

**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**

mr Nevena Radović

**SIGNAL-ADAPTIVNI SISTEMI ZA OPTIMALNO FILTRIRANJE
VISOKO NESTACIONARNIH VIŠEDIMENZIONALNIH SIGNALA**

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Podgorica, 2014. godine

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANDU

Ime i Prezime	Nevena Radović
Datum i mjesto rođenja	16.01.1984. godine, Podgorica
Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka	Elektrotehnički fakultet, studijski program: Elektronika, telekomunikacije i računari, smjer Računari, magistarska teza odbranjena 28.12.2007.

INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija	Doktorske studije elektrotehnike
Naziv disertacije	Signal-adaptivni sistemi za optimalno filtriranje visoko nestacionarnih višedimenzionalnih signala
Fakultet na kojem je disertacija odbranjena	Elektrotehnički fakultet, Podgorica

UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave doktorske disertacije	11.11.2010.
Datum sjednice Senata Univerziteta Crne Gore na kojoj je prihvaćena disertacija	23.12.2010.
Komisija za ocjenu teme i podobnosti doktoranda	Prof. dr Igor Đurović Prof. dr Veselin Ivanović Prof. dr Radovan Stojanović
Mentor	Prof. dr Veselin Ivanović
Komisija za ocjenu doktorske disertacije	Prof. dr Ljubiša Stanković Prof. dr Veselin Ivanović Prof. dr Miodrag Popović
Komisija za odbranu doktorske disertacije	Prof. dr Ljubiša Stanković Prof. dr Veselin Ivanović Prof. dr Miodrag Popović Prof. dr Igor Đurović Prof. dr Radovan Stojanović
Datum odbrane:	22.08.2014.
Datum promocije:	<hr/>

REZIME

U disertaciji je predložena signal-adaptivna, višetaktna hardverska implementacija novog, optimalnog (Wiener-ovog) filtra za estimaciju visoko nestacionarnih dvodimenzionalnih FM signala. Implementirani filter koristi rezultate prostorno-frekvencijske analize dvodimenzionalnih nestacionarnih signala u realnom vremenu. Bazira se na korespondenciji funkcije oslonca razvijenog filtra i lokalne frekvencije filtriranog dvodimenzionalnog signala. Lokalna frekvencija filtriranog dvodimenzionalnog signala se estimira upotrebom metoda prostorno-frekvencijske analize. Razvijeni sistem dozvoljava estimaciju većeg broja lokalnih frekvencija u jednoj tački dvodimenzionalnog signala, obezbjeđujući na taj način ravnopravan rad sa monokomponentnim i multikomponentnim signalima. Višetaktna implementacija omogućava predloženom dizajnu da minimizuje dužinu takta, kao i da optimizuje kritične performanse koje se vezuju za hardversku kompleksnost. Na taj način razvijeni sistem postaje pogodan za implementaciju na čipu i za rad u realnom vremenu. Takođe, dizajn uzima različit (signal-adaptivan) broj taktova u različitim prostorno-frekvencijskim tačkama tokom izvršavanja. Ovim se optimizuje vrijeme izvršavanja i prevazilazi glavni nedostatak višetaktnih implementacija u odnosu na odgovarajuće jednotaktne implementacije, ali takođe i obezbjeđuje najkvalitetnija moguća estimacija lokalne frekvencije, visoka prostorno-frekvencijska rezolucija i veoma efikasno filtriranje nestacionarnih dvodimenzionalnih FM signala. Shodno tome, razvijeni sistem se kvalifikuje za optimalno rješenje u mnogim praktičnim primjenama. Implementacija je verifikovana dizajnom u *field-programmable gate array* (FPGA) tehnologiji.

ABSTRACT

Signal adaptive, multiple-clock-cycle hardware implementation of a novel, optimal (Wiener) filter for highly nonstationary two-dimensional FM signals estimation has been proposed in this work. The implemented filter uses results of the space/spatial-frequency analysis in real-time processing of two-dimensional nonstationary signals. It is based on the correspondence of the region of support of the developed filter to the local frequency of the filtered two-dimensional signal and on the space/spatial-frequency analysis-based local frequency estimation. The developed system permits multiple local frequency estimation in a two-dimensional signal point, enabling filtering of monocomponent and multicomponent signals. The multiple-clock-cycle approach helps the proposed design to minimize clock cycle time and to optimize critical design performances related to the hardware complexity, making it a suitable system for real-time and on-a-chip implementation. However, the design also takes variable (signal adaptive) number of clock cycles in different space/spatial-frequency points during the execution. In this way, it optimizes the execution time, removing the main drawback of the classical multiple-clock-cycle approaches in comparison to the single-clock-cycle ones, but also provides the highest quality local frequency estimation, high space/spatial-frequency resolution, and, consequently, a very efficient filtering of nonstationary two-dimensional FM signals, qualifying itself as an optimal solution in many practical applications. The implementation has been verified by a field-programmable gate array (FPGA) circuit design capable to perform filtering of nonstationary multicomponent two-dimensional FM signals.

SADRŽAJ

Uvod	1
1 Koncepti vremensko-frekvencijske i prostorno-frekvencijske analize signala.....	6
1.1 Kratkotrajna Fourier-ova transformacija	8
1.1.1 1D STFT	9
1.1.2 Višedimenzionalna STFT	15
1.2 Wigner-ova distribucija.....	16
1.2.1 1D WD.....	16
1.2.2 1D Weyl-ov simbol.....	19
1.2.3 Višedimenzionalna WD.....	20
1.2.4 Višedimenzionalni Weyl-ov simbol	23
1.3 S-metod	23
1.3.1 1D SM.....	24
1.3.2 Višedimenzionalni SM	28
1.4 Wigner-ova distribucija oslobođena prisustva kros-članova	29
1.4.1 1D CTFWD (1D signal zavisni SM)	29
1.4.2 2D CTFWD	31
1.5 Poređenje računske kompleksnosti konvencionalnih i unaprijeđenih združenih reprezentacija nestacionarnih signala	36
1.6 Pristup izboru optimalne S/SFD-je za potrebe analize i procesiranja 2D signala	38
2 Nestacionarno filtriranje bazirano na vremensko-frekvencijskoj analizi.....	40
2.1 Linearni TV filtri.....	41
2.1.1 Zadeh-ov filter	43
2.1.2 Weyl-ov filter.....	44
2.1.2.1. <i>Minimum energy</i> Weyl-ov filter	47
2.1.2.2. Ulazni <i>halfband</i> Weyl-ov filter	49
2.1.2.3. Izlazni <i>halfband</i> Weyl-ov filter	50
2.1.2.4. <i>Halfband</i> Weyl-ov filter	50

2.1.2.5. Aproksimativni <i>halfband</i> Weyl-ov filtar	52
2.1.3 STFT filtar	55
2.1.4 <i>Multiwindow</i> STFT filtar	56
2.1.5 Gabor-ov filtar	57
2.1.6 <i>Multiwindow</i> Gabor-ov filtar	59
2.1.7 TF projekcioni filtar	60
2.1.8 Poređenje linearnih TV filtara	62
2.2 Nelinearni TV filtri	63
2.2.1 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu više TF distribucija, [128]	70
2.2.2 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [137]	73
2.2.3 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i SM-u, [90]	74
2.2.4 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i CTFWD-je, [95]	76
2.2.5 Poređenje nelinearnih TV filtara	79
3 Nestacionarno filtriranje bazirano na prostorno-frekvencijskoj analizi	81
3.1 2D linearni S/SF filtri	82
3.1.1 Opšti princip neodređenosti za 2D linearne S/SF filtre	83
3.1.2 2D Gabor-ovi filtri	85
3.1.2.1. Analiza 2D Gabor-og filtra u 2D prostornom domenu	88
3.1.2.2. Analiza 2D Gabor-og filtra u 2D frekvencijskom domenu	90
3.2 2D nelinearni S/SF filtri	92
3.2.1 2D filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu izračuna biasa i varijanse, [130] ..	98
3.2.2 2D filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu detekcije lokalne frekvencije, [93]	105
4 Hardverska realizacija filtara baziranih na vremensko-frekvencijskoj analizi	118
4.1 <i>Online</i> algoritmi linearnih TV filtara	120
4.1.1 Zadeh-ov filtar	120
4.1.2 Weyl-ovi filtri (<i>Minimum energy</i> Weyl-ov fitar, ulazni i izlazni <i>halfband</i> Weyl-ov filtar, <i>halfband</i> Weyl-ov filtar i aproksimativni Weyl-ov filtar)	121
4.1.3 STFT filtar	124
4.1.4 <i>Multiwindow</i> STFT filtar	126
4.1.5 Gabor-ov filtar	126
4.1.6 <i>Multiwindow</i> Gabor-ov filtar	130
4.1.7 TF projekcioni filtar	130
4.1.8 Poređenje <i>online</i> algoritama linearnih TV filtara	136
4.2 Hardverska realizacija nelinearnih TV filtara	137
4.2.1 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu više TF distribucija, [128]	137
4.2.2 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [137]	137
4.2.3 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i SM-a, [90]	143
4.2.4 TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i CTFWD-je, [95]	146
4.2.5 Poređenje hardverskih realizacija nelinearnih TV filtara	150

5	Hardverska implementacija prostorno-promjenljivog filtra baziranog na algoritmu za estimaciju lokalne frekvencije u realnom vremenu	152
5.1	Analiza postojećih hardverskih rješenja	152
5.2	Razvijeno i realizovano hardversko rješenje signal-adaptivnog sistema za filtriranje visoko nestacionarnih 2D FM signala	155
5.2.1	Ulazna memorija.....	155
5.2.2	Konvolucioni prozori.....	158
5.2.3	STFT-to-CTFWD gateway	160
5.2.4	Modul za detekciju funkcije oslonca filtra	161
5.2.5	Izlazni modul	163
5.2.6	Princip rada razvijenog dizajna.....	164
5.2.7	Testiranje i verifikacija rada razvijenog dizajna.....	169
5.2.8	Poređenje sa ostalim mogućim prostorno-promjenljivim dizajnima baziranim na estimaciji LF-je	174
	Zaključak.....	178
	Literatura	180

POPIS SLIKA

Slika 1.1	Odsjecanje posmatranog signala $x(t)$ funkcijom $w(\tau)$ prozora u cilju sprovođenja TF analize.....	9
Slika 1.2	Ilustracija prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu: (a) Pravougaoni, (b) Gaussian-ov, (c) Blackman-ov, (d) Kaiser-ov.....	11
Slika 1.2	(nastavak) Ilustracija prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu: (e) Hanning-ov, (f) Hamming-ov.....	12
Slika 1.3	Uticaj prozora $P(\theta)$ na eliminisanje ili ublažavanje efekata interferencije.....	26
Slika 1.4	Ilustracija algoritma izračunavanja 2D CTFWD-je.....	33
Slika 2.1	Primjer signala koji se sastoji od dvije komponente $x_1(n)$ i $x_2(n)$, jasno prostorno razdvojene u TF ravni.	41
Slika 2.2	Weyl-ovi filtri i varijacije. (a) <i>Minimum energy</i> Weyl-ov filter; (b) Ulazni <i>halfband</i> Weyl-ov filter; (c) Izlazni <i>halfband</i> Weyl-ov filter; (d) <i>Halfband</i> Weyl-ov filter; (e) Aproksimativni <i>halfband</i> Weyl-ov filter. Simbol $\downarrow 2$ označava pododabiranje sa 2 (zadržavanje samo odbiraka sa parnim indeksima), $\uparrow 2$ označava preodabiranje sa 2 (ubacivanje nule između svakih susjednih odbiraka) i z^{-1} označava jedinično kašnjenje.	48
Slika 2.3	Ilustracija matrice G_n . Kružići predstavljaju odbirke $\tilde{g}_W(n, m)$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $h_W(2l, 2l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1)$). Dijagonala \tilde{g}_{n_0} sadrži odbirke $\tilde{g}_W(n_0, m)$ korišćenje od strane <i>minimum energy</i> Weyl-ovog filtra u trenutku n_0 , (2.22), (2.23).	49
Slika 2.4	Ilustracija matrica $G_{2l}^{(\Phi)}$ i $G_{2l}^{(\Phi)}$. Crni kružići označavaju elemente matrice $G_{2l}^{(\Phi)}$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $\tilde{g}_W(2l-2i, 2i)$), dok sivi kružići označavaju elemente matrice $G_{2l}^{(\Phi)}$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $\tilde{g}_W(2l-2i-1, 2i+1)$). Dijagonala \tilde{g}_{2l} sadrži odbirke $\tilde{g}_W(2l-m, m)$ koje koristi aproksimativni <i>halfband</i> Weyl-ov filter u trenutku $n=2l$, (2.45), (2.46). Kružići koji su predstavljeni isprekidanom linijom označavaju odbirke $\tilde{g}_W(n, m)$ koje nije potrebno izračunavati.	54
Slika 2.5	Blok dijagram STFT filtra.	56
Slika 2.6	Blok dijagram <i>multiwindow</i> STFT filtra.	57
Slika 3.1	Struktura 2D Gabor-ovog filtra u 2D prostornom (a) i 2D frekvencijskom domenu (b). Parametri prikazanog 2D filtra su, shodno jednačini (3.3), $t_{1_0} = t_{2_0} = 0$, $\omega_{1_0} = 3$ ciklus/stepen, $\omega_{2_0} = 0$ i $a^2 = b^2 = 16/\pi$ stepen ⁻²	86
Slika 3.2	Pogled odozgo na tri člana familije 2D Gabor-ovih optimalnih filtara, pri čemu svaki od njih ima istu prostornu frekvenciju i orijentaciju. Slika demonstrira zavisnost između prostorno-frekvencijskog propusnog opsega filtra i propusnog opsega orijentacije u njihovom prostornom domenu dimenzija	

	anvelope; frekvencija i orijentacija su nezavisne od ovih dimenzija. a) Anvelopa kružnog filtra u prostornom domenu je u frekvencijskom domenu izražena kroz sumu dva kružna regiona čiji centri odgovaraju modulacionoj frekvenciji filtra i čiji su prostorno-frekvencijski propusni opseg i orijentacioni propusni opseg inverzno povezani sa prostornim dijametrom anvelope. b) Produžavanje receptivnog polja filtra u pravcu paralelnom pravcu modulacije izoštrava orijentacioni propusni opseg $\Delta\theta_{1/2}$, ali nema uticaja na prostorno-frekvencijski propusni opseg ΔF . c) Produžavanje receptivnog polja filtra u pravcu normalnom na pravac modulacije vodi do izoštravanja prostorno-frekvencijskog propusnog opsega ΔF , ali nema uticaja na orijentacioni propusni opseg $\Delta\theta_{1/2}$ 88
Slika 3.3	Algoritam razvijenog signal adaptivni S/SF sistema za filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala. 107
Slika 3.4	Uprošćeni šematski prikaz uzdužnog presjeka auto-člana S/SF distribucije 2D signala sa okolinom u FF ravni, u proizvoljnom trenutku vremena. (a) Situacija kada je LF detektovana na pravilnoj poziciji; (b) Situacija kada je stvarna LF maskirana usljed prisustva jakog šuma, što uzrokuje pogrešnu detekciju LF-je. 109
Slika 3.5	(a) Čisti i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti i filtrirani trokomponentni signal (3.77). 112
Slika 3.6	(a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.76). Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{ul}=3dB$ 113
Slika 3.7	(a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.77). Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{ul}=1dB$ 114
Slika 3.8	a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.77). Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{ul}=-2dB$ 115
Slika 3.9	(a) Čisti trokomponentni signal (3.78), (b) Zašumljeni trokomponentni signal, $SNR_{ul}=-0.5dB$ (c) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=5$, (d) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=7$, (e) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=9$, (f) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=11$, (g) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=13$, (h) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=15$ 116
Slika 4.1	Ilustracija <i>prealiasing</i> (odvajanje prozorom, segmentacija, sumiranje) procedure za Gabor-ovu analizu. Širina prozora analize je $L_g=4N$, što odgovara vrijednosti $Q_g=4$ bloka. 128
Slika 4.2	Ilustracija procedure preklapanja i sabiranja koja se koristi u Gabor-ovoj sintezi. Širina prozora sinteze je $L_g=4L$, što odgovara sumiranju $Q_g=4$ komponenti izlaznog signala $y_l^{(g)}(n)$ 129
Slika 4.3	Hardver za realizaciju jednog kanala TV filtra sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [135]. 139
Slika 4.4	Algoritam za serijsku arhitekturu. 140
Slika 4.5	Detaljna šema korišćena za realizaciju serijske konfiguracije na čipu. 141
Slika 4.6	Detaljna šema korišćena za realizaciju paralelne konfiguracije na čipu. 142
Slika 4.7	Hardverski dizajn opisanog TV sistema za filtriranje. 143
Slika 4.8	(a) Hardverski dizajn opisanog nestacionrnog sistema za filtriranje. U centru ShMemBuff registara, označena je TF pozicija smještenih odbiraka CTFWD u smislu predloženog estimacionog algoritma. (b) Hardverska implementacija realne računске linije STFT-to-CTFWD gateway-a. 147
Slika 5.1	Hardverska implementacija razvijenog 2D filtra. 156
Slika 5.2	Kontrolna logika hardverske implementacije sa slike 5.1. 157
Slika 5.3	Procedura kretanja 2D konvolucionog prozora i izračunavanja odbirka 2D CTFWD-je: (a) Stvarna pozicija konvolucionog prozora koja odgovara tački (k_1, k_2) (puna linija) i njena naredna pozicija (isprekidana linija); (b) Funkcija konvolucionog prozora, realizovana u realnom vremenu. Čelije korespondiraju elementima 2D STFT-je, i označene su njihovim pozicijama u FF ravni. 158

Slika 5.4	Kretanje konvolucionog prozora po odbircima 2D STFT-je sa naznačenim nedozvoljenim pozicijama u kojima se izbjegava analiza upotrebom signala <i>Left_Border_1</i> i <i>Bottom_Border_1</i> . Konvolucionni prozori sa horizontalnom šrafurom u vremenskom trenutku (n_1+1, n_2) se nalaze na dvijema susjednim dozvoljenim pozicijama (sve pozicije između označene dvije predstavljaju nedozvoljene pozicije i signal <i>Left_Border_1</i> neće dozvoliti analiza u njima). Konvolucionni prozori sa vertikalnom šrafurom u vremenskim trenucima (n_1+1, n_2) i (n_1+2, n_2) se nalaze na dvijema susjednim dozvoljenim pozicijama (sve pozicije između označene dvije predstavljaju nedozvoljene pozicije i signal <i>Bottom_Border_1</i> neće dozvoliti analiza u njima).....	159
Slika 5.5	STFT-to-CTFWD gateway	161
Slika 5.6	Testna matrica 2D CTFWD-je, dimenzija $N \times N = 9 \times 9$, sa označenom pokretnom matricom dimenzija $(2L+1) \times (2L+1) = 5 \times 5$	162
Slika 5.7	Rezultati detekcije funkcije oslonca filtra, FRS_k za testnu matricu 2D CTFWD-je. Implementacija je izvršena u realnom vremenu i predstavljena je za $2L+1=5$ i prag vrijednosti 10. Kursor 1 označava poziciju učitavanja prvog prozora (označenog na slici 5.6). Kursor 2 označava poziciju detekcije funkcije oslonca filtra, $FRS_k=1$	162
Slika 5.8	Razlika između <i>nepipeline</i> -ovane i <i>pipeline</i> -ovane implementacije razvijenog prostorno-promjenljivog filtra.....	167
Slika 5.9	(a) Čisti trokomponentni testni signal (5.1), (b) Zašumljeni signal (5.1), (c) Izlazni signal (dobije numerički) neadaptivnog prostorno-promjenljivog filtra, (d) Izlazni signal razvijenog prostorno-promjenljivog filtra hardverski implementiranog na FPGA čipu EP3C10E144C7.....	170
Slika 5.10	(a) Ilustracija izračunavanja 2D CTFWD-je u S/SF tačkama koje postoje unutar domena auto-članova 2D STFT-je. (b) Ilustracija izračunavanja 2D CTFWD-je u S/SF tačkama koje postoje van domena auto-članova 2D STFT-je. Implementiracija je izvršena na FPGA čipu EP3C10E144C7.	172
Slika 5.11	Ilustracija detekcije LF-je na osnovu 2D CTFWD-je, implementirane na FPGA čipu EP3C10E144C7.....	173
Slika 5.12	Distribucija taktova izvedenih po FF tački u tački signala (0.25, 0.25).....	174

POPIS TABELA

Tabela 1.1	Neke karakteristične osobine WD-je. Sa $X(\omega)$ je označena FT signala $x(t)$. Sa $\mu(A)$ je označen unitarni operator koji je pridružen unimodularnoj matrici A dimenzija 2×2 , kroz metapleksičku reprezentaciju, [75]. Specijalni slučajevi $\mu(A)$ uključuju TF skaliranje, FT-ju, množenje <i>chirp</i> -ova i konvoluciju <i>chirp</i> -ova.	17
Tabela 1.2	Broj kompleksnih operacija u jednoj TF tački potrebnih za izračunavanje 1D SPEC-a, 1D WD-je preodabranog signala, 1D WD-je analitičkog signala, 1D SM-a i 1D CTFWD-je. N predstavlja dužinu prozorom odsječenog signala; L je širina prozora korišćenog u 1D SM-u (u najvećem broju slučajeva L uzima male vrijednosti, $L=1,2,3$); L_p je signal adaptivna širina prozora korišćenog u 1D CTFWD-ji ($L_p \leq L_m$, pri čemu je L_m maksimalna širina prozora, određena najširim auto-članom analiziranog signala.). Množenja sa -1 , 0 i 2 nijesu uzeta u obzir, jer je vrijeme potrebno za njihovo izračunavanje mnogo manje od vremena potrebnog za ostale operacije.	36
Tabela 1.3	Broj kompleksnih operacija u jednoj S/SF tački potrebnih za izračunavanje 2D SPEC-a korišćenjem FFT blokova, 2D SPEC-a korišćenjem rekurzivnog metoda, 2D WD-je korišćenjem FFT blokova, 2D SM-a korišćenjem rekurzivnog metoda, 2D CTFWD-je korišćenjem FFT blokova i 2D CTFWD-je korišćenjem rekurzivnog metoda. Množenja sa -1 , 0 i 2 nijesu uzeta u obzir, jer je vrijeme potrebno za njihovo izračunavanje mnogo manje od vremena potrebnog za ostale operacije.	37
Tabela 3.1	Odgovarajuće osobine filtara u 2D prostornom i 2D spektralnom domenu	87
Tabela 3.2	Izlazni odnosi signal/šum, SNR_{out1} , SNR_{out2} i SNR_{out3} , i odgovarajuća poboljšanja IMP_1 , IMP_2 i IMP_3 za testne 2D signale (3.75), (3.76) i (3.77) filtrirane opisnim metodom.	111
Tabela 3.3	Izlazni odnosi signal/šum, SNR_{out1} , SNR_{out2} , SNR_{out3} , SNR_{out4} , SNR_{out5} , SNR_{out6} i odgovarajuća poboljšanja IMP_1 , IMP_2 , IMP_3 , IMP_4 , IMP_5 i IMP_6 za testni 2D signal (3.78) filtriran opisnim metodom, za različite vrijednosti dimenzija pokretne matrice $2L+1$ i konstantan ulazni odnos signal/šum, $SNR_m = -0.5$ dB.	117
Tabela 4.1	Broj operacija potreban po iteracionom koraku ortogonalnog iteracionog algoritma unaprijeđenog Ritz-ovom akceleracijom.	135
Tabela 4.2	Kompleksnost (računska kompleksnost i memorijski zahtjevi) različitih <i>online</i> TF filtara. Ulazni <i>halfband</i> , izlazni <i>halfband</i> i <i>halfband</i> Weyl-ovi filtri imaju istu kompleksnost kao <i>minimum energy</i> Weyl-ov filter uz dodatnu kompleksnost uzrokovanu <i>halfband</i> ograničenjima ulaznog i/ili izlaznog signala. Kompleksnost STFT filtra i Gabor-ovog filtra je ista kao kompleksnost odgovarajućih <i>multiwindow</i> formi, za $M=1$. U cilju konciznijeg zapisivanja korišćena je sljedeća notacija: $\bar{L}_\gamma = \sum_{i=1}^M L_{\gamma_i} / M$ i $\bar{L}_g = \sum_{i=1}^M L_{g_i} / M$	136
Tabela 4.3	Memorijske lokacije Look up tabele. ADD_M označava adresu središnjeg elementa ConvWinRegBlk-a. Simbol \ll označava logičku operaciju pomjeranja ulijevo i $l = \text{Length}(\text{SelSTFT}_I)$	144
Tabela 4.4	Parametri konfiguracionih registara, izraženi kroz broj potrebnih <i>STFT_Load</i> taktova.	144

Tabela 4.5	Hardverska složenost i računska cijena opisanog dizajna	145
Tabela 4.6	Memorijske lokacije Look up tabele. ADD_M označava adresu centralnog elementa CWRegBlok-a. Simbol \ll označava logičku operaciju pomjeranja ulijevo i l =dužina(SelSTFT_1).....	148
Tabela 4.7	Parametri konfiguracionih registara, izraženi brojem potrebnih takova $STFT_Load/CTFWD_Store$.	149
Tabela 4.8	Dužine izlaznih registara za korišćene digitalne jedinice u zavisnosti od parametara l , L_m i N	149
Tabela 4.9	Hardverska složenost i računska cijena opisanog dizajna	149
Tabela 5.1	Kompleksnost (hardverska i računska) različitih <i>online</i> S/SF filtara. Ulazni <i>halfband</i> , izlazni <i>halfband</i> i <i>halfband</i> Weyl-ov filtar imaju istu kompleksnost kao <i>minimum energy</i> Weyl-ov filtar, uz dodatnu kompleksnost uzrokovanu <i>halfband</i> ograničenjem ulaznog i/ili izlaznog signala. Kompleksnost STFT i Gabor-ovog filtra je ista kao za odgovarajuće <i>multiwindow</i> verzije respektivno, uz uslov da je $M=1$. ξ je faktor preodabiranja, koji se koristi u dizajnu Gabor-ovog filtra, parametar p ($5 \leq p \leq 7$) je broj dominantnih parova <i>eigen</i> vrijednosti/ <i>eigen</i> vektora i koristi se u dizajniranju projekcionog filtra (ovi parametri su uvedeni i definisani u poglavlju 2.1). Sa χ je označen prosječan broj taktova po FF tački razvijenog dizajna. Logička operacija pomjeranja ulijevo (<i>shift left</i> , odnosno množenje sa 2) nije razmatrana u prikazanim računskim zahtjevima, jer je vrijeme potrebno za njeno izvršavanje mnogo kraće od vremena potrebnog za ostale operacije.	153
Tabela 5.2	Sadržaj LUT memorijske tabele za dato L_m . $ADD_{M,M}$ označava adresu centralnog elementa registarskog bloka konvolucionog prozora, simbol \ll označava logičku operaciju <i>shift left</i> i $r=length(SelSTFT_1)$. Kontrolni signali su sljedeći biti: (1) <i>SHLorNo</i> , (2) <i>CTFWD_Write_Cond</i> , (3) <i>Termination</i> , (4) <i>CTFWD_Write</i> , (5) <i>Filtering_Completion</i>	163
Tabela 5.3	Parametri iz Konfiguracionih registara izraženi brojem potrebnih taktova $STFT_Load/CTFWD_Store$. $N \times N$ je širina prozora 2D STFT-je (trajanje prozorom odsječenog signala), $M \times M$ je veličina posmatranog 2D signala.	168
Tabela 5.4	Dužine izlaznih registara za korišćene digitalne jedinice u zavisnosti od dužine podatka 2D STFT-je (l), maksimalne širine konvolucionog prozora L_m i N	169
Tabela 5.5	Sumirana upotreba resursa za čip na kome je izvršena hardverska implementacija za parametre $N=64$, $2L_m+1=13$, $2L+1=9$ i dužinu odbiraka 2D STFT-je $l=16$	171
Tabela 5.6	Hardverska kompleksnost razmatranih implementacionih pristupa za prostorno-promjenljive filtre bazirane na estimaciji LF-je.	176
Tabela 5.7	Vremena taktova, frekvencija odabiranja, i vremena izvršavanja (po FF tački) razmatranih implementacionih pristupa za prostorno-promjenljive filtre bazirane na estimaciji LF-je. Prikazano je prosječno vrijeme izvršavanja (po FF tački) razvijenog signal-adaptivnog dizajna, izračunato za analizirani signal (5.1) i parametre $L_m=6$, $N=64$. $(T_c)_{SCI}$, $(T_c)_{MCI}$, $(T_c)_H$, $(T_c)_{S4}$ su vremena taktova za slučajeve SCI pristupa, klasičnog MCI pristupa, hibridnog pristupa i signal-adaptivnog pristupa, respektivno, dok su T_s , T_{comp} vremena 1-bitnog pomeranja (<i>shift-ovanja</i>) poređenja, respektivno.....	176

POPIS SKRAĆENICA

1D	Jednodimenzionalni/a
2D	Dvodimenzionalni/a
4D	Četvorodimenzionalni/a
ASIC	Application Specific Integrated Circuits
CLK	Clock
CTFWD	Cross-Terms-Free Wigner Distribution
DFT	Discrete Fourier Transform
FF	Frequency-Frequency
FFT	Fast Fourier Transform
FIFO	First In First Out
FM	Frequency Modulated
FPGA	Field Programmable Gate Array
FRS	Filter's Region of Support
FT	Fourier Transform
HDL	Hardware Description Language
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IF	Instantaneous Frequency
IMP	Improvement
LF	Local Frequency
LTV	Linear Time-Varying
LUT	Look-up Table
MCI	Multiple-Clock-Cycle Implementation
PWD	Pseudo Wigner Distribution
RID	Reduced Interference Distribution

SCI	Single-Clock-Cycle Implementation
SM	S-method
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SoC	System-on-a-Chip
SPEC	Spectrogram
S/SF	Space/Spatial-Frequency
S/SFD	Space/Spatial-Frequency Distributuon
STFT	Short-Time Fourier Transform
TF	Time-Frequency
TFD	Time-Frequency Distribution
TV	Time-Varying
WD	Wigner Distribution

U V O D

Nosilac određene korisne informacije se, u opštem smislu, može nazvati signalom. Signal se, matematički, reprezentuje kao funkcija jedne ili više nezavisnih promjenljivih. Broj nezavisnih promjenljivih određuje dimenzije signala. U slučaju da je signal funkcija jedne nezavisne promjenljive, riječ je o jednodimenzionalnom (1D) signalu, a ukoliko je broj nezavisnih promjenljivih veći, signal se smatra višedimenzionalnim.

Istorijski gledano, interesovanje za analizu signala se intenzivira četrdesetih godina prošlog vijeka, kada su postavljene osnove analogno-digitalne konverzije podataka. Uvođenjem ovih koncepata moglo se otpočeti sa analizom signala koji je dugo vremena intrigirao naučnu javnost, odnosno sa analizom ljudskog govora. Ljudski govor je samo jedan od predstavnika mnogobrojne familije nestacionarnih signala, koji se odlikuju promjenom spektralnog sastava u vremenu i zauzimaju širok opseg frekvencija. To znači da konvencionalne metode obrade signala, koje daju predstavu signala u vremenskom, odnosno u frekvencijskom domenu pojedinačno, neće moći na kvalitetan način da opišu ovu vrstu signala. U cilju uspješnog procesiranja ljudskog govora, ali i ostalih, mnogobrojnih nestacionarnih signala: seizmičkih, geofizičkih, astronomskih, biomedicinskih, radarskih i sonarskih, telekomunikacionih, industrijskih itd., razvija se združena, vremensko-frekvencijska (*Time-Frequency* – TF) analiza signala. TF analiza razvija matematičke metode potrebne za razumijevanje vremenski-promjenljivog spektralnog sastava signala. Analogno TF analizi koja se primjenjuje u slučaju 1D signala, razvijena je i prostorno-frekvencijska (*Space/Spatial-Frequency* – S/SF) analiza koja se primjenjuje u slučaju dvodimenzionalnih (2D) signala.

U praksi, jedan od najprisutnijih i najčešće korišćenih načina obrade signala, je filtriranje signala. Pod filtriranjem signala podrazumijevamo prepoznavanje neke važne osobine ili informacije koju signal nosi, i eliminisanje neželjenih komponenti, odnosno neželjenih osobina koje maskiraju osobine od interesa. Filtriranje nestacionarnih, 1D signala već izvjesno vrijeme okupira pažnju naučne javnosti, te je razvijen priličan broj algoritama i odgovarajućih hardverskih rješenja, koja mogu uspješno vršiti filtriranje ove vrste signala. S druge strane,

filtriranje nestacionarnih, 2D signala je još uvijek nedovoljno istražena i razvijena naučna disciplina, čija bi rješenja bila veoma korisna u praksi. Naime, osim standardnih primjena opštih metoda filtriranja 2D signala – restauracija posmatranog signala, unaprijeđenje njegovog kvaliteta, kodiranje i analiza, ova vrsta operacija se često koristi kao predprocesirajući alat u različitim poljima, kakva su prepoznavanje šablona ili, pak, modelovanje sistema vida kod sisara.

Navedni razlozi su bili glavni motiv za istraživanje u oblastima analize i filtriranja nestacionarnih, 2D signala. Istraživanje je rezultiralo razvojem metoda i odgovarajućeg hardverskog dizajna optimalnog, S/SF sistema za filtriranje visoko nestacionarnih, 2D FM signala, koji čine okosnicu ove disertacije.

TF i S/SF filtri mogu biti dizajnirani eksplicitno i implicitno. Nestacionarni filtri, čija je funkcija oslonca najbolja aproksimacija prenosne funkcije distribucije korišćene u njihovoj definiciji, imaju eksplicitan dizajn. Nestacionarni filtri imaju implicitan dizajn ukoliko se baziraju na izračunavanju linearne (TF ili S/SF) transformacije (1D ili 2D) signala, estimaciji funkcije oslonca filtra na osnovu TF ili S/SF distribucija i estimaciji izlaznog signala na osnovu izračunate linearne transformacije pomnožene estimiranom funkcijom oslonca filtra. Eksplicitno dizajnirani filtri, kao i implicitno dizajnirani filtri koji koriste estimaciju funkcije oslonca baziranu na linearnim TF, odnosno S/SF distribucijama i uključuju samo linearne korake, rezultuju linearnim TF i S/SF filtrima. Implicitno dizajnirani filtri koji koriste estimaciju funkcije oslonca baziranu na kvadratnim TF, odnosno S/SF distribucijama rezultuju nelinearnim TF i S/SF filtrima.

Linearni filtri se nazivaju klasičnim rješenjima, jer su dizajnirani ili eksplicitno na osnovu Richaczek-ove distribucije i Wigner-ove distribucije (WD) (Zadeh-ov filter, [59], i Weyl-ov filter, [28], respektivno) ili implicitno na osnovu linearne kratkotrajne Fourier-ove transformacije (*Short-Time Fourier Transform* – STFT) i Gabor-ove transformacije (STFT filter, [41], i Gabor-ov filter, [41], [56], [163], respektivno). Ipak, ova rješenja imaju ozbiljne nedostatke uzrokovane TF distribucijama na kojima se baziraju. Zadeh-ov filter ne može biti korišćen za nestacionarne signale, STFT i Gabor-ov filter imaju ograničenu rezoluciju, dok je Weyl-ov filter u principu ograničen na *halfband* signale, [39], [41]. Kako bi se smanjio uticaj navedenih nedostataka i proširile mogućnosti primjene klasičnih rješenja, definisane su modifikovane verzije ovih filtera (*multiwindow* STFT filter, [39], [41], *multiwindow* Gabor-ov filter, [39], [41], [147], [149], aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter, [28], [39], [41]). Ipak, modifikovane verzije povećavaju računsku kompleksnost klasičnih rješenja.

Nelinearni filtri, bazirani na WD-ji ili glatkoj WD-ji, [27], poboljšavaju rezoluciju i selektivnost, ali uz povećanje kompleksnosti prethodno navedenih rješenja. Projekcioni filter, [35], ima izrazito visoku selektivnost, ali i značajno uvećanu kompleksnost u poređenju sa ostalim rješenjima.

Zbog izrazite numeričke kompleksnosti, nestacionarni filtri zahtijevaju značajno vrijeme za izračunavanje. Stoga su neprikladni za analizu u realnom vremenu, što veoma ograničava

njihovu primjenu u praksi. Hardverske implementacije, kada su moguće, prevazilaze ove probleme. Ipak, postojeće hardverske implementacije imaju prilične nedostatke. *Online* algoritmi za jednotaktnu implementaciju (*Single-Clock-Cycle Implementation* – SCI) linearnih TF filtara iz [39], [41], [147], [149], postojeći SCI dizajn nelinearnog TF filtra iz [137], i moguće implementacije nelinearnih TF filtara iz [27], [43], zahtijevaju ponavljanje osnovnih računskih elemenata, ukoliko ih je potrebno koristiti više od jednog puta. Stoga, ove implementacione šeme mogu biti tako kompleksne da ih nekada nije moguće realizovati. Osim toga, kompleksnost ovih sistema zavisi od dužine filtriranog signala, pa su u mogućnosti da estimiraju samo signale unaprijed definisane dužine. Uz to, SCI pristup iz [137], koji se implementira u realnom vremenu nije pogodan za upotrebu u slučaju multikomponentnih signala. S druge strane, nelinearni TF filtar iz [128], baziran na poređenju statističkih karakteristika TF distribucija sa izrazito različitim brojem odbiraka filtriranog signala, kao i adaptivni filtri bazirani na iterativnim algoritmima, [163]-[165], podrazumijevaju računski veoma kompleksne i vremenski zahtjevne estimacije funkcije oslonca, te iz navedenih razloga često nije moguća njihova implementacija u realnom vremenu.

Numerička kompleksnost se drastično povećava u slučaju 2D signala, pa su zahtjevi hardverske implementacije sistema za procesiranje ovih signala još naglašeniji. Isto se može konstatovati i za uočene nedostatke postojećih hardverskih implementacija TF filtara u slučaju kada se proširuju za procesiranje 2D signala, [147], [149]. Dimenzije čipa, potrošnja energije i cijena se značajno uvećavaju u ovom slučaju, dok je brzina izvršavanja ozbiljno redukovana. Stoga, imajući u vidu tehnološka ograničenja u hardverskoj realizaciji, ovi sistemi često ne mogu biti realizovani ni u SCI, ali ni u klasičnoj višetaktnoj implementaciji (*Multiple-Clock-Cycle Implementation* – MCI).

Cilj ove disertacije je razvijanje metoda i dizajniranje odgovarajućeg signal-adaptivnog hardverskog rješenja optimalnog S/SF filtra, pogodnog za impementaciju na čipu i sposobnog da, u realnom vremenu, kvalitetno estimira visoko nestacionarne 2D FM monokomponentne i multikomponentne signale, izložene uticaju intenzivnog bijelog šuma.

Doktorska disertacija se sastoji od pet glava.

U prvoj glavi disertacije su izloženi opšti koncepti TF i S/SF analize signala, sa posebnim akcentom na TF i S/SF distribucijama. Kako ove distribucije predstavljaju osnovu TF i S/SF filtara, izvršena je njihova komparativna analiza sa aspekta karakteristika, mogućnosti implementacije i računске kompleksnosti (broja kompleksnih sabiranja i kompleksnih množenja). Imajući u vidu da je glavni cilj disertacije razvoj S/SF filtra za estimaciju nestacionarnih 2D signala, predložena je, sa ovog aspekta, optimalna S/SF distribucija za analizu i procesiranje nestacionarnih 2D signala.

U drugoj glavi disertacije su razmatrani principi nestacionarnog filtriranja baziranog na TF analizi. Izvršena je, već pomenuta, opšta klasifikacija TF filtara na linearne i nelinearne filtre. Linearni filtri i njihove modifikovane, proširene verzije su detaljno predstavljene, a potom je

izvršena odgovarajuća komparativna analiza. Zaključeno je da optimalan linearan filter ne postoji, te da se odabir vrši u zavisnosti od njihove specifične namjene. Potom je data definicija optimalnog, nestacionarnog filtriranja na kojoj se baziraju nelinearni filtri. Način na koji se određuje funkcija oslonca nelinearnih filtera predstavlja osnovnu razliku među njima, te se u zavisnosti od rješenja tog problema razvio veći broj aktuelnih, nelinearnih filtera. Na kraju glave je izvršena njihova komparativna.

U trećoj glavi disertacije su razmatrani principi nestacionarnog filtriranja baziranog na S/SF analizi. Analogno opšte poznatom principu neodređenosti za 1D linearne filtre, izvedeni su odgovarajući principi neodređenosti za 2D linearne filtre. Potom je predstavljena familija 2D Gabor-ovih linearnih filtera u 2D prostornom i 2D frekvencijskom domenu. Usljed izuzetno velikog porasta kompleksnosti prilikom obrade nestacionarnih, 2D signala aktuelna, nelinearna rješenja za estimaciju ove vrste signala su malobrojna i imaju ozbiljne nedostatke. Stoga je u ovog glavi razvijen metod koji:

- pruža kvalitetno filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala u uslovima prisustva veoma intenzivnog aditivnog, bijelog Gaussian-ovog šuma (razmatrani su slučajevi u kojima šum ima i do 2 puta veću snagu od signala),
- omogućava izvršavanje u realnom vremenu što ga čini veoma atraktivnim za praktičnu primjenu,
- podržava rad kako sa monokomponentnim, tako i sa multikomponentnim 2D signalima,
- ne zavisi od dužine procesiranog signala,
- robustan je sa aspekta izbora svojih parametara i
- moguće ga je hardverski implementirati.

Navedene karakteristike metoda su izvedene na bazi opsežnog eksperimentalnog rada, i potkrijepljene su testiranjem metoda za više različitih 2D signala (monokomponentni, dvokomponentni, trokomponentni) u prisustvu različitih količina bijelog Gaussian-ovog šuma, kao i za različite vrijednosti parametara sistema.

Četvrta glava disertacije daje pregled postojećih hardverskih rješenja filtera baziranih na TF analizi. Za linearne filtre su predstavljeni razvijeni *online* algoritmi implementacije i data je komparativna analiza njihove složenosti. Analogno njima, predstavljene su i hardverske realizacije nelinearnih filtera (za filtre za koje su ove realizacije moguće), i data je komparativna analiza njihove složenosti.

U petoj glavi disertacije je izvršena analiza kompleksnosti postojećih TF filtera, u slučaju njihovog proširenja za primjenu na 2D signalima. Nakon toga je predstavljena hardverska realizacija metoda razvijenog u trećoj glavi disertacije, koja je implementirana u FPGA tehnologiji. Hardverska realizacija je signal-adaptivna, što znači da razvijeni metod obavlja svoju funkciju u različitom (samo neophodnom) broju taktova. Preciznije, van domena auto-članova signala metod vrši izračun u minimalanom broju taktova (2 takta), dok se maksimalan broj taktova koristi samo u neposrednoj okolini detektovanih lokalnih frekvencija. Dizajn koristi i

prednosti tehnike *pipeline*-inga, čime se dodatno unaprijeđuju kritične performanse (dimenzije čipa, potrošnja energije, cijena i vrijeme izvršavanja). Sve komponente sistema i kontrola koja njime upravlja su detaljno analizirane. Pojedini dijelovi sistema su zasebno testirani, kako bi se demonstrirala njihova funkcija i dokazala ispravnost rada. Testiranje i verifikacija rada cjelokupnog razvijenog sistema je izvršena u *ModelSim Altera 6.3g_p1 (Quartus II, Web Edition)* okruženju, na primjeru realnog multikomponentnog signala veoma kompleksnog za estimaciju. Ostvareni su izuzetno kvalitetni rezultati filtriranja, bliski optimalnim rezultatima koji se mogu samo teorijski postići. Predstavljeni su i resursi (vrsta i familija čipa, kao i broj logičkih, kombinacionih, registarskih i memorijskih jedinica) potrebni za implementaciju ovoga rješenja. Na kraju je dato poređenje sa ostalim mogućim S/SF dizajnima baziranim na estimaciji lokalne frekvencije, koje demonstrira neospornu superiornost razvijenog dizajna.

Koncepti vremensko-frekvencijske i prostorno-frekvencijske analize signala

Konvencionalne metode obrade signala daju predstavu signala u vremenskom, odnosno u frekvencijskom domenu. To znači da vremenska reprezentacija signala ne sadrži informacije o frekvencijskom sadržaju (spektru) signala, kao što ni frekvencijska reprezentacija nema informacija o vremenskom rasporedu frekvencijskih komponenti. Ukoliko se analiza sprovodi nad stacionarnim signalima (signali čiji se frekvencijski sadržaj ne mijenja u vremenu), jednako dobri rezultati će se dobiti primjenom bilo koje od navedenih metoda. Međutim, signali sa veoma nestacionarnim karakteristikama, [13], [15], [29], [30], [32], [36], [50], [106], koji se odlikuju promjenom spektralnog sastava u vremenu, te zauzimaju širok spektar frekvencija, ne mogu biti dobro opisani primjenom ovih klasičnih metoda. Ukoliko uzmemo u obzir činjenicu da je broj procesa koji se modeluju ovom vrstom signala značajan, jasan je razlog razvoja analize koja će nam pružiti potpune informacije o pomenutim signalima.

Za slučaj jednodimenzionalnih (1D) signala to je vremensko-frekvencijska (*Time-Frequency* - TF) analiza, [7]-[9], [12], [13], [15]-[17], [20], [30], [45], [71], [74], [106], [107]. Riječ je o oblasti koja ima za cilj razvoj vremensko-frekvencijskih distribucija (TFD), sposobnih da pokažu raspodjelu energije signala u dvodimenzionalnoj, vremensko-frekvencijskoj ravni.

Za slučaj dvodimenzionalnih (2D) signala to je prostorno-frekvencijska (*Space/Spatial-Frequency* - S/SF) analiza, [78]-[81], [112], [138]-[142], [145]. Slično vremensko-frekvencijskoj analizi, prostorno-frekvencijska analiza ima za cilj razvoj prostorno-frekvencijskih distribucija (S/SFD), koje će reprezentovati raspodjelu energije signala u četvorodimenzionalnom, prostorno-frekvencijskom domenu.

Vremensko-frekvencijska i prostorno-frekvencijska analiza su veoma prisutne u mnogim praktičnim primjenama obrade signala (radari, govor, biomedicina, seizmologija, optika, obrada slike,...), te je stoga njihovo izučavanje izuzetno bitno za različite naučne discipline.

Broj dimenzija signala se, naravno, ne zaustavlja na dva. Višedimenzionalni signali su takođe zastupljeni u praksi i imaju svoje, izuzetno zahtjevne i složene, višedimenzionalne reprezentacije. Stoga će ova glava disertacije biti posvećena najznačajnima od njih.

U literaturi, [13], [15], [30], je uobičajena podjela matematičkih modela za analizu signala u tri klase: linearne, kvadratne (ili takozvane bilinearne) distribucije i distribucije višeg reda.

Transformacije iz prve klase se nazivaju linearnim zbog svoje osobine linearnosti koja je lako uočljiva iz same njihove definicije i predstavlja važno svojstvo u analizi signala. Naime, ukoliko analizirani signal predstavlja linearnu kombinaciju više komponenti, tada i njegova transformacija predstavlja istu linearnu kombinaciju transformacija svake sastavne komponente. Najvažniji predstavnik ove grupe je kratkotrajna Fourier-ova transformacija (*Short-Time Fourier Transform* – STFT), koju je prvi definisao Gabor, [56]. Osnovni nedostatak ove transformacije predstavlja protivrječnost pri izboru dobre vremenske i frekvencijske rezolucije. Aktuelan predstavnik pomenute klase je i Wavalet transformacija, [13], [15]. Obje ove transformacije imaju svoje energetske verzije: spektrogram i skalogram, respektivno.

Drugu klasu čine kvadratne distribucije. Ime su dobile po analogiji sa funkcijom raspodjele vjerovatnoće koja je višedimenzionalna funkcija. Mada se kod distribucija iz ove klase susrijećemo sa gubitkom važne osobine linearnosti, od izuzetnog je značaja njihova velika prednost u analizi nestacionarnih procesa i zanemarljiva (u odnosu na linearne transformacije) protivrječnost pri izboru parametara koji utiču na kvalitet vremenske i frekvencijske rezolucije. Stoga su kvadratne distribucije referentne i najčešće upotrebljivane metode u analizi spektralnog sastava nestacionarnih signala. Sve distribucije iz ove klase pripadaju takozvanoj generalisanoj Cohen-ovoj klasi distribucija, [13], [15]. Najznačajniji predstavnici Cohen-ove klase su: Wigner-ova distribucija (WD) i spektrogram (SPEC).

Kao odgovor na problem postojanja interferencije¹, koja se javlja kao posljedica bilinearne prirode ovih transformacija razvija se posebna klasa distribucija za redukovanje interferencije (RID distribucije), [12], [46], [74]. Distribucije iz ove klase zadovoljavaju marginalne osobine, odnosno za posmatrani signal $x(t)$ i njegovu Fourier-ovu transformaciju (FT) $X(\omega)$ važi sljedeće:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} TFD(t, \omega) d\omega = P_x(t) = |x(t)|^2, \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} TFD(t, \omega) dt = p_x(\omega) = |X(\omega)|^2, \quad (1.2)$$

gdje $P_x(\omega) = |x(t)|^2$ predstavlja spektralnu gustinu energije, a $p_x(t) = |X(\omega)|^2$ trenutnu snagu posmatranog signala. Ovo osobine su važne jer $p_x(t)$ i $P_x(\omega)$ u vremenskom i frekvencijskom domenu, respektivno, predstavljaju marginalne gustine vremensko-frekvencijske distribucije $TFD(t, \omega)$. Shodno tome, energija signala E_x se može dobiti integraljenjem TFD-je po cjelokupnom TF domenu:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} TFD(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.3)$$

¹ Interferencija predstavlja pojavu nepoželjnih komponenti signala nastalih međusobnom interakcijom auto-članova signala. Te komponente se nazivaju kros-komponentama, odnosno kros-članovima signala i svojim prisustvom značajno degradiraju kvalitet TF reprezentacije signala.

Cohen-ovoj klasi distribucija pripada i S-metod (SM), [108]. Iako ne zadovoljava marginalne osobine (1.1) i (1.2), SM se intenzivno upotrebljava u TF analizi signala, jer se njime postižu veoma dobri rezultati u potiskivanju efekata interferencije, kao i značajno redukovanje šuma, [117]. Dodatno unaprijeđenje ove transformacije je učinjeno razvojem njene signal-zavisne forme, [106]. Naime, signal-zavisni SM zadržava željenu (WD) koncentraciju auto-članova u slučaju monokomponentnih signala, kao i u slučaju multikomponentnih signala, [14], čije se komponente ne preklapaju u TF ravni, uz simultano redukovanje prisustva kros-članova WD-je. Navedeno se postiže ograničavanjem konvolucije odbiraka STFT-je u TF ravni.

Signal-zavisni SM se, za slučaj jednodimenzionalnih signala, u potpunosti poklapa sa Wigner-ovom distribucijom oslobođenom prisustva kros-članova (*Cross Terms Free Wigner Distribution* - CTFWD), [88], pa će u disertaciji ovi nazivi biti ravnopravno korišćeni. Ipak, za slučaj dvodimenzionalnih signala se razlikuje način na koji ove distribucije redukuju prisustvo kros-članova. U disertaciji će, za slučaj dvodimenzionalnih signala, biti analizirana i korišćena 2D CTFWD, [91], [92].

1.1. Kratkotrajna Fourier-ova transformacija

Snaga standardne Fourier-ove analize je u tome što dozvoljava dekompoziciju signala na pojedinačne frekvencijske komponente i utvrđuje relativni intenzitet svake od njih. Energetski spektar nam, ipak, ne govori ništa o vremenskoj raspodjeli frekvencijskih komponenti, odnosno ne daje nam informaciju u kom trenutku svaka od frekvencijskih komponenti postoji.

Tokom zalaska sunca, na primjer, jasno je da je kompozicija svjetlosti koja dopire do nas veoma različita u odnosu na onu koja je zastupljena tokom dana. Ako analizu svjetlosti od svitanja do zalaska sunca izvršimo klasičnom Fourier-ovom analizom, spektar gustine energije nam neće reći da se spektralna kompozicija značajno razlikovala u posljednjih 5 minuta. U ovoj situaciji, gdje su promjene relativno spore, možemo vršiti Fourier-ovu analizu petominutnih odbiraka signala i steći prilično dobru predstavu o tome kako se spektar tokom zalaska sunca razlikuje od spektra oko podneva. Poboljšanje se može ostvariti proračunom spektra pomoću petominutnog vremenskog prozora koji se uzima u svakom trenutku vremena, i dobijanjem energetskog spektra u vidu kontinualne funkcije vremena. Sve dok odabrani interval ne sadrži brze promjene (signal je u tom intervalu u velikoj mjeri stacionaran), ova procedura daje odličnu predstavu o tome kako se spektralna kompozicija svjetlosti mijenjala tokom dana. Ako su se značajne promjene desile brže nego što je 5 minuta, možemo skratiti vremenski prozor u skladu s tim. Ovo je bazična ideja STFT-je, [1], [5], [65], [68], odnosno spektrograma, koji je standardni metod za proučavanje vremensko-promjenljivih signala. Ipak, postoje prirodni signali i signali koje proizvodi čovjek, kod kojih se spektralni sadržaj mijenja tako brzo da je pronalaženje prozora odgovarajućeg trajanja problematično, jer možda neće imati ni jednog vremenskog intervala unutar koga je signal manje-više stacionaran. Takođe, smanjenje vremenskog prozora

tako da se mogu locirati događaji u vremenu redukuje frekvencijsku rezoluciju. Oдавde potiče nerazdvojna suprotstavljenost vremenske i frekvencijske rezolucije, [3], [13], [15], [30], [106], [107], [111]. Ljudski govor je glavni primjer signala čiji se frekvencijski sadržaj mijenja velikom brzinom i na složen način. Zapravo, to je i bila motivacija za analizu govora, što je dovelo do pronalaženja zvučnog spektrograma, tokom 1940-ih, koji je, zajedno sa naknadnim otkrićima, postao standard i moćan alat za analizu nestacionarnih signala. Stoga, STFT i njene varijacije ostaju prvobitne metode za analizu signala čiji se spektralni sadržaj mijenja.

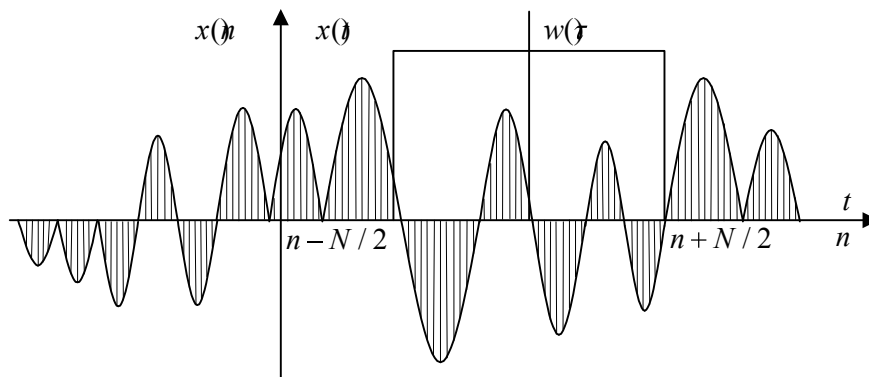
1.1.1. 1D STFT

Definicija STFT-je počiva na principu Fourier-ove analize dijela posmatranog signala $x(t)$, odsječenog funkcijom prozora u određenom trenutku t (slika 1.1):

$$STFT_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.4)$$

pri čemu je $w^*(\tau)$ konjugovano-kompleksna funkcija prozora. Pomjerajući prozor duž signala, u stvari, vršimo „skeniranje” signala dobijajući time vremensku predstavu njegovih spektralnih komponenti.

Najznačajnije osobine STFT-je su linearnost, pomjeranje po vremenu i modulisanje signala, a jednostavno se izvede iz definicione jednačine, (1.4), kao i iz osobina FT-je.



Slika 1.1 Odsjecanje posmatranog signala $x(t)$ funkcijom $w(\tau)$ prozora u cilju sprovođenja TF analize.

Nemogućnost kompromisnog izbora širine prozora $w(\tau)$ u cilju postizanja zadovoljavajuće vremenske i frekvencijske rezolucije se smatra osnovnim nedostatkom STFT-je, [1]. Uočimo ovaj efekat na primjeru multikomponentnog signala (suma dva δ -impulsa i dva prostoperiodična signala):

$$x(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} \quad (1.5)$$

Jednostavnim računom dobijamo STFT-ju signala $x(t)$,

$$STFT_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) e^{-j\omega\tau} x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) e^{-j\omega\tau} \left[e^{-j\omega_1\tau} + e^{-j\omega_2\tau} \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) e^{-j(\omega - \omega_1)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) e^{-j(\omega - \omega_2)\tau} d\tau \quad (1.6)$$

Pretpostavimo da je $w(\tau)$ pravougaoni prozor širine T , odnosno $w(\tau)=0$ za $|\tau|>T/2$ i da se spektar funkcije prozora nalazi u domenu njegove glavne latice, $W(\omega)=0$ za $|\omega|>2\pi/T$. Na osnovu (1.6) i uvedenih pretpostavki zaključujemo da je dva δ -impulsa moguće razdvojiti u vremenskom domenu ukoliko je: $|t_1 - t_2| > T = \Delta t$ (vremenska rezolucija), tj. dva prostoperiodična signala u frekvencijskom domenu ukoliko je: $|\omega_1 - \omega_2| > 4\pi/T = \Delta\omega$ (frekvencijska rezolucija). Proizvod vremenske i frekvencijske rezolucije je konstantan i u slučaju pretpostavljenog pravougaonog prozora $w(\tau)$ iznosi $(\Delta t)(\Delta\omega) = 4\pi$. Drugim riječima, poboljšavanjem rezolucije u jednom postižemo obrnuto proporcionalan efekat u drugom domenu, te se nameće zaključak o nemogućnosti jednovremenog postizanja idealne rezolucije u oba domena (vremenskom i frekvencijskom).

Za različite oblike funkcije prozora, slika 1.2, dobijaju se različite konstante (u razmatranom primjeru ona iznosi 4π). Najmanja konstanta se dobija primjenom Gaussian-ovog prozora, [13], [15], i iznosi $1/2$. U praksi se najčešće srijeću slijedeće vrste prozora:

- *Pravougaoni prozor* je najjednostavnijeg oblika i definiše se sa:

$$w(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < T/2 \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } \tau. \end{cases} \quad (1.7)$$

- *Gaussian-ov prozor*, koji lokalizuje signal u vremenu, ali nije vremenski ograničen:

$$w(\tau) = e^{-\tau^2/\alpha^2} \quad (1.8)$$

- *Blackman-ov prozor* je oblika:

$$w(\tau) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\tau\pi) + 0.08 \cos(2\tau\pi) & |\tau| < T \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } \tau. \end{cases} \quad (1.9)$$

- *Kaiser-ov prozor* se definiše kao:

$$w(\tau) = \begin{cases} \frac{I_0[\beta\sqrt{1-(\tau/T)^2}]}{I_0(\beta)}, & |\tau| < T \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } \tau, \end{cases} \quad (1.10)$$

gdje je $I_0(\tau)$ Bessel-ova funkcija nultog reda, a $1 \leq \beta \leq 10$ je njen parametar. Veće vrijednosti za β bi proizvele širu glavnu laticu i niže sporedne latice.

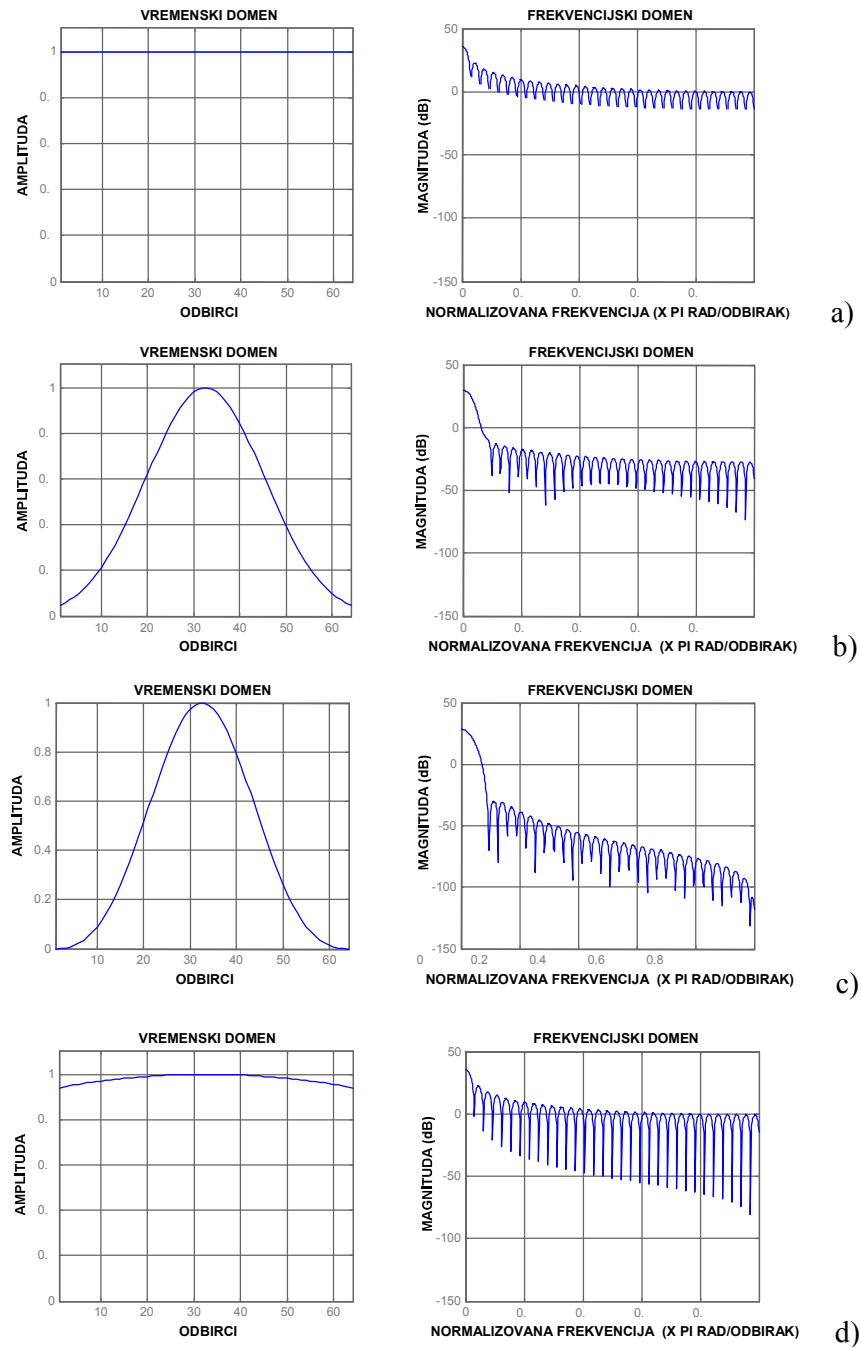
- *Hanning-ov prozor* je oblika:

$$w(\tau) = \begin{cases} 0.5(1 + \cos(\tau\pi)) & |\tau| < T \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } \tau. \end{cases} \quad (1.11)$$

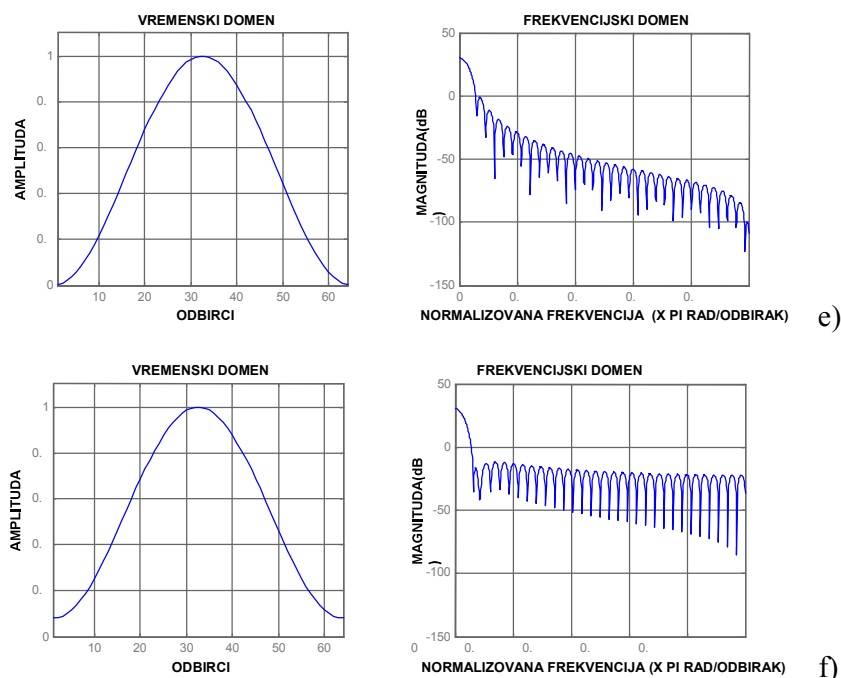
- *Hamming-ov prozor*, formalno sličan prethodnom, je oblika:

$$w(\tau) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\tau\pi) & |\tau| < T \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } \tau. \end{cases} \quad (1.12)$$

Izvedenom činjenicom o konstantnosti proizvoda vremenske i frekvencijske rezolucije, sa svojom minimalnom vrijednošću koja iznosi $1/2$, $(\Delta t)(\Delta \omega) \geq 1/2$, [1], [13], [15], [67], se u analizi signala, definiše *princip neodređenosti*.



Slika 1.2 Ilustracija prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu:
(a) Pravougaoni, (b) Gaussian-ov, (c) Blackman-ov, (d) Kaiser-ov.



Slika 1.2 (nastavak) Ilustracija prozora u vremenskom i frekvencijskom domenu:
(e) Hanning-ov, (f) Hamming-ov.

Interesantno je provjeriti da li se analizirani signal može rekonstruisati iz svoje STFT-je, odnosno da li STFT zadovoljava osobinu reverzibilnosti. U tom cilju integralimo jednačinu (1.4) po vremenu. Označavajući sa $\int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau) dt = W^* = M_w$ konstantu zavisnu od oblika upotrijebljenog prozora, pokazujemo da se rekonstrukcija signala na osnovu STFT-je može obaviti sa tačnošću do kompleksne konstante,

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi M_w} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT_x(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\tau dt \quad (1.13)$$

1D SPEC

Energetska verzija STFT-je, SPEC, se definiše kvadratom modula STFT-je:

$$SPEC_x(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (1.14)$$

U prethodnoj relaciji, (1.14), uočavamo gubitak osobine linearnosti, što uzrokuje pojavu interferencije u analizi multikomponentnih signala, [14]. Naime, međusobna interakcija pojedinih komponenti analiziranog signala, [45]-[47], [108], produkuje kros-članove, čije je prisustvo jedan od neželjenih efekata nastalih pomenutim gubitkom osobine linearnosti.

U cilju određivanja uslova pod kojima dolazi do pojave efekata interferencije kod spektrograma analizirajmo multikomponentne signale oblika:

$$x(t) = \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)}, \quad (1.15)$$

i pretpostavimo da su amplitude komponenti signala $r_i(t)$ sporopromjenljive u poređenju sa promjenama njihovih faza u okviru prozora, $r_i(t+\tau) \cong r_i(t)w(\tau)$, te da su $\phi_i(t)$ diferencijabilne funkcije, a $w(\tau)$ realan prozor,

$$STFT_x(t, \omega) = \sum_{i=1}^M r_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\phi_i(t+\tau)} w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.16)$$

Razvijajući funkciju $\phi_i(t+\tau)$ u Taylor-ov red, u okolini tačke $t=0$, dobijamo:

$$\begin{aligned} STFT_x(t, \omega) &\cong \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[\omega - \phi_i^{(1)}(t)]\tau} e^{j\phi_i^{(2)}(t) + \tau_1 \frac{\tau^2}{2}} w(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M r_i(t) e^{j\phi_i(t)} \delta(\omega - \phi_i^{(1)}(t)) \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{j\phi_i^{(2)}(t) + \tau_1 \frac{\tau^2}{2}} d\tau \end{aligned}$$

gdje je $\tau_1 \in [0, \tau]$ i $FT[\cdot]$ operator FT-je. Pretpostavljajući da je drugi izvod faza komponenti multikomponentnog signala zanemarljiv unutar prozora ($\phi_i^{(2)}(t) \cong 0$), dobijamo:

$$STFT_x(t, \omega) \cong \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r_i(t) r_j(t) e^{j[\phi_i(t) + \phi_j(t)]} \Lambda(t, \omega), \quad (1.17)$$

$$\Lambda(t, \omega) = W(\omega - \phi_i^{(1)}(t)) W^*(\omega - \phi_j^{(1)}(t)) \quad (1.18)$$

Ukoliko se spektar funkcije prozora nalazi unutar glavne latice širine W_B , $W(\omega) = 1$ za $|\omega| \leq W_B/2$, razlikujemo sljedeće moguće slučajeve:

1. Ako je $\min_i |\phi_i^{(1)}(t) - \phi_j^{(1)}(t)| > W_B$ za sve vrijednosti i, j i za dato t , energija signala je koncentrisana u auto-članovima,

$$SPEC_x(t, \omega) \cong \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r_i(t) r_j(t) e^{j[\phi_i(t) + \phi_j(t)]} \Lambda(t, \omega) \delta(i-j) = \sum_{i=1}^M r_i^2(t) |W(\omega - \phi_i^{(1)}(t))|^2 \quad (1.19)$$

2. Ako postoje l i k takvi da je $|\phi_l^{(1)}(t) - \phi_k^{(1)}(t)| < W_B$, tada, pored energije koncentrisane u auto-članovima, imamo i energiju kros-komponenti $r_l \exp(j\phi_l(t))$ i $r_k \exp(j\phi_k(t))$ lociranu između trenutnih frekvencija² (*Instantaneous Frequencies* - IF), [62], $\phi_l^{(1)}(t)$ i $\phi_k^{(1)}(t)$,

² Trenutna frekvencija predstavlja vremensko-promjenljivi parametar koji definiše lokaciju spektralnog pika signala tokom njegovog variranja u vremenu. Izračunava se kao prvi izvod faze signala po vremenu.

Fizički, ima smisla isključivo za monokomponentne signale, gdje postoji samo jedna frekvencija ili uski opseg frekvencija koje se mijenjaju kao funkcija vremena. Za multikomponentne signale, pojam jedinstvene vrijednosti trenutne frekvencije postaje besmislen, pa je broj njenih vrijednosti određen brojem komponenti signala.

U mnogim slučajevima, kao što su seizmičke, radarske, komunikacione i biomedicinske aplikacije, trenutna frekvencija je dobar deskriptor nekog fizičkog fenomena. Iz tog razloga je njena estimacija tema brojnih naučnih istraživanja, [82], [97], [99], [101], [105], [125], [131].

$$SPEC_x(t, \omega) = \sum_{i=1}^M r_i^2(t) |W(\omega - \phi_i)|^2 + \sum_{k=1}^K r_k(t) e^{j[\phi_k(t) - \phi_k(t)]} W(\omega - \phi_k) W^*(\omega - \phi_k) \quad (1.20)$$

Na osnovu izloženog zaključujemo da spektrogram ne pati od efekata interferencije među komponentama signala koje su razdvojene u TF ravni. Ipak, odsjecanje analiziranog signala funkcijom prozora predstavlja nedostatak ove reprezentacije, koji naročito dolazi do izražaja pri analizi nestacionarnih procesa (ukoliko su promjene signala suviše brze, teško je odrediti optimalnu dužinu prozora u okviru koga će signal biti relativno stacionaran). Takođe, kako se spektrogram definiše kao kvadrat modula spektra, dolazi do gubitka informacije o fazi što čini čitav postupak nereverzibilnim, za razliku od STFT-je.

STFT, odnosno spektrogram, su veoma prisutni u obradi signala. Najveći broj aplikacija uključuje vremenski-promjenljivu analizu signala, identifikaciju sistema i spektralne estimacije, detekciju signala, kodiranje govora, estimaciju trenutne frekvencije i grupnog kašnjenja, i kompleksnu demodulaciju. Neke od aplikacija tehnika sinteze koje se baziraju na STFT-ji su vremenski-promjenljivo filtriranje, nelinearno uklanjanje šuma, određivanje dinamičke udaljenosti i kompresija opsega akustičnih signala.

Diskretni oblik 1D STFT-je

Primjenjujući pravougaono pravilo integracije i teoremu o odabiranju na STFT-ju, (1.4), analiziranog signala $x(t)$ dobijamo STFT-ju diskretnog signala $x(n)$ (dobijenog odabiranjem signala $x(t)$),

$$STFT_x(n, \theta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+i) w^*(i) e^{-j\theta i} \quad (1.21)$$

gdje je T korak odabiranja, $\theta = \omega T$ diskretna učestanost, $x(n) = x(nT)$ i $STFT_x(n, \omega) = STFT_x(nT, \omega)/T$. Saglasno teoremi o odabiranju, maksimalni korak odabiranja je recipročna vrijednost dvostruke maksimalne frekvencije signala (za analizirani signal pretpostavljamo da je ograničen u frekvencijskom domenu), [65], [68]. $STFT_x(n, \theta)$ je periodična funkcija po θ , sa periodom 2π . Pretpostavimo da je sa N označena širina funkcije prozora $w(n)$. Odabiranjem prethodnog izraza u frekvencijskom domenu, sa korakom $2\pi/N$, dobijamo diskretnu STFT-ju,

$$STFT_x(n, k) = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} x(n+i) w^*(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \quad (1.22)$$

Diskretni oblik 1D SPEC-a

Pošto je spektrogram (1.14) definisan kvadratom modula STFT-je, jednostavno možemo napisati njegov diskretni oblik,

$$SPEC_x(n, k) = \left| \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} x(n+i) w^*(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \right|^2 \quad (1.23)$$

1.1.2. Višedimenzionalna STFT

Posmatrajmo n -dimenzionalni signal $x(\vec{t})$, pri čemu \vec{t} predstavlja vektor prostornih komponenti, $\vec{t} = (t_1 \ t_2 \dots \ t_n) \in R^n$, odnosno $x(\vec{t}) = x(t_1 \ t_2 \dots \ t_n)$, a $g(\vec{t})$ sporopromjenljivu n -dimenzionalnu funkciju:

$$x(\vec{t}) = g(\vec{t}) e^{j\Phi(\vec{t})}. \quad (1.24)$$

Analogno 1D slučaju koji je predstavljen jednačinom (1.4), STFT signala $x(\vec{t})$ se definiše na sljedeći način:

$$STFT(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{R^n} x(t + \vec{\tau}) w^*(\vec{t} - \vec{\tau}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{\tau}} d\vec{\tau}, \quad (1.25)$$

pri čemu je $\vec{\omega}$ vektor frekvencija, $\vec{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \dots \ \omega_n)$, koje odgovaraju prostornim komponentama $\vec{t} = (t_1 \ t_2 \dots \ t_n)$, respektivno, $d\vec{\tau}$ n -dimenzionalni diferencijalni element prostora R^n , a $w^*(\vec{t})$ n -dimenzionalna, najčešće realna funkcija prozora. Pretpostavlja se da je $w(\vec{t}) = 1$ van ograničenog n -dimenzionalnog prostora $D \subset R^n$.

Imajući u vidu da je Taylor-ov red za n -dimenzionalnu funkciju oblika $\Phi(\vec{t} + \vec{\tau})$ u okolini tačke \vec{t} :

$$\Phi(\vec{t} + \vec{\tau}) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\vec{\tau} \cdot \nabla)^i}{i!} \Phi(\vec{t}) + \frac{\vec{\tau} \cdot \nabla^m}{m!} \Phi(\vec{t}_1), \quad (1.26)$$

gdje je $\vec{t}_1 = \vec{t} + \vec{\tau}_1$ i $0 < \tau_{1h} < \tau_h$ za svako $h = 1, 2, \dots, n$, $STFT(\vec{t}, \vec{\omega})$ definisana jednačinom (1.25), dobija sljedeći oblik:

$$STFT(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} x(\vec{t} + \vec{\tau}) e^{j\Phi(\vec{t} + \vec{\tau})} e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{\tau}} d\vec{\tau} = \int_{R^n} W(\vec{\omega} - \nabla \Phi(\vec{t})) *_{\vec{\omega}} W(\vec{\omega}) *_{\vec{\omega}} FT e^{j\frac{(\vec{\omega} \cdot \nabla)^2}{2!} \Phi(\vec{t})}, \quad (1.27)$$

gdje $*_{\vec{\omega}}$ označava operator n -dimenzionalne konvolucije u odnosu na $\vec{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \dots \ \omega_n)$. Funkcija $g(\vec{t})$ se tretira kao konstanta unutar prozora $w(\vec{t})$, tj. $g(\vec{t})(\vec{\tau})w(\vec{\tau}) \cong g(\vec{t})w(\vec{\tau})$.

Višedimenzionalni SPEC

Ako se parcijalni izvodi od $\Phi(\vec{t})$ drugog i višeg reda zanemare u jednačini (1.27), tada se odgovarajući višedimenzionalni spektrogram može zapisati kao:

$$SPEC(\vec{t}, \vec{\omega}) = |STFT(\vec{t}, \vec{\omega})|^2 = |g(\vec{t})|^2 W^2(\vec{\omega} - \nabla \Phi(\vec{t})). \quad (1.28)$$

Uočimo da višedimenzionalni spektrogram zadržava sve svoje povoljne karakteristike iz 1D slučaja, pod uslovom da je ponašanje $W^2(\vec{\omega})$ blisko $(2\pi)^n \delta(\vec{\omega})$. Ako, s druge strane, parcijalni izvodi drugog i višeg reda nijesu zanemarljivi, višedimenzionalni spektrogram sadrži kros-članove, čak i u slučaju idealnog ponašanja funkcije $W(\vec{\omega})$.

1.2. Wigner-ova distribucija

Wigner-ova distribucija je, vjerovatno, najistaknutija kvadratna TF reprezentacija. Definirao je Eugen Wigner u kontekstu kvantne mehanike davne 1932. godine, [57]. Jean Andre Ville je 1948. godine uveo WD-ju u kontekst obrade signala, [58]. Matematička analiza ove distribucije, kao i srodni Weyl-ov simbol, su dati 1973. godine od strane Nicolaas Govert de Bruijn-a, [64]. Ipak, tek trodjelni naučni rad T.A.C.M. Claasen-a i W.F.G. Mecklenbrauker-a, [7]-[9], iz 1980. godine, popularizuje upotrebu WD-je u oblasti obrade signala. Od tada je objavljen impresivan broj naučnih radova koji se bave teorijskim i praktičnim aspektima Wigner-ove distribucije, [11], [18], [20], [22], [23], [26], [27], [30], [31], [52], [54], [71], [72], [99], [104], [106]-[113], [121], [124], [138]-[142], [145].

Oblasti primjene WD-je (kao i njenih verzija: prozorom ograničene WD i glatke WD) su izuzetno raznovrsne: detekcija signala, analiza govora, audio i akustika, obrada slike i analiza šablona, obrada bioloških i medicinskih signala, seizmologija, optika, dijagnostika mašina i detekcija grešaka, okeanografija, radari, kvantna mehanika, matematika itd.

1.2.1. 1D WD

Posmatrajmo 1D, vremensko-kontinualni signal $x(t)$. WD je, za ovaj signal, definisana na sljedeći način, [7],

$$WD_x(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau. \quad (1.29)$$

WD pripada klasi kvadratnih TF reprezentacija signala i u širem smislu se može interpretirati kao TF raspodjela energije signala. Ipak, treba imati u vidu da princip neodređenosti onemogućava pojedinačnu TF lokalizaciju signala, [1], [13], [15]. Usljed kvadratne prirode, WD često sadrži kros-članove (nastale usljed međusobne interakcije auto-članova signala).

WD zadovoljava veoma veliki broj matematičkih osobina koje je poželjno da jedna TF distribucija zadovolji. Neke od njih su navedene u tabeli 1.1. Ona je, takođe, istaknuti član Cohen-ove klase TF reprezentacija, [9], [13], [30]. Sve ostale TF reprezentacije iz Cohen-ove klase mogu biti izvedene iz WD-je upotrebom 2D konvolucije.

WD predstavlja FT-ju autokorelacione funkcije $R_x(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau$. Znajući da je $R_x(t, \tau)$ Hermitska funkcija³, $R_x(t, \tau) = R_x^*(t, -\tau)$, i upotrebljavajući činjenicu da je FT proizvodnje Hermitske funkcije realna funkcija, zaključujemo da je i WD realna funkcija. To predstavlja njenu veoma važnu osobinu iz opusa poželjnih osobina. Kako se WD direktno

³ Hermitska matrica je kvadratna kompleksna matrica koja je jednaka svojoj konjugovano-transponovanoj verziji.

primjenjuje na signal (na nemodifikovani, prozorom neodsječeni signal), ostvaruje značajno bolju vremensku i frekvencijsku rezoluciju od spektrograma. Ta direktna primjenljivost osim boljeg kvaliteta vremenske i frekvencijske rezolucije ima za rezultat jednostavnost pri računanju, kao i neposrednu reverzibilnost metoda. Međutim, na ovaj način nije moguće izračunavanje WD-je, osim za signale ograničenog trajanja, pri čemu se posmatra kompletan signal.

Tabela 1.1 Neke karakteristične osobine WD-je. Sa $X(\omega)$ je označena FT signala $x(t)$. Sa $\mu(A)$ je označen unitarni operator koji je pridružen unimodularnoj matrici A dimenzija 2×2 , kroz metaplektičku reprezentaciju, [75]. Specijalni slučajevi $\mu(A)$ uključuju TF skaliranje, FT-ju, množenje *chirp*-ova i konvoluciju *chirp*-ova.

TF <i>shift</i> kovarijansa	$\tilde{x}(\omega) \Theta(S_{t_0, \omega_0}) x(t) \Rightarrow WD_{\tilde{x}}(t, \omega) = WD_x(t - t_0, \omega - \omega_0)$
Realne vrijednosti	$WD_x(t, \omega) = WD_x^*(t, \omega)$
Marginalne osobine	$\int_t WD_x(t, \omega) dt = X(\omega) ^2, \int_\omega WD_x(t, \omega) d\omega = x(t) ^2$
Energija	$\int_t \int_\omega WD_x(t, \omega) dt d\omega = \ x\ ^2, \int_t \int_\omega WD_x^2(t, \omega) dt d\omega = \ x\ ^4$
Moyal-ova relacija	$\int_t \int_\omega WD_x(t, \omega) WD_y(t, \omega) dt d\omega = \langle x, y \rangle^2$
Granične relacije	$x(t) \equiv [t \notin [t_1, t_2]] \Leftrightarrow WD_x(t, \omega) \equiv 0, t \notin [t_1, t_2],$ $X(\omega) \equiv [\omega \notin [\omega_1, \omega_2]] \Leftrightarrow WD_x(t, \omega) \equiv 0, \omega \notin [\omega_1, \omega_2]$
Simplektička kovarijansa	$\tilde{x}(\omega) \Theta(\mu(A)) x(t) \Rightarrow WD_{\tilde{x}}(t, \omega) = WD_x \left(A \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} \right)$
Interferencija	$x(t) \Theta(x_1(t) + x_2(t)) \Leftrightarrow WD_x(t, \omega) = WD_{x_1}(t, \omega) + WD_{x_2}(t, \omega) + 2 \operatorname{Re} \{ WD_{x_1, x_2}(t, \omega) \}$

1D pseudo WD

Prethodno navedeni problem se rješava uvođenjem pseudo forme WD-je (PWD), [7], [11], koja omogućava upotrebu WD-je na odsječku signala $x(t)$,

$$PWD_x(t, \omega) = WD_{x_w}(t, \omega) \quad (1.30)$$

gdje je $x_w(\tau) = x(\tau)w^*(t - \tau)$. Razvijena forma pseudo WD-je je:

$$PWD_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) w^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.31)$$

Primjetimo da PWD, (1.31), predstavlja WD-ju proizvoda dva signala, odnosno konvoluciju po frekvenciji WD-je analiziranog signala, $WD_x(t, \omega)$, i WD-je funkcije prozora u trenutku $t=0$, $WD_w(0, \omega)$,

$$PWD_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} WD_x(t, \theta) WD_w(\omega - \theta) d\theta \quad (1.32)$$

Drugim riječima, pseudo forma WD-je je zaobljena verzija WD-je u pravcu ω -ose TF ravni.

