada se posmatraju samo dvije vrste blokova, stacionarni i nestacionarni, a drugi je zasnovan na tri vrste blokova (stacionarni, umjereno nestacionarni i nestacionarni). U prvom slučaju broj nedostajućih odbiraka je isti kao i u slučaju kategorizacije opisane u prethodnoj sekciji (20% za nestacionarne i 40% za stacionarne). Kod drugog pristupa, broj nedostajućih odbiraka je: 10% za nestacionarne, 30% za umjereno nestacionarne i 50% za stacionarne blokove. Da bi ukupan broj nedostajućih odbiraka kod nestacionarnih blokova bio isti nakon kompletne procedure, prvi pristup je zasnovan tri iteracije, kao u prethodnoj sekciji, a drugi pristup je baziran na pet iteracija. Posmatrajući tabelu, može se zaključiti da se najbolja redukcija šuma dobija za slučaj za tri vrste blokova i pet iteracija. Ono što je interesantno je da i kod pristupa sa dva regiona predlože-

nom klasifikacionom metodom se postiže bolji rezultat nego pristupom iz prethodnog poglavlja, kod koga je klasterizacija zasnovana na varijansi bloka. Očigledno da je odabir regiona preciznije odrađen, što je dosta važno za predloženu proceduru. Naime, stacionarnost regiona je direktno povezana sa brojem transformacionih koeficijenata određenog bloka. Kada je broj koeficijenata mali, tačna rekonstrukcija se može odraditi sa većim brojem nedostajućih odbiraka i obratno. Stoga preciznost klasifikacije utiče na tačnost rezultata. U tabeli je takode prikazano i poređenje za pristup sa konstantnim brojem nedostajućih odbiraka za sve blokove. U tom slučaju, broj je izabran tako da ukupan broj nedostajućih odbiraka odgovara ukupnom broju nedostajućih odbiraka kao kod pristupa sa promjenljivim brojem odbiraka po blokovima. Opisani pristupi su testirani na većem broju slika sa različitim karakteristikama i u svim slučajevima se pokazuje da pristup sa tri karakteristična bloka daje najbolje rezultate.

| Slika                                                                               | Ulazni PSNR | Izlazni PSNR  |              |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------|--------------|---------------|
|                                                                                     |             | Pristup 1     | Pristup 2    | Pristup 3     |
|                                                                                     |             | 3 iter        | 5 iter       | 3 iter        |
|   | 20.40       | 24.87         | <b>28.97</b> | 27.17         |
| Missing %                                                                           |             | 30.63%        | 46.25%       | <b>47.19%</b> |
|  | 21.01       | 24.90         | <b>26.96</b> | 26.05         |
| Missing %                                                                           |             | 27.80%        | 37.82%       | <b>40.86%</b> |
|  | 20.50       | 25.03         | <b>27.86</b> | 26.52         |
| Missing %                                                                           |             | 24.70%        | 43.12%       | <b>44.84%</b> |
|  | 20.04       | 23.44         | <b>24.32</b> | 23.87         |
| Missing %                                                                           |             | 34.70%        | 35.63%       | <b>39.22%</b> |
|  | 21.10       | 24.34         | <b>25.60</b> | 25.00         |
| Missing %                                                                           |             | 30.94%        | 35.30%       | <b>38.98%</b> |
|  | 19.92       | 23.64         | <b>25.10</b> | 24.44         |
| Missing %                                                                           |             | <b>36.50%</b> | 28.12%       | 33.59%        |
|  | 21.02       | 24.13         | <b>25.24</b> | 24.78         |
| Missing %                                                                           |             | 28.12%        | 30.32%       | <b>35.23%</b> |

Tabela 6.4: Poređenje PSNR rezultata slika sa različitim pristupima za redukciju šuma

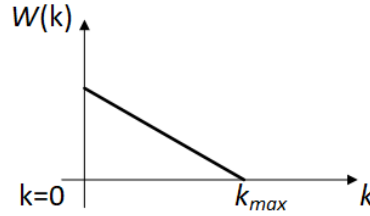


### 6.3. Redukcija šuma zasnovana na filtriranju u Hermitskom domenu i metodi fuzije slika

U ovom poglavlju je razmatran pristup redukcije Gausovog šuma kod slike, baziran na jednodimenzionim Hermitskim transformacijama [146,147]. Ovaj pristup je zasnovan na primjeni trougaone filtarske funkcije u Hermitskom domenu [148]. Trougaona funkcija u Hermitskom domenu je definisana relacijom:

$$W(k) = 1 - \frac{k}{k_{max}} \quad (6.31)$$

gdje je  $k_{max}$  najveći red funkcije koji se koristi za rekonstrukciju. Oblik ovog prozora je dat na slici 6.25.

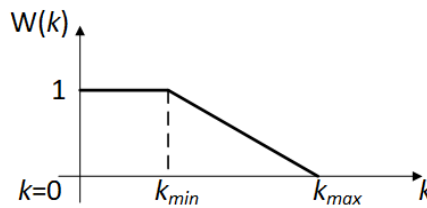


Slika 6.25: Trougaoni filter u Hermitskom domenu

Treba napomenuti da je izbor ovakvog prozora optimalan, jer je varijansa šuma približno proporcionalna energiji prozora, pa stoga u poređenju sa Hamingovim i Haningovim, trougaoni prozor ima najbolje performanse. Prethodna relacija mora biti malo modifikovana, jer za  $k = 0$ , odnosno za  $k < k_{min}$ , rekonstrukcija Hermitskim funkcijama daje loše rezultate, ukoliko signal ima složeniju formu. Stoga se kao funkcija filtra koristi kombinacija pravougaonog i trougaonog data sa:

$$W(k) = \begin{cases} 1 - \frac{k-k_{min}}{k_{max}-k_{min}}, & k \geq k_{min} \\ 0, & k < k_{min} \end{cases} \quad (6.32)$$

Ovaj oblik filtra je prikazan na slici 6.26:



Slika 6.26: Funkcija trougaonog prozora

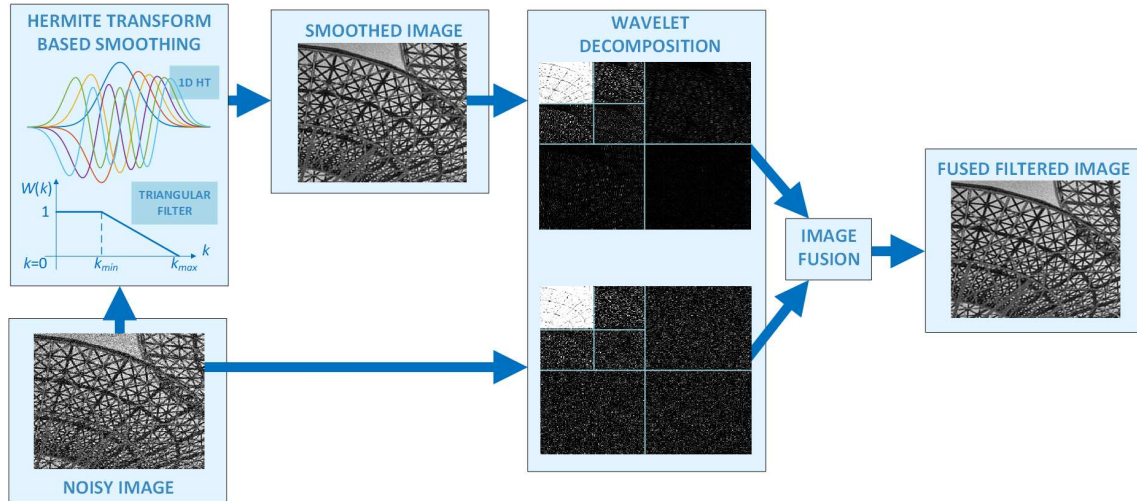
Može se reći da u ovom slučaju imamo oblik niskopropusnog filtra određenog graničnim frekvencijama,  $k_{min}, k_{max}$ . Filtriranje se vrši po vrstama i kolonama slike. Dakle, vrši se rekonstrukcija vrste slike koristeći različit broj Hermitskih funkcija u rasponu od  $k_{min}$  do  $k_{max}$ . Na kraju se dobijeni rezultati usrednjavaju. S obzirom da svaka realizacija za dato  $k$  ima drugačiju raspodjelu Gausovog šuma, usrednjavanje omogućava redukciju istog. Filtriranje u Hermitskom domenu je opisano sljedećom relacijom:

$$X_k^{filt}(k) = \prod_{k_i}^{k_{max_i}} X(k_i)W(k_i), \quad k_{max_i} = k_{min}, \dots, k_{max} \quad (6.33)$$

Prethodna relacija može biti realizovana kao:

$$\bar{X}_k^{filt} = \frac{1}{k_{max} - k_{min} - 1} \sum_{k_{max_i}=k_{min}}^{k_{max_i}-1} X^{k_{max_i}}(k) \quad (6.34)$$

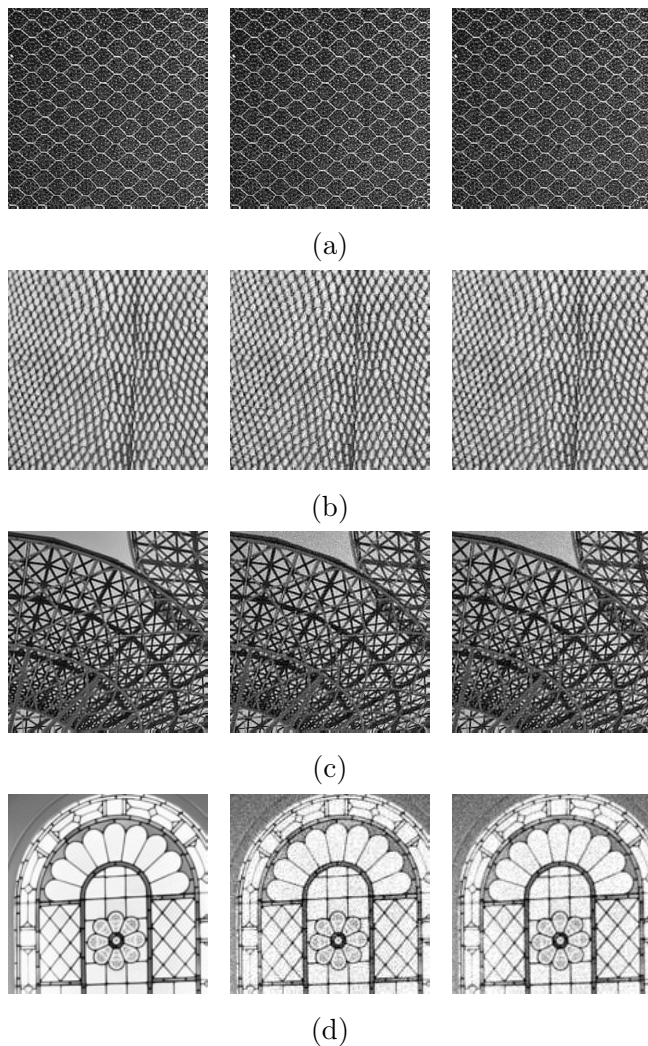
Treba naglasiti da se ovim filtrom favorizuju realizacije sa manjim brojem Hermitskih funkcija, pa se posljedično više koriste niži redovi funkcije koji su manje osjetljivi na šum. Da bismo zadržali bolji kvalitet slike u smislu očuvanja visokofrekvencijskih djelova, korišten je pristup fuzije slike u wavelet domenu [139]. Dakle, filtrirana i originalna slika, fuzijom preko wavelet domena daju konačan rezultat. Procedura je opisana dijagramom prikazana na slici 6.27.



