

UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET PODGORICA

Marko Simeunović

**Razvoj estimatora polinomijalno-faznih signala sa
naprednim tehnikama za pretraživanje parametara**
– doktorska disertacija –

Podgorica, april 2013. godine

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANTU

Ime i prezime: **Marko Simeunović**

Datum i mjesto rođenja: **24. 09. 1985. godine, Tuzla, Bosna i Hercegovina**

Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka: **Računari, magistarski rad odbranjen: 04. 12. 2009. godine**

INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: **Doktorske studije elektrotehnike**

Naziv teze: **Razvoj estimatora polinomijalno-faznih signala sa naprednim tehnikama za pretraživanje parametara**

Fakultet na kojem je disertacija odbranjena: **Elektrotehnički fakultet, Podgorica**

UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave doktorske teze: **19. 04. 2011. godine**

Datum sjednice Senata Univerziteta na kojoj je prihvaćena teza: **7. 7. 2011. godine**

Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:

doc. dr Miloš Daković, ETF Podgorica

prof. dr Igor Đurović, ETF Podgorica

doc. dr Budimir Lutovac, ETF Podgorica

Mentor: **prof. dr Igor Đurović**

Komisija za ocjenu doktorske disertacije:

prof. dr Ljubiša Stanković, ETF Podgorica

prof. dr Vladimir Crnojević, FTN Novi Sad

prof. dr Igor Đurović, ETF Podgorica

Komisija za odbranu doktorske disertacije:

prof. dr Igor Đurović, ETF Podgorica

prof. dr Ljubiša Stanković, ETF Podgorica

prof. dr Vladimir Crnojević, FTN Novi Sad

prof. dr Miloš Daković, ETF Podgorica

doc. dr Slobodan Đukanović, ETF Podgorica

Datum odbrane: **08. 04. 2013. godine**

Datum promocije: _____

Izvod iz rada

Zbog velike primjene u praktičnim aplikacijama, izučavanju polinomijalno-faznih signala (PPS - engl. *polynomial-phase signal*) intenzivno se pristupilo u poslednjih nekoliko decenija. PPS predstavlja podgrupu frekvencijsko-modulisanih signala, kod kojih se faza predstavlja polinomom. Da bi signal bio opisan, neophodno je odrediti vrijednosti njegovih parametara, tj. amplitude, reda polinoma i koeficijenata polinoma faze. Budući da se estimacija obavlja u prisustvu smetnji, ovo ne predstavlja jednostavan zadatak. Tokom poslednjih nekoliko decenija, nastao je veliki broj estimatora PPS-a, optimizovanih za različite tipove smetnji. Estimatori se međusobno razlikuju po tačnosti i računskoj složenosti. Naime, tačnije tehnike su, generalno, računski zahtjevnije, za razliku od onih manje tačnih. Stoga, dizajn PPS estimatora predstavlja kompromis između ova dva zahtjeva.

Teza razmatra mogućnosti za poboljšanje postojećih estimatora PPS-a, dizajniranih za rad sa signalima zahvaćenim aditivnim bijelim Gauss-ovim šumom. Poboljšanja su ostvarena na tri načina: smanjivanjem nelinearnosti estimatorskih funkcija, optimizacijom pretrage u tehnikama koje, da bi estimirale parametre, vrše pretragu po višedimenzionim prostorima i implementacijom naprednih tehnika za poboljšanje tačnosti estimiranih parametara. Prilikom izrade doktorske teze, postojala su dva cilja: povećati tačnost estimatora male kompleksnosti, uz očuvanje približno istog broja potrebnih računskih operacija i smanjiti složenost kompleksnih estimatora, uz očuvanje tačnosti. Kao mjeru za ocjenu tačnosti koristili smo srednju kvadratnu grešku (MSE - engl. *mean squared error*) estimacije i prag odnosa signal-šum (SNR - engl. *signal to noise ratio*). Kao doprinos teze, nastali su estimatori PPS-a, čija MSE teži teorijskim granicama koje se mogu postići estimacijom i koji imaju značajno niži prag SNR-a u odnosu na konvencionalne estimatore. U tezi su razmatrani kako jednodimenzioni PPS-i (monokomponentni i multikomponentni), tako i dvodimenzioni PPS-i. Predložena je i računski prihvatljiva

procedura za estimaciju parametara PPS-a koji stiže na antensku rešetku, kao i procedura za estimaciju parametara radarskih signala. Ove procedure se odlikuju zavidnim performansama.

Performanse uvedenih modifikacija ispitivane su na dva načina: statističkom analizom i numeričkim pristupom. Za estimatore, za koje smo izvodili asimptotske MSE-e, numerički metod je služio kao potvrda tačnosti sprovedene analize, dok, tamo gdje je bilo neizvodljivo primjeniti analitičku analizu, numerički pristup je bio jedini način za ocjenu performansi.

Abstract

Polynomial-phase signals (PPSs) are encountered in numerous applications including radars, sonars, biomedicine, etc. Therefore, a significant scientific attention has been paid to PPSs in the last few decades. PPSs represent a subgroup of frequency-modulated signals whose phase can be represented by a polynomial. The aim of the PPS estimation is to determine the signal amplitude, polynomial phase order and phase parameters from the observations of noisy signals. Signals can be affected by different kinds of noise. Therefore, numerous estimators, that are optimal for various scenaria, were proposed. Design of PPS estimators represent a trade-off between the estimator's complexity and accuracy. In general, more accurate techniques are characterized by higher computational complexity and vice versa.

In this thesis, we discuss the possibilities to improve the PPS estimation in the Gaussian noise environment. We improve the estimation in three ways: by lowering the order of estimator's non-linearity, by optimizing search in techniques that require multidimensional searches and by implementing advanced techniques for the parameter refinement. The two main aims during the research were to increase the accuracy of techniques with low accuracy, by preserving their complexity as low as possible, and to decrease the complexity of techniques with high accuracy, by preserving their accuracy as high as possible. To measure the accuracy, we use the mean squared error (MSE) of estimates and the signal to noise ratio (SNR) threshold. As research output, we have developed estimators with MSEs that approach to the theoretical limits of PPS estimation and that have significantly lower SNR thresholds than the conventional techniques. In the thesis, we considered the estimation of both, one dimensional (1D) PPSs and 2D PPSs. In addition, we proposed a low complexity estimation technique for the PPS arriving at a multisensor array and a technique for the estimation of radar signals.