Diskretni oblik 1D WD-je

Već je konstatovano da se WD-ja može predstaviti kao FT-ja autokorelacione funkcije $R_x(t)$, koja je proizvod analiziranog signala i njegove konjugovano-kompleksne vrijednosti. To znači da korak kojim odabiramo signal u vremenskom domenu mora biti dva puta manji od koraka određenog teoremom o odabiranju. Ovo je posljedica činjenice da je maksimalna frekvencija autokorelacione funkcije dva puta veća od maksimalne frekvencije analiziranog signala, f_m , [11], [68]. Prema tome, korak odabiranja potreban za diskretizaciju WD-je je:

$$T_{WD} = \frac{1}{4f_m} = \frac{T}{2}. \quad (1.33)$$

Primjenjujući postupak diskretizacije na WD-ju definisanu izrazom (1.30), najprije dobijamo WD-ju diskretnog signala $x(n)$,

$$WD_x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+i) x^*(n-i) e^{-j2\theta i} \quad (1.34)$$

a potom i diskretnu WD-ju,

$$WD_x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+i) x^*(n-i) e^{-j\frac{2\pi}{2N}2ki} \quad (1.35)$$

Uočimo da je perioda WD-je diskretnog signala $\theta_p = \pi$, tako da broj odbiraka uzet prilikom diskretizacije WD-je mora biti dva puta veći od broja odabiraka potrebnog za diskretizaciju FT-je istog signala. Dakle, ukoliko je N broj odbiraka potreban za računanje diskretne FT-je, treba uzeti $2N$ odbiraka WD-je diskretnih signala u frekvencijskom domenu po dvostrukoj periodu, 2π , da ne bi došlo do neželjenih efekata *aliasing*-a⁴.

U cilju prevazilaženja efekata *aliasing*-a najčešće se upotrebljava analitička forma realnog signala, [7]-[9], [11], [48]. Spektar analitičkog signala se dobija uzimanjem nultih vrijednosti na negativnim, odnosno dvostrukih vrijednosti spektra realnog signala na pozitivnim učestanostima. Ovim postupkom se istovremeno eliminišu kros-komponente koje su posljedica međusobne interakcije komponenti posmatranog realnog signala koje se nalaze na pozitivnim i negativnim frekvencijama, [48], [83], [114], [115], [133].

Diskretni oblik 1D PWD-je

Diskretni oblik 1D PWD-je je definisan sljedećom jednačinom:

$$PWD_x(n) = \sum_{i=-N+1}^N x(n+i) x^*(n-i) e^{-j\frac{2\pi}{2N}2ki} \quad (1.36)$$

⁴ *Aliasing* predstavlja nemogućnost raspoznavanja različitih signala nakon odabiranja, odnosno nemogućnost tačne rekonstrukcije signala iz njegovih odbiraka, [11], [48].

Pretpostavljena je realna funkcija prozora $w(n)$ širine $2N$, čime omogućavamo da diskretna PWD bude identična reprezentaciji dobijenoj izračunavanjem WD-je originalnog signala (bez odsjecanja signala funkcijom prozora). Time se prevazilazi moguća greška pri računanju PWD-je uslovljena upotrebom funkcije prozora $w(n)$.

1.2.2. 1D Weyl-ov simbol

U praksi se često, zajedno sa Wigner-ovom distribucijom, koristi i Weyl-ov simbol. Weyl-ov simbol predstavlja linearnu TF reprezentaciju linearnog sistema (operatora) koji je usko vezan sa WD-jom. Svoje korjene, poput WD-je, vuče iz kvantne mehanike, [61], [64], [75], [76], nakon čega je u matematici korišćen kao simbol za pseudodiferencijalne operatore, [75], [76]. U obradu signala je uveden kao sredstvo za karakterizaciju linearnih vremensko-promjenljivih (*Linear Time-Varying* - LTV) sistema/filtara i TF lokalizacionih operatora, [28], [32], [77].

Posmatrajmo LTV sistem (operator) H sa impulsnim odzivom $h(t, t')$. Ulazno-izlazna relacija ovog sistema je data sljedećom jednačinom:

$$y(t) = \int_{t'} h(t, t') x(t') dt'. \quad (1.37)$$

Weyl-ov simbol posmatranog sistema H je definisan kao:

$$L_H(t, \omega) = \int_{\tau} h\left(t, \tau + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\pi\omega\tau} d\tau = \int_{\tau} h\left(t, \tau + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\pi\omega\tau} d\tau, \quad (1.38)$$

pri čemu je $h\left(t, \tau + \frac{\tau}{2}\right) = h\left(t, \tau + \frac{\tau}{2}\right)$. Weyl-ov simbol predstavlja linearnu reprezentaciju sistema H i njegov impulsni odziv može biti dobijen nazad iz Weyl-ovog simbola na sljedeći način:

$$h(t, t') = \int_{\omega} L_H\left(t, \frac{t+t'}{2}\right) e^{j2\pi\omega(t-t')} d\omega, \quad (1.39)$$

što pokazuje da Weyl-ov simbol sadrži sve informacije o posmatranom sistemu.

Poređenjem definicionih jednačina za WD-ju i Weyl-ov simbol uočavamo da je WD jednaka Weyl-ovom simbolu sistema jediničnog ranga $x \otimes x^*$, čiji je impulsni odziv jednak $x(t) x^*(t')$, odnosno:

$$WD_x(t, \omega) = \mathcal{L}_{x \otimes x^*} t, \omega. \quad (1.40)$$

Još jedna važna relacija koja povezuje WD-ju i Weyl-ov simbol je:

$$\langle Hx, x \rangle = \langle L_H, WD_x \rangle = \int \int L_H(t, \omega) WD_x(t, \omega) dt d\omega, \quad (1.41)$$

pri čemu $\langle \cdot \rangle$ predstavlja operator unutrašnjeg proizvoda dva vektora. Uočimo da ne postoji konjugacija člana $WD_x(t, \omega)$ u prethodnoj jednačini, s obzirom da je WD realna funkcija.

Kvadratni oblik, (1.41), indukovani sistemom H može biti formulisan i u TF domenu sa Weyl-ovim simbolom $L_H(t, \omega)$, kao TF reprezentacijom sistema H i WD-jom $WD_x(t, \omega)$, kao pridruženom TF reprezentacijom signala. Korišćenjem ove osobine dobijamo da je:

$$L_H(t, \omega)(*)_{t, \omega} WD_x(t, \omega) = \langle Hx_{t, \omega}, x_{t, \omega} \rangle. \quad (1.42)$$

Ovo znači da je lokalna srednja vrijednost Weyl-ovog simbola (dobijena konvolucijom sa WD-jom testnog signala $x(t)$) mjera poboljšanja sistema H u okolini TF tačke (t, ω) .

1.2.3. Višedimenzionalna WD

Posmatrajmo n -dimenzionalni signal $x(\vec{t})$, pri čemu \vec{t} predstavlja vektor prostornih komponenti, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$, odnosno $x(\vec{t}) = x(t_1, t_2, \dots, t_n)$, a $g(\vec{t})$ sporopromjenljivu n -dimenzionalnu funkciju:

$$x(\vec{t}) = g(\vec{t}) e^{j\Phi(\vec{t})}. \quad (1.43)$$

Analogno 1D slučaju koji je predstavljen jednačinom (1.29), višedimenzionalnu WD-ju možemo definisati na sljedeći način:

$$WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{R^n} x(\vec{\tau}) e^{j2\pi\vec{\omega}\vec{\tau}} dT_{\vec{\tau}}, \quad (1.44)$$

pri čemu su $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ i $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, a $dT_{\vec{\tau}}$ je n -dimenzionalni diferencijalni element prostora R^n .

Razmotrimo neke od važnih matematičkih osobina gore definisane višedimenzionalne WD-je. Ove osobine zapravo generalizuju osobine WD-je 1D signala, navedene u tabeli 1.1.

TF shift kovarijansa:

WD vremensko-frekvencijski pomjerenog signala:

$$\tilde{x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = x(\vec{t} - \vec{t}_0, \vec{\omega} - \vec{\omega}_0) e^{j2\pi\vec{\omega}_0\vec{t}_0} \quad (1.45)$$

zadovoljava sljedeću jednakost:

$$WD_{\tilde{x}}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(\vec{t} - \vec{t}_0, \vec{\omega} - \vec{\omega}_0). \quad (1.46)$$

Hermitska simetrija:

WD bilo kojeg signala $x(\vec{t})$ zadovoljava Hermitsku simetriju:

$$WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x^H(\vec{t}, \vec{\omega}). \quad (1.47)$$

Dodatno, dijagonalni elementi matrice $WD_x(\vec{t}, \vec{\omega})$ su realne vrijednosti.

Marginalne osobine i očuvanje energije:

U određenom smislu WD se može interpretirati kao TF distribucija energije signala $x(\vec{t})$. Ovakva interpretacija je potkrijepljena marginalnim osobinama:

$$\int_{\vec{t}} WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) d\vec{t} = X(\vec{\omega}) X^H \vec{\omega}, \quad (1.48)$$

$$\int_{\vec{\omega}} WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) d\vec{\omega} = X(\vec{t}) X^H \vec{t}, \quad (1.49)$$

gdje $X(\vec{\omega})$ označava višedimenzionalnu FT-ju signala $x(\vec{t})$. Ove marginalne osobine dalje impliciraju očuvanje energije:

$$\int_{\vec{t}} \int_{\vec{\omega}} WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) d\vec{t} d\vec{\omega} = E_x = \int_{\vec{t}} X(\vec{t}) X^H \vec{t} d\vec{t}, \quad (1.50)$$

kao i:

$$\int_{\vec{t}} \int_{\vec{\omega}} \text{Tr}\{WD_x(\vec{t}, \vec{\omega})\} d\vec{t} d\vec{\omega} = \|x\|^2 \triangleq \int_{\vec{t}} X(\vec{t}) X^H \vec{t} d\vec{t}, \quad (1.51)$$

pri čemu Tr predstavlja trag matrice⁵.

Moyal-ova relacija:

Posmatrajmo unutrašnji proizvod signala $x(\vec{t})$ i $y(\vec{t})$:

$$\langle x, y \rangle = \int_{\vec{t}} y^H(\vec{t}) x(\vec{t}) d\vec{t}. \quad (1.52)$$

Tada je moguće zapisati sljedeću proširenu Moyal-ovu relaciju:

$$\langle WD_x, WD_y \rangle = \int_{\vec{t}} \int_{\vec{\omega}} \text{Tr}\{WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) (WD_y)^H(\vec{t}, \vec{\omega})\} d\vec{t} d\vec{\omega} = \langle x, y \rangle^2, \quad (1.53)$$

sa specijalnim slučajem $\|WD_x\|^2 = \|x\|^4$ (operator $\|\cdot\|$ je definisan jednačinom (1.51)). Uočimo da prethodna jednačina, zajedno sa jednačinama (1.46) i (1.47) implicira sljedeće:

$$\int_{\vec{t}'} \int_{\vec{\omega}'} \text{Tr}\{WD_x(\vec{t}', \vec{\omega}') (WD_w)^H(\vec{t}, \vec{\omega})\} d\vec{t}' d\vec{\omega}' = \langle x, w_{\vec{t}, \vec{\omega}} \rangle^2, \quad (1.54)$$

gdje je $w_{\vec{t}, \vec{\omega}}(\vec{t}) \triangleq S_{\vec{t}, \vec{\omega}}(\vec{t})$. Ovo znači da se lokalna srednja vrijednost WD-je (glatka WD) može interpretirati kao lokalna energija signala $x(\vec{t})$ u okolini analizirane TF tačke $(\vec{t}, \vec{\omega})$.

Granične relacije:

Granične relacije WD-je, u pogledu vremena i frekvencije, se mogu zapisati na sljedeći način:

$$x(\vec{t}) = 0, \quad \vec{t} \notin [\vec{t}_1, \vec{t}_2] \Leftrightarrow WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) = 0, \quad \vec{t} \notin [\vec{t}_1, \vec{t}_2], \quad (1.55)$$

$$X(\vec{\omega}) = 0, \quad \vec{\omega} \notin [\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2] \Leftrightarrow WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) = 0, \quad \vec{\omega} \notin [\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2]. \quad (1.56)$$

Simplektična kovarijansa:

Specifična osobina WD-je je njena kovarijansa sa linearnim transformacijama koordinata koje zadržavaju postojeću površinu. Takve transformacije koordinata su okarakterisane sa matricama A

⁵ Trag matrice predstavlja sumu elemenata koji se nalaze na glavnoj dijagonali matrice.

dimenzija $2D \times 2D$ koje pripadaju simplektičnoj⁶ grupi dimenzija $2D$. Metaplektična reprezentacija, [75], pridružuje svakoj matrici A unitarni operator $\mu(A)$. Simplektična kovarijansa Wigner-ove distribucije se karakteriše relacijom:

$$WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x \left(A \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} \right). \quad (1.57)$$

Specijalni slučajevi osobine simplektične kovarijanse su:

TF skaliranje:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{|\det D|}} x(D^{-1}\vec{t}) \\ &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(D^{-1}\vec{t}, D\vec{\omega}). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Fourier-ova transformacija:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & -IT^2 \\ -IT^2 & 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{T} X\left(\frac{\vec{t}}{T}\right) \\ &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(-T^2\vec{\omega}, \frac{1}{T^2}\vec{t}). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Množenje chirp-ova:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = e^{-j\pi\vec{t}^T C \vec{t}} x(\vec{t}) \\ &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(\vec{t}, \vec{\omega} + C\vec{t}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Konvolucija chirp-ova:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{e^{-j\pi\vec{t}^T B^{-1}\vec{t}}}{\sqrt{|\det(B)|}} * x(\vec{t}) \\ &\Leftrightarrow WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(\vec{t} + B\vec{\omega}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Interferencija:

$$WD_{\mu(A)x_1}(\vec{t}, \vec{\omega}) + WD_{\mu(A)x_2}(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_{\mu(A)x}(\vec{t}, \vec{\omega}) + WD_{x_2}(\vec{t}, \vec{\omega}) + WD_{x_1, x_2}(\vec{t}, \vec{\omega}). \quad (1.62)$$

Višedimenzionalna PWD

PWD n -dimenzionalnog signala $x(\vec{t})$, (1.43), je definisana na sljedeći način:

$$PWD(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{R^n} x^*(\vec{t} - \vec{\tau}) x(\vec{\tau}) e^{-j\vec{\omega}^T \vec{\tau}} d\vec{\tau}, \quad (1.63)$$

⁶ Simplektična matrica A je matrica jedinične determinante, dimenzija $2D \times 2D$, čiji su elementi realne vrijednosti, a pri tome zadovoljava jednakost $A^T \Omega A = \Omega$ (A^T je transponovana matrica A , a Ω je nesingularna, dijagonalno simetrična matrica).

pri čemu je $w_s(\vec{x}/\vec{z})/w^* = -\vec{\tau}$. Nakon zamjene signala $x(\vec{t})$, (1.43), u jednačinu (1.63) i razvoja $\Phi(\vec{t}, \vec{z})$ i $\Phi(\vec{t}, \vec{\tau})$ u Taylor-ov red, dobija se sljedeći izraz za PWD-ju:

$$PWD(\vec{t}, \vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\vec{\tau} \left| g(\vec{t}) \right|^2 \delta(\vec{\omega} - \nabla \Phi(\vec{t}, \vec{\tau})) *_{\vec{\omega}} W_s(\vec{\omega}) *_{\vec{\omega}} FT \left[e^{j \frac{(\vec{z}) \cdot \nabla}{3!} [\Phi(\vec{t}) + \Phi(\vec{t}_2)]} \right]. \quad (1.64)$$

PWD obezbjeđuje idealnu TF reprezentaciju signala, ukoliko su treći i parcijalni izvodi višeg reda za $\Phi(\vec{t})$ zanemarljivi.

1.2.4. Višedimenzionalni Weyl-ov symbol

Posmatrajmo LTV n -dimenzionalni sistem H sa impulsnim odzivom $H(\vec{t}, \vec{\tau}) = \langle \mathbf{q}_{k,l} \rangle \vec{t}^T$. Ovaj sistem mapira n -dimenzionalni vektorski signal $x(\vec{t})$ u drugi n -dimenzionalni vektorski signal $y(\vec{t})$, te je njegova ulazno-izlazna relacija data jednačinom:

$$y(\vec{t}) = \int_{\vec{\tau}} H(\vec{t}, \vec{\tau}) x(\vec{\tau}) d\vec{\tau}. \quad (1.65)$$

Analogno 1D slučaju koji je predstavljen jednačinom (1.38), Weyl-ov simbol n -dimenzionalnog sistema H je definisan matricnom funkcijom:

$$L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{\tau}} H(\vec{t}, \vec{\tau}) d\vec{\tau} + \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{t} - \frac{\vec{\tau}}{2} e^{-j2\pi \vec{\omega}^T \vec{\tau}} \cdot \vec{\tau}. \quad (1.66)$$

Višedimenzionalna WD, (1.44), je jednaka višedimenzionalnom Weyl-ovom simbolu sistema jediničnog ranga $x \otimes x^H$, čiji je impulsni odziv jednak $x(\vec{t})x^H(\vec{t})$, odnosno:

$$H = x \otimes x^H \Leftrightarrow L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) = WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}). \quad (1.67)$$

Još jedna veza između WD-je i Weyl-ovog simbola je prikazana sljedećom relacijom:

$$\langle L_H, WD_x \rangle = \langle Hx, x \rangle. \quad (1.68)$$

1.3. S-metod

S-metod, [108], je izveden sa ciljem očuvanja kvaliteta reprezentacije auto-članova signala koji se postiže Wigner-ovom distribucijom, bez ili sa djelimično redukovanim kros-članovima. Ovaj metod ne zahtijeva preodabiranje, niti proračun analitičkog signala, pošto se efekti *aliasing*-a kontrolišu na isti način kao i kros-članovi. Realizacija SM-a je bazirana na STFT-ji. Ovo je veoma važna činjenica, pošto se sistemi za TF analizu koji koriste spektrogram (energetsku verziju STFT-je) već nazivaju klasičnima i veoma su korišćeni u praksi. Pomenute osobine čine SM atraktivnim za praktičnu implementaciju i upotrebu.

1.3.1. 1D SM

Posmatrajmo 1D, vremensko-kontinualni signal veoma dugog trajanja $x(t)$, odnosno njegove odbirke $x(n)$. Spektralne komponente ovog signala u okolini trenutka t se mogu dobiti korišćenjem STFT-je, u formi spektrograma:

$$SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) x(t + \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (1.69)$$

gdje je $w(\tau)$ funkcija prozora širine T , od čijeg oblika je ovaj metod veoma zavisian.

U posljednje dvije decenije najčešće korišćeni metodi za TF analizu su bazirani na WD-ji ili na PWD-ji (za signale veoma dugog trajanja):

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} w\left(\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.70)$$

Veza između $WD(t, \omega)$, zapisane izrazom (1.70), i $STFT(t, \omega)$, zapisane izrazom (1.69), je data sljedećom jednačinom:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} STFT(t, \omega + \theta) STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta \quad (1.71)$$

gdje $*$ označava konvoluciju u frekvenciji. Ako uvedemo uski prozor $P(\theta)$, dobijamo definicionu jednačinu SM-a, [108]:

$$\begin{aligned} SM(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\theta) STFT(t, \omega + \theta) STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(2\theta) STFT(t, \omega + \theta) STFT^*(t, \omega - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ova formula vodi do računski veoma efikasne TF reprezentacije, koja je kvalitativno i numerički prilično različita od WD-je.

Posmatrajmo neke korisne efekte koji se ostvaruju odgovarajućim izborom prozora $P(\theta)$. Specijalni slučajevi:

1. Ako je $P(\theta) = \pi\delta(\theta)$, dobija se spektrogram, odnosno $SM(t, \omega) = SPEC(t, \omega)$.
2. Ako je $P(\theta) \equiv 1$, za svako θ , dobija se PWD.

Navedeni specijalni slučajevi sugerišu ideju o distribuciji koja će, s jedne strane, sačuvati dobre osobine spektrograma i WD-je, dok će, s druge strane, eliminisati nedostatke sa kojima se ove dvije distribucije srijeću. Poznato je, naime, da spektrogram ne generiše kros-članove između komponenti signala razdvojenih u TF ravni, za razliku od WD-je, kojoj je njihovo prisustvo veliki nedostatak. Takođe, spektrogram ima značajno manju rezoluciju i selektivnost koju su uzrokovane korišćenjem prozora za odsijecanje signala, što je mnogo manje izraženo u

slučaju WD-je. Na kraju, interval odabiranja kod spektrograma mora biti uzet saglasno teoremi o odabiranju, dok kod WD-je signal mora biti preodabran sa faktorom 2.

Množenje konvolucionog proizvoda (1.72) sa uskim prozorom $P(\theta)$ će redukovati ili kompletno ukloniti prisustvo kros-članova. Ako je, pak, vremenski prozor $w(\tau)$ takav da komponente STFT-je nijesu udaljene od trenutne frekvencije, konvergencija unutar prozora $P(\theta)$ je brza. Posmatrana distribucija ima gotovo isti kvalitet reprezentacije auto-članova kao i WD, ali bez prisustva kros-članova.

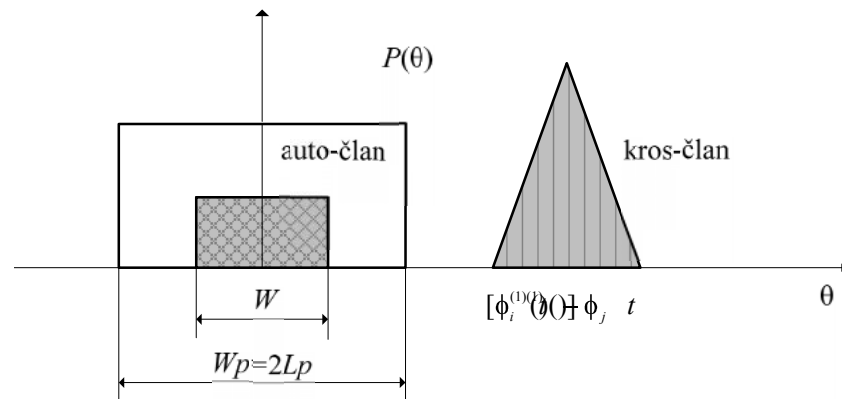
Izvedimo minimalnu širinu prozora $P(\theta)$, kojom se postiže prethodno navedeno. Posmatrajmo stacionarni monokomponentni signal $x(t)$, čija je STFT koncentrisana oko frekvencije ω_0 , $|\omega - \omega_0| < W$. Integraljenje kod SM-a po auto-članu u cjelini se obavlja ukoliko je $P(\theta)$ pravougaoni prozor, odnosno, $P(\theta) = 1$ za $|\theta| < L_p$, takav da je $L_p \geq W$. Radi smanjenja kompleksnosti računanja i eventualnog potiskivanja efekata interferencije uzimamo konstantnu i minimalnu moguću širinu prozora $L_p = W$. Izborom prozora $P(\theta)$ konstantne širine (za svako t i ω) postiže se koncentracija signala analogna onoj koja se postiže upotrebom PWD-je, [127], [136].

1D signal-zavisni SM

Kako se integraljenje kod SM-a vrši po proizvodu STFT-je signala i njene konjugovano-kompleksne vrijednosti, jednostavno se može zaključiti da je širinu prozora $P(\theta)$ moguće dalje sužavati, obezbjeđujući integraljenje samo u domenu postojanja STFT-je analiziranog signala, slika 1.3. Naime, širina prozora $L_p = W$ je neophodna samo u centralnoj tački $\omega = \omega_0$, dok je integraljenje nepotrebno u onim tačkama TF ravni u kojima STFT signala uzima nulte vrijednosti, tj. $P(\theta) = 0$ za $|\omega - \omega_0| \geq W$. Među ovim marginalnim slučajevima, frekvencijski zavisna širina prozora $L_p(\omega)$ linearno opada od svoje maksimalne vrijednosti W do 0, tako da je optimalna širina prozora $P(\theta)$, na datoj frekvenciji,

$$L_p(\omega) = \begin{cases} W - |\omega - \omega_0|, & |\omega - \omega_0| < W \\ 0, & |\omega - \omega_0| \geq W. \end{cases} \quad (1.73)$$

Ako posmatramo sumu frekvencijski modulisanih signala, kros-članovi će se pojaviti (u trenutku t) jedino ako je udaljenost između trenutnih frekvencija manja od širine prozora $P(2\theta)$ uvećane za širinu auto-člana. Odabirom odgovarajućeg prozora $P(\theta)$ koncentracija auto-članova WD-je može biti očuvana, a kros-članovi izbjegnuti. Dakle, kros-članovi će se pojaviti samo u dijelu TF ravni između dvije veoma bliske trenutne frekvencije.



Slika 1.3 Uticaj prozora $P(\theta)$ na eliminisanje ili ublažavanje efekata interferencije.

Posmatrajmo M -komponentni signal $x(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t)$. Pretpostavimo da se STFT svake njegove pojedinačne komponente $x_i(t)$ nalazi u TF domenu $D_i(t, \omega)$, $i=1, 2, \dots, M$. Označimo sa $2W_i(t)$ širinu i -tog domena po ω za posmatrani vremenski trenutak t , a njegovu centralnu frekvenciju sa $\omega_{0i}(t)$. U jednačini (1.72) će se obaviti potpuno integraljenje po auto-članovima uz eliminisanje efekata interferencije, odnosno biće $SM(t, \omega) = \sum_{i=1}^M P W D_i(t, \omega)$, ukoliko:

- se domeni $D_i(t, \omega)$, $i=1, 2, \dots, M$, ne preklapaju u TF ravni, odnosno za svako $i \neq j$ važi da je $D_i(t, \omega) \cap D_j(t, \omega) = \emptyset$
- širina prozora $P(t, \omega)$, koja je promjenljiva u vremenu i po frekvenciji, zadovoljava jednačinu:

$$L_p(t, \omega) = \begin{cases} W_i(t) |\omega - \omega_{0i}(t)| & \text{if } \omega \in D_i(t, \omega) \quad i = 1, 2, \dots, M \\ 0, & \text{if } \omega \notin D_i(t, \omega) \quad i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (1.74)$$

Ovim je definisana signal-zavisna forma S-metoda, [108],

$$SM_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta) STFT_f(t, \omega + \theta) STFT_f^*(t, \omega - \theta) d\theta \quad (1.75)$$

O 1D signal-zavisnom SM-u će biti još riječi u nastavku ove glave. Vratimo se sada na (1.72), odnosno na SM sa konstantnom širinom prozora. Razmotrimo analizu M -komponentnog signala $x(t)$, kod koga su širine STFT-je pojedinih komponenti različite. Odaberimo prozor $P(\theta)$ takav da je njegova širina $\max_i \{2W_i, i=1, 2, \dots, M\}$. Na ovaj način se sigurno postiže maksimalna koncentracija svih komponenti signala oko njihovih trenutnih frekvencija. U najvećem dijelu TF ravni, sa izuzetkom centralne tačke ω_{0i} najšire komponente analiziranog signala, ovakav prozor je preširok, odnosno, neodgovarajući za gotovo sve komponente multikomponentnog signala, što se negativno odražava na redukovanje efekata interferencije,

kompleksnost računanja, [108], kao i na uticaj šuma na TF reprezentaciju signala. Sa druge strane, ukoliko odaberemo suviše uzak prozor posljedica će biti niska koncentracija signala na trenutnoj frekvenciji, posebno kod visoko nestacionarnih komponenti signala.

Signal-zavisni SM, (1.75), uz uslov razdvojenosti komponenti multikomponentnog signala u TF ravni, pruža reprezentaciju analiziranog signala oslobođenu efekata interferencije. Ipak, ukoliko uslov razdvojenosti komponenti multikomponentnog signala u TF ravni nije ispunjen, odnosno ako dolazi do preklapanja komponenti $x_i(t)$ i $x_j(t)$ u vremenskom trenutku t , nemoguće je potisnuti kros-komponente među njima. Signal-zavisni SM, (1.75), će u tom slučaju kros-komponente predstaviti u svojoj punoj formi, za razliku od SM-a sa prozorom konstantne širine koji će tada biti znatno efikasniji u njihovoj redukciji.

Diskretni oblik 1D SM-a

Diskretni oblik 1D SPEC-a je dat jednačinom:

$$SPEC(n, k) = |STFT(n, k)|^2 = \left| \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} w(i) x(n+i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ik} \right|^2 = \left| \sum_{i=0}^{N-1} x_n(i) W_N^{ik} \right|^2 \quad (1.76)$$

gdje su $x_n(i) = w(i) x(n+i)$ i $W_N^{ik} = e^{-j\frac{2\pi}{N}ik}$.

Diskretni oblik 1D WD-je je dat jednačinom:

$$WD(n, k) = \sum_{m=-N+1}^N w^*(-m) x(n+m) x^*(n-m) W_{2N}^{2mk} \quad (1.77)$$

pri čemu su diskretni signal i prozor u (1.77) odabrani sa polovinom intervala odabiranja koji je pretpostavljen za (1.76).

Shodno jednačinama (1.76) i (1.77), diskretni oblik SM-a se može zapisati jednačinom:

$$SM(n, k) = \sum_{i=-L}^L P_d(i) STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) \quad (1.78)$$

pri čemu $2L+1$ predstavlja širinu diskretnog prozora $P_d(i)$. Ukoliko je $P_d(i) = \delta(i)$, tada je $SM(n, k) = SPEC(n, k)$. Takođe, važi sljedeće:

$$\begin{aligned} STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) + STFT(n, k-i) STFT^*(n, k+i) = \\ = 2\text{Real}\{STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i)\} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Pretpostavljajući da je $P_d(i)$ prozor pravougaonog oblika, imamo da je:

$$SM(n, k) = \text{Real}\{k\}^2 + \left(\sum_{i=1}^L P_d(i) \right) (STFT(n, k+i) STFT^*(n, k-i) + STFT(n, k-i) STFT^*(n, k+i)) \quad (1.80)$$

Za proračun WD-je, interval odabiranja mora biti manji od polovine intervala odabiranja određenog teoremom o odabiranju. U frekvencijskom domenu to znači da računanje konvolucije

može biti izvedeno korišćenjem FFT nakon odgovarajućeg *zero padding*-a⁷. Za diskretni SM *zero padding* u frekvencijskom domenu (odnosno, preodabiranje u vremenskom domenu) nije neophodan, jer će komponente *aliasing*-a biti uklonjene na isti način kao kros-komponente. Ako pretpostavimo da je $STFT(n, k) = STFT(n, k + N)$, *aliasing* se može desiti samo u graničnim intervalima čija je širina jednaka širini prozora $P_d(\bar{\omega})$. Ali ovo nije neophodna pretpostavka, jer jednačina (1.80) omogućava direktno izračunavanje. Članovi koji sadrže vrijednosti $STFT(n, k \pm j)$ van osnovnog perioda, mogu jednostavno biti izostavljeni. U najgorem slučaju, granične vrijednosti diskretnog SM-a će uvijek biti jednake vrijednostima spektrograma u tim tačkama.

1.3.2. Višedimenzionalni SM

Posmatrajmo n -dimenzionalni signal $x(\vec{t})$, pri čemu \vec{t} predstavlja vektor prostornih komponenti, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$, odnosno $x(\vec{t}) = x(t_1, t_2, \dots, t_n)$, a $g(\vec{t})$ sporopromjenljivu n -dimenzionalnu funkciju:

$$x(\vec{t}) = g(\vec{t}) e^{j\Phi(\vec{t})}. \quad (1.81)$$

Kao što je već istaknuto, najjednostavnija prostorno-frekvencijska distribucija je STFT:

$$STFT(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{R_n} x(\vec{t} + \vec{\tau}) w^*(\vec{\tau}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{\tau}} dT_{\vec{\tau}}, \quad (1.82)$$

pri čemu je $\vec{\omega}$ vektor frekvencija, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, koje odgovaraju prostornim komponentama $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, respektivno, $dT_{\vec{\tau}}$ n -dimenzionalni diferencijalni element prostora R^n , a $w^*(\vec{\tau})$ n -dimenzionalna, najčešće realna funkcija prozora. Pretpostavlja se da je $w(\vec{\tau}) = 1$ van ograničenog n -dimenzionalnog prostora $D \subset R^n$.

SM, kao n -dimenzionalna distribucija koja daje visoko koncentrisane auto-članove sa redukovanim uticajem interferencije, se definiše, analogno 1D slučaju, na sljedeći način, [129]:

$$SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\vec{\theta}} \int_{\vec{\theta}} STFT(\vec{t}, \vec{\omega} + \vec{\theta}) STFT^*(\vec{t}, \vec{\omega} - \vec{\theta}) d\vec{\theta}. \quad (1.83)$$

Za veoma uzak frekvencijski prozor $P(\vec{\omega}) = \pi^n \delta(\vec{\omega})$, višedimenzionalni S-metod se svodi na višedimenzionalni spektrogram, (1.28), $SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = SPEC(\vec{t}, \vec{\omega})$, dok se za veoma širok frekvencijski prozor $P(\vec{\omega}) = 1$, svodi na višedimenzionalnu PWD-ju, (1.63), $SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = PWD(\vec{t}, \vec{\omega})$.

Za frekvencijski prozor oblika:

⁷ *Zero padding* je veoma jednostavna metoda koja se često koristi u analizi i obradi signala. Podrazumijeva dopunjavanje signala nulama u vremenskom domenu, u cilju poboljšanja rezolucije u frekvencijskom domenu, [65], [68].

$$P(\vec{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta_1| \leq \Delta_1, |\theta_2| \leq \Delta_2, \dots, |\theta_n| \leq \Delta_n \\ 0, & \text{drugdje,} \end{cases} \quad (1.84)$$

uz adekvatno odabrane širine $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, [119], višedimenzionalni SM će dati auto-članove veoma bliske onima koje daje višedimenzionalna WD, izbjegavajući, u najvećoj mjeri, kros-članove:

$$SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = \sum_{m=1}^M PWD_{mm}(\vec{t}, \vec{\omega}) \quad (1.85)$$

Funkcija jezgra u slučaju n -dimenzionalnog SM-a uzima oblik, [129]:

$$\Pi(\vec{t}, \vec{\omega}) = (2\pi)^n \mathcal{W}D(\vec{t}, \vec{\omega}), \quad (1.86)$$

pri čemu $p(\vec{\theta})$ predstavlja inverznu FT-ju frekvencijskog prozora $P(\vec{\theta})$, $p(\vec{\theta}) = \mathcal{F}\{P(\vec{\theta})\}$.

1.4. Wigner-ova distribucija oslobođena prisustva kros-članova

Više puta do sada je istaknuto da, među svim kvadratnim TF distribucijama, klasična WD generiše optimalnu reprezentaciju auto-članova signala (svaka komponenta signala pojedinačno dostiže maksimalnu koncentraciju). Ona značajno poboljšava nisku koncentraciju koje daju konvencionalni TF alati, STFT i SPEC. Veza između WD-je i SPEC-a je jednostavna. Za slučaj kontinualnih signala ona je predstavljena jednačinom (1.71), a za slučaj diskretnih signala se može zapisati na sljedeći način:

$$WD_x(n, k) = \left| \sum_{i=1}^{N/2} STFT_x(n, k+i) STFT_x^*(n, k-i) \right|^2 \quad (1.87)$$

Zbog konvolucije odbiraka STFT-je u jednačinama (1.71) i (1.87), na kompletnom frekvencijskom opsegu, WD takođe generiše neželjene kros-članove u slučaju multikomponentnih signala.

Wigner-ova distribucija oslobođena prisustva kros-članova, CTFWD, [88], [91], [92], zadržava željenu koncentraciju auto-članova u slučaju monokomponentnih signala, kao i u slučaju multikomponentnih signala čije se komponente ne preklapaju. Istovremeno, ona simultano redukuje kros-članove koje generiše WD, odnosno u slučaju nepreklapajućih komponenti multikomponentnog signala u potpunosti ih eliminiše.

1.4.1. 1D CTFWD (1D signal-zavisni SM)

Da bi se redukovalo/eliminiralo prisustvo kros-članova koje generiše WD, konvolucija odbiraka STFT-je u jednačini (1.87) mora biti ograničena⁸. Ipak, da bi se sačuvala prezentacija

⁸ Ograničavanje konvolucije odbiraka STFT-je se, za slučaj kontinualnih signala, vrši u jednačini (1.71).

auto-članova koju daje WD, konvolucija u jednačini (1.87), u proizvoljnoj tački (n,k) , mora biti izvršena sve dok je $|STFT_x(n, k \pm i)| \neq 0$, odnosno u slučaju zašumljenih signala sve dok se ne detektuje $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < R^2$. Ovo rezultuje CTFWD-jom u 1D slučaju, koja je definisana izrazom, [88]:

$$CTFWD_x(n, k) = |STFT_x(n, k)|^2 + \left(\sum_{i=1}^{L(n, k)} |STFT_x(n, k+i)|^2 + |STFT_x(n, k-i)|^2 \right), \quad (1.88)$$

pri čemu je $L(n, k) \leq L_m$ signal adaptivna širina pravougaonog prozora, uvedenog da ograniči konvoluciju u definicionoj jednačini za WD-ju. L_m je maksimalna širina tog prozora, određena najširim auto-članom analiziranog multikomponentnog signala, $2L_m + 1 \geq \max_{1 \leq i \leq q} \{Astft_i\}$, gdje su $Astft_i, i=1,2,...,q$ različite širine domena auto-članova 2D STFT-je.

Referentni nivo R^2 se definiše na osnovu *a priori* saznanja o opsegu analiziranog signala, što je posebno praktično u slučajevima kada je signal dobijen na izlazu A/D konvertora, odnosno kada je korišćen u hardverskoj implementaciji. Tada signal mora biti unutar *a priori* predefinisane opsega, kako bi na optimalan način koristio dostupni A/D konvertor i registre upotrebljavane u realizaciji. Vrijednost referentnog nivoa R^2 se, stoga, izračunava kao nekoliko procenata maksimalno očekivane vrijednosti SPEC-a. Ukoliko *a priori* saznanje o opsegu signala nije dostupno ili nije pouzdano, referentni nivo R^2 se određuje kao nekoliko procenata maksimalne vrijednosti SPEC-a u posmatranom trenutku vremena n , [120], [123]. Na bazi opsežnog eksperimentalnog istraživanja sprovedenog u [120] i [123] utvrđeno je da je CTFWD prilično neosjetljiva na vrijednost referentnog nivoa R^2 , te da je vrijednost R^2 uzeta iz intervala od 0.1%-10% maksimalne vrijednosti SPEC-a uglavnom adekvatna.

Granice svakog domena STFT-je auto-člana signala koincidiraju sa detekcijom $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < R^2$ u okolini odgovarajuće komponente signala. To znači da je $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 \geq R^2$ za $i = 0, 1, \dots, L(n, k)$ u svakoj tački (n, k) iz domena STFT-je auto-člana, odnosno $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < R^2$ za svako i van ovog domena. Stoga, $L(n, k)$ uzima različite vrijednosti u različitim TF tačkama:

- nulu ($L(n, k)=0$) van domena STFT-je auto-člana i na njegovim granicama (za slučaj čistog signala),
- veće vrijednosti unutar ovih domena,
- maksimalne vrijednosti (L_m) samo u centralnim tačkama najširih domena.

U slučaju zašumljenog signala, zavisno od distribucije šuma i odabira vrijednosti za R^2 , $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 \geq R^2$ može biti zadovoljeno i u pojedinim tačkama (n, k) koje postoje van domena STFT-je auto-članova signala. To implicira nenulte vrijednosti za $L(n, k)$ u ovim tačkama.

Po definiciji, u različitim TF tačkama (n, k) CTFWD-ja, (1.88), uključuje različit broj sabiraka (samo one sabirke koji su neophodni sa aspekta ukupne energije svakog auto-člana pojedinačno generisanog WD-jom):

- samo prvi sabirak, $|STFT_x(n, k)|^2 = SPEC_x(n, k)$, u tačkama koje se nalaze van domena auto-članova STFT-je,
- veći broj sabiraka u tačkama koje se nalaze unutar ovih domena,
- maksimalan broj (L_m) sabiraka samo u centralnim tačkama najšireg auto-člana STFT-je.

Ovo rezultuje redukovanjem 1D CTFWD-je na 1D SPEC van domena auto-članova 1D STFT-je, odnosno na 1D WD-ju unutar njih.

Uočimo, još jednom, da se 1D CTFWD-ja suštinski poklapa sa 1D signal-zavisnim SM-om, odnosno da ove dvije TF distribucije rezultuju istom reprezentacijom signala u TF ravni.

1.4.2. 2D CTFWD

Proširimo prethodno analizu na slučaj dvodimenzionalnih signala, odnosno izvedimo definicionu jednačinu za 2D CTFWD-ju. Ona će intenzivno biti korišćena u disertaciji.

Kao što je već rečeno, 2D STFT, njena energetska verzija, 2D SPEC, i 2D WD su konvencionalni matematički metodi koji se koriste u prostorno-frekvencijskoj analizi signala. Njihove definicije, u vektorskom obliku su:

$$STFT(\vec{n}, \vec{k}) = \sum_{\vec{m}} w(\vec{m}) f(\vec{n} + \vec{m}) e^{-j\vec{k}\vec{m}}, \quad (1.89)$$

$$WD(\vec{n}, \vec{k}) = \sum_{\vec{m}} w(\vec{m}) f(\vec{n} + \vec{m}) f^*(\vec{n} - \vec{m}) e^{-j2\vec{k}\vec{m}}, \quad (1.90)$$

pri čemu je $w(\vec{m}) = w(m_1, m_2)$ 2D, najčešće parni i realni prozor dimenzija $N \times N$. Ovaj prozor je centriran u tački $\vec{n} = (n_1, n_2)$ i koristi se za odsijecanje analiziranog signala $f(\vec{n})$. Ipak, ove S/SFD-je ispoljavaju ozbiljne nedostatke, o kojima se detaljno govorilo u poglavljima 1.1. i 1.2., a koji značajno limitiraju njihovu upotrebu. Iz jednačina (1.89) i (1.90) slijedi direktna veza između 2D STFT-je i 2D WD-je, [112]:

$$\begin{aligned} WD(\vec{n}, \vec{k}) &= \sum_{\vec{i}} STFT(\vec{n}, \vec{k} + \vec{i}) STFT^*(\vec{n}, \vec{k} - \vec{i}) = \\ &= |STFT(\vec{n}, \vec{k})|^2 + 2 \sum_{i_1=0}^{N/2} \sum_{i_2=1}^{N/2} \text{Re}\{STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2)(STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2 - i_2))\} \\ &+ 2 \sum_{i_1=1}^{N/2} \sum_{i_2=0}^{N/2} \text{Re}\{STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2 - i_2)(STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2 + i_2))\}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

2D WD značajno poboljšava koncentraciju postignutu sa 2D SPEC-om (dobija se iz prethodne jednačine za $i_1=i_2=0$), ostvarujući maksimalnu koncentraciju svake komponente

signala pojedinačno i rezultujući optimalnom prezentacijom auto-članova [80], [112], [138], [139], [141], [142]. Međutim, 2D WD simultano generiše i neželjene kros-članove u slučaju multikomponentnih signala. Ovaj problem mogu potisnuti prostorno-frekvencijske RID distribucije, čuvajući pritom marginalne osobine. Ipak, ove distribucije imaju računski veoma zahtjevne definicije, čak i u 1D slučaju, [13], [30], [108], što značajno ograničava njihovu primjenljivost. Nasuprot RID distribucijama, 2D SM, [112], redukuje prisustvo kros-članova uz očuvanje optimalnog (2D WD) kvaliteta reprezentacije auto-članova. Ipak, kako bi sačuvao kvalitet reprezentacije svakog auto-člana pojedinačno, 2D SM mora odgovarati najširoj komponenti signala. To može biti neadekvatno u većini S/SF tačaka i može negativno uticati na redukciju kros-članova i računsku složenost, [108], [112], kao i na potiskivanje uticaja šuma, [117].

U cilju redukovanja kros-članova koje generiše 2D WD (ili njihove kompletne eliminacije, za slučaj nepreklapajućih komponenti signala) 2D konvolucija iz jednačine (1.91) mora biti ograničena van domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i = 1, \dots, q$ auto-članova 2D STFT-je q -komponentnog signala, slika 1.4. Kako bi se sačuvala prezentacija auto-članova koju daje 2D WD, 2D konvolucija mora biti obavljena unutar ovih domena, uključujući u sumiranje samo nenulte članove iz jednačine (1.91). U te svrhe, jednačina (1.91) je preuređena i ograničena na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 CTFWD(\vec{n}, \vec{k}) = & \sum_{i_1=0}^{L_1(\vec{n}, \vec{k})} \left(\text{Re} \{ STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2) \} STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2) + \right. \\
 & + 2 \sum_{i_2=1}^{L_2(\vec{n}, \vec{k}) + 1} \text{Re} \{ STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2 + i_2) \} STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2 - i_2) \Big) + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{L_1(\vec{n}, \vec{k})} \left(\text{Re} \{ STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2) \} STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2) + \right. \\
 & + 2 \sum_{i_2=1}^{L_2(\vec{n}, \vec{k}) - 1} \text{Re} \{ STFT(\vec{n}, k_1 + i_1, k_2 - i_2) \} STFT^*(\vec{n}, k_1 - i_1, k_2 + i_2) \Big)
 \end{aligned} \quad (1.92)$$

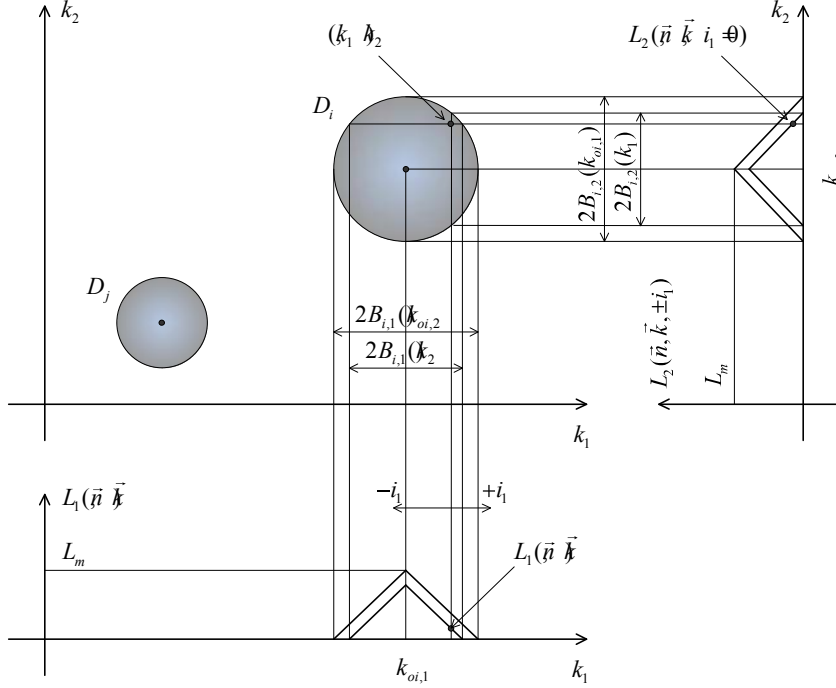
gdje je $\vec{L}(\vec{n}, \vec{k}) = (L_1(\vec{n}, \vec{k}), L_2(\vec{n}, \vec{k}))$ širina signal adaptivnog pravougaonog konvolucionog 2D prozora, centriranog u (k_1, k_2) , $i = 1, \dots, N$ i uvedenog u cilju ograničavanja 2D konvolucije u jednačini (1.91).

Širina 2D konvolucionog prozora $\vec{L}(\vec{n}, \vec{k})$ uzima sljedeće vrijednosti:

$$\vec{L}(\vec{n}, \vec{k}) = \begin{cases} (B_{i,1}(\vec{n}, k_2) - k_2, B_{i,1}(\vec{n}, k_2) + k_2) & \text{van } D_i(\vec{n}, \vec{k}) \\ \vec{0}, & \text{unutar } D_i(\vec{n}, \vec{k}) \end{cases} \quad (1.93)$$

$2B_{i,1}(\vec{n}, k_2)$ i $2B_{i,2}(\vec{n}, k_1 \pm 1)$ označavaju širine domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$ (u pravcima k_1 i k_2) za dato k_2 i za dato $k_1 \pm 1$, $i = 1, \dots, q$, respektivno, dok \vec{L}_m predstavlja maksimalnu širinu 2D

konvolucionog prozora određenu najširim domenom $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i=1, \dots, q$ i njegovom odgovarajućom lokalnom frekvencijom \vec{k}_{oi} , slika 1.4., $2L_m + 1 \geq \max_{1 \leq i \leq q} \{Astft_i\}$, gdje su $Astft_i$, $i=1, 2, \dots, q$ različite širine domena auto-članova 2D STFT-je. U proizvoljnoj tački (k_1, k_2) ovo znači sljedeće:



Slika 1.4 Ilustracija algoritma izračunavanja 2D CTFWD-je.

- (i) Sumiranje sa $+i_2$ (ograničeno sa $L_2(\vec{n}, \vec{k} + \vec{i}_2)$), za svako $i_1, i_1 = 0, \dots, L_1(\vec{n}, \vec{k})$ se obavlja sve dok se ne detektuje $|STFT(\vec{n}, k_1 \pm i_1, k_2 \pm i_2)|^2 < R^2$, $i_2 = 0, \dots, L_2(\vec{n}, \vec{k} + \vec{i}_2)$, nakon čega se nastavlja sumiranje u pravcu $-i_2$. Referentni nivo R^2 determiniše širine domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i=1, \dots, q$ tako što se elementi 2D STFT-je, čija je apsolutna vrijednost manja od R , zanemaruju tokom izračunavanja izraza (1.92).
- (ii) Sumiranje sa $-i_2$ (ograničeno sa $L_2(\vec{n}, \vec{k} - \vec{i}_2)$), za svako $i_1, i_1 = 1, \dots, L_1(\vec{n}, \vec{k})$ se obavlja sve dok se ne detektuje $|STFT(\vec{n}, k_1 \pm i_1, k_2 \mp i_2)|^2 < R^2$, $i_2 = 0, \dots, L_2(\vec{n}, \vec{k} - \vec{i}_2)$, nakon čega se nastavlja sumiranje za sljedeću vrijednost i_1 .
- (iii) Sumiranje sa i_1 se obavlja sve dok se ne detektuje $|STFT(\vec{n}, k_1 \pm i_1, k_2)|^2 < R^2$, $i_1 = 0, \dots, L_1(\vec{n}, \vec{k})$, što odgovara detekciji prvog nultog člana sume (1.91) koji nije pomnožen sa 2. Ovo rezultuje završetkom računanja u posmatranoj tački (k_1, k_2) .

Uočimo da jednačina (1.92) uključuje promjenljiv broj članova koji se sumiraju – samo onoliko koliko je potrebno sa aspekta energije svakog auto-člana pojedinačno u različitim tačkama $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_N)$. Na ovaj način se jednačina (1.92) redukuje na 2D SPEC van domena $D_i(\vec{n}, \vec{k}, i=1, \dots, q)$ (gdje je $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \pm i_1 = 0$) i na 2D WD unutar ovih domena, generišući na taj način 2D CTFWD-ju. Jednačina (1.92) uključuje, kao specijalne slučajeve, 2D SPEC, 2D WD-ju i 2D SM koji se dobijaju za $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \pm i_1 = 0$, $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \pm i_1 = N$ i $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \pm i_1 = L_m$ za svako (\vec{n}, \vec{k}) , respektivno.

R^2 je unaprijed definisani referentni nivo, određen kao nekoliko procenata maksimalne vrijednosti 2D SPEC-a. Analogno onome što je rečeno za slučaj 1D signala, ni 2D CTFWD nije pretjerano osjetljiva na izbor ovog parametra, te je vrijednost R^2 uzeta iz intervala od 0.1%-10% maksimalne vrijednosti 2D SPEC-a u potpunosti adekvatna.

U praksi su signali uvijek izloženi uticaju aditivnog šuma. Da bi procijenili uticaj šuma na opisani metod, posmatrajmo 2D zašumljeni signal $x(\vec{n}) = f(\vec{n}) + \varepsilon(\vec{n})$, gdje $\varepsilon(\vec{n})$ predstavlja aditivni bijeli Gaussian-ov kompleksni šum varijanse σ_ε^2 . Varijansa realnog estimatora, 2D CTFWD-je, (1.92), je definisana sa:

$$\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k}) = \text{var}[\text{CTFWD}(\vec{n}, \vec{k})] = E\{\text{CTFWD}_x^2(\vec{n}, \vec{k})\} - \{\text{CTFWD}_x(\vec{n}, \vec{k})\}^2 \quad (1.94)$$

Sastoji se iz dva dijela: dijela koji je zavisen od signala i šuma, $\sigma_{f\varepsilon}^2(\vec{n}, \vec{k})$, i postoji samo unutar domena $D_i(\vec{n}, \vec{k}, i=1, \dots, q)$, i dijela koji je zavisen samo od šuma, $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}^2(\vec{n}, \vec{k})$, i postoji svuda, tj. u svim frekvencijsko-frekvencijskim (FF) tačkama:

$$\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k}) = \sigma_{f\varepsilon}^2(\vec{n}, \vec{k}) + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}^2(\vec{n}, \vec{k}). \quad (1.95)$$

Slijedeći proceduru za slučaj 1D zašumljenog signala, [4], [110], [117], nakon nekoliko direktnih transformacija, u slučaju pravougaonog prozora $w(\vec{n})$, varijansa iz prethodne jednačine se može zapisati kao:

$$\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k}) = \begin{cases} 2N\sigma_\varepsilon^2 \sum_{\vec{i}=-\vec{L}(\vec{n}, \vec{k})}^{\vec{L}(\vec{n}, \vec{k})} \text{SPEC}_f(\vec{n}, \vec{k} + \vec{i}) + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}^2 \text{ unutar } D_i(\vec{n}, \vec{k}), i=1, \dots, q \\ N^2\sigma_\varepsilon^4, & \text{van } D_i(\vec{n}, \vec{k}), i=1, \dots, q \end{cases} \quad (1.96)$$

gdje je:

$$\sigma_{\varepsilon\varepsilon}^2(\vec{n}, \vec{k}) = \begin{cases} N^2\sigma_\varepsilon^4 \left[\sum_{i_1=1}^{L_1(\vec{n}, \vec{k})} (L_2(\vec{n}, \vec{k}) \pm i_1 + 1) + L_2(\vec{n}, \vec{k}) \right], \text{ unutar } D_i(\vec{n}, \vec{k}), i=1, \dots, q \\ N^2\sigma_\varepsilon^4, & \text{van } D_i(\vec{n}, \vec{k}), i=1, \dots, q. \end{cases} \quad (1.97)$$

Uočimo da je za tačke (\vec{n}, \vec{k}) koje se nalaze van domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i = 1, \dots, q$, veličina prozora $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \neq 1$.

Analiza reprezentacije zašumljenog signala opisanim metodom obuhvata i analizu reprezentacija zašumljenog signala specijalnim slučajevima opisanog metoda (2D SPEC za $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \neq 1$, 2D WD za $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) \neq 1$ i 2D SM za $L_1(\vec{n}, \vec{k}) = L_2(\vec{n}, \vec{k}) = L_m$, za svako (\vec{n}, \vec{k})). Na osnovu ove observacije, sljedeći zaključci mogu biti jasno izvedeni:

- (1) 2D CTFWD minimizuje varijansu estimatora $\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k})$ van domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i = 1, \dots, q$, postiže optimalnu prezentaciju auto-članova i optimizuje vršni odnos signal/šum⁹.
- (2) Varijansa estimatora, (1.94), raste unutar domena $D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i = 1, \dots, q$. Ipak, uzimanjem optimalnog broja sumarnih članova u jednačini (1.92), 2D CTFWD smanjuje varijansu $\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k})$ i stoga poboljšava vršni odnos signal/šum u odnosu na 2D WD-ju i 2D SM u FF tačkama koje postoje unutar ovih domena.
- (3) 2D SPEC minimizuje varijansu $\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k})$ u tačkama (k_1, k_2) koje postoje unutar domena

$D_i(\vec{n}, \vec{k})$, $i = 1, \dots, q$. Ipak, istovremeno on rezultuje niskom koncentracijom signala u okolini lokalne frekvencije. Stoga, 2D CTFWD može unaprijediti estimaciju baziranu na 2D SPEC-u za slučaj visoko nestacionarnih 2D signala, čak i u tačkama (k_1, k_2) koje se nalaze unutar domena auto-članova.

Primjetimo da, zavisno od distribucije šuma i odabira referentnog nivoa R^2 , mogu postojati pojedine FF tačke van domena funkcije oslonca u kojima su uslovi $|STFT(\vec{n}, k_1 \pm i_1, k_2 \pm i_2)|^2 \geq R^2$ i/ili $|STFT(\vec{n}, k_1 \pm i_1, k_2 \mp i_2)|^2 \geq R^2$, za $i_1 = 0, \dots, L_1(\vec{n}, \vec{k})$, $i_2 = 0, \dots, L_2(\vec{n}, \vec{k}) - i_1$ zadovoljeni. Ovo implicira postojanje nenultih vrijednosti za $L_1(\vec{n}, \vec{k})$ i/ili $L_2(\vec{n}, \vec{k}) - i_1$ u tim tačkama. Ipak, ovakve situacije ne utiču značajno na S/SF reprezentaciju baziranu na opisanom metodu. Uočimo da veće vrijednosti referentnog nivoa R^2 (oko 5%-10% očekivane maksimalne vrijednosti 2D SPEC-a) gotovo u potpunosti eliminišu pomenute efekte.

⁹ Vršni (engl. *peak*) odnos signal/šum podrazumijeva odnos kvadrata apsolutne maksimalne vrijednosti S/SFD-je i varijanse estimatora $\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k})$,

$$\frac{|\max\{S/SFD_x(\vec{n}, \vec{k})\}|^2}{\sigma_{xx}^2(\vec{n}, \vec{k})}.$$

Potreban je u mnogim praktičnim aplikacijama gdje se maksimalne vrijednosti S/SFD-je koriste za estimaciju lokalne frekvencije analiziranog signala. U ovom slučaju, nijesmo zainteresovani za lokalni odnos signal/šum, naročito u frekvencijsko-frekvencijskim tačkama koje postoje van domena auto-članova signala. U tim tačkama vršni odnos signal/šum predstavlja mjeru moguće pogrešne estimacije lokalne frekvencije, [117].

1.5. Poređenje računske kompleksnosti konvencionalnih i unaprijeđenih združenih reprezentacija nestacionarnih signala

U prethodnim poglavljima (1.1.-1.4.) je izvršena analiza najčešće korišćenih metoda za reprezentaciju jednodimenzionalnih i višedimenzionalnih signala. Istaknute su prednosti i nedostaci svake od njih, kao i uslovi u kojima te prednosti i nedostaci dolaze do izražaja.

Kako je jedan od primarnih ciljeva opisanih matematičkih modela upotreba u praktičnim primjenama, bitno je sagledati njihovu računsku složenost i uporediti ih i iz te perspektive.

Učinimo to, najprije, za slučaj 1D signala. Poređićemo konvencionalne TF distribucije, 1D SPEC i 1D WD-ju i nedavno definisane TF distribucije, 1D SM i 1D CTFWD-ju (1D signal-zavisni SM).

Računska složenost se najobjektivnije sagledava kroz broj potrebnih kompleksnih operacija (sabiranja i množenja) po odbirku razmatrane TF distribucije (broj kompleksnih operacija u jednoj TF tački).

U tabeli 1.2 je dato poređenje računske složenosti za 1D SPEC, 1D WD-ju (računatu u slučajevima preodabranog signala i analitičkog signala), 1D SM i 1D CTFWD-ju (1D signal-zavisni SM).

1D WD je izračunata upotrebom FFT blokova. Analitički signal je izračunat u tri koraka: 1) određena je FFT, 2) sa nulom su izjednačene vrijednosti koje odgovaraju negativnim frekvencijama, a sa 2 su pomnožene vrijednosti koje odgovaraju pozitivnim frekvencijama, 3) određena je inverzna FFT.

Tabela 1.2 Broj kompleksnih operacija u jednoj TF tački potrebnih za izračunavanje 1D SPEC-a, 1D WD-je preodabranog signala, 1D WD-je analitičkog signala, 1D SM-a i 1D CTFWD-je. N predstavlja dužinu prozorom odsječenog signala; L je širina prozora korišćenog u 1D SM-u (u najvećem broju slučajeva L uzima male vrijednosti, $L=1,2,3$); L_p je signal adaptivna širina prozora korišćenog u 1D CTFWD-ju ($L_p \leq L_m$, pri čemu je L_m maksimalna širina prozora, određena najširim auto-članom analiziranog signala.). Množenja sa -1 , 0 i 2 nijesu uzeta u obzir, jer je vrijeme potrebno za njihovo izračunavanje mnogo manje od vremena potrebnog za ostale operacije.

Distribucija / Broj operacija	Broj kompleksnih množenja	Broj kompleksnih sabiranja
1D SPEC	$3N/2$	$3N$
1D WD (preodabranog signala)	$N(4+\log_2 N)/2$	$N\log_2 2N$
1D WD (analitičkog signala)	$N(3+5\log_2 N)/4$	$(5N\log_2 N)/2$
1D SM	$N(3+L)/2$	$N(6+L)/2$
1D CTFWD	$N(3+L_p)/2$	$N(6+L_p)/2$

Najskromnije računske zahtjeve (najmanji broj kompleksnih operacija po TF tački) ima 1D SPEC. Međutim, treba imati na umu da on ima i najskromnije performanse od svih razmatranih TF distribucija. S druge strane, složenost 1D SM-a zavisi ne samo od dužine prozorom odsječenog signala N , već i od veličine prozora L . U principu, mala širina ovog prozora je u praksi najčešće dovoljna, ($L=1,2,3$), te 1D SM može biti značajno efikasniji od 1D

WD-je (računate i za slučaj preodabranog signala i za slučaj analitičkog signala). Na kraju, realno je očekivati da realizacija 1D CTFWD-je (1D signal-zavisnog SM-a) bude jednostavnija od realizacije 1D SM-a, usljed upotrebe signal adaptivnog prozora (što značajno umanjuje broj kompleksnih sabiranja i množenja). Naime, 1D CTFWD će u odnosu na 1D SM imati uvećan jedino broj operacija poređenja, koje zahtijevaju znatno manje vrijeme za izvršavanje od operacija kompleksnog sabiranja i množenja.

Osim 1D signala, u praksi se najčešće srijeću 2D signali (kao najbrojniji predstavnici višedimenzionalnih signala). Stoga ćemo u nastavku analizirati računsku složenost konvencionalnih 2D S/SF distribucija, 2D SPEC-a i 2D WD-je, i nedavno definisanih S/SF distribucija, 2D SM-a i 2D CTFWD-je.

Analogno slučaju 1D signala, računska složenost će biti definisana kroz broj potrebnih kompleksnih operacija (sabiranja i množenja) po odbirku razmatrane S/SF distribucije (broj kompleksnih operacija u jednoj S/SF tački).

U tabeli 1.3 je dato poređenje računске složenosti za 2D SPEC (u prvom slučaju je 2D STFT-ja izračunata pomoću FFT blokova, a u drugom slučaju korišćenjem rekurzivnog metoda), 2D WD-ju, 2D SM i 2D CTFWD-ju (u prvom slučaju je 2D STFT-ja izračunata pomoću FFT blokova, a u drugom slučaju korišćenjem rekurzivnog metoda).

2D CTFWD-ja uzima promjenljivi broj potrebnih operacija u različitim FF tačkama, te na ovaj način značajno redukuje računsku kompleksnost u odnosu na ostale razmatrane 2D S/SFD-je, tabela 1.3. Uz to, samo 2D CTFWD proizvodi čistu 2D WD-ju reprezentaciju signala u praktično jedino važnom slučaju multikomponentnog signala koji ima auto-članove različitih širina.

Tabela 1.3 Broj kompleksnih operacija u jednoj S/SF tački potrebnih za izračunavanje 2D SPEC-a korišćenjem FFT blokova, 2D SPEC-a korišćenjem rekurzivnog metoda, 2D WD-je korišćenjem FFT blokova, 2D SM-a korišćenjem rekurzivnog metoda, 2D CTFWD-je korišćenjem FFT blokova i 2D CTFWD-je korišćenjem rekurzivnog metoda.

Množenja sa -1 , 0 i 2 nijesu uzeta u obzir, jer je vrijeme potrebno za njihovo izračunavanje mnogo manje od vremena potrebnog za ostale operacije.

Distribucija / Broj operacija	Broj kompleksnih množenja	Broj kompleksnih sabiranja
2D SPEC (na bazi FFT)	$N^2(\log_2 N + L_2(\vec{n}, \vec{k})/2 + 1/2)$	$N^2(2\log_2 N + L_2(\vec{n}, \vec{k})/2)$
2D SPEC (na bazi rekurzije)	$N^2(\overline{L}_2 + \vec{n} \cdot \vec{k} - 3/2)$	$N^2(2 + \overline{L}_2(\vec{n}, \vec{k})/2)$
2D WD	$2N^2(\log_2 N + 2)$	$4N^2(\log_2 N + 1)$
2D SM	$N^2(\overline{L}_m^2/2)L_m +$	$N^2(2 + \overline{L}_m^2 + L_m)$
2D CTFWD (na bazi FFT)	$N^2(\log_2 N + \overline{L}_2 + L_1(\vec{n}, \vec{k}) + (\overline{L}_2 + \vec{n} \cdot \vec{k})/2)$	$N^2(2\log_2 N + \overline{L}_2 + L_1(\vec{n}, \vec{k}) + L_2(\vec{n}, \vec{k})/2)$
2D CTFWD (na bazi rekurzije)	$N^2(\overline{L}_2 + L_1 \vec{n} \cdot \vec{k} + L_2(\vec{n}, \vec{k})/2 - 3/2)$	$N^2(2 + \overline{L}_2 + L_1(\vec{n}, \vec{k}) + L_2(\vec{n}, \vec{k})/2)$

U tabeli 1.3 je, u cilju konciznijeg zapisivanja, korišćena sljedeća notacija $\bar{L}_2(\vec{n}, \vec{k}) = \sum_{i_1=1}^{L_1(\vec{n}, \vec{k})} (\mathcal{L}_2(\vec{n}, \vec{k})(\frac{1}{2}i_1, +D)/2) \vec{k} - i_1$.

1.6. Pristup izboru optimalne S/SFD-je za potrebe analize i procesiranja 2D signala

Prostorno-frekvencijske reprezentacije su, u posljednje vrijeme, naročito aktuelne i prisutne u poljima obrade slike, prepoznavanja šablona i vidnog sistema. To interesovanje je prisutno, u suštini, zbog sljedećih razloga:

- ova klasa funkcija prikazuje sve informacije slike (2D signala) u združenom domenu u kojem je reprezentacija definisana;
- neurofiziološke studije su sugerisale da neke ćelije primarnog vizuelnog korteksa služe za kodiranje pojedinih združenih reprezentacija;
- ova klasa funkcija ima visok stepen separabilnosti šablona.

Bez obzira na to, združene reprezentacije moraju ispuniti određene uslove kako bi bile korisne u ovim oblastima. Jedan od bitnih uslova je mogućnost izvođenja korektinih marginalnih distribucija iz opštih formi združenih reprezentacija. Time se postiže da projekcije reprezentacije združenog domena teže ka lokalnoj snazi 2D signala i spektru 2D signala. Takođe, moraju ostvarivati visoku rezoluciju u oba domena pojedinačno (prostornom i frekvencijskom) i moraju biti pozitivne kako bi ih bilo moguće interpretirati kao distribuciju energije u združenom S/SF domenu. S druge strane, uslov bilinearnosti je logičan zahtjev u kontekstu obrade slike.

S/SF analiza je od velikog značaja i za ovu doktorsku disertaciju. Naime, jedan od osnovnih ciljeva disertacije je razvoj sistema za efikasno filtriranje 2D visoko nestacionarnih signala. Taj sistem počiva upravo na S/SF analizi, te je kvalitet filtriranja koji će on obezbijediti direktno zavisen od kvaliteta reprezentacije signala odabranom S/SFD-jom. Stoga je ovo završno poglavlje prve glave disertacije posvećeno odabiru optimalne S/SFD-je koja će, kao što je rečeno, biti osnova razvijenog sistema.

Opšte zastupljeni stav je da 2D WD ima najbolje osobine koje se traže u obradi slike nasuprot ostalih združenih reprezentacija ove vrste. Naime, 2D WD ima najbolju rezoluciju koja se poklapa sa rezolucijom slike u oba domena i pri tome prevazilazi probleme kompromisnog odabira rezolucije koji tradicionalno ograničavaju korisnost analize spektra zasnovane na upotrebi prozora. 2D WD je združena pozitivna bilinearna reprezentacija koja sadrži sve informacije o slici (2D signalu).

Dakle, mogli bismo zaključiti da je 2D WD najbliža idealnoj S/SF distribuciji. Međutim, ovaj zaključak moramo ograničiti na slučaj monokomponentnih signala. Naime, kao posljedicu

međusobne interakcije komponentni signala (auto-članova) koje su bliske u S/SF ravni, imamo pojavu kros-članova, koji bitno narušavaju kvalitet reprezentacije.

Nedavno razvijena 2D CTFWD obezbjeđuje kvalitet reprezenacije auto-članova monokomponentnih i multikomponentnih signala jednak onome koji pruža 2D WD za slučaj monokomponentnih signala. Uz to, kako je riječ o signal-adaptivnoj distribuciji računska kompleksnost je znatno manja od računske kompleksnosti 2D WD-je, kao i računske kompleksnosti 2D SM-a.

Stoga je 2D CTFWD odabrana za osnovu razvoja sistema za filtriranje 2D visoko nestacionarnih signala, koji će biti predstavljen u nastavku ove disertacije.

Nestacionarno filtriranje bazirano na vremensko-frekvencijskoj analizi

Analiza i procesiranje stacionarnih signala se izvršavaju u vremenskom ili u frekvencijskom domenu ravnopravno. Međutim, konvencionalni načini analize nijesu pogodni za slučaj signala sa visoko nestacionarnim karakteristikama (što je detaljno obrazloženo u prvoj glavi disertacije). Kako je broj procesa koji se modeluju ovom vrstom signala priličan, spektralna analiza se dopunjava združenim TF metodama koje rezultiraju TF promjenljivim spektrom, [37], [52], [71].

Vremensko-promjenljivo (*Time-Varying* - TV) filtriranje je veoma izazovna oblast istraživanja koja se intenzivno razvija, naročito posljednjih godina, i upotrebljava najznačajnije rezultate i metode TF analize nestacionarnih signala. Njima se značajno poboljšavaju rezultati u poređenju sa onima koji se postižu filtriranjem nestacionarnih signala maskiranih aditivnim šumom u vremenskom ili u frekvencijskom domenu odvojeno. Usljed izvjesnih stepena slobode u definiciji TV spektra, [13], [15], [30], [57], [74], [129], predlaže se veći broj rješenja pomenutog problema, [28], [29], [32], [35], [49], [59].

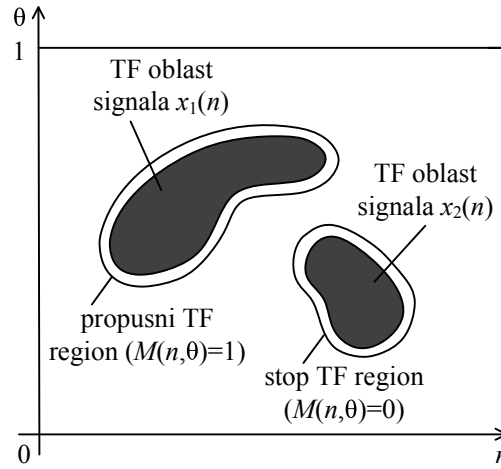
Linearni TV filtri su razvijeni kao prvobitna rješenja problema filtriranja nestacionarnih 1D signala i zato se često u literaturi nazivaju i klasičnim rješenjima. U nastavku će biti više riječi o svakom od njih pojedinačno.

Istorijski posmatrano, najprije je Zadeh, [59], predložio rješenje bazirano na povezivanju sa Richaczek-ovom distribucijom, [13], [15], [60]. Kako Richaczek-ova distribucija pokazuje značajne nedostatke prilikom TF analize nestacionarnih signala, [13], [15], prilazi se redefinisavanju TV filtara pri čemu se povezuju sa drugim TF distribucijama, najprije sa WD-jom, [26], [32]. Slijedeći navedenu proceduru i upotrebljavajući Weyl-ovu definiciju funkcije oslonca TV filtara, kao i teoriju Wiener-ovih filtara iz stacionarnog slučaja, [68], definiše se optimalno filtriranje nestacionarnih signala. Na bazi te definicije je razvijen niz aktuelnih nelinearnih rješenja problema filtriranja nestacionarnih 1D signala, [90], [95], [129], [137], koji će takođe biti predstavljeni u nastavku.

2.1. Linearni TV filtri

Dizajn linearnih TV (LTV) filtara, [10], [59], [150]-[152], je baziran na TF reprezentaciji filtra ili ulaznog signala. Zbog toga su ovi filtri teorijski pogodni i praktično korisni u situacijama u kojima su karakteristike željenog filtra najprirodnije specificirane u TF domenu osobinama TF težinske funkcije.

LTV filtri imaju veliki broj praktičnih primjena, uključujući obradu nestacionarnih signala (detekcija i estimacija signala, estimacija spektra itd.) i komunikaciju kroz vremenski promjenljive kanale (potiskivanje interferencije, modelovanje kanala, estimacija i sl.). Ovi sistemi su naročito korisni za ponderisanje, potiskivanje ili separaciju komponenti nestacionarnog signala.



Slika 2.1 Primjer signala koji se sastoji od dvije komponente $x_1(n)$ i $x_2(n)$, jasno prostorno razdvojene u TF ravni.

Ulazno-izlazna relacija diskretnog LTV filtra (LTV sistema) H se može predstaviti na sljedeći način:

$$y(n, \theta) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(n, \theta) x(n', \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n, \theta) x(n-m, \theta), \quad (2.1)$$

gdje su $g(n, \theta) = h(n, \theta)$ i $h(n, \theta) = g(n, \theta)$ dvije različite definicije impulsnog odziva LTV filtra H (uočimo da $n, n' \in Z$ označava apsolutno vrijeme, dok $m \in Z$ označava vremensko kašnjenje).

Nestacionarna priroda ulaznog signala $x(n)$, izlaznog signala $y(n)$ i LTV filtra H sugerše upotrebu TF reprezentacija za dizajniranje i implementaciju LTV filtara.

Posmatrajmo jednostavan primjer sa slike 2.1. Signal $x(n)$ na ulazu filtra se sastoji od dvije komponente $x_1(n)$ i $x_2(n)$ koje se ne preklapaju u TF domenu. Želimo dizajnirati filter H koji će propustiti komponentu $x_1(n)$ i potisnuti komponentu $x_2(n)$, tako da je izlazni signal filtra $y(n) = x_1(n)$. Ovakav zahtjev za filter H može biti izražen sa TF težinskom funkcijom $M(n, \theta)$ (pri

čemu θ označava normalizovanu frekvenciju) koja će imati jediničnu vrijednost u TF oblasti komponente $x_1(n)$ i nultu vrijednost u TF oblasti komponente $x_2(n)$.

U principu, željeno TF ponderisanje (slabljenje ili pojačanje) može biti opisano realnom TF težinskom funkcijom $M(n, \theta) \in \mathbb{R}$. Stoga, pretpostavimo da je LTV filtar H opisan sa TF težinskom funkcijom $M(n, \theta) \in \mathbb{R}$. U literaturi se ističu dva opšta načina dizajniranja LTV filtara bazirana na TF težinskoj funkciji:

1. Eksplicitni dizajn, [32], [33], [35], [38]-[40], [42]: TF reprezentacija LTV filtra H je jednaka ili predstavlja najbolju aproksimaciju TF težinske funkcije $M(n, \theta)$. Filtriranje se izvodi u vremenskom domenu u skladu sa (2.1).
2. Implicitni dizajn, [2], [33], [42], [77], [153]-[156]: LTV filtar H se determiniše procedurom koja obuhvata tri koraka: analizu, ponderisanje (eng. *weighting*) i sintezu. Prvi korak, analiza, podrazumijeva izračunavanje linearne TF reprezentacije zašumljenog signala. Drugi korak, ponderisanje, podrazumijeva množenje izračunate linearne TF reprezentacije sa TF težinskom funkcijom $M(n, \theta)$. Treći korak, sinteza, podrazumijeva izračunavanje izlaznog signala $y(n)$, na bazi TF funkcije dobijene u drugom koraku. Ukoliko je težinska funkcija $M(n, \theta)$ estimirana upotrebom linearnih TF metoda, svi koraci dizajniranja su linearni, pa i rezultujući filtar predstavlja linearan sistem.

Kao što je već navedeno, LTV filtri koji će biti razmatrani u nastavku podliježu određenom TF ponderisanju. U tom kontekstu, značajna vremenska ili frekvencijska pomjeranja su neželjena. TF pomjeranja koja su uvedena od strane samog LTV filtra H se karakterišu *spreading* funkcijom, [28], [31], [44], [157]:

$$S_H(m, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h(n) \cdot n - m) e^{-j2\pi v n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n, m) e^{-j2\pi v n} \quad (2.2)$$

Ovdje m i v predstavljaju vremensko pomjeranje (*time lag*, odnosno kašnjenje) i frekvencijsko pomjeranje (*frequency lag*, odnosno Doppler-ovo pomjeranje), respektivno. Ulazno-izlazna relacija (2.1) može biti preformulisana na sljedeći način:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 S_H(m, v) x(n-m) e^{j2\pi v n} dv \quad (2.3)$$

pri čemu je izlazni signal filtra $y(n)$ predstavljen kao ponderisana superpozicija TF pomjerene forme $x(n-m) e^{j2\pi v n}$ ulaznog signala $x(n)$. Težinska funkcija u ovoj superpoziciji je upravo *spreading* funkcija $S_H(m, v)$.

Za LTV filtar H kažemo da je *underspread* ako je funkcija $S_H(m, v)$ dobro koncentrisana u okolini koordinatnog početka ravni (m, v) , [44]. Dakle, filtar definisan sa (2.3) uvodi mala TF pomjeranja. S druge strane, LTV filtri koji uvode velika TF pomjeranja se nazivaju *overspread* filtrima. U ovom poglavlju će biti razmatrani *underspread* filtri.

Klasična rješenja za filtriranje nestacionarnih 1D signala koja se karakterišu eksplicitnim dizajnom, [32], [33], [35], [38]-[40], [42], su Zadeh-ov filtar i Weyl-ovi filtri, dok se implicitnim

dizajnom, [2], [33], [42], [77], [153]-[156], karakterišu STFT filtar i *multiwindow* STFT filtar, Gabor-ov filtar i *multiwindow* Gabor-ov filtar, kao i projekcioni filtar.

2.1.1. Zadeh-ov filtar

Za diskretni LTV filtar H , Zadeh-ova TV transfer funkcija predstavlja TF reprezentaciju definisanu na sljedeći način, [31], [44], [59], [158], [159]:

$$Z_H(n, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) e^{-j2\pi\theta m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n, m) e^{-j2\pi\theta m}. \quad (2.4)$$

Spreading funkcija iz (2.2) je 2D FT-ja Zadeh-ove funkcije, odnosno:

$$S_H(m, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 Z_H(n, \theta) e^{-j2\pi(\nu n - m\theta)} d\theta \quad (2.5)$$

Impulsni odziv $g(n, m)$ se može dobiti nazad iz $Z_H(n, \theta)$, pomoću inverzne formule:

$$g(n, m) = \int_0^1 Z_H(n, \theta) e^{j2\pi\theta m} d\theta \quad (2.6)$$

Ukoliko je LTV filtar H *underspread*, Zadeh-ova funkcija $Z_H(n, \theta)$ se može interpretirati kao TV frekvencijski odziv ili TF transfer funkcija sistema H (ili pak odgovarajuća aproksimacija), u smislu da je njome moguće opisati TF ponderisanje izvršeno od strane sistema H . Takođe, zbog FT-je u jednačini (2.5), koncentracija funkcije $S_H(m, \nu)$ u *underspread* slučaju implicira da je Zadeh-ova funkcija *underspread* filtra glatka (niskopropusni oblik) funkcija. Obratno, Zadeh-ova funkcija *overspread* filtra ima oscilatorne (oblik propusnika opsega) komponente koje odgovaraju komponentama funkcije $S_H(m, \nu)$ daleko od koordinatnog početka ravni (m, ν) .

Dizajn Zadeh-ovog filtra je baziran na interpretaciji Zadeh-ove funkcije $Z_H(n, \theta)$ u *underspread* slučaju. Težinsku funkciju $M(n, \theta)$ LTV Zadeh-ovog filtra izjednačavamo sa gore definisanom Zadeh-ovom funkcijom:

$$Z_{H_Z}(n, \theta) = M(n, \theta). \quad (2.7)$$

LTV filtar H_Z , definisan sa (2.7), nazivamo Zadeh-ovim filtrom, [32], [33], [42]. Ovaj dizajn je opravdan ako je $M(n, \theta)$, a samim tim i $Z_{H_Z}(n, \theta)$, glatka funkcija tako da je H_Z *underspread*.

Impulsni odziv Zadeh-ovog filtra se dobija kombinovanjem jednačina (2.6) i (2.7):

$$g_Z(n, m) = \int_0^1 M(n, \theta) e^{j2\pi\theta m} d\theta. \quad (2.8)$$

Zadeh-ov filtar se tada implementira u skladu sa jednačinom (2.1). Jednostavno se pokazuje da je za $M(n, \theta) = 1$ izlazni signal Zadeh-ovog filtra $y(n) = (H_Z x)(n)$ jednak ulaznom signalu $x(n)$.

Za praktičnu implementaciju Zadeh-ovog filtra definišemo frekvencijski diskretnu TF težinsku funkciju $M(n,k)$, kao frekvencijski odabranu verziju težinske funkcije $M(n,\theta)$:

$$M(n, k) = M\left(n, \frac{k}{N}\right), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.9)$$

N označava broj frekvencijskih odbiraka (pretpostavlja se parnim, radi jednostavnosti), dok je $1/N$ frekvencijski period odabiranja. N mora biti dovoljno veliko da bi funkcija $M(n,\theta)$ bila dovoljno gusto odabrana. Dakle, veće N se zahtijeva u slučaju bržih varijacija funkcije $M(n,\theta)$ u pravcu θ .