Slika 6.27: Blok šema predložene metode redukcije šuma u Hermitskom domenu

### 6.3.1 Primjeri

Prethodna procedura je realizovana koristeći  $16 \times 16$  blokove slika. Za svaki blok korišteno je  $k_{min} = 8$  i  $k_{max} = 16$ . Razmatran je skup slika, a neke karakteristične su prikazane na slici 6.28.



Slika 6.28: Originalna slika, slika zahvaćena šumom i slika sa redukovanim šumom, za različite slučajeve, respektivno

Na slici su date originalne slike, slike zahvaćene šumom i slike dobijene nakon filtriranja opisanom procedurom, respektivno. U tabeli 6.5 je data statistička analiza i poređenje korištenjem različitih metoda. Korištene su različite mjere za kvalitet slike: PSNR, SSIM (*structure similarity index*), FSIM (*feature similarity index*) i GMSD (*gradient magnitude similarity deviation*) [149]. Poređenje je vršeno sa filtrom srednje vrijednosti, TV (*total variation*) filtrom i Gausovim filtrima sa različitim vrijednostima parametra  $\sigma$ . Kao što se iz tabele 6.5 vidi, u značajnom broju

slučajeva predloženi metod daje najbolje rezultate za najveći broj razmatranih mjera kvaliteta.

| Slika a)                         | Mjera | <i>Mean</i> filtar<br>(širina prozora)<br>$3 \times 3$ | TV<br>filtar | Gausov filtar<br>$\sigma = 0.8$ | Gausov filter<br>$\sigma = 0.5$ | Predložena<br>metoda |
|----------------------------------|-------|--------------------------------------------------------|--------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|
| Ulazni<br>PSNR [dB]<br>= 26.4899 | PSNR  | 17.6325                                                | 10.2418      | 21.8896                         | 26.6651                         | <b>27.2616</b>       |
|                                  | SSIM  | 0.3608                                                 | 0.0000       | 0.7690                          | 0.9271                          | <b>0.9363</b>        |
|                                  | FSIM  | 0.7149                                                 | 0.0797       | 0.7690                          | 0.9621                          | <b>0.9770</b>        |
|                                  | GMSD  | 0.1789                                                 | 0.2135       | 0.0742                          | 0.0453                          | <b>0.0445</b>        |
| Slika b)                         | Mjera | <i>Mean</i> filtar<br>(širina prozora)<br>$3 \times 3$ | TV<br>filtar | Gausov filtar<br>$\sigma = 0.8$ | Gausov filter<br>$\sigma = 0.5$ | Predložena<br>metoda |
| Ulazni<br>PSNR [dB]<br>= 26.4899 | PSNR  | 15.3966                                                | 4.0367       | 21.9433                         | 25.6823                         | <b>26.0520</b>       |
|                                  | SSIM  | 0.4763                                                 | 0.0000       | 0.8963                          | 0.9616                          | <b>0.9692</b>        |
|                                  | FSIM  | 0.7503                                                 | 0.0896       | 0.9211                          | 0.9638                          | <b>0.9699</b>        |
|                                  | GMSD  | 0.2095                                                 | 0.1282       | 0.0446                          | 0.0266                          | <b>0.0237</b>        |
| Slika c)                         | Mjera | <i>Mean</i> filtar<br>(širina prozora)<br>$3 \times 3$ | TV<br>filtar | Gausov filtar<br>$\sigma = 0.8$ | Gausov filter<br>$\sigma = 0.5$ | Predložena<br>metoda |
| Ulazni<br>PSNR [dB]<br>= 26.4899 | PSNR  | 16.5150                                                | 7.6233       | 22.6882                         | 27.8905                         | <b>28.4430</b>       |
|                                  | SSIM  | 0.4210                                                 | 0.0000       | 0.8423                          | 0.9316                          | <b>0.9339</b>        |
|                                  | FSIM  | 0.7405                                                 | 0.1510       | 0.8931                          | 0.9604                          | <b>0.9644</b>        |
|                                  | GMSD  | 0.1807                                                 | 0.2228       | 0.0490                          | <b>0.0290</b>                   | 0.0327               |
| Slika d)                         | Mjera | <i>Mean</i> filtar<br>(širina prozora)<br>$3 \times 3$ | TV<br>filtar | Gausov filtar<br>$\sigma = 0.8$ | Gausov filter<br>$\sigma = 0.5$ | Predložena<br>metoda |
| Ulazni<br>PSNR [dB]<br>= 26.4899 | PSNR  | 17.4942                                                | 3.1144       | 21.0758                         | 25.9627                         | <b>27.1600</b>       |
|                                  | SSIM  | 0.3863                                                 | 0.0000       | 0.7002                          | 0.8375                          | <b>0.8442</b>        |
|                                  | FSIM  | 0.6980                                                 | 0.2713       | 0.8360                          | 0.9182                          | <b>0.9286</b>        |
|                                  | GMSD  | 0.1970                                                 | 0.3336       | 0.0835                          | <b>0.0546</b>                   | 0.0572               |

Tabela 6.5: Poređenje metoda filtriranja

## 7. Rekonstrukcija slika pomoću Hopfildove neuralne mreže

U ovoj glavi ćemo razmatrati poboljšanu metodu obnavljanja kvaliteta slike koji se zasniva na kombinaciji Hopfildove neuralne mreže (*Hopfield Neural Network* - HNN) [150-159] sa rekonstrukcionim algoritmima i klasifikacijom Parzenovim prozorom [160,161]. Hopfildova mreža je oblik asocijative memorijske mreže koja se koristi za prepoznavanje obrazaca slika i optimizacije. Međutim, kada ulazna slika ima ograničen broj dostupnih odbiraka, Hopfildova mreža ne uspijeva da obnovi odgovarajuću formu slike. Zbog toga se gradijentni algoritam koristi za rekonstrukciju slike, kako bi se dobila njena aproksimativna forma, koja bi omogućila njeno poboljšano procesuiranje neuralnom mrežom. U slučaju sivoskaliranih slika koristi se Parzenov prozor [160,161] kako bi klasifikacija pomoću njega olakšala selekciju odgovarajuće forme i dala bolju konvergenciju za tačnije obnavljanje slike.

Hopfildova neuralna mreža pripada tipu rekurentnih neuralnih mreža (*Recurrent Neural Network* - RNN) [162], što podrazumijeva da radi sa sekvencijalnim podacima, gdje se red ulaznih elemenata uzima u obzir. Rekurentna mreža inkorporira koncept „memorije” što omogućava smještanje prethodnog ulaza da bi se generisao naredni izlaz. Pošto HNN pripada ovom tipu mreža podrazumijeva se da mreža sadrži asocijativnu memoriju koja omogućava obnavljanje memorije koristeći nedovršene podatke ili djelove ulaznih podataka zahvaćene šumom. Ova osobina je čini pouzdanom metodom za rekonstrukciju i prepoznavanje obrazaca.

### 7.1. Teorijska osnova

Hopfildova mreža je jedan od prvih primjera asocijativne neuralne mreže. Neuronu u ovoj mreži se smiještaju i obnavljaju signale na osnovu ulaznih asocijativnih (nedovršenih) formi. Tokom faze učenja, neuroni su inicijalizovani sa vrijednostima ulaznih signala i na osnovu toga se računaju težinski faktori.

Hopfildova mreža je mreža konstruisana od Mekaloh-Pits (*McCulloch-Pitts*) ne-

urona. Stanje neurona  $j$  u trenutku diskretnog vremena  $n$  može se opisati kao [150,154,155-157]:

$$s_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{aktivan} \\ -1, & \text{neaktivan} \end{cases} \quad (7.1)$$

Neuron  $i$  prima ulaze od  $N$  neurona. Izlazi  $s_i(n+1)$  su ulazi svih neurona iz sljedećeg koraka i računaju se prema relaciji:

$$s_i(n+1) = f(z_i(n)) \quad (7.2)$$

gdje je  $f$  aktivaciona funkcija i  $z_i(n) = \sum_{j=1}^N w_{ij}s_j(n)$  je lokalno polje. Parametri  $w_{ij}$  označavaju pozitivne i negativne težinske vrijednosti, tj. jačinu konekcije neurona  $i$  i neurona  $j$ , dok  $\theta_i$  označava ograničenje za neuron.

Neuroni mogu biti ažurirani sinhrono i asinhrono. Ako su svi neuroni  $i$  istovremeno ažurirani i svi ulazi  $s_j(n)$  smješteni u trenutku  $n$ , onda je to sinhrono ažuriranje. Asinhrono ažuriranje se izvršava na jedan neuron po iteraciji:

$$s_i(n+1) = \begin{cases} f\left(\sum_j w_{kj}s_j(n) - \theta_k\right), & i = k \\ s_j(n), & \text{ostalo} \end{cases} \quad (7.3)$$

Težinske vrijednosti  $w_{ij}$  između neurona  $i$  i neurona  $j$  se mogu računati prema sljedećoj relaciji:

$$w_{ij} = s_i s_j \quad (7.4)$$

gdje su  $s_i$  i  $s_j$  stanja koja će neuroni  $i$  i  $j$  imati u ciljnom obrascu. U slučaju kad imamo više obrazaca, jednačina se modifikuje na sljedeći način [155-157]:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^P s_i^k s_j^k \quad (7.5)$$

gdje  $P$  označava broj obrazaca. Relacija (7.5) korespondira Hebovom pravilu (eng. *Hebb's rule*). Ovo pravilo kaže da je vrijednost težine  $w_{ij}$  između neurona  $s_i$  i  $s_j$  proizvod vrijednosti neurona. Težinska matrica mreže  $\mathbf{W}$  je simetrična, tj.  $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$ , dok su dijagonalni elementi jednaki nuli, što znači da u mreži nema sopstvenu povratnu informaciju [157].