The performance of the estimators proposed in the thesis is evaluated by means of the

asymptotic analysis of the MSE and numerical examples. The accuracy of the derived MSE expressions are verified by numerical examples. When the asymptotic analysis was not carried out due to excessive complexity numerical examples are used to assess the performance.

The thesis consists of seven chapters. After the introduction (Chapter 1), in Chapter 2 we discuss the aims in the PPS estimation and derive the Cramér-Rao lower bounds for each signal model introduced in this chapter. An overview of 1D PPS estimators is given in Chapter 3, where we also discuss their performances. The contributions of the thesis in the estimation of 1D PPS parameters are given in Chapter 4, while in Chapter 5, we use genetic algorithms to optimize the search in 1D PPS estimation procedures. Estimation of 2D PPS parameters is considered in Chapter 6, while parameter refinement is elaborated in Chapter 7. Chapter 8 deals with the application of PPS estimators in radars and multisensor arrays.

Sadržaj

Izvod iz rada	i
Abstract	iii
Lista slika	vii
Lista tabela	xi
Lista skraćenica i njihovo značenje	xiv
Uvod	1
2 Model signala	4
2.1 Monokomponentni PPS	4
2.1.1 Cramér-Rao granice monokomponentnog PPS-a	5
2.2 Multikomponentni PPS	7
2.2.1 Cramér-Rao granice multikomponentnog PPS-a	8
2.3 2D PPS	10
2.3.1 Cramér-Rao granice 2D PPS-a	11
2.4 Mjere za ocjenu performansi PPS estimatora	13
2.4.1 Računska složenost estimacione procedure	13
2.4.2 Srednja kvadratna greška	13
2.4.3 Prag odnosa signal-šum	14
3 Pregled tehnika za estimaciju parametara 1D PPS-a	16
3.1 Estimator maksimalne vjerodostojnosti	16
3.2 Ambiguity funkcija višega reda	17
3.2.1 Računska složenost HAF estimatora	19

3.2.2	MSE HAF estimatora	20
3.2.3	Nedostaci HAF-a	27
3.3	Produktni HAF	28
3.4	Integrirana generalizovana ambiguity funkcija	31
3.4.1	Računska složenost IGAF-a	32
3.4.2	MSE IGAF-a	33
3.4.3	Prag SNR-a	34
3.5	Kubična fazna funkcija	34
3.5.1	Računska složenost CPF-a	35
3.5.2	MSE CPF-a	36
3.5.3	Prag SNR-a	36
3.6	HO-WD i HO-CPF	37
3.7	Numerički primjeri	38
4	Nove tehnike za estimaciju 1D PPS-a	42
4.1	Hibridni CPF-HAF estimator	42
4.1.1	Računska složenost HCPF-HAF-a	45
4.1.2	MSE HCPF-HAF estimatora	45
4.2	Produktna verzija HCPF-HAF-a	54
4.3	Estimator baziran na kombinaciji HO-CPF-a i HO-WD-a	55
4.3.1	Složenost HOCPPF-WD-a	57
4.3.2	MSE HOCPPF-WD-a	57
4.4	Neuniformno odabiranje CPF-a	58
4.4.1	Interpolacija signala $x(n)$	59
4.5	Numerički primjeri	60
5	Genetički algoritmi u estimaciji PPS-a	67
5.1	Uvod u GA	67
5.2	Postavka GA	70
5.2.1	Problem divergencije	72
5.3	Računska složenost GA	73
5.4	Numerički primjer	73

6	Tehnike za estimaciju parametara 2D PPS-a	78
6.1	Francos-Friedlander-ov metod	78
6.2	2D CPF	81
6.3	2D HCPF-HAF	83
6.4	Numerički primjer	85
7	Tehnike za poboljšanje tačnosti PPS parametara	88
7.1	AM algoritam	88
7.2	Dihotomna pretraga	91
7.3	Dihotomna pretraga u 2D prostorima	92
7.4	O'Shea metod	94
7.5	Generalizacija O'Shea metode za estimaciju multikomponentnih PPS-a . .	96
7.6	Implementacija O'Shea metoda na 2D signale	97
7.7	Numerički primjeri	99
8	Primjena estimatora PPS-a	107
8.1	Estimacija parametara PPS-a primljenog antenskom rešetkom	107
8.1.1	Model signala	108
8.1.2	Polinomijalni fazni beamformer	109
8.1.3	1D estimacija signala primljenih antenskom rešetkom	109
8.1.4	Numerički primjeri	114
8.2	Estimacija parametara SAR signala	118
8.2.1	Princip rada SAR sistema	118
8.2.2	Oblik signala na prijemu	119
8.2.3	Modifikacija kubične fazne funkcije	121
8.2.4	Primjeri	123
	Zaključak	130
	Literatura	133