U skladu sa frekvencijskom diskretizacijom, jednačina (2.8) se zamjenjuje sa inverznom diskretnom FT-jom (IDFT):

$$g_Z(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} M(n, k) e^{j2\pi \frac{k}{N} m}, m = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1. \quad (2.10)$$

Primjetimo da impulsni odziv konačnog kašnjenja $g_Z(n, m)$, ima konačnu oblast oslonca (veličine m). Koristeći opštu ulazno-izlaznu relaciju (2.1), izlazni signal može biti zapisan kao:

$$y(n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} g_Z(n, m) x(n-m). \quad (2.11)$$

Stoga, izračunavanje $y(n)$ uključuje odbirke ulaznog signala $x(n-N/2+1)$, $x(n-N/2+2)$, ..., $x(n+N/2)$ locirane u okolini vremenskog trenutka n . Definisanjem vektora $\mathbf{g}_n = (g_Z(n, N/2-1) \dots g_Z(n, -N/2))^T$ dužine N , ulazno-izlazna relacija (2.11) može biti zapisana kao unutrašnji proizvod dva vektora:

$$y(n) = \mathbf{g}_n^T \mathbf{x}_n. \quad (2.12)$$

Kao što je već pomenuto, Zadeh-ova TV transfer funkcija se jednostavno dovodi u vezu sa Rihaczek-ovom distribucijom, [13], [15], [60]. Ova distribucija je kompleksna i ispoljava ozbiljna ograničenja prilikom sprovođenja TF analize nestacionarnih signala, te se isto može reći i za Zadeh-ovu TV transfer funkciju. Ova činjenica je, zapravo, i bila razlog za redefinisane TV funkcije, uzimanje u obzir drugih TF distribucija (u prvom redu WD-je) i dizajniranje Weyl-ovih filtara.

2.1.2. Weyl-ov filter

Weyl-ov filter se dobija korišćenjem Weyl-ovog simbola (umjesto Zadeh-ove funkcije) kao TF reprezentacije na kojoj počiva eksplicitni dizajn ovog TV filtra. U određenim slučajevima, Weyl-ov filter ispoljava bolje performanse od Zadeh-ovog filtra, ali uz povećanu teorijsku i algoritamsku kompleksnost.

Diskretni Weyl-ov simbol je definisan sljedećom jednačinom, [28], [31], [32], [44], [49], [75], [76], [157],

$$L_H(n, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(n-m) e^{-j4\pi\theta m}, \text{ sa } \tilde{g}(n-m) = h(n+m) \quad (2.13)$$

Simetrična struktura impulsnog odziva $\tilde{g}(n-m)$ uzrokuje da Weyl-ov simbol ima značajne prednosti u odnosu na Zadeh-ovu funkciju. S druge strane, u diskretnom vremenu, ova simetrija takođe uzrokuje dva vezana problema. Najprije, $L_H(n, \theta)$ je 1/2-periodična funkcija u odnosu na θ , što uzrokuje neželjene efekte *aliasing*-a, osim ukoliko H nije *halfband* filtar. Takođe, samo vrijednosti $h(n_1, n_2)$ sa parnim vrijednostima n_1+n_2 ulaze u definiciju $L_H(n, \theta)$ (zato što $n_1=n+m$ i $n_2=n-m$ zahtijevaju da je $n_1+n_2=2n$). Ovo znači da su vrijednosti n_1 i n_2 ili obje parne ili obje neparne, što odgovara odbircima impulsnog odziva $h(2l, 2l') = \tilde{g}(l) + l' - l'$ i $h(2l+1, 2l'+1) = \tilde{g}(l+l') + l - l'$ sa $l, l' \in \mathbb{Z}$. Preostali odbirci impulsnog odziva $h(2l, 2l'+1)$ i $h(2l+1, 2l')$ nemaju uticaja na vrijednost funkcije $L_H(n, \theta)$. Stoga, korespondencija između $L_H(n, \theta)$ i $h(n-m)$ nije jedan na jedan, osim ako je klasa filtara H a priori pogodno ograničena.

Invertujući FT-ju u jednačini (2.13) imamo da je:

$$\tilde{g}(n-m) = \int_{-\infty}^{\infty} L_H(n-m, \theta) e^{j4\pi\theta m} d\theta \quad (2.14)$$

što omogućava da dobijemo odbirke impulsnog odziva $h(2l, 2l') = \tilde{g}(l) + l' - l'$ i $h(2l+1, 2l'+1) = \tilde{g}(l+l') + l - l'$. Preostali odbirci odziva $h(2l, 2l'+1)$ i $h(2l+1, 2l')$ se ne određuju.

Ako je H *underspread halfband* filtar, Weyl-ov simbol $L_H(n, \theta)$ je glatka funkcija koja može biti interpretirana (aproksimativno) kao TF transfer funkcija filtra H , [32], [44].

Koncept *halfband* filtara je esencijalan za karakterizaciju *aliasing*-a u Weyl-ovom simbolu. Za proizvoljnu, fiksnu centralnu frekvenciju θ_0 , definišimo *halfband* subprostor Ψ kao linearni prostor signala $x(n)$, čija se FT-ja $X(\theta)$ nalazi u intervalu $[\theta_0-1/4, \theta_0+1/4]_1$ (ovdje $[\theta_1, \theta_2] = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [\theta_1+k, \theta_2+k]$ označava 1-periodični produžetak frekvencijskog intervala $[\theta_1, \theta_2]$). To znači da $x(n) \in \Psi$ ako i samo ako je $X(\theta)=0$ za $\theta \notin [\theta_0-1/4, \theta_0+1/4]_1$. Specijalni slučajevi *halfband* subprostora su prostor analitičkog signala ($\theta_0=1/4$) i prostor signala preodabranih sa faktorom dva ($\theta_0=0$).

Posmatrajmo sada tri specijalna tipa LTV filtara:

- Ulazni *halfband* filtar uzima samo komponente ulaznog signala $x(n)$ koje su date u *halfband* subprostoru Ψ . Dakle, ako $x(n) \notin \Psi$, tada je izlazni signal $y(n)$ jednak nuli. Matematički govoreći, nulti prostor filtra, [63], [151], je komplementaran sa *halfband* subprostorom Ψ .

- Izlazni *halfband* filter je LTV filter čiji izlazni signal leži u *halfband* subprostoru Ψ , odnosno $y(n) \in \Psi$ za svako $x(n)$. Matematički govoreći, opseg ovog filtra je Ψ , [151].
- Ulazno-izlazni *halfband* filter, odnosno jednostavnije *halfband* filter je i ulazni i izlazni *halfband* filter za isti *halfband* subprostor Ψ . Linearni prostor *halfband* filtera je Ψ^2 .

Weyl-ov simbol je TF reprezentacija LTV filtra H oslobođena prisustva *aliasing*-a ako i samo ako je H *halfband* filter. Ova činjenica komplikuje, ali u principu značajnije ne ograničava praktičnu primjenu Weyl-ovog simbola. Zaista, *fullband* filter može uvijek biti pridružen ekvivalentnom *halfband* filtru koji je dobijen iz *fullband* filtra ili preodabiranjem sa faktorom dva, ili, u slučaju realnog filtra, konverzijom u pridruženi analitički filter.

Za *underspread* filtre su navedena tri tipa *halfband* filtera približno ekvivalentna.

Na osnovu prethodne analize zaključujemo da se Weyl-ov simbol *underspread halfband* filtra H može interpretirati kao TF transfer funkcija filtra H ili pak kao njena bliska aproksimacija. Ova interpretacija transfer funkcije motiviše dizajn TV filtera u kojima je Weyl-ov simbol filtra jednak specificiranoj TF težinskoj funkciji $M(n, \theta)$, [32], [33], [42]:

$$L_{H_W}(n, \theta) = M(n, \theta). \quad (2.15)$$

S obzirom da $L_{H_W}(n, \theta)$ ima frekvencijski period $1/2$, TF težinska funkcija $M(n, \theta)$ mora biti specificirana na *halfband* frekvencijskom intervalu $[\theta_0 - 1/4, \theta_0 + 1/4]$, gdje je θ_0 fiksna centralna frekvencija. Dalje, $M(n, \theta)$ je periodična u odnosu na θ sa periodom $1/2$. Bilo koji LTV filter H_W koji zadovoljava (2.15) se naziva Weyl-ovim filtrom. Weyl-ov filter je opravdan jedino ako je H_W *underspread*, što zahtijeva da je težinska funkcija $M(n, \theta)$ dovoljno glatka.

Uvrštavanjem (2.15) u (2.14) dobijamo:

$$\tilde{g}_W(n, \theta) = \int_{-\theta}^{\theta} M(n, \theta - \theta') e^{j4\pi n \theta'} d\theta' \quad (2.16)$$

Na ovaj način možemo izračunati $h_W(2l, 2l') = \tilde{g}_W(l + l', l - l')$ i $h_W(2l + 1, 2l' + 1) = \tilde{g}_W(l + l' + 1/2, l - l' + 1/2)$, pri čemu se $h_W(2l, 2l' + 1)$ i $h_W(2l + 1, 2l')$ ne određuju. Očigledan je zaključak da Weyl-ov filter H_W nije jednoznačno definisan.

Zaključuje se da Weyl-ov filter H , usljed $1/2$ -periodičnosti (u odnosu na θ) funkcije oslonca $L_H(n, \theta)$, pati od neželjenih efekata *aliasing*-a, kao i od proizvoljnosti u definisanju odbiraka njegovog impulsnog odziva. U cilju izbjegavanja *aliasing*-a filter H se definiše kao *halfband* filter, dok za uklanjanje proizvoljnosti u definisanju odbiraka impulsnog odziva postoji više načina. Shodno tome, razvija se više vrsta Weyl-ovog filtra, koji će biti objašnjeni u nastavku.

2.1.2.1. Minimum energy Weyl-ov filter¹⁰

Najjednostavnije dizajnersko ograničenje koje se može koristiti u uklanjanju neodređenosti u dizajniranju Weyl-ovog filtra, (2.15), je minimalna energija. Energija filtra H_W se definiše kao:

$$E_{H_W} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |h_W(n, n')|^2. \quad (2.17)$$

S obzirom da jednačina (2.15) ne specificira vrijednosti $h_W(2l, 2l'+1)$ i $h_W(2l+1, 2l')$, E_{H_W} je očigledno minimizovana odabirom $h_W(2l, 2l'+1) = h_W(2l+1, 2l') = 0$. Rezultujući *minimum energy* Weyl-ov filter mapira parne (neparne) odbirke ulaznog signala $x(n)$ u parne (neparne) odbirke izlaznog signala $y(n)$:

$$y(2l) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_W(2l, 2l'+1) x(2l'+1), \quad y(2l+1) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_W(2l+1, 2l') x(2l'). \quad (2.18)$$

Opisani dizajn je prikazan na slici 2.2(a). Sa $h_W(2l, 2l') = \tilde{g}_W(l+l', l-l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1) = \tilde{g}_W(l+l'+1, l-l')$ jednačina (2.18) je ekvivalentna ulazno-izlaznoj relaciji:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_W(n-m) x(n-m), \quad (2.19)$$

gdje je $\tilde{g}_W(n)$ data sa (2.16).

Minimum energy Weyl-ov filter je osnovna forma Weyl-ovog filtra. On predstavlja algoritamsko jezgro sve tri vrste *halfband* Weyl-ovog filtra. Za praktičnu implementaciju ulazno-izlazne relacije (2.19), definišemo frekvencijski diskretnu TF težinsku funkciju $M(n, k)$ odabirajući $M(n, \theta)$ sa osnovnim frekvencijskim periodom $[0, 1/2)$:

$$M(n, k) = M \frac{k}{2N}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (2.20)$$

K označava broj frekvencijskih odbiraka (pretpostavlja se parnim, radi jednostavnosti). Takođe, K mora biti dovoljno velika da bi težinska funkcija $M(n, \theta)$ bila dovoljno gusto odabrana.

U skladu sa frekvencijskom diskretizacijom, inverzna Weyl-ova transformacija (2.16) se zamjenjuje sa IDFT-jom:

$$\tilde{g}_W(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} M(n, k) e^{j2\pi \frac{k}{K} n}, \quad m = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1. \quad (2.21)$$

Zbog konačnog oslonca (veličine m) odziva $\tilde{g}_W(n)$, (2.19) se pojednostavljuje na:

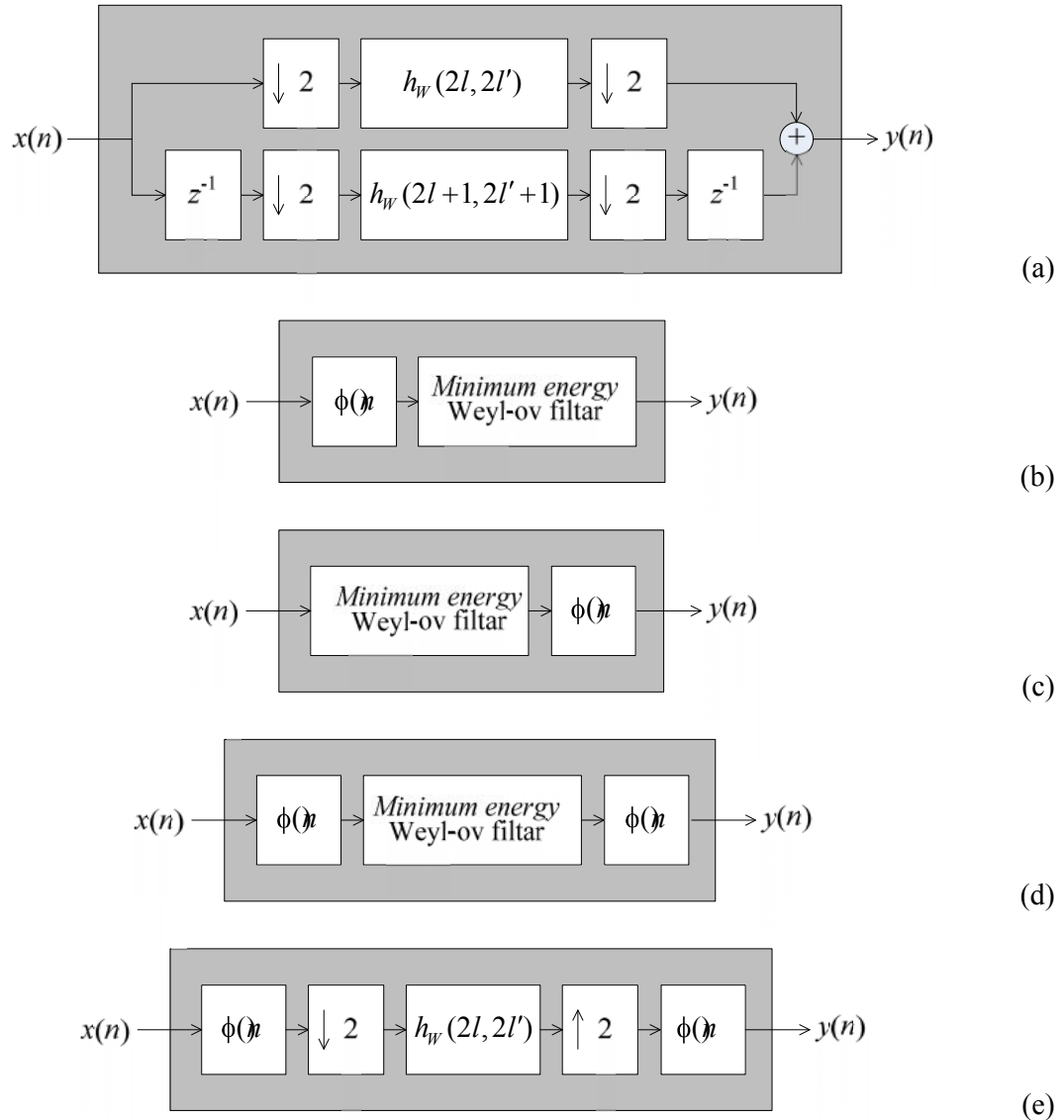
$$y(n) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_W(n-m) x(n-m). \quad (2.22)$$

¹⁰ eng. *Minimum Energy Weyl Filter*, u prevodu predstavlja Weyl-ov filter koji ima minimalnu energiju.

Na ovaj način su uključeni ulazni odbirci $x(n-N+2), x(n-N+4), \dots, x(n+N)$ u okolini vremenskog trenutka n . Definisanjem vektora $\tilde{g}_n = (\tilde{g}_w(n-1, N/2+1) \dots \tilde{g}_w(n-1, N/2+N))^T$ i $x_n = (x(n-N+2) \dots x(n+N))^T$ dužine N , ulazno-izlazna relacija (2.22) može biti zapisana kao:

$$y(n) = \tilde{g}_n^T x_n. \quad (2.23)$$

Vektor \tilde{g}_n je glavna dijagonala matrice G_n , dimenzija $N \times N$, slika 2.3. i -ta kolona, ($i=1, 2, \dots, N$), matrice G_n je IDFT-ja (u odnosu na k) dijela TF težinske funkcije $M(n-N/2+i, k)$ dužine N , (2.21).



Slika 2.2 Weyl-ovi filtri i varijacije. (a) *Minimum energy* Weyl-ov filter; (b) Ulazni *halfband* Weyl-ov filter; (c) Izlazni *halfband* Weyl-ov filter; (d) *Halfband* Weyl-ov filter; (e) Aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter. Simbol $\downarrow 2$ označava pododabiranje sa 2 (zadržavanje samo odbiraka sa parnim indeksima), $\uparrow 2$ označava preodabiranje sa 2 (ubacivanje nule između svakih susjednih odbiraka) i z^{-1} označava jedinično kašnjenje.

2.1.2.2. Ulazni *halfband* Weyl-ov filter

Weyl-ov filter H_W možemo ograničiti tako da bude ulazni *halfband* filter i na taj način ukloniti neodređenost iz definicije (2.16). Ovo ograničenje specificira nedostajuće odbirke impulsnog odziva $h_W(2l, 2l'+1)$ i $h_W(2l+1, 2l')$ kroz sljedeće relacije sa poznatim odbircima $h_W(2l, 2l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1)$:

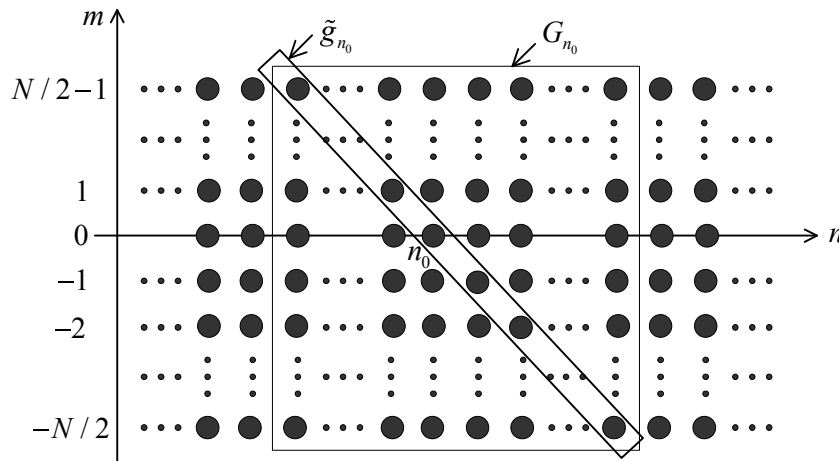
$$h_W(2l, 2l'+1) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(2l-i) h_W(2l'+1, i), \quad (2.24a)$$

$$h_W(2l+1, 2l') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(2l'+1-i) h_W(2l, i), \quad (2.24b)$$

gdje je $\phi(n)$ impulsni odziv idealnog niskopropusnog filtra ili filtra propusnika opsega sa ukupnim opsegom $1/2$ i centralnom frekvencijom θ_0 , odnosno:

$$\phi(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} e^{j2\pi\theta_0 n}. \quad (2.25)$$

Rezultujući specijalni Weyl-ov filter se naziva ulaznim *halfband* Weyl-ovim filtrom.



Slika 2.3 Ilustracija matrice G_n . Kružići predstavljaju odbirke $\tilde{g}_W(n, m)$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $h_W(2l, 2l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1)$). Dijagonala \tilde{g}_{n_0} sadrži odbirke $\tilde{g}_W(n_0, m)$ korišćenje od strane *minimum energy* Weyl-ovog filtra u trenutku n_0 , (2.22), (2.23).

Interpolacione relacije (2.24) mogu alternativno biti formulisane kao *halfband* restrikcija ulaznog signala. Ulazni *halfband* Weyl-ov filter stoga može biti implementiran kroz sljedeća dva koraka:

1. *Halfband* restrikcija ulaznog signala:

$$x_\Psi(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi(n-n') x(n') \in \Psi, \quad (2.26)$$

2. Primjena *minimum energy* Weyl-ovog filtra na $x_\Psi(n)$, (2.19):

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_W(n-m) x(n-m). \quad (2.27)$$

Operacija filtriranja opisana jednačinom (2.27) koristi isključivo odbirke impulsnog odziva $\tilde{g}_W(n-m)$ koji su određeni originalnim pravilom dizajniranja (2.16).

Sveukupna struktura ulaznog *halfband* filtra je prikazana na slici 2.2(b).

2.1.2.3. Izlazni *halfband* Weyl-ov filter

Naredna alternativa podrazumijeva ograničavanje Weyl-ovog filtra H_W tako da predstavlja izlazni *halfband* filter. Nepoznati odbirci impulsnog odziva $h_W(2l, 2l'+1)$ i $h_W(2l+1, 2l')$ se specificiraju na sljedeći način:

$$h_W(2l, 2l'+1) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(2i+1, 2h_W(1)) \delta(i-l') \quad (2.28a)$$

$$h_W(2l+1, 2l') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(2i, 2h_W(1)) \delta(i-l'). \quad (2.28b)$$

Rezultujući Weyl-ov filter se naziva izlaznim *halfband* Weyl-ovim filtrom.

Relacije (2.28) se, takođe, mogu formulisati kao *halfband* restrikcija izlaznog signala. Shodno tome, izlazni *halfband* Weyl-ov filter može biti implementiran kroz naredna dva koraka:

1. Primjena *minimum energy* Weyl-ovog filtra na ulazni signal $x(n)$, (2.19):

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_W(n-m) x(n-m), \quad (2.29)$$

2. *Halfband* restrikcija rezultujućeg, posrednog izlaznog signala, $\tilde{y}(n)$:

$$y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi(n-n') \tilde{y}(n') \in \Psi. \quad (2.30)$$

Operacija filtriranja opisana jednačinom (2.29) koristi isključivo odbirke impulsnog odziva $\tilde{g}_W(n-m)$ koji su određeni originalnim pravilom dizajniranja (2.16).

Sveukupna struktura izlaznog *halfband* filtra je prikazana na slici 2.2(c).

2.1.2.4. *Halfband* Weyl-ov filter

Neka je H *halfband* filter za *halfband* subprostor Ψ sa centralnom frekvencijom θ_0 . Osobina *halfband* filtra da $H \in \Psi^2$ je nekompatibilna sa pravilom dizajniranja Weyl-ovog filtra $L_{H_W}(n, \theta) = M(n, \theta)$ iz (2.15). Naime, neće postojati ni jedan Weyl-ov filter H_W koji je *halfband* filter. Stoga se definicija Weyl-ovog filtra $L_{H_W}(n, \theta) = M(n, \theta)$ mijenja ograničenom minimizacijom:

$$H_{HW} = \arg \min_{H \in \Psi^2} \|M - L_H\|, \quad (2.31)$$

gdje je:

$$\|M - L_H\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{1/2} |M(n, \theta) - H_H(n, \theta)|^2 d\theta.$$

H_{HW} se naziva *halfband* Weyl-ovim filtrom. Prema njegovoj definiciji (2.31), H_{HW} je *halfband* filtar čiji je Weyl-ov simbol najbliži vrijednosti težinske funkcije $M(n, \theta)$. H_{HW} je, stoga, moguće dobiti na sljedeći način:

1. TF težinska funkcija $M(n, \theta)$ se pravi *halfband* konzistentnom i to je ostvareno sljedećom konvolucijom,

$$\tilde{M}(n, \theta) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\Omega(\theta)(n-n'))}{\pi(n-n')} M(n', \theta). \quad (2.32)$$

Na ovaj način se postiže niskopropusno filtriranje u pravcu vremena sa *cutoff* frekvencijom $\Omega(\theta) = 1/2 - 2|\theta - \theta_0|$. *Cutoff* frekvencija uzima nultu vrijednost na *halfband* ivicama, odnosno kada je $\theta = \theta_0 \pm 1/4$, i vrijednost $1/2$ u *halfband* centru $\theta = \theta_0$.

2. Inverzna Weyl-ova transformacija (2.14) se primjenjuje na $\tilde{M}(n, \theta)$:

$$\tilde{g}_{HW}(n, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{M}(n, \theta) e^{j4\pi\theta m}. \quad (2.33)$$

Funkcija $\tilde{g}_{HW}(n, \theta)$ je sve što je potrebno za implementaciju *halfband* Weyl-ovog filtra. Iz $\tilde{g}_{HW}(n, \theta)$ možemo odmah dobiti $h_{HW}(2l, 2l') = \tilde{g}_{HW}(l+l', l-l')$ i $h_{HW}(2l+1, 2l'+1) = \tilde{g}_{HW}(l+l'+1, l-l')$. Ukoliko želimo preostale odbirke impulsnog odziva ($h_{HW}(2l+1, 2l')$ i $h_{HW}(2l, 2l'+1)$), možemo ih dobiti uz pomoć interpolacione relacije:

$$h_{HW}(n, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \delta_{n-l, \theta-l'} h_{HW}(l, l') \quad (2.34)$$

Ova relacija važi za bilo koji *halfband* filtar. Njome se pokazuje da je impulsni odziv $h(n, \theta)$ *halfband* filtra kompletno određen sa odbircima parnih indeksa $h(2l, 2l')$. Korisno je naglasiti da, ipak, odbirci impulsnog odziva $h_{HW}(2l+1, 2l'+1)$, $h_{HW}(2l, 2l'+1)$ i $h_{HW}(2l+1, 2l')$ nisu neophodni za implementaciju *halfband* Weyl-ovog filtra.

Na osnovu prethodnog metoda za izračunavanje H_{HW} zaključujemo da *halfband* konzistentnost vrijednosti težinske funkcije $M(n, \theta)$ korespondira specifičnoj glatkoći u odnosu na n . Alternativni način za izračunavanje H_{HW} je sljedeći:

1. Izračunati odbirke impulsnog odziva $h_W(2l, 2l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1)$ konvencionalnog Weyl-ovog filtra upotrebom jednačine (2.16), pri čemu se koristi originalna TF težinska funkcija $M(n, \theta)$.

2. Izračunati $h_{HW}(n, n')$ iz $h_W(2l, 2l')$ i $h_W(2l+1, 2l'+1)$ upotrebom 2D *halfband* restrikcije:

$$h_{HW}(n, n') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \phi(2l - n) \phi(2l' - n') h_W(l, l') + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \phi(2l - n) \phi(2l' - n') h_W(l, l') \quad (2.35)$$

Zapravo, dovoljno je izračunati $h_{HW}(2l, 2l')$ jer preostali odbirci impulsnog odziva nijesu potrebni za implementaciju *halfband* Weyl-ovog filtra.

Za $M(n, \theta) = 1$ i $x(n) \in \Psi$, *halfband* Weyl-ov filter zadovoljava jednakost $(H_{HW}x)(n) = x(n)$.

2D *halfband* restrikcija impulsnog odziva u (2.35) može biti preformulisana u *halfband* restrikciju i ulaznog i izlaznog signala. *Halfband* Weyl-ov filter stoga može biti konačno implementiran kroz sljedeće korake:

1. *Halfband* ograničenje ulaznog signala, (2.26),

$$x_{\Psi}(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi(n - n') x(n') \in \Psi \quad (2.36)$$

2. Primjena *minimum energy* Weyl-ovog filtra na $x_{\Psi}(n)$, (2.19),

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_W(n - m) x_{\Psi}(n - m) \quad (2.37)$$

3. *Halfband* ograničenje izlaznog signala, (2.30),

$$y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi(n - n') \tilde{y}(n') \in \Psi \quad (2.38)$$

Slično ulaznom i izlaznom *halfband* Weyl-ovom filteru, operacija filtriranja u (2.37) koristi samo odbirke impulsnog odziva $\tilde{g}_W(n, m)$ koji su specificirani sa (2.16). Primjetimo da je implementacija efikasna zato što izbjegava računski intenzivnu *halfband* projekciju iz (2.32), odnosno (2.35).

Sveukupna struktura *halfband* Weyl-ovog filtra je prikazana na slici 2.2(d).

2.1.2.5. Aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter

Efikasnija, ali aproksimativna, implementacija *halfband* Weyl-ovog filtra je takođe razvijena. Procedura dizajniranja ove vrste filtra počinje uvođenjem jednačine (2.34) u ulazno-izlaznu jednačinu (2.1), što vodi preciznoj implementaciji *halfband* Weyl-ovog filtra.

1. Izračunavanje odbiraka parnih indeksa *halfband* ograničenog ulaznog signala, (2.36),

$$x_{\Psi}(2l) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi(2l - n') x(n'). \quad (2.39)$$

2. LTV filtriranje odbiraka $x_\psi(2l)$, korišćenjem odbiraka parnih indeksa impulsnog odziva $h_{HW}(2l, 2l')$:

$$\tilde{y}(2l) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_{HW}(2l, 2l') x_\psi(2l') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{HW}(l-m) x_\psi(l-m). \quad (2.40)$$

3. *Halfband* interpolacija izlaznog signala:

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(n-l) \tilde{y}(l). \quad (2.41)$$

Pododabrana šema se čini mnogo efikasnijom od prethodnog algoritma, (2.36)-(2.38). Na žalost, to nije tačno s obzirom da se koristi $h_{HW}(2l, 2l')$ umjesto $h_W(2l, 2l')$, te se stoga računski intenzivne *halfband* projekcije (2.32), odnosno (2.35) ipak izvršavaju. Izvršavanje *halfband* projekcija – na primjer, korišćenje $h_W(2l, 2l')$ umjesto $h_{HW}(2l, 2l')$ u (2.40), vodi do aproksimativne implementacije *halfband* Weyl-ovog filtra sa neupitnom efikasnošću. Aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter, ovdje označen sa \tilde{H}_{HW} , se definiše procedurom od tri koraka, (2.39)-(2.41), pri čemu se LTV filtriranje u (2.40) zamjenjuje sa:

$$\tilde{y}(2l) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_W(2l, 2l') x_\psi(2l') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_W(l-m) x_\psi(l-m). \quad (2.42)$$

Primjetimo da nam je sada potreban odziv $\tilde{g}_W(n)$ samo za obje parne ili obje neparne vrijednosti n i m .

Sveukupna struktura filtra je prikazana na slici 2.2(e).

Aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter \tilde{H}_{HW} je veoma efikasan jer se LTV filtriranje u (2.42) obavlja u pola brzine odabiranja i koristi samo odbirke impulsnog odziva koji su specificirani originalnim dizajnerskim pravilom Weyl-ovog filtra (2.16).

Usljed *halfband* predfiltriranja (2.39) i postinterpolacije (2.41), \tilde{H}_{HW} je takođe *halfband* filter. On se razlikuje od Weyl-ovog *halfband* filtra H_{HW} , osim u slučaju kada je težinska funkcija $M(n, \theta)$ sama po sebi *halfband* konzistentna, što je prilično čest slučaj. Tada je \tilde{H}_{HW} dobra aproksimacija filtra H_{HW} , a težinska funkcija $M(n, \theta)$ je dovoljno glatka u odnosu na n , naročito u blizini *halfband* ivica. Stoga, ako vremenske varijacije težinske funkcije $M(n, \theta)$ nijesu suviše brze (što je obično istina ako je H_{HW} *underspread*) aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter \tilde{H}_{HW} je dovoljno sličan *halfband* filtru H_{HW} .

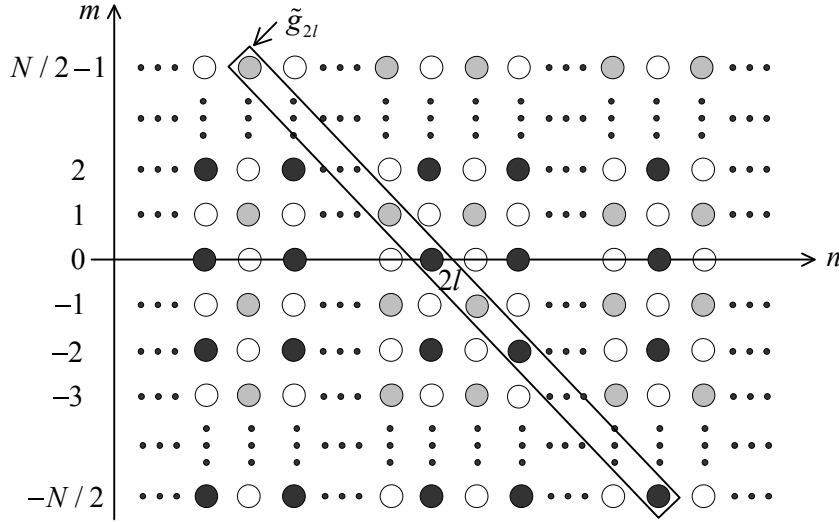
LTV filtriranje u jednačini (2.42) uključuje odziv $\tilde{g}_W(n)$ samo za obje parne ili obje neparne vrijednosti n i m , slika 2.4. Ipak, IDFT u jednačini (2.21) daje sve odbirke odziva $\tilde{g}_W(n)$. Ova neefikasnost može biti izbjegnuta korišćenjem relacija za frekvencijsko redukovanje IDFT-je, [65]. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je N umnožak broja 4. Tada, za parno $n=2l$ slijedi da je:

$$\tilde{g}_W(2l, 2i) = \sum_{k=0}^{N/2-1} M_e(l+k) e^{j2\pi \frac{k}{N} i}, \quad i = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{4}-1, \quad (2.43)$$

sa $M_e(n) = M(n-k) + 2M(n-k+N)$. Za neparno $n=2l+1$ slijedi da je:

$$\tilde{g}_W(2l+1, 2i+1) = \sum_{k=0}^{N/2-1} M_o(l+k) e^{j2\pi \frac{k}{N} i}, \quad i = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{4}-1, \quad (2.44)$$

sa $M_o(n) = M(n-k) + 2M(n-k+N) e^{j2\pi \frac{k}{N}}$. Na ovaj način je u svakom vremenskom trenutku n potrebna samo IDFT dužine $N/2$, umjesto IDFT-je dužine N iz jednačine (2.21).



Slika 2.4 Ilustracija matrica $G_{2l}^{(k)}$ i $G_{2l}^{(p)}$. Crni kružići označavaju elemente matrice $G_{2l}^{(k)}$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $\tilde{g}_W(2l-2i, 2i)$), dok sivi kružići označavaju elemente matrice $G_{2l}^{(p)}$ (korespondiraju odbircima impulsnog odziva $\tilde{g}_W(2l-2i-1, 2i+1)$). Dijagonala \tilde{g}_{2l} sadrži odbirke $\tilde{g}_W(2l-m, m)$ koje koristi aproksimativni *halfband* Weyl-ov filter u trenutku $n=2l$, (2.45), (2.46). Kružići koji su predstavljeni isprekidanom linijom označavaju odbirke $\tilde{g}_W(n)$ koje nije potrebno izračunavati.

Usljed konačnog oslonca (dimenzije m) za odziv $\tilde{g}_W(n)$, LTV operacija filtriranja u jednačini (2.42) se redukuje na:

$$\tilde{y}(2l) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_W(2l-m) x_\Psi(l-m), \quad (2.45)$$

što uključuje pododabrane, *halfband* ograničene ulazne odbirke $x_\Psi(2(l-N/2+1))$, $x_\Psi(2(l-N/2+2))$, ..., $x_\Psi(2(l+N/2))$ u okolini vremenskog trenutka $n=2l$. Korišćenjem vektora $\tilde{g}_{2l} = (\tilde{g}_W(l-N/2+1), \tilde{g}_W(l-N/2+2), \dots, \tilde{g}_W(l+N/2))^T$ i $x_{\Psi,2l} = (x_\Psi(2(l-N/2+1)), x_\Psi(2(l-N/2+2)), \dots, x_\Psi(2(l+N/2)))^T$ dužine N , jednačina (2.45) može biti zapisana kao:

$$\tilde{y}(2l) = \tilde{g}_{2l}^T x_{\Psi,2l}. \quad (2.46)$$

U cilju interpretacije vektora \tilde{g}_{2l} definišu se matrice $G_{2l}^{(p)}$ i $G_{2l}^{(q)}$. Matrica $G_{2l}^{(p)}$ je dimenzija $N/2 \times N/2$ i njena i -ta kolona ($i=1,2,\dots,N/2$) je IDFT (u odnosu na k) dijela težinske funkcije $M_e(2(l+N/4-i)-1, k)$ dužine $N/2$, (2.43). Slično, matrica $G_{2l}^{(q)}$ je dimenzija $N/2 \times N/2$ i njena i -ta kolona je IDFT (u odnosu na k) dijela težinske funkcije $M_o(2(l-N/4+i)-1, k)$ dužine $N/2$, (2.45). Tada su elementi sa parnim indeksima \tilde{g}_{2l} glavna dijagonala matrice $G_{2l}^{(p)}$, slika 2.4.

2.1.3. STFT filter

STFT signala $x(n)$ je definisana sa, [1], [29], [139], [140], [149]:

$$STFT_x^{(q)}(n, \theta) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \gamma(n-n') e^{-j\pi\theta(n-n')} \quad (2.47)$$

gdje je $\gamma(n)$ pogodno izabran prozor kojim se odsijeca signal $x(n)$. Kvadrat magnitude STFT-je može biti interpretiran kao mjera količine energije koju signal $x(n')$ ima u okolini TF tačke (n, θ) . Inverzna forma STFT-je može biti zapisana u obliku, [1], [30], [55], [153], [154],

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_0^1 STFT_x^{(q)}(n', \theta) g(n-n') e^{j\pi\theta(n-n')} d\theta \quad (2.48)$$

pod uslovom da prozori sinteze i analize, $g(n)$ i $\gamma(n)$ respektivno, zadovoljavaju uslov idealne rekonstrukcije:

$$\langle g, \gamma \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \gamma^*(n) = 1 \quad (2.49)$$

Ako je $g(n) = \gamma(n)$, tada jednačina (2.49) daje normalizovanu vrijednost prozora analize, odnosno $\|\gamma\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)|^2 = 1$. Primjetimo da jednačina (2.49) može uvijek biti ostvarena jednostavnim skaliranjem bilo kog prozora, osim ako je $\langle g, \gamma \rangle = 0$.

Procedura filtriranja STFT filtrom obuhvata tri koraka, koja su ilustrovana na slici 2.5, [33], [42], [77], [149], [153]:

1. Analiza: STFT ulaznog signala $x(n)$ se izračunava u skladu sa jednačinom (2.47).
2. Ponderisanje: STFT ulaznog signala $x(n)$ se množi sa predefinisanim TF težinskom funkcijom $M(n, \theta)$,

$$F(n, \theta) = M(n, \theta) STFT_x^{(q)}(n, \theta) \quad (2.50)$$

Rezultujuća TF funkcija $F(n, \theta)$ korespondira, u određenom smislu, željenoj STFT-ji izlaznog signala filtra $y(n)$. Ipak, u opštem slučaju $F(n, \theta)$ nije prava STFT bilo kog signala.

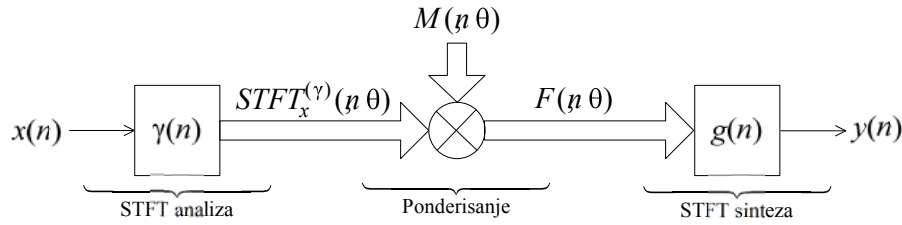
3. Sintaza: Izlazni signal filtra $y(n)$ se izračunava primjenom inverzne relacije za STFT-ju, (2.48), na TF funkciju $F(n, \theta)$,

$$y(n, \theta) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(n', \theta) g(n-n') e^{j2\pi\theta(n-n')} d\theta. \quad (2.51)$$

Kako su sva tri koraka procedure linearna riječ je o LTV filtru koji se naziva STFT filtrom, označava sa H_S i karakteriše implicitnim dizajnom. Primjetimo da STFT filtar zavisi ne samo od TF težinske funkcije $M(n, \theta)$, već i od prozora $\gamma(n)$ i $g(n)$. Impulsni odziv filtra H_S se dobija kao:

$$h_S(n_1, n_2, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 M(n, \theta) \gamma(n_1 - n) \gamma^*(n_2 - n) e^{j2\pi\theta(n_1 - n_2)} d\theta. \quad (2.52)$$

Ako prozor zadovoljava jednačinu (2.49), tada STFT filtar zadovoljava osobinu potpune rekonstrukcije, odnosno $(H_S x)(n) = x(n)$ za $M(n, \theta) = 1$.



Slika 2.5 Blok dijagram STFT filtra.

Ograničena TF rezolucija kojom se karakteriše STFT (detaljna analiza je data u prvoj glavi disertacije) predstavlja najveće ograničenje STFT filtra. U cilju prevazilaženja ovog ograničenja, uvodi se *multiwindow* forma STFT filtra.

2.1.4. Multiwindow STFT filtar

Multiwindow STFT filtar, [33], [39], [42], se definiše kao težinska suma M STFT filtara H_S^0 , $i=1,2,\dots,M$, sa različitim prozorima analize i sinteze, $\gamma_i(n)$ i $g_i(n)$ respektivno, i sa istom TF težinskom funkcijom $M(n, \theta)$.

$$H_{MS} = \sum_{i=1}^M \eta_i H_S^0. \quad (2.60)$$

Konstante η_i predstavljaju različite težinske koeficijente pridružene individualnim STFT filtrima H_S^0 . Korišćenje većeg broja STFT filtara vodi fleksibilnijem dizajnu, ali na račun uvećane računске kompleksnosti. Primjetimo da je STFT filtar H_S specijalan slučaj *multiwindow* STFT filtra H_{MS} kada je $M=1$.

Blok šema *multiwindow* STFT filtra je prikazana slikom 2.6.

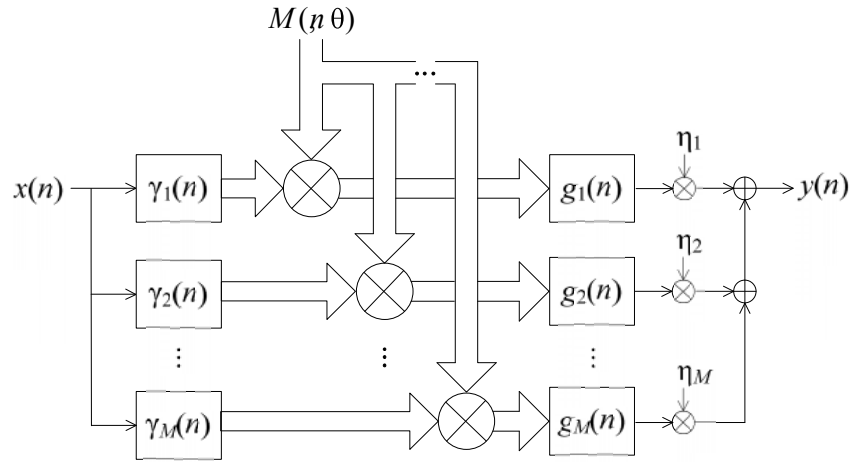
Impulsni odziv *multiwindow* STFT filtra H_{MS} je dat sa:

$$h_{MS}(n_1, n_2, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 M(n, \theta) \gamma(n_1 - n) \gamma^*(n_2 - n) e^{j2\pi\theta(n_1 - n_2)} d\theta, \quad (2.61)$$

pri čemu je:

$$p(n, \theta) = \sum_{i=1}^M \eta_i g_i(n, \theta) \gamma_i^*(n, \theta). \quad (2.62)$$

Pogodno je interpretirati $p(n, \theta)$ kao impulsni odziv nekog LTV sistema P . Primjetimo da sistem P uključuje uticaj prozora $\gamma_i(n)$, $g_i(n)$ i težinskih koeficijenata η_i na *multiwindow* STFT filter H_{MS} .



Slika 2.6 Blok dijagram *multiwindow* STFT filtra.

Potpuna rekonstrukcija, tj. $(H_{MS}x)(n)=x(n)$ za $M(n, \theta)=1$, se ostvaruje ako i samo ako je:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n, \theta) = 1 \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \sum_{i=1}^M \eta_i \langle g_i, \gamma_i \rangle = 1. \quad (2.63)$$

Potpuna rekonstrukcija individualnih grana H_S^{θ} filtra ($\langle g_i, \gamma_i \rangle = 1$ za $i=1,2,\dots,M$, (2.49)) zajedno sa normalizacijom težinskih koeficijenata $\sum_{i=1}^M \eta_i = 1$ je dovoljan, ali ne i neophodan uslov za potpunu rekonstrukciju *multiwindow* STFT filtra H_{MS} .

2.1.5. Gabor-ov filter

Osnovni nedostatak STFT filtra, kao i njegove *multiwindow* forme je izrazita računaska kompleksnost, uzrokovana redundantnošću frekvencijski diskretne STFT-je koja se koristi kao reprezentacija zašumljenog signala. Zaista, jedan odabirak signala $x(n)$ se reprezentuje sa N odbiraka STFT-je $STFT_x^{\theta}(n, k) \in \mathbb{C}^N$ odnosno, u slučaju *multiwindow* STFT-je, sa čak MN odbiraka. Ovaj problem može biti ublažen, ili sveukupno izbjegnuto pododabiranjem frekvencijski diskretne STFT-je. To vodi ka Gabor-ovoj transformaciji, [30], [56], [156], [157], [160], i implicitnom TV filteru koji se naziva Gabor-ovim filtrom, [42], [154]-[156].

Gabor-ova transformacija $GT_x^{(l,k)}(n)$ je odabrana STFT, odnosno $STFT_x^{(l,k)}(n)$ izračunata za $n=IL$, $\theta=k/N$ sa $l \in Z$ i $k=0,1,\dots,N-1$:

$$GT_x^{(l,k)}(n) = STFT_x^{(l,k)}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-mL) e^{-j2\pi \frac{k}{N}(n-mL)} \quad l \in Z, k=0,1,\dots,N-1. \quad (2.64)$$

Vremenski i frekvencijski diskretna STFT:

$$STFT_x^{(l,k)}(n) = STFT_x^{(l,k)}\left(n, \frac{k}{N}\right) = \sum_{n'=n-L_y/2}^{n+L_y/2-1} x(n') e^{-j2\pi \frac{k}{N}(n'-n)} \quad (2.65)$$

je specijalan slučaj Gabor-ove transformacije sa $L=1$ (bez vremenskog pododabiranja). Preodabirajući faktor $\xi=N/L$ je mjera sveukupne gustine TF laticе ($IL, k/N$). Veće vrijednosti faktora ξ korespondiraju gušćoj TF latici i usljed toga, većoj računskoj kompleksnosti. Izdvajaju se specijalni slučajevi, [157]:

$$\begin{cases} N = L (\xi = 1) \Leftrightarrow \text{kritično odabiranje,} \\ N > L (\xi > 1) \Leftrightarrow \text{kritično preodabiranje,} \\ N < L (\xi < 1) \Leftrightarrow \text{kritično pododabiranje.} \end{cases}$$

Inverzna forma Gabor-ove transformacije može biti zapisana u obliku:

$$x(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} GT_x^{(l,k)}(n) g(l, k) e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-IL)} \quad (2.66)$$

pod uslovom da su prozori analize i sinteze, $\gamma(n)$ i $g(n)$ respektivno, dualni, odnosno biortogonalni u odnosu na susjednu TF laticu ($k'N, l'$) L sa $k' \in Z, l' = 0, 1, \dots, L-1$, [157], [160].

Ova biortogonalnost može biti formulisana u uslovima *cross-ambiguity* funkcije $A_{g,\gamma}(m, \nu)$, kao:

$$A_{g,\gamma}\left(k'N, \frac{l'}{L}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \gamma^*(n-k'N) e^{-j2\pi \frac{l'}{L}n} = \frac{L}{N} \delta(k') \delta(l') \quad (2.67)$$

Uslov biortogonalnosti ne može biti zadovoljen u slučaju pododabiranja, $N < L$ ($\xi < 1$).

Gabor-ov filter je implicitni TF dizajn, esencijalno analogan STFT filtru. Procedura filtriranja Gabor-ovim filtrom obuhvata sljedeća tri koraka:

1. Analiza: Gabor-ova transformacija ulaznog signala $x(n)$ se izračunava u skladu sa jednačinom (2.64).
2. Ponderisanje: Gabor-ova transformacija ulaznog signala $x(n)$ se množi sa diskretnom TF težinskom funkcijom $M(l, k) = M(IL, k/N)$ (vremenski pododabrana, frekvencijski odabrana verzija težinske funkcije $M(n, \theta)$):

$$F(l, k) = M(l, k) GT_x^{(l,k)}(l, k) \quad 0, 1, l \in Z, k \in 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.68)$$

3. Sintaza: Izlazni signal filtra $y(n)$ se izračunava primjenom inverzne forme Gabor-ove transformacije, (2.66), na funkciju $F(l, k)$:

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} F(l, k) g(n-lL) e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-lL)}. \quad (2.69)$$

Prethodna procedura definiše LTV filter koji se naziva Gabor-ovim filtrom i označava se sa H_G . Gabor-ov filter zavisi ne samo od težinske funkcije $M(l, k)$, već i od parametara TF latice L i N , kao i od prozora analize i sinteze, $\gamma(n)$ i $g(n)$ respektivno. Impulsni odziv Gabor-ovog filtra H_G je:

$$h_G(n, n') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} M(l, k) g(n-lL) \gamma^*(n'-lL) e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-n')}. \quad (2.70)$$

Ako je zadovoljen uslov biortogonalnosti (2.67), onda H_G zadovoljava uslov potpune rekonstrukcije, odnosno $(H_G x)(n) = x(n)$ za $M(l, k) = 1$.

Imajući u vidu da se Gabor-ova transformacija dobija pododabiranjem STFT-je, ograničena TF rezolucija kojom se karakteriše STFT i za slučaj Gabor-ovog filtra predstavlja ozbiljan nedostatak. U cilju prevazilaženja ovog nedostatka, uvodi se *multiwindow* forma Gabor-ovog filtra.

2.1.6. Multiwindow Gabor-ov filter

Multiwindow Gabor-ov filter H_{MG} , [42], se definiše kao težinska suma M Gabor-ovih filtara H_G^0 sa različitim prozorima analize i sinteze, $\gamma_i(n)$ i $g_i(n)$ respektivno, sa istim TF parametrima L i N , i istom težinskom funkcijom $M(n, \theta)$,

$$H_{MG} = \sum_{i=1}^M \eta_i H_G^0. \quad (2.71)$$

Uočimo da je Gabor-ov filter H_G specijalan slučaj *multiwindow* Gabor-ovog filtra H_{MG} za $M=1$. Korišćenje velikog broja Gabor-ovih filtara omogućava redukovanje TF gustine odabiranja M/L , [147]-[149]. Preodabirajući faktor se, u slučaju *multiwindow* Gabor-ovog filtra, definiše kao $\xi = MN/L$. Izdvajaju se specijalni slučajevi:

$$\begin{cases} MN = L (\xi = 1) \Leftrightarrow \text{kritično odabiranje,} \\ MN > L (\xi > 1) \Leftrightarrow \text{kritično preodabiranje,} \\ MN < L (\xi < 1) \Leftrightarrow \text{kritično pododabiranje.} \end{cases}$$

Impulsni odziv *multiwindow* Gabor-ovog filtra H_{MG} se dobija kao:

$$h_{MG}(n, n') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} M(l, k) p(n-lL) n'-lL e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-n')}, \quad (2.72)$$

pri čemu je $p(n, n')$ definisan jednačinom (2.62). Pogodno je interpretirati $p(n, n')$ kao impulsni odziv nekog LTV sistema P . Potpuna rekonstrukcija, odnosno $(H_{MG} x)(n) = x(n)$ za $M(l, k) = 1$, se ostvaruje ako i samo ako je, [122], [147], [149], [157]:

$$S_p\left(k'N, \frac{l'}{L}\right) = \frac{L}{N} \delta(k') \delta(l') \quad (2.73)$$

Ako je zadovoljena jednačina (2.73) prozori $\{\gamma_i(n)\}$ i $\{\eta_i g_i(n)\}$ su dualni, [147]-[149], [157]. Kao i u slučaju Gabor-ovog filtra, potpuna rekonstrukcija ne može biti ostvarena u slučaju pododabiranja ($\xi < 1$). Individualna dualnost (biortogonalnost) svakog para prozora $\gamma_i(n)$ i $g_i(n)$ zajedno sa normalizacijom težinskih koeficijenata $\sum_{i=1}^M \eta_i = 1$ je dovoljan, ali ne i neophodan uslov za potpunu rekonstrukciju *multiwindow* Gabor-ovog filtra H_{MG} . Zapravo, dualnost prozora je moguća samo za $N/L \geq 1$, što odgovara preodabirajućem faktoru $\xi \geq M$.

2.1.7. TF projekcioni filtar

LTV filtar H se naziva TF projekcionim filtrom, [35], ukoliko je H ortogonalni projekcioni sistem, odnosno ako je: $H^+ = H$, pri čemu je funkcija H^+ susjedna funkciji H , i ako je $HH = H$, [63], [151]. TF projekcioni filtri implementiraju 0/1 TF težinsku funkciju, koja odgovara zaustavljanju i propuštanju određenih TF regiona. Ova osobina je pogodna za odvajanje komponenti signala, potiskivanje šuma i slično. TF karakteristike odsijecanja TF projekcionih filtara su oštirije nego kog bilo koje druge vrste LTV filtara.

Značajno ograničenje klasičnog TF projekcionog filtra je to što dozvoljava isključivo paralelno procesiranje i što podrazumijeva rješavanje *eigen*¹¹ problema kompleksnosti $O(N^3)$, pri čemu N označava dužinu analiziranog signala. Međutim, razvijen je efikasan *online* algoritam TF projekcionog filtra koji ima linearnu kompleksnost reda N , [43].

U idealnom slučaju TF projekcioni filtar H_p^{opt} je definisan kao vremenski diskretan LTV filtar čiji je Weyl-ov simbol najbliži (u smislu najmanje srednje kvadratne greške) datoj TF težinskoj funkciji $M(n, \theta)$, pod uslovom da je H_p^{opt} ortogonalni projekcioni sistem i simultano *halfband* filtar za neku zadatu *halfband* centralnu frekvenciju θ_0 . Stoga je:

$$H_p^{opt} = \arg \min_{H \in P \cap HF} \|L_H - M\|, \quad (2.74)$$

gdje P označava skup ortogonalnih projekcionih sistema i HF označava linearni prostor svih *halfband* filtara sa centralnom frekvencijom θ_0 . Pošto ortogonalni projekcioni sistem može samo da potisne ili propusti komponente signala, koristimo 0/1 TF težinsku funkciju:

$$M(n, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{za } (n, \theta) \in R \\ 0, & \text{za } (n, \theta) \notin R \end{cases} \quad (2.75)$$

¹¹ Posmatrajmo sistem linearnih jednačina: $Ax=y$, pri čemu je A kvadratna matrica dimenzija $n \times n$, a x i y vektori dužine n (elementi matrice A i elementi vektora x i y mogu biti realni i/ili kompleksni brojevi). Pretpostavimo da vektor y mora biti umnožak vrijednosti χ i vektora x , odnosno: $Ax=\chi x$.

Trivijalna rješenja jednačina ovog sistema su očigledno nule ($\chi=0$). Određivanje netrivialnih rješenja ovog sistema jednačina se definiše kao *eigen* problem, a parovi netrivialnih rješenja $\{\chi, x\}$ kao *eigen* parovi.

gdje R označava TF propusni region filtra. Pretpostavimo da je R lociran unutar *halfband* opsega $[\theta_0 - 1/4, \theta_0 + 1/4]$ i da je težinska funkcija $M(n, \theta)$ $1/2$ -periodična u odnosu na θ .

Kako H_P^{opt} u jednačini (2.74) ne vodi do efikasne *online* implementacije, u literaturi, [43], je predložena aproksimacija filtra H_P^{opt} , označena sa H_P .

Odbirci impulsnog odziva parnih indeksa filtra H_P se dobijaju na sljedeći način:

1. Odbirci impulsnog odziva parnih indeksa Weyl-ovog filtra H_W , [41], se računaju kao $h_W(2l, 2l') = g_W(l + l', l - l')$, gdje je:

$$g_W(n, m) = \sum_{\theta=0}^{1/2} M(n, \theta) e^{j4\pi m \theta}. \quad (2.76)$$

2. Realne *eigen* vrijednosti λ_k i odbirci parnih indeksa ortonormalnih *eigen* funkcija $u_k(n)$ Weyl-ovog filtra H_W se izračunavaju rješavanjem problema $\sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_W(2l, 2l') u_k(l') = \lambda_k u_k(2l)$.
3. Odbirci impulsnog odziva parnih indeksa TF projekcionog filtra H_P se izračunavaju u skladu sa:

$$h_P(2l, 2l') = \sum_{k \in J} \lambda_k u_k(l) u_k^*(l'), \quad (2.77)$$

gdje J označava skup momenata k u kojima je $\lambda_k > 1/2$.

Korišćenjem odbiraka $h_P(2l, 2l')$, pristupa se proceduri filtriranja $y(n) = H_P x(n)$. Najprije se odbirci parnih indeksa *halfband* ograničenog ulaznog signala izračunavaju kao:

$$\tilde{x}(2l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n - l) x(n), \quad (2.78)$$

gdje je $\phi(n)$ definisan jednačinom (2.25) i predstavlja impulsni odziv idealnog filtra sa propusnim opsegom $[\theta_0 - 1/4, \theta_0 + 1/4]$. Potom se izlazni odbirci parnih indeksa filtra H_P dobijaju kao:

$$y(2l) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} h_P(2l, 2l') \tilde{x}(l'). \quad (2.79)$$

Primjetimo da se ovaj korak filtriranja obavlja upola manjom brzinom. Konačno, odbirci izlaznog signala filtra se dobijaju interpolacijom:

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(n - l) y(2l). \quad (2.80)$$

LTV filtar H_P definisan gore opisanom procedurom se naziva *halfband* TF projekcionim filtrom. Ukoliko želimo *fullband* filtar, potrebno je da interpoliramo ulazni signal sa 2, implementiramo *halfband* TF projekcioni filtar duplo većom brzinom, i na kraju da redukujemo izlazni signal sa faktorom 2. U svakom slučaju, svi gore navedeni implementacioni koraci osim

(2.76) uključuju samo parne odbirke. U skladu s tim, interpolacija ulaznog signala i redukcija izlaznog signala su ostvareni sa (2.78) i (2.80), respektivno. Pri tome, jednačina (2.79) postaje $y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h_p(n-n') x(n')$. Jedini dodatni napor potreban za izračunavanje odziva $h_p(n-n')$ je izračunavanje odbiraka impulsnog odziva parnih indeksa Weyl-ovog filtra H_W , (2.76) po duplo većoj brzini odabiranja.

2.1.8. Poređenje linearnih TV filtara

U predašnjem izlaganju su razmatrana dva različita pristupa TF dizajnu LTV filtra H . Eksplicitni dizajn se sastoji u pronalaženju pogodne TF reprezentacije filtra H i definisanju TF težinske funkcije. Predstavnicima ovakve vrste implementacije su Zadeh-ov filter i nekoliko verzija Weyl-ovog filtra. Implicitni dizajn podrazumijeva TF implementaciju filtra koja se sastoji od množenja linearne TF reprezentacije ulaznog signala sa TF težinskom funkcijom i sinteze izlaznog signala na linearan način. Predstavnicima ovakve vrste implementacije su STFT filter, *multiwindow* STFT filter, Gabor-ov filter, *multiwindow* Gabor-ov filter, i projekcioni filter.

Najvažnije osobine razmatranih LTV filtara se mogu sumirati na sljedeći način:

- Ako je TF težinska funkcija glatka u dovoljnoj mjeri (odnosno ako ne sadrži oscilatorne komponente), svi filteri teže da budu *underspread* i da imaju slične performanse. Specijalno, (*multiwindow*) STFT i (*multiwindow*) Gabor-ov filter se mogu dizajnirati tako da su aproksimacije Zadeh-ovog ili Weyl-ovog filtra. *Underspread* osobina podrazumijeva da filteri ne uvode neželjena TF pomjeranja.
- Ukoliko TF težinska funkcija sadrži značajne oscilatorne komponente, tada su Zadeh-ov i Weyl-ov filter *overspread*, odnosno uvešće neželjena TF pomjeranja. S druge strane, STFT filter, ukoliko je pravilno dizajniran, kao i Gabor-ov filter će i dalje biti *underspread*, usljed inherentnog ravnanja TF težinske funkcije.
- Zbog inherentnog ravnanja, STFT i Gabor-ov filter imaju ograničenu TF rezoluciju. Stoga, nijesu pogodni za aplikacije kao što su separacija komponentni signala koje su bliske u TF ravni.
- TF projekcioni filter uključuje rješavanje dekompozicije *eigen* vrijednosti, što zahtijeva ozbiljan matematički aparat i računsku kompleksnost. Takođe, podrazumijeva određena *a priori* znanja u samoj proceduri implementacije.
- Weyl-ov filter je ograničen na *halfband* signale. U slučaju procesiranja *fullband* signala, potrebno je dodatno predprocesiranje (kao što je interpolacija sa 2) i postprocesiranje (kao što je decimacija sa 2).

- Weyl-ov filtar je superioran u odnosu na Zadeh-ov filtar, u slučaju da TF težinska funkcija sadrži koso orjentisane komponente (*chirp*-ove).
- *Multiwindow* STFT i *multiwindow* Gabor-ov filtar prevazilaze određena ograničenja koja imaju realizacije ovih filtara sa jednim prozorom. Na primjer, *multiwindow* STFT filtar može imati visoku TF rezoluciju. *Multiwindow* filtri su stoga privlačniji za procesiranje nestacionarnih signala, s obzirom da dozvoljavaju jednostavnu *online* estimaciju statistike signala.
- Eksplicitni dizajni TF filtara su prilično direktni, dok su implicitni dizajni zahtjevniji jer je neophodan odabir određenih parametara (na primjer, parametri TF latice, kao i prozori analize i sinteze). Dizajni koji su predstavljeni zahtijevaju prethodno znanje oblasti oslonca FT-je TF težinske funkcije.
- (*Multiwindow*) STFT filtar je kompleksniji od ostalih filtara. (*Multiwindow*) Gabor-ov filtar ima minimalnu kompleksnost, sve dok faktor preodabiranja nije suviše veliki.

Iz prethodne analize jasno možemo zaključiti da ne postoji jedan najbolji LTV filtar. Odabir LTV filtra zavisi od njegove specifične primjene. Određena pitanja moraju biti postavljena u ovom kontekstu: Koja je računaska složenost koja može biti tolerisana? Da li je neophodna visoka TF rezolucija? Da li TF težinska funkcija sadrži koso orjentisane komponente? Da li je TF težinska funkcija dovoljno glatka ili sadrži oscilatorne komponente čiji štetni efekti trebaju biti suzbijeni? Da li je potrebna *online* estimacija statistike signala?

2.2. Nelinearni TV filtri

Posmatrajmo 1D zašumljeni signal $x(t)$:

$$x(t)=f(t)+\varepsilon(t), \quad (2.81)$$

gdje je $\varepsilon(t)$ aditivni, bijeli Gaussian-ov kompleksni šum.

TV filtriranje signala $x(t)$ je definisano, [32], [59], [66], na sljedeći način:

$$(Y(t), t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.82)$$

gdje je $h(t,\tau)$ impulsni odziv TV sistema H . Jedan od načina determinisanja sistema H je minimizacija srednje kvadratne greške, [32], [66],

$$H_{opt} = \arg \min_H E \left\{ \left| f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau \right|^2 \right\}. \quad (2.83)$$

U idealnom slučaju, sistem bi rezultovao sa, [70],

$$(Hf)(t)=f(t), (H\varepsilon)(t)=0. \quad (2.84)$$

TV transfer funkcija, ostvarena u radu sa WD-jom, se definiše kao Weyl-ov simbol koji mapira impulsni odziv u TF ravan, [28], [32], [37],

$$L_H(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{\tau}{2} t - \frac{\tau}{2} e^{-j\omega\tau} \tau. \quad (2.85)$$

Koristeći željene osobine TV sistema i Moyal-ovu formulu koja se odnosi na unutrašnji proizvod signala i njihovih WD-ja,

$$(WD_f, WD_g)(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau) g(\tau)|^2 d\tau, \quad (2.86)$$

dobijamo osobine sistema koje važe u idealnom slučaju:

$$(WD_f, WD_f)(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau)|^2 d\tau, \quad (2.87)$$

$$(1, WD_f)(t, \omega) = L_H(t, \omega) WD_f(t, \omega), \quad (2.88)$$

$$(WD_f, 1)(t, \omega) = L_H^*(t, \omega) WD_f(t, \omega). \quad (2.89)$$

Pretpostavimo da WD signala $f(t)$ označena sa:

$$WD_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.90)$$

leži unutar regiona R , dok šum leži van ove oblasti (izuzev male količine šuma koja može biti zanemarena u odnosu na količinu šuma koja je van regiona R). Jednostavno rješenje koje zadovoljava jednačine (2.88) i (2.89) je dato u [32],

$$L_H(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } (t, \omega) \in R \\ 0, & \text{za } (t, \omega) \notin R \end{cases} \quad (2.91)$$

Primjetimo da se ništa kvalitativno neće promijeniti ako se pretpostavi da je $L_H(t, \omega)$ neka druga konstanta unutar regiona R .

Impulsni odziv se dobija kao:

$$h(t + \frac{\tau}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.92)$$

Koristićemo blago modifikovanu verziju definicione relacije filtriranja (2.82). Ova modifikacija je neophodna kako bi se izbjegla distorzija FM signala nakon upotrebe relacije TV filtriranja. TV filtriranje je u tom slučaju definisano sa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \frac{\tau}{2}) x(t - \frac{\tau}{2}) d\tau, \quad (2.93)$$

a korišćenjem Parseval-ove teoreme¹², dobijamo:

¹² Parseval-ova teorema se, za signal $x(t)$ i njegovu FT-ju $X(\omega)$, definiše na sljedeći način:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t - \tau) X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.94)$$

Naime, optimalna forma TV sistema H , čiji je impulsni odziv $h(t, \tau)$ može biti određena minimizacijom srednje kvadratne greške, kao što je predstavljeno sa (2.83), analogno Wiener-ovom filtru u slučaju stacionarnih signala. Vratimo se na nestacionarni stohastički proces $x(t)$, (2.81). Kada srednja kvadratna greška $e^2 = E\{|f(t) - y(t)|^2\}$ dostigne minimum, greška $f(t) - y(t)$ je ortogonalna na podatak $x^*(t + \alpha)$, za bilo koju vrijednost parametra α . Iz ove činjenice dobijamo da je:

$$E\left\{ \left[f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) d\tau \right] x^*\left(t + \alpha\right) \right\} = 0 \quad (2.95)$$

Očekivana vrijednost *ambiguity* funkcije je definisana sa:

$$\overline{AF}_{xx}(\theta, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\theta t} \right\} d\tau. \quad (2.96)$$

Računajući FT-ju relacije (2.95) duž pravca t i korišćenjem pogodnih zamjena:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{f(t) x^*(t + \alpha)\} e^{-j\theta t} dt = \overline{AF}_{fx}(\theta, -\alpha) e^{j\alpha\theta/2},$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t) x^*(t + \alpha)\} e^{-j\theta t} dt = \overline{AF}_{xx}(\theta, \tau - \alpha) e^{j(\theta/2)\tau},$$

dobijamo:

$$\overline{AF}_{fx}(\theta, \alpha) e^{-j\alpha\theta/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d_H(u - \tau) \overline{AF}_{xx}(\theta - u, \alpha - \tau) e^{-j(u/2)\tau - u\alpha} \tau u, \quad (2.97)$$

gdje je:

$$A_H(\theta, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt + \frac{\tau}{2} t - \frac{\tau}{2} e^{-j\theta t} t. \quad (2.98)$$

Za $|\theta\tau - u\alpha - u\tau|/2 \ll \pi$, kada je $e^{j|\theta\tau - u\alpha - u\tau|/2} \approx 1$, iz jednačine (2.97) slijedi da je:

$$\overline{AF}_{fx}(\theta, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_H(t) d\tau d\tau \overline{AF}_{xx}(\theta - u, \alpha - \tau) \tau u. \quad (2.99)$$

Računajući dvodimenzionalnu FT-ju relacije (2.99) dobijamo:

$$\overline{WD}_{fx}(t, \omega) = \mathcal{F}_H(t) \otimes \overline{WD}_{xx}(t, \omega), \quad (2.100)$$

gdje je:

$$\overline{WD}_{xx}(t, \omega) = \mathcal{F}_T\left\{ \overline{AF}_{xx}(\theta, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} \right\} d\tau \right\} \quad (2.101)$$

Wigner-ov spektar. Weyl-ov symbol impulsnog odziva filtra je označen sa:

$$L_H(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau - \frac{\tau}{2} t + \frac{\tau}{2} e^{-j\omega\tau} \tau. \quad (2.102)$$

Stoga je optimalni filter u TF domenu definisan sa:

$$L_H(t, \omega) = \frac{\overline{WD}_{fx}(t, \omega)}{\overline{WD}_{xx}(t, \omega)}, \quad (2.103)$$

što odgovara dobro poznatom Wiener-ovom filtru, u stacionarnom slučaju u kojem važi da je:

$$H(\omega) = \frac{F_{fx}(\omega)}{F_{xx}(\omega)},$$

pri čemu je $F_{fx}(\omega) = FT\{r_{fx}(\tau)\}$ (u stacionarnom slučaju je $r_{fx}(\alpha) = E\{f(t)x^*(t+\alpha)\}$, $r_{xx}(\tau-\alpha) = E\{x(t+\alpha)x^*(t+\alpha)\}$).

Relacija (2.103) će biti dobijena ako je na početku pretpostavljeno da su slučajni signali kvazistacionarni, te da $r_{fx}(t, t+\alpha)$ može biti zapisana kao $r_{fx}(t+\alpha/2, t-\alpha/2)$ i $r_{xx}(t+\tau, t+\alpha)$ kao $r_{xx}(t+(\tau-\alpha)/2, t-(\tau-\alpha)/2)$.

Za signal koji nije koreliran sa šumom stoga slijedi da je:

$$L_H(t, \omega) = \frac{\overline{WD}_{ff}(t, \omega)}{\overline{WD}_{ff}(t, \omega) + \overline{WD}_{ee}(t, \omega)}. \quad (2.104)$$

Vratimo se na pretpostavku da Wigner-ov spektar slučajnog signala $f(t)$ leži unutar regiona R u TF ravni, dok šum leži van ove oblasti (osim malog dijela koji može biti zanemaren u odnosu na dio šuma koji leži van ovog regiona). Ovo važi za široku klasu FM signala (visoko koncentrisanih u TF ravni) $f(t)$, maskiranih bijelim šumom $\varepsilon(t)$ rasprostranjenim u čitavoj TF ravni. Jednostavno rješenje koje zadovoljava tražene uslove je dato jednačinom (2.91). Primjenjujući to rješenje u frekvencijskom domenu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t, \omega) STFT[t, \omega] d\omega, \quad (2.105)$$

u mogućnosti smo da efikasno filtriramo FM monokomponentne i multikomponentne signale maskirane bijelim šumom.

Posmatrajmo dalje FM signal:

$$f(t) = A(t) e^{j\phi(t)}, \quad (2.106)$$

sa sporo promjenljivom amplitudom $A(t)$, takav da njegova FT može biti dobijena korišćenjem metoda stacionarne faze, [19], [68],

$$FT[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} A(t_0) e^{j\phi(t_0) - j\omega t_0} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi''(t_0)}} \delta(t_0 - \phi'(\omega)^{-1}) dt_0,$$

gdje $(\phi')^{-1}$ označava inverznu funkciju trenutne frekvencije $\phi'(t)$. Za asimptotske signale $(\phi')^{-1}$ je jednaka funkciji grupnog kašnjenja, [19]. Pretpostavimo da WD signala (2.81) pruža dobro lokalizovanu informaciju u vezi funkcije oslonca signala u TF domenu tako da je, [13], [19],

$$L_H(t, \omega) \approx \delta(\omega - \phi'(t)). \quad (2.107)$$

Primjetimo da će u diskretnom domenu, koji se koristi u numeričkoj realizaciji, funkcija $\delta(\omega)$ biti Kronecker-ova delta funkcija i zadovoljavaće uslov jedinične amplitude, (2.91), za TV filter. Primjenom $FT[f(t)]$ i $L_H(t, \omega)$ u jednačini (2.94) dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \phi'(t)) A(t_0) e^{j\phi(t_0) - j\omega t_0} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi''(t_0)}} \delta(t_0 - \phi'(\omega)^{-1}) e^{j\omega t} t_0 \omega + \varepsilon_{out} t = \\ = A(t_0) e^{j\phi(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi''(t_0)}} + \varepsilon_{out} t, \end{aligned} \quad (2.108)$$

jer je:

$$\int \int F(\omega, t) \delta(\omega - \phi'(t)) dt d\omega = F(t_0, \phi'(t_0)) = F(t),$$

za monotonu funkciju IF-je. Za signale sa linearnom IF-jom, ili za signale čija IF može biti smatrana linearnom funkcijom vremena unutar razmatranog intervala dobijamo:

$$F(\omega, t) = cf(t) = cA(t) e^{j\phi(t)}, \quad (2.109)$$

gdje je c konstanta, s obzirom da smo pretpostavili da je izvod IF-je konstantan. Ostale relacije filtriranja, osim (2.93), bi produkovale oštećene verzije originalnog signala.

Količina šuma unutar regiona oslonca definisanog sa $\delta(\omega) - \phi'(t)$ je zanemarena, s obzirom da je njegova energija redukovana sa faktorom:

$$Q = \frac{\iint_D d\omega dt}{\iint_D \delta(\omega) d\phi' dt} \gg 1, \quad (2.110)$$

gdje D predstavlja cjelokupnu razmatranu TF ravan. U slučaju kada varijacije IF-je nijesu male, potrebno je izvesti njihovu amplitudsku kompenzaciju. To je moguće uraditi estimacijom pravca IF-je u TF ravni, što, imajući u vidu poznat region oslonca R , nije problem.

Primjetimo dvosmislenost u definiciji funkcije $L_H(t, \omega)$ u jednačini (2.107). Umjesto delta impulsa duž IF-je $\phi'(t)$, možemo nametnuti isti uslov, ali za grupno kašnjenje $\phi'(t)^{-1}$, [13], [19], koji će produkovati funkciju oslonca:

$$L_H^{(g)}(t, \omega) \approx \delta(t - \phi'(\omega)^{-1}). \quad (2.111)$$

Interesantno je istaći da će funkcija oslonca definisana kao geometrijska sredina od (2.107) i (2.111), odnosno:

$$L_{H_g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \delta(\omega - \phi' t) \delta t - \phi' \omega^{-1}, \quad (2.112)$$

rezultovati sa tačnim vrijednostima za amplitudu i fazu,

$$x(t) = A e^{j\phi(t)}, \quad (2.113)$$

za bilo koji FM signal, dok god važi metod stacionarne faze, (2.108), s obzirom da je $\delta(\omega - \phi' t) \delta t - \phi' \omega^{-1} = \delta(\omega - \phi' t) \delta t - \phi' \omega^{-1}$ i $L_{H_g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \delta(\omega - \phi' t) \delta t - \phi' \omega^{-1}$. Uslov monotonosti IF-je je već uključen definicijom metoda stacionarne faze.

Poboljšanje odnosa signal/šum (*Signal to Noise Ratio – SNR*), koje može biti ostvareno TV filtrom, je definisano kao razlika *SNR* na izlazu (*SNR_{out}*) i *SNR* na ulazu (*SNR_{in}*), to jest kao:

$$G = SNR_{out} - SNR_{in}.$$

Iz jednačina (2.110) i (2.113), dobijamo da je:

$$G = 10 \log Q.$$

Znajući (2.110), ovo poboljšanje može biti značajno.

Treba imati u vidu da WD može proizvesti kompletno koncentrisanu distribuciju duž IF-je (grupnog kašnjenja) samo za linearne FM signale. Analiza greške i analiza širine optimalnog TV prozora za WD-ju nelinearnih FM signala je predstavljena u [104]. Ako varijacije IF-je nijesu linearne, tada kompletna koncentracija duž IF-je, $L_{H_g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \delta(\omega - \phi' t) \delta t - \phi' \omega^{-1}$, može biti dobijena upotrebom S-distribucije, [119], ili L-Wigner-ove distribucije, [109],

$$SD(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x^*(t - \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau,$$

gdje je za L-Wigner-ovu distribuciju $s^{[L]}(\omega)$ L-ti stepen signala, dok je u S-distribuciji samo faza signala pomnožena sa L. Za svaki FM signal, [109], [119], važi da je:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} SD(\omega, t) = A^2 \delta(\omega - \phi' t).$$

Slična koncentracija može biti ostvarena sa metodom preraspodjele, [53]. U slučaju polinomijalnih funkcija faze kompletna koncentracija distribucije može biti ostvarena korišćenjem polinomijalne Wigner-Ville-ove distribucije, [19], [25], ili lokalnih polinomijalnih distribucija, [103].

Za potrebne numeričke realizacije, daje se diskretna forma sistema (2.94), jednačinama:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_H(n, \theta) X(\theta) e^{j\theta n} d\theta \quad (2.114)$$

$$L_H(n, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n + \frac{k}{2}) e^{-j\theta k} \quad (2.115)$$

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\theta m}. \quad (2.116)$$

Posmatrajmo prethodne definicije i reprezentacije sa ograničenom promjenljivom τ . Ovaj slučaj je važan za praktičnu realizaciju. Uvođenjem prozora $w(\tau)$ u definiciju filtriranja dobijamo da je:

$$(\mathcal{H}(t))_{t \in \mathbb{R}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\tau) d\tau + \frac{\tau}{2} t - \frac{\tau}{2} w(\tau)(t+\tau) \right)_{t \in \mathbb{R}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_H(t) \omega \text{ STFT } t \omega \quad \omega, \quad (2.117)$$

pri čemu važi da je $w(0)=1$. Primjenjujući istu analizu kao u jednačini (2.108), i korišćenjem jednačine (2.112) kao funkcije oslonca, dobijamo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \phi'(\tau)) w(\tau_0) A(t + \tau_0) e^{j\phi(t + \tau_0) - j\omega\tau_0} \delta(t + \tau_0 - \phi'(\omega)^{-1} \tau_0 + \varepsilon_{out}(t)) dt d\omega \\ &= A(t) e^{j\phi(t) + \varepsilon_{out}(t)} . \end{aligned} \quad (2.118)$$

Ovo je interesantan zaključak. Prozor $w(\tau)$ ne utiče na izlazni signal $(Hx)(t)$ sve dok smo u mogućnosti da odredimo region oslonca R i dok je $w(0)=1$.

U hardverskim implementacijama se, prilikom određivanja regiona oslonca, koristi PWD-ja. Primjetimo da prozori koji se koriste u definiciji PWD-je i definiciji optimalnog nestacionarnog filtriranja, $w_e(\tau)$ i $w(\tau)$ respektivno, nijesu korelirani, i stoga mogu biti optimizovani individualno.

Funkcija prozora $w_e(\tau)$ će učiniti glatkom originalnu WD-ju, odnosno:

$$PWD_f(t, \omega) = MD_f(t, \omega) *_{\oplus} W_e(\omega).$$

Time se ostvaruje širi region oslonca, $R_p = R + \Delta R$, gdje je ΔR determinisana širinom prozora $w_e(\tau)$, odnosno širinom njegove FT-je $W_e(\omega)$. Ovo će uzrokovati da veća količina šuma, nego što je teorijski neophodno, prođe kroz sistem. Na prvi pogled se čini da povećanje ΔR ne bi trebalo da utiče na izlazni signal, s obzirom da je $R \subset R_p$. Ispostavlja se, ipak, da se kao posljedica situacije $\Delta R \neq 0$, neke frekvencije signala, koje ne pripadaju razmatranom vremenskom trenutku t , mogu pojaviti u izlaznom signalu i degradirati performanse filtra. Razlog tome je što neke druge, glatke forme WD-je (kao što je, na primjer spektrogram) nijesu pogodne za određivanje regiona oslonca R i ne bi dale dobre rezultate. U cilju suzbijanja ovih efekata, prozor $w_e(\tau)$ treba da bude što je moguće širi, da bi njegova FT $W_e(\omega)$ bila što je moguće uža. Ovaj zahtjev je kontradiktoran sa aspekta redukcije šuma s jedne strane, i računске kompleksnosti s druge strane. Stoga je optimizacija širine prozora $w_e(\tau)$ neophodna.

Na bazi prethodne analize zaključujemo da je glavni zadatak prilikom jednoznačnog definisanja TV filtra određivanje njegove funkcije oslonca $L_H(n, k)$, te da načini na koje se vrši njena determinacija predstavljaju osnovnu razliku između aktuelnih TV filtara koji će biti opisani u nastavku.

2.2.1. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu više TF distribucija, [128]

Ukoliko analiziramo stohastički proces $f(t)$, za koji poznajemo veliki broj realizacija, i bijeli šum $\varepsilon(t)$ nulte srednje vrijednosti koji nije koreliran sa signalom, region oslonca R iz jednačine (2.91) se jednostavno dobija. Srednja vrijednost WD-je signala $x(t)$, (2.81), $\overline{WD}_x(t, \omega)$, je zapravo WD čistog signala superponirana sa pragom čija je vrijednost jednaka varijansi šuma, [4], [54], [110],

$$\overline{WD}_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \overline{WD}_f(t, \omega) + \sigma_\varepsilon^2, \quad (2.119)$$

gdje σ_ε^2 predstavlja varijansu šuma.

Situacija se značajno komplikuje ukoliko moramo da obavimo TV filtriranje bazirano na jednoj realizaciji zašumljenog signala. U praksi je ovo veoma čest i važan slučaj.

Razlikujemo dva koraka, [128]:

1. Aproksimacija WD-je čistog signala $f(t)$, na bazi jedne realizacije zašumljenog signala, što je moguće tačnije.
2. Korišćenje distribucije iz prvog koraka za određivanje regiona oslonca R i izvođenje TV filtriranja.

Prvi korak, aproksimacija WD-je, je od krucijalnog značaja, naročito u slučajevima intenzivnog šuma, odnosno u slučajevima niskog ulaznog odnosa signal/šum.

Posmatrajmo najprije slučaj monokomponentnog, determinističkog, vremenski diskretnog signala $f(n)$ u prisustvu slučajnog, bijelog Gussian-ovog kompleksnog šuma, $\varepsilon(n)$ (realni i imaginarni djelovi su međusobno nezavisni). Uzmimo dalje da je varijansa ovog šuma σ_ε^2 . Pretpostavljena situacija je u potpunosti ekvivalentna situaciji slučajnog signala $f(t)$ za koji je poznata samo jedna realizacija.

Glavni problem leži u determinaciji regiona oslonca R funkcije $L_H(t, \omega)$. To zahtijeva poznavanje Wigner-ove distribucije signala $WD_f(t, \omega)$. Stoga, $WD_f(t, \omega)$ mora biti estimirana sa najmanjom mogućom greškom.