Razmatrajmo slučaj kad imamo nepotpunu formu u smislu da je obrazac zahvaćen šumom. Obrazac ima elemente sa vrijednostima  $\pm 1$ . Ovaj obrazac se pridodaje mreži kao stanje i uzima se u obzir tokom faze obnavljanja. Za svaki neuron, suma težinskih ulaza iz susjednih neurona je računata i primijenjena je određena funk-

cija da bi se odredilo aktivaciono stanje. Ažurirajući proces se nastavlja dok nema promjena za izvršavanje. Pretpostavljajući asinhrono ažuriranje i ograničenje aktivacione funkcije, stanje neurona se ažurira na osnovu znaka težinske sume ulaza. Stoga, imamo [154]:

$$s_i(n+1) = \text{sgn}(z_i(n)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.6)$$

gdje je  $\text{sgn}$  signum funkcija definisana kao:

$$\text{sgn}(z_i) = \begin{cases} +1, & z_i > 0 \\ -1, & z_i < 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Ako je  $z_i > 0$ , onda neuron  $i$  mijenja stanje na  $+1$ , odnosno ako je ( $z_i < 0$ ), onda se stanje mijenja na  $-1$ . Ako se već nalazi u određenom stanju, onda zadržava isto. U slučaju kada je  $z_i = 0$ , onda neuron  $i$  zadržava svoje prethodno stanje. U matricnoj formi, relacija (7.6) može da se zapiše kao

$$\mathbf{s} = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{s} - \mathbf{\Theta}) \quad (7.8)$$

gdje je  $\mathbf{\Theta}$  je  $N$ -dimenzioni vektor koji sadrži ograničenja neurona, dok vektor  $\mathbf{s}$  predstavlja stabilno stanje.

Dinamika mreže je vezana za energiju sistema. Sistem konvergira ka minimumu energije. Energetska funkcija mora biti minimalna za poželjno rješenje [150]. Razmatrajući jedan obrazac  $P = 1$ , energetska funkcija je definisana kao suma svih neurona pomnožena sa polovinom njihovih težinskih suma, zbog simetrije težinskih vrijednosti [154]:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} s_i s_j + \sum_i \theta_i s_i \quad (7.9)$$

ili u matricnoj formi:

$$E = -\frac{1}{2} \mathbf{s} \mathbf{W} \mathbf{s}^T + \mathbf{\theta} \mathbf{s}^T \quad (7.10)$$

Ako razmotrimo slučaj  $\theta_i = 0$ , relacija (7.9) se može zapisati kao [150,155]:

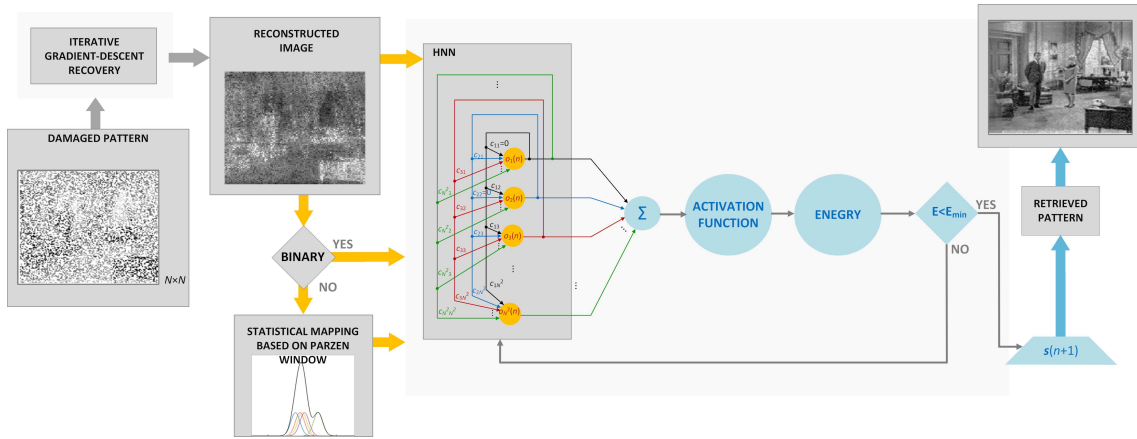
$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} s_i s_j \quad (7.11)$$

Energetska funkcija je opadajuća funkcija i stoga Hopfildova mreža teži ka svom lokalnom minimumu.

## 7.2. Modifikacija Hopfildove mreže za rekonstrukciju sivoskaliranih slika

Osim razmatranih binarnih obrazaca (slika), procedura se može prilagoditi i za sivoskalirane ulazne slike [159]. U ovom slučaju je uključeno statističko mapiranje preko Parzenovog prozora (slika 7.1). Dodatno je izvršena modifikacija u odnosu na prethodnu proceduru. Naime, energetska funkcija i pravilo za ažuriranje su modificirani. Stoga aktivacione funkcije i segmenti za računanje energije imaju drugačiju formu računanja za slučaj binarnih i sivoskaliranih slika [159]. Energetska funkcija za rekonstruisanje sivoskaliranih slika u Hopfildovoj mreži je definisana kao:

$$E(\mathbf{s}, \mathbf{W}) = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{W} \mathbf{s} + \sum s^2 \quad (7.12)$$



Slika 7.1: Blok šema predloženog pristupa za rekonstrukciju sivoskaliranih slika

U prethodnoj relaciji parametar  $\mathbf{s}$  označava stanje neurona, dok  $\mathbf{W}$  označava matricu težinskih vrijednosti. Takođe, uveden je  $\sum \mathbf{s}$  zbog održavanja stabilnosti mreže i spriječavanja neurona da dostignu ekstremno visoke vrijednosti. Uz ove modifikacije je uvedena nova aktivaciona funkcija, tanh (tangens hiperbolni). Ova funkcija je neophodna za sivoskalirane slike, gdje su vrijednosti piksela normalizovane između vrijednosti -1 i 1. Pravilo ažuriranja neurona je dato sljedećim izrazom [159]:

$$s_i(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \tanh \left( \beta \sum_j w_{kj} s_j(n) \right) \right], & i = k \\ s_i(n), & \text{ostalo} \end{cases} \quad (7.13)$$

gdje je  $\beta$  skalirajući faktor koji kontrolise nivo aktivacione funkcije za rekonstrukciju piksela slike. Ovaj parametar je takođe važan, jer obezbijuje numeričku stabilnost



tokom procesa konvergencije mreže. Nakon što mreža konvergira, vrijednosti piksela na izlazu slike su reskalirani kao u originalnom predstavljanju vrijednostima (od 0 do 255). Ovdje je parametar  $\beta$  korišćen da se odrede odgovarajuće vrijednosti i kontrast sivih piksela na izlazu slike.

## 7.3. Eksperimentalni rezultati

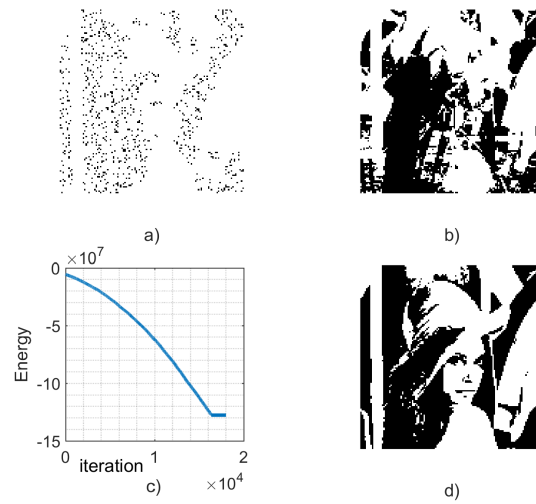
Efikasnost predložene procedure testirana je na značajno oštećenim ulaznim obrascima (slikama). Posmatrana su dva slučaja obrazaca: binarne i sivoskalirane slike [159]. Hopfildova mreža je trenirana na obrascima veličine  $128 \times 128$ . Trening skup je formiran iz *Matlab demo* skupa podataka (koji uključuje standardne test slike), USC-SIPI baze slika i nekih slika iz Caltech 256 skupa. Napomenimo da su obrasci veličine  $128 \times 128$  kreirani iz originalnih slika (veće slike su podijeljene na više  $128 \times 128$  obrazaca, čime je proširen trening skup). Test skup podataka predstavlja podskup prikupljenog trening skupa. Proces treniranja ima za cilj da konstruiše (obuči) težinske vrijednosti u matrici  $\mathbf{W}$ , koje su zatim fiksirane u fazi testiranja. Hopfildova mreža, u slučaju sivoskaliranih obrazaca, koristi modifikovano pravilo ažuriranja opisano u prethodnom poglavlju. Za taj slučaj je uveden faktor skaliranja  $\beta$ , koji kontroliše jačinu aktivacione funkcije. Potrebno ga je empirijski odrediti (u eksperimentima je dominantno korišćeno  $\beta = 20$ ). Međutim, nije ključan za pronalaženje obrasca, jer utiče samo na kontrast izlazne slike. Dati su rezultati primjene same HNN mreže. Oni pokazuju da mreža ne uspijeva da obnovi obrasce na osnovu oštećenih ulaza.

Važno je napomenuti da su u eksperimentima predstavljeni oštećeni binarni obrasci sa samo 10% dostupnih odbiraka i sivoskalirani obrasci sa samo 40% dostupnih odbiraka. Ove vrijednosti su empirijski određene kao najmanji broj dostupnih odbiraka koji omogućava tačno pronalaženje svih testiranih obrazaca. Naime, manje složeni obrasci mogu se obnoviti korišćenjem predloženog pristupa čak i sa manjim brojem dostupnih odbiraka (npr. 2% za sliku *cameraman* u slučaju binarnih podataka), ali 10% za binarne i 40% za sivoskalirane slike pokazali su se kao sigurni pragovi broja dostupnih odbiraka koji mogu osigurati uspješne rezultate za sve obrasce iz test skupa.