Lista slika

3.1	Normalizovani HAF multikomponentnog PPS-a trećeg reda, $K = 2$: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma.	28
3.2	Normalizovani PHAF multikomponentnog PPS-a trećeg reda, $K = 2$: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma.	29
3.3	Normalizovani IGAF PPS-a trećeg reda: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma (SNR=0 dB).	33
3.4	Normalizovani CPF PPS-a trećeg reda: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma (SNR=0 dB).	36
3.5	MSE-i dva najviša parametara faze PPS-a trećega reda estimiranih pomoću IGAF-a, CPF-a, HAF-a, PHAF-a i odgovarajući CRLB-ovi: (a) MSE-i parametra a_3 ; (b) MSE-i parametra a_2	39
3.6	MSE-i četiri najviša parametra faze PPS-a šestog i petog reda dobijeni pomoću HO-CPF-a, HO-WD-a, HAF-a i PHAF-a: (a), (c), (e) i (g) - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; (b), (d), (f) i (h) - MSE-i parametara signala $x_1(n)$	41
4.1	MSE-i dva najviša parametra signala $x_l(n)$, $l = 1, \dots, 4$ estimiranih pomoću HCPF-HAF-a i HAF-a, kao i odgovarajući teorijski MSE-i: lijeva kolona - parametri a_P ; desna kolona - parametri a_{P-1}	61
4.2	Poređenje HCPF-HAF-a, PCPF-HAF-a i PHAF-a na monokomponentnom PPS-u šestog reda: (a) MSE parametra \hat{a}_6 ; (b) MSE parametra \hat{a}_5	62
4.3	MSE-i parametara \hat{a}_3^1 , \hat{a}_4^1 , \hat{a}_3^2 i \hat{a}_4^2 estimiranih pomoću PCPF-HAF-a: lijeva kolona - MSE-i prve komponente; desna kolona - MSE-i druge komponente.	63
4.4	MSE-i parametara PPS-a petog i šestog reda estimiranih pomoću HO-CPF-a, HO-WD-a i HOCPE-WD-a: lijeva kolona - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; desna kolona - MSE-i parametara signala $x_1(n)$	64

4.5	MSE-i parametara \hat{a}_3 i \hat{a}_2 PPS-a trećega reda estimiranih CPF-om i NO-CPF-om: (a) MSE \hat{a}_3 ; (b) MSE \hat{a}_2	65
5.1	Ukrštanje sa jednom tačkom.	70
5.2	Primjer mutacije.	70
5.3	MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću ML, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 3$, (a) MSE \hat{a}_3 , (b) MSE \hat{a}_2 i (c) MSE \hat{a}_1 ; druga vrsta - $P = 4$, (d) MSE \hat{a}_4 , (e) MSE \hat{a}_3 i (f) MSE \hat{a}_2 ; treća vrsta - $P = 5$, (g) MSE \hat{a}_5 , (h) MSE \hat{a}_4 i (i) MSE \hat{a}_3	74
5.4	MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću HO-WD, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 5$, (a) MSE \hat{a}_5 , (b) MSE \hat{a}_3 i (c) MSE \hat{a}_1 ; druga vrsta - $P = 7$, (d) MSE \hat{a}_7 , (e) MSE \hat{a}_5 i (f) MSE \hat{a}_3 ; treća vrsta - $P = 9$, (g) MSE \hat{a}_9 , (h) MSE \hat{a}_7 i (i) MSE \hat{a}_5	75
5.5	MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću HO-CPF, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 6$, (a) MSE \hat{a}_6 , (b) MSE \hat{a}_4 i (c) MSE \hat{a}_2 ; druga vrsta - $P = 8$, (d) MSE \hat{a}_8 , (e) MSE \hat{a}_6 i (f) MSE \hat{a}_4 ; treća vrsta - $P = 10$, (g) MSE \hat{a}_{10} , (h) MSE \hat{a}_8 i (i) MSE \hat{a}_6	77
6.1	MSE-i parametara 2D PPS-a estimiranih pomoću FFM-a i 2D HCPF-HAF-a: (a) MSE $\hat{a}_{4,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{3,1}$; (c) MSE $\hat{a}_{1,3}$ i (d) MSE $\hat{a}_{2,2}$	86
7.1	MSE-i parametara PPS-a četvrtog reda dobijeni pomoću HAF-a sa implementiranom dihotomnom pretragom, AM algoritmom i klasičnom interpolacijom: (a) MSE \hat{a}_4 ; (b) MSE \hat{a}_3 ; (c) MSE \hat{a}_2 i (d) MSE \hat{a}_1	100
7.2	MSE-i dva najviša parametra faze signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ estimiranih pomoću HCPF-HAF-a sa dihotomnom pretragom i klasičnom interpolacijom Ω ose: (a) i (c) - MSE-i \hat{a}_4 i \hat{a}_3 signala $x_1(n)$; (b) i (d) - MSE-i \hat{a}_5 i \hat{a}_4 signala $x_2(n)$	101
7.3	MSE-i parametara \hat{a}_5 , \hat{a}_4 , \hat{a}_3 i \hat{a}_2 dobijenih pomoću HAF-a i HCPF-HAF-a, kao i MSE-i parametara poboljšanih O'Shea algoritmom: (a) MSE \hat{a}_5 ; (b) MSE \hat{a}_4 ; (c) MSE \hat{a}_3 i (d) MSE \hat{a}_2	102
7.4	MSE-i parametara trokomponentnog PPS-a estimiranih pomoću PHAF-a i PHAF-F-a: (a), (d) i (g) - MSE-i parametara signala $x_1(n)$; (b), (e) i (h) - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; (c), (f) i (i) - MSE-i parametara signala $x_3(n)$;	104