Kod izračuna PWD-je se javljaju dvije vrste grešaka: jedna usljed upotrebe prozora što uzrokuje bias, i druga usljed prisustva šuma što uzrokuje varijansu. Ukupna kvadratna greška se definiše kao suma distribucije varijanse i kvadrata biasa. Minimizacija ove greške vodi do optimalne distribucije. Tako izračunata distribucija se koristi za estimaciju regiona oslonca.

WD vremenski diskretnog zašumljenog signala $x(n) = f(n) + \varepsilon(n)$, u svojoj pseudo formi je definisana na sljedeći način:

$$WD_x(n, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_e(k) x(n+k) x^*(n-k) e^{-jk2\theta}, \quad (2.120)$$

gdje je N širina prozora $w_e(k) = w(k)w(-k)$. Procedura optimizacije za izračun WD-je u slučaju jakog šuma, [124], rezultuje adaptivnom distribucijom sa TV širinom prozora:

$$WD_x^+(n) = \begin{cases} WD_x(n) & \text{za } \Phi = \text{istina} \\ WD_x(n) & \text{za ostalo,} \end{cases} \quad (2.121)$$

pri čemu $\Phi = \text{istina}$ predstavlja:

$$\Phi = \text{istina} : |WD_x(n) - WD_x(n)| \leq k + \frac{1}{2} \sigma_{xx} N_1 + \sigma_{xx} N_2.$$

i $N_1 \ll N_2$. U cilju implementiranja relacije (2.95) neophodno je izračunati WD-ju sa uskim prozorom dimenzije N_1 i sa širokim prozorom dimenzije N_2 , [128]. Korišćenjem samo dvije distribucije, možemo očekivati značajno poboljšanje u TF reprezentaciji, s obzirom da je distribucija ili veoma koncentrisana ili jednaka nuli. Teorijska analiza, [124], sa velikim brojem prozora dimenzija unutar intervala (N_1, N_2) dokazuje da možemo dobiti optimalnu širinu prozora unutar tačnosti diskretizacije širine prozora. Ipak, pristup sa više prozora, iako teorijski tačniji, u praksi, za ovdje posmatranu vrstu signala, ne daje značajnija unaprijeđenja u odnosu na jednostavniji dvo-prozorski pristup, [128].

Jedini parametar koji se zahtijeva u jednačini (2.121) je varijansa WD-je $\sigma_{xx}(N)$, [4], [110], [124]. Postoji nekoliko načina za njenu tačnu estimaciju.

Za slučaj jakog šuma, $\sigma_e^2 > A^2$, koji je razmatran, estimacija je jednostavna, s obzirom da je, [4], [110], [124],

$$\sigma_{xx}^2(N) \cong \sigma_e^2 + A^2 \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(n+k)^2.$$

Faktor $E_w(N) \sim N$ je konstanta za dati tip prozora. Varijansa $\sigma_{xx}(N_1)$ može biti izračunata na osnovu bolje estimirane varijanse $\sigma_{xx}(N_2)$ kao $\sigma_{xx}^2(N_1) = \sigma_{xx}^2(N_2) \frac{N_2}{N_1}$. Neki drugi pristupi za preciznu estimaciju varijanse, uključujući i slučaj malog šuma, su predstavljeni u [104], [124].

Kada se WD primjeni na multikomponentne signale ispoljava značajna ograničenja koja se manifestuju kroz prisustvo kros-članova. Razmotrimo i ovu situaciju.

Neka je $f(t)$ slučajni proces za koji je poznat veći broj realizacija. Tada možemo upotrijebiti relacije TV filtra za slučajne multikomponentne signale, koristeći očekivane vrijednosti Wigner-ove distribucije, $\overline{WD}_f(t, \omega)$ (Wigner-ov spektrar). Za slučajni signal $f(t) = \sum_{i=1}^M f_i(t)$, pod pretpostavkom da komponente $f_i(t)$ nijesu korelirane, Wigner-ov spektrar oslobođen prisustva kros-članova je:

$$\overline{WD}_f(t, \omega) = \sum_{i=1}^M \overline{WD}_{f_i}(t, \omega),$$

odnosno:

$$\overline{WD}_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Kros-članovi ne postoje, jer smo pretpostavili da komponente nijesu korelirane:

$$E\{f_i(t)f_j^*(t - \frac{\tau}{2})\} = 0 \quad \text{za } i \neq j.$$

Ukoliko sa R_i označimo regione oslonca za $\overline{WD}_{f_i}(t, \omega)$, na osnovu gornjih relacija zaključujemo da je region oslonca za Wigner-ov spektar $\overline{WD}_f(t, \omega)$ jednak:

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_M,$$

gdje je $R_i \cap R_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Imajući u vidu prethodne jednačine, primjena TV filtriranja na multikomponentne signale, kada je poznat veliki broj realizacija istog slučajnog procesa $f(t)$, je jasna i direktna.

U praksi kao i u slučaju monokomponentnih signala, i u slučaju multikomponentnih signala TV filtriranje mora biti izvedeno na bazi jedne realizacije posmatranog signala. Klasična WD stoga nije primjenljiva usljed prisustva kros-članova. Kada je poznata jedna realizacija slučajnog procesa, najbolje rješenje bi bila distribucija $P(t, \omega)$ koja bi produkovala sumu Wigner-ovih distribucija ili pseudo Wigner-ovih distribucija svake komponente signala pojedinačno, odnosno:

$$P(t, \omega) = \sum_{i=1}^M PWD_{f_i}(t, \omega). \quad (2.122)$$

Ova distribucija bi imala funkciju oslonca oblika, [127]:

$$L_H(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } (t, \omega) \in R = \bigcup_{i=1}^M R_i \\ 0, & \text{za } (t, \omega) \notin R \end{cases} \quad (2.123)$$

Posmatrajmo FM multikomponentni signal:

$$f(t) = \sum_{i=1}^M A_i(t) e^{j\phi_i(t)}, \quad (2.124)$$

sa sporo-promjenljivim amplitudama $A_i(t)$ svake komponente. Njegova STFT može biti dobijena korišćenjem metoda stacionarne faze:

$$STFT(t, \omega) = \sum_{i=1}^M A_i(t + \tau_0) e^{j\phi_i(t + \tau_0) - j\omega\tau_0} \sqrt{\frac{2\pi j}{\phi_i''(t + \tau_0)}} \delta(t + \tau_0 - \phi_i'(\omega)^{-1} \tau_0). \quad (2.125)$$

Koristeći funkciju filtriranja, [128],

$$L_H(n, \omega) = \sum_{i=1}^M \delta(\omega - \phi_i'(t)), \quad (2.126)$$

ili formu datu jednačinom (2.112), kao što će biti rađeno u nastavku, i primjenom $STFT(t, \omega)$ i $L_H(t, \omega)$ iz jednačine (2.117) dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \phi'_k(t) - \omega_0) A_i(t + \tau_0) e^{j\phi(t+\tau_0) - j\omega\tau_0} \delta(t + \tau_0 - \phi'_i(t) - \tau_0) \omega + \varepsilon_{out}(t) dt = \\
&= \sum_{i=1}^M A_i(t) e^{j\phi_i(t)} + \varepsilon_{out}(t) .
\end{aligned} \quad (2.127)$$

Pretpostavljeno je da se komponente signala ne preklapaju u vremenu i frekvenciji, što može biti rastumačeno i na sljedeći način: Za t i τ_0 takve da je $\phi'_k(t) = \phi'_i(t + \tau_0)$, važi da je $w(\tau_0)A_i(t + \tau_0) = 0$ za svako τ_0 unutar prozora $w(\tau_0)$.

Distribucija koja ima tu osobinu, (2.122), je SM, [108], [109]. Njegova numerička realizacija je jednostavna, u skladu sa diskretnim oblikom:

$$SM(n, k) = \text{SPEC}[n, k] + \left(\sum_{i=1}^L \right) (STFT)[n, k+i] STFT^*[n, k-i] \quad (2.128)$$

gdje $SPEC(n, k) = |STFT(n, k)|^2$ predstavlja spektrogram, a članovi $\text{Re}[STFT(n, k+i)STFT^*(n, k-i)]$ unaprijeđuju njegovu koncentraciju do kvaliteta WD-je.

U slučaju kada trenutne frekvencije komponenti signala ne mogu biti smatrane linearnim funkcijama unutar razmatranog prozora, upotrebljavaju se L-Wigner-ova distribucija ili S-distribucija realizovane korišćenjem SM-a, rezultujući sa (2.126) kao što je opisano u [108], [109], [119], za estimaciju regiona oslonca.

2.2.2. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [137]

Ovaj TV filter, [137], uzima SM kao distribuciju na osnovu koje će se vršiti estimacija IF-je. Polazeći od definicije SM-a, $SM(t, \omega)$, (2.128), lako se zaključuje da je njegova upotreba u definiciji funkcije $L_H(t, \omega)$ u slučaju multikomponentnog signala (2.81) adekvatna aproksimacija od $E\{WD(t, \omega)\}$, kada je poznata samo jedna realizacija zašumljenog signala. Stoga, možemo pisati da je:

$$L_H(t, \omega) = \frac{SM_{fx}(t, \omega)}{SM_{xx}(t, \omega)} . \quad (2.129)$$

Posmatrajmo široku klasu FM signala $f(t)$, visoko koncentrisanih u TF ravni, maskiranih bijelim šumom $\varepsilon(t)$, rasprostranjenim u čitavoj TF ravni. Kao što je već rečeno u opisu prethodnog TV sistema za filtriranje nestacionarnih signala, WD signala $f(t)$ leži unutar malog regiona R u TF ravni, dok se šum nalazi van tog regiona (izuzev male količine koja može biti zanemarena u odnosu na količinu šuma van regiona R). Na osnovu ovoga dolazimo do jednostavnog rješenja za funkciju $L_H(t, \omega)$, [32], odnosno do jednačine (2.91).

Posmatrajmo dalje i diskretnu formu definicije TV filtriranja koja je data sa, [129]:

$$\mathcal{H}(n, k) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} L_H(n, k) STFT_x(n, k) . \quad (2.130)$$

Imajući u vidu da je funkcija $L_H(n, k)$ determinisana poređenjem vrijednosti $SM_{xx}(n, k)$ sa unaprijed definisanim spektralnim pragom R , [135],

$$L_H(n, k) = \begin{cases} 1, & \text{za } SM_{xx}(n, k) \geq R \\ 0, & \text{za } SM_{xx}(n, k) < R \end{cases} \quad (2.131)$$

zaključujemo da se odbirak izlaznog, filtriranog signala dobija kao suma odgovarajućih odbiraka $STFT_{xx}(n, k)$ sa frekvencijskih pozicija na kojima je $SM_{xx}(n, k)$ veći od unaprijed definisanog spektralnog praga R . Napomenimo da se spektralni prag R , u ovom slučaju, uzima *a priori* kao nekoliko procenata maksimalne vrijednosti koju može dostići $SM_{xx}(n, k)$. Treba imati u vidu da, ukoliko je uzeta suviše velika vrijednost za R dolazi do odsijecanja ivica signala. S druge strane, ako je ova vrijednost suviše mala značajna količina šuma će proći kroz sistem i biti dio izlaznog signala, što znači da rezultati filtriranja neće biti naročito dobri.

Opisani metod daje veoma kvalitetne rezultate u slučaju monokomponentnih signala. Međutim, kako je u mogućnosti da identifikuje samo jednu IF-ju u TF ravni, zaključuje se da opisani metod ne može uspješno vršiti filtriranje multikomponentnih signala. Komponenta signala koja je najdominantnija, odnosno auto-član koji ima najveći intenzitet maskiraće ostale auto-članove signala, i oni će u procesu filtriranja biti eliminisani zajedno sa šumom.

2.2.3. TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i SM-a, [90]

Nedavno je razvijen nelinearni TV filtar baziran na SM-u i funkciji pokretnog vektora, koji pruža kvalitetno filtriranje monokomponentnih i multikomponentnih signala u realnom vremenu, [90].

Podimo od zašumljenog signala $x(n) = \sum_{i=1}^q f_i(n) + \varepsilon(n)$, trajanja N . Diskretizacijom definicije (2.117), dobijamo definiciju TV filtriranja (2.130), baziranu na Weyl-ovoj korespondenciji, [27], [41], [129], koja prevazilazi distorziju filtriranog FM signala, [129].

Imajući na raspolaganju samo jednu realizaciju FM signala $f_i(n)$, $i=1, \dots, q$ visoko koncentrisanog u TF ravni i maskiranog široko rasprostranjenim bijelim šumom, funkcija oslonca $L_H(n, k)$ optimalnog TV filtra korespondira uniji lokalnih trenutnih frekvencija signala $f_i(n)$, [27], [129]. Stoga se problem filtriranja redukuje na estimaciju lokalnih trenutnih frekvencija u prisustvu šuma. U okviru TF analize, estimacija IF-je se izvodi određivanjem frekvencijskih tačaka u kojima TF distribucija zašumljenog signala ima lokalni maksimum, [84],

$$IF_i(n) = \arg[\max_{k \in Q_{k_i}} T(D_x)] \quad (2.132)$$

gdje je Q_{k_i} osnovni frekvencijski region oko $f_i(n)$, čija je IF označena kao $IF_i(n)$. I ovaj TV filtar se bazira na SM-u, (2.128), [108], koji se karakteriše mogućnošću kvalitetne estimacije IF-je visoko nestacionarnih monokomponentnih i multikomponentnih signala, [84]. Implementacija

bazirana na definiciji SM-a zahtijeva odbirke STFT-je koji se takođe koriste u definiciji filtriranja (2.136). U jednačini (2.128), pravougaoni konvolucioni prozor širine $2L+1$ limitira sumiranje kako bi se formirala TF distribucija bez prisustva kros-članova. Jednačina (2.128) podrazumijeva izračunavanje distribucije za realne i za imaginarne djelove STFT-je pojedinačno. Svaka od komponenti izračuna uzima oblik jednačine (2.128), dobijen zamjenom članova STFT-je sa realnim i imaginarnim djelovima, respektivno. U slučaju realnih signala, koji se ovdje razmatraju, dobijamo:

$$S_{M_x}(n, k) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} L_H(n, k) STFT_{Re}(n, k). \quad (2.133)$$

S obzirom da je $S_{M_x}(n, -k) = S_{M_x}^*(n, k)$, $L_H(n, k)$ postaje simetrična funkcija po frekvenciji, [137].

Imajući u vidu jednačinu (2.133), zaključujemo da je za kompletno determinisanje razmatranog TV filtra potrebno jednoznačno odrediti vrijednost funkcije oslonca $L_H(n, k)$, odnosno, kao što je već rečeno, izvršiti estimaciju trenutnih frekvencija svake od komponenti signala pojedinačno.

Lokalna IF se detektuje u frekvencijskoj tački koja korespondira elementu osnovnog frekvencijskog regiona (vektora) Q_{k_i} koji se kreće po elementima distribucije, (2.132), ukoliko je taj element:

- (i) maksimalni element distribucije unutar razmatranog frekvencijskog regiona Q_{k_i} ;
- (ii) centralni element razmatranog frekvencijskog regiona Q_{k_i} ;
- (iii) veći od uvedenog spektralnog praga R ;

i ako se:

- (iv) veličina razmatranog frekvencijskog regiona $(2L_Q+1)$ nalazi u opsegu:

$$2 \max_{1 \leq i \leq q} \{A_i\} \leq 2L_Q + 1 \leq 2 \min_{\substack{1 \leq i, j \leq q \\ i \neq j}} |IF_i(n) - IF_j(n)|, \quad (2.134)$$

gdje su A_i , $i=1, 2, \dots, q$ različite širine nepreklapajućih auto-članova SM-a.

Uslovi (i), (ii) i (iv) moraju biti zadovoljeni kako bi:

- sve frekvencijske tačke iz posmatranog auto-člana, uključujući i stvarnu IF-je, imale odgovarajući odbirak SM-a unutar frekvencijskog regiona Q_{k_i} , u trenutku ispitivanja postojanja IF-je u svakoj od ovih tačaka. Na ovaj način, opisani metod obezbjeđuje eliminisanje biasa iz greške estimacije IF-je;
- za svaki auto-član i svaki trenutak vremena n , samo jedna vrijednost funkcije $L_H(n, k)$ može biti jednaka 1. Na ovaj način je uticaj frekvencijske diskretizacije na kvalitet estimacije IF-je je redukovan, [129];
- bila moguća višestruka detekcija lokalnih trenutnih frekvencija u posmatranom trenutku vremena n , i stoga omogućena estimacija IF-je u slučaju multikomponentnih signala.

Uslov (iii) mora da bude zadovoljen kako bi se značajno potisnuo uticaj šuma van domena auto-članova.

2.2.4. TV filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i CTFWD-ji, [95]

Kao što je rečeno u više navrata do sada, među svim kvadratnim TF distribucijama, klasična WD omogućava najbolju estimaciju IF-je za slučaj visoko nestacionarnih monokomponentnih signala, [84], [85]. CTFWD, [91], [92], zadržava kvalitet estimacije IF-je kojim se karakteriše WD-je za slučaj monokomponentnih signala. Za slučaj multikomponentnih signala čije se komponente ne preklapaju, estimacija na osnovu CTFWD-je za svaku komponentu signala, zadržava isti kvalitet kao u slučaju razmatranja svake komponente signala pojedinačno, [85]. U nastavku je prikazan algoritam optimalnog nestacionarnog filtra koji se zasniva na CTFWD-ji, [88], odnosno na estimaciji IF-je baziranoj na toj distribuciji.

CTFWD je uvedena da bi očuvala optimalnu prezentaciju auto-članova, koja je ostvarena sa WD-jom, [116], i da bi simultano redukovala (odnosno, u slučaju nepreklapajućih komponenti kod multikomponentnih signala potpuno eliminisala) prisustvo kros-članova koji se javljaju kod WD-je, [123]. Ova distribucija je izvedena na osnovu jednostavne veze između STFT-je i WD-je, što je detaljno analizirano u prvoj glavi disertacije, [123],

$$WD_x(n, k) = \text{SPEC}_x(n, k) 2^{-2} + \text{Re} \sum_{i=1}^{N/2} STFT_x(n, k+i) STFT_x^*(n, k-i) \quad (2.135)$$

Da bi redukovali kros-članove WD-je, puni frekvencijski opseg konvolucije odbiraka STFT-je u jednačini (2.135) mora biti ograničen. Ipak, da bi sačuvali prezentaciju auto-članova WD-je, konvolucija mora biti izvedena za svaku tačku (n, k) sve dok je $STFT_x(n, k \pm i) = 0$. U praktičnom slučaju, kada imamo zašumljene signale, to znači dok nije dostignuto $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < S^2$. S^2 je predefinisani referentni nivo, određen kao nekoliko procenata maksimalne vrijednosti spektrograma i praktično izabran na bazi jednostavne analize procesiranog signala, [123], [137]. To rezultuje sa CTFWD-jom,

$$CTFWD_x(n, k) = \text{SPEC}_x(n, k) 2^{-2} + \text{Re} \sum_{i=1}^{L(n, k)} STFT_x(n, k+i) STFT_x^*(n, k-i) \quad (2.136)$$

gdje je $L(n, k) \leq L_m$ signal-adaptivna širina pravougaonog konvolucionog prozora, uvedenog da limitira konvoluciju u jednačini (2.135). L_m je maksimalna širina prozora, određena sa najširim auto-članom STFT-je. Granice domena svakog auto-člana STFT-je koincidiraju sa detekcijom $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < S^2$ u okolini odgovarajuće komponente signala. To znači da je $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 \geq S^2$, za $i=0, 1, \dots, L(n, k)$ u svakoj tački (n, k) iz domena auto-članova STFT-je, dok $|STFT_x(n, k \pm i)|^2 < S^2$ treba biti zadovoljeno za svako i u suprotnom slučaju. Stoga, $L(n, k)$ uzima različite vrijednosti u različitim TF tačkama:

- nula ($L(n,k)=0$) van domena auto-članova STFT-je i na njihovim granicama (za slučaj čistog signala),
- veće vrijednosti unutar ovih domena,
- maksimalnu vrijednost ($L(n,k)=L_m$) samo u centralnim tačkama najšireg domena.

U slučaju zašumljenih signala, zavisno od distribucije šuma i selekcije referentnog nivoa S^2 , $|STFT_x(n,k \pm i)|^2 \geq S^2$ može biti zadovoljeno u pojedinim tačkama (n,k) koje postoje van domena auto-članova STFT-je. To implicira nenulte vrijednosti za $L(n,k)$ u ovim tačkama.

Po definiciji, u različitim TF tačkama (n,k) , CTFWD-ja, (2.136), uključuje promjenljiv broj članova koji se sumiraju (samo neophodni članovi sa aspekta ukupne energije svakog auto-člana WD-je odvojeno):

- samo prvi, $|STFT_x(n,k \pm i)|^2 = SPEC_x(n,k)$, van domena auto-članova STFT-je,
- više njih unutar ovih domena,
- maksimalan broj, koji korespondira vrijednosti L_m , samo u centralnim tačkama najširih auto-članova STFT-je.

Zaključujemo da ovakva definicija CTFWD-je rezultuje spektrogramom van domena auto-članova STFT-je i WD-jom unutar njih.

CTFWD, (2.136), se sastoji od dvije identične računске linije, realne i imaginarne, koje se koriste za procesiranje realnih i imaginarnih djelova STFT-je, respektivno. Svaka od ovih linija uzima oblik jednačine (2.136), pri čemu je STFT zamijenjena sa svojim realnim odnosno imaginarnim djelovima. Isti odbirci STFT-je (iz dobro poznatih STFT ili FFT modula, [51], [137], [162]) potrebni za već dostupni hardverski dizajn CTFWD-je, [88], (baziran na jednačini (2.136)), se takođe koriste u definiciji filtriranja (2.117).

Za slučaj realnih signala koji se ovdje razmatraju definicija TV filtriranja uzima oblik opisan jednačinom (2.133).

Algoritam koji će biti opisan u nastavku testira postojanje lokalne IF-je u tački (n,k) na sličan način kao i prethodni filter (naravno, uz bitnu razliku da je bazična TF distribucija ovog filtera CTFWD, a ne SM). Odbirci CTFWD-je, zavisni isključivo od frekvencije, simetrično raspoređeni oko frekvencijske tačke k , $CTFWD_x(n,k-L_Q), \dots, CTFWD_x(n,k), \dots, CTFWD_x(n,k+L_Q)$, su najprije grupisani u jednodimenzionalni vektor Q , veličine $2L_Q+1$, kreirajući osnovni frekvencijski interval Q_k , (2.132), i omogućavajući estimaciju lokalne IF-je. Lokalna IF je detektovana u frekvencijskoj tački koja odgovara maksimalnom elementu vektora, ali samo ako je maksimalni element vektora:

- (i) centralni element vektora, $CTFWD_x(n,k)$,
- (ii) veći od uvedenog spektralnog praga R

i ako se:

- (iii) dimenzije vektora $(2L_Q+1)$ nalaze u intervalu:

$$2 \max_{1 \leq i \leq q} \{A_i\} \leq 2L_Q + 1 \leq 2 \min_{\substack{1 \leq i, j \leq q \\ i \neq j}} |IF_i(n) - IF_j(n)|, \quad (2.137)$$

gdje su $A_i, i=1,2,\dots,q$ različite širine nepreklapajućih auto-članova CTFWD-je.

Uslov (i) u kombinaciji sa prvom nejednakošću iz (2.137) mora biti zadovoljen kako bi osigurao da:

- Sve frekvencijske tačke iz posmatranog auto-člana, uključujući i stvarnu IF-ju, imaju odgovarajuće odbirke CTFWD-je unutar vektora Q , kada se postojanje IF-je u svakoj od ovih tačaka ispituje. Na ovaj način, opisani metod obezbjeđuje eliminisanje biasa iz greške estimacije IF-je;
- Za svaki auto-član i svaki vremenski trenutak n , samo jedna frekvencijska tačka može biti detektovana kao lokalna IF. Na ovaj način se uticaj frekvencijske diskretizacije na kvalitet estimacije IF-je redukuje, kao što je eksperimentalno dokazano u [129].

S druge strane uslov (i) u kombinaciji sa drugom nejednakošću iz (2.137), osigurava višestruke detekcije lokalnih trenutnih frekvencija u posmatranom trenutku vremena n , što omogućava estimaciju IF-je u slučaju multikomponentnih signala. Konačno, uslov (ii) mora biti ispunjen kako bi potisnuo uticaj šuma van domena auto-članova CTFWD-je.

Nakon izvršavanja u k -toj frekvencijskoj tački, ova procedura se ponavlja za frekvencijsku tačku $k+1$. Sljedeći odbirak CTFWD-je, zavisano samo od frekvencije, iz istog vremenskog trenutka n , $CTFWD_x(n, k+L_Q+1)$, se ubacuje u vektor Q , pomjerajući na lijevo elemente postojećeg vektora za jednu poziciju. Na ovaj način, vektor Q se pomjera za jednu poziciju na desno preko odbiraka CTFWD-je zavisnih samo od frekvencije u posmatranom trenutku vremena, rezultujući kreiranjem novog osnovnog frekvencijskog intervala Q_{k+1} . Nakon toga se testira postojanje lokalne IF-je u $(k+1)$ -oj frekvencijskoj tački, na već opisan način. Ova procedura se primjenjuje, tačka po tačka, na svaku frekvencijsku tačku $k, k=-N/2+1, \dots, N/2$. Primjetimo da, na bazi jednačine (2.132), elementi pokretnog vektora Q moraju biti odbirci CTFWD-je zavisni samo od frekvencije iz istog vremenskog trenutka n .

Konačno, parametri algoritma L_Q i R moraju biti određeni. Širok frekvencijski opseg, (2.137), dobijen u slučaju visoko koncentrisanih, nepreklapajućih FM signala, sugerije robusnost estimacije IF-je u odnosu na parametar L_Q , što je dokazano u [89]. Stoga, pokretni vektor Q od svega nekoliko lokacija je u principu sasvim dovoljan. S druge strane, veće vrijednosti spektralnog praga R gotovo u potpunosti uklanjaju uticaj šuma van domena auto-članova CTFWD-je, ali mogu simultano proizvesti značajno odsijecanje ivica auto-članova konačnog trajanja (kao što su auto-članovi *chirp* signala). Stoga, parametar R mora biti odabran praveći kompromis u slučaju signala konačnog trajanja. Na bazi opsežnog eksperimentalnog rada, [95], zaključeno je da vrijednost za R koja odgovara većini aplikacija treba biti postavljena u opsegu od 5% do 20% maksimalne vrijednosti CTFWD-je.

Glavne osobine predloženog algoritma za estimaciju mogu biti sumirane na sljedeći način:

- Riječ je o veoma jednostavnom algoritmu za estimaciju IF-je, odnosno funkcije oslonca filtra, koji omogućava estimaciju u realnom vremenu.
- Dozvoljava višestruku detekciju lokalne IF-je, odnosno funkcije oslonca filtra u svakom trenutku vremena, omogućavajući filtriranje monokomponentnih i multikomponentnih FM signala.
- Uvodi estimacionu grešku koja je zavisna isključivo od šuma, pri čemu minimizuje uticaj greške kvantizacije na estimaciju IF-je.
- Radeći sa odbircima CTFWD-je, algoritam omogućava najkvalitetniju estimaciju IF-je, čak i u slučaju visoko nestacionarnih signala.

2.2.5. Poređenje nelinearnih TV filtara

TV filter kod koga se estimacija IF-je vrši na bazi više TF distribucija, [129], je nesumnjivo računski najzahtjevniji, jer za svaku tačku analiziranog signala podrazumijeva računanje dvije TF distribucije (WD-je ili SM-a u zavisnosti od toga da li je signal monokomponentni ili multikomponentni) izrazito različitih parametara. To rezultuje i dužim vremenom izvršavanja procesa filtriranja. Napomenimo još da se kod ovog filtra podrazumijeva poznavanje dužine trajanja analiziranog signala što u praksi ne mora, a često i nije, slučaj.

TV filter kod koga se estimacija IF-je zasniva na poređenju SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [137], je svakako računski relaksiraniji od prethodnog filtra. Međutim, i sam kvalitet filtriranja je slabiji. Naime, prag sa kojim se vrši poređenje odbiraka SM-a mora biti pažljivo izabran. Ukoliko je njegova vrijednost suviše mala, velika količina šuma će biti propuštena, te IF neće biti kvalitetno estimirana, a samim tim ni signal kvalitetno filtriran. S druge strane, ako je vrijednost praga suviše velika može doći do značajnog odsijecanja ivica auto-članova distribucije, čim će opet biti narušen kvalitet filtriranja. Dakle, prilikom odabira spektralnog praga mora biti napravljen kompromis između ova dva zahtjeva usljed opisanih razloga, što često nije moguće uraditi na optimalan način. Takođe, kako je ovaj TV filter u mogućnosti da identifikuje samo jednu IF-ju, zaključuje se da ne može uspješno vršiti filtriranje multikomponentnih signala, što ograničava njegovu primjenu isključivo na monokomponentne signale.

TV filter kod koga se estimacija IF-je zasniva na funkciji pokretnog vektora i SM-u, [90], uvodi niz novih uslova mimo poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom i time značajno poboljšava kvalitet filtriranja. Realizacija pomenutih uslova ne zahtijeva složene računске operacije pa se vrijeme izvršavanja filtriranja bitnije ne mijenja.

Na kraju, TV filter kod koga se estimacija IF-je zasniva na funkciji pokretnog vektora i CTFWD-ji, [95], povećava kvalitet filtriranja i smanjuje računsku složenost prethodno analiziranog filtra. Glavni uzrok tome je promjena TF distribucije na kojoj filter počiva, jer se

sam algoritam estimacije IF-je ne mijenja. Naime, CTFWD je signal-adaptivna TF distribucija koja se u različitim tačkama signala izračunava u različitom, samo neophodnom, broju tačaka. Ovo značajno redukuje vrijeme njenog kompletnog izračuna, a samim tim i vrijeme potrebno za rad filtra. Takođe, CTFWD pruža najkvalitetniju TF reprezentaciju analiziranog signala: za monokomponentne signale se ponaša kao WD, a za multikomponentne signale kao WD primjenjena na svaku komponentu signala pojedinačno. To nam garantuje visoko kvalitetnu estimaciju IF-je, a samim tim i visoko kvalitetno filtriranje.

Nestacionarno filtriranje bazirano na prostorno-frekvencijskoj analizi

Operacija filtriranja se može interpretirati kao transformacija analiziranog zašumljenog signala sa ciljem ekstrakcije potrebnih informacija o tom signalu. Opšte tehnike prostornog filtriranja 2D signala se koriste u gotovo svim oblastima njihovog procesiranja. Upotrebljavaju se za izvođenje restauracije posmatranog signala, unaprijeđenje njegovog kvaliteta, kodiranje i analizu. Takođe, ove vrste operacija se često koriste kao predprocesirajući alat u različitim poljima, kakva su prepoznavanje šablona ili pak modelovanje sistema vida.

Operacija filtriranja 2D signala se može sprovoditi na osnovu njegovih različitih reprezentacija, odnosno u domenima koji sadrže sve informacije o tom 2D signalu. Najčešće reprezentacije 2D signala koje se koriste u procesu filtriranja su prostorna i frekvencijska reprezentacija. Obije reprezentacije su kompletne i ekvivalentne u pogledu informacija koje sadrže.

Česte su operacije filtriranja koje se izvode odabirom različitih prostornih frekvencija. U ovom cilju, Fourier-ova transformacija 2D signala se množi sa funkcijom filtra, koja može biti definisana u prostornom, ili direktno u frekvencijskom domenu. U oba navedena slučaja, operacija filtriranja ima invarijantni karakter, odnosno sve tačke 2D signala se modifikuju na isti način.

U mnogim slučajevima, ipak, ni jedna od navedenih reprezentacija (prostorna i frekvencijska) nije pogodna za izvođenje određene vrste filtriranja. Na primjer, postoji mnogo situacija u kojima 2D signali ispoljavaju prostorno-promjenljive degradacije. Defokusiranje optičkih sistema, defokusiranje usljed atmosferskih turbulencija i kretanja su samo par primjera najčešćih frekvencijskih distorzija koje mogu voditi ka prostorno-promjenljivim degradacijama. U ovim slučajevima, neophodno je naći neku drugu reprezentaciju analiziranog 2D signala koja ima sličnu ulogu kao FT u invarijantnom slučaju.

Združene prostorno-frekvencijske reprezentacije su privukle pažnju po tom pitanju, imajući u vidu da mogu biti korisnije od pojedinačnih reprezentacija za interpretaciju 2D signala, a samim tim i za unaprijeđenje mogućnosti njihovog filtriranja.

Naime, kada 2D signal i 2D šum ne zauzimaju isti frekvencijski opseg efikasno filtriranje se može izvesti upotrebom stacionarnih filtara. U slučajevima kada se 2D signal i 2D šum preklapaju u značajnom dijelu prostornog i frekvencijskog domena, stacionarno filtriranje postaje teško izvodljivo i prilično neefikasno. Ipak, 2D signal i 2D šum mogu biti razdvojeni u združenom prostorno-frekvencijskom domenu. Tada je moguće iskoristiti prednosti združenih prostorno-frekvencijskih reprezentacija. Procesiranje bazirano na ovim reprezentacijama značajno nadmašuje prostorno, odnosno frekvencijski invarijantne metode. Stoga se, kao proširenje koncepta vremensko-promjenljivog filtriranja 1D nestacionarnih signala uvodi koncept prostorno-promjenljivog filtriranja 2D nestacionarnih signala.

U nastavku ćemo posmatrati zašumljene 2D signale koji zauzimaju isti prostorni i frekvencijski opseg, u situacijama kada je njihova separacija moguća u združenom prostorno-frekvencijskom domenu. S obzirom da je koncept vremenski-promjenljivog filtriranja, [26], [32], [36], [37], [121], [129], baziran na združenim TF distribucijama, [7]-[9], [12], [13], [15], [16], [20], [30], [45], [71], [74], [106], ovdje ćemo koristiti združene S/SF distribucije, [80], [81], [112], [138]-[142], [145], u cilju definisanja i implementiranja prostorno-promjenljivog filtriranja, [93]-[99], [130], [143], [144], [146].

3.1. 2D linearni S/SF filtri

2D linearni filtri, [143], [144], [146], su ograničeni opštim principima neodređenosti koji limitiraju rezoluciju njihove orijentacije, prostorne frekvencije i 2D prostorne pozicije. Teorijska donja granica za združenu entropiju, odnosno neodređenost je ostvarena pomoću familije optimalnih 2D filtara čije su prostorne težinske funkcije generisane pomoću eksponencijalnih bivarijantnih polinoma drugog reda sa kompleksnim koeficijentima. Preciznije, riječ je o eliptičnoj generalizaciji 1D elementarnih funkcija predloženih u opšte poznatoj Gabor-ovoj teoriji komunikacija iz 1946. godine, [56]. Ova familija uključuje filtre sa različitim orijentacionim propusnim opsezima, prostorno-frekvencijskim propusnim opsezima i prostornim dimenzijama, favorizujući ekstrakciju različitih vrsta informacija iz procesiranog 2D signala. Filtri iz ove familije zauzimaju redukovanu kvantnu zapreminu (koja odgovara nezavisnoj promjenljivoj) u četvorodimenzionalnom (4D) informacionom prostoru. Ose tog prostora je moguće interpretirati kao 2D vizuelni prostor, orijentaciju i prostornu frekvenciju, te bi stoga takav filter mogao poslužiti za optimalno efikasno odabiranje 2D promjenljivih. Pomenuta familija filtara je prvobitno testirana na vizuelnom korteksu sisara, gdje se pokazalo da receptorska polja prostih ćelija optimizuju opšte relacije neodređenosti za združenu 2D prostornu i 2D frekvencijsku (spektralnu) rezoluciju, [144], [146]. Mnoštvo različitih dimenzija, orijentacija i prostorno-frekvencijskih propusnih opsega receptorskih polja, kao i njihova međusobna korelacija, otkrili su nekoliko značajnih ograničenja ovih filtara vezanih za opštu organizaciju osa i odnos širina/dužina propusnih opsega.

Gabor-ov rad iz 1946., [56], je formalno dokazao, upotrebom Schwarz-ove nejednakosti iz oblasti kvantne mehanike, da su specifičnosti signala simultano ograničene sa donje strane u vremenu i frekvenciji proizvodom njegovog propusnog opsega i trajanja. Oslanjajući se na rad Heisenberg-a i Weyl-a u ovoj oblasti, Gabor je izveo relaciju neodređenosti. Osim toga, on je definisao opšti oblik familije signala/filtara koja optimizuju ovaj neophodni kompromis, i stoga ostvaruju teorijsku donju granicu združene neodređenosti u vremenu i frekvenciji. Riječ je o signalima/filtrima oblika:

$$x(t) = e^{[-(t-t_0)^2/\alpha^2 + i\omega_0 t]},$$

koji u kompleksnoj notaciji opisuju modulacioni proizvod sinusnog talasa proizvoljne frekvencije ω i Gaussian-ove krive proizvoljnog trajanja α u trenutku t_0 . Gabor je izučavao kvantnu teoriju prenosa signala u region tzv. informacionog dijagrama čije su koordinate vrijeme i frekvencija i koji ima kvantno jezgro, odnosno minimalnu površinu (proizvod frekvencijskog propusnog opsega i vremenskog trajanja) definisanu principom neodređenosti. Kvantno jezgro može biti redistribuirano po obliku, ali ne i smanjeno po veličini, a familija signala koja dostiže najmanju moguću veličinu jezgra su Gaussian-ove modulirane sinusoide. Na kraju, Gabor je predstavio proizvoljni signal pomoću pseudoekspanzionog skupa elementarnih signala, (koje je nazvao „logon-ima“), po informacionoj ravni, koji je indeksiran svim postojećim frekvencijama modulacije i svim različitim trenucima vremena.

3.1.1. Opšti princip neodređenosti za 2D linearne S/SF filtre

Za 1D kompleksne signale, odnosno težinske funkcije filtra $x(t)$, standardna mjera efektivne širine (Δt) je data kao kvadratni korjen varijanse, odnosno kao drugi moment distribucije njegove energije:

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) t^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt},$$

gdje $x^*(t)$ predstavlja konjugovano-kompleksnu vrijednost funkcije $x(t)$. Stoga, proizvod $x(t)x^*(t)$ korespondira distribuciji energije funkcije $x(t)$. Radi jednostavnosti posmatrajmo signal, odnosno filter, koji je centriran u koordinatnom početku ($t=0$), pri čemu imenilac normalizuje efektivnu širinu čineći je nezavisnom od amplitude funkcije $x(t)$. Neka je $X(\omega)$ Fourier-ova transformacija funkcije $x(t)$. Njen efektivni propusni opseg je definisan u uslovima analognog normalizovanog drugog momenta $(\Delta\omega)^2$, a njena energetska distribucija je predstavljena kao $X(\omega)X^*(\omega)$. Tada poznati princip neodređenosti za 1D signale/filtre, [1], [13], [15], [67], koji je izveden u prvoj glavi disertacije, specificira fundamentalnu donju granicu moguće vrijednosti ovog proizvoda kao: $(\Delta t)(\Delta\omega) \geq 1/(4\pi)$.

Za 2D signale, odnosno filtre, $x(t_1, t_2)$, postoji nekoliko mogućih generalizacija koncepta efektivne širine, koji nastaju usljed postojanja tri Cartesian-ov druga momenta za (normalizovanu i centriranu u koordinatnom početku) energetska distribuciju $x(t_1, t_2) x^*(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1^2 x(t_1, t_2) x^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_2^2 x(t_1, t_2) x^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 t_2 x(t_1, t_2) x^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Prve dvije jednačine definišu varijansu u okolini osa t_2 i t_1 , dok treća jednačina (kombinovani moment) definiše asimetriju dijagonala. Poznato je da bilo koja 2D distribucija može uvijek biti rotirana tako da kombinovani moment bude jednak nuli, pri čemu ugao ove rotacije određuje osnovne ose distribucije. Ukoliko osnovne ose 2D distribucije odgovaraju osama t_1 i t_2 , tada je drugi moment u okolini svake od ovih osa kvadrat efektivne širine (Δt_1) ili efektivne dužine (Δt_2) distribucije, pri čemu je proizvod ove dvije vrijednosti (Δt_1)(Δt_2) mjera efektivne površine. Stoga je moguće mjeriti efektivnu (ili zauzetu) površinu 2D signala/filtra u uslovima proizvoda njegovih Cartesian-ovih drugih momenata u okolini osa t_1 i t_2 , kada je izvršena rotacija tako da su t_1 i t_2 njegove osnovne ose.

Analogno principu neodređenosti za 1D signale/filtre, koji je ranije citiran, postoje dva principa neodređenosti za 2D signale/filtre koji ograničavaju efektivnu širinu (Δt_1) i efektivnu dužinu (Δt_2) 2D signala/filtra $x(t_1, t_2) = x(\vec{t})$, kao i efektivnu širinu ($\Delta \omega_1$) i efektivnu dužinu ($\Delta \omega_2$) njegove 2D FT-je $X(\omega_1, \omega_2) = X(\vec{\omega})$. Bez obzira na osnovne ose i uslove separabilnosti, moguće je pokazati da za bilo koji proizvoljni signal/filtar $x(\vec{t})$ centriran u (t_{10}, t_{20}) čija je 2D FT-ja $X(\vec{\omega})$ centrirana u $(\omega_{10}, \omega_{20})$ važe sljedeća dva principa neodređenosti:

$$\Delta t_1 \Delta \omega_1 = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t_1 - t_{10})^2 x(\vec{t}) x^*(\vec{t}) d\vec{t}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vec{t}) x^*(\vec{t}) d\vec{t}}} \times \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega_1 - \omega_{10})^2 X(\vec{\omega}) X^*(\vec{\omega}) d\vec{\omega}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\vec{\omega}) X^*(\vec{\omega}) d\vec{\omega}}} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.1a)$$

$$\Delta t_2 \Delta \omega_2 = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t_2 - t_{20})^2 x(\vec{t}) x^*(\vec{t}) d\vec{t}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vec{t}) x^*(\vec{t}) d\vec{t}}} \times \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega_2 - \omega_{20})^2 X(\vec{\omega}) X^*(\vec{\omega}) d\vec{\omega}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\vec{\omega}) X^*(\vec{\omega}) d\vec{\omega}}} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.1b)$$

Ova dva principa neodređenosti su fundamentalni uslovi iz kojih se dalje mogu izvesti ostale relacije. Donje granice u (3.1a) i (3.1b) mogu biti dostignute samo za određene funkcije $x(t_1, t_2)$ čije su osnovne ose paralelne osama t_1 i t_2 , odnosno za njihove transformacije $X(\omega_1, \omega_2)$ i njima

odgovarajuće ose ω_1 i ω_2 (iako ova dva uslova ne impliciraju jedan drugi). Ukoliko su ove funkcije i transformacije rotirane u odnosu na odgovarajuće ose, proizvod efektivnih širina će u opštem slučaju rasti. Ukoliko pak osnovne ose odgovaraju osama t_1 i t_2 , svaki od proizvoda $(\Delta t_1)(\Delta t_2)$ i $(\Delta \omega_1)(\Delta \omega_2)$ predstavlja efektivnu površinu zauzetu od strane signala/filtra u odgovarajućem 2D domenu. Odatle slijedi da je združena rezolucija koja može biti ostvarena od strane bilo kog 2D filtra/2D signala u dva 2D domena, definisana pomoću domena koje zauzima, ograničena sljedećom relacijom:

$$(\Delta t_1)(\Delta t_2) (\Delta \omega_1) (\Delta \omega_2) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (3.2)$$

Novi princip neodređenosti, izveden iz fundamentalnih relacija, (3.1a) i (3.1b), izražava teorijski limit združene 2D rezolucije u dva 2D domena.

Može biti pokazano da sljedeća familija funkcija $x(t_1, t_2)$ i njene 2D FT-je $X(\omega_1, \omega_2)$ dostižu donju granicu nejednakosti (3.1a) i (3.1b):

$$x(t_1, t_2) = e^{\{-\pi[(t_1 - t_{10})^2/a^2 + (t_2 - t_{20})^2/b^2] - \pi(\omega_1 - \omega_{10})(t_1 - t_{10}) + (\omega_2 - \omega_{20})(t_2 - t_{20})\}} \quad (3.3a)$$

$$X(\omega_1, \omega_2) = e^{\{-\pi[(\omega_1 - \omega_{10})^2/b^2 + (\omega_2 - \omega_{20})^2/a^2] - \pi(\omega_1 - \omega_{10})(t_1 - t_{10}) + (\omega_2 - \omega_{20})(t_2 - t_{20})\}} \quad (3.3b)$$

Koristeći definicije efektivne širine i efektivne dužine u oba 2D domena, (3.1a) i (3.1b), dobijamo:

$$(\Delta t_1) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}, (\Delta t_2) = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}}, (\Delta \omega_1) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}, (\Delta \omega_2) = \frac{b}{2\sqrt{\pi}}.$$

Stoga, združena 2D rezolucija za ovu familiju 2D signala/2D filtara, definisana proizvodom površina koje zauzimaju u dva 2D domena, (3.2), dostiže teorijski limit od $1/(16\pi^2)$ bez obzira na vrijednosti bilo kog od parametara. Zbog analogije između navedene familije optimalnih 2D funkcija i Gabor-ovih, [56], vremensko-promjenljivih signala, ova familija je dobila ime 2D Gabor-ove funkcije, odnosno 2D Gabor-ovi filtri, [144].

3.1.2. 2D Gabor-ovi filtri

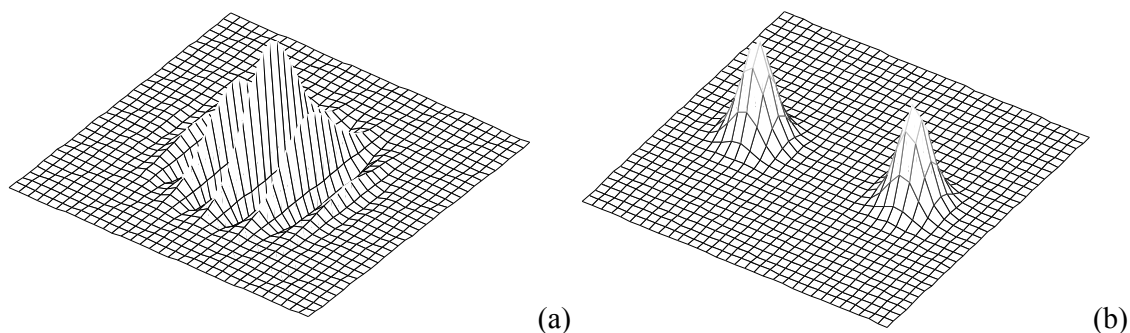
2D Gabor-ov filter (funkcija) $x(t_1, t_2)$, (3.3), je proizvod eliptične Gaussian-ove funkcije sa parametrom (b/a) centrirane u (t_{10}, t_{20}) i kompleksne eksponencijalne funkcije koja predstavlja harmonijsku modulaciju sa prostornom frekvencijom $\sqrt{(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)}$ i orijentacijom $\arctg(\omega_{20}/\omega_{10})$. Amplituda i faza su specificirani sa pretpostavljenim kompleksnim koeficijentom $Ae^{i\phi}$ koji množi jednačine (3.3). U nešto opštijoj formi $x(t_1, t_2)$ i $X(\omega_1, \omega_2)$ bi bili definisani kao eksponencijalni potpuni bivarijantni polinomi drugog reda:

$$e^{-\{At_1^2 + Bt_1t_2 + Ct_2^2 + Dt_1 + Et_2 + F\}},$$

gdje je $B^2 < 4AC$, a koeficijenti D , E i F su kompleksni. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je funkcija $x(t_1, t_2)$ rotirana tako da osnovne ose odgovaraju osama t_1 i t_2 , te stoga koeficijent kros-proizvoda B ima vrijednost 0.

Treba primjetiti da 2D Gabor-ove funkcije:

1. imaju istu funkcionalnu formu u oba 2D domena (prostornom i frekvencijskom),
2. nijesu polarno separabilne ni u jednom domenu,
3. su Cartesian-separabilne samo u određenim, specijalnim slučajevima.



Slika 3.1 Struktura 2D Gabor-ovog filtra u 2D prostornom (a) i 2D frekvencijskom domenu (b). Parametri prikazanog 2D filtra su, shodno jednačini (3.3), $t_{1_0} = t_{2_0} = 0$, $\omega_{1_0} = 3$ ciklus/stepen, $\omega_{2_0} = 0$ i $a^2 = b^2 = 16/\pi$ stepen⁻².

Grafik reprezentativnog parno-simetričnog predstavnika 2D Gabor-ove familije filtara, originalno predložen od strane Daugman-a, [143], je prikazan na slici 3.1. Primjetimo da izbor različitih vrijednosti parametara 2D filtra, $(t_{1_0} \ t_{2_0} \ \omega_{1_0} \ \omega_{2_0}, a)b$ centrira 2D filter na različite prostorne lokacije $(t_{1_0} \ t_{2_0})$ i daje mu različite željene prostorno-frekvencijske i orijentacione odzive u skladu sa centralnim lokacijama $(\pm\omega_{1_0} \ \mp\omega_{2_0})$ pokrivajući na taj način oba 2D domena.

Zavisno od vrijednosti parametara propusnog opsega a i b , dolazi do podjele favorizujuće rezolucije – za male vrijednosti parametara a i b ostvaruje se dobra rezolucija u 2D frekvencijskom domenu, odnosno za veće vrijednosti parametara a i b ostvaruje se dobra rezolucija u 2D prostornom domenu. Kombinovanjem prethodnih slučajeva favorizuje se prostorna rezolucija u jednom pravcu, dok se frekvencijska ili orijentaciona rezolucija favorizuju u njemu normalnom pravcu. Združeni efekti operacija koje se izvode u oba 2D domena simultano, sa ciljem podešavanja odgovarajućih rezolucija, su sumirani u tabeli 3.1.

Na slici 3.2 su grafički predstavljena tri različita filtra iz familije 2D Gabor-ovih optimalnih filtara. Lijeva kolona slike 3.2 prikazuje tri parna simetrična 2D filtra, pri čemu svaki od njih ima istu prostorno-modulacionu frekvenciju i orijentaciju, ali i različiti odnos širina/dužina, što je označeno eliptičnim konturama koje predstavljaju 2D anvelope amplitude $1/e$. Slično, desna kolona slike 3.2 aproksimativno predstavlja konturu amplitude $1/e$ za dva dijela 2D FT-je svakog od ovih filtara. U frekvencijskom domenu svi centri ovih 2D filtara imaju

istu lokaciju koja korespondira maksimalnom spektralnom odzivu na prostornoj frekvenciji ω_0 u vertikalnoj orijentaciji, kao što je određeno šablonom modulacije u 2D prostornom domenu.

Zaključujemo da se kod opisanih 2D linearnih filtara moraju kompromisno određivati rezolucije u različitim pravcima, pri čemu, na primjer možemo izoštriti prostornu rezoluciju u t_2 pravcu (na račun orijentacione rezolucije), ili pak izoštriti prostornu rezoluciju u t_1 pravcu (na račun prostorno-frekvencijske rezolucije). Na taj način filtri obezbjeđuju ekstrakciju različitih prostorno-spektralnih informacija iz 2D signala. Ipak, kod 2D Gabor-ovih filtara proizvod 2D rezolucija u dva 2D domena je isti i jednak teorijski dostižnom limitu, [144], [146].

Tabela 3.1 Odgovarajuće osobine filtara u 2D prostornom i 2D spektralnom domenu.

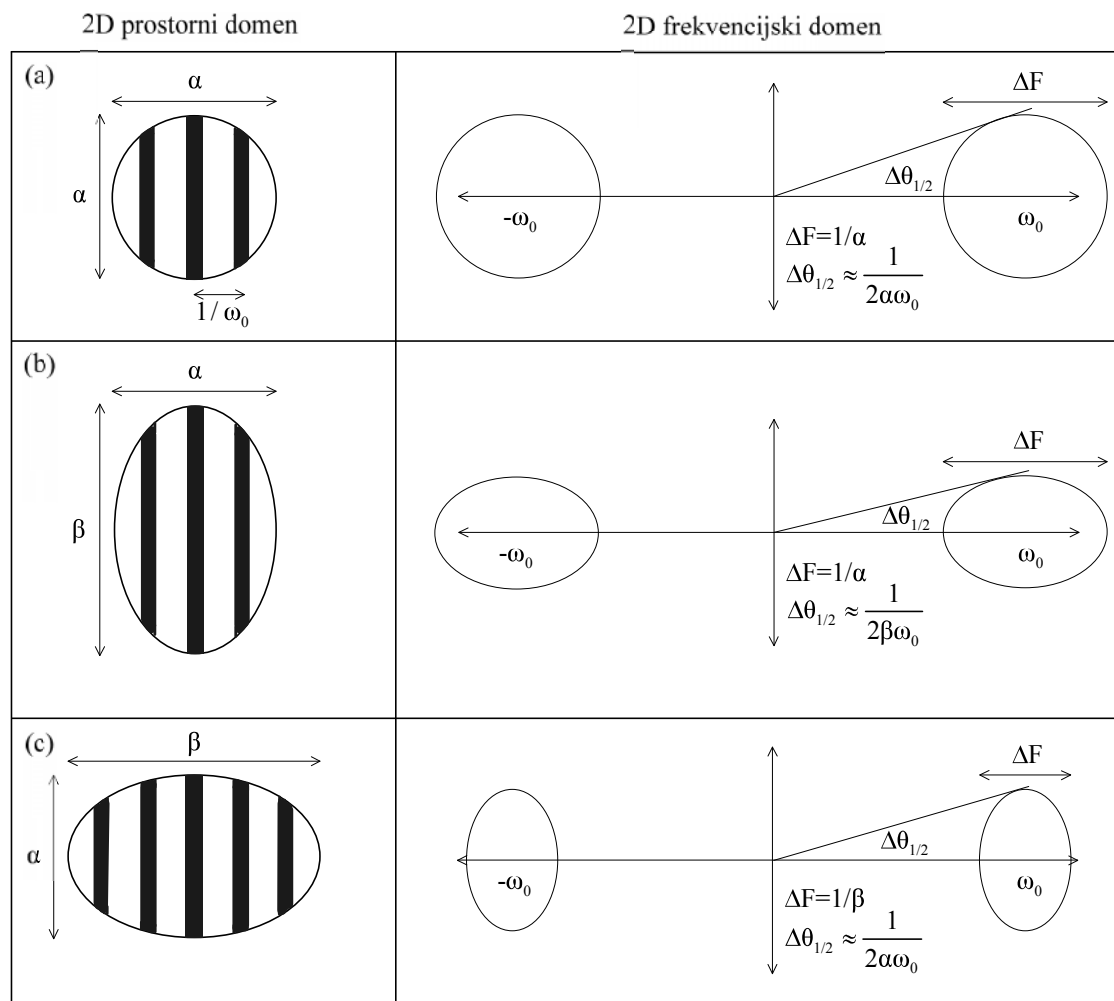
2D prostorni domen	2D frekvencijski domen
Modulisanje anvelope filtra sa frekvencijom ω_0 u vektorskoj orijentaciji θ_0	Pozicioniranje spektralnog centra na koordinate Fourier-ove ravni (ω_{1_0} ω_{2_0}), pri čemu je: $\omega_{1_0} = \omega_0 \cos(\theta_m)$ i $\omega_{2_0} = \omega_0 \sin(\theta_m)$
Pozicioniranje centra filtra na prostorne koordinate (t_{1_0} t_{2_0})	Modulaciona transformacija pri čemu je spektralna frekvencija $\sqrt{t_{1_0}^2 + t_{2_0}^2}$ i orijentacija $\arctg(t_{2_0}/t_{1_0})$
Rotiranje filtra za ugao θ oko osnovnih koordinata	Rotiranje transformacije za ugao θ oko osnovnih koordinata
Produžavanje (komprimovanje) filtra u pravcu t_1 sa faktorom α	Komprimovanje (produžavanje) filtra u pravcu u sa faktorom α
Produžavanje (komprimovanje) filtra u pravcu t_2 sa faktorom β	Komprimovanje (produžavanje) filtra u pravcu v sa faktorom β
Postavljanje odnosa anvelope na λ	Postavljanje odnosa anvelope na $1/\lambda$

Fundamentalna osobina koju je potrebno uočiti na slici 3.2 je to da je proizvod zauzetih domena proizvoljnih analitičkih funkcija filtara u dva 2D domena uvijek nezavisan od bilo koje dilatacije, translacije ili modulacije. Uz to, za 2D Gabor-ove filtre analitički opisane jednačinama (3.3), ovaj proizvod zauzetih domena je uvijek najmanji mogući, bez obzira na vrijednosti bilo kojeg od šest parametara koji definišu različite filtre ove familije. Još jedna osobina koja je opisana slikom 3.2 je ta da je za različite filtre ograničene tako da zauzimaju isti ukupni dio 2D prostorne površine (na primjer, slika 3.2(b) i slika 3.2(c)) bilo koja dobit u 2D prostornoj rezoluciji mora biti praćena gubitkom u 2D frekvencijskoj (spektralnoj) rezoluciji. To je posljedica činjenice da ovi filtri imaju konstantan stepen 2D prostorne rezolucije (oblast integraljenja) i zauzimaju fiksnu površinu u 2D frekvencijskom domenu, te su stoga elipse frekvencijskog domena, slika 3.2(b) i slika 3.2(c), konstantne, dok njihovi različiti oblici obezbjeđuju različite odnose između $\Delta\theta_{1/2}$ i ΔF .

3.1.2.1. Analiza 2D Gabor-og filtra u 2D prostornom domenu

2D eliptična Gaussian-ova kriva, centrirana u koordinatnom početku Cartesian-ovog koordinatnog početka, sa glavnim i sporednom osom paralelnom koordinatnim osama, može biti zapisana u sljedećoj formi:

$$w(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2/a^2 + t_2^2/b^2)\right), \quad (3.4)$$



Slika 3.2 Pogled odozgo na tri člana familije 2D Gabor-ovih optimalnih filtara, pri čemu svaki od njih ima istu prostornu frekvenciju i orijentaciju. Slika demonstrira zavisnost između prostorno-frekvencijskog propusnog opsega filtra i propusnog opsega orijentacije u njihovom prostornom domenu dimenzija anvelope; frekvencija i orijentacija su nezavisne od ovih dimenzija.

a) Anvelope kružnog filtra u prostornom domenu je u frekvencijskom domenu izražena kroz sumu dva kružna regiona čiji centri odgovaraju modulacionoj frekvenciji filtra i čiji su prostorno-frekvencijski propusni opseg i orijentacioni propusni opseg inverzno povezani sa prostornim dijametrom anvelope.

b) Produžavanje receptivnog polja filtra u pravcu paralelnom pravcu modulacije izoštrava orijentacioni propusni opseg $\Delta\theta_{1/2}$, ali nema uticaja na prostorno-frekvencijski propusni opseg ΔF .

c) Produžavanje receptivnog polja filtra u pravcu normalnom na pravac modulacije vodi do izoštravanja prostorno-frekvencijskog propusnog opsega ΔF , ali nema uticaja na orijentacioni propusni opseg $\Delta\theta_{1/2}$.

pri čemu je a^2 varijansa u pravcu t_1 , a b^2 varijansa u pravcu t_2 . Eliptična Gaussian-ova kriva može biti centrirana na bilo kojoj željenoj prostornoj lokaciji translacijom (τ) koordinata uz pomoć željenih prostornih pomjeraja t_{1_0} i t_{2_0} ,

$$t_{1\tau} = t_1 - t_{1_0},$$

$$t_{2\tau} = t_2 - t_{2_0}.$$

Glavna i sporedna osa Gaussian-ove krive (g) mogu biti orjentisane u proizvoljnom pravcu rotacijom koordinata u pravcu suprotnom kretanju kazaljke na satu za ugao A :

$$t_{1g} = t_{1\tau} \cos(A) - t_{2\tau} \sin(A),$$

$$t_{2g} = t_{1\tau} \sin(A) + t_{2\tau} \cos(A).$$

Zamjenom prethodnih relacija dobijamo jednačinu eliptične Gaussian-ove krive proizvoljne orijentacije centrirane u proizvoljnim koordinatama:

$$w(t_1, t_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(t_{1g}^2/a^2 + t_{2g}^2/b^2)\right]. \quad (3.5)$$

Ova jednačina ima pet slobodnih parametara: a^2 i b^2 su prostorne varijanse u pravcima t_{1g} i t_{2g} , respektivno; t_{1_0} i t_{2_0} su lokacije centra u odnosu na koordinatni sistem u pravcima t_1 i t_2 , respektivno; A je ugao rotacije koordinata Gaussian-ove krive u odnosu na koordinatni sistem.

2D sinusoidalni ravanski talas može biti zapisan u sljedećem obliku:

$$m(t_1, t_2) = \exp[-2\pi i(\omega_{1_0}t_1 + \omega_{2_0}t_2)], \quad (3.6)$$

pri čemu su ω_{1_0} i ω_{2_0} su prostorne frekvencije u t_1 i t_2 pravcima, respektivno. Koristeći Euler-ovu formulu, prethodna jednačina može biti zapisana u sljedećem obliku:

$$m(t_1, t_2) = \exp[2\pi i(\omega_{1_0}t_1 + \omega_{2_0}t_2)] + i \exp[-2\pi i(\omega_{1_0}t_1 + \omega_{2_0}t_2)]. \quad (3.7)$$

Optimalnost 2D Gabor-ovog filtra važi samo za filter u kompleksnoj formi. Posmatrajmo samo realne signale (dakle, kosinuni član). Možemo izabrati željenu tačku za koordinatni početak modulacionog člana. Primjetimo da je koordinatni početak modulacionog člana nezavisan u slučaju eliptične Gaussian-ove krive. Naime, moguće je translirati osnovni koordinatni sistem za t_{1m} i t_{2m} :

$$m(t_1, t_2) = \exp[2\pi i(\omega_{1_0}(t_1 - t_{1m}) + \omega_{2_0}(t_2 - t_{2m}))], \quad (3.8a)$$

odnosno,

$$m(t_1, t_2) = \exp[2\pi i(\omega_{1_0}t_1 + \omega_{2_0}t_2 - \omega_{1_0}t_{1m} - \omega_{2_0}t_{2m})]. \quad (3.8b)$$

Ove dvije konstantne translacije, (3.8a) i (3.8b), mogu biti nadovezane, pri čemu rezultuju sa:

$$m(t_1, t_2) = \exp[2\pi i(\omega_{1_0}t_1 + \omega_{2_0}t_2 - P)], \quad (3.9)$$

gdje je $P = \omega_{1_0}t_{1m} + \omega_{2_0}t_{2m}$.

Ukoliko su t_{1m} i t_{2m} izabrani tako da vrše pomjeraj od centra eliptičke Gaussian-ove funkcije, parametar P se prirodno interpretira kao relativni fazni ugao modulacionog člana.

2D Gabor-ov filter sada može biti zapisan kao proizvod eliptičke Gaussian-ove funkcije, (3.5), i sinusoidalnog ravanskog talasa, (3.9), slika 3.1(a), [146],

$$x(t_1, t_2) = K^{-1/2(t_g^2 a^2 + t_g^2 b^2)} \cos[\pi(\omega_{10} t_1 + \omega_{20} t_2 - P)] \quad (3.10)$$

Ova jednačina daje realni (observabilni) dio generalizovanog 2D Gabor-ovog filtra. Skalirajući faktor K je uključen kako bi dozvolio formiranje Gabor-ovih filtera različitih amplituda.

Modulacioni član može biti zapisan u Cartesian-ovim koordinatama ω_{10} i ω_{20} kao što je i učinjeno, ili pak u polarnim koordinatama koristeći trigonometrijske relacije:

$$F_0 = \sqrt{(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)}, \quad \theta_0 = \arctg(\omega_{20} / \omega_{10})$$

Parametri F_0 i θ_0 su prostorna frekvencija modulacije i njena orijentacija, respektivno.

Stoga, funkcionalna forma 2D Gabor-ovog filtra zahtijeva devet slobodnih parametara. Tri određuju konverzije koordinatnog sistema (translacije u pravcima t_1 i t_2 , kao i Gaussian-ovu rotaciju) i mogu biti ignorisane nakon što se odrede. Amplituda određuju skalirajući faktor koji takođe može biti ignorisan nakon što je definisan. Preostalih pet esencijalnih parametara (varijanse duž glavne i sporedne ose, prostorna frekvencija, relativna orijentacija i relativna faza) u potpunosti karakterišu 2D Gabor-ov filter u njegovom najopštijem obliku.

3.1.2.2. Analiza 2D Gabor-ovog filtra u 2D frekvencijskom domenu

U 2D frekvencijskom domenu moramo dozvoliti iste varijacije strukture filtra koje smo dozvolili u 2D prostornom domenu. Međutim, postoje komplikacije. Naime, u praksi možemo posmatrati samo relativna slabljenja amplitude koja su nametnuta ulaznim sinusoidama. Da bi opisali ovo ograničenje, vršimo mjerenje amplitudskog spektra prenosne funkcije sistema. Stoga, moramo naći amplitudski spektar generalizovane forme 2D Gabor-ovog filtra.

Koristeći Euler-ovu formulu, modulacioni član može biti zapisan u sljedećem obliku:

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{2} e^{2\pi i(\omega_{10} t_1 + \omega_{20} t_2 - P)} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i(\omega_{10} t_1 + \omega_{20} t_2 - P)}, \quad (3.11)$$

a njegova FT:

$$M(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} e^{iP} \delta(\omega_1 - \omega_{10}) \delta(\omega_2 - \omega_{20}) + \frac{1}{2} e^{-iP} \delta(\omega_1 + \omega_{10}) \delta(\omega_2 + \omega_{20}), \quad (3.12)$$

pri čemu je δ delta funkcija.

2D FT eliptične Gaussian-ove krive je:

$$W(\omega_1, \omega_2) = e^{-(\omega_{1g}^2 a^2 + \omega_{2g}^2 b^2)} \quad (3.13)$$

Konvolucija posljednja dva izraza daje kompleksni spektar, [146]:

$$F(\omega_1, \omega_2) = e^{-iP} e^{-\pi(\omega_{1g}^2 a^2 + \omega_{2g}^2 b^2)} e^{iP} e^{-\pi(-\omega_{1g}^2 a^2 - \omega_{2g}^2 b^2)}. \quad (3.14)$$

Ovaj izraz ima šest slobodnih parametara. ω_{1g} i ω_{2g} sadrže dva konstantna parametra translacije ω_{10} i ω_{20} , koji određuju lokaciju Gaussian-ove funkcije u odnosu na koordinatni početak i ugao rotacije A , koji određuje orijentaciju osnovnih osa. P je relativni prostorni fazni ugao, dok su a i b dužine osnovnih Gaussian-ovih osa u pravcima ω_{1g} i ω_{2g} , respektivno.

Amplitudski spektar je dat kao kvadratni korjen sume kvadata realnog i imaginarnog dijela. Neka G_+ i G_- označavaju dva dijela eliptične Gaussian-ove funkcije koja su simetrična u odnosu na koordinatni početak (predstavljaju dva dijela prethodne jednačine). Kompleksni spektar tada može biti zapisan kao:

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2) &= G_+^{-iP} e_+ G_-^{iP} e_- = \\ &= G_+ [\cos(\theta) \sin(\theta)] e^{iP} [\cos(\theta) \sin(\theta)] e^{-iP} = \\ &= \cos(\theta) G_+ \sin(\theta) G_- e^{iP} e^{-iP} = \cos(\theta) G_+ \sin(\theta) G_- \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kvadrat realnog dijela jednačine (3.15) je:

$$\cos^2(\theta) G_+^2 \sin^2(\theta) G_-^2,$$

a kvadrat imaginarnog dijela je:

$$\sin^2(\theta) G_+^2 \cos^2(\theta) G_-^2.$$

Koristeći trigonometrijsku identitet, $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta)$, dobijamo:

$$F(\omega_1, \omega_2) = G_+^2 + 2G_+ G_- [\cos(2\theta)] - G_-^2 e^{iP} e^{-iP}. \quad (3.16)$$

Koristeći trigonometrijski identitet, $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta)$ i računajući kvadratni korjen, dobijamo amplitudski spektar 2D Gabor-ovog filtra, slika 3.1(b), [146],

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{G_+^2 + 2G_+ G_- [\cos(2\theta)] + G_-^2} e^{iP/2}, \quad (3.17)$$

koji može biti razvijen korišćenjem razvijenih oblika za G_+ i G_- . Kao i ranije, uključujemo amplitudski član u računanje u slučaju da je posmatrani signal oštećen šumom. Stoga, funkcionalni oblik koji tražimo ima sedam slobodnih parametara, pri čemu većina njih proizilazi iz prethodne jednačine. Relativni prostorni fazni ugao se pojavljuje u finalnom izrazu kao konstanta, opisujući kombinaciju dvije simetrične eliptične Gaussian-ove funkcije. Izraz je nezavisan od prostorne lokacije filtra, što je posljedica osobine *shift* invarijantnosti FT-je.

Zaključuje se da je definisanje 2D Gabor-ovog filtra jednostavnije izvršiti u 2D frekvencijskom domenu usljed manjeg broja slobodnih parametara koje je potrebno odrediti (7 slobodnih parametara, u odnosu na 9 koje je potrebno odrediti za definisanje Gabor-ovog filtra u 2D prostornom domenu).

3.2. 2D nelinearni S/SF filtri

Posmatrajmo 2D zašumljeni signal $x(\vec{t})$, pri čemu \vec{t} predstavlja vektor prostornih komponenti $\vec{t} = (t_1, t_2)$, odnosno $x(\vec{t}) = x(t_1, t_2)$:

$$x(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \varepsilon(\vec{t}), \quad (3.18)$$

gdje je $\varepsilon(\vec{t}) = \varepsilon(t_1, t_2)$ 2D aditivni, bijeli Gaussian-ov kompleksni šum.

Prostorno-promjenljivo (nestacionarno) filtriranje je definisano analogno 1D vremenski-promjenljivom filtriranju, [26], [32], [36], [37], [66], [129], na slijedeći način:

$$y(\vec{t}) = \int_{\vec{\tau}} h(\vec{t} - \vec{\tau}) x(\vec{\tau}) d\vec{\tau}, \quad \vec{t} = t_1, t_2 \quad x(\vec{t}) = x(t_1, t_2) \quad (3.19)$$

pri čemu je $h(\vec{t} - \vec{\tau})$ impulsni odziv prostorno-promjenljivog 2D sistema H .

Definicija (3.19) je blago modifikovana u odnosu na postojeće 1D definicije, [26], [32], [36], [37], [66]. Modifikacija se uvodi kako bi omogućila da se u slučaju filtriranja signala $f(\vec{t}) = Ae^{j\phi(\vec{t})}$ na izlazu filtra dobije neizobličen signal, odnosno $y(\vec{t}) = cf(\vec{t})$. Pri tome se podrazumijeva da je filter u S/SF domenu definisan kao delta funkcija $\delta(\vec{t} - \vec{\tau})$ duž lokalne frekvencije¹³ (*Local Frequency* - LF) $\nabla\phi(\vec{t})$ za signale koji zadovoljavaju uslove metoda stacionarne faze, [19], [68].

Naime, osobina 2D S/SFD-ja da su dobro koncentrisane u okolini svoje LF-je $\vec{\omega}_t(\vec{t}) = \nabla\phi(\vec{t})$ je jedan od osnovnih razloga njihovog uvođenja i primjene u filtriranju 2D signala. 2D WD može da ostvari kompletnu koncentraciju auto-članova 2D signala čije se varijacije LF-je mogu smatrati linearnim unutar posmatranih domena. S druge strane, u cilju unaprijeđenja koncentracije auto-članova 2D signala za slučaj nelinearnih LF-ja se uvode različite modifikacije, [13], [19], [24], [102], [119].

Posmatrajmo 2D FM signal $f(\vec{t}) = Ae^{j\phi(\vec{t})}$. Pretpostavimo da njegova 2D FT može biti dobijena korišćenjem 2D oblika metoda stacionarne faze, [19], [68],

$$F(\vec{\omega}) = \int_{\vec{t}} Ae^{j\phi(\vec{t})} e^{-j\vec{t}\vec{\omega}} d\vec{t} = Ae^{j\phi(\vec{t}_0)} e^{-j\vec{t}_0\vec{\omega}} \sqrt{\frac{(2\pi j)^2}{\frac{\partial^2 \phi(\vec{t})}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{t})}{\partial t_2^2}}},$$

pri čemu je \vec{t}_0 tačka u kojoj je $\vec{\omega} = \nabla\phi(\vec{t}_0)$. Dalje, pretpostavimo da smo dostigli idealno koncentrisanu 2D S/SF reprezentaciju datu sa $\delta(\vec{t} - \vec{t}_0)$ za $f(\vec{t})$. Kada nema ulaznog šuma

¹³ Za n -dimenzionalni signal $x(\vec{t}) = A e^{j\phi(\vec{t})}$, gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ i $A(\vec{t})$ sporopromjenljiva n -dimenzionalna funkcija, lokalna frekvencija se definiše kao $\vec{\omega} = \nabla\phi(\vec{t})$, pri čemu je $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, a ∇ operator za Hamiltonijan.

(idealni slučaj), odnosno kada je $x(\vec{t}) = f(\vec{t})$, očekuje se da se filtriranjem dobija neoštećen ulazni 2D signal na izlazu.

Prema Parseval-ovoj teoremi i uz uslov da su zadovoljeni kriterijumi za primjenu metoda stacionarne faze (tj. da iz $\vec{\omega} = \nabla\phi(\vec{t}_0) = \nabla\phi(\vec{t})$ slijedi da je $\vec{t}_0 = \vec{t}$), iz jednačine (3.19) dobijamo:

$$\begin{aligned} X(\vec{\omega})/L &= \int_{\vec{t}} h(\vec{t}) x(\vec{t}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{t}} d\vec{t} = \int_{\vec{t}} h(\vec{t}) f(\vec{t}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{t}} d\vec{t} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\vec{\omega}_0} L_H(\vec{t}) \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) e^{j\vec{t} \cdot \vec{\omega}_0} d\vec{\omega}_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\omega}_0} \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \nabla\phi(\vec{t}_0) A e^{j\phi(\vec{t}_0)} e^{-j\vec{t} \cdot \vec{\omega}_0} \sqrt{\frac{-1}{\frac{\partial^2\phi(\vec{t}_0)}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{t}_0)}{\partial t_2^2}}} e^{j\vec{t} \cdot \vec{\omega}_0} d\vec{\omega}_0 = \\ &= c A e^{j\phi(\vec{t})}. \end{aligned}$$

gdje je:

$$c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-1}{\frac{\partial^2\phi(\vec{t})}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{t})}{\partial t_2^2}}}.$$

Uočavamo da je na izlazu 2D filtra dobijen originalni 2D signal sa varijacijom amplitude koja zavisi od varijacije LF-je. Isto važi za (3.19) ukoliko je $w(0)=1$. U numeričkim realizacijama, delta funkcija podrazumijeva jedinične vrijednosti duž ravni LF-je.

Standardno korišćena definicija za vremensko-promjenljivo filtriranje:

$$X(\vec{\omega})/L = \int_{\vec{t}} h(\vec{t}) x(\vec{t}) e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{t}} d\vec{t},$$

bi u ovom slučaju dala:

$$X(\vec{\omega})/L = c A e^{j\phi(\vec{t})} e^{-j\vec{\omega} \cdot \vec{t}}.$$

Dobijeni izraz nije poželjan. Naime, filtrirani 2D signal osim amplitudskih varijacija, ima i značajne kompleksne devijacije faze. Ovo objašnjava motivaciju za blagom modifikacijom definicije prostorno-frekvencijskog filtriranja.

Sa teorijskog stanovišta je interesantno skrenuti pažnju na slučaj kada funkcija oslonca 2D filtra nije $\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{t}))$, već geometrijska sredina idealno koncentrisanih distribucija duž lokalne frekvencije $\delta(\vec{\omega} - \nabla\phi(\vec{t}))$ i grupnog pomjeraja¹⁴ $\delta(\vec{t}) \cdot \vec{t}_g \cdot \vec{\omega}$.

¹⁴ Posmatrajmo n -dimenzionalni signal $x(\vec{t})$, koji ima nenulte vrijednosti u okviru kratkih intervala u pravcima osa $t_i, i=1,2,\dots,n$. Fourier-ovu transformaciju ovog signala možemo pisati u obliku $X(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega}) e^{j\phi(\vec{\omega})}$, pri čemu je $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ i $R(\vec{\omega})$ sporopromjenljiva n -dimenzionalna funkcija. Grupni pomjeraj se tada definiše kao $\vec{t}_g = -\nabla\phi(\vec{\omega})$, gdje ∇ predstavlja operator za Hamiltonijan.

Za asimptotske signale $\vec{t}_g(\vec{\theta}) = \nabla^{-1} \phi(\vec{\theta})$ važi [19]. Tada bi, za:

$$\begin{aligned} L_H(\vec{t}, \vec{\theta}) &= \pi \left(\sqrt{\delta(\vec{\theta}) - \nabla \phi(\vec{t}) \cdot \delta \vec{t} - \nabla^{-1} \phi(\vec{\theta})} \right) = \\ &= 2\pi j \sqrt{-\frac{\partial^2 \phi(\vec{\theta})}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{t})}{\partial t_2^2} \delta(\vec{\theta}) - \nabla \phi(\vec{t})} \end{aligned}$$

izlazni signal 2D filtra bio isti kao i ulazni signal, bez dodatnih amplitudskih varijacija, odnosno $\vec{t} = Ae^{j\phi(\vec{\theta})}$.

Vratimo se razmatranju 2D sistema za prostorno-promjenljivo filtriranje.

Optimalni sistem H_{opt} , odnosno njegova optimalna prenosna funkcija može biti određena minimizacijom srednje kvadratne greške, na posmatranom vremenskom intervalu:

$$H_{opt} = \arg \min_H \{ |f(\vec{\theta}) H x(\vec{t})|^2 \} \quad (3.20)$$

U idealnom slučaju, filtriranjem se postiže da je:

$$f(\vec{\theta}), \vec{t}(\vec{\theta}) \rightarrow f(\vec{t}) H \varepsilon(\vec{t}) = \quad (3.21)$$

Prenosna funkcija optimalnog nestacionarnog filtra H_{opt} se izvodi analogno izvođenju prenosne funkcije Wiener-ovog filtra prilikom analize stacionarnih signala, tj. minimiziranjem srednje kvadratne greške

$$e^2 = E \{ |f(\vec{\theta}) H x(\vec{t})|^2 \} \quad (3.22)$$

po prenosnoj funkciji projektovanog filtra H ,

$$\frac{\partial e^2}{\partial h(\vec{t}, \vec{\alpha})} = 2E \{ [f(\vec{\theta}) \int_{\vec{t}} h(\vec{t} + \vec{z}) d\vec{z}] - \vec{t}(\vec{\theta}) \} x(\vec{t}) + \vec{t}(\vec{\theta}) x^*(\vec{t}) + \vec{\alpha} = \quad (3.23)$$

Dostizanjem minimalne vrijednosti srednje kvadratne greške e^2 se postiže ortogonalnost greške $f(\vec{\theta}) H x(\vec{t})$ i $x^*(\vec{t}) + \vec{\alpha}$, pri čemu α predstavlja parametar proizvoljne vrijednosti. Ovo rezultuje jednakošću, [66], [68]:

$$E \{ [f(\vec{\theta}) \int_{\vec{t}} h(\vec{t} + \vec{z}) d\vec{z}] - \vec{t}(\vec{\theta}) \} x(\vec{t}) + \vec{t}(\vec{\theta}) x^*(\vec{t}) + \vec{\alpha} = \quad (3.24)$$

Takođe, primjetimo da se FT pojedinih članova prethodne jednačine po promjenljivoj \vec{t} može predstaviti preko srednje vrijednosti *ambiguity* funkcije, [34], [39],

$$\overline{AF}_{xx}(\vec{\theta}) = \int_{\vec{t}} [2\pi h(\vec{t})] d\vec{t} x^*(\vec{t}) - \vec{t} = e^{-j\vec{\theta} \cdot \vec{t}} \vec{t} \quad (3.25)$$

Drugim riječima, pronalazeći FT-ju svih sabiraka iz (3.24) po promjenljivoj \vec{t} i upotrebljavajući definiciju (3.25), jednostavno se izvode sljedeće jednakosti:

$$FT_{\vec{t}} [E \{ f(\vec{\theta}) x^*(\vec{t}) + \vec{\alpha} \}] = \overline{AF}_{xx}(\vec{\theta}) - \vec{\alpha} e^{j\vec{\theta} \cdot \vec{\alpha}/2} \quad (3.26)$$

$$FT_t[E\{x(\vec{t})\}^* x^* \vec{t} + \vec{\alpha}] = \overline{AF}_{xx}(\vec{\theta} | \vec{\tau} - \vec{\alpha}) e^{j\vec{\theta}(\vec{2} + \vec{\alpha}) / \vec{\tau}} \quad (3.27)$$

Takođe, jednačinu (3.24) je moguće napisati u jednom od sljedećih oblika:

$$\overline{AF}_{fx}(\vec{\theta} | \vec{\alpha}) e^{j\vec{\theta}\vec{\alpha}/2} = \int_{\vec{\tau}} A_H(\vec{\theta} | \vec{\tau}) d\vec{\tau} \overline{AF}_{xx}(\vec{\theta} | \vec{\tau} - \vec{\alpha}) e^{j\vec{\theta}(\vec{2} + \vec{\alpha}) / \vec{\tau}} \quad (3.28)$$

$$\overline{AF}_{fx}(\vec{\theta} | \vec{\alpha}) e^{j\vec{\theta}\vec{\alpha}/2} = \int_{\vec{\tau}} \int_{\vec{u}} A_H d\vec{u}, -\vec{\tau} \overline{AF}_{xx}(\vec{\theta} | -\vec{u} - \vec{\alpha} - \vec{\tau}) e^{-j(\vec{\theta} + \vec{2}) \vec{\tau} + \vec{\alpha}} / \vec{\tau} \vec{u} \quad (3.29)$$

gdje je:

$$A_H(\vec{\theta} | \vec{\tau}) = \int_{\vec{t}} h(\vec{t} | \vec{2}) d\vec{t} / \vec{t} - \vec{\tau} / e^{-j\vec{\theta}\vec{t}} \vec{t} \quad (3.30)$$

FT impulsnog odziva optimalnog nestacionarnog 2D filtra po promjenljivoj \vec{t} .