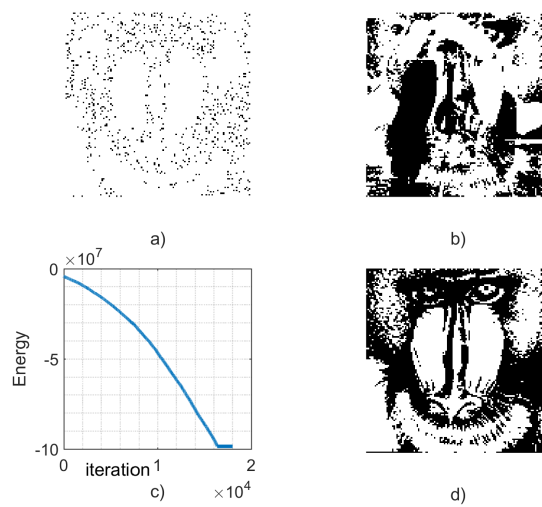
### 7.3.1 Binarni obrasci

U prvom slučaju su posmatrani binarni obrasci. Razmatrane su oštećene test slike kod kojih je dostupno samo 10% od ukupnog broja piksela. Slike *Lena*, *Baboon*, *Peppers* i *Barbara* prikazane su na slikama 7.2a), 7.3a), 7.4a) i 7.5a). Na slikama od

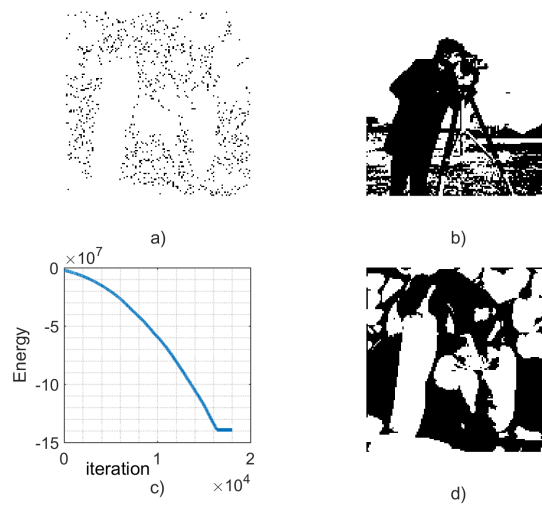
7.2 do 7.5 prikazani su rezultati primjene Hopfildove mreže bez modifikacije predloženim pristupom koji uključuje rekonstrukciju i statističko mapiranje. Kao što je i očekivano, mreža nije uspjela da rekonstruiše ulazne obrasce. Eksperimenti prikazuju rezultate kada su oštećene slike *Lena*, *Baboon*, *Peppers* i *Barbara* korišćene kao ulazi u Hopfildovu mrežu. Slika 7.4b) prikazuje pogrešan rezultat rekonstruisanog obrasca, dok slike 7.2b), 7.3b) i 7.5b) pokazuju da je rezultat neka vrsta slike dobijene kao mješavina različitih obrazaca.



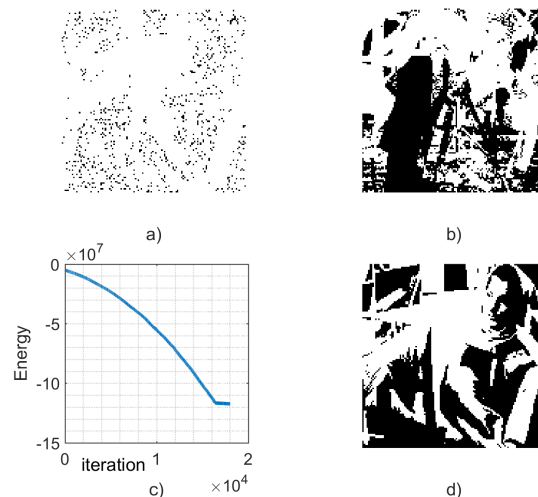
Slika 7.2: a) Ulazna slika *Lena* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



Slika 7.3: a) Ulazna slika *Baboon* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



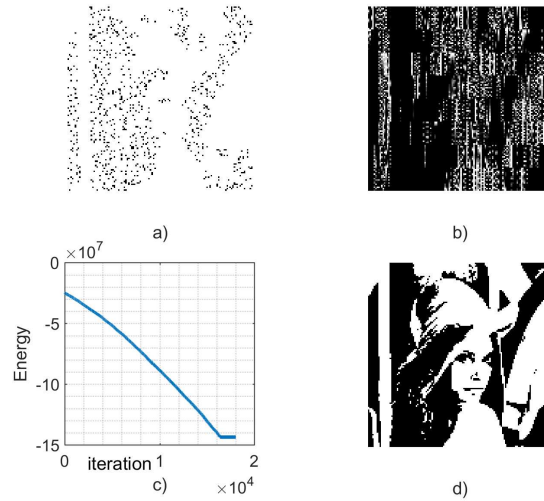
Slika 7.4: a) Ulazna slika *Peppers* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



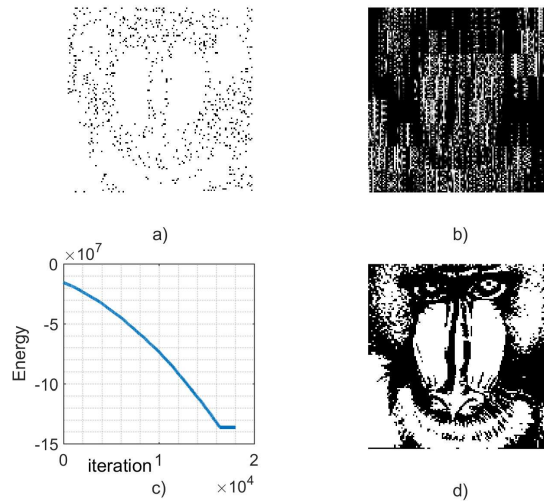
Slika 7.5: a) Ulazna slika *Barbara* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) dobijena pogrešna slika; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika

Razmotrimo sada performanse predložene procedure sa gradijentnim algoritmom za rekonstrukciju. Važno je napomenuti da u slučaju binarnih slika, rezultati rekonstrukcije mogu biti lošiji od sivoskaliranih slika. Naime, kao rezultat rekonstrukcije gradijentnim algoritmom, pojavljuju se sivoskalirane vrijednosti. Stoga je potrebno dodatno postprocesuiranje da bi se dobila binarna slika. Rezultati su dati na slikama 7.6 do 7.9 pokazujući uspješno obnovljene obrasce za razmatrane slučajeve. Napomenimo da međurezultati dobijeni gradijentnim algoritmom značajno razlikuju od originalnog obrasca, skoro do neprepoznatljivosti (slika 7.6b), 7.7b), 7.8b) i 7.9b)).

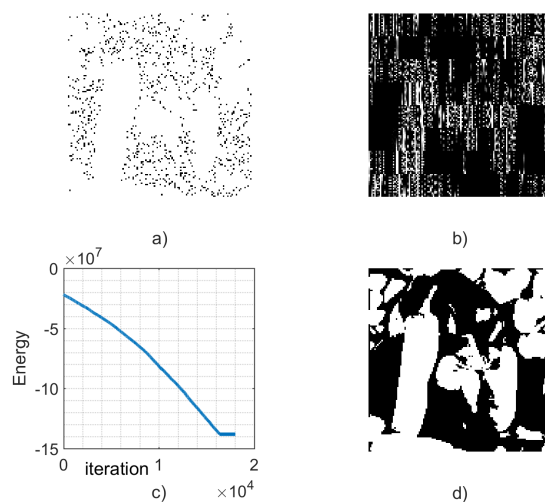
Međutim, ovi rezultati daju poboljšanu aproksimaciju obrasca koja je za Hopfildovu mrežu dovoljno dobra da u potpunosti obnovi obrazac.



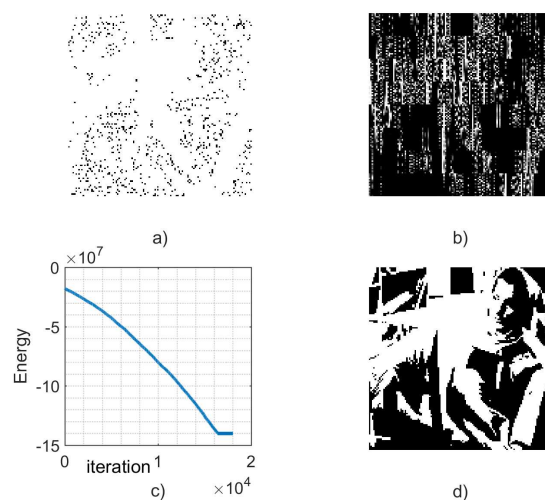
Slika 7.6: a) Ulazna slika *Lena* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



Slika 7.7: a) Ulazna slika *Baboon* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



Slika 7.8: a) Ulazna slika *Peppers* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika



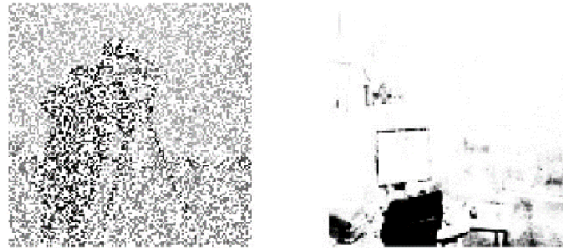
Slika 7.9: a) Ulazna slika *Lena* sa 90% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisan obrazac; c) Minimizacija energije kroz iteracije; d) originalna (očekivana) slika

### 7.3.2 Sivoskalirani obrasci

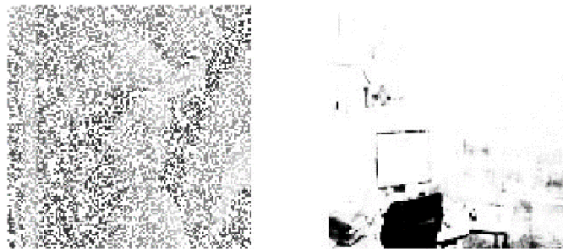
Razmotrimo sada slučaj sivoskaliranih slika. U prvom slučaju imamo sivoskalirane slike sa 60% nedostajućih odbiraka dovedene na ulaz mreže.

Rezultati za sivoskalirane oštećene slike *Cameraman* i *Lena* su prikazane na slikama 7.10 i 7.11. Obnavljanje obrazaca je neuspješno u oba slučaja. Naime, Hopfildova mreža generiše fuziju od nekoliko slika, stvarajući nepostojeći obrazac. Mreža u ovom

slučaju identifikuje kao dominantan obrazac sliku *Office*.