7.5	MSE-i parametara 2D PPS-a trećega reda estimiranih pomoću FFM-DH-a i FFM-IN-a: (a) MSE $\hat{a}_{3,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{0,3}$; (c) MSE $\hat{a}_{2,1}$; (d) MSE $\hat{a}_{1,2}$; (e) MSE $\hat{a}_{2,0}$; (f) MSE $\hat{a}_{0,2}$	105
7.6	MSE-i parametara 2D PPS-a trećega reda estimiranih pomoću FFM-a i FFM-FN-a: (a) MSE $\hat{a}_{3,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{0,3}$; (c) MSE $\hat{a}_{2,1}$; (d) MSE $\hat{a}_{1,2}$; (e) MSE $\hat{a}_{2,0}$; (f) MSE $\hat{a}_{0,2}$	106
8.1	RMSE-i $\hat{\theta}$ i \hat{a}_2 ($P = 2$) za tri scenarija: (a) i (d) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b) i (e) promjenjivo M , $N = 256$, SNR= 10 dB; (c) i (f) promjenjivo N , SNR= 10 dB, $M = 100$	114
8.2	RMSE $\hat{\theta}$, \hat{a}_2 i \hat{a}_3 ($P = 3$) za tri scenarija: (a), (d) i (g) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b), (e) i (h) promjenjivo M , $N = 256$, SNR= 10 dB; (c), (f) i (i) promjenjivo N , SNR= 10 dB, $M = 100$	115
8.3	RMSE $\hat{\theta}$, \hat{a}_2 i \hat{a}_1 estimiranih pomoću PPSE-a i R-PPSE-a ($P = 2$) za tri scenarija: (a), (d) i (g) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b), (e) i (h) promjenjivo M , $N = 256$, SNR= -2 dB; (c), (f) i (i) promjenjivo N , SNR= 2 dB, $M = 100$	117
8.4	Princip funkcionisanja SAR sistema.	118
8.5	Analitički signal sa tri linearne FM komponente: (a) STFT; (b) Detektovani regioni dobijeni pomoću Otsu algoritma; (c) Oblik standardnog CPF-a; (d) Modifikovani CPF prve komponente; (e) Modifikovani CPF druge komponente; (f) Modifikovani CPF treće komponente; (g) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za prvu komponentu; (h) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za drugu i treću komponentu.	125
8.6	Radarski signal sa tri linearne FM komponente: (a) STFT; (b) Detektovani regioni; (c) CPF prve komponente; (d) CPF druge komponente; (e) CPF treće komponente; (f) Estimirana (debela linija) i stvarna vrijednost (tanka linija) chirp-rate-a za prvu komponentu; (g) Estimirana (debela linija) i stvarna vrijednost (tanka linija) chirp-rate-a za drugu komponentu; (h) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za treću komponentu.	126

8.7	Radarski signal koji se sastoji od tri PPS komponente trećega reda: (a) STFT; (b) Detektovani regioni; (c) CPF prve komponente; (d) CPF druge komponente; (e) CPF treće komponente; (f) Estimirane (debela linija) i stvarne (tanka linija) vrijednosti chirp-rate-a za svaku komponentu.	128
8.8	Radarska slika prije (a) i poslije (b) fokusiranja.	129

Lista tabela

2.1	CRLB-i koeficijenata polinoma faze PPS-a za različito P	7
3.1	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću HAF-a.	18
3.2	Približna vrijednost MSE-a parametra \hat{a}_P estimiranog pomoću HAF-a. . .	26
3.3	Prag SNR-a HAF estimacione procedure.	27
3.4	PHAF estimacioni algoritam.	30
3.5	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću IGAF-a.	32
3.6	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a trećeg reda pomoću CPF-a. . .	35
3.7	MSE-i dva najviša parametra PPS-a dobijeni pomoću HO-CPF-a i HO-WD-a.	38
4.1	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću HCPF-HAF-a.	44
4.2	MSE HCPF-HAF-a za različito P	53
4.3	Prag SNR-a HCPF-HAF-a za različito P i N	54
4.4	PHCPF-HAF estimacioni algoritam.	55
4.5	MSE-i dva najviša parametra PPS-a estimiranog pomoću HOCPF-WD-a. .	58
5.1	Postavka GA za optimizaciju pretrage u ML-u, HO-WD-u i HO-CPF-u. . .	71
5.2	Prosječan broj računskih operacija GA za ML-om, HO-WD-om i HO-CPF-om.	76
6.1	FMM estimacioni algoritam.	80
6.2	MSE-i parametara 2D PPS-a estimiranih pomoću 2D-CPF-a i odgovarajući CRLB-i.	83
6.3	2D HCPF-HAF estimacioni algoritam.	84
6.4	Postavka GA za optimizaciju pretrage u 2D HCPF-HAF-u.	87
7.1	Algoritam za poboljšanje tačnosti parametara multikomponentnog PPS-a.	96
8.1	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a, $P = 2$	111

8.2	Algoritam za estimaciju parametara PPS-a, $P = 3$	113
8.3	Oblik faze reflektora za različite tipove kretanja.	120
8.4	Otsu algoritam.	123
8.5	Parametri meta.	129

Lista skraćenica i njihovo značenje

2D PPS	-	dvodimenzionalni polinomijalno-fazni signal;
AM	-	Aboutanios-Mulgrew;
ARE	-	asimptotska relativna efikasnost. Veličina koja se koristi pri određivanju praga SNR-a;
CPF	-	kubična fazna funkcija. Estimator monokomponentnog PPS-a.
CRLB	-	Cramér-Rao donja granica varijanse estimacije;
DOA	-	dolazni ugao;
FFM	-	Francos-Friedlander-ov metod. Estimator 2D PPS-a;
FFM-DH	-	FFM sa implementiranom dihotomnom pretragom;
FFM-IN	-	FFM sa implementiranom interpolacijom frekvencijske ose;
FIM	-	Fisher-ova informaciona matrica. Veličina koja se koristi pri određivanju CRLB-a;
FM	-	frekvencijski-modulisan;
FT	-	Fourier-ova transformacija;
GA	-	genetički algoritam. Stohastička metoda za optimizaciju pretrage;
HAF	-	ambiguity funkcija višega reda. Estimator PPS-a;
HAF-AM	-	HAF sa implementiranim AM algoritmom;
HAF-DH	-	HAF sa implementiranom dihotomnom pretragom;
HAF-F	-	HAF sa implementiranim O'Shea algoritmom;
HAF-GR	-	HAF bez implementiranog algoritma za poboljšanje tačnosti parametara;
HAF-IN	-	HAF sa implementiranom interpolacijom frekvencijske ose;
HCPF-HAF	-	hibridni CPF-HAF metod. Estimator PPS-a;
HCPF-HAF-F	-	HCPF-HAF sa implementiranim O'Shea algoritmom;
HO-CPF	-	CPF višega reda. Estimator PPS-a;