Procesi koji su, gotovo u potpunosti, koncentrisani oko osa *ambiguity* domena $(\vec{\theta} | \vec{\tau})$, (u 1D slučaju ovi procesi se nazivaju *underspread* procesima, [34], [36], [39]), različiti su od nule samo za male vrijednosti $|\vec{\theta}|, |\vec{u}|, |\vec{\alpha}|, |\vec{\tau}|$. Stoga, važi da je $|\vec{\theta}\vec{\tau} - \vec{u}\vec{\alpha} - \vec{u}\vec{t}|/2 \ll \pi$, a samim tim i $e^{j(\vec{\theta}\vec{2} - \vec{u}\vec{\alpha} - \vec{u}\vec{t})} \cong 1$, što dalje rezultuje sljedećim izrazom:

$$\overline{AF}_{fx}(\vec{\theta} | \vec{\alpha}) = \int_{\vec{\tau}} \int_{\vec{u}} A_H(\vec{u}) d\vec{u} d\vec{\tau} \overline{AF}_{xx}(\vec{\theta} | -\vec{u} - \vec{\alpha} - \vec{\tau}) \vec{\tau} \vec{u} \quad (3.31)$$

Primjetimo da za kvazistacionarne procese, [66], [68], [129], jednačina (3.31) direktno slijedi iz jednačine (3.24), bez dodatnih pretpostavki. Za ovu vrstu procesa važe sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} E\{f(\vec{t})\}^* \vec{t} + \vec{\alpha} / \vec{2} \} E\{f(\vec{t})\} \vec{t} - \vec{\alpha} &= x^* \vec{t} + \vec{\alpha} \quad , \\ E\{x(\vec{t})\} \vec{\tau} x^* \{(\vec{t})/2\} &= E\{x(\vec{t})\} \vec{t} + \vec{\tau} - \vec{\alpha} \quad \times x^* (\vec{t})/2\} - \vec{\alpha} \quad . \end{aligned}$$

2D FT jednačine (3.31) rezultuje sa:

$$\overline{WD}_{fx}(\vec{t} | \vec{\theta}) = A_H(\vec{t} | \vec{\theta}) \overline{WD}_{xx}(\vec{t} | \vec{\theta}) \quad , \quad (3.32)$$

gdje je $\overline{WD}_{xx}(\vec{t} | \vec{\theta})$ Wigner-ov spekar, odnosno očekivana vrijednost WD-je signala $x(\vec{t})$:

$$\overline{WD}_{xx}(\vec{t} | \vec{\theta}) = \int_{\vec{\tau}} \mathcal{B}(\vec{h}(\vec{2})) \vec{\tau} d\vec{x}^* \vec{t} - \vec{\tau} e^{-j\vec{\theta}\vec{\tau}} \vec{\tau} \quad ,$$

a $L_H(\vec{t} | \vec{\theta})$ 2D Weyl-ov simbol, kojim je označena funkcija oslonca optimalnog nestacionarnog 2D filtra:

$$L_H(\vec{t} | \vec{\theta}) = E\{T_{\vec{\theta}, \vec{\alpha}}\} A_H(\vec{t} | -\vec{\alpha}) \Rightarrow \int_{\vec{\tau}} h(\vec{t} - \frac{\vec{\tau}}{2} | \vec{t} + \frac{\vec{\tau}}{2}) e^{-j\vec{\theta}\vec{\tau}} \vec{\tau} \quad (3.33)$$

Ukoliko 2D signal i 2D šum nijesu korelirani tada se $L_H(\vec{t} | \vec{\theta})$ može zapisati na sljedeći način:

$$L_H(\vec{t} | \vec{\theta}) = \frac{\overline{WD}_{ff}(\vec{t} | \vec{\theta})}{\overline{WD}_{ff}(\vec{t} | \vec{\theta}) + \overline{WD}_{\varepsilon\varepsilon}(\vec{t} | \vec{\theta})} \quad (3.34)$$

Uočimo da se za stacionarne procese, kod kojih je $\overline{WD}_f(\vec{t}, \vec{\omega}) = X_f(\vec{\omega})$, $h(\vec{t} - \frac{\vec{\tau}}{2}, \vec{\tau}) = h(\vec{t})$ i $L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) \neq 0$, relacije (3.19), (3.33) i (3.34) redukuju na dobro poznate stacionarne forme, [66], [68].

Pretpostavimo da se spektar odabrane 2D S/SFD-je signala $f(\vec{t})$ nalazi unutar uske oblasti R_f prostorno-frekvencijske ravni, dok je najveći dio šuma raspoređen van ove oblasti (samo mali dio šuma, u poređenju sa njegovom cjelokupnom energijom, leži u oblasti R_f). Ovo je veoma zastupljen slučaj u praksi, a jedan od najistaknutijih primjera je široka klasa FM signala, visoko koncentrisanih na svojim LF-jama, maskiranih aditivnim, bijelim, Gaussian-ovim šumom $\varepsilon(\vec{t})$, raširenim u čitavom 2D S/SF domenu. Na osnovu postavljenih zahtjeva, funkciju oslonca optimalnog nestacionarnog 2D filtra, možemo zapisati kao:

$$L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{za } (\vec{t}, \vec{\omega}) \in R_f \\ 0, & \text{za } (\vec{t}, \vec{\omega}) \notin R_f \end{cases} \quad (3.35)$$

gdje je R_f region u kojem je $\overline{WD}_f(\vec{t}, \vec{\omega}) \neq 0$.

Primjenom ovog rješenja na definicioni izraz prostorno-promjenljivog filtriranja (3.20) se ostvaruje efikasno filtriranje monokomponentnih i multikomponentnih 2D FM signala, maskiranih aditivnim, bijelim, Gaussian-ovim šumom. Uočimo da uzimanje proizvoljne konstantne vrijednosti u jednačini (3.35), unutar opsega R_f , ne uzrokuje bilo kakve kvalitativne izmjene u analizi.

Jednačina (3.35) može biti izvedena na poluintuitivan način, kao u [32]. Tada bi neka ograničenja nametnuta u ovom izvođenju, kao ono koje se odnosi na *underspread* procese, bila nepotrebna.

Impulсни odziv prostorno-promjenljivog filtra se dobija u obliku:

$$h(\vec{t}, \vec{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\vec{\omega}} L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) X_f(\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega}\vec{\tau}} d\vec{\omega} \quad (3.36)$$

Primjenom Parseval-ove teoreme definišemo prostorno-promjenljivo filtriranje u frekvencijskom domenu,

$$\overline{WD}_f(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\vec{\omega}} L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) X_f(\vec{\omega}) e^{j\vec{\omega}\vec{t}} d\vec{\omega} \quad (3.37)$$

gdje je $X_f(\vec{\omega}) = FT x(\vec{t})$.

U cilju praktične realizacije prostorno-promjenljivog filtriranja se vrši ograničavanje ulaznog signala $x(\vec{t})$ (filtriranog po definicionom izrazu (3.19)) funkcijom prozora $w(\vec{t})$,

$$\overline{WD}_f(2\vec{t}) = \int_{\vec{\tau}} \overline{WD}_f(\vec{t}, \vec{\omega}) w(\vec{\tau}) x(\vec{t} + \vec{\tau}) d\vec{\tau} \quad (3.38)$$

odnosno:

$$Y(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{L_H} L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) STFT_x(\vec{t}, \vec{\omega}) d\vec{\omega} \quad (3.39)$$

Za signale koji su idealno koncentrisani duž LF-je u prostorno-frekvencijskom domenu prozor $w(\vec{x})$ ne utiče na izlaz filtra (3.38), sve dok je $w(\vec{0}) = \text{const} = 1$.

Prilikom praktične implementacije 2D nelinearnih S/SF filtara, domen R_f se određuje upotrebom pseudo oblika 2D S/SFD-je. Razmotrimo prethodnu analizu na primjeru 2D PWD-je:

$$PWD_{ff}(\vec{t}, \vec{\omega}) = \int_{\vec{\tau}} f(\vec{t} + \vec{\tau}) f^*(\vec{t} - \vec{\tau}) e^{-j\vec{\omega}\vec{\tau}} d\vec{\tau} \quad (3.40)$$

Primjetimo da prozori $w(\vec{x})$ i $w_e(\vec{x})$ upotrijebljeni u definicionim izrazima pseudo forme optimalnog nestacionarnog filtriranja, (3.38), i 2D PWD-je, (3.40), nijesu povezani, tako da se njihova analiza i optimizacija može vršiti odvojeno. Prozorom $w_e(\vec{x})$ se vrši zaobljavanje originalne 2D WD-je,

$$PWD_{ff}(\vec{t}, \vec{\omega}) = PWD_{ff}(\vec{t}, \vec{\omega}) W_e(\vec{\omega}) \quad (3.41)$$

Ukoliko sa R_p označimo region dobijen upotrebom 2D PWD-je u definicionom izrazu funkcije oslonca 2D filtra (3.34), njegovu veličinu možemo predstaviti sa:

$$R_p = R + \Delta R. \quad (3.42)$$

Sa R je označen region dobijen upotrebom originalne 2D WD-je, dok je ΔR uvećanje regiona R usljed upotrebe 2D PWD-je. ΔR je direktno proporcionalano sa $W_e(\vec{\omega})$ (FT-ja funkcije prozora $w_e(\vec{x})$), odnosno obrnuto proporcionalno širini prozora $w_e(\vec{x})$. Primjenom 2D PWD-je, (3.40), propuštamo veću količinu šuma kroz sistem nego što je neophodno sa teorijskog aspekta. Da bi sveli količinu šuma unesenu u sistem na prihvatljivu mjeru, potrebno je izvršiti smanjenje širine prozora $w_e(\vec{x})$, odnosno proširivanje funkcije $W_e(\vec{\omega})$. Sa druge strane, ovim postupkom se vrši značajan uticaj i na analizirani signal. Naime, proširivanjem $W_e(\vec{\omega})$ povećavamo region R_p funkcije oslonca. Time se mogu degradirati performanse posmatranog signala u trenutku \vec{t} , pošto se širenjem regiona R_p na izlazu sistema mogu pojaviti i frekvencijske komponente signala koje ne pripadaju posmatranom vremenskom trenutku \vec{t} . Zaključujemo da je povećanje širine prozora $w_e(\vec{x})$ praćeno rastom energije šuma, odnosno smanjenjem kvaliteta filtriranog signala. Širina prozora $w_e(\vec{x})$ stoga mora biti određena kompromisnim izborom (optimizacijom) u cilju zadovoljenja oba zahtjeva.

Diskretna forma jednačine (3.39) je:

$$Y(\vec{n}, \vec{k}) = \sum_{\vec{k}} L_H(\vec{n}, \vec{k}) STFT(\vec{n}, \vec{k}), \quad (3.43)$$

pri čemu $L_H(\vec{n}, \vec{k})$ podrazumijeva jediničnu vrijednost u domenu u kom je 2D WD signala različita od nule. Dakle, u cilju izvođenja prostorno-frekvencijskog filtriranja potrebno je

poznavati $STFT(\vec{n}, \vec{k})$ i $L_H(\vec{n}, \vec{k})$. Izračunavanje $STFT(\vec{n}, \vec{k})$ je jednostavno, ali se problem određivanja $L_H(\vec{n}, \vec{k})$ zadržava i predstavlja suštinu prostorno-frekvencijskog filtriranja. Očigledno, precizno definisanje vrijednosti $L_H(\vec{n}, \vec{k})$ je direktno povezano sa preciznim određivanjem regiona R_f , što dalje vodi estimaciji 2D WD-je signala bez šuma. Uočimo da je u praksi ovu estimaciju potrebno izvesti na bazi samo jedne realizacije signala sa šumom sa, što je moguće manjom, srednjom kvadratnom greškom.

Primjetimo da bi određivanje funkcije oslonca 2D filtra bazirano na 2D spektrogramu bilo odgovarajuće samo u slučaju kada su prostorne promjene LF-je veoma spore ili beznačajne, tako da se LF može smatrati konstantnom u okviru prozora $w(\vec{k})$. U suprotnom, kada su varijacije LF-je unutar razmatranog domena značajne za niske i visoke frekvencije, estimacija bazirana na 2D spektrogramu ili 2D skalogramu postaje nepouzdana. Takođe, funkcija oslonca određena upotrebom ovih distribucija bi bila preširoka i rezultirala bi neefikasnim filtriranjem.

Definisanje funkcije oslonca, odnosno načina za njenu kvalitetnu estimaciju otvara prostor za različite istraživačke pristupe, a samim tim i dizajn različitih vrsta 2D filtara.

3.2.1. 2D filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu izračuna biasa i varijanse, [130]

U nastavku će biti predstavljen jedan od postojećih pristupa rješavanju problema filtriranja 2D signala koji estimaciju funkcije oslonca 2D filtra bazira na izračunu biasa i varijanse, [130]. Ovaj metod je sposoban da obezbijedi dobru estimaciju funkcije oslonca 2D filtra koja je od krucijalnog značaja za kvalitetno i efikasno filtriranje, i to na bazi jedne realizacije zašumljenog signala, što je u praksi i najčešći slučaj. Time on obezbjeđuje kvalitetno prostorno-promjenljivo filtriranje, te demonstrira superiornost nestacionarnog koncepta procesiranja 2D signala u odnosu na prostorno-invarijantne metode.

U razmatranom algoritmu je, kao bazična distribucija, korišćena 2D WD, zajedno sa 2D Weyl-ovim simbolom. Estimacija na bazi 2D WD-je je, za slučaj monokomponentnih signala, bliska optimalnoj sa aspekta biasa i varijanse, [102], [122], [124]. Za rad sa multikomponentnim signalima je, umjesto 2D WD-je koja pati od efekata interferencije, korišćen 2D SM, [108], [112].

Bias i varijansa su dva parametra čiji zbir određuje srednju kvadratnu grešku estimacije na bazi 2D WD-je. Oni se analiziraju za 2D PWD-ju diskretnog determinističkog zašumljenog signala $x(\vec{j})$:

$$PWD_x(\vec{t}, \vec{\omega}) = \sum_{\vec{n}} w(\vec{n}) w^*(\vec{n}) x(\vec{t} + \vec{n}) x^*(\vec{t} - \vec{n}) e^{-j2\vec{\omega}\vec{n}}, \quad (3.44)$$

pri čemu je $x(\vec{j}) = f(\vec{j}) + \varepsilon(\vec{j})$, $f(\vec{j})$ je čisti signal, a $\varepsilon(\vec{j})$ kompleksni aditivni Gaussian-ov bijeli šum, sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima, i ukupnom

varijansom σ_ε^2 . Ova situacija korespondira realnim situacijama kada je poznata samo jedna realizacija 2D signala $f(\vec{r})$, te stoga signal možemo smatrati determinističkim. Autokorelaciona funkcija šuma je $R_{\varepsilon\varepsilon}(2\vec{n}) = \sigma_\varepsilon^2 \delta(\vec{n})$.

Srednju vrijednost 2D PWD-je je moguće zapisati u sljedećem obliku, [110]:

$$E\{PWD_x(\vec{r}, \vec{\omega})\} = WD_f(\vec{r}, \vec{\omega}) (2\pi)^{-2} FT_{ww}(\vec{\omega}) + \sigma_\varepsilon^2 **_{\omega_1\omega_2} FT_{ww}(\vec{\omega}), \quad (3.45)$$

gdje je $FT_{ww}(2\vec{\omega})$ Fourier-ova transformacija 2D prozora $w(\vec{r})w^*(-\vec{r})$, dok je $**_{\omega_1\omega_2}$ 2D konvolucija duž osa ω_1 i ω_2 . Drugi član jednačine (3.45):

$$\sigma_\varepsilon^2 **_{\omega_1\omega_2} FT_{ww}(2\vec{\omega}) = \sigma_\varepsilon^2$$

je konstanta koja ne zavisi od oblika prozora i signala, te je nije potrebno dalje razmatrati. Prvi član jednačine (3.45) je moguće zapisati kao:

$$WD_f(\vec{r}, \vec{\omega}) (2\pi)^{-2} FT_{ww}(\vec{\omega}) = WD_f(\vec{r}, \vec{\omega}) + bias(\vec{r}, \vec{\omega}).$$

Bias $bias(\vec{r}, \vec{\omega})$ može biti aproksimiran sa, [130]:

$$bias(\vec{r}, \vec{\omega}) = \frac{\partial^2 WD_f(\vec{r}, \vec{\omega})}{\partial \omega_1^2} \frac{n_1^2}{8} + \frac{\partial^2 WD_f(\vec{r}, \vec{\omega})}{\partial \omega_2^2} \frac{n_2^2}{8}. \quad (3.46)$$

Varijansa je definisana sa:

$$\sigma_{xx}^2 = E\{PWD_x(\vec{r}, \vec{\omega}) PWD_x^*(\vec{r}, \vec{\omega})\} - E\{PWD_x(\vec{r}, \vec{\omega})\} E\{PWD_x^*(\vec{r}, \vec{\omega})\}. \quad (3.47)$$

Koristeći (3.47) dobijamo, analogno u 1D slučaju, [4], [110], da je:

$$\sigma_{xx}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\vec{n}} w^4(\vec{n}) |\vec{r} + \vec{n}|^2 + f(\vec{r}) - \bar{n}^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad (3.48)$$

gdje je pretpostavljena realna i parna funkcija prozora $w(\vec{r})$.

Za signal sa sporopromjenljivom amplitudom $A(\vec{r})$, dobijamo da je:

$$\sigma_{xx}^2 \cong E_w \sigma_\varepsilon^2 (2A^2(\vec{r})) + \sigma_\varepsilon^2, \quad (3.49)$$

pri čemu E_w označava energiju 2D prozora. Za 2D Hanning-ov separabilni prozor $w(\vec{r}) = w(r_1)w(r_2)$ širine N , energija ima vrijednost $E_w = 9N^2/64$. Slične rezultate je moguće dobiti za bilo koji drugi oblik prozora proizvoljne širine N . Na primjer, za 2D Hamming-ov separabilni prozor energija je $E_w = 0.19793N^2$, a za 2D pravougaoni prozor $E_w = N^2$.

Kao što je već pomenuto, srednja kvadratna greška je definisana kao:

$$e^2(\vec{r}, \vec{\omega}) = bias^2(\vec{r}, \vec{\omega}) + \sigma_{xx}^2.$$

U skladu sa (3.46) i (3.49), moguće je zapisati:

$$e^2(\vec{r}, \vec{\omega}) = C(\vec{r}, \vec{\omega}) N \frac{1}{N^4} + D(\vec{r}, \vec{\omega}) N^2, \quad (3.50)$$

gdje je:

$$C(\vec{t} \oplus \vec{N}) = \int \mathcal{W}D_f(\vec{t} \oplus \vec{N}) \left(\frac{\partial^2 \mathcal{W}D_f(\vec{t} \oplus \vec{N})}{\partial \omega_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}D_f(\vec{t} \oplus \vec{N})}{\partial \omega_2^2} \right) \frac{\pi^4}{16},$$

$$D(\vec{t}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{W}D_f(\vec{t})}{\partial \omega_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}D_f(\vec{t})}{\partial \omega_2^2} \right) + \sigma_\varepsilon^2.$$

Važno je uočiti da varijansa raste sa kvadratnom vrijednošću širine 2D prozora, dok bias opada istim tim intenzitetom. Optimalna širina 2D prozora se izvodi iz:

$$\frac{\partial e^2(\vec{t} \oplus \vec{N})}{\partial N} = 0|_{N=N_{opt}}.$$

Iz (3.50) dobijamo da je:

$$N_{opt} = \sqrt[6]{2C(\vec{t} \oplus \vec{N}) / D(\vec{t})}. \quad (3.51)$$

Primjetimo da je optimalna širina 2D prozora N_{opt} prostorno i frekvencijski promjenljiva, s obzirom da zavisi od $C(\vec{t} \oplus \vec{N})$. Iz (3.50) možemo zaključiti da je za optimalnu širinu 2D prozora N_{opt} odnos između biasa i standardne devijacije:

$$\frac{bias(\vec{t} \oplus \vec{N})|_{N=N_{opt}}}{\sigma_{xx}|_{N=N_{opt}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.52)$$

Očigledno, ovaj odnos je konstantan i ne zavisi od parametara, kao ni od signala. Optimalna širina 2D prozora, koja je opisana jednačinom (3.51), nije primjenljiva u rješavanju praktičnih problema. Razlog za to je nužnost poznavanja vrijednosti $C(\vec{t} \oplus \vec{N})$. Ovaj zahtjev je nemoguće unaprijed zadovoljiti, imajući u vidu da ova vrijednost predstavlja funkciju izvoda 2D S/SFD-je čistog signala $f(\vec{t})$. Stoga je razvijen algoritam za određivanje optimalne širine 2D prozora, bez korišćenja parametra $C(\vec{t} \oplus \vec{N})$.

U cilju estimacije 2D WD-je signala $f(\vec{t})$ i odgovarajuće funkcije oslonca R_f upotrebom optimalne širine 2D prozora za svaku prostornu i frekvencijsku tačku, iskorišćen je statistički pristup, [102], [104], [121], [124]. Baziran je na činjenici da je vrijednost 2D PWD-je zašumljenog signala $WD_x(\vec{t} \oplus \vec{N})$ slučajna skalarna promjenljiva. Rasuta je u okolini tačne vrijednosti 2D Wigner-ove distribucije $WD_f(\vec{t} \oplus \vec{N})$ sa biasom $bias(\vec{t} \oplus \vec{N})$ (uključujući konstantu σ_ε^2), i varijansom $\sigma_{xx}(N)$. Kao i za bilo koju slučajnu promjenljivu sa biasom, možemo pisati sljedeću nejednakost:

$$|WD_f(\vec{t} \oplus \vec{N}) - WD_x(\vec{t} \oplus \vec{N}) - bias(\vec{t} \oplus \vec{N})| \leq k \sigma_{xx}(N). \quad (3.53)$$

Ova nejednakost važi sa vjerovatnoćom $P(k)$. Za veliko k imamo da je (3.53) zadovoljena sa $P(k) \rightarrow 1$ za bilo koji zakon raspodjele slučajne promjenljive $WD_x(\vec{t} \in N)$. Na primjer, za $k=3$ („tri sigma pravilo¹⁵“) za normalnu distribuciju slučajne promjenljive $P(k)=0.997$.

Za pogodno odabrano N , bias uzima malu vrijednost, odnosno $bias(\vec{t} \in N) \leq \Delta k \sigma_{xx} N$, pa gornja nejednakost može biti zapisana kao:

$$|WD_f(\vec{t} \in N) - WD_x(\vec{t} \in N)| \leq k + \Delta k \sigma_{xx} N. \quad (3.54)$$

U skladu sa (3.54) možemo pisati izraze za donju i gornju granicu intervala važenja $D(\vec{t} \in N) = [L_p, U_p]$, unutar kojih je vrijednost 2D WD-je $WD_x(\vec{t} \in N)$ smještena sa vjerovatnoćom $P(k)$.

$$\begin{aligned} L_p &= WD_x(\vec{t} \in N) - (k + \Delta k \sigma_{xx} N_p), \\ U_p &= WD_x(\vec{t} \in N) + (k + \Delta k \sigma_{xx} N_p). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Indeks p označava proizvoljnu širinu prozora N_p .

Iz niza sukcesivnih vrijednosti širina prozora $N \in (N_1, N_2)$, $N_1 < N_2$, uočene su dvije karakteristične vrijednosti za N , i to za:

- slučaj malog biasa,
- slučaj male varijanse i velikog biasa.

Intervali važenja $D(\vec{t} \in N_1)$ i $D(\vec{t} \in N_2)$ se sijeku u slučajevima malog biasa, s obzirom da se, u skladu sa (3.54), stvarne vrijednosti 2D WD-je nalaze u oba intervala (sa vjerovatnoćom $P(k)$). U slučajevima veoma velikog biasa i male varijanse intervali važenja se ne sijeku, $D(\vec{t} \in N_1) \cap D(\vec{t} \in N_2) = \emptyset$. Vrijednosti za Δk , kao i region za moguće vrijednosti k , se određuju iz uslova da se svi intervali važenja za $bias(\vec{t} \in N) \leq \sigma_{xx} \sqrt{2N} > \sqrt{\quad}$ ne sijeku. Na ovaj način, provjera presjeka dva intervala važenja će biti indikator za odnos biasa i standardne devijacije. Kada je dostignuta kritična vrijednost odnosa biasa i varijanse, (3.52), to znači da imamo optimalnu širinu 2D prozora za posmatranu prostornu i frekvencijsku tačku, (3.52).

Za numeričku implementaciju ovog metoda se koristi FFT algoritam. Stoga je pretpostavljeno da širine 2D prozora imaju dijadičnu šemu opisanu na sljedeći način:

$$N = \{N_p \mid N_p = 2^{-p} N_{opt}\}, \quad (3.56)$$

gdje je $p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ i N_{opt} nepoznata optimalna širina. Pretpostavljeno je da optimalna širina prozora pripada ovome opsegu.

¹⁵ Tri sigma pravilo je jedno od osnovnih pravila teorije vjerovatnoće: Događaj se smatra nemogućim ukoliko leži u oblasti vrijednosti normalne distribucije slučajne promjenljive, na udaljenosti od njenog matematičkog očekivanja koje je veće više od tri puta od njene standardne devijacije.

Neka je X normalno distribuirana slučajna promjenljiva, $N(\alpha, \sigma^2)$. Za bilo koje $k > 0$ važi da je $P\{|X - \alpha| < k\sigma\} = 2\Phi(k) - 1$, pri čemu je $\Phi(\cdot)$ normalna distribucija funkcije. Dakle, za $k=3$, slijedi da je $P\{\alpha - 3\sigma < X < \alpha + 3\sigma\} = 0.99730$.

Ukoliko, ipak, N_{opt} ne pripada ovom opsegu vrijednosti za N , tada će algoritam rezultovati njoj najbližom vrijednošću. Zbog spore promjene srednje kvadratne greške u okolini stacionarne tačke, to neće značajnije degradirati performanse. Čak i u slučaju da je poznata tačna vrijednost optimalne širine 2D prozora N_{opt} za svaki vremenski trenutak i da je korišćen FFT algoritam sa osnovom 2, bila bi napravljena ista vrsta greške, s obzirom da N_{opt} u principu nije oblika 2^n .

Sa (3.50) i (3.56), relacije biasa i standardne devijacije za proizvoljnu širinu prozora N_p mogu biti zapisane kao funkcije biasa i standardne devijacije za optimalnu širinu N_{opt} :

$$\begin{aligned} bias(N_p) &= (2^{p-1/3}) \sigma_{xx} N_{opt} \\ \sigma_{xx}(N_p) &= (2^p) \sigma_{xx} N_{opt} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posmatrajmo tri regiona D_0, D_1, D_2 i pretpostavimo, u skladu sa prethodnom analizom, uslov da se regioni D_0 i D_1 sijeku, a da se regioni D_1 i D_2 ne sijeku. Usljed monotonosti biasa i varijanse u slučaju da se regioni D_0 i D_1 sijeku, tada će se svi D_p i D_{p-1} za $p < 1$ sijeci. Ovo znači da je region D_0 definisan optimalnom širinom prozora. Pod pretpostavkom, bez gubitka opštosti, da je bias pozitivan, moguće je pisati sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \min\{U_0\} &\geq \max\{L_1\}, \\ \min\{U_1\} &< \max\{L_2\}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

gdje je, na primjer, $\min\{U_0\}$ minimalna moguća vrijednost gornje granice za $p=0$. Na bazi (3.53) slijedi da se za prozor širine N_p 2D WD-ja signala $x(t)$ nalazi unutar intervala:

$$WD_x(\vec{n} \oplus N_p) \in [WD_f(\vec{n} \oplus N_p) + bias(N_p) - \Delta k \sigma_{xx} N_p, WD_f(\vec{n} \oplus N_p) + bias(N_p) + \Delta k \sigma_{xx} N_p] \quad (3.59)$$

Gornje i donje granice intervala važenja, za datu širinu prozora, u skladu sa (3.55), uzimaju vrijednosti u sljedećim okvirima:

$$\begin{aligned} U_p &\in [WD_f(\vec{t} \oplus N_p) + bias(N_p) + \Delta k \sigma_{xx} N_p, WD_f(\vec{t} \oplus N_p) + bias(N_p) + k + \Delta k \sigma_{xx} N_p], \\ L_p &\in [WD_f(\vec{t} \oplus N_p) - bias(N_p) - k - \Delta k \sigma_{xx} N_p, WD_f(\vec{t} \oplus N_p) + bias(N_p) - \Delta k \sigma_{xx} N_p] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Zamjenom (3.60) u (3.58) dobijamo:

$$\sqrt{2} \leq \Delta k < 8\sqrt{2} - 2k. \quad (3.61)$$

To znači da je $\Delta k > 0$ za $k < 7\sqrt{2}/2 \approx 4.9$. Na primjer, za $k=4$ imamo da je $\sqrt{2} \leq \Delta k < 8\sqrt{2} - 8 \approx 3.3$. Vrijednost parametra k određuje vjerovatnoću $P(k)$ kojom je jednačina (3.54) zadovoljena, odnosno vjerovatnoću pod kojom su sve izvedene jednačine tačne. U tom smislu, poželjno je uzeti što veću vrijednost parametra k iz izvedenog intervala. Na primjer, sa $k=4$ dobijamo da je $P(k) > 0.999$. Dalje povećanje parametra k nema smisla, s obzirom da je vjerovatnoća već bliska jedinici i ostali faktori, kao što su na primjer efekti diskretizacije, postaju dominantni. Na ovaj način su definisani Δk i k , kao ključni faktori algoritma.

Gornja procedura može biti značajno uprošćena korišćenjem samo dvije širine prozora, [121]. Posmatrajmo ove dvije širine prozora: $N_1 \times N_1$ i $N_2 \times N_2$, pri čemu je $N_1 \ll N_2$. Prozor $N_1 \times N_1$ produkuje malu varijansu, a prozor $N_2 \times N_2$ produkuje mali bias. Stoga, kada se intervali važenja ova dva prozora sijeku, bias je mali i tada koristimo prozor $N_1 \times N_1$ kako bismo redukovali varijansu. U suprotnom, bias je veliki i koristimo prozor $N_2 \times N_2$ kako bismo ga redukovali. Rezultujuća, adaptivna 2D WD je:

$$WD_x^e(\vec{t}, \vec{\omega}) = \begin{cases} WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}, N_1), & \text{kada je } \Phi \text{ tačno} \\ WD_x(\vec{t}, \vec{\omega}, N_2), & \text{kada } \Phi \text{ nije tačno,} \end{cases} \quad (3.62)$$

pri čemu je Φ tačno ako je:

$$|WD_x(\vec{n}, \vec{\omega}, N_1) - WD_x(\vec{n}, \vec{\omega}, N_2)| \leq k + \Delta k \cdot \sigma_{xx} N_1 + \sigma_{xx} N_2. \quad (3.63)$$

Na ovaj način, upotrebom samo dvije različite širine prozora, možemo očekivati značajna unaprijeđenja, s obzirom da je 2D WD ili sporopromjenljiva (veoma mali bias) ili jako koncentrisana duž LF-je (veoma veliki bias). Ukoliko koristimo pristup sa više prozora čije dimenzije uzimaju vrijednosti iz intervala između N_1 i N_2 , algoritam bi dominantno birao upravo ove dvije ekstremne širine prozora.

Relacija (3.62) se svodi na izračunavanje 2D WD-je i njene varijanse za dvije širine prozora. Jedna od mogućih relacija za estimaciju varijanse je:

$$\sigma_{xx}^2(\vec{\omega}) = \frac{9N^2}{64} \left(\sum_{\vec{n}} s(\vec{n}) \vec{t} + \vec{n} \right)^2. \quad (3.64)$$

Ovo važi za male vrijednosti odnosa signal/šum. Za slučajeve malog šuma, procedura estimacije varijanse je data u [104]. Iz (3.64) slijedi da je $\sigma_{xx}^2(\vec{\omega}) = \sigma_{xx}^2 N_2 N_1^2 N_2^2$. Ovim su definisani algoritam i svi parametri za izračun 2D WD-je, koji se koriste za određivanje funkcije oslonca R_f i potpunog determinisanja procedure prostorno-promjenljivog filtriranja.

Za slučaj multikomponentnog signala $f(\vec{t}) = \sum_{i=1}^M f_i(\vec{t})$, 2D WD sadrži M članova signala (auto-članovi) i $M(M-1)/2$ članova interferencije (kros-članovi) sa amplitudama koje bi mogle da maskiraju članove signala:

$$WD_f(\vec{t}, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^M WD_{ii}(\vec{t}, \vec{\omega}) + \sum_{i=1}^M \sum_{j>i}^M WD_{ij}(\vec{t}, \vec{\omega}). \quad (3.65)$$

Za multikomponentne signale je, stoga, korišćen 2D SM, [108], [112]:

$$SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = \sum_{\vec{\theta}} P(\vec{\theta}, STFT) \vec{t}, \vec{\omega} + \vec{\theta} STFT^* \vec{t}, \vec{\omega} - \vec{\theta}, \quad (3.66)$$

gdje je $P(\vec{\theta})$ pravougaoni prozor širine $2L+1$ u oba pravca. Kada se komponente multikomponentnog signala ne preklapaju u združenoj prostorno-frekvencijskoj ravni, moguće je

odrediti širinu frekvencijskog prozora $P(\vec{\omega})$, tako da je 2D SM jednak sumi 2D WD-je svake komponente signala pojedinačno, [108],

$$SM(\vec{t}, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^M WD_{ii}(\vec{t}, \vec{\omega}). \quad (3.67)$$

Varijansa za nepreklapajuće multikomponentne signale može biti predstavljena kao u (3.49),

$$\sigma_{xx}^2(\vec{t}, \vec{\omega}) = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{\vec{n}} w^4(\vec{n}) A_{\vec{n}}^2(\vec{t}, \vec{\omega}) + \sigma_{\varepsilon}^2(\vec{t}, \vec{\omega}) & \text{za } (\vec{t}, \vec{\omega}) \in R_{f_i} \\ \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{\vec{n}} w^4(\vec{n}) & \text{za } (\vec{t}, \vec{\omega}) \notin R_{f_i}, i = 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.68)$$

Estimacija auto-članova 2D signala, bazirana na 2D SM-u, može biti izvedena na sljedeći način:

$$SM^e(\vec{t}, \vec{\omega}) = \begin{cases} SM(\vec{t}, \vec{\omega}, N_1, L=0), & \text{kada je } \Phi \text{ tačno} \\ SM(\vec{t}, \vec{\omega}, N_2, L), & \text{kada } \Phi \text{ nije tačno,} \end{cases} \quad (3.69)$$

pri čemu je Φ tačno ako je:

$$|SM(\vec{t}, \vec{\omega}, N_1, L=0) - SM(\vec{t}, \vec{\omega}, N_2, L)| \leq k \cdot \sigma_{xx}(\vec{t}, \vec{\omega}, N_1, L) + \sigma_{xx}(\vec{t}, \vec{\omega}, N_2, L). \quad (3.70)$$

Primjetimo da je za $L=0$ dobijen 2D spektrogram, kao specijalni slučaj 2D SM-a. Funkcija oslonca signala može biti dobijena iz $SM^e(\vec{t}, \vec{\omega})$ kao:

$$L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{SM^e(\vec{t}, \vec{\omega})}{\sigma_{xx}(\vec{t}, \vec{\omega})} - R, \quad (3.71)$$

pri čemu je R predefinisani referentni nivo koji se odabira kao određeni procenat maksimalne vrijednosti 2D SM-a.

Opisana analiza rezultira algoritmom za numeričku implementaciju koji obuhvata sljedeće korake:

1. Izračunavanje $STFT(\vec{t}, \vec{\omega})$ za dati zašumljeni signal. U slučajevima visoko nestacionarnih signala poželjna je upotreba što užeg prozora;
2. Izračunavanje 2D WD-je (za slučaj monokomponentnih signala) korišćenjem jednačine (3.44) ili 2D SM-a (za slučaj multikomponentnih signala) korišćenjem jednačine (3.66), sa dvije širine 2D prozora i vrijednosti L ;
3. Traženje optimalne distribucije za svaku tačku u skladu sa jednačinom (3.69);
4. Određivanje funkcije oslonca 2D filtra korišćenjem jednačine (3.71). Za monokomponentne signale određivanje $L_H(\vec{t}, \vec{\omega})$ može biti pojednostavljeno uzimanjem $L_H(\vec{t}, \vec{\omega}) = 1$ u tački $(\vec{t}, \vec{\omega})$ gdje je detektovan maksimum $SM^e(\vec{t}, \vec{\omega})$, za dato \vec{t} . Ista procedura može biti korišćena za multikomponentne signale sa poznatim brojem komponenti. U svim ostalim slučajevima, mora biti korišćena opšta forma (3.71).
5. Izračunavanje filtriranog signala, u skladu sa (3.43).

3.2.2. 2D filtar sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu detekcije lokalne frekvencije, [93]

Detaljni pregled postojećih, malobrojnih rješenja za filtriranje nestacionarnih 2D signala navodi na zaključak da je u toku razvoj ovih sistema. Jedan od potencijalnih razloga za tu situaciju je svakako kompleksnost kojom se ovi sistemi karakterišu. Naime, intuitivno bi se moglo rezonovati da je sve sisteme za procesiranje 1D signala moguće transformisati u odgovarajuće sisteme za procesiranje 2D signala dodavanjem još jedne dimenzije. Međutim, ovaj način razmišljanja je daleko od ispravnog. 2D signali se predstavljaju 4D reprezentacijom, što znači da se uvode još 2 dimenzije. Količina podataka sa kojom se radi je višestruko uvećana, dok je matematički aparat toliko kompleksan da je dalja ekspanzija najvećeg broja sistema za procesiranje 1D signala nemoguća.

Glavna ideja, a ujedno i naučni doprinos ove doktorske disertacije je razvoj sistema za procesiranje 2D nestacionarnih signala koji će uspješno prevazići pomenuta ograničenja, te omogućiti njihovo kvalitetno filtriranje. Uz to, razvijeni sistem ispunjava veoma visoke kriterijume, a to su mogućnost rada u realnom vremenu i mogućnost isplative hardverske realizacije.

Osnovni principi rada i algoritam na kome počiva razvijeni sistem će biti predstavljeni u nastavku. Takođe, kvalitetan rad sistema će biti verifikovan mnogobrojnim primjerima, u kojima će biti demonstriran uticaj izbora različitih parametara na performanse sistema. U posljednjoj glavi disertacije će biti detaljno obrazložena i demonstrirana razvijena hardverska realizacija ovog sistema.

Prateći proceduru za dizajn stacionarnog Wiener-ovog filtra, [68], optimalni nestacionarni 2D filtar, u slučaju kada signal $f(\vec{n})$ nije koreliran sa aditivnim šumom $\varepsilon(\vec{n})$, je definisan na sljedeći način:

$$L_H(\vec{n}, \vec{k}) = -\frac{E\{WD_\varepsilon(\vec{n}, \vec{k})\}}{E\{WD_x(\vec{n}, \vec{k})\}} \quad (3.72)$$

$E\{WD_\varepsilon(\vec{n}, \vec{k})\}$ je očekivana vrijednost 2D WD-je šuma $\varepsilon(\vec{n})$, a $E\{WD_x(\vec{n}, \vec{k})\} = E\{WD_f(\vec{n}, \vec{k})\} + E\{WD_\varepsilon(\vec{n}, \vec{k})\}$ je očekivana vrijednost 2D WD-je zašumljenog signala $x(\vec{n}) = f(\vec{n}) + \varepsilon(\vec{n})$.

U slučaju 2D FM signala $f_i(\vec{n})$, $i = 1, \dots, q$ visoko koncentrisanih u S/SF prostoru u okolini svojih LF-ja i široko rasprostranjenog bijelog šuma, funkcija oslonca 2D filtra, (3.72), odgovara kombinaciji LF-ja signala $f_i(\vec{n})$, [130]. Tada problem optimalnog filtriranja nestacionarnih 2D FM signala može biti redukovano na estimaciju LF-je u prisustvu šuma. U praksi, estimacija LF-je mora biti izvedena na bazi jedne realizacije zašumljenog signala. U S/SF analizi ovo se izvodi određivanjem FF tačaka, $\vec{k}_i, i = 1, \dots, q$, u kojima S/SFD zašumljenog signala ima lokalni maksimum, [130],

$$LF_i(\vec{n}) = \arg[\max_{\vec{k} \in Q_{\vec{k}_i}} S(SFD_x)] \vec{n} \vec{k} \quad (3.73)$$

$Q_{\vec{k}_i}$ je osnovni region u FF ravni u okolini $f_i(\vec{n})$, čija je LF označena sa $LF_i(\vec{n})$. Nedavno definisana 2D CTFWD, [91], čuva optimalnu (2D WD) reprezentaciju auto-članova signala bez prisustva kros-članova, minimizuje kompleksnost računanja i simultano optimizuje estimaciju LF-je u poređenju sa najčešće korišćenim 2D S/SFD-jama, [92]. Osim toga, 2D CTFWD je definisana na bazi istih 2D STFT elemenata korišćenih u definiciji filtriranja, (3.43), i već je implementirna u realnom vremenu, [92]. Primjetimo da implementirani algoritam uključuje, kao posebni slučaj, estimacioni algoritam trenutne frekvencije za 1D signale, [95].

Kompletan algoritam razvijenog, signal-adaptivnog S/SF sistema je predstavljen na slici 3.3. Način izračunavanja 2D CTFWD-je je detaljno pojašnjen u prvoj glavi disertacije (poglavlje 1.4.2), te će ovo poglavlje stoga biti fokusirano na estimacioni algoritam, odnosno određivanje prisustva LF-je u FF ravni.

Prisustvo LF-je se testira u FF tački (k_1, k_2) , $k_1, k_2 = -N/2+1, \dots, N/2$ za posmatranu tačku signala (n_1, n_2) , grupisanjem frekvencijsko-zavisnih elemenata 2D CTFWD-je. U pokretnu matricu Q (eng. *sliding matrix*, [91]-[94]), dimenzija $(2L+1) \times (2L+1)$ lokacija se grupišu frekvencijsko-zavisni elementi 2D CTFWD-je simetrično raspoređenih oko (k_1, k_2) , $CTFWD_x(\vec{n} \vec{k}_1 + L \vec{k}_2 + \vec{k}, \dots, CTFWD_x(\vec{n} \vec{k}_1, \dots, CTFWD_x(\vec{n} \vec{k}_1 - L \vec{k}_2 - L)$. Na ovaj način se kreira bazični region $Q_{\vec{k}_i}$, (3.73), omogućavajući estimaciju LF-je. LF se detektuje u FF tački (k_1, k_2) koja odgovara maksimalnom elementu matrice, ali samo ako je maksimalni element matrice:

(i) Centralni element matrice, odnosno element $CTFWD_x(\vec{n} \vec{k}_1)$,

(ii) Veći od uvedenog spektralnog praga S^2 , i

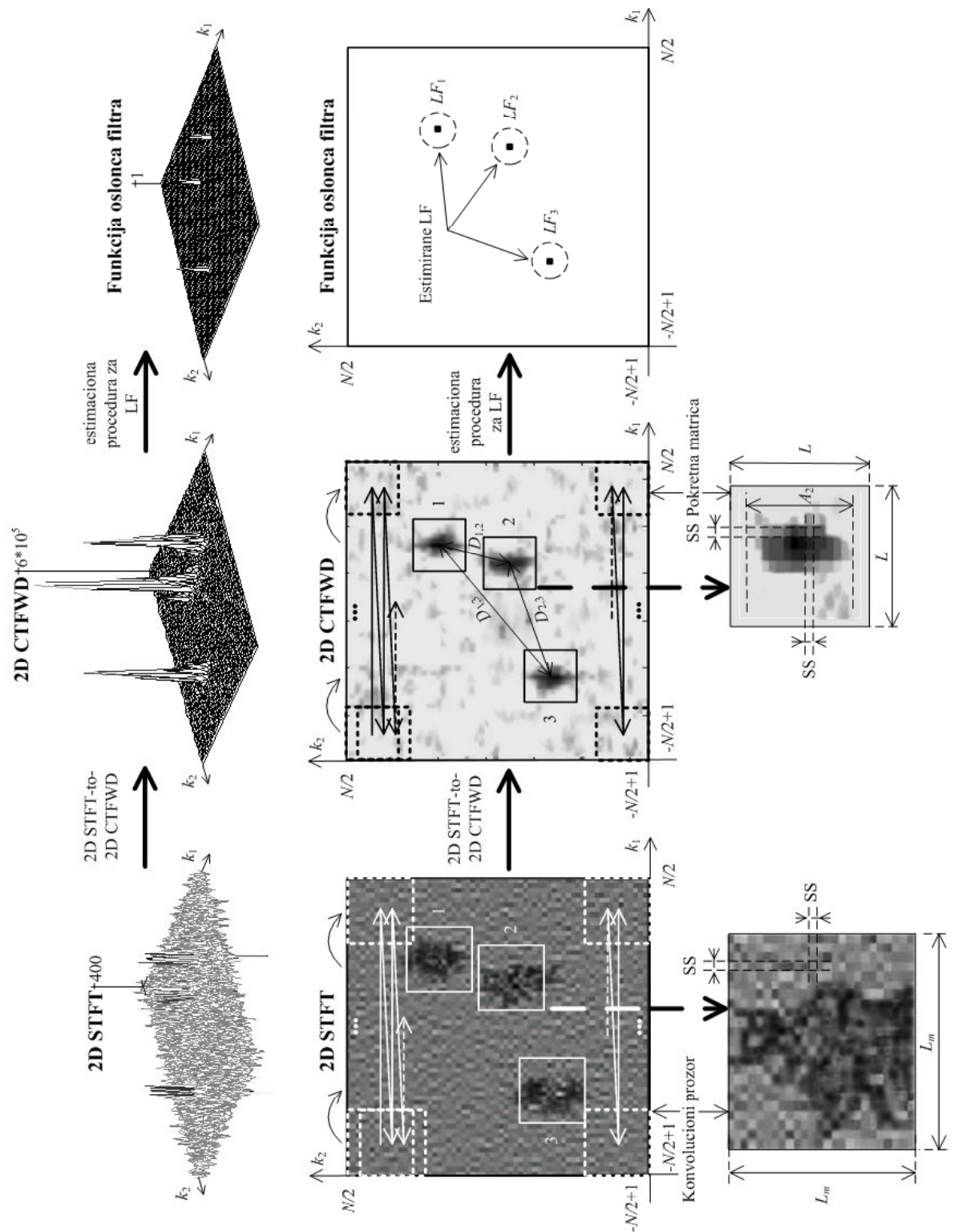
ako se dimezije pokretne matrice nalaze unutar opsega:

$$\max_{1 \leq i \leq q} \{A_{ctfwd_i}\} \leq 2L+1 < \sqrt{2} \cdot \min_{1 \leq i, j \leq q, i \neq j} |LF_i(\vec{n}) - LF_j(\vec{n})|, \quad (3.74)$$

gdje su A_{ctfwd_i} , $i=1, \dots, q$ različite širine nepreklapajućih auto-članova 2D CTFWD-je, gdje $|LF_i(\vec{n}) - LF_j(\vec{n})|$ označava udaljenost između različitih lokalnih frekvencija, $LF_i(\vec{n})$ i $LF_j(\vec{n})$, $i, j=1, \dots, q$ i $i \neq j$.

Uslov (i) kombinovan sa prvom nejednakošću iz (3.74) mora biti zadovoljen kako bi obezbjedio da:

(a) Sve FF tačke (k_1, k_2) iz posmatranog auto-člana, uključujući i pravu LF-ju, imaju odgovarajuće elemente 2D CTFWD-je unutar pokretne matrice Q , kada se ispituje postojanje LF-je u svakoj od njih. Na ovaj način, razvijena procedura obezbjeđuje eliminisanje biasa iz greške estimacije LF-je;



Slika 3.3 Algoritam razvijenog signal-adaptivnog S/SF sistema za filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala.

(b) Za svaki auto-član i svaku tačku signala (n_1, n_2) samo jedna FF tačka (k_1, k_2) može biti detektovana kao LF. Na ovaj način se redukuje uticaj frekvencijske diskretizacije na kvalitet estimacije LF-je, što je detaljno analizirano i dokazano za slučaj 1D signala u [128].

Uslov (i) kombinovan sa drugom nejednakošću iz (3.74) obezbjeđuje detekciju LF-je svake komponente signala odvojeno u posmatranoj tački signala (n_1, n_2) , omogućavajući tako estimaciju funkcije oslonca 2D filtra u slučaju multikomponentnih signala.

Uslov (ii) mora biti zadovoljen kako bi potisnuo uticaj šuma van domena auto-članova 2D CTFWD-je. Spektralni prag S^2 , koji predstavlja nekoliko procenata maksimalne vrijednosti 2D CTFWD-je, se odabira na bazi *a priori* znanja o digitalnom opsegu signala, determinisanom optimalnom iskorišćenošću upotrijebljenog A/D konvertora i memorijskih lokacija, [92].

Ukoliko su svi navedeni uslovi zadovoljeni detekcija funkcije oslonca 2D filtra rezultuje sa $L_H(\vec{n}) \vec{k} = 1$. $L_H(\vec{n}) \vec{k} = 0$ obezbjeđuje uključivanje elementa $STFT(\vec{n}) \vec{k}$ u generisanje izlaznog, filtriranog 2D signala kroz sumiranje u skladu sa definicionom jednačinom filtriranja, (3.43). U suprotnom, kada je $L_H(\vec{n}) \vec{k} = 0$, prisustvo LF-je nije detektovano u posmatranoj FF tački, te se stoga odgovarajući element 2D STFT-je ne uzima u obzir prilikom računanja izlaznog, filtriranog 2D signala.

Nakon izvršavanja u FF tački (k_1, k_2) ova procedura se ponavlja za narednu FF tačku $(k_1 + 1, k_2 + 1)$, iz iste tačke signala (n_1, n_2) . Element $CTFWD_x(\vec{n}) (k_1 + 1, k_2 + 1)$ se importuje u pokretnu matricu Q, koja se pomjera za jedno mjesto u desno preko frekvencijsko-zavisnih elemenata 2D CTFWD-je, kreirajući na taj način novi osnovni region $Q_{(k_1, k_2)}$. U opštem slučaju, za svaku tačku signala (n_1, n_2) , estimacija LF-je u realnom vremenu se obavlja kretanjem pokretne matrice preko svih frekvencijsko-zavisnih elemenata 2D CTFWD-je i računanjem LF-je u skladu sa ulaznim elementima i ovdje predloženom estimacionom procedurom.

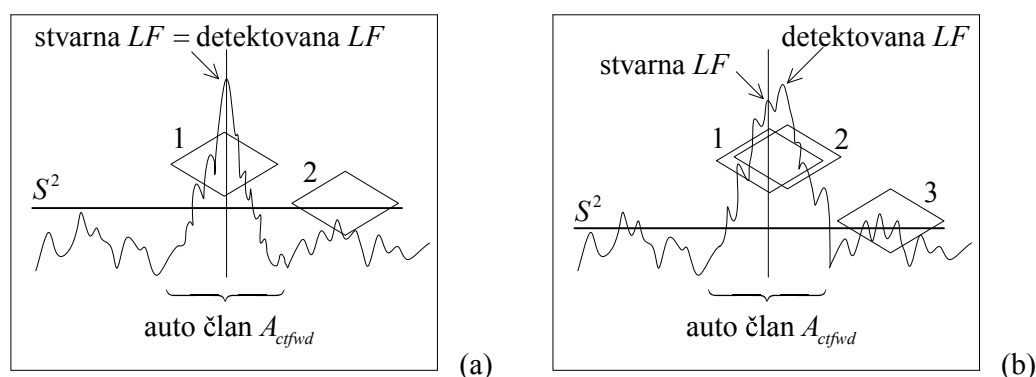
U slučaju visoko koncentrisanih 2D FM signala, 2D CTFWD rezultuje veoma uskim auto-članovima (najkoncentrisanijim auto-članovima od svih 2D S/SFD-ja). Ukoliko se komponente signala ne preklapaju u 2D FF ravni, najčešće je zadovoljena nejednakost $\min_{1 \leq i, j \leq q, i \neq j} |LF_i(\vec{n}) - LF_j(\vec{n})| \gg \max_{1 \leq i \leq q} \{A_{ctfwd_i}\}$ i stoga širok frekvencijski opseg, (3.74), kao i robusnost estimacije LF-je funkcije u odnosu na vrijednost parametra L , su dokazani (tabela 3.3). Stoga, upotreba matrice Q od svega nekoliko lokacija je najčešće dovoljna. Ipak, kada auto-članovi 2D CTFWD-je zauzimaju FF domene značajne širine (širine koje su uporedive sa minimalnom udaljenošću između različitih lokalnih frekvencija, kao što je prikazano na slici 3.3) vrijednost $2L+1$ treba biti pažljivo izabrana. Takođe, imajući u vidu da su vrijednosti $2L_m+1$ i $2L+1$ su respektivno određene u odnosu na najšire auto-članove 2D STFT-je i 2D CTFWD-je,

kao i da auto-članovi 2D STFT-je zauzimaju značajno šire FF opsege u odnosu na auto-članove 2D CTFWD-je, vrijednosti L_m i L trebaju biti izabrane tako da je $L_m > L$.

U kojim situacijama je greška predstavljenog algoritma neminovna?

Obratimo pažnju na sliku 3.4. Na njoj je predstavljen uzdužni presjek auto-člana S/SFD-je 2D signala sa okolinom u FF ravni, u proizvoljnom trenutku vremena. Prema opisanom algoritmu, po posmatranoj FF ravni se kreće pokretna matrica koja ima zadatak da detektuje prisutvo LF-je.

Na slici 3.4(a) je predstavljena ispravna detekcija prisustva LF-je u FF tački. Pokretna matrica na poziciji 1 obuhvata odbirak 2D S/SFD-je koji je, kada dopiye na centralnu poziciju pokretne matrice, veći od spektralnog praga S^2 i uzima maksimalnu vrijednost. U tim uslovima je $L_H(\vec{n}) = 1$. Pokretna matrica na poziciji 2 obuhvata isključivo odbirke šuma. Međutim, pogodno odabranim spektralnim pragom S^2 , ni jedan od odbiraka koji u domenu pokretne matrice imaju odgovarajuće elemente 2D CTFWD-je neće zadovoljiti potrebne uslove, te LF neće biti detektovana, odnosno tada je $L_H(\vec{n}) = 0$.



Slika 3.4 Uprošćeni šematski prikaz uzdužnog presjeka auto-člana S/SF distribucije 2D signala sa okolinom u FF ravni, u proizvoljnom trenutku vremena. (a) Situacija kada je LF detektovana na pravilnoj poziciji; (b) Situacija kada je stvarna LF maskirana usljed prisustva jakog šuma, što uzrokuje pogrešnu detekciju LF-je.

Na slici 3.4(b) je predstavljena pogrešna detekcija prisustva LF-je. Naime, zbog izuzetno intenzivnog šuma postoji vjerovatnoća da neki odbirak 2D S/SFD-je ima veću vrijednost od centralnog odbirka auto-člana 2D S/SFD-je. Ipak, usljed veoma visoke koncentracije auto-članova proučavanih 2D FM signala, a samim tim i velikih vrijednosti koje njihovi centralni odbirci uzimaju, postoji mali broj slučajeva kada pomenuta situacija može da se desi. Odbirci distribucije van auto-člana, odnosno odbirci šuma, za slučaj posmatranog bijelog Gaussian-ovog šuma, ne mogu uzeti veće vrijednosti od centralnog odbirka auto-člana. Odbirci samog auto-člana, s druge strane, ukoliko su dovoljno uvećani prisustvom šuma mogu postati veći od centralnog odbirka auto-člana i time onemogućiti ispravnu detekciju prisustva LF-je. Ove situacije predloženi algoritam nije u mogućnosti da riješi. Ipak, treba napomenuti da su opisane situacije izuzetno rijetke, te da tzv. "ispadi" nastaju upravo u neposrednoj blizini centralnog odbirka auto-člana, pa greške ovoga tipa nijesu značajne. Ukoliko se ipak dese, što je malo

vjerovatno, ne utiču bitnije na kvalitet filtriranja signala. Takva situacija je prikazana na slici 3.4(b). Naime, pokretna matrica na poziciji 1 obuhvata stvarnu LF-ju koja neće biti prepoznata zbog prisustva odbirka koji je veći od centralnog odbirka auto-člana. Pokretna matrica na poziciji 2 kao svoj centralni element ima odbirak koji je veći od centralnog odbirka auto-člana, te se upravo na toj pogrešnoj lokaciji detektuje prisutvo LF-je. Pokretna matrica na poziciji 3 takođe prikazuje situaciju kada se dešava pogrešna detekcija LF-je. U ovom slučaju se na poziciji odbirka šuma detektuje LF zbog toga što je uzet suviše mali spektralni prag S^2 . Ipak, ove situacije su lako rješive i podrazumijevaju pogodno odabiranje pomenutog spektralnog praga.

Greška u estimaciji LF-je se može desiti i usljed frekvencijske diskretizacije. Naime, ukoliko je frekvencijska diskretizacija izvršena tako da se stvarna pozicija centralnog odbirka auto-člana nalazi između dvije susjedne FF tačke, prisustvo LF-je će biti detektovano u jednoj od te dvije FF tačke (razvijen metod neće dozvoliti detekciju u obje tačke, već samo u onoj u kojoj auto-član ima veći intenzitet, što značajno redukuje grešku frekvencijske diskretizacije). Ova greška u principu ne može značajnije uticati na kvalitet filtriranja, jer maksimalno odstupanje koje može da izazove je jednako razmaku između dvije susjedne FF tačke (koje je, u praksi, najčešće veoma malo).

U cilju verifikacije razvijenog metoda posmatrani su testni monokomponentni, dvokomponentni i trokomponentni 2D signali:

$$f_1(n_1T, n_2T) = e^{j(96\pi((0.6))^{1.5}((0.5))^{1.5})} e^{-n_1T^2 + n_2T^2}, \quad (3.75)$$

$$f_2(n_1T, n_2T) = e^{j(96\pi((0.6))^{1.5}((0.5))^{1.5})} e^{j(\cos(2\pi\cos(2))\cos(2))} e^{-j\pi n_1T - \pi n_2T}, \quad (3.76)$$

$$f_3(n_1T, n_2T) = e^{j(96\pi((0.6))^{1.5}((0.5))^{1.5})} e^{j(\cos(2\pi\cos(2))\cos(2))} e^{-j\pi n_1T + j\pi n_2T} + e^{j\pi n_1T + j\pi n_2T}. \quad (3.77)$$

Navedeni signali su posmatrani u vremenskom intervalu $0.1 \leq n_1T \leq 0.6$, $0.1 \leq n_2T \leq 0.6$. Period odabiranja je $T=0.5/128$, a veličina Hanning-ovog prozora $w(\vec{n})$ je $N \times N = 64 \times 64$. Korišćeni su sljedeći parametri prilikom primjene opisanog metoda filtriranja: $R^2 = 0.05 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{|STFT_x(\vec{n}, \vec{k})|^2\}$, $S^2 = 0.05 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{CTFWD_x(\vec{n}, \vec{k})\}$, $2L_m+1=11$ i $2L+1=9$.

Najprije su navedeni signali posmatrani u idealnom, bešumnom slučaju, odnosno izvršeno je filtriranje čistih signala (3.75), (3.76), (3.77). Rezultati njihovog filtriranja su prikazani na slici 3.5. Imajući u vidu da je slučaj bešumnih signala ipak idealan, te se ne susrijeće u praksi, posmatrani signali su dalje analizirani u prisustvu aditivnog, bijelog, Gaussian-ovog šuma. Razmatrane su različite vrijednosti ulaznog odnosa signal/šum¹⁶, SNR_{ul} , a rezultati filtriranja su prikazani na slikama 3.6, 3.7 i 3.8.

U tabeli 3.2 su dati ostvareni izlazni odnosi signal/šum, SNR_{out1} , SNR_{out2} i SNR_{out3} , i njima odgovarajuća poboljšanja, IMP_1 , IMP_2 i IMP_3 , za razmatrane testne 2D signale, (3.75), (3.76) i (3.77), filtrirane upotrebom predstavljenog metoda. Imajući u vidu teorijski maksimalna poboljšanja koja mogu biti ostvarena filtriranjem ovih signala:

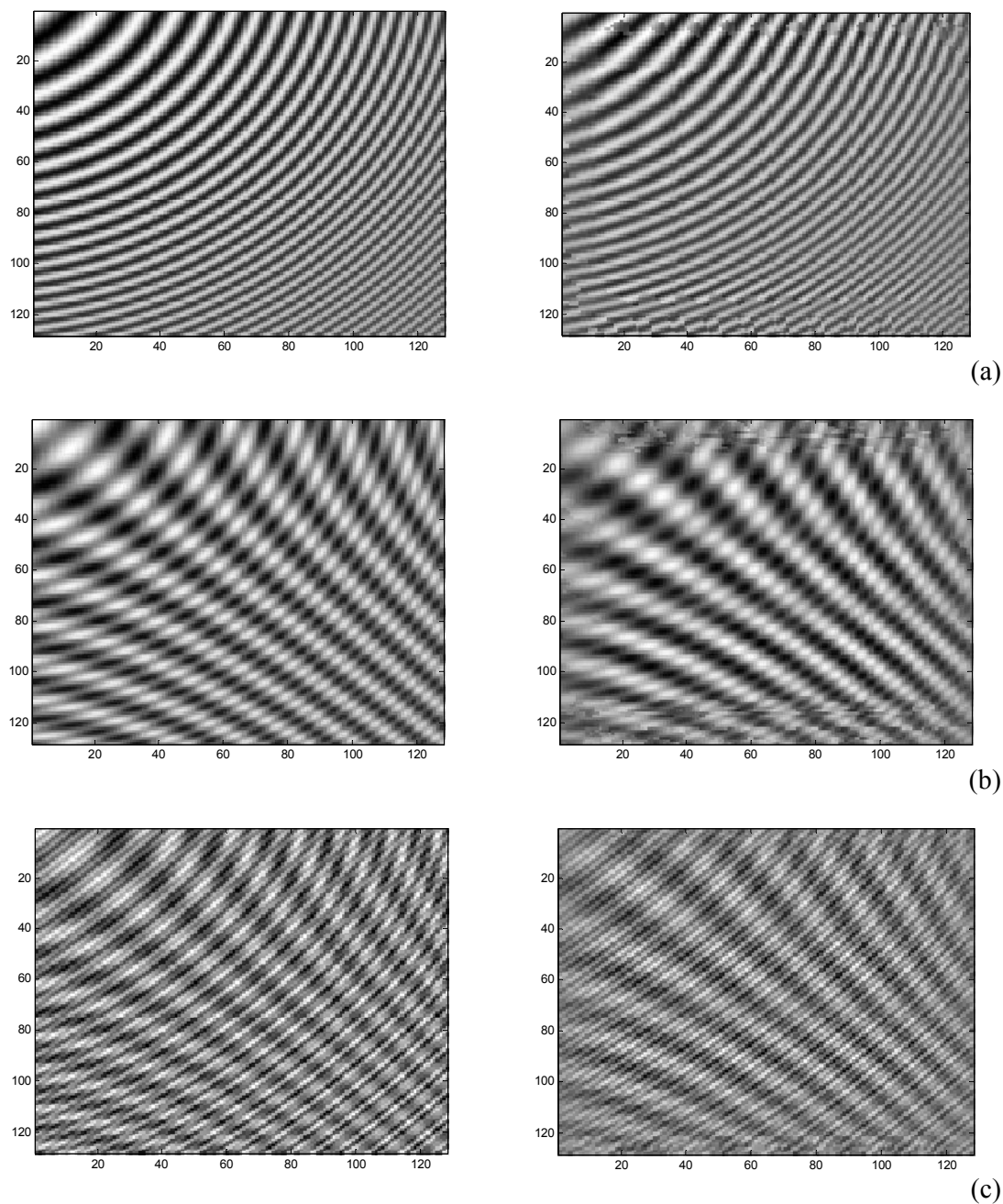
¹⁶ Ulazni odnos signal/šum se izračunava kao $SNR_{ul} = 10 \log_{10}(P_f/P_e)$, pri čemu P_f predstavlja snagu čistog signala $f(\vec{n})$, a P_e snagu šuma $\varepsilon(\vec{n})$.

- za monokomponentni signal: $\max\{IMP\}=10\log_{10}(N \times N/1)=36.1236$ dB,
- za dvokomponentni signal: $\max\{IMP\}=10\log_{10}(N \times N/2)=33.1133$ dB,
- za trokomponentni signal: $\max\{IMP\}=10\log_{10}(N \times N/3)=31.3524$ dB,

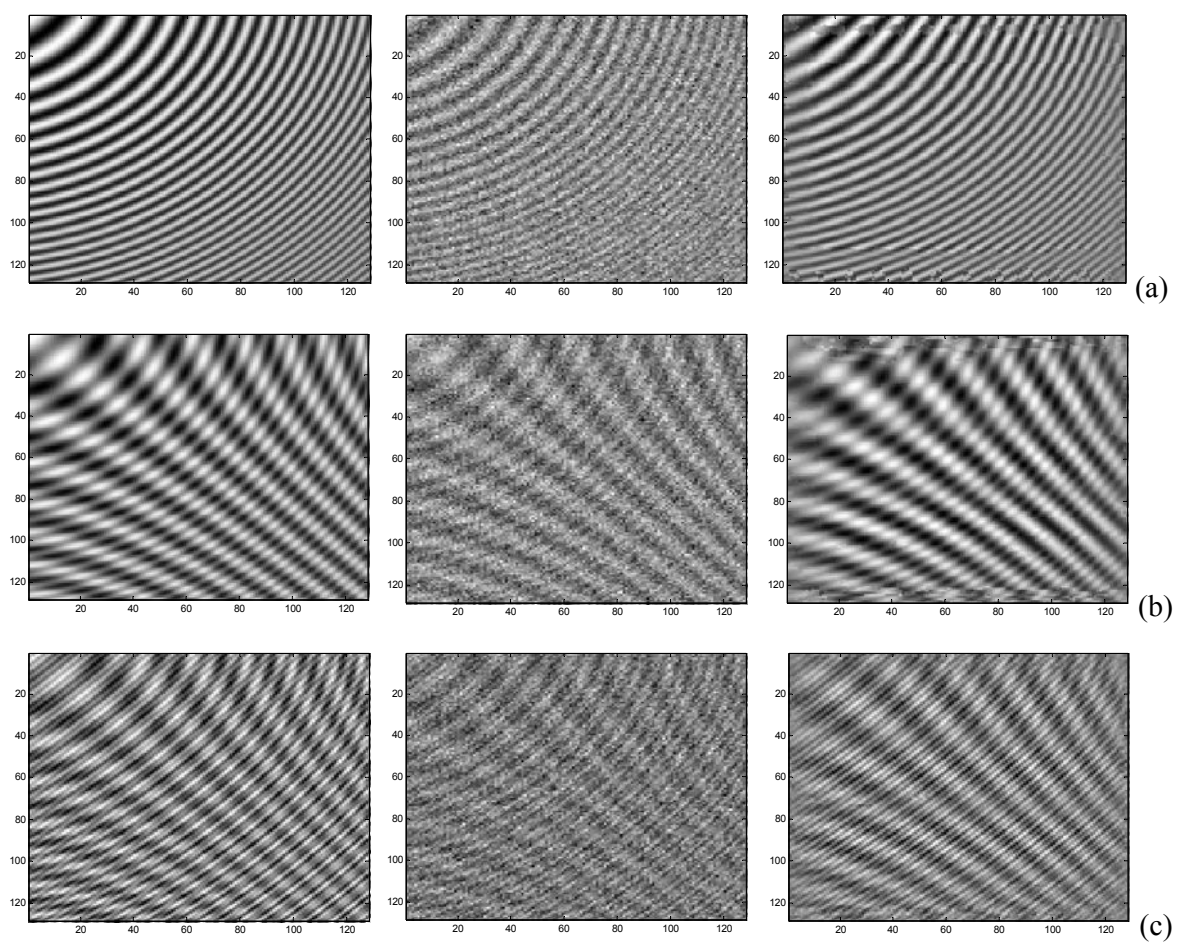
uočavamo da su ostvarena poboljšanja veoma velika, te da predstavljeni metod zaista obezbeđuje izuzetno kvalitetno filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala.

Tabela 3.2 Izlazni odnosi signal/šum, SNR_{out1} , SNR_{out2} i SNR_{out3} , i odgovarajuća poboljšanja IMP_1 , IMP_2 i IMP_3 za testne 2D signale (3.75), (3.76) i (3.77) filtrirane opisnim metodom.

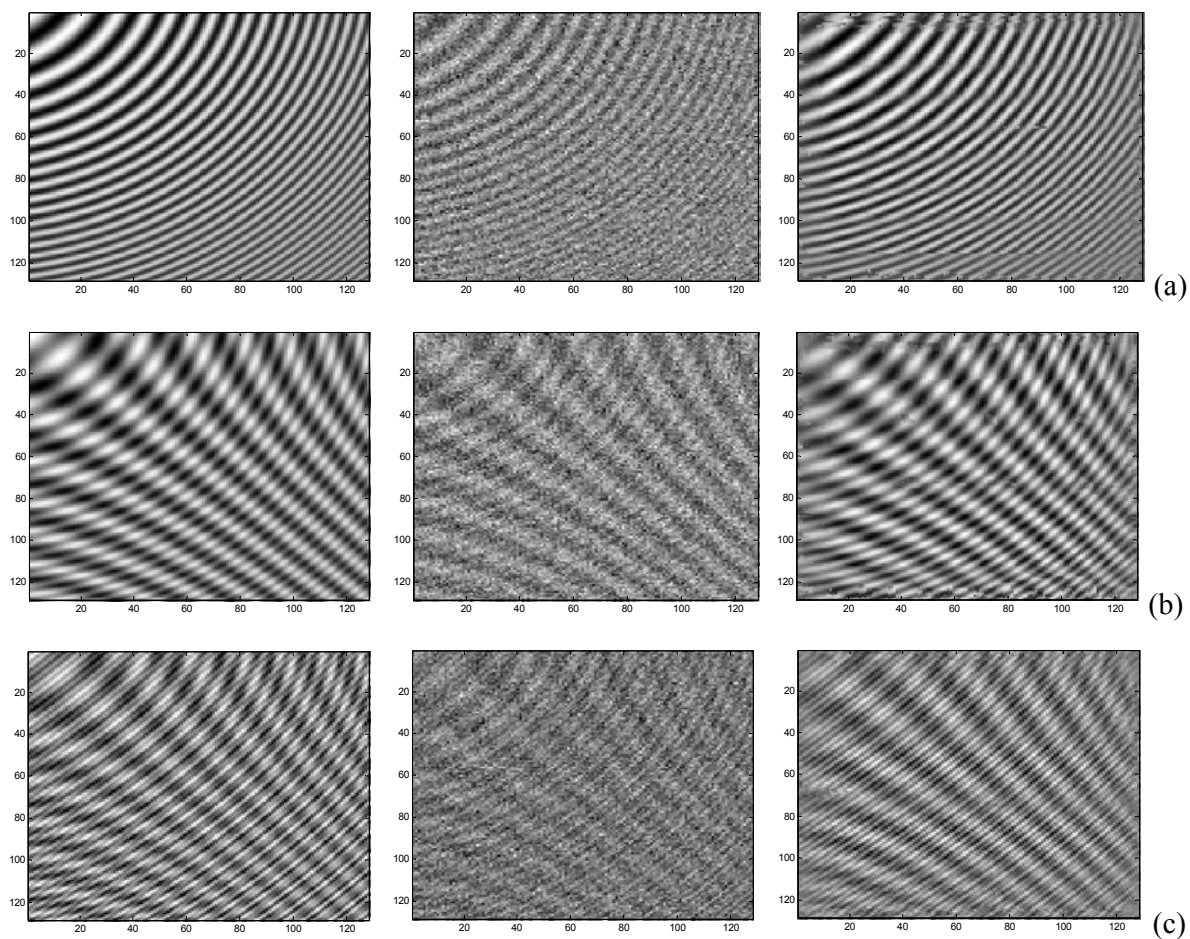
SNR_{in} [dB]	SNR_{out1} [dB]	IMP_1 [dB]	SNR_{out2} [dB]	IMP_2 [dB]	SNR_{out3} [dB]	IMP_3 [dB]
3.0	36.82	33.82	34.13	31.13	33.02	30.02
1.0	32.47	31.47	30.81	29.81	30.52	29.52
-2.0	27.41	29.41	24.62	26.62	23.44	25.44



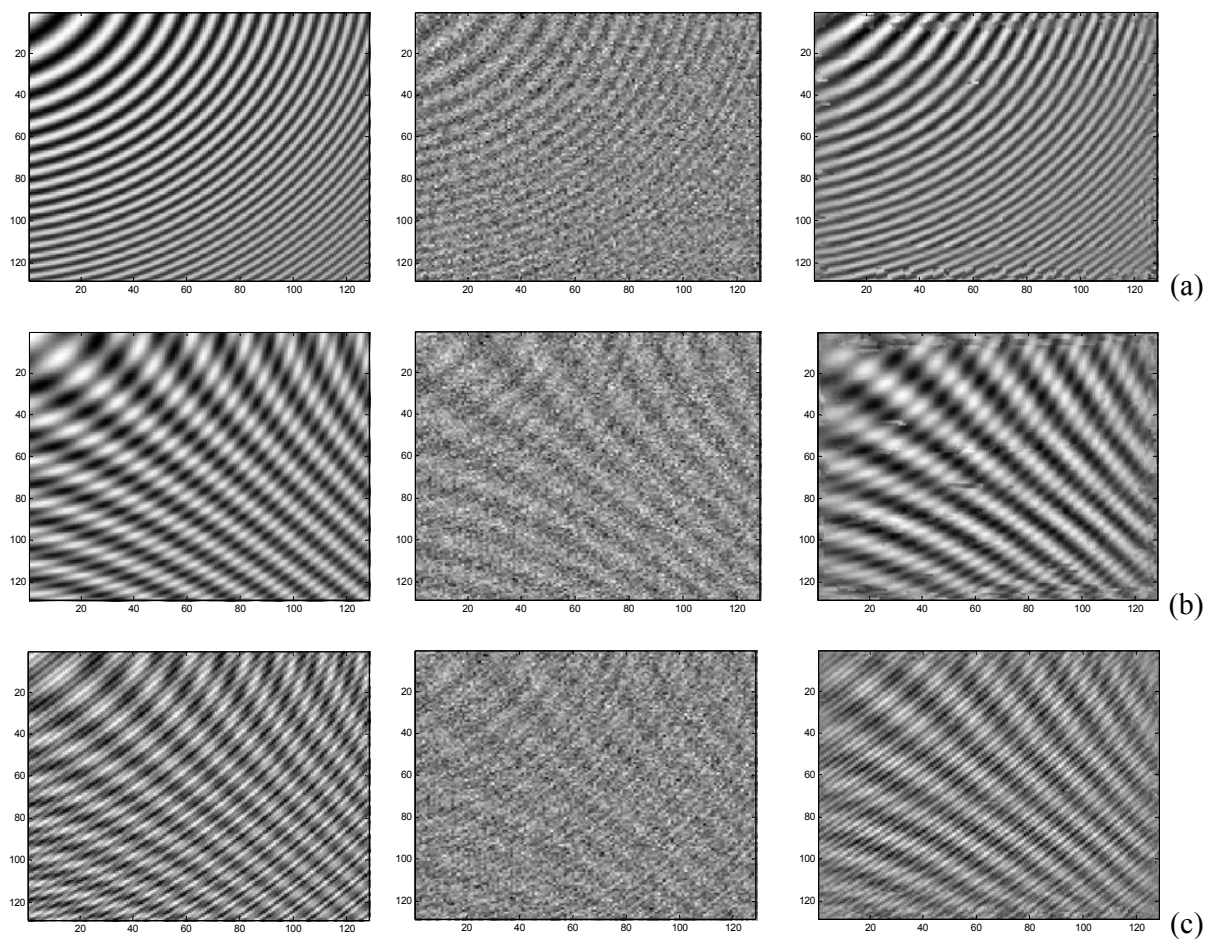
Slika 3.5 (a) Čisti i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti i filtrirani trokomponentni signal (3.77).



Slika 3.6 (a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.76).
Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{ul}=3\text{dB}$.



Slika 3.7 (a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.77).
Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{in}=1\text{ dB}$.

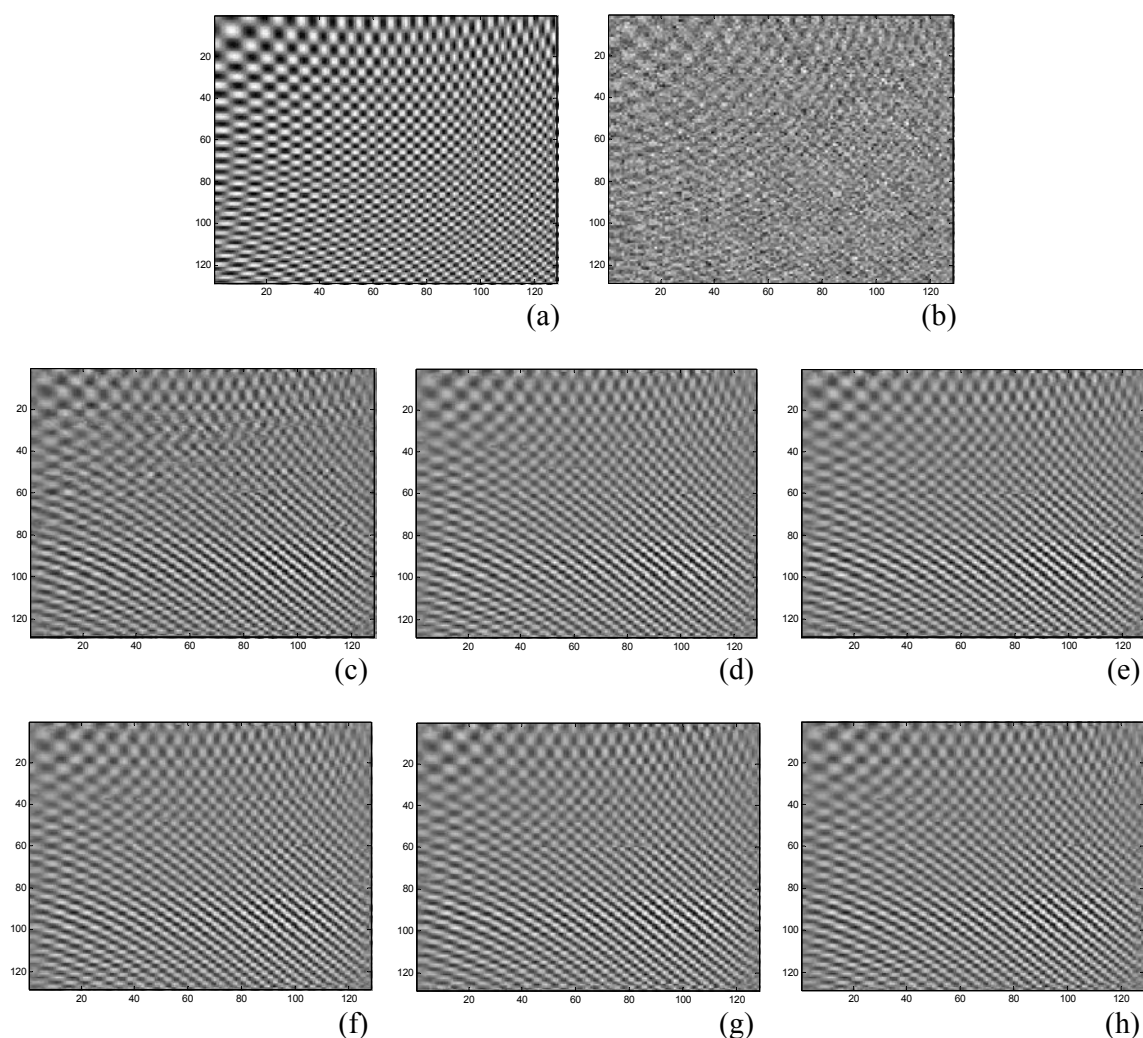


Slika 3.8 (a) Čisti, zašumljeni i filtrirani monokomponentni signal (3.75), (b) Čisti, zašumljeni i filtrirani dvokomponentni signal (3.76), (c) Čisti, zašumljeni i filtrirani trokomponentni signal (3.77).
Ulazni odnos signal/šum je isti za sva tri slučaja i iznosi $SNR_{ul} = -2\text{dB}$.

Kako bi bila ispitana robusnost predloženog metoda u odnosu na veličinu pokretne matrice $2L+1$, prikazani su rezultati filtriranja trokomponentnog, visoko nestacionarnog testnog signala za različite vrijednosti ovog parametra.

$$f_4(n_1T, n_2T) = e^{j(130\pi(0.001 + 0.001\cos(2\pi n_1T/2)) + 10\pi(0.001 + 0.001\cos(2\pi n_2T/2)))} \cdot e^{j\pi(n_1T + n_2T)^2}, \quad (3.78)$$

Navedeni signal je posmatran u vremenskom intervalu $0.1 \leq n_1T \leq 0.6$, $0.1 \leq n_2T \leq 0.6$. Period odabiranja je $T=0.5/128$, a veličina Hanning-ovog prozora $w(\vec{n})$ je $N \times N = 64 \times 64$. Ulazni odnos signal/šum je $SNR_{ul} = -0.5$ dB. Korišćeni su sljedeći parametri prilikom primjene opisanog metoda filtriranja: $R^2 = 0.05 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{ |STFT_x(\vec{n}, \vec{k})|^2 \}$, $S^2 = 0.1 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{ CTFWD_x(\vec{n}, \vec{k}) \}$, $2L_m + 1 = 11$, dok $2L + 1$ redom uzima vrijednosti 5, 7, 9, 11, 13 i 15.



Slika 3.9 (a) Čisti trokomponentni signal (3.78), (b) Zašumljeni trokomponentni signal, $SNR_{ul} = -0.5$ dB (c) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=5$, (d) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=7$, (e) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=9$, (f) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=11$, (g) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=13$, (h) Filtrirani trokomponentni signal (3.78) za $2L+1=15$.

Tabela 3.3 Izlazni odnosi signal/šum, SNR_{out1} , SNR_{out2} , SNR_{out3} , SNR_{out4} , SNR_{out5} , SNR_{out6} i odgovarajuća poboljšanja IMP_1 , IMP_2 , IMP_3 , IMP_4 , IMP_5 i IMP_6 za testni 2D signal (3.78) filtriran opisnim metodom, za različite vrijednosti dimenzija pokretne matrice $2L+1$ i konstantan ulazni odnos signal/šum, $SNR_{in}=-0.5$ dB.

SNR_{in} [dB]	$2L+1=5$		$2L+1=7$		$2L+1=9$	
	SNR_{out1} [dB]	IMP_1 [dB]	SNR_{out2} [dB]	IMP_2 [dB]	SNR_{out3} [dB]	IMP_3 [dB]
	28.41	28.91	28.94	29.44	29.16	29.66
	$2L+1=11$		$2L+1=13$		$2L+1=15$	
	SNR_{out4} [dB]	IMP_4 [dB]	SNR_{out5} [dB]	IMP_5 [dB]	SNR_{out6} [dB]	IMP_6 [dB]
	29.56	30.06	29.93	30.43	29.12	29.62

Posmatrajmo tabelu 3.3. U njoj su prikazani rezultati filtriranja (izlazni odnosi signal/šum i odgovarajuća poboljšanja) testnog 2D trokomponentnog signala (3.78) u uslovima konstantnog ulaznog odnosa signal/šum $SNR_{in}=-0.5$ dB, i različitih vrijednosti dimenzija pokretne matrice. Uočimo da se ostvareni rezultati blago razlikuju, što implicira robusnost razvijenog metoda sa aspekta ovoga važnog parametra. Takođe, uočimo da poboljšanje raste uzimanjem većeg prozora $2L+1$, jer se na taj način postiže efikasnije eliminisanje prisustva šuma. Međutim, taj rast se zaustavlja kod veličine $2L+1=13$, nakon čega poboljšanje počinje da opada. Dakle, zaključujemo da je $2L+1=13$ optimalna veličina prozora za analizirani signal, te da dalje povećanje ovih dimenzija degradira kvalitet filtriranja. Razlog za to je očigledan: kako je signal multikomponentni (trokomponentni), jasno je da se uzimanjem većih dimenzija pokretne matrice dolazi u opasnost da se njome obuhvate odbirci dva različita auto-člana signala, slika 3.3, što bi rezultovalo maskiranjem auto-člana manjeg intenziteta.

Na bazi svega navedenog, zaključuje se da razvijeni metod pokazuje sljedeće karakteristike:

1. pruža kvalitetno filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala u uslovima prisustva veoma intenzivnog aditivnog, bijelog Gaussian-ovog šuma (razmatrani su slučajevi u kojima je šum i do 2 puta jači od signala);
2. omogućava izvršavanje u realnom vremenu, što ga čini veoma atraktivnim za praktičnu primjenu;
3. podržava rad kako sa monokomponentnim, tako i sa multikomponentnim 2D signalima;
4. ne zavisi od dužine procesiranog signala;
5. robusan je sa aspekta izbora svojih parametara, tabele 3.2 i 3.3;
6. moguće ga je hardverski implementirati (što je i učinjeno u petoj glavi ove disertacije).