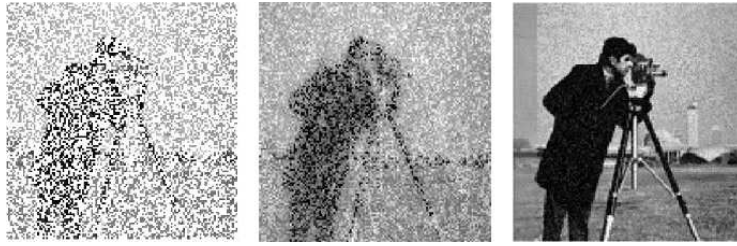


Slika 7.10: a) Ulazna slika *Cameraman* sa 60% nedostajućih piksela; b) pogrešno identifikovana slika sastavljena od više obrazaca



Slika 7.11: a) Ulazna slika *Lena* sa 60% nedostajućih piksela; b) pogrešno identifikovana slika sastavljena od više obrazaca

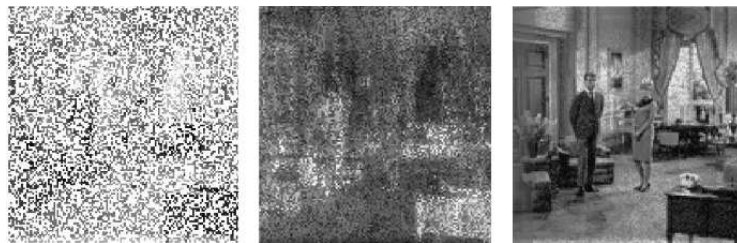
Da bi se izbjegla prethodna greška, u identifikaciji obrasca, primijenjen je gradijentni algoritam za rekonstrukciju [159]. Gradijentni algoritam obezbjeđuje rekonstruisane aproksimacije obrazaca prikazane na slikama 7.12b), 7.13b) i 7.14b)). Očigledno da je kvalitet aproksimacije još uvijek daleko ispod kvaliteta originalnih obrazaca, naročito kod složenijih primjera (slika 7.14b)). Za to se primijenjuje Parzenova klasifikacija radi odbacivanja manje sličnih obrazaca u Hopfildovoj mreži [159]. Drugim riječima, aproksimacije se klasifikuju radi preciznije identifikacije podskupa onih čije su funkcije gustine raspodjele uporedive sa PDF-om ulaznog obrasca. Klasifikacija se zasniva na trodimenzionalnoj raspodjeli sa sljedećim osama: vrijednosti piksela, gradijenti i teksture računati preko entropije. Za svaku osu korišćen je prozor  $h = 1$ . Na kraju aproksimacija odabrana Parzenovim pristupom se obnavlja neuralnom mrežom. Rezultati za neke test slike su prikazani su na slikama 7.12-7.14.



Slika 7.12: a) Ulazna slika *Cameraman* sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike



Slika 7.13: a) Ulazna slika *Lena* sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike



Slika 7.14: a) Ulazna slika *living room* sa 60% nedostajućih odbiraka; b) djelimično rekonstruisana slika gradijentnim algoritmom; c) krajnji rezultat i identifikacija slike

## 8. Zaključak

S obzirom da teza obuhvata u manjoj ili većoj mjeri nekoliko različitih oblasti, predloženi pristupi otvaraju mogućnost za mnogo širu primjenu od one koja je prezentovana u radu. U tezi je prezentiran efikasan metod za odvajanje stacionarnih 2D tekstura iz prirodnih slika. Ovaj metod bi mogao da se generalizuje za enkripciju signala stacionarnih u Hermitskom domenu. Naime, korišćenjem analogije i relacija koje bi bile razvijene za Hermitski domen mogla bi da se izvrši potpuna detekcija i ekstrakcija takvih signala. Interesantne primjene ovog pristupa mogu da se dobiju i za jednodimenzione signale. Naime, kombinovanje transformacionih domena preko relacije koja daje vezu između kratkotrajnih Furijevih transformacija sa različitim dužinama prozora, može se koristiti kod komunikacionih signala. Posebno interesantan slučaj je detekcija i odvajanje Bluetooth i Wireless signala zahvaćenih jakim nestacionarnom smetnjom. U tu svrhu bi ovaj transformacioni pristup bio kombinovan sa L-estimacionim tehnikama. Takođe, kod slučajeva optimalnih estimatora bilo bi interesantno dati izvođenje za slučajeva dvodimenzionih transformacija.

Posebno interesantan je i slučaj klasifikacija signala za koje je Hermitska transformacija optimalan estimator. U grupu ovih signala spadaju biomedicinski signali kao što su elektrokardiogram (EKG), elektroencefalogram (EEG), komunikacioni širokopojasni signali (UWB), kao i signali parcijalnog pražnjenja u elektroenergetskim sistemima. Kombinacijom klasifikacionih metoda za Hermitski domen i neuralnih mreža mogu da se dobiju efikasni sistemi za prepoznavanje i karakterizaciju ovakvih signala.

U radu je pokazano da se performanse Hopfield-ove neuralne mreže mogu značajno poboljšati korišćenjem konveks-optimizacionih rekonstrukcionih algoritama i klasifikacionih metoda zasnovanih na Parzen window. Međutim, kombinovanjem hardverskih rješenja za k-NN mrežu sa konvolucionim – CNN neuralnim mrežama mogu da se dobiju moćni sistemi za obradu zahtijevnijih signala od onih koji su obrađivani Hopfield-ovom mrežom.

Takođe, sistemi za redukciju šuma zasnovani na uklanjanju odbiraka mogu dalje da se generalizuju i usavrše u smislu paralelnog rada sa više različitih veličina



blokova kombinujući regione kod kojih je šum najbolje redukovan. Arhitektura za hardversku realizaciju k-NN metode može biti dalje usavršena koristeći analogne realizacije.

Bilo bi interesantno razviti softver za virtuelni instrument za klasifikacione metode kojim bi se integrisale metode koje koriste skupove podataka za obučavanje i metode koje na osnovu maksimizacije očekivanja vrše segmentaciju određenih podataka.

# Bibliografija

- [1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.
- [2] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2009.
- [3] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2009.
- [4] M. Vetterli and J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1994.
- [5] A. Sandryhaila, S. Saba, M. Püschel, and J. Kovačević, "Efficient compression of qrs complexes using hermite expansion," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, pp. 947–955, Feb. 2012.
- [6] M. Brajović, I. Orović, M. Beko, and S. Stanković, "Reconstruction of signals with sparse representation in optimally dilated hermite basis," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 17, pp. 2789–2797, 2023.
- [7] E. Sejdić, I. Orović, and S. Stanković, "Compressive sensing meets time-frequency: An overview of recent advances in time-frequency processing of sparse signals," *Digital Signal Processing*, vol. 77, pp. 22–35, 2018.
- [8] V. Jurdana, I. Volarić, and V. Sučić, "Sparse time-frequency distribution reconstruction based on the 2d rényi entropy shrinkage algorithm," *Digital Signal Processing*, vol. 118, p. 103225, 2021.
- [9] W. M. Eid, S. S. Alotaibi, H. M. Alqahtani, and S. Q. Saleh, "Digital image steganalysis: Current methodologies and future challenges," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 92 321–92 336, 2022.

- [10] V. Arya, H. Choubey, S. Sharma, T.-Y. Chen, and C.-C. Lee, "Image enhancement and features extraction of electron microscopic images using sigmoid function and 2d-dct," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 76 742–76 751, 2022.
- [11] D. Mukherjee and S. Mukhopadhyay, "Hardware efficient architecture for 2d dct and idct using taylor-series expansion of trigonometric functions," *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 30, no. 8, pp. 2723–2735, Aug. 2020.
- [12] G. F. Boudreaux-Bartels and T. W. Parks, "Time-varying filtering and signal estimation using wigner distribution synthesis techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 34, no. 3, pp. 442–451, Jun. 1986.
- [13] R. Bernardini and J. Kovačević, "Arbitrary tilings of the time-frequency plane using local bases," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 8, pp. 2293–2304, 1999.
- [14] H. Choi and W. Williams, "Improved time-frequency representation of multi-component signals using exponential kernels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 73, no. 6, pp. 862–871, 1989.
- [15] L. Stanković, "On the stft inversion redundancy," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 63, no. 3, pp. 284–288, 2016.
- [16] J. Shi, J. Zheng, X. Liu, W. Xiang, and Q. Zhang, "Novel short-time fractional fourier transform: Theory, implementation, and applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 3280–3295, 2020.
- [17] K. Jung, J. Woo, and S. Mukhopadhyay, "On-chip acceleration of rf signal modulation classification with short-time fourier transform and convolutional neural network," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 144 051–144 063, 2023.
- [18] L. Stanković, S. Stanković, and M. Daković, "From the stft to the wigner distribution," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 3, pp. 163–174, May 2014.
- [19] G. Huang, F. Zhang, and R. Tao, "Sliding short-time fractional fourier transform," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 29, pp. 1823–1827, 2022.
- [20] P. Zuo, D. Ma, and Y. Chen, "Short-time fourier transform based on stimulated brillouin scattering," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 40, no. 15, pp. 5052–5061, Aug. 2022.

- [21] T. Bendory, D. Edidin, and Y. C. Eldar, “Blind phaseless short-time fourier transform recovery,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 66, no. 5, pp. 3232–3241, May 2020.
- [22] J.-B. Martens, “The hermite transform-theory,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 9, pp. 1595–1606, 1990.
- [23] S. Stanković, I. Orović, and A. Krylov, “The two-dimensional hermite s-method for high resolution inverse synthetic aperture radar imaging applications,” *IET Signal Processing*, vol. 4, no. 4, pp. 352–362, Jan. 2010.
- [24] S. Stanković, I. Orović, and E. Sejdić, *Multimedia Signals and Systems: Basic and Advance Algorithms for Signal Processing*. New York: Springer-Verlag, 2015.
- [25] A. Krylov and D. Korchagin, “Fast hermite projection method,” in *Image Analysis and Recognition*, A. Campilho and M. S. Kamel, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, pp. 329–338.
- [26] S. Stankovic, L. Stankovic, and I. Orovic, “Compressive sensing approach in the hermite transform domain,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, pp. 1–9, 2015.
- [27] B. Escalante-Ramírez, “The hermite transform as an efficient model for local image analysis: An application to medical image fusion,” *Computers & Electrical Engineering*, vol. 34, no. 2, pp. 99–110, Mar. 2008.
- [28] M. Brajovic, I. Orovic, M. Dakovic, and S. Stankovic, “Compressive sensing of sparse signals in the hermite transform basis,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 54, no. 2, pp. 950–967, 2018.
- [29] M. Brajović, I. Orović, M. Beko, and S. Stanković, “Parameter optimization of orthogonal discrete hermite transform formed using eigenvectors of a symmetric tridiagonal matrix,” *Digital Signal Processing*, vol. 117, p. 103140, Oct. 2021.
- [30] R. G. Baraniuk and P. Steeghs, “Compressive sensing: A new approach to seismic data acquisition,” *The Leading Edge*, vol. 36, no. 8, Aug. 2017.
- [31] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge University Press, May 2012.