HOCPF-WD	-	estimator PPS-a baziran na kombinaciji HO-CPF-a i HO-WD-a;
HO-WD	-	Wigner-ova distribucija višega reda. Estimator PPS-a;
IGAF	-	integrirana generalizovana ambiguity funkcija. Estimator PPS-a;
ISAR	-	inverse synthetic aperture radar;
ML	-	estimator maksimalne vjerodostojnosti;
MSE	-	srednja kvadratna greška. Veličina kojom se izražava srednje kvadratno odstupanje estimirane od tačne vrijednosti;
NO-CPF	-	nelinearno odabrani CPF. CPF estimator izražen preko FT-a;
OF	-	ocjenjivačka funkcija. Mehanizam za ocjenu kvaliteta rješenja kod GA;
PFB	-	polinomijalno-fazni beamformer. Estimator PPS-a koji stiže na antensku rešetku;
PD	-	fazno diferenciranje;
PPS	-	polinomijalno-fazni signal;
PPSE	-	PPS estimator. Estimator PPS-a koji stiže na antensku rešetku;
PHAF	-	produktni HAF. Estimator PPS-a;
PHAF-F	-	HAF sa implementiranim O'Shea algoritmom;
PHCPF-HAF	-	produktni HCPF-HAF. Estimator PPS-a;
R-PPSE	-	robusni PPSE;
SAR	-	synthetic aperture radar;
SNR	-	odnos signal-šum;
STFT	-	kratkotrajna FT.

Uvod

U digitalnoj obradi signala, značajna pažnja se posvećuje izučavanju frekvencijski-modulisanih (FM) signala. FM signali su našli primjenu u velikom broju aplikacija u komunikacijama, radarima, sonarima, biomedicini i sl. [1]-[4]. Kod ovih signala, informacija od interesa je sadržana u amplitudi i/ili frekvenciji, pa se kao imperativ nameće estimacija (procjena) ovih veličina. Kako signal, prilikom prostiranja, prolazi kroz različite sredine i interferira sa drugim signalima, estimacija nije lak zadatak. Stoga, postoji veliki broj matematičkih modela čiji je cilj da što vjerodostojnije predstave signal. Svaki od modela iziskuje različite matematičke alate.

Generalno, modeli FM signala mogu se podijeliti na parametarske i neparametarske, pa otuda postoje i dvije vrste estimatora, parametarski i neparametarski. Parametarski modeli predstavljaju amplitudu i fazu signala preko funkcija poznate zakonitosti, pa je cilj estimacije procijena parametara zakonitosti. Poznavanje matematičkog zakona promjene faze i amplitude omogućava određivanje njihovih vrijednosti u bilo kom trenutku. Neparametarski modeli ove veličine posmatraju kao slučajne promjenljive zavisne od vremena, pa estimacija signala podrazumijeva određivanje vrijednosti u svakom vremenskom trenutku. Otuda su neparametarske estimacione tehnike obično značajno računski kompleksnije nego parametarske.

Istraživanje u doktorskoj tezi usmjereno je ka polinomijalno-faznim signalima (PPS - engl. *polynomial-phase signal*) i razvoju tehnika za estimaciju njihovih parametara. Naime, riječ je o parametarskom modelu FM signala kod koga je amplituda konstantna veličina, a faza predstavljena preko polinoma. Model je inspirisan Weierstrass-ovom teoremom [5], koja kaže da se bilo koja funkcija na ograničenom intervalu, pod određenim uslovima, može predstaviti polinomom odgovarajućeg reda. PPS-i imaju veliku primjenu u realnim aplikacijama. Tako, na primjer, da bi lokalizovali prepreke, slijepi miševi emituju signal koji se može modelovati PPS-om trećeg reda. Lokacija, brzina i ubrzanje mete,

obasjane radarskim snopom, može se saznati iz parametara primljenog radarskog signala. Vojna industrija je bila glavni inicijator razvoja tehnika za estimaciju parametara ovih signala.

Kao mjere za ocijenu kvaliteta estimatora koriste se tri veličine: računska složenost, srednja kvadratna greška (MSE - engl. *mean squared error*) i prag odnosa signal-šum (SNR - engl. *signal-to-noise ratio*). Računska složenost predstavlja broj operacija koje treba sprovesti prilikom estimacije, i kako bi se tehnika mogla koristiti u realnom vremenu, cilj je da bude što manja. MSE-om se izražava srednje kvadratno odstupanje estimirane od tačne vrijednosti. Za jedan estimator, ova veličina predstavlja takozvani parametar rizika. Prag SNR-a je vrijednost SNR-a ispod koje se performanse estimatora drastično pogoršavaju i estimacija smatra nepouzdanom. Ove tri veličine će biti uzete u obzir kod određivanja performansi tehnika uvedenih u radu.

Dizajn estimatora PPS-a predstavlja kompromis između računске složenosti i tačnosti. Estimatori maksimalne vjerodostojnosti (ML - engl. *maximum likelihood*) su tehnike sa najvećom tačnošću estimiranih koeficijenata, ali su istovremeno i najkompleksnije. Kako zahtijevaju pretragu po dimenzionom prostoru koji je jednak redu polinoma u fazi, njihova praktična primjena je moguća do PPS-a trećeg reda¹. Da bi se estimacija obavila sa manjim brojem računskih operacija, uvedene su tehnike bazirane na faznom diferenciranju (PD - engl. *phase differentiation*), kao što su ambiguity funkcija višega reda (HAF - engl. *high-order ambiguity function*), produktna HAF (PHAF - engl. *product high-order ambiguity function*), integrisana generalizovana ambiguity funkcija (IGAF - engl. *integrated generalized ambiguity function*), kubična fazna funkcija (CPF - engl. *cubic phase function*), itd. [6]-[13]. Ove tehnike, koristeći auto-korelacionu funkciju, smanjuju red polinoma faze signala i estimaciju parametara obavljaju pomoću jednodimenzione ili dvodimenzione pretrage. Time se značajno smanjuje računska složenost, ali istovremeno i tačnost. Naime, može se pokazati da svaka dodatna auto-korelacija povećava broj članova zahvaćenih šumom u resultantnom signalu, čime se povećava MSE i prag SNR-a. Dalje, u slučaju multikomponentnih signala, auto-korelacija generiše kros-članove čiji se broj povećava sa povećavanjem broja diferenciranja faze. Stoga, smanjenjem broja auto-korelacija povećava se i tačnost. Uzimajući ovo u obzir, nastala su dva estimatora, kubična fazna funkcija višega reda (HO-CPF - engl. *high-order cubic phase function*) i Wigner-ova distribucija višega reda (HO-WD - engl. *high-order Wigner distribution*) [14],

¹Red PPS-a je red polinoma faze.