Navedeni zaključci su potkrijepljeni testiranjem metoda za više različitih 2D signala (monokomponentni, dvokomponentni, trokomponentni) u prisustvu različitih količina bijelog Gaussian-ovog šuma, kao i za različite vrijednosti krucijalnog parametra sistema.

Hardverska realizacija filtara baziranih na vremensko-frekvencijskoj analizi

Metode TF analize signala, a posebno metode TV filtriranja signala, nalaze svoju punu primjenu u velikom broju naučnih oblasti, ali i u praksi. Iz tog razloga se javlja potreba za razvojem hardvera koji će u realnom vremenu izvršavati teorijski razvijene algoritme, odnosno hardvera koji će u punom smislu riječi omogućiti primjenljivost teorijskog znanja.

U prvoj glavi disertacije su opisane neke od najznačajnijih TF distribucija, a u drugoj glavi su predstavljene mogućnosti njihove upotrebe u dizajniranju TV filtara. U zavisnosti od korišćenih TF distribucija varira kvalitet filtara koji na njima zasnivaju.

U ovoj glavi će biti zaokružena priča o TV filtrima baziranim na TF analizi, tako što će biti dat pregled postojećih *online* algoritama njihove implementacije, kao i puna hardverska realizacija onih filtara za koje je razvijena.

Primjetićemo, u nastavku, da se pojedini TV filtri zadržavaju na softverskom nivou, to jest da njihova hardverska realizacija nije moguća, ili je pak suviše kompleksna što je čini neisplativom na više načina. Takođe, određeni filtri za koje je razvijen odgovarajući hardver nijesu u mogućnosti da obavljaju svoju funkciju u realnom vremenu, što predstavlja značajno ograničenje. Na kraju će biti predstavljeni i oni TV filtri čija je hardverska realizacija efikasna i, što je bitno, primjenljiva u realnom vremenu.

Napravimo kratak osvrt i na dostupne i najčešće korišćene tehnologije razvoja ovakvih sistema.

Praktična realizacija je moguća korišćenjem različitih tehnologija, kao što su rješenja bazirana na PC-ju ili DSP-ju koji rade sa posebnim softverom. Ovakav način realizacije nije upotrebljiv za obradu u realnom vremenu, pošto je uglavnom zasnovan na Von Neumann-ovoj arhitekturi, koja značajno redukuje brzinu rada.

S druge strane, postoje ASIC (*Application Specific Integrated Circuits*) i FPGA (*Field Programmable Gate Array*) čipovi, koja dizajnerima nude brojne mogućnosti. ASIC čipovi predstavljaju visoko integrisana kola izrađena za tačno određenu namjenu. Ova tehnologija se danas odomaćila u hardverskim implementacijama mnogih uređaja iz prostog razloga što bi

dizajniranje standardnim komponentama dovelo do glomaznih kola. FPGA čipovi su takođe visoko integrisana kola, ali za razliku od ASIC čipova nijesu programirani u vrijeme proizvodnje. Kao što samo ime ukazuje, FPGA se može programirati od strane korisnika koji raspolažu odgovarajućim znanjem i alatima za to. ASIC čipovi se, nakon proizvodnje, ne mogu više mijenjati. Stoga dizajneri moraju biti potpuno sigurni u svoj dizajn, naročito kada su u pitanju ASIC čipovi koji se proizvode u velikim količinama. Programabilna priroda FPGA čipova dozvoljava proizvođaču da ispravi eventualne greške, pa čak i da razvija *patch*-eve i *update*-te za prodane proizvode. Ova osobina čini FPGA čipove moćnim alatom za razvijanje različitih prototipova od kojih se kasnije prave ASIC čipovi. U toku dizajniranja ASIC čipova resursi su fiksni, te postoji veoma mali gubitak materijala. Nasuprot njima, FPGA čipovi sadrže određeni broj tranzistorskih elemenata koji se moraju ugraditi u dizajn, iako se nikada ne iskoriste. Ovo uslovljava veće troškove dizajniranja FPGA čipova, u odnosu na odgovarajuće ASIC čipove. Međutim, ukoliko posmatramo cijenu čipova u odnosu na obim proizvodnje dolazi se do podatka da su FPGA čipovi jeftiniji od ASIC čipova, ako je riječ o malom obimu proizvodnje. FPGA čipove karakteriše osobina da ih je moguće veoma brzo razviti, dok kod ASIC čipova to nije slučaj. Osim toga, razvoj ASIC čipova zna da bude veoma skup. Prema tome, FPGA čipovi sve više preuzimaju aplikacije koje su skupe za izradu pomoću ASIC tehnologije.

FPGA čipovi donose novi pristup implementaciji ASIC čipova, ali tako da se zadovoljavaju kriterijumi visokog stepena integracije i mogućnosti programiranja od strane korisnika. Definisanje unutrašnje strukture FPGA komponente se vrši pomoću hardverskog programskog jezika (HDL - *Hardware Description Language*) ili šematskih dijagrama. FPGA komponente se mogu programirati tako da obavljaju bilo koju logičku funkciju. Mogućnost programiranja od strane korisnika nosi sa sobom probleme koji se ogledaju u velikoj gustini pakovanja čipa, a samim tim i u smanjenju performansi. Kako bi se ovi problemi izbjegli, dizajneri prave visoko funkcionalne logičke blokove, poznatije kao *Look-up* tabele (LUT), koji smanjuju ukupan broj logičkih blokova, a samim tim i broj programabilnih veza između njih.

Zbog razumne cijene, mogućnosti korisničkog programiranja, dostupnosti softverske podrške od strane većeg broja razvojnih sistema za PC-je i radne stanice pod Windows-om, visokog stepena paralelizma na velikim brzinama, niske potrošnja energije, kao i mogućnosti direktnog prevođenja u ASIC čipove, FPGA preuzima primat u dizajniranju pomenutih sistema. Takođe, za razliku od prvih familija koje su se pojavile na tržištu, današnji FPGA čipovi nude ne samo mnoštvo logičkih ćelija, već i ogromne registarske blokove i memorijske nizove. To je moguće iskoristiti za pravljenje moćnih specijalizovanih paralelnih jedinica za obradu, kao što su sabirači, multiplikatori, pomjerački registri i slično. Interni memorijski blokovi (RAM, ROM, FIFO itd.) su korisni za brzu interkonekciju između paralelnih struktura, kao i za generisanje kontrolnih signala i konfigurisanje sistema. Stoga je FPGA tehnologija odabrana prilikom realizacije sistema razvijenih u ovoj disertaciji, a za definisanje unutrašnje strukture čipa je korišćen jedan od dominantnih hardverskih programskih jezika VHDL.

4.1. Online algoritmi linearnih TV filtara

U drugoj glavi disertacije su predstavljena dva načina dizajniranja LTV filtara, [10], [59], [150]-[152]. Navedene su mogućnosti njihovog eksplicitnog, [32], [33], [35], [38]-[40], [42], i implicitnog dizajniranja, [2], [33], [42], [77], [153]-[156].

Klasična rješenja za filtriranje nestacionarnih 1D signala koja se karakterišu eksplicitnim dizajnom su Zadeh-ov filter i Weyl-ovi filteri, dok implicitni način dizajna koriste STFT i *multiwindow* STFT filter, Gabor-ov i *multiwindow* Gabor-ov filter, kao i projekcioni filter.

Za svaki od navedenih filtara će u nastavku biti analizirana i mogućnost njihove *online* implementacije. Poseban akcenat će biti stavljen na resurse (funkcionalne i memorijske komponente) koji su neophodni za realizaciju razmatranih dizajna.

Termin *online* implementacija podrazumijeva da su broj operacija i neophodna memorija po odbirku signala fiksni i nezavisni od ukupne dužine signala. Takođe, u posmatranom trenutku vremena n_0 , ulazni signal $x(n)$ i TF težinska funkcija $M(n, \theta)$ moraju biti poznati samo unutar lokalnog vremenskog intervala fiksne dužine u okolini vremenskog trenutka n_0 .

4.1.1. Zadeh-ov filter

Online implementaciju Zadeh-ovog filtra H_Z u proizvoljnom trenutku vremena n , je moguće sažeti u sljedeće korake:

1. Određivanje frekvencijski diskretnog impulsnog odziva filtra - vektora g_n dužine N , kao IDFT-je težinske funkcije $M(n, k)$, u odnosu na k :

$$g_Z(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} M(n, k) e^{j2\pi \frac{k}{N} m}, \quad m = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1; \quad (4.1)$$

2. Izračunavanje izlaznog signala $y(n)$ u skladu sa definicionom jednačinom:

$$y(n) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} g_Z(n, m) x(n-m) = g_n^T x_n. \quad (4.2)$$

Online Zadeh-ov filter zadovoljava identitet $y(n)=x(n)$ za $M(n, k)=1$.

S obzirom da jednačina izlaznog signala $y(n)$ uključuje buduće vrijednosti odbiraka ulaznog signala $x(n+1)$, $x(n+2)$, ..., $x(n+N/2)$, neophodno je uvođenje vremenskog kašnjenja od $N/2$ odbiraka. U proizvoljnom vremenskom trenutku n , algoritam zahtijeva IDFT-ju dužine N i unutrašnji proizvod dva vektora dužine N . Stoga je računaska složenost *online* Zadeh-ovog filtra $O(N+N \log N)$ operacija po odbirku izlaznog signala.

Kašnjenje od $N/2$ implicira da $N/2$ prethodnih impulsnih odziva g_{n-1} , g_{n-2} , ..., $g_{n-N/2}$ moraju biti memorisani. Ukupno, potrebno je $N^2/2+N$ memorijskih lokacija ($N/2$ vektora impulsnih odziva g_i dužine N i vektor ulaznog signala x_n dužine N).

4.1.2. Weyl-ovi filtri (*Minimum energy* Weyl-ov filter, ulazni i izlazni *halfband* Weyl-ov filter, *halfband* Weyl-ov filter i aproksimativni Weyl-ov filter)

Online implementaciju *minimum energy* Weyl-ovog filtra u proizvoljnom trenutku vremena n , je moguće sažeti u sljedeće korake,

1. Ažuriranje matrice G_n (dimenzija $N \times N$) čija je glavna dijagonala \tilde{g}_n , a i -ta kolona, $i=1,2,\dots,N$, IDFT (u odnosu na k) dijela TF težinske funkcije $M(n-N/2+i, k)$ dužine N . Ažuriranje se vrši dodavanjem nove kolone koja se izračunava kao IDFT (u odnosu na k) dijela TF težinske funkcije $M(n+N/2, k)$:

$$\tilde{g}_w(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} M(n, k) e^{j2\pi \frac{k}{N} m}, \quad m = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1, \quad (4.3)$$

i uklanjanjem najstarije kolone. Iz tako ažurirane matrice G_n se preuzima vektor \tilde{g}_n ;

2. Izračunavanje izlaznog signala $y(n)$, u skladu sa definicionom jednačinom:

$$y(n) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_w(n-m, m) x(n-m) = \tilde{g}_n^T x_n. \quad (4.4)$$

S obzirom da jednačina izlaznog signala $y(n)$, (4.4), uključuje buduće vrijednosti odbiraka ulaznog signala $x(n+2), x(n+4), \dots, x(n+N)$, kauzalna operacija zahtijeva uvođenje vremenskog kašnjenja od N odbiraka. U svakom trenutku vremena n , algoritam zahtijeva IDFT-ju dužine N i unutrašnji proizvod dva vektora dužine N . Stoga je računaska kompleksnost *online minimum energy* Weyl-ovog filtra (uključujući računanje vektora \tilde{g}_n) $O(N+N \log N)$ operacija po odbirku izlaznog signala, što je ekvivalentno *online* Zadeh-ovom filtru.

Zbog kašnjenja od N odbiraka, neophodno je memorisati N prošlih vektora $\tilde{g}_{n-1}, \tilde{g}_{n-2}, \dots, \tilde{g}_{n-N}$. Dakle, potrebno je ukupno N^2+2N memorijskih lokacija (N vektora \tilde{g}_i dužine N , $2N$ odbiraka sadržanih u x_n i x_{n-1}). Navedeni memorijski zahtjevi, ipak, mogu biti redukovani.

Smjenom $n \rightarrow n+N-i$ u definicionoj jednačini izlaznog signala (4.4) dobijamo:

$$y(n+N-i) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_w(n+N-i-m, m) x(n+N-i-m). \quad (4.5)$$

Posmatrajmo sada parcijalne sume iz jednačine (4.5),

$$s_i(n) = \sum_{m=N/2-i}^{N/2-1} \tilde{g}_w(n+N-i-m, m) x(n+N-i-m), \quad i=1,2,\dots,N.$$

Zaključujemo da je $y(n) = s_N(n)$, odnosno da je izlazni signal $y(n)$ dobijen kao N -ta parcijalna suma. Parcijalna suma može biti izračunata na rekurzivan način u skladu sa:

¹⁷ Potrebna su oba vektora x_n i x_{n-1} , jer svaki od njih sadrži samo svaki drugi odbirak ulaznog signala $x(n)$.

$$s_i(n) = \begin{cases} s_{i-1}(n) + \tilde{g}_w(n + \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, i) x(n+i) & i = 1, \dots, N \\ \tilde{g}_w(n + \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, i) x(n+i) & i = 0 \end{cases}$$

Zbog kauzalnosti je potrebno uvesti kašnjenje od N odbiraka u definiciju i rekurzivno izračunavanje parcijalne sume. U skladu sa time, u svakom trenutku vremena n moramo memorisati $N/2$ prošlih odbiraka impulsnog odziva $\tilde{g}_w(n/2, N)$, $n/2, \dots, N + m, \dots, \tilde{g}_w(n/2 - m)$ (sa $m = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$) dužine N , kao i vektor parcijalne sume dužine N ($s_1(n) \ s_2(n) \dots s_N(n)$) i vektor ulaznog signala dužine N ($x(n-N+1) \ x(n-N+2) \dots x(n)$). Ovo rezultira sa $N^2/2+2N$ memorijskih lokacija, što je približno u pola manje memorije nego za ranije opisanu direktnu implementaciju. Računska kompleksnost, odnosno broj operacija po odbirku izlaznog signala, ovom modifikacijom nije redukovana, te se zadržava na ranije izvedenom nivou od $O(N+N \log N)$.

Ulazni *halfband* Weyl-ov filter je zapravo *minimum energy* Weyl-ov filter kojem prethodi *halfband* restrikcija ulaznog signala. Stoga, ovaj filter može koristiti *online* implementaciju *minimum energy* Weyl-ovog filtra. Potreban nam je samo dodatni FIR ili IIR filter (distorzija usljed grupnog kašnjenja mora biti mala, imajući u vidu da utiče na TF strukturu signala) koji aproksimira *halfband* restrikciju, odnosno idealni niskopropusnik ili propusnik opsega učestanosti definisan sa (2.25).

Izlazni *halfband* Weyl-ov filter je zapravo *minimum energy* Weyl-ov filter kojem sledi *halfband* restrikcija izlaznog signala. To znači da ovaj filter može koristiti *online* implementaciju *minimum energy* Weyl-ovog filtra. Razliku čini samo dodatni FIR ili IIR filter (kao i u prethodnom slučaju, distorzija usljed grupnog kašnjenja mora biti mala) koji aproksimira *halfband* restrikciju, odnosno idealni niskopropusnik ili propusnik opsega učestanosti definisan sa (2.25).

Halfband Weyl-ov filter je *minimum energy* Weyl-ov filter kojem i prethodi i sledi *halfband* restrikcija. Dakle, moguće je koristiti *online* implementaciju *minimum energy* Weyl-ovog filtra. Kao i u prethodna dva slučaja, potrebni su samo dodatni FIR ili IIR filteri (distorzija usljed grupnog kašnjenja mora biti mala, imajući u vidu da utiče na TF strukturu signala) koji aproksimiraju *halfband* restrikciju, odnosno idealni niskopropusnici ili propusnici opsega učestanosti definisani sa (2.25).

Na kraju, razmotrimo i *online* implementaciju aproksimativnog *halfband* Weyl-ovog filtra. Ona se može predstaviti sljedećim nizom koraka, za svaki pododabrani trenutak vremena $n=2l$:

1. Ažuriranje matrica $G_{2l}^{(p)}$ (parni odbirci impulsnog odziva, odnosno $\tilde{g}_w(2l-2i, 2i)$) i $G_{2l}^{(o)}$ (neparni odbirci impulsnog odziva, odnosno $\tilde{g}_w(2l-2i-1, 2i+1)$) dodavanjem novih kolona koje se izračunavaju upotrebom FFT-je, dužine $N/2$, u skladu sa:

$$\tilde{g}_w(2l, 2i) = \left(\frac{2}{N} \right)^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} M_e(l+k) e^{2\pi \frac{k}{N/2} i}, \quad i = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{4}-1, \quad (4.6a)$$

$$\tilde{g}_w(2l+1, 2i+1) = \left(\frac{2}{N} \right)^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} M_o(l+k) e^{2\pi \frac{k}{N/2} i}, \quad i = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{4}-1, \quad (4.6b)$$

i uklanjanjem najstarijih kolona. Iz glavnih dijagonala tako ažuriranih matrica $G_{2l}^{(k)}$ i $G_{2l}^{(o)}$ dobijamo vektor \tilde{g}_{2l} .

2. Izračunavanje aproksimacije redukovano *halfband* ulaznog signala $x_\psi(2l)$ korišćenjem FIR ili IIR filtra, [141], u skladu sa:

$$x_\psi(2l) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \delta(l-n') \quad (4.7)$$

3. Izračunavanje posrednog izlaznog signala $\tilde{y}(2l)$, u skladu sa:

$$\tilde{y}(2l) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_w(2l-m) x_\psi(l-m) = \tilde{g}_{2l}^T x_{\psi,2l} \quad (4.8)$$

4. Izračunavanje aproksimacije *halfband* interpoliranog izlaznog signala $y(n)$, korišćenjem FIR ili IIR interpolacionog filtra, [141], u skladu sa definicionom jednačinom:

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(n-l) \tilde{y}(2l) \quad (4.9)$$

Zbog kauzalnosti je potrebno uvesti vremensko kašnjenje od N odbiraka, uz dodatna kašnjenja uzrokovana *halfband* predfiltriranjem, (4.7), i postinterpolacijom, (4.9). U svakom pododabranom vremenskom trenutku $n=2l$, algoritam zahtijeva dvije IDFT-je dužine $N/2$ i unutrašnji proizvod dva vektora dužine N . Stoga, računaska kompleksnost (uključujući i izračunavanje \tilde{g}_{2l} , ali ne i predfiltriranje i postinterpolaciju) je $O(N/2 + N/2 \log(N/2))$ operacija po odbirku izlaznog signala, što je značajno manje nego za precizni *online halfband* Weyl-ov filter.

Zbog kašnjenja od N odbiraka, neophodno je memorisati $N/2$ prošlih vektora $\tilde{g}_{2l-2}, \tilde{g}_{2l-4}, \dots, \tilde{g}_{2l-N}$. Ukupan broj memorijskih lokacija je $N^2/2 + N$ ($N/2$ vektora \tilde{g}_{2i} dužine N i vektor $x_{\psi,2l}$ dužine N). Ovi memorijski zahtjevi mogu biti redukovani upotrebom rekurzivnog izračunavanja. Naime, smjenom $l \rightarrow l+N/2-i$ u definicionoj jednačini interpoliranog izlaznog signala $y(n)$ (4.9), dobijamo:

$$\tilde{y}(2l) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_w(l + \frac{N}{2} - i - m) x_\psi(l + \frac{N}{2} - i - m). \quad (4.10)$$

Koristićemo parcijalnu sumu u jednačini (4.10),

$$s_i(2l) = \sum_{m=N/2-2i}^{N/2-1} \tilde{g}_w(l + \frac{N}{2} - i - m) x_\psi(l + \frac{N}{2} - i - m), \quad i = 1, 2, \dots, N/2.$$

Posredni izlazni signal u definicionoj jednačini interpoliranog izlaznog signala $y(n)$, (4.9), se dobija kao $N/2$ -ta parcijalna suma, $\tilde{y}(2l) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_i(2l)$. Dalje, parcijalne sume se mogu izračunati rekursivno kao:

$$s_i(2l) = \begin{cases} s_{i-1}(2l) + \tilde{g}_w(l + \frac{N}{2}) x_{\psi(l+i)} & i = 1, 2, \dots, N/2 \\ \tilde{g}_w(2l + \frac{N}{2}) x_{\psi(l + \frac{N}{2} - i)} & i = N/2 + 1, \dots, N \end{cases}$$

Zbog kauzalnosti je potrebno uvesti kašnjenje od N odbiraka. U skladu sa tim, u svakom pododabranom trenutku vremena $n=2l$, moramo memorisati $N/2$ prošlih impulsnih odziva $\tilde{g}_w(2l - N/2 - 1, m)$, $\tilde{g}_w(2l - N/2, m)$, ..., $\tilde{g}_w(2l - 2, m)$ dužine $N/2$, vektor parcijalne sume dužine $N/2$ ($s_1(2l)$ $s_2(2l)$... $s_{N/2}(2l)$) i ulazni vektor dužine N ($x_{\psi(2l - N)}$... $x_{\psi(2l - 1)}$). Ovo zahtijeva $N^2/4 + N$ memorijskih lokacija, što je otprilike polovina ranije zahtijevanih resursa.

4.1.3. STFT filtar

Za efikasnu *online* implementaciju STFT filtra pretpostavimo da se odgovarajući prozori analize i sinteze, $\gamma(n)$ i $g(n)$, nalaze u okviru intervala $[-L_\gamma/2, L_\gamma/2 - 1]$ i $[-L_g/2, L_g/2 - 1]$, te da imaju parne širine L_γ i L_g , respektivno. Koristimo diskretnu STFT-ju, koja se izvodi iz definicione jednačine (2.41) odabiranjem frekvencije θ sa N frekvencijskih odbiraka. Pretpostavlja se da je N paran broj i da je $N \geq \max\{L_\gamma, L_g\}$, tako da su intervali oslonca prozora analize i sinteze, $\gamma(n)$ i $g(n)$ respektivno, sadržani u intervalu $[-N/2, N/2 - 1]$. Stoga je minimalan broj frekvencijskih odbiraka isti kao i širina prozora. Frekvencijsko odabiranje se takođe primjenjuje na TF težinsku funkciju $M(n, \theta)$, koja teži diskretnoj težinskoj TF funkciji $M(n, k) = M(n, k/N)$. Dakle, N mora biti izabrano dovoljno veliko da bi $M(n, \theta)$ bila dovoljno gusto odabrana.

Online implementacioni algoritam STFT filtra se svodi na sljedeća tri koraka:

1. Analiza: Diskretna STFT ulaznog signala $x(n)$ se izračunava kao:

$$\begin{aligned} STFT_x^{(0)*}(n, k) &= STFT_x^\gamma \left(n, \frac{k}{N} \right) = \sum_{n'=n-L_\gamma/2}^{n+L_\gamma/2-1} x(n') \gamma(n' - n) e^{-j2\pi \frac{k}{N}(n' - n)} = \\ &= \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} x_n^{(\gamma)}(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N}m}, 0, 1, \dots, k = N - 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdje je $x_n^{(\gamma)}(m) = x(n + m) \gamma(m)$. Korak analize u trenutku vremena n podrazumijeva izračunavanje DFT-je vektora dužine N , ($x_n^{(\gamma)}(0)$... $x_n^{(\gamma)}(N - 1)$).

Na ovaj način su uključeni odbirci ulaznog signala $x(n)$ u L_g + $x(n)$ - .

2. Ponderisanje: Odbirci diskretne STFT-je ulaznog signala $x(n)$ se množe sa težinskom funkcijom $M(n,k)$,

$$F(n,k) = M(n,k) STFT_x^{(0)}(n,k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.12)$$

To podrazumijeva proizvod dva vektora dužine N , $(M(n,0) M(n,1) \dots M(n,N-1))$ i $(STFT_x^{(0)}(n,0) STFT_x^{(0)}(n,1) \dots STFT_x^{(0)}(n,N-1))$.

3. Sinteza: Izlazni odbirak $y(n)$ se dobija kao inverzna diskretna STFT funkcije $F(n,k)$,

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{n'=n-L_g/2+1}^{n+L_g/2} \sum_{k=0}^{N-1} F(n',k) e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-n')}. \quad (4.13)$$

Prethodna relacija može biti zapisana i na sljedeći način, [2], [153], [154],

$$y(n) = \sum_{n'=n-L_g/2+1}^{n+L_g/2} y_n^{(g)}(n-n') = \sum_{m=-L_g/2}^{L_g/2-1} y_{n-m}^{(g)}(m), \quad (4.14)$$

gdje je $y_n^{(g)}(m)$ je prozorom ograničena verzija IDFT-je funkcije $F(n',k)$ u odnosu na k ,

$$y_n^{(g)}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} F(n',k) e^{j2\pi \frac{k}{N}m}.$$

U cilju smanjenja zahtijevanih resursa, optimalno je koristiti rekursivnu implementaciju koraka sinteze. Uzmimo da:

$$s_i(n) = \sum_{m=L_g/2-i}^{L_g/2-1} y_{n+L_g-i-m}^{(g)}(m), \quad i = 1, 2, \dots, L_g,$$

označava parcijalne sume izlaznog signala iz (4.14). Izlazni odbirak $y(n)$ se dobija kao L_g -ta parcijalna suma, $y(n) = s_{L_g}(n)$.

Parcijalne sume mogu biti rekursivno izračunate na sljedeći način:

$$s_i(n) = \begin{cases} s_{i-1}(n) + y_{n+L_g/2-i}^{(g)}(L_g/2-i) & i = L_g \\ y_{n+L_g/2}^{(g)}(L_g/2-i) & 1 \leq i < L_g \end{cases}$$

Online STFT filter zadovoljava osobinu potpune rekonstrukcije, pod uslovom da prozori analize i sinteze, $\gamma(n)$ i $g(n)$ respektivno, zadovoljavaju uslov potpune rekonstrukcije, (2.49). Ipak, kako su u svakom trenutku vremena n korišćeni budući odbirci ulaznog signala $x(n+1)$, $x(n+2)$, ..., $x(n+(L_g+L_g)/2)$ mora biti uvedeno vremensko kašnjenje od $(L_g+L_g)/2$ odbiraka. U bilo kom trenutku vremena n STFT analiza, ponderisanje i sinteza zathijevaju respektivno

$O(L_\gamma + M \log N)$, $O(N)$ i $O(L_g + M \log N)$ operacija, što čini ukupno $O(L_\gamma + L_g + N + 2M \log N)$ operacija po odbirku izlaznog signala. S obzirom da ulazni vektor dužine L_γ , $(x(n-L_\gamma+1) \dots x(n-L_\gamma+2) \dots x(n))$, i vektor parcijalne sume dužine L_g , $(s_1(n) \dots s_{L_g}(n))$, moraju biti memorisani, potrebno je $L_\gamma + L_g$ memorijskih lokacija.

Značajna pojednostavljenja algoritma se mogu ostvariti postavljanjem da je $\gamma(n) = \delta(n)$ ili $g(n) = \delta(n)$.

4.1.4. Multiwindow STFT filtar

Online implementacija *multiwindow* STFT filtra H_{MS} u principu predstavlja individualnu *online* implementaciju M STFT filtara H_S^Q . Koristeći FFT-ju dužine $K \geq \max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}, L_{g_i}\}$, potrebno je $O(\sum_{i=1}^M (L_{\gamma_i} \log L_{g_i}) + M N + N^2)$ operacija po odbirku izlaznog signala, kao i $O(M)$ operacija za izračunavanje težinske sume M izlaznih signala STFT filtara.

Broj potrebnih memorijskih lokacija je $\max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}\} + \sum_{i=1}^M L_{g_i}$ (neophodno je memorisati ulazni vektor dužine $\max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}\}$ i M vektora parcijalnih suma dužina L_{g_i}). Primjetimo takođe, da je *multiwindow* STFT filtar idealan za paralelno procesiranje.

4.1.5. Gabor-ov filtar

Za efikasnu *online* implementaciju Gabor-ovog filtra pretpostavimo da se odgovarajući prozori analize i sinteze $\gamma(n)$ i $g(n)$ nalaze u okviru intervala $[-L_\gamma/2, L_\gamma/2-1]$ i $[-L_g/2, L_g/2-1]$, te da imaju parne širine L_γ i L_g , respektivno. Bitna razlika u odnosu na *online* implementaciju STFT filtra je to što je dozvoljeno da broj frekvencijskih odbiraka N bude manji od dužine prozora (zapravo, to je čest slučaj). Ova činjenica korespondira frekvencijskom pododabiranju. Neka je $Q_\gamma = 2 \lceil L_\gamma / (2N) \rceil$ najmanji parni broj koji je veći ili jednak L_γ/N i $Q_g = 2 \lceil L_g / (2L) \rceil$ najmanji paran broj koji je veći ili jednak L_g/N .

Online implementacioni algoritam Gabor-ovog filtra se svodi na sljedeća tri koraka, [2]:

1. Analiza: Gabor-ova transformacija ulaznog signala $x(n)$ se izračunava u trenutku vremena $n=ll$,

$$\begin{aligned}
 GT_x^{(Y)^*}(l, k) &= \sum_{n=ll-L_\gamma/2}^{ll+L_\gamma/2-1} x(n) \gamma(n-ll) e^{-j2\pi \frac{k}{N}(n-ll)} = \\
 &= \sum_{n=ll-Q_\gamma N/2}^{ll+Q_\gamma N/2-1} x(n) \gamma^*(n-ll) e^{-j2\pi \frac{Q_\gamma k}{N}(n-ll)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$GT_x^{(Q)}(l, k)$ može biti implementirana kao DFT dužine $Q_\gamma N$ koja je praćena pododabiranjem sa faktorom Q_γ . Takođe, jednačinu (4.15) možemo zapisati kao:

$$GT_x^{(Q)}(l, k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_l^{(Q)}(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

sa *prealiasing* sekvencom dužine N :

$$\tilde{x}_l^{(Q)}(m) = \sum_{i=-Q_\gamma/2}^{Q_\gamma/2-1} x_{l+Q_\gamma i}(m+iN) \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

gdje je $\tilde{x}_l^{(Q)*}(m) = x_{l+Q_\gamma m}^*$. Stoga se dužina DFT-je redukuje sa faktorom Q_γ . *Prealiasing* sekvenca vodi ka razdvajanju lokalnog segmenta $\tilde{x}_l^{(Q)}(m)$ ulaznog signala $x(n)$ u okolini lL na Q_γ blokove dužine N i sabiranju ovih blokova, kao što je pokazano na slici 4.1. Primjetimo da korak analize u trenutku vremena $n=lL$ uključuje odbirke ulaznog signala $x(lL-L_\gamma/2)$, $x(lL-L_\gamma/2+1)$, ..., $x(lL+L_\gamma/2-1)$.

2. Ponderisanje: Odbirci Gabor-ove transformacije ulaznog signala $x(n)$ se množe sa težinskom funkcijom $M(l, N) = M(lL, k/N)$,

$$F(l, k) = M(l, k) GT_x^{(Q)}(l, k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

To podrazumijeva proizvod dva vektora dužine N , $(M(l, 0) \ M(l, 1) \dots \ M(l, N-1))$ i $(GT_x^{(Q)}(l, 0) \ GT_x^{(Q)}(l, 1) \dots \ GT_x^{(Q)}(l, N-1))$.

3. Sinteza: Korak sinteze u trenutku vremena $n=lL$ proizvodi segment izlaznog signala $y(n)$ dužine L , (specijalno, $y(n)$ za $n=lL, lL+1, \dots, (l+1)L-1$), i uključuje funkciju $F(l', k)$ (samim tim i TF težinsku funkciju $M(l', k)$) za $l' = l - Q_g/2 + 1, l - Q_g/2 + 2, \dots, l + Q_g/2$.

Relacija Gabor-ove sinteze:

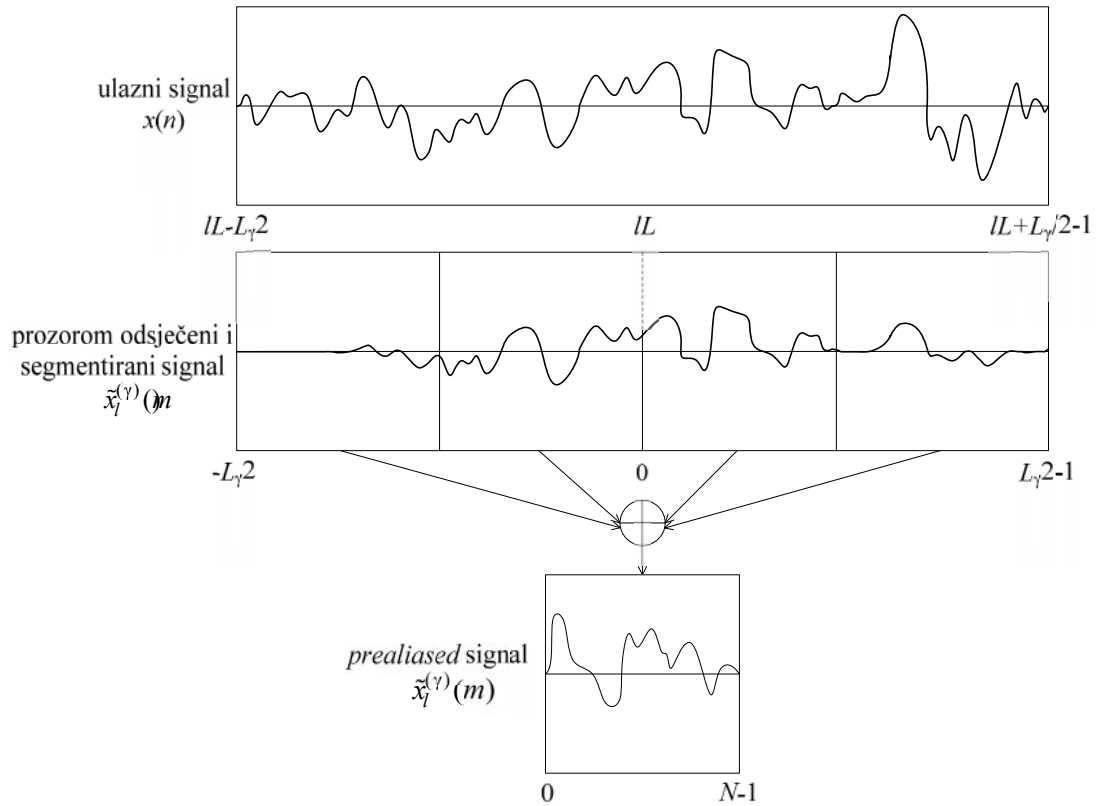
$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} F(l, k) g(n-lL) e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-lL)} \quad (4.18)$$

se može napisati i kao:

$$y(n) = \sum_{l'} y_{l'}^{(g)}(n-l'L), \quad (4.19)$$

gdje je:

$$y_{l'}^{(g)} = N f_{l'}(n) g(n) \text{ sa } f_{l'}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(l', k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$



Slika 4.1 Ilustracija *prealiasing* (odvajanje prozorom, segmentacija, sumiranje) procedure za Gabor-ovu analizu. Širina prozora analize je $L_g=4N$, što odgovara vrijednosti $Q_g=4$ bloka.

U jednačini (4.19), $y_l^{(g)}(n-l'L)$ je komponenta izlaznog signala $y(n)$ kojoj je doprinijela funkcija $F(l', k)$. S obzirom da je $y_l^{(g)}(n)$ u okviru granica $(l'L, -L_g, l'L+L_g)$, samo se Q_g takvih komponenti izlaznog signala preklapa. Zaista, unutar intervala $(lL, (l+1)L-1)$ pridruženog vremenu lL , $y(n)$ se sastoji od komponenti $y_l^{(g)}(n-l'L)$ sa $l' = l - Q_g/2 + 1, l - Q_g/2 + 2, \dots, l + Q_g/2$, tako da (4.19) postaje:

$$y(lL+i) = \sum_{l'=l-Q_g/2+1}^{l+Q_g/2} y_{l'}^{(g)}(lL+i-l'L) = \sum_{l'=-Q_g/2}^{Q_g/2-1} y_{l-l'}^{(g)}(i+l'L) \quad i = lL, \dots, (l+1)L-1. \quad (4.20)$$

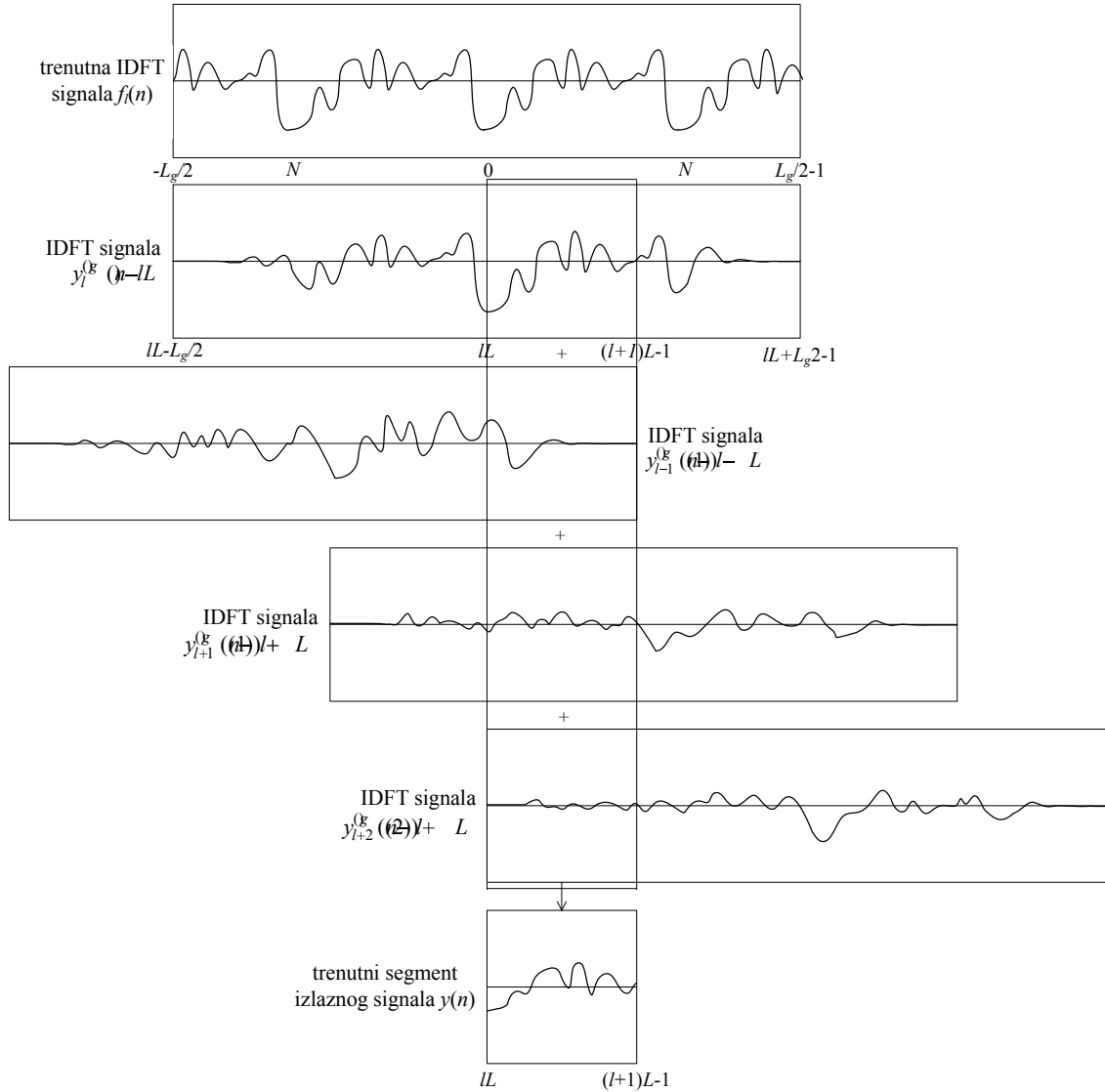
Primjetimo da se za $L=1$ jednačina (4.20) redukuje na (4.14). Sintezu se može posmatrati i kao šema preklapanja i sabiranja, [2], [154], slika 4.2. Posmatrajmo desnu stranu jednačine (4.20) proširenu na veći interval $i=0,1,\dots,Q_gL-1$:

$$s_i(l) = \sum_{l'=-Q_g/2}^{Q_g/2-1} y_{l-l'}^{(g)}(i+l'L) \quad 1 \leq i \leq Q_gL-1.$$

Uočavamo da je $s_i(l)$ jednaka $y(lL+i)$ za $i=0,1,\dots,L-1$, ali ne i za $i=L,L+1,\dots,Q_gL-1$. Dalje, $s_i(l)$ može biti rekursivno izračunata kao:

$$s_i(l) = \begin{cases} s_{i+L}(l) + y_{l+Q_g/2}^{(k)}(l), & i = 0, 1, \dots, Q_g/2 - 1 \\ y_{l+Q_g/2}^{(k)}(l) - \frac{Q_g L}{2} & i = (1), (1), \dots, Q_g - L + 1, Q_g - L + 1, \dots, Q_g L - 1 \end{cases}$$

što korespondira dodavanju nove preklapajuće komponente izlaznog signala. Trenutni blok izlaznog signala se dobija kao $y(lL+i)=s_i(l)$ za $i=0,1,\dots,L-1$.



Slika 4.2 Ilustracija procedure preklapanja i sabiranja koja se koristi u Gabor-ovoj sintezi. Širina prozora sinteze je

$L_g=4L$, što odgovara sumiranju $Q_g=4$ komponenti izlaznog signala $y_l^{(k)}(n)$.

Pošto (4.20) uključuje buduće vrijednosti funkcije $F(l+1,k), F(l+2,k), \dots, F(l+Q_g/2,k)$, koje s druge strane uključuju ulazni signal $x(n)$ do trenutka $n=lL+L_g/2+Q_g L/2$, kauzalna implementacija ovog algoritma zahtijeva uvođenje vremenskog kašnjenja od $L_g/2+Q_g L/2$ odbiraka. U datom trenutku vremena $n=lL$, koraci Gabor-ove analize, ponderisanja i sinteze koriste respektivno

$O(L_\gamma + M \log N)$, $O(N)$ i $O(L_g + M \log N)$ operacija. Ukupan broj operacija po odbirku izlaznog signala je stoga aproksimativno $O((N/2 \log M) + L_\gamma + L_g) L$, što je u principu proporcionalno preodabirajućem faktoru $\xi = N/L$. Sve dok ξ nije previše veliko, *online* implementacija Gabor-ovog filtra je prilično efikasna.

Neophodno je memorisati L_γ odbiraka ulaznog signala $x(n)$ i vektor dužine $Q_g L$, $(x(n) \dots s_{Q_g L-1} n)$, što rezultuje sa $L_\gamma + Q_g L \approx L_\gamma + L_g$ memorijskih lokacija.

4.1.6. Multiwindow Gabor-ov filter

Online implementacija *multiwindow* Gabor-ovog filtra H_{MG} u principu predstavlja individualnu *online* implementaciju M Gabor-ovih filtara H_G^0 . Ovo čini filter H_{MG} idealnim za paralelno procesiranje. Računska kompleksnost filtra H_{MG} u opštem slučaju ne mora biti značajno veća od one koju ima obični Gabor-ov filter, jer H_{MG} tipično koristi redukovanu TF gustinu odabiranja. Ukupan broj operacija potrebnih za odbirak izlaznog signala $y(n)$ se može estimirati kao $O((N/2 \log M) + (L_\gamma + L_g) L)$, sa $\bar{L}_\gamma = \sum_{i=1}^M L_{\gamma_i} / M$ i $\bar{L}_g = \sum_{i=1}^M L_{g_i} / M$, što je proporcionalno faktoru preodabiranja, $\xi \geq MN/L$.

Memorijski zahtjevi su, s druge strane, veći nego u slučaju Gabor-ovog filtra sa jednim prozorom. Značajan segment ulaznog signala $x(n)$ je esencijalno isti za sve grane filtra i memoriše se samo jednom. Međutim, procedura preklapanja i sabiranja zahtijeva L_{g_i} memorijskih lokacija za svaku granu, što rezultuje sa ukupno $\max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}\} + \sum_{i=1}^M L_{g_i}$ memorijskih lokacija.

4.1.7. TF projekcioni filter

Projekcioni filter u svojoj originalnoj formi nije pogodan za *online* implementaciju iz sljedećih razloga:

1. impulsni odziv se izračunava u cjelini, korišćenjem kompletne TF težinske funkcije $M(n, \theta)$ (odnosno, ekvivalentno, TF propusnog regiona R);
2. računaska kompleksnost *eigen* dekompozicije je $O(N^3)$, pri čemu je N dužina trajanja signala (simultano, dužina trajanja $M(n, \theta)$).

Za *online* implementaciju TF projekcionog filtra se, stoga, koristi frekvencijski diskretna (odabrana) verzija TF težinske funkcije $M(n, \theta)$ koja se definiše kao:

$$M(n, k) = M\left(n, \frac{k}{2N}\right), \quad k \in [0, N-1].$$

Broj frekvencijskih odbiraka N je uzet kao umnožak broja 4, zbog pojednostavljenja kasnije procedure računanja. Primjetimo da N treba da bude dovoljno veliko kako bi $M(n, \theta)$ bila odabrana dovoljno gusto. U skladu sa tim, zamjenjujemo impulsni odziv sa IDFT-om:

$$g_W(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} M(n, k) e^{j2\pi \frac{km}{N}}, \quad m \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1]. \quad (4.21)$$

Uočimo da $g_W(n, m)$ ima konačnu dužinu u odnosu na m .

Imajući u vidu prvi korak dizajniranja, potrebno je izračunati $h_W(2l, 2l') (= g_W(l+l', l-l'))$. S obzirom da su $l+l'$ i $l-l'$ ili oba parna ili oba neparna, potrebne su nam samo vrijednosti $g_W(2l, 2i)$ i $g_W(2l+1, 2i+1)$. Stoga, (4.21) može biti zamjenjen sa:

$$g_W(2l, 2i) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} M_e(l, k) e^{j2\pi \frac{k}{N/2} i}, \quad (4.22a)$$

$$g_W(2l+1, 2i+1) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} M_o(l+k, i) e^{j2\pi \frac{k}{N/2} i}, \quad (4.22b)$$

gdje su $M_e(n, k) = M(n, k/2)$, $M_o(n, k) = M(n, (k+1)/2)$, $i \in [N/4, N/4-1]$. Zaključujemo da za svako n možemo koristiti IDFT-ju dužine $N/2$ umjesto IDFT-je dužine N .

Sljedeći korak podrazumijeva upotrebu lokalnog TF projekcionog filtra, čiji dizajn zahtijeva samo lokalni segment težinske funkcije $M(n, k)$, ili, ekvivalentno, $h_W(2l, 2l')$. Za dati parni trenutak vremena $n_0 = 2l_0$ posmatrajmo segment težinske funkcije $M(n, k)$ dužine $2L$, tako da $n \in [n_0 - L, n_0 + L - 1]$. Kroz relaciju $h_W(2l, 2l') (= g_W(l+l', l-l'))$ i jednačine (4.22), ovaj segment težinske funkcije $M(n, k)$ korespondira segmentu $h_W(2l, 2l')$ definisanom za $l, l' \in [l_0 - L/2, l_0 + L/2 - 1]$. Ovo, za uzvrat, može biti pridruženo lokalnoj matrici Weyl-ovog filtra H_W dimenzija $L \times L$ sa elementima $(H_W)_{l', l} = h_W(l_0 - L + i, l_0 - L + j) = g_W(2l_0 - L + i + j, i - j)$, pri čemu $i, j \in [0, L-1]$. Usljed konačnog odziva (dimenzije m) $g_W(n, m)$, samo N glavnih dijagonala filtra H_W su nenulte.

Iz filtra H_W možemo konstruisati lokalni TF projekcioni filter H_P dimenzija $L \times L$. Najprije izračunamo *eigen* dekompoziciju filtra H_W :

$$H_W = U \Lambda U^H = \sum_{k=1}^L \lambda_k u_k u_k^H, \quad (4.23)$$

gdje su (ortonormalne) kolone jedinične matrice U *eigen* vektori u_k matrice H_W , dok je $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_L\}$ dijagonalna matrica *eigen* vrijednosti (λ_k su realne vrijednosti, sortirane u opadajućem poretku). Tada je lokalni TF projekcioni filter H_P dat sa:

$$H_P = (u_1 \dots u_L) u_R^H = \sum_{k=1}^L u_k u_k^H, \quad (4.24)$$

pri čemu je R (rang matrice H_P) broj *eigen* vrijednosti matrice H_W koji su veći od $1/2$. Impulsni odziv lokalnog TF projekcionog filtra se dobija kao $h_P(2(l_0 - L), 2(2 - 1) \oplus L + j) = H_P(i, j)$, sa $i, j \in [0, L - 1]$. Iskorišćen je za izračunavanje odbirka izlaznog signala $y(n)$ u trenutku $n_0 = 2l_0$, odnosno:

$$y(2l_0) = \sum_{l'=l_0-L/2}^{l_0+L/2-1} (H_P)_{l_0-l', l'-l'} \tilde{x}_{l'} \quad (4.25)$$

Ova procedura se ponavlja za sve parne trenutke vremena $n_0 = 2l_0$.

U cilju smanjenja računske kompleksnosti, ne moramo računati lokalni TF projekcioni filter H_P za sve parne vremenske tačke $2l_0$, već samo za one koje su umnožak nekog inkrementa $2B$, odnosno $r2B$. Lokalni izlazni signal iz filtra H_P se tada izračunava ne samo u $n_0 = r2B$ već i u lokalnom intervalu oko $n_0 = r2B$. Dakle, formiramo lokalni izlazni signal $y_r(2(rB - L/2 + j)) = (y_r)_j$, $j \in [0, L - 1]$, sa y_r koje se može zapisati kao:

$$y_r = H_{P,r} \tilde{x}_r \quad (4.26)$$

\tilde{x}_r je lokalni ulazni signal (vektor dužine L) dat sa $(\tilde{x}_r)_{2(rB-L/2+j)} = x_{2(rB-L/2+j)}$, $j \in [0, L - 1]$, dok $H_{P,r}$ označava matricu lokalnog TF projekcionog filtra u vremenskom trenutku $n_0 = r2B$. Individualni lokalni izlazni signali $y_r(2l)$ dobijeni na ovaj način su potom kombinovani u finalni izlazni signal $y(2l)$ korišćenjem šeme preklapanja i sabiranja, odnosno:

$$y(2l) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w(l - rB) y_r(l) \quad (4.27)$$

gdje je $w(l)$ prozor koji zadovoljava $\sum_{r=-\infty}^{\infty} w(l - rB) = 1$. Jednostavan izbor je trougaoni (Barlett-ov) prozor:

$$w(l) = \begin{cases} 1 - |l|/B, & \text{za } |l| \leq B \\ 0, & \text{za } |l| > B. \end{cases}$$

U ovom slučaju se samo dva naredna lokalna izlazna signala preklapaju u (4.27).

Za dovoljno veliko L i dovoljno malo B , rezultati ostvareni upotrebom lokalnog TF projekcionog filtra će biti veoma približni onima dobijenim upotrebom pravog TF projekcionog filtra H_P . Za manje L i/ili veće B , greška aproksimacije će biti veća, ali će računaska kompleksnost biti manja.

Kao što je već pomenuto, dizajn filtra baziran na lokalnim TF projekcijama zahtijeva *eigen* dekompoziciju kompleksnosti $O(N^3)$ svakih $2B$ vremenskih trenutaka. Ova kompleksnost može biti značajno smanjena. Zaista, činjenica da nam je potreban određen broj dominantnih *eigen* vrijednosti/*eigen* vektora filtra H_W (sve *eigen* vrijednosti iznad $1/2$ i odgovarajući *eigen* vektori) sugeriše upotrebu iterativnog algoritma poznatog kao ortogonalna iteracija ili simultana vektorska iteracija. Ovaj algoritam izračunava proizvoljan broj dominantnih parova *eigen*

vrijednosti/*eigen* vektora p , sredstvima iterativnog matričnog množenja i reortogonalizacije, [161].

Ortogonalna iteracija i -tog reda ($i \geq 1$) se sastoji od sljedeća dva koraka:

1. Iteracioni korak: Izračunati matricu $X^{(i)}$ dimenzija $L \times p$:

$$X^{(i)} = H_W U^{(i-1)}, \quad (4.28)$$

gdje je matrica $U^{(i-1)}$ dimenzija $L \times p$ dobijena u prethodnoj iteraciji. Kolone matrice $U^{(i-1)}$ su estimacija p dominantnih *eigen* vektora $u_k^{(i)}$.

2. Ortogonalizacija: Izračunati matricu trenutnih *eigen* vektora $U^{(i)}$ matrice $X^{(i)}$ upotrebom QR faktorizacije, [161]:

$$U^{(i)} R^{(i)} = X^{(i)}. \quad (4.29)$$

Uočimo da trougaona matrica $R^{(i)}$ dimenzija $p \times p$ nije neophodna.

Postavlja se pitanje odabira inicijalne vrijednosti za $U^{(0)}$. Za $i \rightarrow \infty$, $u_k^{(i)}$ konvergira ka p dominantnih vektora filtra H_W . Estimacija p dominantnih *eigen* vrijednosti može biti ostvarena na sljedeći način:

$$\lambda_k^{(0)} = u_k^{(i)H} H_W u_k^{(i)}, \quad k \in [1, p]. \quad (4.30)$$

Ova estimacija *eigen* vrijednosti konvergira brzinom $|\lambda_{p+1} / \lambda_p|^i$, [161]. Lokalni TF projekcioni filter u i -toj iteraciji je tada:

$$H_p^{(0)} = (u_1^{(i)} \dots u_p^{(i)})^H = \sum_{k=1}^{R^{(i)}} u_k^{(i)} u_k^{(i)H}, \quad (4.31)$$

gdje je $R^{(i)}$ (rang matrice $H_p^{(i)}$) jednak broju estimacija *eigen* vrijednosti $\lambda_k^{(i)}$ većih od $1/2$.

Iteracija se završava kada se Forbenius-ova norma $\|H_p^{(i)} - H_p^{(i-1)}\|$ spusti ispod praga male vrijednosti ili kada je ostvaren određeni broj iteracija.

Broj dominantnih *eigen* vrijednosti/*eigen* vektora p koji se koriste u ortogonalnoj iteraciji može biti izračunat na sljedeći način. Prema [38], rang R TF projekcionog filtra je aproksimativno jednak oblasti odgovarajućeg TF propusnog regiona R . Za lokalni TF projekcioni filter ova oblast je determinisana težinskom funkcijom $M(n, k)$ unutar lokalnog intervala $[n_0 - L, n_0 + L - 1]$, odnosno:

$$R \approx A = \sum_{n=n_0-L}^{n_0+L-1} \sum_{k=0}^{N-1} M(n, k). \quad (4.32)$$

Imajmo u vidu da je $M(n, k) = 1$ unutar R , i $M(n, k) = 0$ vani. TF propusni region R može biti alternativno izračunat kao trag matrice H_W , $A = \text{tr}\{H_W\}$. S obzirom da je $R \approx A$, koristi se iteriranje

$p=A+s$ *eigen* vektora, sa $s=2...4$, kao podprostornom rezervom. Uočimo da TF propusni region u principu ima malu oblast A , te je stoga $p \ll L$.

Brzina konvergencije ortogonalnog iterativnog algoritma može značajno biti unaprijeđena upotrebom Ritz-ove akceleracije, [161]. Ovo podrazumijeva sljedeće dodatne korake u i -toj ortogonalnog iteraciji:

3. Schur-ova dekompozicija: Formirati pomoćnu matricu $S^{(i)}$ dimenzija $p \times p$:

$$S^{(i)} = U^{(i)H} H_W U^{(i)} . \quad (4.33)$$

Izračunati Schur-ovu dekompoziciju, [161], matrice $S^{(i)}$, odnosno jediničnu matricu $Q^{(i)}$ i dijagonalnu matricu $L^{(i)} = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1^{(i)}, \dots, \tilde{\lambda}_p^{(i)}\}$, tako da je:

$$Q^{(i)} L^{(i)} Q^{(i)H} = S^{(i)} . \quad (4.34)$$

$\tilde{\lambda}_k^{(i)}$ se koriste kao unaprijeđene estimacije *eigen* vrijednosti i zamjenjuju $\lambda_k^{(i)}$ u (4.30), koje stoga ne trebaju da se računaju.

4. Rotacija *eigen* vektora: Izračunati unaprijeđenu matricu *eigen* vektora,

$$\tilde{U}^{(i)} = U^{(i)} Q^{(i)} . \quad (4.35)$$

Rotirani *eigen* vektori $\tilde{u}_k^{(i)}$ (kolone matrice $\tilde{U}^{(i)}$) se potom koriste za estimaciju lokalnog TF projekcionog filtra u skladu sa (4.31). Dalje, sljedeći iteracioni korak (4.28) koristi $\tilde{U}^{(i)}$ umjesto $U^{(i)}$. Estimacija k -te *eigen* vrijednosti $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$ konvergira brzinom $|\lambda_{p+1} / \lambda_k|^j$, što je mnogo brže od konvergencije ostvarene bez upotrebe Ritz-ove akceleracije $|\lambda_{p+1} / \lambda_p|^j$, naročito za dominantne *eigen* vrijednosti koje su u ovom slučaju od interesa. Stoga, korišćenje Ritz-ove akceleracije omogućava upotrebu manjeg broja iteracija za determinaciju matrice lokalnog TF projekcionog filtra sa određenom tačnošću. Uočimo da veći podprostor s rezultuje sa manjim λ_p , i stoga teži bržoj konvergenciji. Ipak, odabir veće vrijednosti s uvećava p i stoga usložnjava računanje u svakom iteracionom koraku.

Ortogonalna iteracija zahtijeva inicijalizaciju iterirane matrice *eigen* vektora $U^{(i)}$. U vremenskom trenutku $n=2rB$, predlaže se upotreba matrice *eigen* vektora izračunate u prethodnom vremenskom trenutku $2(r-1)B$ kao inicijalne vrijednosti ($U^{(0)}$).

Ako se TF težinska funkcija $M(n,k)$ značajno mijenja između dva sukcesivna vremenska trenutka $2(r-1)B$ i $2rB$, estimacija *eigen* vektora se pomjera za vremenski inkrement B u cilju izračunavanja za novu vremensku poziciju. Stoga, za prvih $L-B$ redova inicijalne vrijednosti $U^{(0)}$ u trenutku $2rB$, koristimo posljednjih $L-B$ redova za matricu *eigen* vektora izračunatu u prethodnom trenutku $2(r-1)B$, a za preostalih B redova koristimo podesno normalizovane slučajne vrijednosti. Sa ovom inicijalizacijom ortogonalna iteracija, unaprijeđena Ritz-ovom

akceleracijom, ima tendenciju konvergencije nakon malog broja iteracija (tipično 2 ili 3). Ova šema estimacije *eigen* vektora korespondira praćenju TF podprostora i rezultuje lokalnim TF projekcionim filtrom.

Tabela 4.1 Broj operacija potreban po iteracionom koraku ortogonalnog iteracionog algoritma unaprijeđenog Ritz-ovom akceleracijom.

Zadatak	Kompleksnost
Matrično množenje (4.28)	$O(L^2 p)$
QR dekompozicija (4.29)	$O(L p^2)$
Izračunavanje $S^{(i)}$ u (4.33)	$O(L^2 p + L p^2)$
Schur-ova dekompozicija (4.34)	$O(p^3)$
Rotacija <i>eigen</i> vektora (4.35)	$O(L p^2)$
Izračunavanje $H_p^{(i)}$ u (4.31)	$O(L^2 p)$
Izračunavanje $\ H_p^{(i)} - H_p^{(i-1)}\ $	$O(L^2)$

Za *online* implementaciju TF projekcionog filtra, u svakom trenutku vremena nam je potrebno $O((N/2)\log(N/2))$ operacija da bi izračunali impulsni odziv $g_W(n, m)$, u skladu sa (4.22). Dalje, svakih $2B$ vremenskih trenutaka nam je potrebna ortogonalna iteracija ubrzana Ritz-ovom akceleracijom kako bi determinisali matricu H_p lokalnog TF projekcionog filtra.

Kompleksnost zadataka izvršenih u svakom iteracionom koraku ortogonalne iteracije ubrzane Ritz-ovom akceleracijom je sumirana u tabeli 4.1. Pošto je tipično $p \ll L$, sveukupnom kompleksnošću će dominirati zadaci sa složenošću $O(L^2 p)$. Za dati vremenski trenutak, ortogonalna iteracija zahtijeva $O(IL^2 p)$ operacija (I označava prosječan broj iteracionih koraka). Primjetimo da je uobičajeno $Ip \ll L$ i stoga $IL^2 p \ll L^3$ (tipične vrijednosti su $I=2,3$; $p=5,7$; i $L=64$), odnosno da je kompleksnost ostvarena unaprijeđenim iteracionim algoritmom značajno manja od kompleksnosti potpune eigen dekompozicije $O(N^3)$.

Konačno, izračun za svaki odbirak izlaznog signala u skladu sa šemom preklapanja i sumiranja (4.26), (4.27), zahtijeva $O(L)$ operacija.

Lokalni TF projekcioni filter zahtijeva memorisanje matrica H_W i $H_p^{(i)}$ dimenzija $L \times L$, matrica $U^{(i)}$ dimenzija $L \times p$, matrica $Q^{(i)}$ i $L^{(i)}$ dimenzija $p \times p$ i segmenta ulaznog signala dužine L , što rezultuje sa ukupno $2(L^2 + p^2 + L p + \dots)$ memorijskih lokacija.

4.1.8. Poređenje *online* algoritama linearnih TV filtara

Na osnovu prethodne analize zaključujemo da klasični LTV filtri dozvoljavaju *online* implementaciju. U tabeli 4.2 je dat pregled hardverske kompleksnosti analiziranih filtara.

Tabela 4.2 Kompleksnost (računska kompleksnost i memorijski zahtjevi) različitih *online* TF filtara. Ulazni *halfband*, izlazni *halfband* i *halfband* Weyl-ovi filtri imaju istu kompleksnost kao *minimum energy* Weyl-ov filtar uz dodatnu kompleksnost uzrokovanu *halfband* ograničenjima ulaznog i/ili izlaznog signala. Kompleksnost STFT filtra i Gabor-ovog filtra je ista kao kompleksnost odgovarajućih *multiwindow* formi, za $M=1$. U cilju konciznijeg zapisivanja korišćena je sljedeća notacija: $\bar{L}_\gamma = \sum_{i=1}^M L_{\gamma_i} / M$ i $\bar{L}_g = \sum_{i=1}^M L_{g_i} / M$.

Tip filtra	Broj operacija po odbirku	Broj memorijskih lokacija
Zadeh	$O(N+N\log N)$	$N^2/2+N$
<i>Minimum energy</i> Weyl	$O(N+N\log N)$	$N^2/2+2N$
Aproksimativni <i>halfband</i> Weyl	$O(N/2+N/2\log(N/2))$	$N^2/4+N$
<i>Multiwindow</i> STFT	$O(N\log N + N + \bar{L}_\gamma) + \bar{L}_g$	$\max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}\} + M\bar{L}_g$
<i>Multiwindow</i> Gabor	$O(N\log N + N + L(M)\bar{L}_\gamma + \bar{L}_g) + L$	$\max_{i=1,2,\dots,M} \{L_{\gamma_i}\} + M\bar{L}_g$
TF projekcioni	$O(3L^2p + Lp^2 + L^2 + p^3)$	$2(L^2+p^2) + L(p+1)$

Uočavamo da Zadeh-ov filtar, *minimum energy* Weyl-ov filtar, *multiwindow* STFT i *multiwindow* Gabor-ov filtar imaju slične prohtjeve sa aspekta broja operacija po odbirku izlaznog signala, te da je potreban broj operacija direktno zavisao od dimenzija analiziranog signala (N).

Sa aspekta memorijskih prohtjeva, uočavamo da su *multiwindow* STFT i *multiwindow* Gabor-ov filtar racionalniji, te da broj memorijskih lokacija koje potražuju zavisi isključivo od odabranih prozora korišćenih u TF distribucijama na kojima ovi filtri počivaju. Nasuprot njima, kod Zadeh-ovog filtra i *minimum energy* Weyl-ovog filtra, i ovaj parametar direktno zavisi od dimenzija analiziranog signala.

Nešto skromnije prohtjeve u pogledu broja operacija po odbirku izlaznog signala ima aproksimativni *halfband* Weyl-ov filtar, dok su mu memorijski zahtjevi slični kao kod Zadeh-ovog filtra i *minimum energy* Weyl-ovog filtra.

TF projekcioni filtar, na kraju, u opštem slučaju ima najskromnije prohtjeve i sa aspekta broja operacija po odbirku izlaznog signala, i sa aspekta broja memorijskih lokacija. Oni zavise od parametara samog filtra, ali se očekuje da u realnim situacijama ti prohtjevi budu manji ili barem na nivou prohtjeva ostalih klasičnih linearnih filtara. Pri tome, ne treba zanemariti činjenicu da se najveća računaska optimizacija, te najkompleksnije matematičke modifikacije obavljaju upravo kod ovog filtra.

4.2. Hardverska realizacija nelinearnih TV filtara

U nastavku će biti razmatrana mogućnost hardverske realizacije nelinearnih TV filtara (obrađenih u drugoj glavi disertacije) koji se baziraju na TF analizi nestacionarnih 1D signala.

4.2.1. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu više TF distribucija, [128]

U drugoj glavi disertacije je predstavljen TV filter kod koga se estimacija IF-je bazira na više TF distribucija. *Online* realizacija ovog algoritma do sada nije razvijena.

Definicija ovog filtra podrazumijeva jednovremeno izračunavanje TFD-je (WD-je za monokomponentne signale i SM-a za multikomponentne signale) za različite vrijednosti širine prozora kojim se odsijeca analizirani signal. Odabrana TFD-ja se računa dva puta: za slučaj veoma uskog i za slučaj veoma širokog prozora. Korišćenjem TF distribucije sa ovako odabranim širinama prozora se postiže značajno poboljšanje TF reprezentacije signala, s obzirom da je distribucija ili veoma koncentrisana ili jednaka nuli. To vodi do visokog kvaliteta estimacije funkcije oslonca filtra, a samim tim i do kvalitetnog filtriranja nestacionarnih 1D signala.

Međutim, ovakav pristup je računski izuzetno zahtjevan, te bi podrazumijevao veoma komplikovanu hardversku implementaciju čija je mogućnost realizacije, u krajnjoj liniji, dovedena u pitanje. Naime, u svakoj tački signala se mora računati TFD sa dvije izuzetno različite vrijednosti širine prozora kojim se odsijeca analizirani signal. Računska kompleksnost dolazi do izražaja kod TFD-je koja upotrebljava veoma veliku širinu prozora. Takođe, usljed računanja dvije TFD-je postavlja se pitanje mogućnosti rada ovakvog sistema u realnom vremenu.

To su razlozi zbog kojih se opisani metod, iako omogućava kvalitetno filtriranje nestacionarnih 1D signala, zadržao na softverskom nivou.

4.2.2. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [137]

Ovaj TV filter se baziran na SM-u, kao distribuciji na osnovu koje će se vršiti estimacija IF-je. U skladu sa tim je definisana njegova funkcija oslonca:

$$L_H(t, \omega) = \frac{SM_{f_x}(t, \omega)}{SM_{xx}(t, \omega)}. \quad (4.36)$$

Implementacija SM-a uključuje, kao glavni međukorak, realizaciju STFT-je koja je takođe uključena u definiciju TV filtriranja, (2.117). To znači da se realizacija STFT-je koristi dva puta: prilikom određivanja funkcije oslonca filtra (u toku realizacije SM-a), (4.36), i prilikom implementacije filtra, (2.117).

Diskretna forma definicije TV filtriranja je data sa, [129]:

$$Y(k, n) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} L_H(n, k) STFT_x(n, k). \quad (4.37)$$

U hardverskoj realizaciji funkcija oslonca filtra $L_H(t, \omega)$ se determiniše poređenjem vrijednosti SM-a sa spektralnim pragom, [135]. Na ovaj način se formira kontrolni signal c_k kao:

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{za } SM_{xx}(n, k) \geq R \\ 0, & \text{za } SM_{xx}(n, k) < R \end{cases} \quad (4.38)$$

koji određuje koja će komponenta $STFT(n, k)$ biti uključena u formiranje odbiraka izlaznog signala. Sa kontrolnim signalom $c_k=1$, sve komponente $STFT(n, k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ se međusobno sumiraju.

Blok šema hardverske realizacije ovog TV filtra je predstavljena na slici 4.3. Sabiranja mogu biti obavljena dodavanjem susjednih komponenti u prvom koraku, zatim susjednih komponenti (izračunatih u prvom koraku) u narednom koraku, i tako dalje. Takva šema odgovara *butterfly* algoritmu za izračunavanje FFT-je. Zbog toga svaka komponenta $STFT(n, k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ sa kontrolnim signalom $c_k=1$, prolazi kroz $\log_2 N$ sabirača do izlaza iz sistema.

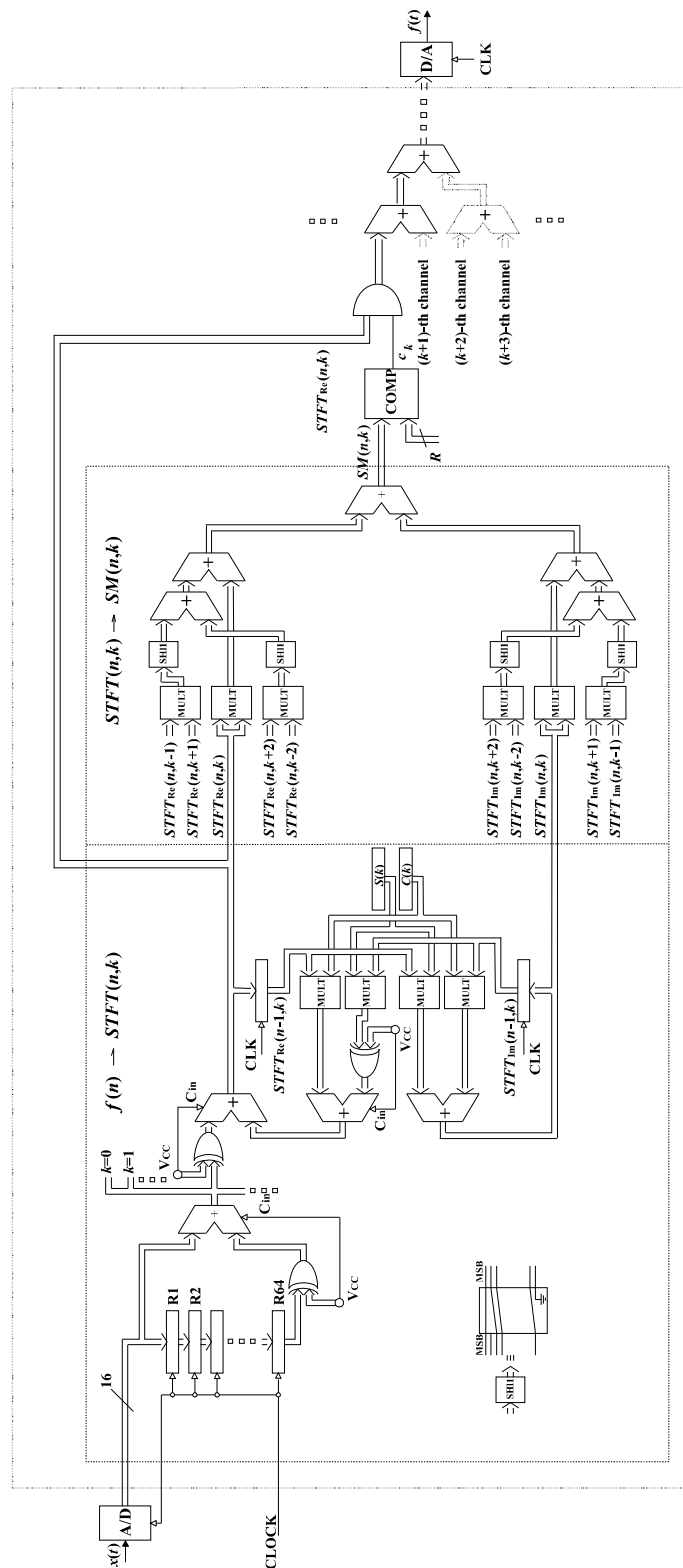
U hardverskoj realizaciji prikazanoj na slici 4.3, koristi se samo realni dio STFT-je, $STFT_{Re}(n, k) = \text{Re}\{STFT_x(n, k)\}$. Naime, za simetričnu (po frekvenciji) funkciju oslonca, $L_H(n, -k) = L_H(n, k)$ imamo da je:

$$L_H(n, k) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} L_H(n, k) STFT_{Re}(n, k), \quad (4.39)$$

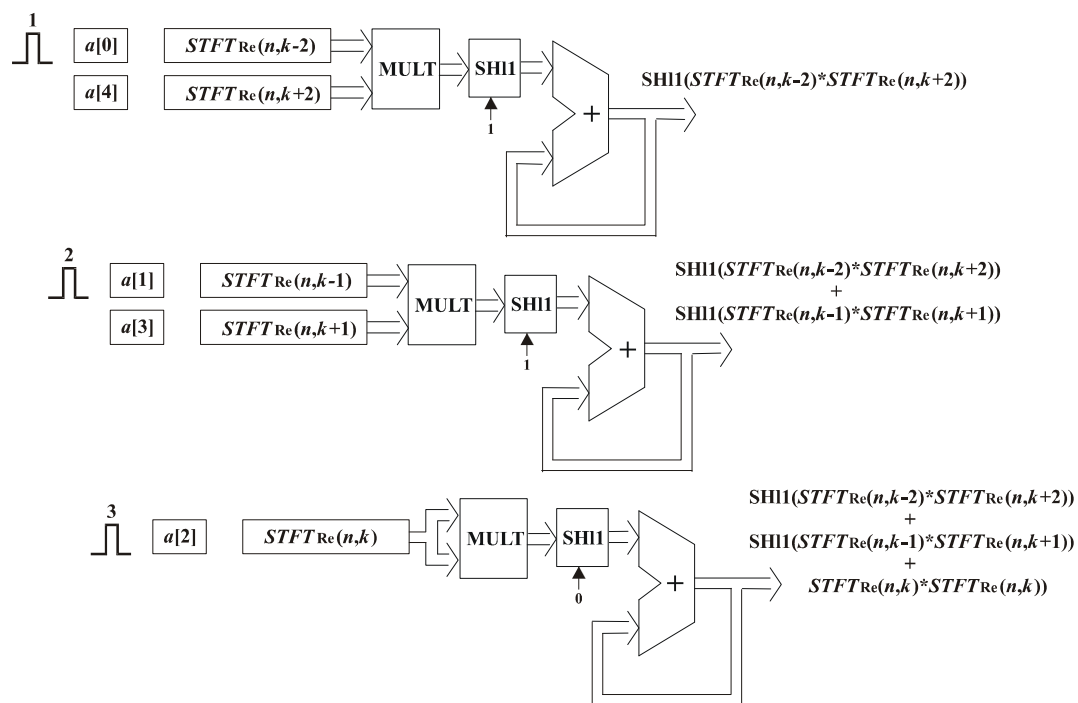
s obzirom da se imaginarni djelovi $STFT_{Im}(n, k)$ međusobno anuliraju. Primjetimo da je simetrična funkcija $L_H(n, k)$ dobijena kada je TFD (koja je uključena u definiciju (4.37)) realnog analiziranog signala Hermitska funkcija. Jednostavno se dokazuje da SM realnog signala zadovoljava ovu osobinu, $SM(n, -k) = SM^*(n, k)$.

Serijska arhitektura je realizovana u skladu sa algoritmom predstavljenim na slici 4.4. Njen šematski dijagram, uključujući i korišćene komponente, je dat na slici 4.5. Kao što se može vidjeti, ova arhitektura ima kašnjenje od 3 takta po odbirku (ukupno 6 za realni i imaginarni dio odbirka).

16-bitni odbirci STFT-je se vode na ulaze od $D[0][15..0]$ do $D[4][15..0]$ simultano. Tokom jednog takta, dva ulaza se putem multipleksora MUX_1 i MUX_2 , adresiranih sa $ADD1[2..0]$ i $ADD2[2..0]$, prosljeđuju na množač $MULT$, produkujući 32-bitni proizvod na njegovim izlazima. Nakon pomjeranja koje izvršava pomjerački registar $SHIFT_REG$ ($DIS[4..0]=1$ – pomijeranje ulijevo za 1, $DIS[4..0]=0$ – bez promjene) ovaj proizvod se prosljeđuje na ulaz sabirača ($ADDER$) „dataa[]“. S obzirom da je $datab[] = Z[32..0]$, njegov izlaz će biti $Z[n][32..0] = Z[n-1][32..0] + dataa[n][32..0]$.

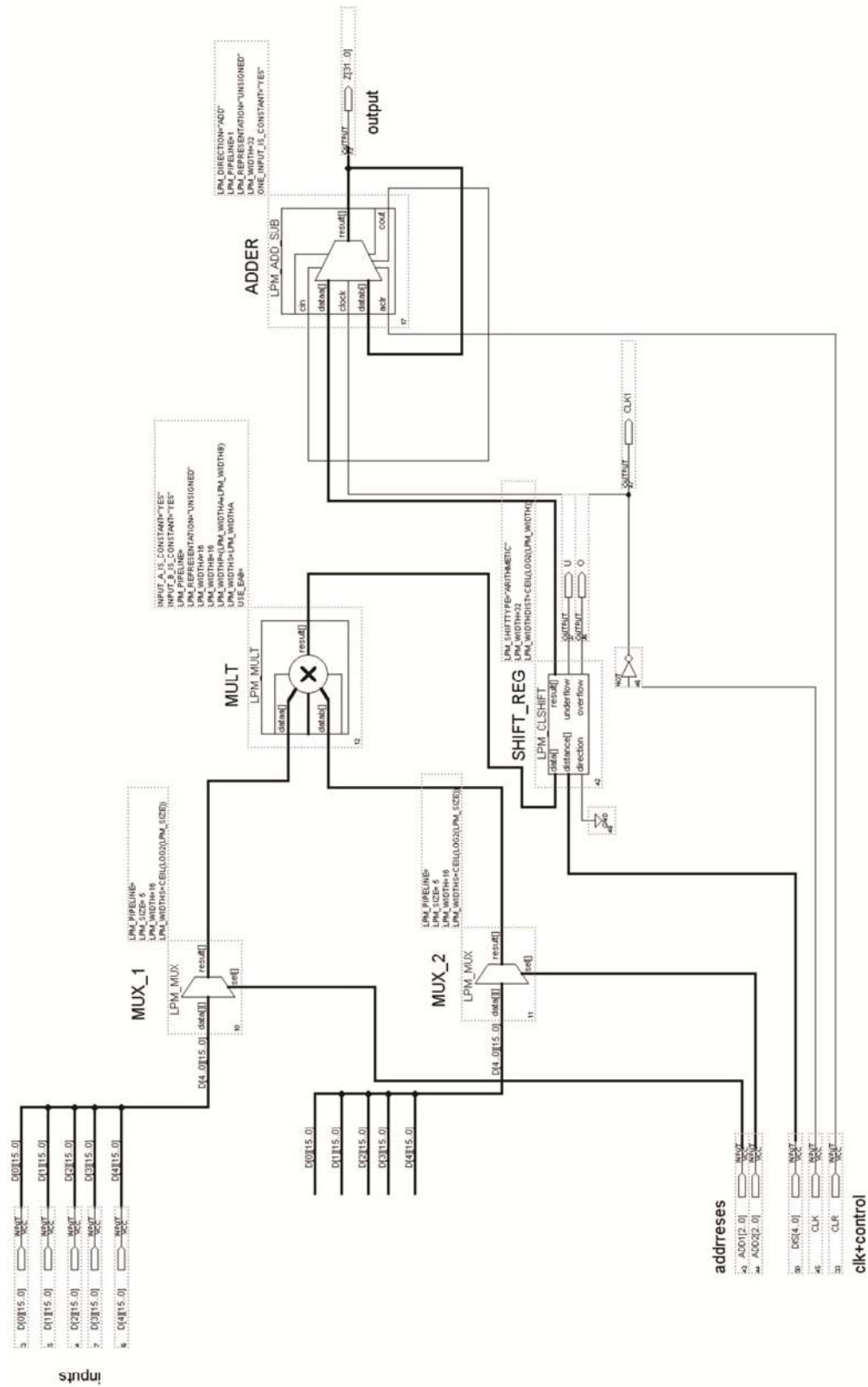


Slika 4.3 Hardver za realizaciju jednog kanala TV filtra sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu poređenja SM-a sa unaprijed definisanim pragom, [135].

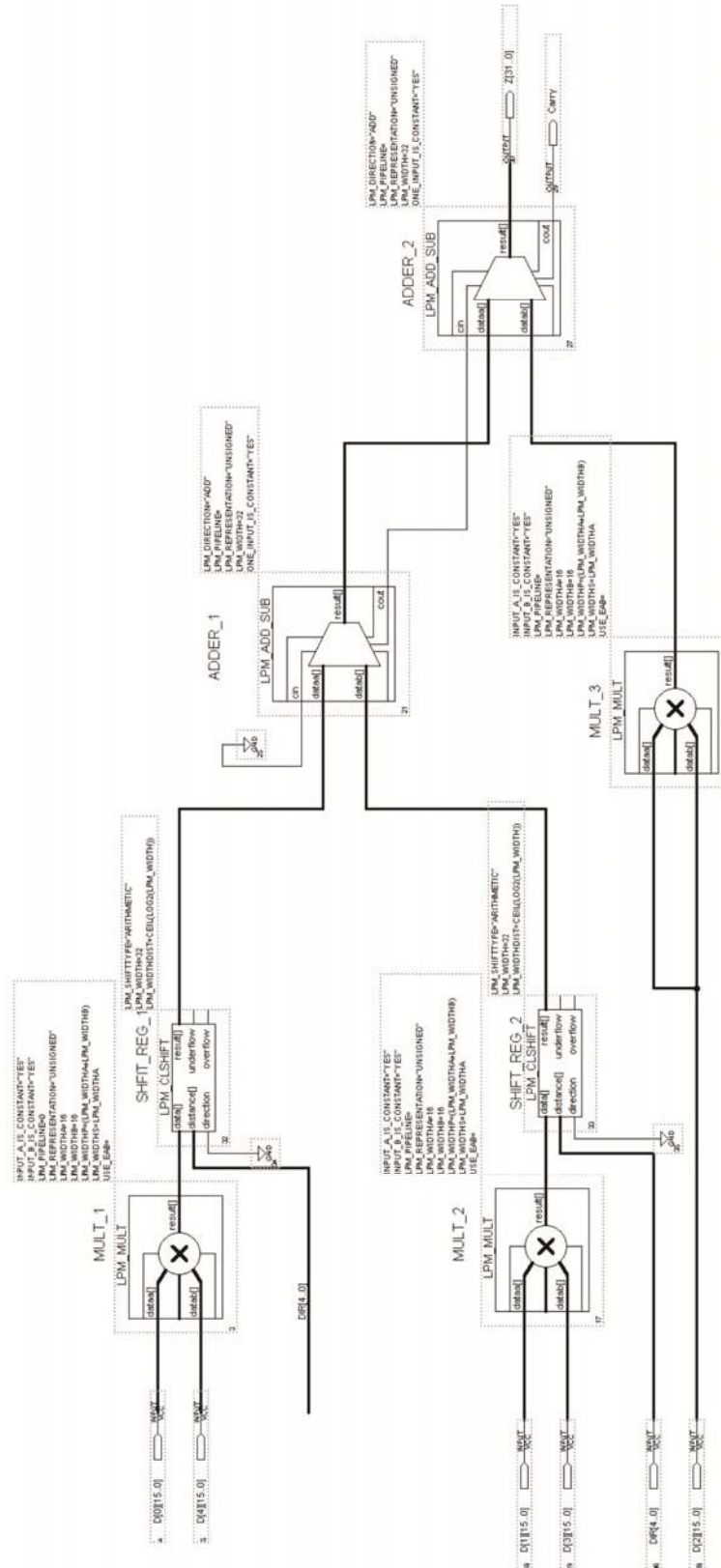


Slika 4.4 Algoritam za serijsku arhitekturu.