- [32] D. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [33] E. J. Candès and M. B. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 21–30, 2008.
- [34] I. Ahmed, A. Khalil, I. Ahmed, and J. Frnda, “Sparse signal representation, sampling, and recovery in compressive sensing frameworks,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 85 002–85 018, 2022.
- [35] J. Romberg, “Imaging via compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 14, 20, Mar. 2008.
- [36] M. Rani, S. B. Dhok, and R. B. Deshmukh, “A systematic review of compressive sensing: Concepts, implementations and applications,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 4875–4894, 2018.
- [37] M. Angshul, *Compressed Sensing for Engineers*, 1st ed. CRC Press, 2018.
- [38] L. Stanković, I. Orović, S. Stanković, and M. Amin, “Compressive sensing based separation of non-stationary and stationary signals overlapping in time-frequency,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 18, pp. 4562–4572, Sep. 2013.
- [39] L. Liu, W. Wang, and M. Guo, “Performance analysis for doa estimation using compressive measurements with coprime frequencies,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 21, no. 6, pp. 8297–8309, 2021.
- [40] L. Stanković, E. Sejdić, S. Stanković, M. Daković, and I. Orović, “A tutorial on sparse signal reconstruction and its applications in signal processing,” *Circuits, Systems & Signal Processing*, vol. 38, pp. 1206–1263, 2019.
- [41] I. Stanković, M. Daković, and C. Ioana, “Decomposition and analysis of signals sparse in the dual polynomial fourier transform,” *Microprocessors and Microsystems*, vol. 63, pp. 209–215, Nov. 2018.
- [42] H. Gan, M. Shen, Y. Hua, C. Ma, and T. Zhang, “From patch to pixel: A transformer-based hierarchical framework for compressive image sensing,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 9, pp. 133–146, 2023.
- [43] S. Zhang, Y. Liu, and X. Li, “Fast sparse aperture isar autofocusing and imaging via admn based sparse bayesian learning,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 29, pp. 3213–3226, 2020.

- [44] A. Draganić, I. Orović, S. Stanković, N. Lekić, and M. Beko, “Hardware architectures for some sparse signal recovery approaches,” in *Cognitive Sensing Technologies and Applications*, G. R. Sinha, B. Subudhi, C.-P. Fan, and H. Nisar, Eds. IET, Sep. 2023.
- [45] G. Pope, “Compressive sensing: a summary of reconstruction algorithms,” <http://ecollection.library.ethz.ch/eserv/eth:41464/eth-41464-01.pdf>, 2008.
- [46] L. Stanković, M. Brajović, I. Stanković, C. Ioana, and M. Daković, “Reconstruction error in nonuniformly sampled approximately sparse signals,” *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 18, Jan. 2020.
- [47] R. Manchanda and K. Sharma, “A review of reconstruction algorithms in compressive sensing,” in *2020 International Conference on Advances in Computing, Communication & Materials (ICACCM)*, Dehradun, India, 2020, pp. 322–325.
- [48] I. Orović, V. Papić, C. Ioana, X. Li, and S. Stanković, “Compressive sensing in signal processing: Algorithms and transform domain formulations,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016.
- [49] A. Draganić, I. Orović, and S. Stanković, “Compressive sensing least square problem solution suitable for implementation,” in *2015 23rd Telecommunications Forum Telfor (TELFOR)*, Belgrade, Serbia, 2015, pp. 376–379.
- [50] L. Stanković, M. Daković, and S. Vujović, “Adaptive variable step algorithm for missing samples recovery in sparse signals,” *IET Signal Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 246–256, 2014.
- [51] I. Stanković, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, “Denoising of sparse images in impulsive disturbance environment,” *Multimedia Tools and Applications*, vol. 77, no. 5, pp. 5885–5905, 2018.
- [52] S. Peleg and B. Porat, “The cramer-rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 749–752, 1991.
- [53] M. Marnat, M. Pelissier, L. Ros, and O. Michel, “Cramér-rao bounds for spectral parametric estimation with compressive multiband architectures,” *Digital Signal Processing*, vol. 111, p. 102955, 2021.
- [54] M. Fauß, A. Dytso, and H. V. Poor, “A variational interpretation of the cramer-rao bound,” *Signal Processing*, vol. 182, p. 107917, 2021.

- [55] D. Belega and D. Petri, “Analysis of asymptotic and exact cramér-rao lower bounds on the parameters of a noisy periodic signals,” *Digital Signal Processing*, vol. 135, p. 103961, 2023.
- [56] B. Babadi, N. Kalouptsidis, and V. Tarokh, “Asymptotic achievability of the cramér-rao bound for noisy compressive sampling,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 3, pp. 1233–1236, 2009.
- [57] S. Shahsavari and P. Pal, “Cramér-rao bounds and resolution benefits of sparse arrays in measurement-dependent snr regimes,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 32, pp. 601–605, 2025.
- [58] R. Niazadeh, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, “On the achievability of cramér-rao bound in noisy compressed sensing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 1, pp. 518–526, 2012.
- [59] T. Huang, Y. Liu, H. Meng, and X. Wang, “Adaptive compressed sensing via minimizing cramér-rao bound,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 21, no. 3, pp. 270–274, 2014.
- [60] E. Dilaveroglu, “Nonmatrix cramér-rao bound expressions for high-resolution frequency estimators,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 2, pp. 463–474, 1998.
- [61] Z. Ben-Haim and Y. C. Eldar, “On the constrained cramér-rao bound with a singular fisher information matrix,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, no. 6, pp. 453–456, 2009.
- [62] P. Stoica and B. C. Ng, “On the cramér-rao bound under parametric constraints,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 7, pp. 177–179, 1998.
- [63] T. Wigren and A. Nehorai, “Asymptotic cramér-rao bounds for estimation of the parameters of damped sine waves in noise,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 4, pp. 1017–1020, 1991.
- [64] F. Xu, J. Duan, and W. Liu, “Comparative study of non-convex penalties and related algorithms in compressed sensing,” *Digital Signal Processing*, vol. 135, p. 103937, 2023.
- [65] L. Stanković, “On the sparsity bound for the existence of a unique solution in compressive sensing by the gershgorin theorem,” *Signal Processing*, vol. 190, p. 108316, 2022.

- [66] M. Brajović, S. Stanković, and I. Orović, “Analysis of noisy coefficients in the discrete hermite transform domain with application in signal denoising and sparse signal reconstruction,” *Signal Processing*, vol. 150, pp. 145–156, 2018.
- [67] D. Ramasamy, S. Venkateswaran, and U. Madhow, “Compressive parameter estimation in awgn,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 8, pp. 2012–2027, 2014.
- [68] J. K. Nielsen, M. G. Christensen, and S. H. Jensen, “On compressed sensing and the estimation of continuous parameters from noisy observations,” in *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2012, pp. 3609–3612.
- [69] S. Stankovic, I. Orovic, and L. Stankovic, “An automated signal reconstruction method based on analysis of compressive sensed signals in noisy environment,” *Signal Processing*, vol. 104, pp. 43–50, 2014.
- [70] L. Stankovic, S. Stankovic, I. Orovic, and M. Amin, “Robust time-frequency analysis based on the l-estimation and compressive sensing,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, pp. 499–502, 2013.
- [71] J. Lerga, N. Saulig, and V. Mozetić, “Algorithm based on the short-term rényi entropy and if estimation for noisy eeg signals analysis,” *Computers in Biology and Medicine*, vol. 80, pp. 1–13, 2017.
- [72] G. Leibon, D. N. Rockmore, W. Park, R. Taintor, and G. S. Chirikjian, “A fast hermite transform,” *Theoretical Computer Science*, vol. 409, no. 2, pp. 211–228, 2008, symbolic-Numerical Computations.
- [73] D. G. Márquez, A. Otero, C. A. García, and J. Presedo, “A study on the representation of qrs complexes with the optimum number of hermite functions,” *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 22, pp. 11–18, 2015.
- [74] H. Haraldsson, L. Edenbrandt, and M. Ohlsson, “Detecting acute myocardial infarction in the 12-lead ecg using hermite expansions and neural networks,” *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 32, no. 2, pp. 127–136, 2004.
- [75] P. Kovacs, C. Bock, T. Dozsa, J. Meier, and M. Huemer, “Waveform modeling by adaptive weighted hermite functions,” in *ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2019, pp. 1080–1084.



- [76] T. Dózsa, F. Deuschle, B. Cornelis, and P. Kovács, “Variable projection support vector machines and some applications using adaptive hermite expansions,” *International Journal of Neural Systems*, vol. 34, no. 01, p. 2450004, 2024.
- [77] T. Dózsa, J. Radó, J. Volk, A. Kisari, A. Soumelidis, and P. Kovács, “Road abnormality detection using piezoresistive force sensors and adaptive signal models,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 71, pp. 1–11, 2022.
- [78] P. Kovács, G. Bognár, C. Huber, and M. Huemer, “Vpnet: Variable projection networks,” *International Journal of Neural Systems*, vol. 32, no. 01, 2021.
- [79] T. Dózsa, C. Böck, J. Meier, and P. Kovács, “Weighted hermite variable projection networks for classifying visually evoked potentials,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, pp. 1–14, 2024.
- [80] H. Zayyani, M. Korki, and F. Marvasti, “Bayesian hypothesis testing detector for one bit diffusion lms with blind missing samples,” *Signal Processing*, vol. 146, pp. 61–65, 2018.
- [81] T. Ogunfunmi and M. Deb, “On the pdf estimation for information theoretic learning for neural networks,” in *2018 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*, Honolulu, HI, USA, 2018, pp. 1215–1221.
- [82] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, 1st ed. London, United Kingdom: Chapman & Hall, 1986.
- [83] M. Rosenblatt, “Remarks on some nonparametric estimates of a density function,” *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 27, no. 3, pp. 832–837, 1956.
- [84] C.-H. Park and J.-H. Chang, “Robust localization method based on non-parametric probability density estimation,” *IEEE Access*, vol. 11, pp. 61 468–61 480, Jun. 2023.
- [85] A. R. Londhe, “Nonparametric density estimation using kernels with variable size windows,” Ph.D. dissertation, Iowa State University, Ames, Iowa, 1980.
- [86] Z. R. Yang, *Machine Learning Approaches to Bioinformatics*, 1st ed. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2010.
- [87] W. L. Martinez and A. R. Martinez, *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, 3rd ed. Chapman & Hall/CRC, Sep. 2021.