[15]. Ove funkcije, korišćenjem jedne auto-korelacije, u stanju su da estimiraju parametre PPS-a sa pretragom čija je dimenzija jednaka jednoj polovini reda polinoma faze, čime je njihova praktična primjena moguća do PPS-a sedmog reda.

Cilj ove doktorske teze je unapređenje postojećih estimatora PPS-a. Unapređenje se može ostvariti na više načina: smanjivanjem nelinearnosti estimatorskih funkcija, optimizacijom pretrage u višedimenzionim prostorima stohastičkim algoritmima za pretragu, neuniformnim odabiranjem signala, kao i implementacijom algoritama za poboljšanje tačnosti estimiranih parametara. Smanjivanjem reda nelinearnosti estimatorskih funkcija baziranih na PD operatoru, smanjuje se broj šumnih članova i kros-članova uzrokovanih auto-korelacionom funkcijom, čime se povećava tačnost estimacije. Kako estimatore visoke tačnosti odlikuje potreba za pretragom po multidimenzionalnom prostoru, koja je računski veoma zahtjevna, predložen je metod za optimizaciju pretrage korišćenjem genetičkih algoritama (GA), koji značajno pomjeraju limite postojećih estimatora. Takođe ćemo pokazati kako se sa nelinearnim odabiranjem CPF može izraziti preko Fourier-ove transformacije (FT), koja je u pogledu praktične realizacije mnogo prihvatljivija od CPF-a. I na kraju, razmatraćemo načine za poboljšanje tačnosti estimiranih parametara sa algoritmima koji zahtijevaju malu računsku složenost. Pokazaćemo da smo u stanju da sa malim brojem računskih operacija dostignemo teorijske limite u estimaciji PPS-a višega reda.

Teza je organizovana na sledeći način. U Poglavlju 2 date su definicije PPS-a koje ćemo koristiti, formulisani su ciljevi i izvedene su teorijske granice estimacije. U ovom poglavlju biće riječi i o načinima za ocjenu performansi estimatora PPS-a. Pregled najznačajnijih estimatora 1D PPS-a dat je u Poglavlju 3, gdje su predočene njihove mane i nedostaci. Opis estimatora, zajedno sa statističkom analizom njihovih performansi, koji predstavljaju doprinos doktorske disertacije u estimaciji 1D PPS-a, nalazi se u Poglavlju 4. Poglavlje 5 bavi se optimizacijom pretrage kod tehnika koje zahtijevaju pretragu po multidimenzionalnom prostoru, dok će u Poglavlju 6 biti riječi o estimatorima 2D PPS-a. Poboljšanjem tačnosti parametara PPS-a bavićemo se u Poglavlju 7, gdje ćemo predstaviti neke naše doprinose u ovoj oblasti. Na kraju, u Poglavlju 8, pokazaćemo kako se PPS-i mogu primjeniti u estimaciji signala koji stižu na antensku rešetku i u radarskim sistemima.

Poglavlje 2

Model signala

U ovom poglavlju dajemo definiciju signala koji će biti predmet izučavanja i formulišemo naše ciljeve. Upoznaćemo se sa osnovnim tehnikama za ocjenu performansi estimatora. Za svaki uveden model izvešćemo teorijske limite preciznosti estimacije.

2.1 Monokomponentni PPS

Veliki broj signala u prirodi može se predstaviti FM modelom. Tako npr. određene vrste insekata, ptica ili morskih sisara generišu zvukove koji se mogu modelovati na ovaj način. FM signali su određeni sa dva parametra, amplitudom i fazom, pa procijenom ove dvije veličine u stanju smo izvući informaciju sadržanu u njima. U praksi, čest je slučaj da je brzina promjene amplitude dosta manja u odnosu na brzinu promjene faze, pa je uobičajeno smatrati da je amplituda konstantna tokom razmatranog intervala. Imajući na umu da se bilo koja kontinualna i neprekidna funkcija na ograničenom intervalu može aproksimirati sa polinomom odgovarajućeg reda [5], dolazimo do FM modela signala kod koga je amplituda konstantna veličina, a faza predstavljena preko polinoma. U literaturi, ovi signali su poznati pod nazivom PPS-i. Da bi PPS u potpunosti bio određen, neophodno je poznavati njegovu amplitudu i koeficijente polinoma faze. Sa pojavom radara i sonara, naučna javnost je intenzivnije počela da proučava ovu klasu signala, tako da danas imamo veliki broj alata za analizu i obradu PPS-a.

Monokomponentni PPS P -tog reda opisuje se sledećom relacijom [6]:

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + \nu(n) = A \exp(j\phi(n)) + \nu(n) \\ &= A \exp\left(j \sum_{i=0}^P a_i(n\Delta)^i\right) + \nu(n), \quad n \in [-N/2, N/2], \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdje je A amplituda, $\phi(n)$ faza sa koeficijentima a_i , $i = 0, 1, \dots, P$ i $\nu(n)$ kompleksni bijeli Gausov šum sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom, srednje vrijednosti 0 i varijanse σ^2 [16]. Ukupan broj odbiraka signala je $(N+1)$ i signal je odabran sa korakom Δ . Ovdje pretpostavljamo da je $N \gg 1$. Naš cilj je da, na osnovu observacija $x(n)$, estimiramo parametre $\{A, a_0, a_1, \dots, a_P\}$. Estimirane vrijednosti ćemo obilježavati sa simbolom " $\hat{\cdot}$ ". Na primjer, estimirana vrijednost parametra a_i će biti obilježena sa \hat{a}_i .