Nasuprot serijskoj arhitekturi, paralelna arhitektura nema kašnjenja. Njena konfiguracija je prikazana na slici 4.6. Ona isključuje multipleksore, ali povećava broj množača (ukupno 3), sabirača (2) i pomjeračkih registara (3). Za njenu praktičnu realizaciju je, stoga, potreban veći čip od onog koji se koristi za serijsku realizaciju.



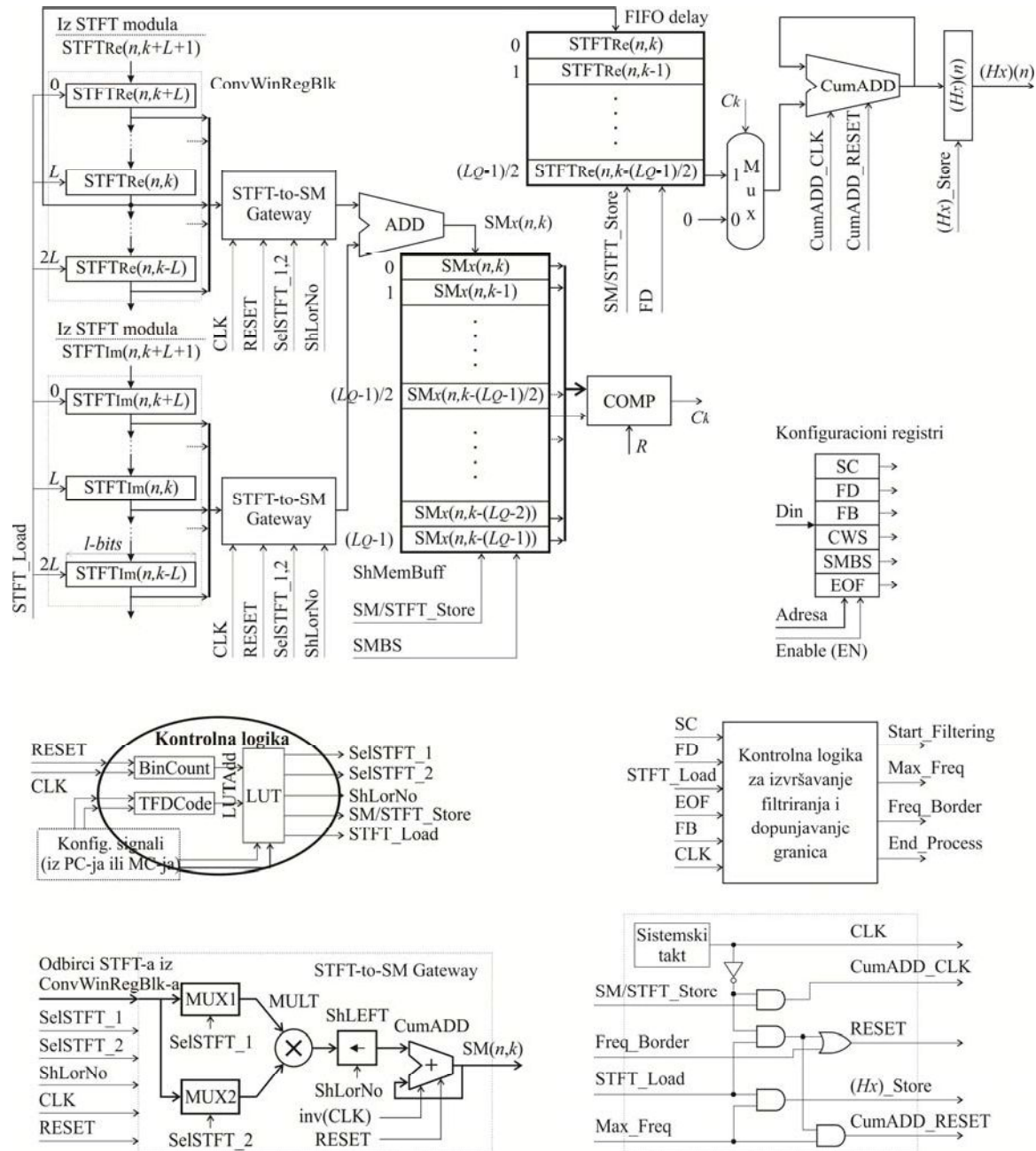
Slika 4.5 Detaljna šema korišćena za realizaciju serijske konfiguracije na čipu.



Slika 4.6 Detaljna šema korišćena za realizaciju paralelne konfiguracije na čipu.

4.2.3. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i SM-a, [90]

Za TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i SM-a, [90], je razvijena potpuna hardverska realizacija koja će biti opisana u nastavku. Algoritam na kome se bazira ovaj filter je predstavljen u drugoj glavi disertacije (vidi poglavlje 2.2.3). Arhitektura njegove hardverske realizacije, sposobne za rad u realnom vremenu, je prikazana na slici 4.7.



Slika 4.7 Hardverski dizajn opisanog TV sistema za filtriranje.

Izračunavanje se izvodi u $L+3$ taktova po frekvencijskoj tački. ConvWinRegBlk i STFT-to-SM gateway se koriste u paru i služe za implementaciju realne i imaginarnе komponente SM-a u $L+1$ taktova, [36]. Funkcija TV filtra se zatim implementira u naredna dva takta. U $(L+2)$ -om taktu, izračunati odbirak SM-a i odgovarajući odbirak $STFT_{Re}$ se smještaju u pomjerački memorijski bafer (ShMemBuff) i u registar FIFO delay, respektivno, setovanjem signala $SM/STFT_Store$. Paralelno sa navedenim komponentama radi i COMP blok. On se sastoji od seta komparatora i služi da generiše signal C_k koji determiniše lokalnu IF-ju. Signal $C_k=1$, sa kašnjenjem od pola takta, omogućava uključivanje izlaznog odbirka iz registra FIFO delay u računanje odbirka izlaznog signala. U $(L+3)$ -em taktu, novi odbirak STFT-je se importuje u ConvWinRegBlk setovanjem signala $STFT_Load$, i opisani proces se ponavlja za narednu frekvencijsku tačku. Simultano, i samo kada maksimalni odbirak SM-a postane centralni element ShMemBuff-era, detektovan signalom Max_freq , izračunata vrijednost $(Hx)(n)$ se smješta u izlazni registar. Sa kašnjenjem od pola takta kumulativni sabirač CumADD se resetuje, čime počinje izvršavanje za novi vremenski trenutak n .

Registar FIFO delay se koristi kako bi se okasnili odbirci STFT-je. Izlazni odbirak iz registra FIFO delay odgovara, po frekvenciji, centralnom elementu ShMemBuff-era. Lokacije ShMemBuff-era sadrže frekvencijski zavisne odbirke SM-a iz bazičnog frekvencijskog intervala Q_{k_i} , (2.132). COMP blok prepoznaje lokalnu IF-ju, determinisanu sa $C_k=1$, u frekvencijskoj tački koj ispunjava ranije definisane uslove (i)-(iv) (vidi poglavlje 2.2.3).

Tabela 4.3 Memorijske lokacije Look up tabele. ADD_M označava adresu središnjeg elementa ConvWinRegBlk-a. Simbol \ll označava logičku operaciju pomjeranja ulijevo i $l=Length(SelSTFT_1)$.

LUT Address	Ctrl signals area			$SelSTFT_1$	$SelSTFT_2$
0	0	0	0	$ADD_M \ll l$	ADD_M
1	1	0	0	$ADD_{M+1} \ll l$	ADD_{M-1}
...	1	0	0
L	1	0	0	$ADD_{M+L} \ll l$	ADD_{M-L}
$L+1$	0	1	0	0	0
$L+2$	0	0	1	0	0

Tabela 4.4 Parametri konfiguracionih registara, izraženi kroz broj potrebnih $STFT_Load$ taktova.

Konfiguracioni registar	Vrijednost parametra
Start Convolution (SC)	$(2L+1)-1$
Filtering/FIFO Delay (FD)	$(L_Q-1)/2+1$
Frequency Border (FB)	$N-L-1$
Conv. Win. Size (CWS)	$2L+1$
ShMemBuff Size (SMBS)	L_Q
End of Filtering (EOF)	$N \times N-1$

Cjelokupnim opisanim procesom upravlja Look-up tabela (LUT). Svaka njena lokacija sadrži 3 jednobitna kontrolna signala ($ShLorNo$, $SM/STFT_Store$, $STFT_Load$, respektivno) i adrese multipleksora, tabela 4.3. Binarni brojač generiše nižu adresu, dok L iz registra TFDCode setuje više adrese. Signali $Start_Filtering$, Max_Freq , $Freq_Border$ i $End_Process$ upravljaju operacijama na maksimalnoj frekvenciji. Ovi signali se generišu u modulima čije su bazične komponente binarni brojači promjenljive dužine sa asinhronim resetom i komparatorima binarne magnitude sa binarnim referencama iz Konfiguracionih registara, tabela 4.4. Uslovi sinhronizacije binarnih brojača su vezani sa taktovima CLK i $STFT_Load$. Signal $Freq_Border$ se generiše kako bi resetovao STFT-to-SM gateway i na taj način dopunio frekvencijsku granicu sa $2L$ nula.

Konačno, neophodno je setovati vrijednosti parametara L_Q i R . Široki frekvencijski opseg, (2.134), dobijen u slučaju visoko koncentrisanih, nepreklapajućih FM signala sugeriše robusnost estimacije IF-je u odnosu na L_Q . Stoga, $ShMemBuff$ koji ima nekoliko lokacija, L_Q-2L+1 , je najčešće sasvim dovoljan. Veće vrijednosti praga R skoro u potpunosti uklanjaju uticaj šuma van domena auto-članova, ali mogu izazvati značajno odsijecanje ivica auto-članova konačne dužine trajanja (auto-članovi *chirp* signala). Na bazi opsežnog eksperimentalnog istraživanja u [90] se došlo do zaključka da je vrijednost od 10%-25% maksimalne vrijednosti SM-a pogodna za vrijednost praga R .

Opisani dizajn produkuje različit kvalitet estimacije IF-je, odnosno TV filtriranja u različitom broju taktova po frekvencijskoj tački. Kvalitet se poboljšava sa povećanjem broja taktova, odnosno kako L raste. Ipak, veće L može uzrokovati pojavu kros-članova i značajno povećanje vremena izvršenja. Stoga je za ovaj dizajn TV filtra predložena upotreba relativno male vrijednosti parametra L ($L=2$ ili 3) s obzirom da već te vrijednosti daju reprezentaciju visokog kvaliteta bez prisustva kros-članova, [84], i imaju malo vrijeme izvršavanja (5 ili 6 taktova po frekvencijskoj tački).

Tabela 4.5 Hardverska složenost i računski cijena opisanog dizajna

Tip filtra	Hardverska kompleksnost		Broj operacija po odbirku izlaznog signala
	Funkcionalne jedinice	Memorijske lokacije	
Opisani dizajn	8	$5L+3L_Q/2+27/2$	$O((2L+5)(N-2L))$

Opisani multitaktni dizajn, [90], značajno redukuje hardversku kompleksnost i stoga omogućava značajnu redukciju dimenzija korišćenog čipa, potrošnju energije i cijenu hardvera. Uočimo da je broj korišćenih funkcionalnih jedinica konstantan, te da ne zavisi od dužine trajanja analiziranog signala, tabela 4.5.

Zaključuje se da je opisani dizajn, [90], sposoban da izvodi TV filtriranje FM signala proizvoljne dužine, s obzirom da njegova računski kompleksnost ne zavisi od dužine signala.

4.2.4. TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i CTFWD-je, [95]

Za TV filter sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu funkcije pokretnog vektora i CTFWD-je, [95], je razvijena potpuna hardverska realizacija koja će biti opisana u nastavku. Algoritam na kome se bazira ovaj filter je predstavljen u drugoj glavi disertacije (vidi poglavlje 2.2.4). Arhitektura za njegovu hardversku realizaciju, koja radi u realnom vremenu, je prikazana na slici 4.8.

Arhitektura se sastoji iz dva dijela. STFT-to-CTFWD *gateway*, slika 4.8(b), implementira algoritam dat jednačinom (2.136). Ulazni odbirci STFT-je (STFT_IN) se koriste za izračunavanje unaprijedene TF reprezentacije zašumljenog signala, odnosno CTFWD-je. Pomjerački memorijski bafer (ShMemBuff), koji se sastoji od seta *paralell-in* i *paralell-out* registara, implementira funkciju pokretnog vektora Q. Njegove memorijske lokacije sadrže odbirke CTFWD-je (koji su zavisni samo od frekvencije) iz bazičnog frekvencijskog intervala Q_k . U skladu sa procedurom estimacionog algoritma (vidi poglavlje 2.2.4), COMP BLCK koji se sastoji od seta komparatora, detektuje lokalnu IF-ju, odnosno funkciju oslonca filtra, određenu sa $FRS_k=1$. Registar FIFO delay se koristi kako bi se okasnili odbirci STFT-je. Izlazni odbirak iz registra FIFO delay odgovara, po frekvenciji, centralnom elementu iz ShMemBuff-era.

Generalno, dizajn ovog hardvera izvodi računanje u $L(n,k)+3$ taktova po frekvencijskoj tački. U prvih $L(n,k)+1$ taktova (nulti, prvi,..., $L(n,k)$ -ti), izračunat je odbirak CTFWD-je, [87]. Funkcija TV filtra se tada implementira u naredna dva takta ($(L(n,k)+1)$ -vi i $(L(n,k)+2)$ -i), pri čemu se $(L(n,k)+2)$ -i preklapa prilikom izvršavanja sa nultim taktom naredne frekvencijske tačke. Bezuslovni nulti takt, kada je $L(n,k)=0$, i $(L(n,k)+1)$ -vi, obezbjeđuju estimaciju IF-je na bazi spektrograma u svakoj TF tački. Ostali (uslovni) taktovi (prvi, drugi,..., $L(n,k)$ -ti) se koriste kako bi unaprijedili kvalitet estimacije IF-je, ali samo u TF tačkama iz domena auto-članova STFT-je, determinisanih signalom *STFT_AT_Reg*.

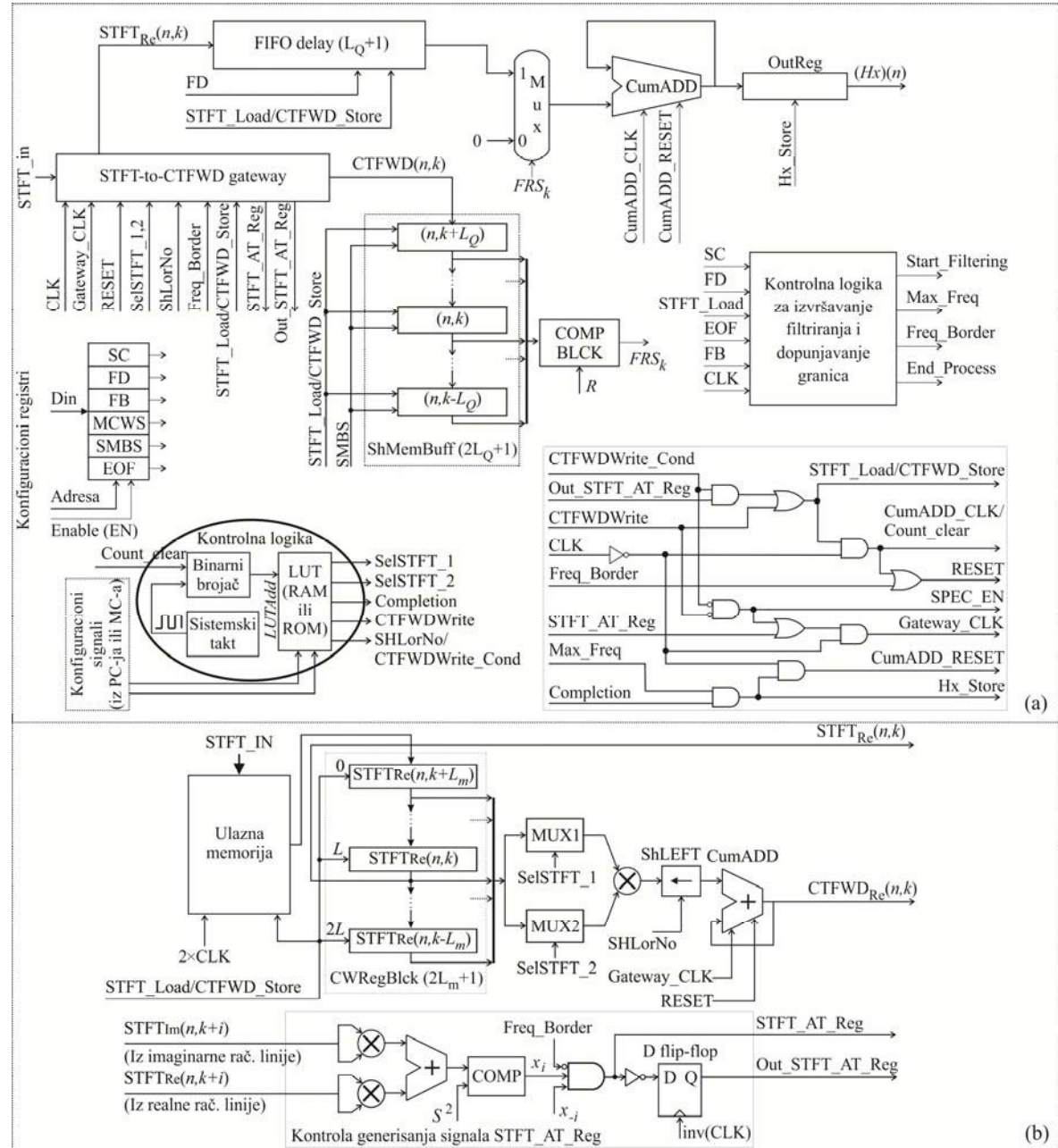
Signali $x_{\pm i}$ se dobijaju na izlazu iz komparatora COMP:

$$x_{\pm i} = \begin{cases} 1, & \text{za } \left| STFT_x(n, k \pm i) \right|^2 \geq S^2 \\ 0, & \text{za } \left| STFT_x(n, k \pm i) \right|^2 < S^2 \end{cases}$$

Ovi signali determinišu nenulte vrijednosti STFT-je $STFT(n, k \pm i)$ i generišu signal *STFT_AT_Reg*, $STFT_AT_Reg = x_i \times x_{-i}$ ($i=0,1,...,L(n,k)$) u odgovarajućem taktu. Učestvujući u generisanju signala *Gateway_CLK*, nulta vrijednost signala *STFT_AT_Reg* onemogućava i -tom članu ($i=0,1,...,L(n,k)$) da uđe u sumiranje (2.136) u i -tom taktu. Signal *CTFWDWrite_Cond* je setovan u svakom uslovnom taktu. Signal $Out_STFT_AT_Reg = \text{inv}\{STFT_AT_Reg\}$ omogućava da signal *CTFWDWrite_Cond* napravi bezuslovni $(L(n,k)+1)$ -vi takt iz narednog uslovnog $(i+1)$ -og. Na ovaj način, signali *STFT_AT_Reg* i *CTFWDWrite_Cond* dozvoljavaju razvijenom dizajnu da optimizuje broj taktova uzetih u različitim TF tačkama u toku izvršavanja, kao i da izvrši

željenu estimaciju IF-je, baziranu na CTFWD-ji. Simultano, oni kontrolišu završetak filtriranja u posmatranoj frekvencijskoj tački. Signal $SPEC_EN$ omogućava izvršavanje u bezuslovnom nultom taktu, čak i kada je $x_0=0$.

U $(L(n,k)+1)$ -om taktu, izračunati odbirak CTFWD-je i realni dio odgovarajućeg odbirka STFT-je se smještaju respektivno u ShMemBuff i u registar FIFO delay, setovanjem signala $STFT_Load/CTFWD_Store$. Paralelno ovome, COMP BLCK generiše signal FRS_k , baziran na



Slika 4.8 (a) Hardverski dizajn opisanog nestacionarnog sistema za filtriranje. U centru ShMemBuff registara, označena je TF pozicija smještenih odbiraka CTFWD u smislu predstavljenog estimacionog algoritma. (b) Hardverska implementacija realne računске linije STFT-to-CTFWD gateway-a.

trenutnom sadržaju lokacija ShMemBuff-era. Sa kašnjenjem od pola takta, $FRS_k=1$ omogućava uključivanje izlaznog odbirka registra FIFO delay u generisanje izlaznog signala kroz sumiranje u kumulativnom sabiraču (CumADD). Istovremeno, signal *RESET* čisti sadržaj STFT-to-CTFWD gateway-a. $(L(n,k)+2)$ -i takt se koristi za završetak izvršavanja. Ipak, izlaz CumADD-a će sadržati konačnu vrijednost $(Hx)(n)$, za dato n , tek nakon izvođenja opisanog izvršavanja u svakoj frekvencijskoj tački u posmatranom trenutku vremena n .

Konačna vrijednost $(Hx)(n)$ će se, stoga, dobiti nakon izračunavanja u maksimalnoj frekvencijskoj tački, tj. kada maksimalni frekvencijski odbirak CTFWD-je postane centralni element ShMemBuff-era što se detektuje signalom *Max_Freq*. Stoga, signal *Completion*, generisan u $(L(n,k)+2)$ -om taktu mora biti uslovni. On će smjestiti izračunatu vrijednost $(Hx)(n)$ u izlazni registar OutREG, ali samo kada je dostignuto $Max_Freq=1$. Sa kašnjenjem od pola CLK, CumADD se resetuje i počinje izvršavanje za novi vremenski trenutak n .

Simultano sa $(L(n,k)+1)$ -im taktom za posmatranu frekvencijsku tačku k , ubacuje se novi STFT_IN odbirak i opisani proces se ponavlja za novu frekvencijsku tačku $k+1$. Primjetimo da ubacivanje novog odbirka STFT_IN koincidira sa *STFT_Load/CTFWD_Store* taktom, čiji period stoga mora biti $(L(n,k)+1)$ puta veći od perioda takta. Ova tehnika implementacije (*pipelineing*) omogućava preklapanje u izvršavanju završnog takta za razmatranu frekvencijsku tačku k i nultog takta za novu frekvencijsku tačku $k+1$. Na ovaj način se poboljšava protok TV filtriranja – ukupna količina posla urađena u datom vremenu ima prednost u odnosu na vrijeme izvršavanja u individualnoj frekvencijskoj tački. To može biti značajno unaprijeđenje jer se za slučaj realnog filtriranja izvršava okvirno od deset hiljada do nekoliko miliona izračunavanja (u različitim TF tačkama).

Tabela 4.6 Memorijske lokacije Look up tabelle. ADD_M označava adresu centralnog elementa CWRegBk-a. Simbol \ll označava logičku operaciju pomjeranja ulijevo i l =dužina(*SelSTFT_1*).

LUT Add	Ctrl signali			<i>SelSTFT_1</i>	<i>SelSTFT_2</i>
0	0	0	1	$ADD_M \ll l$	ADD_M
1	1	0	0	$ADD_{M+1} \ll l$	ADD_{M-1}
.....	1	0	0
L_m	1	0	0	$ADD_{M+L_m} \ll l$	ADD_{M-L_m}
L_m+1	0	1	0	0	0

Cjelokupnim opisanim procesom upravlja LUT-a. Njene lokacije se sastoje od 3 jednobitna kontrolna signala (*ShLorNo/CTFWDWrite_Cond*, *CTFWDWrite*, *Completion*) i adresa MUX-eva, tabela 4.6. Binarni brojač generiše LUT adrese. Na kraju sekvence u svakoj frekvencijskoj tački, signal *Count_clear* čisti binarni brojač sa kašnjenjem od pola takta, mjereno *STFT_Load/CTFWD_Store* taktom. Tokom inicijalizacije sistema sadržaj LUT-e se automatski ubacuje spolja, pomoću PC-a ili mikrokontrolera opšte namjene. Signali *Start_Filtering*, *Max_Freq*, *Freq_Border* i *End_Process* upravljaju operacijama na maksimalnoj frekvenciji. Ovi

signali se generišu u modulima čije su osnovne komponente binarni brojači varijabilne dužine sa asinhronim resetom i komparatorima binarne magnitude sa binarnim referencama iz konfiguracionih registara, tabela 4.7.

Uslovi sinhronizacije binarnih brojača su povezani sa signalima *STFT_Load/CTFWD_Store* i sistemskim taktom. Signal *Freq_Border* se generiše da bi resetovao STFT-to-CTFWD gateway tokom ivičnih efekata, što rezultuje dopunjavanjem frekvencijske granice sa $2L_m$ nula. Na ovaj način je implementiran princip kretanja vektora Q po poziciji frekvencijske granice.

Tabela 4.7 Parametri konfiguracionih registara, izraženi brojem potrebnih takova *STFT_Load/CTFWD_Store*.

Konfiguracioni registri	Specifikacija parametara i njihov opis	Vrijednost
Start Convolution (SC)	Start operacije konvolucionog prozora za izračunavanje CTFWD	$(2L_m+1)-1$
Filtering/FIFO Delay (FD)	Frekvencijsko kašnjenje odbiraka STFT za estimaciju FRS	L_Q+1
Frequency Border (FB)	Frekvencijska granična pozicija	$N-L_m-1$
Maximum Conv. Win. Size (MCWS)	Maksimalna veličina konvolucionog prozora	$2L_m+1$
ShMemBuff Size (SMBS)	Veličina ShMemBuff	$2L_Q+1$
End of Filtering (EOF)	Kraj procesa filteriranja	$N \times N-1$

Tabela 4.8 Dužine izlaznih registara za korišćene digitalne jedinice u zavisnosti od parametara l , L_m i N .

Dužina	Parametri l , L_m , N
MUXs, CWRegBlck	L
Množači	$2 \times l$
Sabirač iz kontrole generisanja signala <i>STFT_AT_Reg</i>	$\text{CEIL}(\log_2(2 \cdot (2^{2l+1}-1)))$
ShLEFT	$2 \times l+1$
CumADD iz gateway-a	$C = \text{CEIL}(\log_2((2^{2l+1}-1) \times (L_m+1)))$
ShMemBuff	$C+1$
Izlazni CumADD i OutREG	$\text{CEIL}(\log_2((2^l-1) \times N))$

Tabela 4.9 Hardverska složenost i računska cijena opisanog dizajna

Tip filtra	Hardverska kompleksnost		Broj operacija po odbirku izlaznog signala
	Funkcionalne jedinice	Memorijske lokacije	
Opisani dizajn	13	$2N+5L_m+3L_Q+13$	$O(5(N-2L_m))$

Maksimalne dužine izlaznih registara za svaku korišćenu digitalnu jedinicu su date u tabeli 4.8. Izvedene su kao funkcije dužine podatka *STFT_IN* (l), maksimalne moguće širine konvolucionog prozora L_m i broja frekvencijskih tačaka u posmatranom trenutku vremena. Primjetimo da je kritična tačka širina izlaza CumADD-a. Najduža, kritična putanja koja determiniše najkraće vrijeme takta korespondira generisanju signala *STFT_AT_Reg* u polovini

takta, kroz množač, sabirač i komparator ($T_c/2 = T_m + T_a + T_{comp}$, gdje su T_c , T_m , T_a , T_{comp} sistemski takt, vremena množenja, sabiranja i poređenja, respektivno). Na ovaj način je obezbjeđena participacija signala *STFT_AT_Reg* u generisanju signala *Gateway_CLK* u drugoj polovini istog takta.

Na bazi dužine izlaznih registara digitalnih jedinica korišćenih u generisanju signala *STFT_AT_Reg*, tabela 4.8, vidimo da vremena množenja i sabiranja zavise od dužine l podatka *STFT_IN*. Stoga, kritična putanja opisanog dizajna i najkraće vrijeme sistemskog takta zavise isključivo od dužine l podatka *STFT_IN*. Konačno, odbirci *STFT_IN* se importuju u *STFT-to-CTFWD* gateway sa svakim dvostrukim sistemskim taktom, što simultano determiniše brzinu odabiranja analognog zašumljenog signala $x(t)$ i koincidira sa minimalnim vremenom izvršavanja po frekvencijskoj tački opisanog dizajna.

4.2.5. Poređenje hardverskih realizacija nelinearnih TV filtara

Nelinearni TV filtri, razvijani u posljednjih dvadesetak godina, mahom počivaju na raznovrsnim algoritmima za estimaciju IF-je. Od kvaliteta estimacije IF-je zavisi i kvalitet samog filtriranja analiziranih signala.

Da bi bio u mogućnosti da kvalitetno izvrši estimaciju IF-je za monokomponentne i multikomponentne signale u realnom vremenu, algoritam bi trebao da:

- (a) bude računski dovoljno jednostavan kako bi bila moguća implementacija u realnom vremenu;
- (b) bude nezavisan od signala, kako bi bila moguća detekcija svih lokalnih maksimuma u slučaju multikomponentnog slučaja;
- (c) rezultuje visoko kvalitetnom estimacijom, sa minimalnom mogućom greškom.

Razmotrimo postojeće estimacione algoritme, [90], [95], [128], [137], sa aspekta ovih zahtjeva.

Računski izuzetno kompleksan algoritam iz [128] nije pogodan za implementaciju u realnom vremenu, s obzirom da zahtjev (a) nije zadovoljen. S druge strane, algoritam iz [137], koji, u principu, dozvoljava implementaciju u realnom vremenu, je izuzetno zavisn od oblika estimiranog signala, te stoga ne zadovoljava zahtjeve (b) i (c), što ga čini nepogodnim za filtriranje multikomponentnih signala. Takođe, porastom dužine trajanja analiziranog signala, njegova hardverska kompleksnost značajno raste, i stoga odgovarajuća implementacija u realnom vremenu na integrisanom čipu nije uvijek moguća. Usljed zavisnosti računске kompleksnosti dizajna od dužine analiziranog signala pomenuti sistem može izvoditi isključivo filtriranje signala sa predefinisanim dužinom trajanja.

Višetaktni dizajni predstavljeni u [90] i [95] zadovoljavaju sve navedene kriterijume. Njihova hardverska kompleksnost je redukovana, što dalje omogućava smanjenje cijene i dimenzija upotrijebljenog čipa, kao i smanjenje utroška energije. Uočimo da je broj korišćenih

funkcionalnih jedinica kod oba filtra konstantan, te da ne zavisi od dužine analiziranog signala, tabela 4.5. i tabela 4.9. Zaključuje se da su ovi dizajni sposobni da estimiraju FM signale proizvoljne dužine, odnosno da je njihova realizacija uvijek moguća. Dizajn predstavljen u [95], koji koristi tehniku *pipelineing*-a u svojoj realizaciji, značajno redukuje vrijeme izvršavanja i omogućava efikasnije filtriranje u odnosu na dizajn iz [90]. Takođe, imajući u vidu činjenicu da se ovaj metod bazira na 1D CTFWD-ji, visoko kvalitetna estimacija IF-je obezbjeđuje visoko kvalitetno filtriranja, kao što je dokazano u [95].

Hardverska implementacija prostorno-promjenljivog filtra baziranog na algoritmu za estimaciju lokalne frekvencije u realnom vremenu

Postojeći *online* algoritmi i hardverska rješenja za TV filtriranje 1D nestacionarnih signala su analizirana u četvrtoj glavi disertacije. Poseban osvrt je načinjen na mogućnosti njihove implementacije, kao i resurse koji su potrebni u slučaju kada je ona moguća.

Broj S/SF sistema koji su u stanju da vrše kvalitetno prostorno-promjenljivo filtriranje 2D nestacionarnih signala u prisustvu aditivnog šuma je značajno manji, [93], [94], [96]-[98], [100], [130], [143], [144], [146]. Pojedini od ovih sistema su suviše kompleksni, te je njihova hardverska implementacija praktično nemoguća, dok pojedini nijesu u stanju da izvrše filtriranje signala u realnom vremenu. U tim slučajevima ovi sistemi se zadržavaju na nivou softverskih rješenja.

Osnovni cilj disertacije je razvijanje metoda koji će obezbjediti kvalitetno filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala u realnom vremenu, [93], [94], [96]-[98], [100], i odgovarajuće hardverske implementacije kojom će biti izvršena konačna verifikacija njegovog rada. Sam razvijeni metod je predstavljen u trećoj glavi disertacije, dok će u ovoj glavi posebna pažnja biti posvećena razvoju njemu odgovarajuće višetaktne implementacije (*Multiple-Clock-Cycle Implementation* - MCI), uz detaljnu analizu načina funkcionisanja, hardverske i računске kompleksnosti, kao i potrebnih resursa za njegovu realizaciju.

5.1. Analiza postojećih hardverskih rješenja

Kao što je rečeno u više navrata, linearni filtri predstavljaju klasična rješenja, te ćemo stoga poći od njihove analize. Razmotrimo resurse koje bi ovi filtri zahtijevali u slučaju da je njihova poznata *online* implementacija razvijena za slučaj procesiranja 1D nestacionarnih signala (poglavlje 4.1, tabela 4.2) proširena na procesiranje 2D nestacionarnih signala. Analiza

kompleksnosti takvih filtara, u slučaju da je njihova hardverska realizacija moguća, je data u tabeli 5.1.

Problemi sa kojima se susrijeću klasični sistemi za filtriranje 1D nestacionarnih signala se zadržavaju i u slučaju 2D signala. Dakle, ovi filtri ispoljavaju nedostatke koji značajno ograničavaju njihovu primjenu: Zadeh-ov filtar ne može biti korišćen za nestacionarne signale, STFT i Gabor-ov filtar imaju ograničenu rezoluciju, dok je Weyl-ov filtar u principu ograničen na *halfband* signale. Naznačeni nedostaci ovih sistema su detaljno pojašnjeni u drugoj glavi disertacije.

Nestacionarni filtri bazirani na TFD-jama, odnosno na S/SFD-jama su numerički veoma kompleksni i zahtijevaju značajno vrijeme za izračunavanje, što ih čini nepogodnim za analizu u realnom vremenu, te značajno ograničava njihovu upotrebu. Hardverska implementacija, kada je moguća može prevazići navedene probleme, obezbjeđujući aplikaciju ovih 1D i 2D filtara u rješavanju brojnih zadataka u praksi.

Tabela 5.1 Kompleksnost (hardverska i računska) različitih *online* S/SF filtara. Ulazni *halfband*, izlazni *halfband* i *halfband* Weyl-ov filtar imaju istu kompleksnost kao *minimum energy* Weyl-ov filtar, uz dodatnu kompleksnost uzrokovanu *halfband* ograničenjem ulaznog i/ili izlaznog signala. Kompleksnost STFT i Gabor-ovog filtra je ista kao za odgovarajuće *multiwindow* verzije respektivno, uz uslov da je $M=1$. ξ je faktor preodabiranja, koji se koristi u dizajnu Gabor-ovog filtra, parametar p ($5 \leq p \leq 7$) je broj dominantnih parova *eigen* vrijednosti/*eigen* vektora i koristi se u dizajniranju projekcionog filtra (ovi parametri su uvedeni i definisani u poglavlju 2.1). Sa χ je označen prosječan broj taktova po FF tački razvijenog dizajna. Logička operacija pomjeranja ulijevo (*shift left*, odnosno množenje sa 2) nije razmatrana u prikazanim računskim zahtjevima, jer je vrijeme potrebno za njeno izvršavanje mnogo kraće od vremena potrebnog za ostale operacije.

Tip filtra	Hardverska kompleksnost		Broj operacija po izlaznom odbirku
	Broj funkcionalnih jedinica	Broj memorijskih lokacija	
Zadeh-ov	$N^2 + N^3 \log N$	$N^2 + N^4/2$	$O(N^2 + N^3 \log N)$
STFT	$3N^2 + 2N^3 \log N$	$2N^2$	$O(3N^2 + 2N^3 \log N)$
Gabor-ov	$\varepsilon^2(3 + 2N \log N)$	$2N^2$	$O(\varepsilon^2(3 + 2N \log N))$
<i>Minimum energy</i> Weyl-ov	$N^2 + N^3 \log N$	$2N^2 + N^4/2$	$O(N^2 + N^3 \log N)$
Aproksimativni <i>halfband</i> Weyl-ov	$N^2/4 + N^3/8(\log(N/2))$	$N^2 + N^4/8$	$O(N^2/4 + N^3/8(\log(N/2)))$
<i>Multiwindow</i> STFT	$M(3N^2 + 2N^3 \log N)$	$2MN^2$	$O(M(3N^2 + 2N^3 \log N))$
<i>Multiwindow</i> Gabor	$M\xi^2(3N + 2N^2 \log N)$	$2MN^2$	$O(M\xi^2(3N + 2N^2 \log N))$
Projekcioni	$N^2(3N^2p + 3Np^2 + p^3 + N^2 + N/8(\log(N/2)))$	$N^2(2N^2 + 2p^2 + Np + 1)$	$O(N^2(3N^2p + 3Np^2 + p^3 + N^2 + N/8(\log(N/2))))$
Predloženi signal adaptivni	14	$2N^2 + L_m(4N + 2L_m + 7) + 3NL + 3L + 20$	$O(N^2(5(\chi - 1) + 1))$

Online algoritmi za jednotaktnu implementaciju (*Single-Clock-Cycle Implementation* - SCI), odnosno, paralelnu implementaciju linearnih TV filtara iz [39], [41], su prilično složeni i zahtijevaju ponavljanje osnovnih računskih elemenata, ukoliko su neophodni više od jednog puta. Osim toga, ove implementacione šeme zavise od dužine filtriranog signala, te su sposobne

da vrše isključivo filtriranje signala unaprijed definisane dužine (trajanja). Za slučaj 2D signala, navedeni problemi se višestruko multipliciraju, te je njihova hardverska realizacija značajno otežana.

U tabeli 5.1 je data hardverska kompleksnost (u smislu upotrijebljenih funkcionalnih elemenata i memorijskih lokacija) klasičnih, linearnih sistema upodobljenih za obradu 2D signala, i kompleksnost sistema predloženog i razvijenog u ovoj glavi disertacije. Ono što je odmah moguće uočiti je zavisnost broja funkcionalnih jedinica od dužine prozorom odsječenog signala $N \times N$ kod klasičnih, linearnih sistema. U najboljem slučaju (Gabor-ov filter) ova složenost je reda veličine $\text{Mlog}N$. S druge strane, broj upotrijebljenih funkcionalnih jedinica ovdje predstavljenog sistema je konstantan (svega 14 funkcionalnih jedinica) i ne zavisi od dužine prozorom odsječenog signala. Bitno je uočiti da bi za svako eventualno povećanje dimenzija signala broj funkcionalnih jedinica kod klasičnih sistema drastično rastao što bi onemogućilo njihovu implementaciju na integrisanom čipu, dok bi kod razvijenog rješenja taj broj uvijek bio isti jer predstavlja fiksnu vrijednost. Stoga se jednostavno dolazi do zaključka da je samo razvijeni dizajn uvijek pogodan za realizaciju na čipu (*System-on-a-Chip* - SoC), implementaciju u realnom vremenu i filtriranje 2D FM signala.

U zavisnosti od dužine prozorom odsječenog signala $N \times N$, razvijeni dizajn i Gabor-ov filter zahtijevaju minimalan ukupan broj operacija izvedenih po odbirku izlaznog signala koji utiče na *throughput*¹⁸ i vrijeme izvršavanja. Osim toga, tehnika *pipeline*-inga pomaže predloženom dizajnu da dodatno poboljša vrijeme izvršavanja. Na osnovu navedenog zaključujemo da razvijeni dizajn omogućava značajno bolje (ili uporediv jedino sa Gabor-ovim filtrom) vrijeme izvršavanja od razmatranih SCI dizajna, otklanjajući na taj način glavni nedostatak klasičnog MCI dizajna.

Broj memorijskih lokacija razvijenog sistema je aproksimativno na nivou broja memorijskih lokacija STFT i Gabor-ovog filtra. Međutim, imajući u vidu dostupnost i nisku cijenu memorije, činjenica da memorijski zahtjevi razvijenog sistema ne unaprijeđuju zahtjeve postojećih rješenja, ne predstavlja ograničavajući faktor dizajna.

Hardverska implementacija nelinearnih 1D TV filtera iz [27], [128], baziranih na kvadratnim TFD-jama traži računski izuzetno kompleksne i vremenski zahtjevne procedure estimacije IF-je. Eventualna ekspanzija ovih metoda, ukoliko bi bila moguća, na slučaj 2D signala bi se morala zadržati na softverskom rješenju.

Zaključujemo da gore navedena rješenja nijesu primjenjiva za implementacije u realnom vremenu.

S druge strane, SCI pristup iz [137], koji je u mogućnosti da obavlja filtriranje u realnom vremenu je neupotrebljiv za filtriranje multikomponentnih signala, kako 1D tako i 2D signala, imajući u vidu njegovu zavisnost od signala.

¹⁸ Obim izvršenog posla u jedinici vremena.

Kao što je već rečeno, kompleksnost sistema za filtriranje značajno raste u slučaju 2D signala, tako da se paralelni sistemi dizajnirani za procesiranje ovih signala ne mogu implementirati. Dimenzije čipa, potrošnja struje i cijena se značajno uvećavaju u ovom slučaju, dok se brzina procesiranja smanjuje.

5.2. Razvijeno i realizovano hardversko rješenje signal-adaptivnog sistema za filtriranje visoko nestacionarnih 2D FM signala

Signal adaptivni S/SF sistem za filtriranje 2D nestacionarnih signala maskiranih aditivnim šumom, dizajniran u ovoj glavi disertacije, sa sastoji od sljedećih funkcionalnih cjelina, slika 5.1:

1. Ulazna memorija (INPUT MEMORY);
2. Konvolucionni prozori (Convolution window operation file);
3. STFT-to-CTFWD gateway;
4. Modul za detekciju funkcije oslonca filtra (FRS detection module);
5. Izlazni modul (Output signal calculation module).

Sistem je upravljan kontrolom (CONTROL), slike 5.1 i 5.2, koja obuhvata:

1. Glavnu kontrolu (Main ctrl);
2. Izvršnu kontrolu (Ctrl of execution);
3. Kontrolu za izračunavanje signala *STFT_AT_Reg* (Ctrl of *STFT_AT_Reg* determination);
4. Kontrolu za početak i kraj filtriranja, i granične efekte, (Ctrl of start of filtering, end of filtering and padding borders);

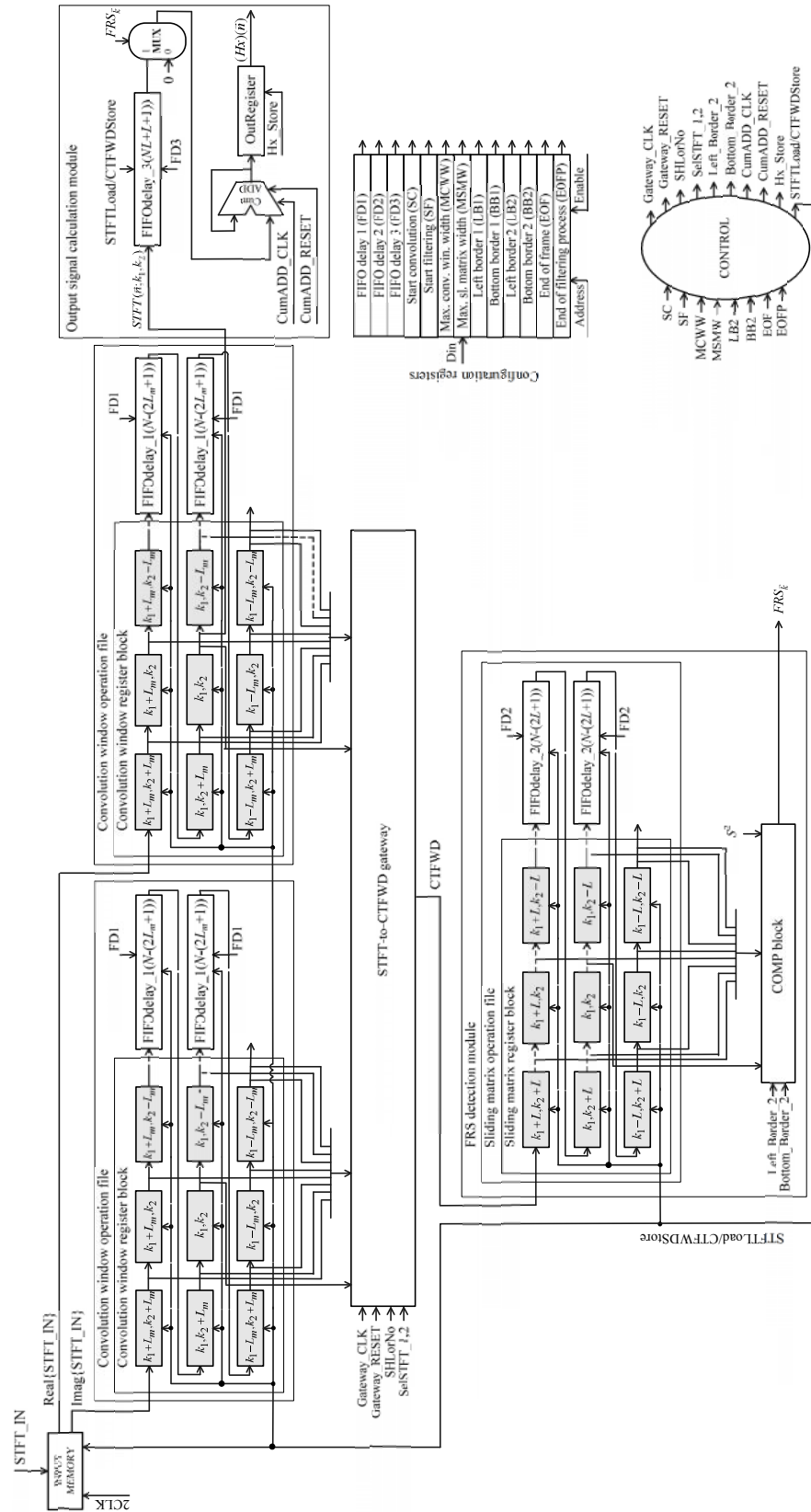
5.2.1. Ulazna memorija

U ulaznoj memoriji su smješteni odbirci 2D STFT-je. Razvijeni sistem ne podrazumijeva modul za računanje ovih odbiraka, već ih smatra poznatim vrijednostima koje su ujedno i ulazni podaci čitavog sistema.

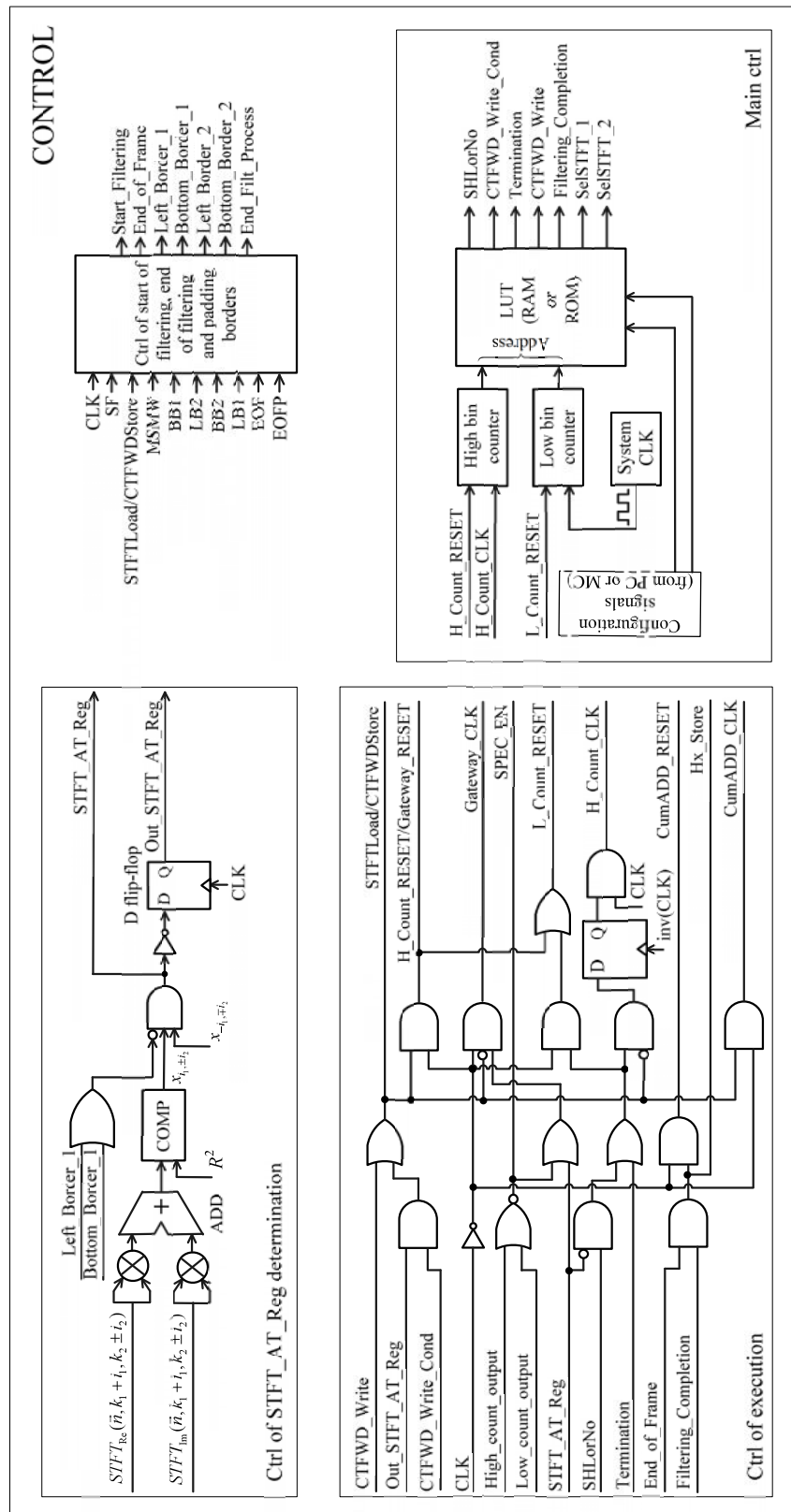
Moduli za računanje odbiraka 2D STFT-je su odavno prisutni u literaturi, [68], [162], i postoji više načina za njihovu implementaciju. Realizacija ovih modula je već duže vrijeme prihvaćena kao opšte poznata, te iz tog razloga ovdje nije detaljno razmatrana.

Ulazna memorija je realizovana kao ROM.

STFT_IN elementi se importuju u ulaznu memoriju sa duplim (sistemskim) taktom CLK, što odgovara minimalnom vremenu izvršavanja zahtijevanom za svaku FF tačku. To je vrijeme potrebno za izračunavanje 2D spektrograma. Minimalni period simultano determiniše i frekvenciju odabiranja analiziranog analognog 2D signala. Svakim taktom *STFT_Load*, element *STFT_IN* se iz ulazne memorije importuje u konvolucionni prozor.



Slika 5.1 Hardverska implementacija razvijanog 2D filtra.



Slika 5.2 Kontrolna logika hardverske implementacije sa slike 5.1.

5.2.2. Konvolucionni prozori

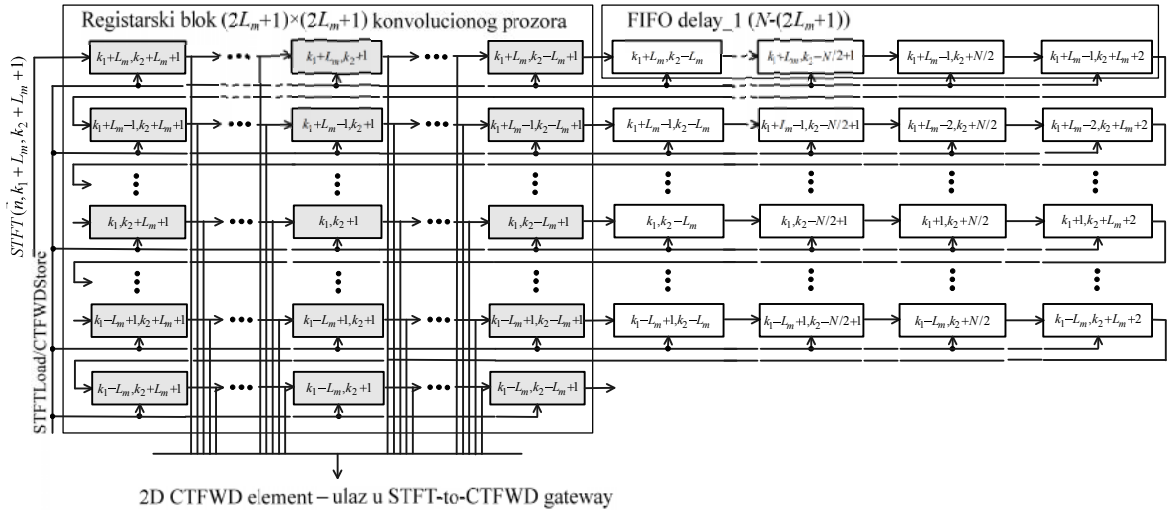
U razvijenom dizajnu se koriste dva konvolucionna prozora identične strukture. U jednom se nalaze realni djelovi odbiraka 2D STFT-je, odnosno realni dio $STFT_IN$, dok se u drugom nalaze odgovarajući imaginarni djelovi istih odbiraka, odnosno imaginarni dio $STFT_IN$.

Operacioni fajl konvolucionionog prozora obuhvata registarski blok dimenzija $(2L_m+1) \times (2L_m+1)$ i $2L_m$ FIFO delay registara dimenzija $N-(2L_m+1)$. Ovi registri su označeni kao FIFO delay_1, a njihova dužina kao FD1.

Osnovni zadatak konvolucionog prozora je da omogući kretanje prozora dimenzija $(2L_m+1) \times (2L_m+1)$ (realizovanog u vidu pomenutog registarskog bloka) po matrici odbiraka 2D STFT-je dimenzija $N \times N$ (koja predstavlja 2D STFT-ju jedne tačke 2D signala), slika 5.3.

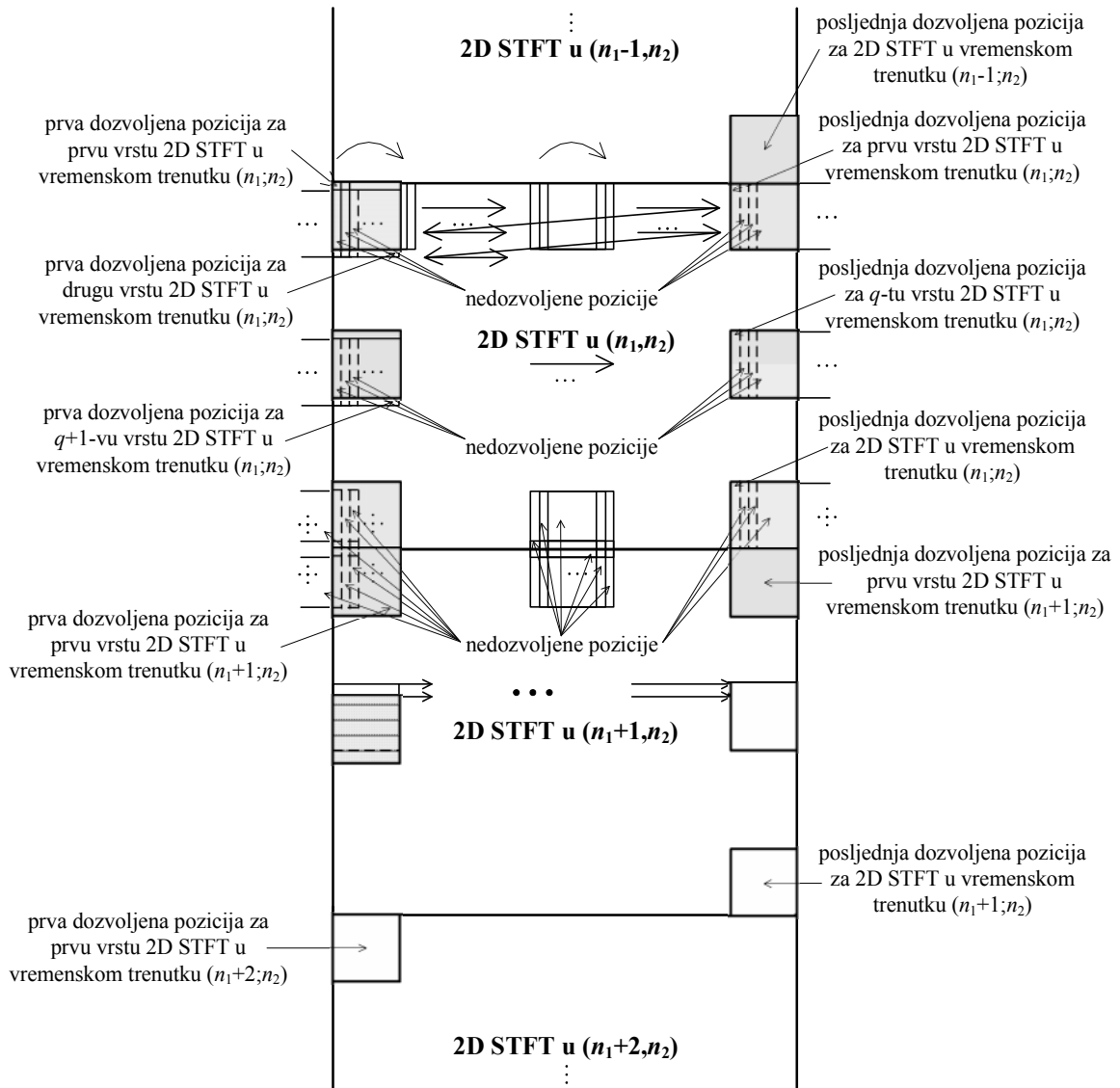
$k_1-L_m, k_2-N/2$...	k_1-L_m, k_2-L_m-1	k_1-L_m, k_2-L_m	k_1-L_m, k_2-L_m+1	...	k_1-L_m, k_2	...	k_1-L_m, k_2+L_m	k_1-L_m, k_2+L_m+1	...	$k_1-L_m, k_2+N/2-1$
$k_1-L_m+1, k_2-N/2$...	k_1-L_m+1, k_2-L_m-1	k_1-L_m+1, k_2-L_m	k_1-L_m+1, k_2-L_m+1	...	k_1-L_m+1, k_2	...	k_1-L_m+1, k_2+L_m	k_1-L_m+1, k_2+L_m+1	...	$k_1-L_m+1, k_2+N/2-1$
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
$k_1, k_2-N/2$...	k_1, k_2-L_m-1	k_1, k_2-L_m	k_1, k_2-L_m+1	...	k_1, k_2	...	k_1, k_2+L_m	k_1, k_2+L_m+1	...	$k_1, k_2+N/2-1$
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
$k_1+L_m-1, k_2-N/2$...	k_1+L_m-1, k_2-L_m-1	k_1+L_m-1, k_2-L_m	k_1+L_m-1, k_2-L_m+1	...	k_1+L_m-1, k_2	...	k_1+L_m-1, k_2+L_m	k_1+L_m-1, k_2+L_m+1	...	$k_1+L_m-1, k_2+N/2-1$
$k_1+L_m, k_2-N/2$...	k_1+L_m, k_2-L_m-1	k_1+L_m, k_2-L_m	k_1+L_m, k_2-L_m+1	...	k_1+L_m, k_2	...	k_1+L_m, k_2+L_m	k_1+L_m, k_2+L_m+1	...	$k_1+L_m, k_2+N/2-1$

(a)



(b)

Slika 5.3 Procedura kretanja 2D konvolucionog prozora i izračunavanja odbirka 2D CTFWD-je: (a) Stvarna pozicija konvolucionog prozora koja odgovara tački (k_1, k_2) (puna linija) i njena naredna pozicija (isprekidana linija); (b) Funkcija konvolucionog prozora, realizovana u realnom vremenu. Čelije korespondiraju elementima 2D STFT-je, i označene su njihovim pozicijama u FF ravni.



Slika 5.4 Kretanje konvolucionog prozora po odbircima 2D STFT-je sa naznačenim nedozvoljenim pozicijama u kojima se izbjegava analiza upotrebom signala *Left_Border_1* i *Bottom_Border_1*. Konvolucionni prozori sa horizontalnom šrafurom u vremenskom trenutku (n_1+1, n_2) se nalaze na dvijema susjednim dozvoljenim pozicijama (sve pozicije između označene dvije predstavljaju nedozvoljene pozicije i signal *Left_Border_1* neće dozvoliti analizu u njima). Konvolucionni prozori sa vertikalnom šrafurom u vremenskim trenucima (n_1+1, n_2) i (n_1+2, n_2) se nalaze na dvijema susjednim dozvoljenim pozicijama (sve pozicije između označene dvije predstavljaju nedozvoljene pozicije i signal *Bottom_Border_1* neće dozvoliti analizu u njima).

Kako se svakim taktom *STFT_Load*, po jedan element *STFT_IN* iz ulazne memorije prebacuje u konvolucionni prozor, tako se prethodno zatečeni sadržaj registara (unutar registarskog bloka konvolucionog prozora i registra FIFO delay_1) pomjera za jedno mjesto udesno.

Dakle, kada se element *STFT_IN* upiše u registar na poziciji (k_1+L_m, k_2+L_m) , prethodni sadržaj tog registra se pomjera na susjednu lokaciju (k_1+L_m, k_2+L_m-1) . Sadržaj sa lokacije (k_1+L_m, k_2+L_m-1) se pomjera na lokaciju (k_1+L_m, k_2+L_m-2) i tako redom. To znači da će se prvih

$2L_m$ elemenata posljednje kolone registarskog bloka (lokacije (k_1+L_m, k_2-L_m) , (k_1+L_m-1, k_2-L_m) ..., (k_1, k_2-L_m) , (k_1-L_m-1, k_2-L_m)) naći na prvom mjestu odgovarajućih FIFO delay registara, dok će $(2L_m+1)$ -vi element (lokacija (k_1-L_m, k_2-L_m)) izaći iz registarskog bloka, jer više nije od interesa. Takođe, sadržaji posljednjih lokacija FIFO delay registara postaju sadržaji prvih registara 2., 3.,..., $(2L_m+1)$ -ve vrste registarskog bloka konvolucionog prozora, odnosno upisuju se na lokacije (k_1+L_m-1, k_2+L_m) , (k_1+L_m-2, k_2+L_m) ..., (k_1-L_m, k_2+L_m) .

Na ovaj način je omogućeno izvršavanje funkcije kretanja prozora dimenzija $(2L_m+1) \times (2L_m+1)$ u FF domenu po matrici odbiraka 2D STFT-je za jedan vremenski trenutak $\vec{n}=(n_1, n_2)$ analiziranog 2D signala. Elementi svakog registarskog bloka će proizvoditi, u skladu sa ranije opisanim algoritmom (vidi poglavlje 3.2.2), element 2D CTFWD-je koji adresom korespondira centralnom elementu registarskog bloka, odnosno elementu na poziciji (k_1, k_2) .

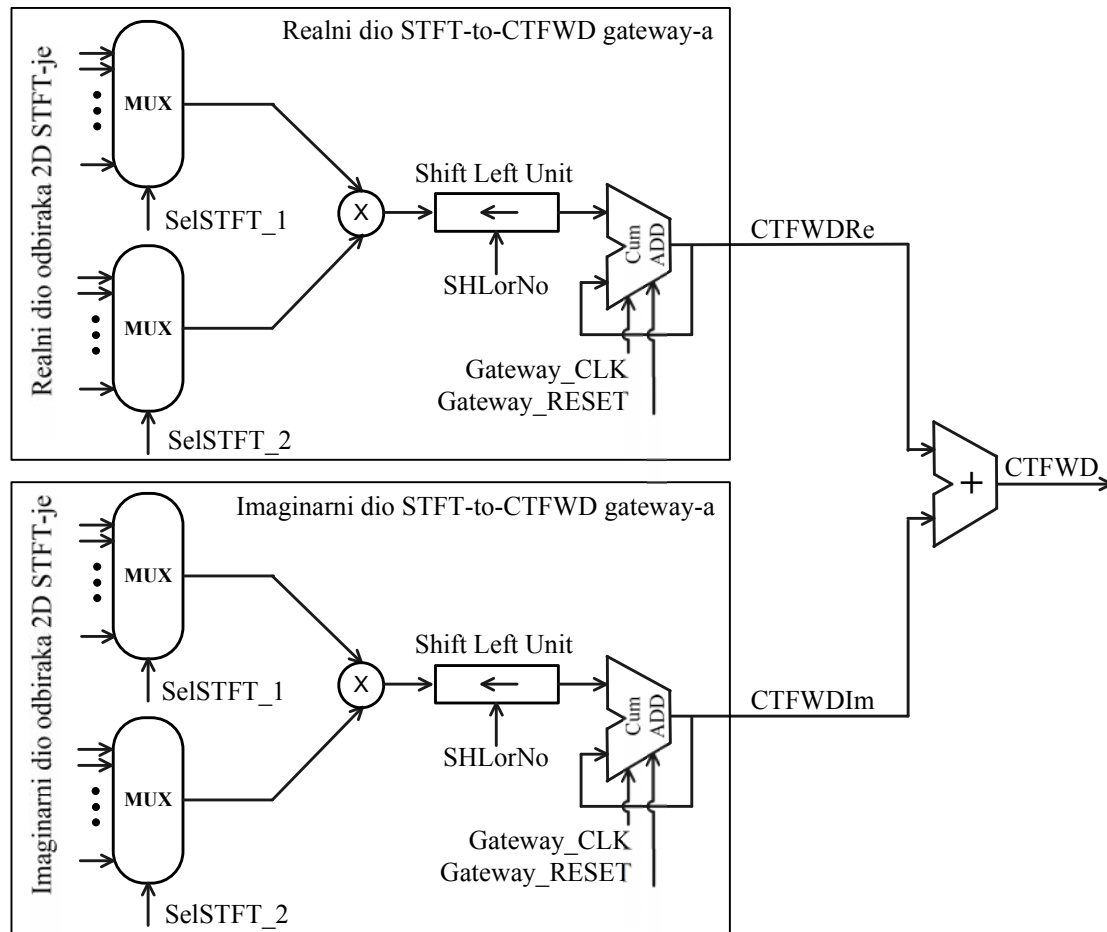
Treba imati u vidu da prilikom kretanja konvolucionog prozora po odbircima 2D STFT-je postoje tzv. "nedozvoljene" pozicije, odnosno pozicije u kojima se prozor može naći ali obuhvaćeni odbirci ne podliježu ranije opisanoj analizi, slika 5.4. Naime, treba voditi računa da se zajedno ne smiju analizirati odbirci iz različitih vremenskih trenutaka, kao što se zajedno ne smiju analizirati ni odbirci koji se ne mogu grupisati u pravilan kvadratni prozor. Ove situacije su regulisane upotrebom signala *Left_Border_1* i *Bottom_Border_1*, što će biti detaljnije razmatrano u nastavku.

5.2.3. STFT-to-CTFWD gateway

Na osnovu ulaznih odbiraka 2D STFT-je iz konvolucionih prozora i u skladu sa definicionom jednačinom (1.92), STFT-to-CTFWD gateway vrši izračun odgovarajućih odbiraka 2D CTFWD-je.

Detaljna šema STFT-to-CTFWD gateway-a je prikazana na slici 5.5. Gateway se sastoji od dvije istovjetne grane, zadužene za obradu realnih i imaginarnih djelova odbiraka 2D STFT-je. Procesiranje ovih vrijednosti se vrši na isti način.

Odbirci 2D STFT-je se dovode na ulaze multipleksora. Selekcionim signalima *SelSTFT_1* i *SelSTFT_2*, koji se čitaju iz LUT-e, tabela 5.2, se određuje koji će od odbiraka sa ulaza biti proslijeđen na izlaz multipleksora. Odabrani odbirci se međusobno množe i njihov proizvod se vodi na Shift Left jedinicu. Pomjeranje za jedno mjesto ulijevo, odnosno množenje sa 2, se obavlja ukoliko je setovan signal *SHLorNo*, takođe definisan u LUT-i. Signal *SHLorNo* je uvijek setovan, osim u trenutku kada se računa 2D spektrogram, (1.92). Vrijednost iz Shift Left jedinice se vodi na kumulativni sabirač CumADD, koji je kontrolisan taktom *Gateway_CLK* i signalom *Gateway_RESET*, koji se generišu u izvršnoj kontroli, slika 5.2. Sabiranje u kumulativnom sabiraču se obavlja sve dok su zadovoljeni algoritmom postavljeni uslovi (vidi poglavlje 3.2.2). U suprotnom, ostvarena vrijednost se proslijeđuje na izlazni registar Out Register, a sabirač se resetuje. Vrijednosti dobijene u obje grane gateway-a sabiraju se i čine odbirak 2D CTFWD-je.



Slika 5.5 STFT-to-CTFWD gateway.

5.2.4. Modul za detekciju funkcije oslonca filtra

Modul za detekciju funkcije oslonca filtra se sastoji od registarskog bloka pokretne matrice dimenzija $(2L+1) \times (2L+1)$, $2L$ FIFO delay registara i seta kompratora. Ovi registri su označeni sa $FIFO_delay_2$, a njihova dužina sa $FD2$.

Registarski blok pokretne matrice zajedno sa $FIFO_delay_2$ registrima omogućava kretanje prozora dimenzija $(2L+1) \times (2L+1)$ po matrici odbiraka 2D CTFWD-je dimenzija $N \times N$ (koja predstavlja 2D CTFWD-ju jedne tačke 2D signala).

Sa svakim taktom $CTFWD_Store$ (koji odgovara taktu $STFT_Load$), po jedan element 2D CTFWD-je iz STFT-to-CTFWD gateway-a se prebacuje u registarski blok pokretne matrice. Funkcija kretanja pokretne matrice se obavlja na potpuno isti način na koji se obavlja funkcija kretanja pokretnog konvolucionog prozora. Dakle, ulaskom novog odbirka 2D CTFWD-je u modul za detekciju funkcije oslonca filtra, prethodno zatečeni sadržaj registara (unutar registarskog bloka i registra $FIFO_delay_2$) se pomjera za jedno mjesto udesno. Kao i konvolucioni prozor, i pokretna matrica prilikom kretanja može zauzeti „nedozvoljene“ pozicije.

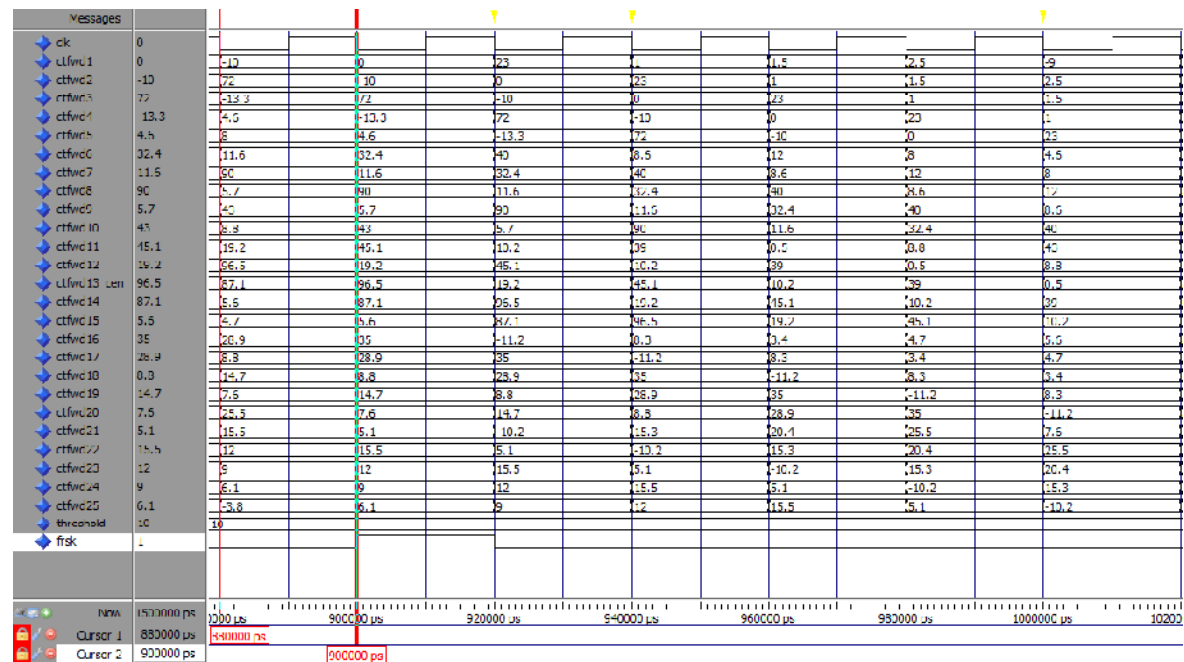
Te situacije se regulišu upotrebom signala *Left_Border_2* i *Bottom_Border_2*, što će biti detaljnije razmatrano u nastavku.

Sadržaj centralnog elementa registarskog bloka pokretne matrice se u setu komparatora, označenog sa COMP block, poredi sa ostalim elementima registarskog bloka pokretne matrice i sa spektralnim pragom S^2 . Ukoliko je centralni element veći od svih ostalih elemenata i spektralnog praga S^2 , tada signal na izlazu iz COMP block-a, funkcije oslonca filtra FRS_k , uzima vrijednost 1. U suprotnom ima vrijednost 0.

Na slici 5.6 je prikazana testna matrica 2D CTFWD-je, dimenzija $N \times N = 9 \times 9$, sa označenom pokretnom matricom dimenzija $(2L+1) \times (2L+1) = 5 \times 5$. Na slici 5.7 je prikazano kako se pokretna matrica kreće po test matrici i kako se vrši detekcija funkcije oslonca filtra u realnom vremenu, slika 5.7.

3.8	6.1	9.0	12.0	15.5	5.1	-10.2	15.3	20.4
25.5	7.6	14.7	8.8	28.9	35.0	-11.2	8.3	3.4
4.7	5.6	87.1	96.5	19.2	45.1	10.2	39.0	0.5
8.8	43.0	5.7	90.0	11.6	32.4	40.0	8.6	12.0
8.0	4.6	-13.3	72.0	-10.0	0.0	23.0	1.0	1.5
2.5	-9.0	14.0	-5.1	8.2	-5.0	-10.0	42.1	33.9
-3.19	-6.5	-3.5	12.9	7.4	7.3	3.1	47.0	23.5
0.5	-6.2	78.0	16.3	9.2	-15.0	66.7	22.1	5.9
-7.9	12.6	87.3	56.1	22.0	19.0	-5.4	-3.2	0.7

Slika 5.6 Testna matrica 2D CTFWD-je, dimenzija $N \times N = 9 \times 9$, sa označenom pokretnom matricom dimenzija $(2L+1) \times (2L+1) = 5 \times 5$.



Slika 5.7 Rezultati detekcije funkcije oslonca filtra, FRS_k za testnu matricu 2D CTFWD-je. Implementacija je izvršena u realnom vremenu i predstavljena je za $2L+1=5$ i prag vrijednosti 10. Kursor 1 označava poziciju učitavanja prvog prozora (označenog na slici 5.6). Kursor 2 označava poziciju detekcije funkcije oslonca filtra, $FRS_k=1$.

5.2.5. Izlazni modul

Izlazni modul se sastoji od jednog FIFO delay registra (označenog sa FIFO delay_3) dužine $NL+L+1$ (označene sa FD3), multipleksora MUX2/1, kumulativnog sabirača CumADD i izlaznog registra OutRegister.

Tabela 5.2 Sadržaj LUT memorijske tabele za dato L_m . $ADD_{M,M}$ označava adresu centralnog elementa registarskog bloka konvolucionog prozora, simbol \ll označava logičku operaciju *shift left* i $r=length(SelSTFT_1)$. Kontrolni signali su sljedeći biti: (1) *SHLorNo*, (2) *CTFWD_Write_Cond*, (3) *Termination*, (4) *CTFWD_Write*, (5) *Filtering_Completion*.

Address		Ctrl Signals Area					SelSTFT_1	SelSTFT_2
High	Low	1	2	3	4	5		
0	0	0	0	0	0	1	$ADD_{M,M} \ll r$	$ADD_{M,M}$
0	1	1	1	0	0	0	$ADD_{M,M+1} \ll r$	$ADD_{M,M-1}$
\vdots	\vdots	1	0	0	0	0	\vdots	\vdots
0	L_m	1	0	1	0	0	$ADD_{M,M+L_m} \ll r$	$ADD_{M,M-L_m}$
1	0	0	0	0	0	0	$ADD_{M+1,M} \ll r$	$ADD_{M-1,M}$
1	1	1	1	0	0	0	$ADD_{M+1,M+1} \ll r$	$ADD_{M-1,M-1} \ll r$
\vdots	\vdots	1	0	0	0	0	\vdots	\vdots
1	L_m	1	0	1	0	0	$ADD_{M+1,M+L_m} \ll r$	$ADD_{M-1,M-L_m}$
2	0	0	0	0	0	0	$ADD_{M+1,M} \ll r$	$ADD_{M-1,M}$
2	1	1	1	0	0	0	$ADD_{M+1,M-1} \ll r$	$ADD_{M-1,M+1}$
\vdots	\vdots	1	0	0	0	0	\vdots	\vdots
2	L_m	1	0	1	0	0	$ADD_{M+1,M-L_m} \ll r$	$ADD_{M-1,M+L_m}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$2L_m-1$	0	0	0	0	0	0	$ADD_{M+L_m,M} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M}$
$2L_m-1$	1	1	1	0	0	0	$ADD_{M+L_m,M+1} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M-1}$
\vdots	\vdots	1	0	0	0	0	\vdots	\vdots
$2L_m-1$	L_m	1	0	1	0	0	$ADD_{M+L_m,M+L_m} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M-L_m}$
$2L_m$	0	0	0	0	0	0	$ADD_{M+L_m,M} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M}$
$2L_m$	1	1	1	0	0	0	$ADD_{M+L_m,M-1} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M+1}$
\vdots	\vdots	1	0	0	0	0	\vdots	\vdots
$2L_m$	L_m	1	0	1	0	0	$ADD_{M+L_m,M-L_m} \ll r$	$ADD_{M-L_m,M+L_m}$
$2L_m+1$	0	0	0	0	1	0	0	0

Uloga registra FIFO delay_3 je da sačuva centralni odbirak konvolucionog prozora 2D STFT-je. Naime, kako sa svakim taktom *STFT_Load* u konvolucionu prozor se importuje po jedan novi odbirak 2D STFT-je iz ulazne memorije, to se sadržaj centralnog registra konvolucionog prozora konstantno mijenja. S druge strane, neophodno je imati informaciju o inicijalnoj vrijednosti koja je bila smještena na toj poziciji, kako bi se moglo realizovati filtriranje 2D signala u skladu sa definicionom jednačinom, (3.43).

Signal FRS_k predstavlja selekциони signal multipleksora MUX2/1. Ukoliko ima jediničnu vrijednost, odbirak 2D STFT-je koji je u registru FIFO delay_3 se prosljeđuje na izlaz multipleksora i uključuje u sabiranje, koje se obavlja kumulativnim sabiračem CumADD. Sabiranje je kontrolisano signalima *CumADD_CLK* i *CumADD_RESET*, za čije generisanje je zadužena izvršna kontrola, slika 5.2. Pola takta prije nego se kumulativni sabirač CumADD resetuje, setuje se signal *Hx_Store*, te se vrijednost izračunata u kumulativnom sabiraču CumADD prenosi u izlazni registar OutRegister. Na taj način je kreiran odbirak izlaznog, filtriranog 2D signala. Kompletan opisana procedura se ponavlja dok se ne dobiju svi odbirci izlaznog, filtriranog 2D signala.

5.2.6. Princip rada razvijenog dizajna

Nakon analize osnovnih komponenti razvijenog dizajna, slika 5.1, razmotrimo razvijeni dizajn kao funkcionalnu cjelinu.

Realni i imaginarni djelovi ulaznih podataka (signal STFT_IN) se izračunavaju izvan sistema, u postojećim 2D STFT ili 2D FFT modulima, [68], [162]. Ovi podaci sadrže informacije o zašumljenom signalu, koje su neophodne za izvršavanje filtriranja, u skladu sa definicionom jednačinom (3.43), kao i za izračunavanje 2D CTFWD-je, u skladu sa definicionom jednačinom (1.92). *STFT_IN* elementi se importuju u ulaznu memoriju sa duplim (sistemskim) taktom CLK, što determiniše frekvenciju odabiranja analiziranog analognog 2D signala, tabela 5.7. Sa svakim taktom *STFTLoad/CTFWDStore* cycle element STFT_IN se importuje u operacioni fajl konvolucionog prozora, koji grupiše ulazne odbirke 2D STFT-je kako bi implementirao operacije 2D konvolucionog prozora. Na ovaj način se determinišu adrese elemenata koji ulaze u STFT-to-CTFWD gateway za svaku pojedinačnu poziciju konvolucionog prozora. Takođe, prateći dizajnerske principe ilustrovane na slici 5.3, na ovaj način se obezbjeđuje kretanje prozora preko ulaznih odbiraka 2D STFT-je.

Prateći definicionu jednačinu (1.92), element 2D CTFWD-je koji odgovara centralnom elementu registarskog bloka konvolucionog prozora i koji se bazira na elementima 2D STFT-je iz tog istog registarskog bloka, se računa u STFT-to-CTFWD gateway-ju, slika 5.5. Izračunati element 2D CTFWD-je se smješta u modul za detekciju funkcije oslonca filtra (FRS detection module). Prateći estimacionu proceduru (vidi poglavlje 3.2.2), ovaj modul izračunava vrijednost funkcije oslonca, odnosno $L_H(\vec{n}, \vec{k})$. Registarski blok pokretne matrice kreira osnovni FF region

$Q_{\vec{k}}$, dok operacioni fajl pokretne matrice omogućava kretanje tog osnovnog regiona preko frekvencijski-zavisnih elemenata 2D CTFWD-je.

COMP blok koji se sastoji od niza komparatora sa dva ulaza, testira uslove estimacione procedure za LF-ju (uslovi (i)-(ii) iz poglavlja 3.2.2) i u zavisnosti od njihove zadovoljenosti generiše vrijednost funkcije oslonca filtra, $L_H(\vec{n} \vec{k})$, na izlazu. Jedinična vrijednost za $L_H(\vec{n} \vec{k})$ omogućava uključivanje centralnog elementa registarskog bloka konvolucionog prozora u generisanje izlaznog signala. Registar FIFO delay_3 se koristi za smještanje elementa 2D STFT-je sa centralne pozicije registarskog bloka konvolucionog prozora. Na taj način, izlaz iz registra FIFO delay_3 odgovara, po frekvencijama i prema definiciji (1.92), centralnom elementu registarskog bloka pokretne matrice.