- [88] E. Parzen, “On estimation of a probability density function and modes,” *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1065–1076, 1962.
- [89] M. Rouhani, M. Mohammadi, and A. Kargarian, “Parzen window density estimator-based probabilistic power flow with correlated uncertainties,” *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 7, no. 3, pp. 1170–1181, Jul. 2016.
- [90] G. Gao, “A parzen-window-kernel-based cfar algorithm for ship detection in sar images,” *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 8, no. 3, pp. 557–561, May 2011.
- [91] X. Lei, S. Yang, and L. Zhou, “Extensions of local-mean k-nearest neighbor classifier with various distance metrics,” in *2023 IEEE 5th International Conference on Power, Intelligent Computing and Systems (ICPICS)*, Shenyang, China, 2023, pp. 902–908.
- [92] N. Nedjah, R. M. da Silva, and L. de Macedo Mourelle, “Analog hardware implementations of artificial neural networks,” *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol. 20, no. 3, pp. 349–373, 2011.
- [93] I. Orović, N. Lekić, and S. Stanković, “An analogue-digital hardware for l-estimate space-varying image filtering,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 35, no. 2, pp. 409–420, Feb. 2016.
- [94] S. Spanò, G. C. Cardarilli, L. D. Nunzio, R. Fazzolari, D. Giardino, M. Matta, A. Nannarelli, and M. Re, “An efficient hardware implementation of reinforcement learning: The q-learning algorithm,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 186 340–186 351, Dec. 2019.
- [95] I. Orović, N. Lekić, M. Beko, and S. Stanković, “An analog hardware solution for compressive sensing reconstruction using gradient-based method,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2019, no. 61, Dec. 2019.
- [96] N. Lekić, M. L. Žarić, I. Orović, and S. Stanković, “Adaptive gradient-based analog hardware architecture for 2d under-sampled signals reconstruction,” *Microprocessors and Microsystems*, vol. 62, pp. 72–78, Oct. 2018.
- [97] P. Dhilleswararao, S. Boppu, M. S. Manikandan, and L. R. Cenkeramaddi, “Efficient hardware architectures for accelerating deep neural networks: Survey,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 131 788–131 828, Dec. 2022.

- [98] K. E. Batchner, "Sorting networks and their applications," in *AFIPS Spring Joint Computing Conference*. Washington D.C.: Thomson Book Company, Apr. 1968, pp. 307–314.
- [99] N. Žarić, S. Stanković, and Z. Uskoković, "Hardware realization of the robust time–frequency distributions," *Annales des Télécommunications*, vol. 69, no. 5–6, pp. 309–320, Jun. 2014.
- [100] D. Stanković, A. Draganić, N. Lekić, C. Ioana, and I. Orović, "An analog-digital hardware for parzen-based nonparametric probability density estimation," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 116 226–116 237, 2024.
- [101] —, "An architecture for parzen-based multivariate probability density estimation," in *2024 32nd Telecommunications Forum (TELFOR)*, 2024, pp. 1–4.
- [102] Z. Zhang, Y. Xu, J. Yang, X. Li, and D. Zhang, "A survey of sparse representation: Algorithms and applications," *IEEE Access*, vol. 3, pp. 490–530, 2015.
- [103] B. Yang and S. Li, "Multifocus image fusion and restoration with sparse representation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 4, pp. 884–892, 2010.
- [104] Eleyan, K. Kose, and A. E. Cetin, "Image feature extraction using compressive sensing," in *Image Processing and Communications Challenges 5*, R. S. Choras, Ed. Heidelberg: Springer International Publishing, 2014, pp. 177–184.
- [105] P. J. Huber and E. M. Ronchetti, *Robust Statistics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2009.
- [106] M. Brajovic, M. Dakovic, I. Orovic, and S. Stankovic, "Gradient-based signal reconstruction algorithm in hermite transform domain," *Electronics Letters*, vol. 52, 2015.
- [107] L. Stankovic and M. Dakovic, "On a gradient-based algorithm for sparse signal reconstruction in the signal/measurements domain," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016, pp. 1–11, 2016.
- [108] D. Stanković, C. Ioana, and I. Orović, "Extraction of patterns from images using a model of combined frequency localization spaces," *Signal Processing*, vol. 230, p. 109810, 2025.

- [109] J. C. Yang and W.-H. Tsai, “Suppression of moiré patterns in scanned halftone images,” *Signal Processing*, vol. 70, no. 1, pp. 23–42, 1998.
- [110] Z. Wei, J. Wang, H. Nichol, S. Wiebe, and D. Chapman, “A median-gaussian filtering framework for moiré pattern noise removal from x-ray microscopy image,” *Micron*, vol. 43, no. 2, pp. 170–176, 2012.
- [111] W. Qi, X. Yu, X. Li, and S. Kang, “A moiré removal method based on peak filtering and image enhancement,” *Mathematics*, vol. 12, p. 846, 2024.
- [112] Y. Sun, Y. Yu, and W. Wang, “Moiré photo restoration using multiresolution convolutional neural networks,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 27, no. 8, pp. 4160–4172, 2018.
- [113] H. Park, A. G. Vien, H. Kim, Y. J. Koh, and C. Lee, “Unpaired screen-shot image demoiréing with cyclic moiré learning,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 16 254–16 268, 2022.
- [114] C. Liu, Y. Wang, N. Zhang, R. Gang, and S. Ma, “Learning moiré pattern elimination in both frequency and spatial domains for image demoiréing,” *Sensors*, vol. 22, no. 21, 2022.
- [115] H. Yue, Y. Cheng, F. Liu, and J. Yang, “Unsupervised moiré pattern removal for recaptured screen images,” *Neurocomputing*, vol. 456, pp. 352–363, 2021.
- [116] D. H. Nguyen, S.-H. Lee, and C. Lee, “Multiscale coarse-to-fine guided screenshot demoiréing,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 30, pp. 898–902, 2023.
- [117] Y. Xu, Z. Wei, R. Xu, Z. Zhou, and Z. Yu, “Spatial adaptive filter network with scale-sharing convolution for image demoiréing,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 31, pp. 2495–2499, 2024.
- [118] S. Hou, Y. Wang, K. Li, Y. Zhao, B. Lu, and L. Fan, “Deep learning for screen-shot image demoiréing: A survey,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 108 453–108 468, 2022.
- [119] Y.-T. Peng, C.-H. Hou, Y.-C. Lee, A. Yoon, Z. Chen, Y.-T. Lin, and W.-C. Lien, “Image demoiréing via multiscale fusion networks with moiré data augmentation,” *IEEE Sensors Journal*, vol. PP, p. 1, 2024.
- [120] Y. Meng and J. Zhang, “A novel gray image denoising method using convolutional neural network,” *IEEE Access*, 2022.

- [121] Z. Lyu, Y. Chen, H. Sun, and Y. Hou, “A dual fusion deep convolutional network for blind universal image denoising,” *Signal Processing: Image Communication*, 2024.
- [122] H. Liu *et al.*, “Polarimetric image denoising via non-local based cube matching convolutional neural network,” *Optics and Lasers in Engineering*, 2025.
- [123] S. G. Bahnemiri, M. Ponomarenko, and K. Egiazarian, “Learning-based noise component map estimation for image denoising,” *IEEE Signal Processing Letters*, 2022.
- [124] H. Zhu and M. K. Ng, “Structured dictionary learning for image denoising under mixed gaussian and impulse noise,” *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020.
- [125] Y. Song, Y. Zhu, and X. Du, “Grouped multi-scale network for real-world image denoising,” *IEEE Signal Processing Letters*, 2020.
- [126] T. Zin, S. Seta, Y. Nakahara, T. Yamaguchi, and M. Ikehara, “Local image denoising using raisr,” *IEEE Access*, 2022.
- [127] Z. Sheng, X. Liu, S.-Y. Cao, H.-L. Shen, and H. Zhang, “Frequency-domain deep guided image denoising,” *IEEE Transactions on Multimedia*, 2023.
- [128] Y. Liu, S. Xu, and Z. Lin, “An improved combination of image denoisers using spatial local fusion strategy,” *IEEE Access*, 2020.
- [129] G. Wang, W. Li, J. Du, B. Xiao, and X. Gao, “Medical image fusion and denoising algorithm based on a decomposition model of hybrid variation-sparse representation,” *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2022.
- [130] K. S. Srinivasan and D. Ebenezer, “A new fast and efficient decision-based algorithm for removal of high-density impulse noises,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 3, pp. 189–192, 2007.
- [131] D. Guo, X. Qu, X. Du, K. Wu, and X. Chen, “Salt and pepper noise removal with noise detection and a patch-based sparse representation,” *Advances in Multimedia*, vol. 2014, pp. 1–14, 2014.
- [132] S. Stanković, I. Orović, N. Žarić, and C. Ioana, “Two dimensional time-frequency analysis based eigenvalue decomposition applied to image watermarking,” *Multimedia Tools and Applications*, vol. 49, no. 3, pp. 529–543, 2010.

- [133] V. Lukin, O. Rusen, N. Ponomarenko, and K. Egiazarian, “Image filtering based on discrete cosine transform,” *Telecommunications and Radio Engineering*, vol. 66, pp. 1685–1701, 2007.
- [134] N. Nikolay, V. Lukin, A. Zelensky, J. Astola, and K. Egiazarian, “Adaptive dct-based filtering of images corrupted by spatially correlated noise,” in *Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng.*, vol. 6812, 2008, p. 68120.
- [135] L. Jia, S. Song, L. Yao, H. Li, Q. Zhang, Y. Bai, and Z. Gui, “Image denoising via sparse representation over grouped dictionaries with adaptive atom size,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 22 514–22 529, 2017.
- [136] D. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, and I. Orović, “Adaptive compressive sensing image recovery using block-variance-based sampling,” in *The 32nd International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM)*, Split, Sep. 2024.
- [137] B. Escalante-Ramirez and A. Lopez-Caloca, “Image fusion with the hermite transform,” in *Proc. 2003 Int. Conf. Image Processing (Cat. No.03CH37429)*, Barcelona, Spain, 2003, pp. II–145.
- [138] G. Xu, C. He, H. Wang, H. Zhu, and W. Ding, “Dm-fusion: Deep model-driven network for heterogeneous image fusion,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024.
- [139] K. Amolins, Y. Zhang, and P. Dare, “Wavelet based image fusion techniques — an introduction, review and comparison,” *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2007.
- [140] A. Anand and A. K. Singh, “Health record security through multiple watermarking on fused medical images,” *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2022.
- [141] X. Bi *et al.*, “Engine working state recognition based on optimized variational mode decomposition and expectation maximization algorithm,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 33 545–33 559, 2020.
- [142] C. Huang, J. Xu, W. Zhang, W. Xu, and D. W. K. Ng, “Semi-blind channel estimation for ris-assisted miso systems using expectation maximization,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 71, no. 9, pp. 10 173–10 178, 2022.