2.1.1 Cramér-Rao granice monokomponentnog PPS-a

Kada se govori o estimaciji neke veličine, uvijek je potrebno definisati minimalnu vrijednost varijanse koja se može ostvariti estimacionom procedurom. Ta vrijednost u literaturi je poznata pod nazivom Cramér-Rao granica (CRLB - engl. *Cramér-Rao lower bound*) [16]. Kod bezbiasnih estimatora, CRLB predstavlja veoma važnu karakteristiku estimatora, jer se na osnovu njega određuju limiti u MSE-u, kojima svaki estimator teži. Stoga, posmatranjem odnosa CRLB-a i MSE-a, u stanju smo izvesti zaključke o efikasnosti (u pogledu tačnosti) estimacione procedure. Zbog velikog značaja pri ocjeni performansi estimacije, CRLB-i parametara signala (2.1) biće određeni u nastavku.

Da bi izveli CRLB nepoznatih parametara $\theta = [A, a_0, a_1, \dots, a_P]$, neophodno je odrediti funkciju gustine raspodjele slučajne promjenljive $x(n)$. Označimo ovu veličinu sa $\rho_x(\theta)$. Kako je signal $s(n)$ zahvaćen bijelim Gauss-ovim šumom nulte srednje vrijednosti, $\rho_x(\theta)$ zadovoljava sledeću relaciju:

$$\begin{aligned} \ln \rho_x(\theta) &= -N \ln(\pi\sigma^2) \\ &- \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} [(\operatorname{Re}\{x(n)\} - \operatorname{Re}\{s(n)\})^2 + (\operatorname{Im}\{x(n)\} - \operatorname{Im}\{s(n)\})^2]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

CRLB i -tog elementa vektora θ , θ_i , predstavlja element inverzne Fisher-ove informacione matrice (FIM) na poziciji (i, i) [16]-[18]:

$$\text{CRLB}\{\theta_i\} = [\mathbf{J}^{-1}]_{i,i}, \quad (2.3)$$

gdje je (k, l) -ti element matrice \mathbf{J} dat izrazom:

$$\mathbf{J}_{k,l} = -\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \log \rho_x(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\}, \quad (2.4)$$

gdje je $\mathbb{E}\{\cdot\}$ operator matematičkog očekivanja. Zamjenom (2.2) u (2.4), dobijamo

$$\mathbf{J}_{k,l} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \left[\frac{\partial \operatorname{Re}\{s(n)\}}{\partial \theta_k} \frac{\partial \operatorname{Re}\{s(n)\}}{\partial \theta_l} + \frac{\partial \operatorname{Im}\{s(n)\}}{\partial \theta_k} \frac{\partial \operatorname{Im}\{s(n)\}}{\partial \theta_l} \right]. \quad (2.5)$$

Znajući da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}\{s(n)\}}{\partial A} &= \cos(\phi(n)), \\ \frac{\partial \operatorname{Im}\{s(n)\}}{\partial A} &= \sin(\phi(n)), \\ \frac{\partial \operatorname{Re}\{s(n)\}}{\partial a_m} &= -\Delta^m n^m A \sin(\phi(n)), \\ \frac{\partial \operatorname{Im}\{s(n)\}}{\partial a_m} &= \Delta^m n^m A \cos(\phi(n)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

elementi matrice \mathbf{J} se mogu zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{A,A} &= \frac{2N}{\sigma^2} \\ \mathbf{J}_{A,a_m} &= 0, m = 0, \dots, P, \\ \mathbf{J}_{a_{m_1}, a_{m_2}} &= \frac{2A^2 \Delta^{m_1+m_2}}{\sigma^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} n^{m_1+m_2}, \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq P. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dalje, inverzna FIM se može zapisati kao

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} N^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{-2} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \operatorname{diag}\{1, \Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^P\}, \\ \mathbf{H}_{l,k} &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} n^{l+k}, \quad 0 \leq l, k \leq P. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sređivanjem relacije (2.8) dobijamo konačne izraze za CRLB:

$$\begin{aligned} \operatorname{CRLB}\{A\} &= \frac{\sigma^2}{2N}, \\ \operatorname{CRLB}\{a_i\} &= \frac{\sigma^2}{2A^2} [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1}]_{i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, P. \end{aligned} \quad (2.10)$$

	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
$\text{CRLB}\{a_0\}$	$\frac{\sigma^2}{2A^2N}$	$\frac{9\sigma^2}{8A^2N}$	$\frac{9\sigma^2}{8A^2N}$	$\frac{225\sigma^2}{128A^2N}$
$\text{CRLB}\{a_1\}$	$\frac{6\sigma^2}{A^2N^3\Delta^2}$	$\frac{6\sigma^2}{A^2N^3\Delta^2}$	$\frac{75\sigma^2}{2A^2N^3\Delta^2}$	$\frac{75\sigma^2}{2A^2N^3\Delta^2}$
$\text{CRLB}\{a_2\}$		$\frac{90\sigma^2}{A^2N^5\Delta^4}$	$\frac{90\sigma^2}{A^2N^5\Delta^4}$	$\frac{2205\sigma^2}{2A^2N^5\Delta^4}$
$\text{CRLB}\{a_3\}$			$\frac{1400\sigma^2}{A^2N^7\Delta^6}$	$\frac{1400\sigma^2}{A^2N^7\Delta^6}$
$\text{CRLB}\{a_4\}$				$\frac{22050\sigma^2}{A^2N^9\Delta^8}$

Tabela 2.1: CRLB-i koeficijenata polinoma faze PPS-a za različito P .

Primjetimo da $\text{CRLB}\{A\}$ ne zavisi od reda PPS-a.