Razvijeni dizajn izvodi prostorno-promjenljivo filtriranje u $CN(\vec{n} \vec{k} + 1)$ taktova po S/SF tački. Izračunavanje 2D CTFWD-je se izvodi u prвих $CN(\vec{n} \vec{k})$ taktova, dok se estimacija LF-je izvodi u $CN(\vec{n} \vec{k})$ -tom estimacionom taktu. Samo 0-ti takt, u kome se izračunava 2D spektrogram, i estimacioni takt moraju biti izvedeni kako bi obezbjedili estimaciju LF-je na bazi 2D spektrograma u svakoj S/SF tački. Ostali (uslovni) taktovi (prvi, drugi, ..., $CN(\vec{n} \vec{k}) - 1$ -ti) se koriste za unaprijeđenje kvaliteta estimacije LF-je (do kvaliteta estimacije na bazi 2D CTFWD-je), ali samo u S/SF tačkama koje postoje unutar domena auto-članova 2D STFT-je. Maksimalan broj taktova može biti uzet jedino u S/SF tačkama koje postoje u okolini lokalnih frekvencija komponenti signala.

U svakom taktu tokom izračunavanja 2D CTFWD-je, u STFT-to-CTFWD gateway-u se izračunava odgovarajući član sume (u skladu sa (1.92)). To, ipak, ne znači da će svaki taj član biti uključen u izračunavanje odbirka 2D CTFWD-je (kada sumiranje treba da bude završeno u $+i_2$, u $-i_2$, i u i_1 pravcu). Kako bi provjerili potencijalno uključivanje ovih članova u izračunavanje (1.92), u svakom taktu se, u kontroli za izračunavanje signala $STFT_AT_Reg$ (Ctrl of $STFT_AT_Reg$ determination), slika 5.2, generišu signali $x_{i_1, \pm i_2}$, $x_{-i_1, \mp i_2}$. Ovi signali uzimaju sljedeće vrijednosti:

$$x_{i_1, \pm i_2} = \begin{cases} 1; & \text{ako je } |STFT(\vec{n} \vec{k}_1 + i_1 \vec{k}_2 \pm i_2)|^2 > R^2 \text{ (, } |STFT(\vec{n} \vec{k}_1 \mp i_1 \vec{k}_2 \mp i_2)|^2 > R^2 \\ 0; & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

$$x_{-i_1, \mp i_2} = \begin{cases} 1; & \text{ako je } |STFT(\vec{n} \vec{k}_1 + i_1 \vec{k}_2 \pm i_2)|^2 > R^2 \text{ (, } |STFT(\vec{n} \vec{k}_1 \mp i_1 \vec{k}_2 \mp i_2)|^2 > R^2 \\ 0; & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Oni determinišu elemente 2D STFT-je iz domena auto-članova, i generišu kontrolni signal $STFT_AT_Reg = x_{i_1, \pm i_2} \cdot x_{-i_1, \mp i_2}$ čija jedinična vrijednost detektuje član sume koji treba uključiti u računanje (1.92), dok njegova nulta vrijednost:

- (1) Učestvovanjem u generisanju signala $Gateway_CLK$ onemogućava odgovarajući član

sume, koji ne postoji unutar domena auto-članova 2D STFT-je, da uđe u izračunavanje (1.92) u odgovarajućem taktu;

- (2) Učestvovanjem u generisanju signala L_Count_RESET i H_Count_CLK završava (u istom taktu) sumiranje u (1.92) u pravcima $+i_2$ i $-i_2$ (za svako i_1 , $i_1 = 0, 1, \dots, L_1(\vec{n})$), otpočinjući novo sumiranje (u narednom taktu) u pravcu $-i_2$ i za sljedeće i_1 .

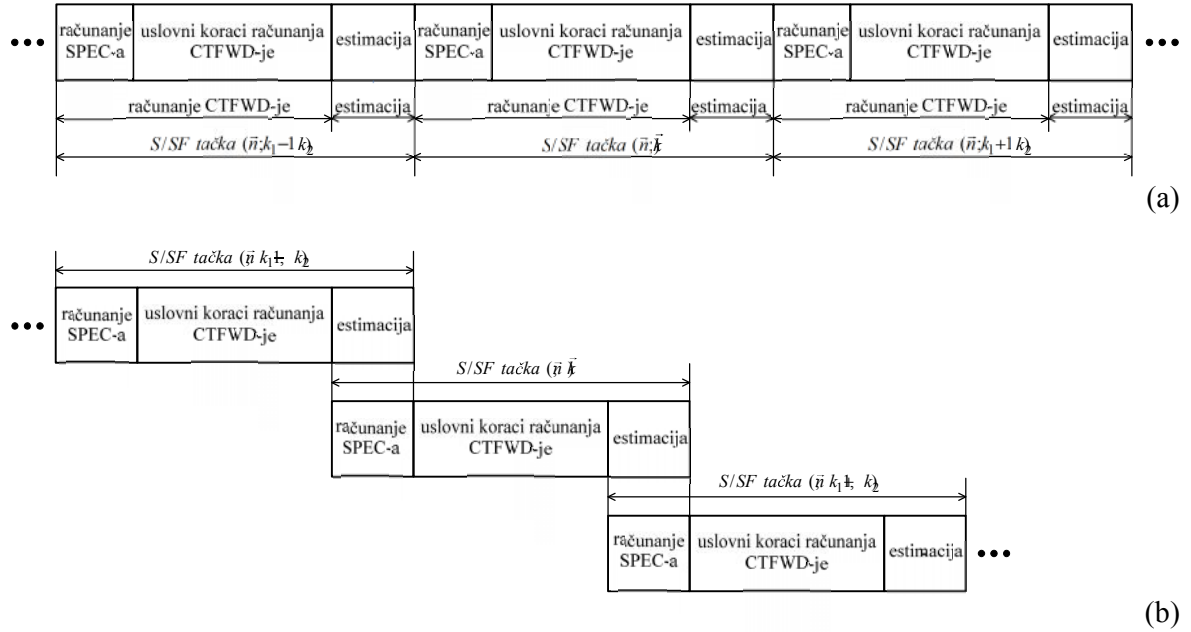
Nulta vrijednost signala $STFT_AT_Reg$ dostignuta u taktu kada je $SHLorNo=0$ (odgovara prvom članu sume iz (1.92) jednakom nuli, koji nije pomnožen sa 2) završava sumiranje u pravcu i_1 . Za posmatranu FF tačku (k_1, k_2) , ovo rezultuje završavanjem izračunavanja elementa 2D CTFWD-je, ali i sa prostorno-promjenljivim filtriranjem u sljedećem, estimacionom taktu. Signal $Out_STFT_AT_Reg = \text{inv}(STFT_AT_Reg)$ dozvoljava signalu $CTFWD_Write_Cond$, setovanom u svakom mogućem estimacionom taktu, da završi računanje 2D CTFWD-je i da započne estimaciju LF-je učestvovanjem u generisanju signala $STFT_Load/CTFWD_Store$, $H_Count_RESET/Gateway_RESET$. Na ovaj način signali $STFT_AT_Reg$ i $CTFWD_Write_Cond$ dozvoljavaju razvijenom dizajnu da optimizuje broj taktova u različitim S/SF tačkama tokom izvršavanja i da rezultuje sa estimacijom LF-je baziranom na 2D CTFWD-ji. Oni takođe kontrolišu izvršavanje filtriranja u posmatranoj FF tački. Signal $SPEC_EN$ se generiše u izvršnoj kontroli (Ctrl of execution), slika 5.2, i obezbjeđuje izvršavanje takta u kome se izračunava 2D spektrogram u svakoj S/SF tački, čak i kada je $x_{0,0}=0$.

Setovanjem signala $STFT_Load/CTFWD_Store$, izračunati element 2D CTFWD-je i realni dio elementa 2D STFT-je koji se nalazi na centralnoj poziciji registarskog bloka konvolucionog prozora se respektivno smještaju u registarski blok pokretne matrice i registar FIFO delay_3. Paralelno, COMP blok generiše signal FRS_k . Sa kašnjenjem od pola takta, $FRS_k = 1$ omogućava uključivanje izlaznog odbirka iz registra FIFO delay_3 u generisanje odbirka izlaznog signala, dok signal $Gateway_RESET$ čisti sadržaj STFT-to-CTFWD gateway-a.

Konačna vrijednost $(\forall) \vec{n}$ za dato \vec{n} , se dobija na izlazu kumulativnog sabirača, CumADD, nakon opisanog izvršavanja filtriranja u svakoj FF tački iz posmatrane tačke signala \vec{n} . Stoga, izvršavanje filtriranja u maksimalnoj FF tački (za dato \vec{n}) je detektovano generisanjem signala End_of_Frame , kako bi se omogućilo signalu $Filtering_Completion$ da smjesti izračunatu vrijednosti $(\forall) \vec{n}$ (u završnom taktu) u izlazni registar OutRegister. Sa kašnjenjem od pola takta, kumulativni sabirač CumADD se resetuje i počinje izračunavanje za sljedeću tačku signala (n_1, n_2+1) . Paralelno sa izvršavanjem estimacionog takta u FF tački (k_1, k_2) , novi element $STFT_IN$ se importuje i opisani proces se ponavlja (počevši od novog takta) za sljedeću FF tačku (k_1, k_2+1) . Stoga, period takta $STFT_Load/CTFWD_Store$ mora biti signal-adaptivan i $CN(\vec{n}) + 1$ puta veći od perioda sistemskog takta. Takođe, završni takt u tački signala (n_1, n_2) se, u izvršavanju, preklapa sa taktom u kome se izračunava 2D spektrogram za sljedeću S/SF tačku (n_1, n_2+1) , slika 5.8. Na ovaj način se, upotrebom *pipeline*-inga, ostvaruje poboljšanje u protoku (takt po tački signala) prostorno-frekvencijskog filtriranja što predstavlja

značajno unaprijeđenje, jer se u realnim situacijama filtriranje izvodi u velikom broju tačaka 2D signala.

LUT, tabela 5.2, upravlja izvršavanjem u pojedinačnoj FF tački. Njene lokacije se sastoje od 5 kontrolnih signala (signali *SHLorNo*, *CTFWD_Write_Cond*, *Termination*, *CTFWD_Write*, *Filtering_Completion*, respektivno) i adresa multipleksora *SelSTFT_1* i *SelSTFT_2*. Signal *SHLorNo* obezbjeđuje množenje sa 2 člana parcijalnog proizvoda iz (1.92). Signal *CTFWD_Write_Cond* pravi estimacioni takt od odgovarajućeg uslovnog takta (ali samo kada je *Out_STFT_AT_Reg*=1). Signali *Termination* and *CTFWD_Write* obezbjeđuju završavanje sumiranja u (1.92) u pravcima $+i_2$ i $-i_2$ i kompletiranje u FF tačkama u kojima signal *STFT_AT_Reg* ne može da dostigne nultu vrijednost¹⁹, i stoga ne može da preuzme ulogu opisanu u principima signal-adaptivne hardverske operacije. Signal *Filtering_Completion* kompletira izvršavanje u posmatranoj tački signala.



Slika 5.8 Razlika između *nepipeline*-ovane i *pipeline*-ovane implementacije razvijenog prostorno-promjenljivog filtra.

Adrese multipleksora *SelSTFT_1* i *SelSTFT_2* omogućavaju upotrebu STFT-to-CTFWD gateway-a za različite odbirke 2D STFT-je u različitim taktovima u toku izvršavanja u posmatranoj FF tački. Binarni brojači *High_Bin_Count* i *Low_Bin_Count* generišu adrese LUT-e (njene više i niže djelove, respektivno). U svakom taktu pojedinačno, generisana adresa selektuje par elemenata 2D STFT-je (njihove realne i imaginarne djelove) koji daju odgovarajući

¹⁹ U cilju obezbjeđenja željene reprezentacije auto-članova 2D CTFWD-je i pojednostavljenja (koliko god je to moguće) hardverske implementacije, tabela 5.2, odabiraju se relativno male vrijednosti parametra L_m , $5 \leq L_m \leq 7$. Međutim, unaprijed definisana maksimalna širina konvolucionog prozora koja odgovara ovim vrijednostima parametra L_m može biti manja od teorijski zahtijevane u FF tačkama koje postoje u okolini lokalnih frekvencija. Stoga, u ovim tačkama, signal *STFT_AT_Reg* ne može dostići nultu vrijednost potrebnu za završavanje sumiranja u (1.92) u pravcima $+i_2$ i $-i_2$ i njegovog kompletiranja u skladu sa principima signal-adaptivnog dizajna.

član sume iz (1.92). Na ovaj način, viši djelovi adresa iz LUT-e kontolišu sumiranje u (1.92) u pravcu i_1 , dok niži djelovi adresa iz LUT-e u kombinaciji sa neparnim i parnim višim djelovima adresa kontrolišu sumiranje u pravcima $+i_2$ i $-i_2$ respektivno.

Operacije na graničnim pozicijama, kao i kompletan proces prostorno-promjenljivog filtriranja su upravljani od strane signala iz kontrole za početak i kraj filtriranja, i granične efekte, (Ctrl of start of filtering, end of filtering and padding borders). Ovi signali se generišu na osnovu ulaznih parametara konfiguracionih registara, tabela 5.3, kao i uslova sinhronizacije vezanih za sistemski takt i takt *STFT_Load/CTFWD_Store*. Oni se generišu u modulima koji se sastoje od binarnih brojača promjenljive dužine i komparatora binarne magnitude, čije su reference parametri iz konfiguracionih registara. U skladu sa principima konvolucionog prozora i pokretne matrice, signali *Left_Border_1*, *Left_Border_2*, *Bottom_Border_1* i *Bottom_Border_2* rukovode operacijama na graničnim pozicijama, slika 5.4. Učestvovanjem u generisanju signala *STFT_AT_Reg*, signali *Left_Border_1* and *Bottom_Border_1* obezbjeđuju dopunjavanje lijeve i donje FF granice sa $2L_m$ odbiraka 2D spektrograma kada se izračunava 2D CTFWD-ja. Signali *Left_Border_2* and *Bottom_Border_2* onemogućavaju setovanje signala FRS_k u lijevoj i donjoj FF graničnoj poziciji²⁰.

Tabela 5.3 Parametri iz Konfiguracionih registara izraženi brojem potrebnih taktova *STFT_Load/CTFWD_Store*.
 $N \times N$ je širina prozora 2D STFT-je (trajanje prozorom odsječenog signala),
 $M \times M$ je veličina posmatranog 2D signala.

Parametar	Opis parametra	Vrijednost parametra
FD1, FD2, FD3	Dužine registara FIFO delay_1, 2, 3	$N-(2L_m+1)$; $N-(2L+1)$; $NL+L+1$
SC, SF	Start operacija konvolucionog prozora/ pokretne matrice	NL_m+L_m ; NL_m+L_m+NL+L
MCWW, MSMW	Maksimalna veličina konvolucionog prozora/ pokretne matrice	$2L_m+1$; $2L+1$
LB1, BB1	Lijeva i donja granična pozicija konvolucionog prozora	$N(2L_m+1)$; $N(N-2L_m)$
LB2, BB2	Lijeva i donja granična pozicija pokretne matrice	$NL_m+L_m+N(2L+1)$; $NL_m+L_m+N(N-2L)$
EOF, EOFP	Pozicija kraja frejma/ procesa filtriranja	$N \times N$; $M \times M \times N \times N - 1$

Kako bi obezbjedili učešće signala *STFT_AT_Reg* u generisanju takta *Gateway_CLK* u drugoj polovini sistemskog takta, najduži put implementacije odgovara generisanju signala

²⁰ COMP blok, implementiran upotrebom $(2L+1) \times (2L+1)$ komparatora sa dva ulaza i logičkih kola AND, OR i NOT, generiše signal $FRS_k=1$ na izlazu kada je centralni element registarskog bloka pokretne matrice ujedno i maksimalni element veći od spektralnog praga S^2 , ali pod uslovom da je posmatrana FF tačka van graničnih pozicija, odnosno $\text{inv}(\text{Left_Border_2} + \text{Bottom_Border_2})=1$.

STFT_AT_Reg u prvoj polovini sistemskog takta, kroz množač, sabirač i komparator ($T_c/2=T_m+T_a+T_{comp}$, gdje su T_c , T_m , T_a , T_{comp} vremena sistemskog takta, množenja, sabiranja i poređenja, respektivno). On određuje najkraće vrijeme takta i frekvenciju odabiranja ulaznog analognog signala. U tabeli 5.4 su date maksimalne dužine izlaznih registara za svaku korišćenu digitalnu jedinicu. Kritičnu tačku predstavljaju dužine izlaza iz kumulativnog sabirača CumADD i izlaznog registra OutRegister dok najduža putanja zavisi isključivo od dužine odbiraka 2D STFT-je.

Tabela 5.4 Dužine izlaznih registara za korišćene digitalne jedinice u zavisnosti od dužine podatka 2D STFT-je (l), maksimalne širine konvolucionog prozora L_m i N .

Digitalna jedinica	Dužina digitalne jedinice kao funkcija od l, L_m, N
MUX-evi, Conv.Wind.Reg.Blck, FIFO delay_1, FIFO delay_3	l
Množači	$2 \times l$
Sabirači u <i>Ctrl of the STFT_AT_Reg signal generation</i>	$\text{CEIL}(\log_2(2 \cdot (2^{2l}-1)))$
ShLEFT registar	$2 \times l + 1$
CumADDs, Slid.Matrix Reg.Blck, FIFO delay_2	$\text{CEIL}(\log_2((2^{2l+1}-1) \times (L_m+1) \times (2L_m+1)))$
Izlazni CumADD, OutRegister	$\text{CEIL}(\log_2((2^l-1) \times N^2))$

5.2.7. Testiranje i verifikacija rada razvijenog dizajna

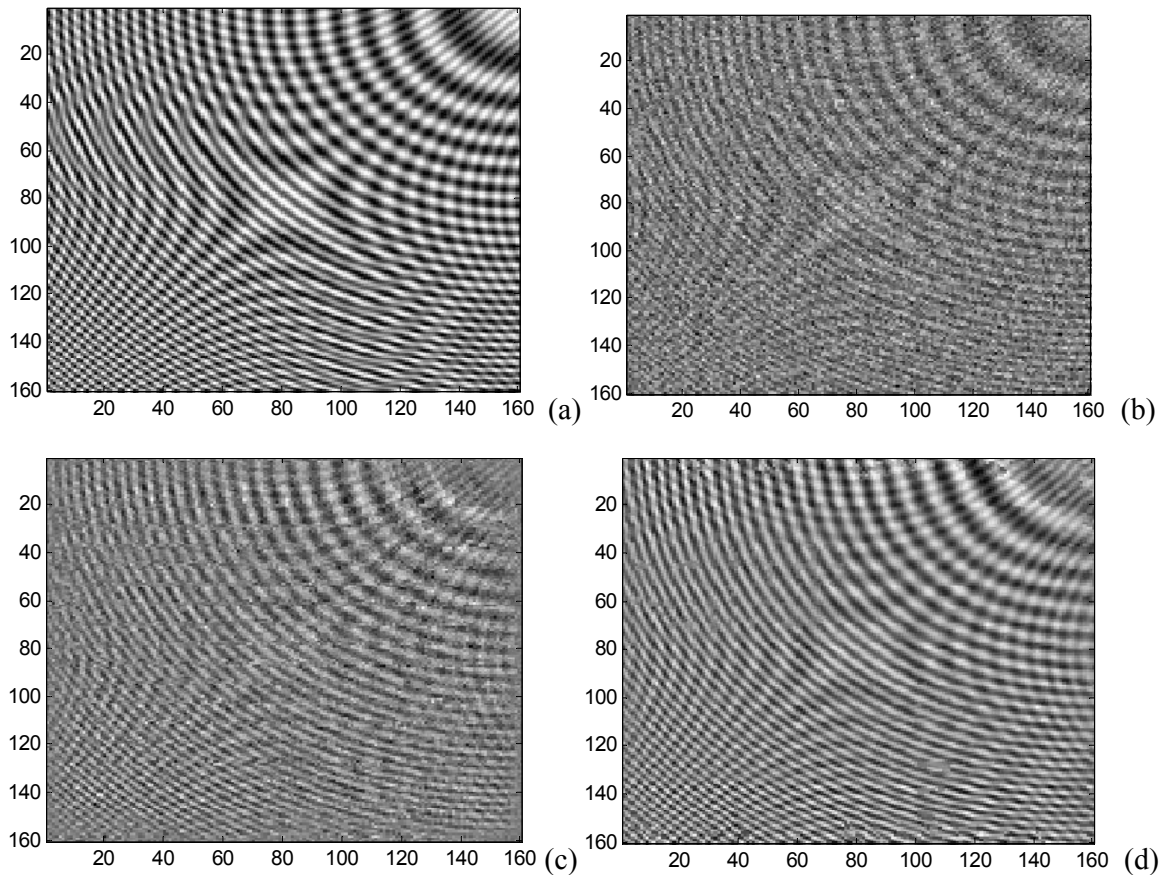
Hardverski dizajn razvijenog prostorno-promjenljivog filtra sa funkcijom oslonca estimiranom na osnovu LF-je je verifikovan implementacijom na FPGA čipu. Predloženi dizajn, sa parametrima, $L_m=6$ i $L=4$, je verifikovan implementacijom na čipu EP3C10E144C7 iz familije Cyclone III, tabela 5.5. Prije programiranja odabranog čipa, izvedeni su kompajliranje i simulacija. Analiziran je visoko nestacionarni, često upotrebljavani, [92], [130], realni 2D testni signal:

$$f(n_1T, n_2T) = 20 \cdot (0.75 - 22T(0.75))^2 + \pi n_2T - \frac{1}{2} + 0.5 \cos(400 \cos(\frac{2\pi}{100} n_1T)) \cos(\frac{2\pi}{100} n_2T) \quad (5.1)$$

unutar opsega $-0.75 \leq n_1T, n_2T \leq 0.75$, koji je maskiran intenzivnim bijelim šumom tako da je $SNR_{in} = 10 \log(P_f/P_e) = -0.9$ [dB]. Korišćen je Hanning-ov prozor $w(n)$ širine $N \times N = 64 \times 64$, kao i $T = 1.5/160$, $R^2 = 0.05 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{ |STFT_x(\vec{n}, \vec{k})|^2 \}$ i $S^2 = 0.05 \cdot \max_{\vec{n}, \vec{k}} \{ CTFWD_x(\vec{n}, \vec{k}) \}$.

Analizirani signal, (5.1), zauzima širok frekvencijski opseg (svaka komponenta signala zauzima značajan dio FF ravni, od oko 15%), dok je minimalna udaljenost između različitih LF-ja komponenti signala uporediva sa opsegom koji zauzima pojedinačna komponenta signala.

Stoga je signal (5.1) veoma interesantan i prilično kompleksan u pogledu estimacije, zahtijeva netrivialan odabir vrijednosti parametra L , i može biti korišćen kao odgovarajući test za selektivnost i rezoluciju razvijenog dizajna.



Slika 5.9 (a) Čisti trokomponentni testni signal (5.1), (b) Zašumljeni signal (5.1), (c) Izlazni signal (dobijen numerički) neadaptivnog prostorno-promjenljivog filtra, (d) Izlazni signal razvijenog prostorno-promjenljivog filtra hardverski implementiranog na FPGA čipu EP3C10E144C7.

Odbirci 2D STFT-je analiziranog zašumljenog signala (njihovi realni i imaginarni dijelovi) su numerički izračunati, zapisani u 16-bitnoj *fixed-point* notaciji (uključujući i 4 biti za zapis decimalnog dijela broja) i importovani u dizajnirani sistem. Rezultati FPGA implementacije u realnom vremenu su predstavljeni na slici 5.9. Bez obzira na negativan uticaj frekvencijske diskretizacije i na činjenicu da je estimiran prilično kompleksan signal, efiksanost, rezolucija i selektivnost implementiranog prostorno-promjenljivog filtra su očigledni. Ostvareni su $SNR_{out}=29.79[\text{dB}]$, kao i poboljšanje $SNR_{out}-SNR_{in}=30.69[\text{dB}]$. Poboljšanje se može smatrati izuzetno velikim, s obzirom da se teorijski maksimalno poboljšanje u iznosu od $10\log(N \times N/3)=31.3524[\text{dB}]$ može očekivati u analizi ovog, u principu, trokomponentnog signala, slika 5.12.

Tačnost dobijenih rezultata je dokazana pojedinačnim razmatranjem izračuna 2D CTFWD-je i estimacije LF-je na bazi te 2D CTFWD-je, što je prikazano na slikama 5.10 i 5.11

respektivno.

Tokom takta *STFT_Load/CTFWD_Store* (na slici 5.10(a) je označen pozicijama kursora 1 i 2, a na slici 5.10(b) cursorima 1-6), izvodi se izračunavanje elementa 2D CTFWD-je u posmatranoj FF tački. Viši i niži djelovi adresa LUT-e, koji se mijenjaju sistemskim taktom, su označeni sa High_Ads i Low_Ads. Realni i imaginarni djelovi para odbiraka 2D STFT-je iz registarskog bloka konvolucionog prozora koji odgovaraju pojedinim adresama LUT-e su označeni sa STFTre_1, STFTre_2, STFTim_1, STFTim_2.

Tabela 5.5 Sumirana upotreba resursa za čip na kome je izvršena hardverska implementacija za parametre $N=64$, $2L_m+1=13$, $2L+1=9$ i dužinu odbiraka 2D STFT-je $l=16$.

<i>Chip Family</i>	<i>Recommended Device</i>	<i>Logic Elements</i>	<i>Combinational Functions</i>	<i>Dedicated Logic Registers</i>
Cyclone III	EP3C10E144C7	7,194/10,320 (70%)	3,924/10,320 (38%)	4,708/10,320 (46%)
<i>Total Pins</i>	<i>Total Virtual Pins</i>	<i>Total Memory Bits</i>	<i>Embedded Multiplier 9-bit elements</i>	<i>Total PLLs</i>
33/95 (35%)	0	14,898/423,936 (4%)	16/46 (35%)	0/2 (0%)

Analizirajmo rezultate sa slike 5.10(a). U taktovima koji odgovaraju adresama (High_Ads, Low_Ads)=(0,3), (1,2), and (2,2), izračunavanje 2D CTFWD-je se završava u pravcima $+i_2$ ili $-i_2$, s obzirom da su u ovim taktovima:

$$\begin{aligned}
 x_{0,3} &= 0 \left((8.2956)^2 + (-117.37)^2 \right) = 13844.533 < \text{Ref_Level} = 50000, \\
 x_{1,2} &= 0 \left((101.05)^2 + (-112.92)^2 \right) = 22962.02 < \text{Ref_Level} = 50000, \\
 x_{1,-2} &= 0 \left((-93.536)^2 + (-139.77)^2 \right) = 28284.63 < \text{Ref_Level} = 50000.
 \end{aligned}$$

U taktu koji odgovara adresi (High_Ads, Low_Ads)=(3,0) izračunavanje se završava, s obzirom da je u ovom taktu:

$$x_{2,0} = 0 \left((130.47)^2 + (96.951)^2 \right) = 26421.91 < \text{Ref_Level} = 50000.$$

Estimacioni takt slijedi nakon posmatranog takta *STFT_Load/CTFWD_Store*. U skladu sa dosadašnjim zapažanjima uočavamo da je:

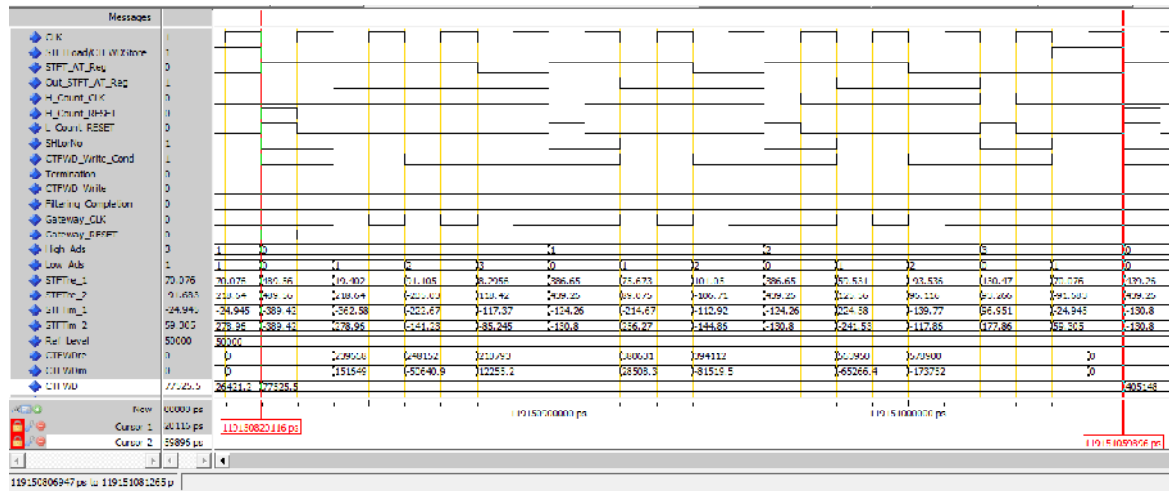
$$\begin{aligned}
 \text{CTFWD_re} &= 489.56 \times 489.56 + 2 \times (19.402 \times 218.64 + 91.105 \times (-205.03)) + 386.65 \times 439.26 + \\
 &\quad + 2 \times 75.673 \times 89.075 + 386.65 \times 439.26 + 2 \times 59.531 \times 125.56 = 578900, \\
 \text{CTFWD_im} &= 389.42 \times 389.42 + 2 \times ((-362.58) \times 278.96 + (-222.67) \times (-141.23)) + (-124.26) \times (-130.8) + \\
 &\quad + 2 \times (-214.67) \times 256.27 + (-124.26) \times (-130.8) + 2 \times 224.58 \times (-241.53) = -173752,
 \end{aligned}$$

pa se konačna vrijednost odbirka 2D CTFWD-je dobija kao:

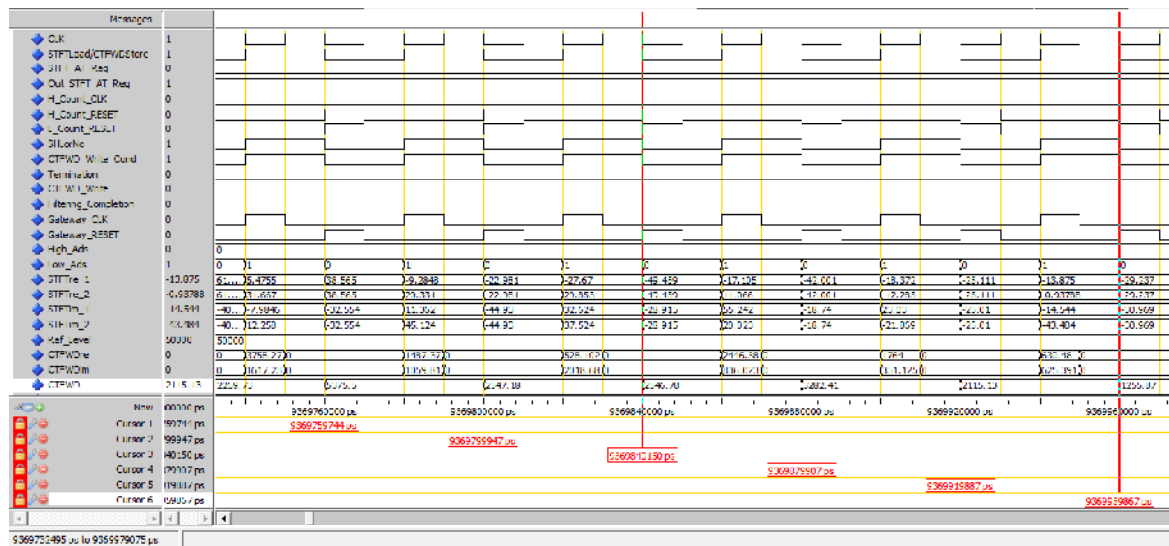
$$\text{CTFWD} = \text{CTFWD_re} + \text{CTFWD_im} = 405148,$$

nakon 12 taktova. Promjenljivi (signal-adaptivni) broj taktova koji razvijeni dizajn uzima u različitim FF tačkama, implicitno uzrokovao signal-adaptivnim periodom signala *STFT_AT_Reg*,

se lako može uočiti sa slike 5.10(a). Ilustracija broja taktova uzetih u različitim FF tačkama za posmatranu tačku signala (0.25,0.25) je data na slici 5.12.

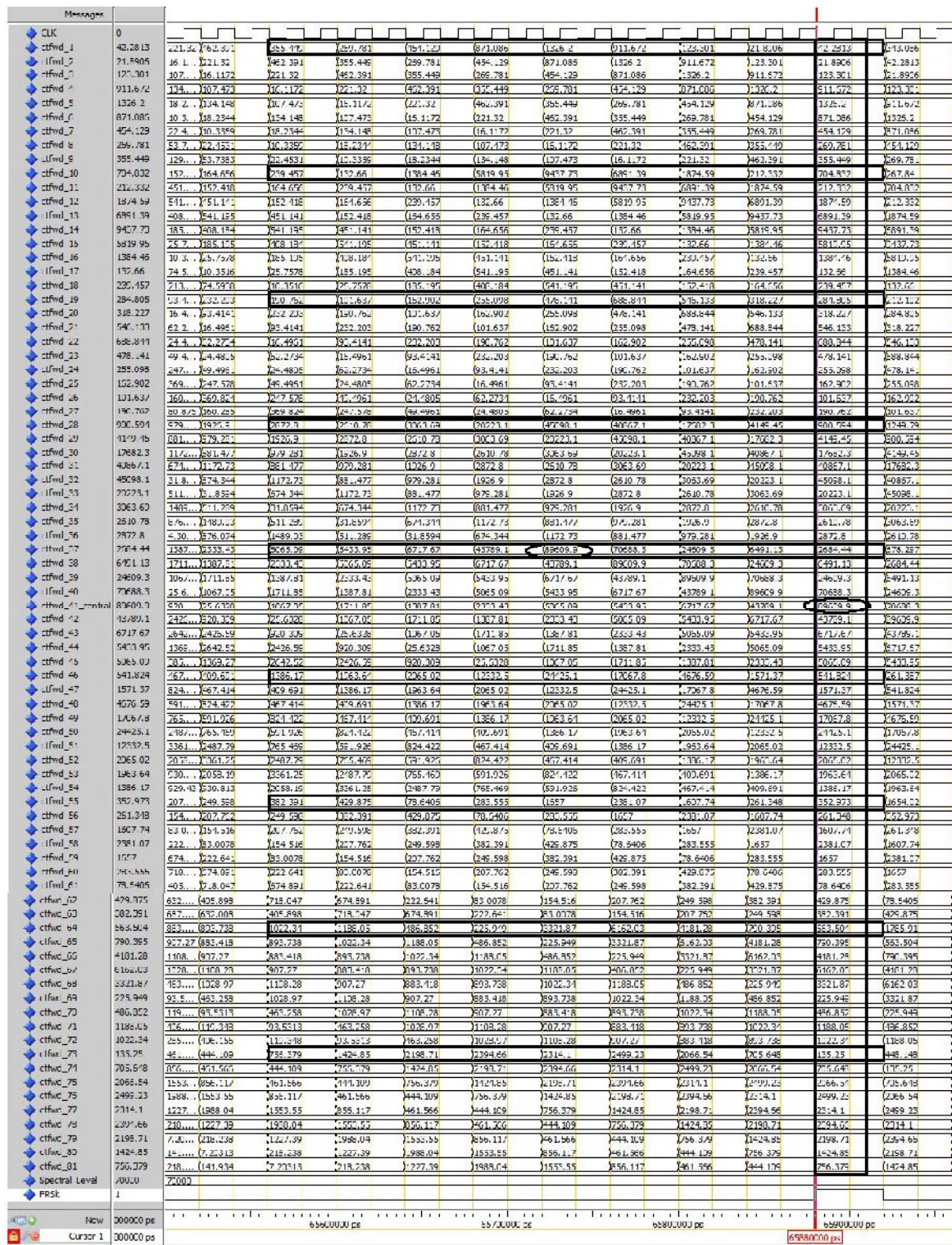


(a)

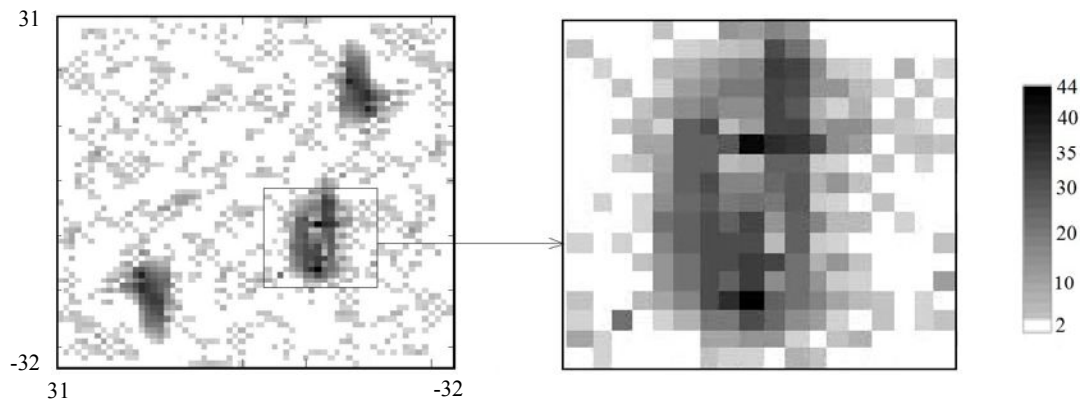


(b)

Slika 5.10 (a) Ilustracija izračunavanja 2D CTFWD-je u S/SF tačkama koje postoje unutar domena auto-članova 2D STFT-je. (b) Ilustracija izračunavanja 2D CTFWD-je u S/SF tačkama koje postoje van domena auto-članova 2D STFT-je. Implementiracija je izvršena na FPGA čipu EP3C10E144C7.



Slika 5.11 Ilustracija detekcije LF-je na osnovu 2D CTFWD-je, implementirane na FPGA čipu EP3C10E144C7.



Slika 5.12 Distribucija taktova izvedenih po FF tački u tački signala (0.25, 0.25).

Analizirajmo rezultate sa slike 5.10(b). Za razliku od procedure filtriranja koja je prikazana na slici 5.10(a) i koja traje 12 taktova, u ovom slučaju procedura filtriranja traje tačno 2 takta. Naime, jasno je da se u ovom slučaju konvolucioni prozor nalazi van domena auto-članova 2D STFT-je, pa se stoga računanje 2D CTFWD-je svodi na računanje 2D spektrograma, (1.92), (koje, kao što je ranije pomenuto, traje svega 1 takt). Na slici 5.10(b) je prikazano 5 uzastopnih trenutaka u kojima se vrši filtriranje van domena auto-članova 2D STFT-je.

Ilustracija estimacije LF-je na osnovu 2D CTFWD-je i izračunavanje funkcije oslonca filtra, FRS_k , je prikazana na slici 5.11. Elementi CTFWD_1,...,CTFWD_41_central, ...,CTFWD_81 registarskog bloka pokretne matrice su ispraćeni u različitim trenucima vremena. Pozicija kursora 1 označava trenutak kada je detektovana LF-ja ($FRS_k=1$). Kako bi se lakše pratilo kretanje pokretne matrice i njenog centralnog elementa, označen je i prirodni poredak registarskog bloka pokretne matrice u trenutku detekcije LF-je.

5.2.8. Poređenje sa ostalim mogućim prostorno-promjenljivim dizajnima baziranim na estimaciji LF-je

SCI sa fiksnim brojem taktova, klasični MCI sa fiksnim brojem taktova i hibridni dizajn bi takođe bili mogući implementacioni pristupi za prostorno-promjenljivi filter baziran na estimaciji LF-je. SCI pristup (kada je moguć zbog kompleksnosti, tabela 5.6) bi bio baziran na izvršavanju funkcije gateway-a (bazirane na 2D STFT-ji) u prvoj polovini (sistemskog) takta, [134], i estimaciji LF-je u drugoj polovini istog takta.

U klasičnom MCI pristupu, izvršavanje funkcije gateway-a (bazirane na 2D STFT-ji) bi se izvodilo u većem, ali fiksnom broju taktova $2L_m^2 + 2L_m + 2$, [162], dok bi estimacija LF-je bila izvedena u novom, odvojenom estimacionom taktu. Poređenje razvijenog signal-adaptivnog pristupa sa klasičnim MCI i SCI pristupima je sumirano u tabelama 5.6 i 5.7. Kao što je očekivano, MCI dizajni (signal-adaptivni i klasični) optimizuju hardversku kompleksnost implementacije, kao i performanse dizajna vezane za hardversku kompleksnost (dimenzije čipa,

potrošnja energije i cijena). Oni također minimizuju vrijeme sistemskog takta u poređenju sa SCI pristupom, pri čemu klasični MCI dizajn zahtijeva duže vrijeme za izvršavanje. Osim navedenih, moguće je izvući i sljedeće zaključke:

1. Razvijeni pristup maksimizuje ukupan broj memorijskih lokacija, uglavnom zato što uključuje dvije ulazne memorije, kapaciteta od po N^2 lokacija, koje se koriste za smeštanje realnih i imaginarnih djelova 2D STFT-je. Međutim, ove memorije dozvoljavaju predloženom dizajnu da diskretizuje ulazni analogni signal sa fiksnom, ali najbržom mogućom frekvencijom odabiranja među svim razmatranim pristupima i da importuje tako dobijene odbirke sa signal-adaptivnim taktom $STFT_Load/CTFWD_Store$. Osim toga, ukupan broj memorijskih lokacija ostaje prilično mali.
2. Na osnovu signal-adaptivnog broja taktova uzetih u različitim FF tačkama u toku izvršavanja i u zavisnosti od oblika analiziranog signala, razvijeni pristup može značajno da unaprijedi vrijeme izvršavanja, čak i u poređenju sa SCI pristupom. Na primjer, u slučaju analiziranog, zašumljenog signala (5.1), razvijeni dizajn sa parametrom $L_m=6$ unaprijeđuje vrijeme izvršavanja u poređenju sa ostalim odgovarajućim dizajnima za $T_s, T_{comp} \ll T_m < 15.1247 \times T_a$. Na ovaj način predloženi dizajn uklanja glavni nedostatak klasičnog MCI pristupa u poređenju sa odgovarajućim SCI, [86]. Ova osobina zajedno sa poželjnim karakteristikama vezanim za hardversku kompleksnost pomažu razvijenom dizajnu da nadmaši klasične MCI i SCI pristupe u odnosu na gotovo sve kritične performanse dizajna i stoga se kvalifikuje za optimalno implementaciono rješenje u mnogim praktičnim slučajevima.

Hibridna implementacija je dizajnirana da bi napravila balans između željenih karakteristika klasičnih MCI i SCI pristupa, [86]. Ona bi bila bazirana na SCI pristupu za gateway (baziranom na 2D STFT-ji) sa fiksnom veličinom konvolucionog prozora $(2L_h+1) \times (2L_h+1)$, gdje je $1 \leq L_h < L_m$, ali i na postizanju željene S/SF reprezentacije (koja odgovara širini konvolucionog prozora $(2L_m+1) \times (2L_m+1)$) u η ($1 < \eta < 2L_m^2 + 2L_m + 2$) taktova po FF tački. Nakon toga, estimacija LF-je bi bila izvedena u odvojenom, estimacionom taktu. Ovaj pristup bi također uključio LUT memoriju od $\eta+1$ lokacija koja bi rukovala izvršavanjem u $\eta+1$ taktova po FF tački, kao i veoma kompleksnu kontrolu kako bi se ostvarila željena S/SF reprezentacija. Na ovaj način hibridna implementacija unaprijeđuje performanse SCI pristupa koje se odnose na hardversku kompleksnost (ali ne i odgovarajuće performanse MCI pristupa), kao i vrijeme izvršavanja klasičnog MCI pristupa (ali ne i odgovarajuće vrijeme izvršavanja SCI pristupa), tabele 5.6 i 5.7. Stoga, pošto signal-adaptivni pristup zadržava hardversku kompleksnost klasičnog MCI pristupa i unaprijeđuje vrijeme izvršavanja klasičnog SCI pristupa, to znači da bi značajno unaprijedio i performanse hibridnog pristupa.

Konačno, samo signal-adaptivni dizajn daje optimalni (na bazi 2D CTFWD-je) kvalitet estimacije LF-je, obezbjeđujući visoku S/SF rezoluciju i selektivnost (sve dok se komponente

signala ne preklapaju) i veoma kvalitetno prostorno promjenljivo filtriranje bazirano na toj estimaciji LF-je. Neadaptivni dizajni, bazirani na ostalim razmatranim implementacionim pristupima ne mogu rezultirati sa tako kvalitetnom estimacijom LF-je i tako kvalitetnim prostorno-promjenljivim filtriranjem, slike 5.9 (c)-(d). Na primjer, u slučaju analiziranog signala (5.1), numerički je postignuto poboljšanje u iznosu od 16.58[dB] korišćenjem razmatranog klasičnog MCI pristupa nasuprot poboljšanju u iznosu od 30.69[dB] koje je ostvareno upotrebom razvijenog signal-adaptivnog pristupa.

Tabela 5.6 Hardverska kompleksnost razmatranih implementacionih pristupa za prostorno-promjenljive filtre bazirane na estimaciji LF-je.

Pristup	Broj korišćenih funkcionalnih jedinica			# memorijskih lokacija
	# sabirača	# množača	# ShLeft	
SCI (kada je moguć)	$4L_m^2 + 4L_m + 2$	$4L_m^2 + 4L_m + 2$	$4L_m^2 + 4L_m$	$N(4L_m + 3L) + 4L_m + 2$
Klasični MCI	4	2	2	$N(4L_m + 3L) + 4L_m + 2$
Hibridni	$4L_h^2 + 4L_h + 2$	$4L_h^2 + 4L_h + 2$	$4L_h^2 + 4L_h$	$N(4L_h + 3L) + 4L_h + 2$
Razvijeni signal-adaptivni	6	6	2	$2N^2 + N(4L_m + 3L) + 4L_m + 2$

Tabela 5.7. Vremena taktova, frekvencija odabiranja, i vremena izvršavanja (po FF tački) razmatranih implementacionih pristupa za prostorno-promjenljive filtre bazirane na estimaciji LF-je. Prikazano je prosječno vrijeme izvršavanja (po FF tački) razvijenog signal-adaptivnog dizajna, izračunato za analizirani signal (5.1) i parametre $L_m=6$, $N=64$. $(T_c)_{SCI}$, $(T_c)_{MCI}$, $(T_c)_H$, $(T_c)_{SA}$ su vremena taktova za slučajeve SCI pristupa, klasičnog MCI pristupa, hibridnog pristupa i signal-adaptivnog pristupa, respektivno, dok su T_s , T_{comp} vremena 1-bitnog pomeranja (shift-ovanja) poređenja, respektivno.

Pristup	Vrijeme takta	Frekvencija odabiranja	Vrijeme izvršavanja
SCI (kada je moguć)	$(T_c)_{SCI} = 4T_m + 4T_a(L_m^2 + L_m + 1) + T_s$	$1/(T_c)_{SCI}$	$(T_c)_{SCI}$
Klasični MCI	$(T_c)_{MCI} = T_m + T_a + T_s$	$1/(2(L_m^2 + L_m + 1)) \times T_c)_{MCI}$	$2(L_m^2 + L_m + 1) \times T_c)_{MCI}$
Hibridni	$(T_c)_H = 2T_m + 2T_a(L_h^2 + L_h + 1) + T_s$	$1/((L_h^2 + L_h + 1)) \times T_c)_H$	$(L_h^2 + L_h + 1) \times T_c)_H$
Razvijeni signal-adaptivni	$(T_c)_{SA} = 2T_m + 2T_a + T_{comp}$	$1/(2 \times (T_c)_{SA})$	$7.2094 \times (T_c)_{SA}$

Konačno, razmatrajući kritične performanse dizajna, može se zaključiti da razvijeni dizajn prevazilazi ostale moguće implementacije prostorno-promjenljivih filtara baziranih na estimaciji LF-je, kao i postojeća *online* prostorno-promjenljiva rješenja. Kao najvažnije karakteristike se izdvajaju to što je dizajn uvijek pogodan za impementaciju na čipu i u realnom vremenu, kao i

optimizacija vremena izvršavanja, čak i u poređenju sa odgovarajućim mogućim i postojećim SCI dizajnima.

ZAKLJUČAK

Doktorska disertacija “Signal-adaptivni sistemi za optimalno filtriranje visoko nestacionarnih višedimenzionalnih signala” je nastala kao rezultat višegodišnjeg istraživanja u oblastima analize i filtriranja visoko nestacionarnih višedimenzionalnih signala, i dizajniranja hardvera specijalizovane namjene.

Procesiranje višedimenzionalnih signala i dizajniranje odgovarajućeg hardvera za tu namjenu predstavlja izuzetno izazovnu naučnu disciplinu čiji je razvoj u toku. O tome svjedoči veoma mali broj postojećih sistema za rad sa ovom vrstom signala. Intuitivno bi se moglo rezonovati da je sve sisteme za procesiranje 1D signala moguće transformisati u odgovarajuće sisteme za procesiranje višedimenzionalnih signala. Međutim, čak i u slučaju najjednostavnijih i u praksi najprisutnijih višedimenzionalnih signala, 2D signala, složenost sistema se višestruko uvećava. Naime, 2D signali se predstavljaju 4D reprezentacijom, što znači da se uvode dodatne 2 dimenzije. Kao što se može pretpostaviti, sistemi će morati da obrađuju višestruko veći broj podataka, dok će se matematičke relacije koje ih povezuju toliko usložiti da će dalja ekspanzija najvećeg broja sistema za procesiranje 1D signala biti nemoguća.

U disertaciji je predstavljen razvijen metod koji obezbjeđuje kvalitetno filtriranje visoko nestacionarnih 2D signala u prisustvu veoma intenzivnog aditivnog, bijelog Gaussian-ovog šuma. Funkcija oslonca razvijenog filtra se bazira na estimaciji lokalne frekvencije. Pošto je u mogućnosti da detektuje prisustvo više lokalnih frekvencija u posmatranoj tački signala, razvijen metod je sposoban za kvalitetno filtriranje kako monokomponentnih, tako i multikomponentnih 2D signala. Metod obavlja svoju funkciju u realnom vremenu, što ga čini veoma atraktivnim za praktičnu primjenu. Značajno je istaći da metod ne zavisi od dužine filtriranog signala (što je slučaj u najvećem broju postojećih rješenja) i da je robusan sa aspekta izbora svojih parametara. U toku opsežnog eksperimentalnog rada je potvrđena svaka od navedenih karakteristika razvijenog metoda, a u disertaciji je dato mnoštvo primjera kojima se to dokazuje. Naime, testiranje metoda je izvršeno za više različitih 2D nestacionarnih signala (monokomponentnih, dvokomponentnih, trokomponentnih) u prisustvu različitih količina bijelog

Gaussian-ovog šuma (čak i do dva puta jačeg od filtriranog signala), kao i za različite vrijednosti najvažnijeg parametra sistema.

Razvijeni metod je hardverski realizovan u FPGA tehnologiji, čime je dokazana njegova funkcionalnost u praksi, na primjeru realnog signala. Hardverska realizacija je signal-adaptivna, što znači da razvijeni metod obavlja svoju funkciju u različitom (samo neophodnom) broju taktova. U velikom broju slučajeva (van domena auto-članova signala) koristi se minimalan broj taktova (2 takta), dok se maksimalan broj taktova koristi samo u neposrednoj okolini detektovanih lokalnih frekvencija. Na ovaj način se značajno unaprijeđuju skoro sve kritične performanse dizajna (dimenzije čipa, potrošnja energije, cijena i vrijeme izvršavanja). Dodatno unaprijeđenje performansi ovog dizajna se postiže upotrebom tehnike *pipeline*-inga. Naime, istovremenim izvršavanjem posljednjeg takta za analiziranu tačku signala i prvog takta za narednu tačku signala postiže se ušteda od jednog takta po svakoj tački signala. Imajući u vidu da je količina podataka sa kojom radi razvijeni sistem za filtriranje 2D signala veoma velika, ova ušteda može značajno doprinjeti efikasnijem radu sistema u apsolutnom smislu.

U disertaciji je predstavljena detaljna analiza dizajniranog hardvera, uključujući zasebnu analizu svih funkcionalnih komponenti sistema i složene kontrolne logike koja njime upravlja. U cilju što jasnije demonstracije postignutih rezultata, pojedini djelovi sistema su pojedinačno testirani. Testiranje i verifikacija rada cjelokupnog razvijenog sistema je izvršena u *ModelSim Altera 6.3g_p1 (Quartus II, Web Edition)* okruženju, na čipu EP3C10E144C7 iz *Altera*-ine familije Cyclone III. U završnoj komparativnoj analizi sa ostalim mogućim S/SF dizajnima baziranim na estimaciji lokalne frekvencije, kao i *online* S/SF rješenjima razvijeni dizajn nedvosmisleno demonstrira superiornost.

Pored navedenih originalnih naučnih doprinosa, u doktorskoj disertaciji je dat sveobuhvatan pregled:

- Koncepta TF i S/SF analize, sa posebnim akcentom na TF i S/SF distribucijama;
- Opštih principa nestacionarnog filtriranja baziranog na TF analizi i postojećih metoda za filtriranje nestacionarnih 1D signala;
- Opštih principa nestacionarnog filtriranja baziranog na S/SF analizi i postojećih metoda za filtriranje nestacionarnih 2D signala;
- Postojećih hardverskih rješenja filtara baziranih na TF analizi;
- Postojećih hardverskih rješenja filtara baziranih na S/SF analizi.

LITERATURA

- [1] J.B. Allen, L.R. Rabiner, "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis", *Proc. of the IEEE*, vol. 65, no. 11, Nov. 1977, pp. 1558-1564.
- [2] R.E. Crochiere, L.R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, New York, Prentice Hall, 1983.
- [3] M.G. Amin, "Spectral smooting and recursion based on the nonstationarity of the autocorrelation function", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, Feb. 1993, pp. 930-934.
- [4] S.B. Heeron, M.G. Amin, "Minimum-variance time-frequency distribution kernels", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, 1995, pp. 1258-1262.
- [5] M.G. Amin, K.D. Feng, "Short-time Fourier transform using cascade filter structures", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 42, no. 10, Oct. 1995, pp. 631-641.
- [6] M.G. Amin, "Minimum variance time-frequency distribution kernels for signals in additive noise", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 9, Sep. 1996, pp. 2352-2356.
- [7] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner distribution – a tool for time frequency signal analysis, Part I: Continuous time signals", *Philips J. Res.*, 35, (3), 1980, pp. 217-250.
- [8] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner distribution – a tool for time frequency signal analysis, Part II: Discrete time signals", *Philips J. Res.*, 35, (4/5), 1980, pp. 276-300.
- [9] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner distribution – a tool for time frequency signal analysis, Part III: Relation with other time frequency signal transformations", *Philips J. Res.*, 35, (6), 1980, pp. 372-389.
- [10] T.A.C.M. Classen, W.F.G. Mecklenbrauker, "On stationary linear time-varying systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol.29, no. 3, 1982, pp.169-184.

-
- [11] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The aliasing problem in discrete time Wigner distributions", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, no. 5, Oct. 1983, pp. 1067-1072.
 - [12] H. Choi, W. Williams, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-73, no. 6, June 1989, pp. 862-871.
 - [13] L. Cohen, *Time-frequency analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
 - [14] L. Cohen, "What is a Multicomponent Signal?", CAIP Research Center, Rutgers University, Piscataway, New Jersey.
 - [15] L. Cohen, "Time-frequency distributions – a review", *Proc. Of the IEEE*, vol. 77, no. 7, July 1989, pp. 941-981.
 - [16] L. Cohen, "Distributions concentrated along the instantaneous frequency", *Advances Signal Proc., Algorithms, Architectures and Implementation*, SPIE, vol. 1348, 1992, pp. 149-157.
 - [17] G.S. Cunningham and W.J. Williams, "Kernel decomposition of time-frequency distributions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, June 1994, pp. 1425-1441.
 - [18] B. Boashash, *Time Frequency Signal Analysis and Processing*. Signal Processing Research, Queensland University of Technology, Brisbane, Australia, Elsevier 2003.
 - [19] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 1: Fundamentals", *Proc. IEEE*, vol. 80, April 1992, pp. 519-538.
 - [20] B. Boashash, "Time-frequency signal analysis", in *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing* (S. Haykin, ed.), vol. 1, ch. 9, pp. 418-517, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1991.
 - [21] B. Boashash, "Representation Temps-Frequence", *Publication de Recherches*, Soc. Natl. ELF Aquitaine, 1978, pp. 373-378.
 - [22] B. Boashash, "Wigner analysis of time-varying signals – Its application in seismic prospecting", in *Proc. European Signal Processing Conf. (EUSPICO-83)*, pp. 703-706, Nurnberg, Sept. 1983.
 - [23] B. Boashash, J. B. Black, "An efficient real time implementation of the Wigner-Ville distribution", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-35, no. 11, Nov. 1987, pp. 1611-1618.
 - [24] B. Boashash and B. Ristić, "Polynomial time-frequency distributions and time-varying higher order spectra: application to the analysis of multicomponent FM signals to the treatment of multiplicative noise", *Signal Processing*, vol. 67, no. 1, 1998, pp. 1-23.

-
- [25] B. Ristić, B. Boashash, "Relationship between the polynomial and higher order Wigner-Ville distribution", *IEEE Signal Processing Letters*, no. 12, vol. 2, Dec. 1995, pp. 227-229.
- [26] G.F. Boudreaux-Bartels, T.W. Parks, "Time-varying filtering and signal estimation using the Wigner distribution", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol.34, no.6, June 1986, pp.442-451.
- [27] G.F. Boudreaux-Bartels, "Time-varying signal processing using Wigner distribution synthesis techniques", in *The Wigner distribution – theory and applications in signal processing* (Mecklenbrauker, W. & Hlawatsch F., Eds.), pp. 269-317, Elsevier, 1997.
- [28] R.G. Shenoy, T.W. Parks, "The Weyl correspondence and time-frequency analysis", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 2, Feb. 1994, pp. 318-331.
- [29] W. Kozek, F. Hlawatsch, "Time-frequency representation of linear time-varying systems using the Weyl symbol", *Proc. of the 6-th Int. Conf. on Digital Processing of Signals in Communication*, Loughborough, UK, Sept. 1991, pp. 25-30.
- [30] F. Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representations", *IEEE Signal Processing Magazine*, April 1992, pp. 21-67.
- [31] W. Kozek, "On the generalized Weyl correspondence and its application to time-frequency analysis of linear time-varying systems", *Proc. on IEEE SP Int. Symp. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, Victoria, Canada, Oct. 1992, pp. 167-170.
- [32] W. Kozek, "Time-frequency signal processing based on the Wigner-Weyl framework", *Signal Processing*, vol. 29, no. 1, Oct. 1992, pp. 77-92.
- [33] W. Kozek, F. Hlawatsch, "A comparative study of linear and nonlinear time-frequency filters", *Proc. on IEEE SP Int. Symp. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, Victoria, Canada, Oct. 1992, pp. 163-166.
- [34] W. Kozek, F. Hlawatsch, H. Kirchauer, U. Trautwein, "Correlative time-frequency analysis and classification of nonstationary random processes", *Proc. on IEEE SP Int. Symp. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, Philadelphia, USA, Oct. 1994, pp. 417-420.
- [35] F. Hlawatsch, W. Kozek, "Time-frequency projection filters and time-frequency signal expansions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 12, Dec. 1994, pp. 3321-3334.
- [36] H. Kirchauer, F. Hlawatsch, W. Kozek, "Time-frequency formulation and design of nonstationary Wiener filter", *Proc. IEEE ICASSP 1995*, pp. 1549-1552.
- [37] G. Matz, F. Hlawatsch, W. Kozek, "Generalized evolutionary spectral analysis and the Weyl spectrum of non-stationary random processes", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 6, June 1997, pp. 1520-1534.
-

-
- [38] F. Hlawatsch, *Time-Frequency Analysis and Synthesis of Linear Signal Spaces: Time-Frequency Filters, Signal Detection and Estimation, and Range-Doppler Estimation*, Boston, MA, Kluwer, 1998.
- [39] F. Hlawatsch, G. Matz, H. Kirchauer, W. Kozek, "Time-frequency formulation, design and implementation of time-varying optimal filters for signal estimation", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 48, no. 5, May 2000.
- [40] F. Hlawatsch, G. Matz, "Quadratic time-frequency analysis of linear time-varying systems", in *Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis*, (L. Debnath, Ed.), ch.9, Boston, MA, Birkhauser, 2001.
- [41] G. Matz, F. Hlawatsch, "Linear time-frequency filters: Online algorithms and applications", in *Applications in Time-Frequency Signal Processing* (A. Papandreou-Suppappola, Ed.), Boca Raton, FL, CRC Press, 2002, pp. 205-271.
- [42] G. Matz, F. Hlawatsch, "Linear time-frequency filters", in *Time-Frequency Signal Analysis and Processing* (B. Boashash, Ed.), Prentice Hall, 2002.
- [43] G. Matz, F. Hlawatsch, "Time-frequency projection filters: Online implementation, subspace tracking and application to interference excision", *Proc. IEEE ICASSP 2002*, Orlando, Florida, May 2002, pp. 1213-1216.
- [44] G. Matz, F. Hlawatsch, "Time-frequency transfer function calculus of linear time-varying systems", in *Time-Frequency Signal Analysis and Processing* (B. Boashash, Ed.), Englewood Cliffs, Prentice Hall, 2002.
- [45] J. Jeong, W.J. Williams, "On cross-terms in spectrograms", *Proc. of the IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, 1990, pp. 1565-1568.
- [46] J. Jeong, W.J. Williams, "Kernel design for reduced interference distributions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, Feb. 1992, pp. 402-412.
- [47] J. Jeong, W.J. Williams, "Mechanism of the cross-terms in spectrograms", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 10, Oct. 1992, pp. 2608-2613.
- [48] J. Jeon, W.J. Williams, "Alias-free generalized discrete-time time-frequency distributions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 11, Nov. 1992, pp. 2757-2764.
- [49] A.J.E.M. Jannssen, "Wigner weight functions and Weyl symbols of nonnegative definite linear operators", *Phillips Journal of Research*, vol. 44, 1989, pp. 7-42.
- [50] S.M. Kay, "Statistically/computationally efficient frequency estimation", in *Proc. IEEE ICASSP*, New York, 1988, pp. 2292-2295.
- [51] K.J.R. Liu, "Novel parallel architecture for short time Fourier transform", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 40, no. 12, Dec. 1993, pp. 786-789.
-

-
- [52] W. Martin, P. Flandrin, "Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 6, Dec. 1985, pp. 1461-1470.
- [53] F. Auger, P. Flandrin, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, May 1995, pp. 1068-1089.
- [54] P. Flandrin, W. Martin, "The Wigner-Ville spectrum of nonstationary processes" in *The Wigner distribution: Theory and applications in signal processing*, eds. W. Mecklenbrauker, F. Hlawatsch, Elsevier, 1997.
- [55] P. Flandrin, *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*, San Diego, CA, Academic Press, 1999.
- [56] D. Gabor, "Theory of communications", *J. IEE*, vol. 93, London 1946, pp. 423-457.
- [57] E.P. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Rev.*, vol. 40, 1932, pp. 246-254.
- [58] J. Ville, "Theorie et application de la notion de signal analytique", *Cables et Transmissions*, vol. 2A (1), 1948, pp. 61-74.
- [59] L.A. Zadeh, "Frequency analysis of variable networks", *Proc. IRE*, vol. 67, March 1950, pp. 291-299.
- [60] W. Rihaczek, "Signal energy distribution in time and frequency", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 14, 1968, pp. 369-374.
- [61] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, New York, 1950.
- [62] B. Van der Pol, "The fundamental principles of frequency modulation", *Proc. IEEE*, vol. 93 (III), 1946, pp. 153-158.
- [63] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1949.
- [64] N.G. de Bruijn, *A Theory of Generalized Functions with Applications to Wigner Distribution and Weyl Correspondence*, Nieuw Arch. Wiskunde (3), XXI, 1973, pp. 205-280.
- [65] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Digital signal processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- [66] H.L. Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, New York, Wiley, 1968.
- [67] A. Papoulis, *Systems and transforms with applications in optics*, McGraw Hill, New York, 1968.
-

-
- [68] A. Papoulis, *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [69] A.B. Carlson, *Communication Systems*. Tokyo: McGraw-Hill, 2nd ed., 1975.
- [70] J. Carson, T. Fry, "Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation", *Bell System Tech. J.*, vol. 16, 1937, pp. 513-540.
- [71] A.H. Nuttall, "Wigner distribution function: Relation to the short-term spectral estimation, smoothing and performances in noise", *Naval Underwater System center, NUSC Technical Report 8225*, 16, Feb. 1988.
- [72] P. Rao, J.F. Taylor, "Estimation of the instantaneous frequency using the discrete Wigner distribution", *Electronics Letters*, vol. 26, 1990, pp. 246-248.
- [73] T.D. Rossing, *The Science of Sound*. Reading, MA: Addison-Wesley, 2nd ed., 1990.
- [74] Y. Zhao, L.E. Atlas and R.J. Marks, "The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Transactions Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 38, July 1990, pp. 1084-1091.
- [75] G.B. Folland, "Harmonic Analysis in Phase Space", *Annals of Mathematics Studies*, vol. 122, Princeton University Press, Princeton, New York, 1989.
- [76] M.W. Wong, *Weyl Transforms*, Springer, New York, 1998.
- [77] I. Daubechies, "Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach", *IEEE Transactions Inform. Theory*, 34, pp. 605-612, July 1988.
- [78] D.E. Dudgeon, R.M. Mersereau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New York, USA, 1984.
- [79] J.W. Woods, *Multidimensional Signal, Image and Video Processing and Coding*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [80] L.D. Jacobson, H. Wechsler, "Joint spatial/spatial-frequency representation", *Signal Processing*, vol. 14, no. 1, 1988, pp. 37-68.
- [81] T. Reed, H. Wechsler, "Segmentation of textured images and Gestalt organization using spatial/spatial-frequency representations", *IEEE Transactions on Pattern Analysis, Mach. Intell.*, vol. 12, no. 1, 1990, pp. 1-12.
- [82] V. Ivanović, M. Daković, I. Đurović, Lj. Stanković, "Instantaneous frequency estimation by using time-frequency distributions", in *Proc. IEEE ICASSP*, Salt Lake City, May 2001.
- [83] V. Ivanović, "Vremensko frekvencijska analiza primjenjena na optimalno nestacionarno filtriranje sa hardverskim realizacijama", *doktorska disertacija, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet*, Podgorica, Jun 2001.
-

-
- [84] V. Ivanović, M. Daković, Lj. Stanković, "Performances of quadratic time-frequency distributions as instantaneous frequency estimators", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 1, Jan. 2003, pp. 77-89.
- [85] M. Daković, V.N. Ivanović, Lj. Stanković, "On the S-method based instantaneous frequency estimation", *Proc. International Symposium On Signal Processing and its Applications*, Paris, France, 2003.
- [86] V. Ivanović, R. Stojanović, LJ. Stanković, "Multiple clock cycle architecture for the VLSI design of a system for time-frequency analysis", *EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Special Issue on Design Methods for DSP Systems*, vol. 2006, pp. 1-18.
- [87] V.N. Ivanović, R. Stojanović, "An Efficient Hardware Design of the Flexible 2D System for Space/Spatial-Frequency Analysis", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, June 2007, pp. 3116-3126.
- [88] V.N. Ivanović, S. Jovanovski, "A signal adaptive system for time-frequency analysis", *Electronics Letters*, 44(21), 2008, pp. 1279-1280.
- [89] S. Jovanovski, V.N. Ivanović, N. Radović, "An efficient real-time method for time-varying filter region of support estimation", *IEEE Signal Processing Society 13th DSP Workshop & 5th SPE Workshop*, Marco Island, Florida, USA, January 4-7, 2009, pp. 513-517.
- [90] S. Jovanovski, V.N. Ivanović, "An efficient hardware design of an optimal nonstationary filtering system", *Proc. IEEE ICASSP 2009*, Taipei, Taiwan, April 2009, pp. 569-572.
- [91] V.N. Ivanović, S. Jovanovski, "Signal adaptive method for improved space/spatial-frequency representation", *Electronics Letters*, Sept.2009, 45, (19), pp. 1003-1005.
- [92] V.N. Ivanović, S. Jovanovski, "Signal adaptive system for space/spatial-frequency analysis", *EURASIP J. Advances in Signal Process.*, vol. 2009, pp. 1-15.
- [93] V.N. Ivanović, N. Radović, S. Jovanovski, "Real-time design of a space/spatial-frequency optimal filter," *Electronics Letters*, vol.46, no.25, December 2010, pp. 1696-1697.
- [94] V.N. Ivanović, N. Radović, S. Jovanovski, "Real-time design of a space/spatial-frequency optimal filter for highly nonstationary two-dimensional signal estimation", *Proc. IEEE ICASSP 2011*, Prague, Czech Republic, May 23-27, 2011, pp.1653-1656.
- [95] S. Jovanovski, V.N. Ivanović, "Signal adaptive pipelined hardware design of time-varying optimal filter for highly nonstationary FM signal estimation", *J. Signal Processing Systems*, 2011, 62, (3), pp. 287-300.
- [96] V.N. Ivanović, S. Jovanovski, N. Radović, Z. Uskoković, "Real-time implementation of the optimal two-dimensional filter for highly nonstationary frequency-modulated signal

- estimation”, *XXXIII IEEE International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO 2013)*, Kyiv, Ukraine, Apr. 16–19, 2013, vol. 1, pp. 440-444.
- [97] V.N. Ivanović, N. Radović, M. Božović, Z. Uskoković, “Principles of Pipelining in the Space/Spatial-Frequency Based Filtering of Two-Dimensional Highly Nonstationary Signals”, *57th ETRAN Conference*, Zlatibor, Serbia, June 3-6, 2013.
- [98] Veselin N. Ivanović, Nevena Radović, Marko Božović, Zdravko Uskoković, “Enhancing Performance of the Space/Spatial-Frequency Optimal Filter Based on the Pipelining Technique Application,” *FACTA UNIVERSITATIS - Series Electronics and Energetics*, vol. 26, no. 2, Aug. 2013, pp. 87-98.
- [99] N. Radović, “Prilog real-time estimaciji trenutne frekvencije i vremenski promjenljivoj filtriranju baziran na vremensko-frekvencijskoj analizi visoko nestacionarnih signala: metod za implementaciju”, *Magistarska teza, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet*, Podgorica, decembar 2007.
- [100] N. Radović, V.N. Ivanović, “Hardware Implementation of a System for Highly Nonstationary Two-Dimensional FM Signals Estimation Based on the Sliding Matrix Function”, *IEEE EUROCON 2013*, Zagreb, Croatia, July 1–4, 2013, pp. 1738-1744.
- [101] V. Katkovnik, “Local polynomial approximation of the instantaneous frequency: Asymptotic accuracy”, *Signal Processing*, vol. 52, no. 3, 1996.
- [102] V. Katkovnik, “Adaptive local polynomial periodogram for time-varying frequency estimation”, in *Proc. of the IEEE Int. Symp. TFTA*, Paris, June 1996, pp. 329-332.
- [103] V. Katkovnik, “Nonparametric estimation of instantaneous frequency”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, Jan. 1997, pp. 183-189.
- [104] V. Katkovnik, Lj. Stanković, “Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data-driven window length,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 9, Sept. 1998.
- [105] V. Katkovnik, Lj. Stanković, “Instantaneous frequency estimation using periodogram with time varying window length”, *Signal Processing*, vol. 67, no. 3, June 1998, pp. 345-358.
- [106] Lj. Stanković, *Time Frequency Signal Analysis*, research monograph 1993-2003.
- [107] Lj. Stanković, S. Stanković, “Wigner distribution of noisy signals”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, Feb. 1993, pp. 956-960.
- [108] Lj. Stanković, “A method for time-frequency analysis”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, Jan. 1994, pp. 225-229.
- [109] Lj. Stanković, “A multitime definition of the Wigner higher order distribution: L-Wigner distribution”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 1, no. 7, July 1994, pp. 106-109.

-
- [110] Lj. Stanković, S. Stanković, "On the Wigner distribution of the discrete-time noisy signals with application to the study of quantization effects", *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 7, vol. 42, July 1994, pp. 1863-1867.
- [111] Lj. Stanković, "An analysis of some time-frequency and time-scale distributions", *Annales des Telecommunications*, no. 9-10, Sep/Oct. 1994., pp. 505-517.
- [112] S. Stanković, Lj. Stanković, Z. Uskoković, "On the local frequency, group shift, and cross-terms in some multidimensional time-frequency distributions: a method for multidimensional time-frequency analysis", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 7, 1995, pp. 1719-1724.
- [113] Lj. Stanković, "A method for improved energy concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signal using L-Wigner distribution", *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 5, vol. 43, May 1995, pp. 1262-1268.
- [114] Lj. Stanković, "L-class of time-frequency distributions", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 1, Jan. 1996, pp. 22-25.
- [115] Lj. Stanković, "A time-frequency distribution concentrated along the instantaneous frequency", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 3, Mar. 1996, pp. 89-91.
- [116] Lj. Stanković, "Auto-term representation by the reduced interference distributions; The procedure for the kernel design", *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 6, vol. 44, June 1996, pp. 1557-1564.
- [117] Lj. Stanković, V. Ivanović, Z. Petrović, "Unified noise analysis in the spectrogram and Wigner distribution", *Annales des Telecommunications*, no.11/12, Nov/Dec. 1996, pp. 585-594.
- [118] Lj. Stanković, "Highly concentrated time-frequency distributions: Pseudo quantum signal representation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 3, Mar. 1997, pp. 543-552.
- [119] Lj. Stanković, "S-class of time-frequency distributions", *IEE Proc. Vision, Image and Signal Processing*, no. 2, April 1997, pp. 57-64.
- [120] S. Stanković, Lj. Stanković, "An architecture for the realization of a system for time-frequency signal analysis", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 44, no. 7, July 1997, pp. 600-604.
- [121] Lj. Stanković, "Algorithm for the Wigner distribution of noisy signal realization", *Electronic Letters*, vol. 34, no. 7, April 1998, pp. 622-624.
- [122] Lj. Stanković, V. Katkovnik, "Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with variable window width", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 9, Sept. 1998, pp. 224-227.
-

- [123] Lj. Stanković, J.F. Bohme, "Time-frequency analysis of multiple resonances in combustion engine signals", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42 (1), 1999, pp. 225-259.
- [124] Lj. Stanković, V. Katkovnik, "The Wigner distribution of noisy signals with adaptive time-frequency varying window", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 2, Apr. 1999, pp. 1099-1108.
- [125] Lj. Stanković, V. Katkovnik, I. Đurović, "Adaptive order and window length higher order time-frequency distributions in the IF estimation", in *Proc. IEEE ICECS*, Cyprus, vol. 2, Sept. 1999, pp. 1077-1080.
- [126] I. Djurović, Lj. Stanković, "A virtual instrument for time-frequency analysis", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 48, Dec. 1999, pp. 1086-1092.
- [127] Lj. Stanković, V. Katkovnik, "Instantaneous frequency estimation using higher order distributions with adaptive order and window length", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 1. Jan. 2000, pp. 302-311.
- [128] Lj. Stanković, "On the time-frequency analysis based filtering", *Annales des Telecommunications*, vol. 55, no. 5-6, May 2000.
- [129] I. Đurović, Lj. Stanković, M.J. Bastianas, "Multidimensional Reassignment Method", *TELSIKS 2001*, Niš, Serbia, vol. 1, Sept. 2001, pp.13-16.
- [130] Lj. Stanković, S. Stanković, I. Djurović, "Space/spatial frequency analysis based filtering", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 8, Aug. 2000.
- [131] Lj. Stanković, M. Daković, V. Ivanović, "Performances of spectrogram as an IF estimator", *Electronic Letters*, vo. 37. no. 12, June 2001, pp. 797-799.
- [132] Lj. Stanković, "Quadratic and higher order time-frequency analysis based on the short-time Fourier transform", in *Time-Frequency Signal Analysis* (edited by B. Boashash), Prentice Hall, 2002.
- [133] Lj. Stanković, "A measure of some time-frequency distributions concentration", in *Time-Frequency Signal Analysis* (edited by B. Boashash), Prentice Hall, 2002.
- [134] S. Stanković, I. Đurović, V. Vuković, "System architecture for space frequency image analysis", *Electronics Letters*, vol. 34, no. 23, Nov. 1998, pp. 2224-2225.
- [135] S. Stanković, "Time-frequency analysis based filtering of speech signals with time-frequency distributions for hands-free telephone systems", *Signal Processing*, vol. 80, no. 9, September 2000, pp. 1777-1785.
- [136] S. Stanković, "Time-frequency analysis based filtering of speech signals in hands-free telephone systems", in *Time-Frequency Signal Analysis* (edited by B. Boashash), Prentice Hall, 2002.

-
- [137] S. Stanković, Lj. Stanković, V. Ivanović, R. Stojanović, "An architecture for the VLSI design of systems for time-frequency analysis and time-varying filtering", *Annales des Telecommunications*, vol. 57, no. 9/10, Sept/Oct. 2002, pp. 974-995.
- [138] Y.M. Zhu, F. Peyrin, R. Goutte, "Transformation de Wigner-Ville: description d'un nouvel outil de traitement du signal et des images", *Annales des Telecommunication*, vol. 42, no. 3-4, 1987, pp. 105-118.
- [139] Y.M. Zhu, R. Goutte, M. Amiel, "On the use of two-dimensional Wigner-Ville distribution for texture segmentation", *Signal Processing*, vol. 30, no. 3, 1993, pp. 329-353.
- [140] G. Cristobal, J. Bescos, "Image analysis through the Wigner distribution function", *Applied Optics*, vol. 28, no. 2, 1989, pp. 262-271.
- [141] G. Cristobal, C. Gonzalo, J. Bescos, "Image filtering and analysis through the Wigner distribution function", *Advances in Electronics and Electron Physics*, P.W. Haeks, Ed., Academic Press, Boston, Mass, USA, 1991.
- [142] J. Hormigo, G. Cristobal, "High resolution spectral analysis of images using the pseudo-Wigner distribution", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, 1998, pp. 1757-1763.
- [143] J.G. Daugman, "Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive fields profiles", *Vision Res.*, vol. 20, no. 10, 1980, pp. 847-856.
- [144] J.G. Daugman, "Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters", *Journal of Optical Society of America*, vol. 2, no. 7, July 1985, pp. 1160-1169.
- [145] H. Suzuki, F. Kobayashi, "A method of two-dimensional spectral analysis using the Wigner distribution", *Electronics and Communications in Japan*, vol. 75, no. 1, 1992, pp. 1006-1013.
- [146] J.P. Jones, L.A. Palmer, "An evaluation of the two-dimensional Gabor filter model of simple receptive fields in cat striate cortex", *Journal of Neurophysiology*, vol. 58, no. 6, Dec. 1987.
- [147] M. Zibulski, Y.Y. Zeevi, "Analysis of multiwindow Gabor-type scheme by frame methods", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 4, April 1997, pp. 188-221.
- [148] M. Zibulski, Y.Y. Zeevi, "Discrete multiwindow Gabor type-transforms", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, June 1997, pp. 1428-1442.
- [149] Y.Y. Zeevi, M. Zibulski, M. Porat, "Multi-window Gabor schemes in signal and image representations", in *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications* (H.G. Feichtinger, T. Strohmer, Eds.), Boston (MA): Birkhäuser, 1998, pp. 381-407.
-

- [150] T. Kailath, *Linear Systems*, Englewood Cliffs, New York, Prentice Hall, 1980.
- [151] A.W. Naylor, G.R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, New York, Springer, 2nd. ed., 1982.
- [152] P. Dewilde, A.J. van der Veen, *Time-Varying Systems and Computations*, Boston, MA, Kluwer, 1998.
- [153] S.H. Nawab, T.F. Quatieri, "Short-time Fourier transform", in *Advanced Topics in Signal Processing* (J.S. Lim and A.V. Oppenheim, Eds.), ch.6, pp.289-337, Englewood Cliffs, New York, Prentice Hall, 1988.
- [154] M.R. Portnoff, "Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time Fourier analysis", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 28, Feb. 1980, pp. 55-69.
- [155] S. Farkash, S. Raz, "Linear systems in Gabor time-frequency space", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 3, 1994, pp. 611-617.
- [156] S. Qian, D. Chen, *Joint Time-Frequency Analysis*, Englewood Cliffs, New York, Prentice Hall, 1996.
- [157] K. Grochenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Boston, Birkhauser, 2001.
- [158] N.C. Huang, J.K. Aggarwal, "On linear shift-variant digital filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 27, Aug. 1980, pp. 672-679.
- [159] N.C. Huang, J.K. Aggarwal, "Synthesis and implementation of recursive linear shift-variant digital filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 30, Jan. 1983, pp. 29-36.
- [160] H.G. Feichtinger, T. Strohmer, Eds., *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications*, Boston, MA, Birkhauser, 1998.
- [161] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Baltimore, Johns Hopkins University Press, 3rd. ed., 1996.
- [162] K. Maharatna, A.S. Dhar, S. Banerjee, "A VLSI array architecture for realization of DFT, DHT, DCT and DST", *Signal Processing*, 41(3), pp. 1357-1377.
- [163] X.-G. Xia, S. Qian, "Convergence of an iterative time-variant filtering based on discrete Gabor transform", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 10, Oct. 1999, pp. 2894-2899.
- [164] P.S.R. Dinic, *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*, 4th. edition, Springer, New York, 2013.

- [165]J.-W. Lee, G.-K. Lee, “Design of an Adaptive Filter with a Dynamic Structure for ECG Signal Processing”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 3, no.1, March 2005, pp. 137-142.

IZJAVA O AUTORSTVU

Potpisani/a **Nevena Radović**

Broj upisa

IZJAVLJUJEM

da je doktorska disertacija pod naslovom:

**SIGNAL-ADAPTIVNI SISTEMI ZA OPTIMALNO FILTRIRANJE VISOKO
NESTACIONARNIH VIŠEDIMENZIONALNIH SIGNALA**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini, ni u djelovima nije bila predložena za sticanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova i
- da nijesam kršio/la autorska prava i koristio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

Nevena Radović

u Podgorici

10/08/2014

**IZJAVA O ISTOVJETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE
VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime i prezime autora **Nevena Radović**

Broj upisa

Studijski program **Doktorske studije elektrotehnike**

Naslov disertacije

**SIGNAL-ADAPTIVNI SISTEMI ZA OPTIMALNO FILTRIRANJE VISOKO
NESTACIONARNIH VIŠEDIMENZIONALNIH SIGNALA**

Mentor **Prof. dr Veselin Ivanović**

Potpisani/a **Nevena Radović**

Izjavljujem da je štampana verzija doktorske disertacije istovjetna elektronskoj verziji, koju sam predao/la radi pohranjivanja u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore**.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje ličnih podataka u vezi sa sticanjem akademskog zvanja doktora nauka (ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naslov disertacije i datum odbrane) na mrežnim stranicama i u publikacijama Univerziteta Crne Gore.

Potpis doktoranda

Nevena Radović

u **Podgorici**

10/08/2014

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore unese doktorsku disertaciju pod naslovom

**SIGNAL-ADAPTIVNI SISTEMI ZA OPTIMALNO FILTRIRANJE VISOKO
NESTACIONARNIH VIŠEDIMENZIONALNIH SIGNALA**

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

Autorstvo

Autorstvo – bez prerada

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Autorstvo – nekomercijalno

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

Nevena Radović

u Podgorici

10/08/2014

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poledini ovog priloga)

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.