- [143] L. Yan, M. Jahangir, M. Antoniou, C. Hao, C. Clemente, and D. Orlando, “Applications for the em-based classifier in radar sensor network,” *IEEE Sensors Letters*, vol. 9, no. 3, pp. 1–4, 2025.
- [144] Y. Iwasaki, Y. Sasaki, T. Nagata, S. Kaneko, and T. Nonomura, “Dynamic mode decomposition based on expectation–maximization algorithm for simultaneous system identification and denoising,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 223, p. 111864, 2025.
- [145] G. Guo, Q. Wang, J. Allison, and G. Qian, “Accelerated distributed expectation-maximization algorithms for the parameter estimation in multivariate gaussian mixture models,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 137, no. Part B, p. 115709, 2025.
- [146] S. Stanković, I. Orović, and A. Krylov, “Video frames reconstruction based on time-frequency analysis and hermite projection method,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010, special Issue on Time-Frequency Analysis and its Application to Multimedia Signals.
- [147] I. Orović, S. Stanković, T. Chau, C. M. Steele, and E. Sejdić, “Time-frequency analysis and hermite projection method applied to swallowing accelerometry signals,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010.
- [148] S. Stanković, “About time-variant filtering of speech signals with time-frequency distributions for hands-free telephone systems,” *Signal Processing*, 2000.
- [149] W. Xue, L. Zhang, X. Mou, and A. C. Bovik, “Gradient magnitude similarity deviation: A highly efficient perceptual image quality index,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 23, no. 2, pp. 684–695, Feb. 2014.
- [150] D. Krotov and J. J. Hopfield, “Dense associative memory for pattern recognition,” in *Neural Information Processing*, 2016.
- [151] M. Yaswanth, N. I. Raj, and M. K. Nath, “Hopfield neural network for classification of digits,” in *2022 IEEE 9th UPCON*, Prayagraj, India, 2022, pp. 1–6.
- [152] H. Ramsauer, B. Schaff, J. Lehner, P. Seidl, M. Widrich, L. Gruber, M. Holzleitner, M. Pavlović, G. K. Sandve, V. Greiff, D. P. Kreil, M. Kopp, G. Klambauer, J. Brandstetter, and S. Hochreiter, “Hopfield networks is all you need,” *arXiv preprint*, vol. abs/2008.02217, 2020.

- [153] X. Ma, L. Zhong, and X. Chen, “Application of hopfield neural network algorithm in mathematical modeling,” in *2023 IEEE 12th CSNT*, Bhopal, India, 2023, pp. 591–595.
- [154] J. A. Hertz, A. S. Krogh, and R. G. Palmer, *Introduction To The Theory Of Neural Computation*. CRC Press, 1991.
- [155] B. Mehlig, *Machine Learning with Neural Networks: An Introduction for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press, 2021.
- [156] R. Rojas, *Neural Networks: A Systematic Introduction*. Springer Berlin, Heidelberg, 1996.
- [157] S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd ed. Pearson Education, 2008.
- [158] K. Rajagopal, J. M. Munoz-Pacheco, V. T. Pham, D. V. Hoang, and F. E. Alsaadi, “A hopfield neural network with multiple attractors and its fpga design,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 227, pp. 811–820, 2018.
- [159] D. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, and I. Orović, “Enhancing hopfield network performance for pattern retrieval using sparse recovery algorithm and parzen estimator,” *Digital Signal Processing*, vol. 156, 2025.
- [160] P. Duda, L. Rutkowski, M. Jaworski, and D. Rutkowska, “On the parzen kernel-based probability density function learning procedures over time-varying streaming data with applications to pattern classification,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 4, pp. 1683–1696, 2020.
- [161] D. Erdogmus, K. E. Hild, J. C. Principe, M. Lazaro, and I. Santamaria, “Adaptive blind deconvolution of linear channels using renyi’s entropy with parzen window estimation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 6, pp. 1489–1498, 2004.
- [162] N. M. Rezk, M. Purnaprajna, T. Nordström, and Z. Ul-Abdin, “Recurrent neural networks: An embedded computing perspective,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 57 967–57 996, 2020.



# Lista objavljenih naučnih radova

## Radovi u časopisima

- [1] Dj. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, I. Orović, and I. Orović, “Enhancing Hopfield Network Performance for Pattern Retrieval Using Sparse Recovery Algorithm and Parzen Estimator,” *Digital Signal Processing*, Vol. 156, Part A, 2025, 104814.
- [2] Dj. Stanković, A. Draganić, N. Lekić, C. Ioana, and I. Orović, “An Analog-Digital Hardware for Parzen-Based Nonparametric Probability Density Estimation,” *IEEE Access*, Vol. 12, 2024, pp. 116226–116237.
- [3] Dj. Stanković, C. Ioana, and I. Orović, “Extraction of patterns from images using a model of combined frequency localization spaces,” *Signal Processing*, Vol. 230, 2025, 109810.
- [4] Dj. Stanković and I. Orović, “The Cramer-Rao Bound for Missing Samples Scenario in Hermite Transform Domain,” *Digital Signal Processing*, vol. 167, p. 105418, 2025, doi: 10.1016/j.dsp.2025.105418.

## Radovi sa konferencija

- [1] A. Draganić, Dj. Stanković, C. Ioana, and I. Orović, “Adaptive compressive sensing for reconstruction and denoising with sparsity-measure-driven sampling,” *31st IEEE International Conference on Telecommunications (ICT 2025)*, Budva, Montenegro, April 2025.
- [2] Dj. Stanković, A. Draganić, and I. Orović, “On optimal forms of the Hermite transform,” *ICT 2025*, Budva, Montenegro, April 2025.
- [3] A. Draganić, Dj. Stanković, C. Ioana, and I. Orović, “An approach to Wavelet-Hermite image representation,” *32nd Telecommunications Forum (TELFOR)*

2024), Belgrade, Serbia, November 2024.

- [4] Dj. Stanković, A. Draganić, N. Lekić, C. Ioana, and I. Orović, “An architecture for Parzen-based multivariate probability density estimation,” *TELFOR 2024*, Belgrade, Serbia, November 2024.
- [5] A. Draganić, Dj. Stanković, N. Lekić, C. Ioana, and I. Orović, “A Digital Watermark Architecture for Image Authentication Based on Hermite Transform,” *SoftCOM 2024*, Split, Croatia, September 2024.
- [6] Dj. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, and I. Orović, “An Image Watermarking based on Rayleigh distribution detector,” *66th International Symposium ELMAR 2024*, Zadar, Croatia, September 2024.
- [7] Dj. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, and I. Orović, “Adaptive Compressive Sensing Image Recovery Using Block-Variance-Based Sampling,” *SoftCOM 2024*, Split, Croatia, September 2024.
- [8] Dj. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, and I. Orović, “A hybrid approach for image denoising based on smoothing in the Hermite transform domain,” *6th International Conference on Applications of Intelligent Systems (APPIS 2024)*, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, January 2024.

## BIOGRAFIJA

Dorđe Stanković je rođen 13.09.1997. u Podgorici. Akademske 2016/17 godine upisao je Elektrotehnički fakultet na Univerzitetu Crne Gore. Tokom treće godine studija, u okviru razmjene programa Erasmus+, studirao je na fakultetu Elektrotehnike, Brodogradnje i Strojарstva na Univerzitetu u Splitu. Osnovne studije je završio 2019. godine.

Postdiplomske studije je upisao 2019. godine na odsjeku za matematiku, fakultet za inženjerstvo, Univerzitet Buenos Aires. Studirao je na studijskom programu inženjerske matematike sa fokusom na matematiku, teoriju vjerovatnoće, obradu signala i mašinsko učenje. Sve ispite na postdiplomskim studijama, kao i tezu je završio 2021. godine, dok je odbrana magistarskog rada organizovana 2022. godine. Srednja ocjena tokom magistarskih studija je 9.5 (od 10). Prelazne ocjene na Univerzitetu Buenos Aires su od 4 do 10, te da je ocjena 9 „odličan“, a 10 „izvanredan“. Naziv magistarskog rada je „La cota de Cramer-Rao y su aplicación en muestreo compresivo“ (Granica Kramer-Rao primjenjena na signale sa nedostajućim odbircima) i pisana je na španskom. Treba napomenuti da je Univerzitet Buenos Aires jedan od vodećih svjetskih univerziteta i na osnovu QS rangiranja je u to vrijeme bio najbolji univerzitet na španskom govornom području. Na Univerzitetu Buenos Aires su bila školovana četiri dobitnika Nobelove nagrade.

Doktorske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici upisao je akademske 2022/23. godine i položio sve ispite sa prosječnom ocjenom A. Pored navedenog, na nivou specijalističkih studija i kroz ljetnje škole, dodatno je položio četiri ispita u obimu od 24 ECTS kredita. Tokom rada na doktorskoj disertaciji, intenzivno se bavio naučno-istraživačkim radom, te kao rezultat toga objavio četiri rada u vodećim časopisima sa SCI liste i prezentovao osam radova na međunarodnim konferencijama. Naime, značajan dio 2022/23 godine proveo je na Univerzitetu u Minesoti i na Univerzitetu u Gentu, Belgija. Na Univerzitetu u Grenoblu takođe je na doktorskim studijama.

Dorđe Stanković tečno govori i piše engleski i španski (položio je TOEFL i dva razreda završio u američkim školama, a studije u Buenos Airesu je završio na španskom). Takođe na nivou B2 govori francuski, portugalski i italijanski. Posjeduje odlično poznavanje programskih jezika Matlab, Python, VHDL, C, C++, Java.

## IZJAVA O AUTORSTVU

Potpisani/a: Đorđe Stanković

Broj indeksa: 4/22

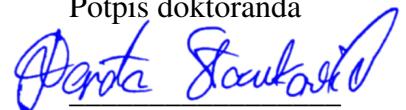
### Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom:

**Estimacija i klasifikacija jednodimenzionih i dvodimenzionih signala korišćenjem kombinovanih transformacionih domena i neuralnih mreža**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja;
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nisam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

Potpis doktoranda



U Podgorici, jun 2025.

# IZJAVA O ISTOVJETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE VERZIJE DOKTORSKOG RADA

Ime i prezime autora: Đorđe Stanković

Broj indeksa/upisa: 4/22

Studijski program: Računari

Naslov rada: **Estimacija i klasifikacija jednodimenzionih i dvodimenzionih signala korišćenjem kombinovanih transformacionih domena i neuralnih mreža**

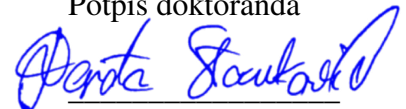
Mentor: Prof. dr Irena Orović

Potpisani: Đorđe Stanković

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja doktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada.

Potpis doktoranda



U Podgorici, jun 2025.

## IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

**Estimacija i klasifikacija jednodimenzionih i dvodimenzionih signala korišćenjem kombinovanih transformacionih domena i neuralnih mreža**

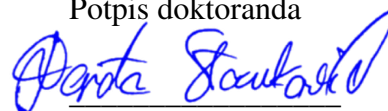
koja je moje autorsko djelo.

Disertaciju sa svim prilogima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda



U Podgorici, jun 2025.

1. **Autorstvo.** Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

2. **Autorstvo – nekomercijalno.** Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade.** Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu. Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

4. **Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima.** Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom. Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.

5. **Autorstvo – bez prerade.** Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu. Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

6. **Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima.** Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.