U Tabeli 2.1 dati su izrazi za CRLB parametara faze za različito P . Tokom njihovih izvođenja korišćena je aproksimacija:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2} n^k \approx 2 \frac{(N/2)^{k+1}}{k+1}, \quad N \gg 1. \quad (2.11)$$

Posmatranjem izraza prikazanih u Tabeli 2.1 primjećujemo da su CRLB-i parametara signala nezavisni od vrijednosti koeficijenata polinoma faze. CRLB parametra faze zavisi od amplitude signala, varijanse šuma, broja odbiraka i koraka odabiranja. To znači da će parametri dva PPS-a P -toga reda sa istim A , σ^2 , N i Δ imati identične odgovarajuće CRLB-e.

Generalno, CRLB-i dva parametra najvišeg reda mogu se odrediti pomoću relacije [18]:

$$\text{CRLB}\{a_i\} \approx \frac{(2i+1) \binom{2i}{i}^2 \sigma^2}{2A^2 N^{(2i+1)} \Delta^{2i}}, \quad i = P-1, P. \quad (2.12)$$

2.2 Multikomponentni PPS

U radarima i sonarima, signal primljen antenskom rešetkom se vrlo često može modelovati sumom više monokomponentnih PPS-a [8], [19]:

$$x^{mk}(n) = \sum_{i=1}^K s_i(n) + \nu(n) = \sum_{k=1}^K A_k \exp \left(j \sum_{i=0}^{P_k} a_i^k (n\Delta)^i \right) + \nu(n),$$

$$n \in [-N/2, N/2]. \quad (2.13)$$

Ovi signali su poznati pod nazivom multikomponentni PPS-i. U relaciji (2.13), K predstavlja broj komponenti, dok su A_k , P_k i a_i^k , $i = 1, 2, \dots, P_k$, amplituda, red i

parametri polinoma faze k -te komponente, respektivno. Ostale oznake imaju isto značenje kao i kod monokomponentnog PPS-a. I ovdje je cilj, obradom signala $x^{mk}(n)$, estimirati parametre $\{A^k, a_0^k, \dots, a_{P_k}^k\}$ svake komponente.

Kako tehnike, koje će biti razmatrane u tezi, podrazumijevaju da su redovi polinoma faze svake komponente međusobno jednaki, nadalje ćemo uvesti pretpostavku $P_1 = P_2 = \dots = P_K = P$. Ovom pretpostavkom ne gubimo na opštosti modela, jer, ukoliko je $P = \max\{P_1^s, P_2^s, \dots, P_K^s\}$, gdje je P_k^s stvarni red k -te komponente, estimaciona procedura će, za one koeficijente koji ne postoje u fazi signala, vratiti vrijednosti koje su približne nuli.

2.2.1 Cramér-Rao granice multikomponentnog PPS-a

Pod pretpostavkom $P_1 = P_2 = \dots = P_K = P$, relacija (2.13) se može zapisati u matičnoj formi [20]

$$\mathbf{x} = [\mathbf{s}_1(\mathbf{n}, \mathbf{a}_1), \dots, \mathbf{s}_K(\mathbf{n}, \mathbf{a}_K)]\mathbf{A} + \nu = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A} + \nu, \quad (2.14)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= [a_0^k, a_1^k, \dots, a_P^k]^T, \\ \mathbf{n} &= [-N/2, \dots, N/2]^T, \\ \mathbf{A} &= [A_1, \dots, A_K]^T, \\ \mathbf{x} &= [x^{mk}(-N/2), \dots, x^{mk}(N/2)]^T, \\ \nu &= [\nu(-N/2), \dots, \nu(N/2)]^T, \\ s_k(n, \mathbf{a}_k) &= \exp\left(j \sum_{i=0}^P a_i^k (n\Delta)^i\right), \\ \mathbf{s}_k(\mathbf{n}, \mathbf{a}_k) &= \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k) = [s_k(-N/2, \mathbf{a}_k), \dots, s_k(N/2, \mathbf{a}_k)]^T, \\ \mathbf{a} &= (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K), \\ \mathbf{S}(\mathbf{a}) &= [\mathbf{s}_1(\mathbf{a}_1), \dots, \mathbf{s}_K(\mathbf{a}_K)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sa $\theta = [\mathbf{A}, \mathbf{a}]$ označimo vektor nepoznatih parametara. Usljed prisustva aditivnog bijelog Gauss-ovog šuma, funkcija gustine raspodjele \mathbf{x} , $\rho_{\mathbf{x}}(\theta)$, imaće sledeći oblik

$$\rho_{\mathbf{x}}(\theta) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A})^H (\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A})}{\sigma^2}\right\}. \quad (2.16)$$

Znajući da je

$$\ln \rho_{\mathbf{x}}(\theta) = -N \ln \pi - N \ln \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A})^H (\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A}), \quad (2.17)$$

FIM, definisan relacijom (2.4), može se zapisati kao

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{AA}} & \mathbf{J}_{\mathbf{Aa}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{aA}} & \mathbf{J}_{\mathbf{aa}} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Uvodeći oznaku $\mu = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{A} = \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k)A_k$ imamo da je

$$\frac{\partial \mu}{\partial A_k} = \frac{\partial}{\partial A_k} \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k)A_k = \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k), \quad (2.19)$$

odakle slijedi

$$\mathbf{J}_{\mathbf{AA}} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re}\{\mathbf{S}(\mathbf{a})^H \mathbf{S}(\mathbf{a})\}. \quad (2.20)$$

Da bi odredili $\mathbf{J}_{\mathbf{Aa}}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{aA}}$ i $\mathbf{J}_{\mathbf{aa}}$, neophodno je izračunati izvod μ po parametrima a_i^k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial a_i^k} &= \frac{\partial}{\partial a_i^k} \mathbf{s}_k(\mathbf{n}, \mathbf{a}_k) A_k \\ &= \frac{\partial}{\partial a_i^k} \begin{bmatrix} A_k \exp \left\{ j \sum_{i'=0}^P a_{i'}^k (-\Delta N/2)^{i'} \right\} \\ \dots\dots\dots \\ A_k \exp \left\{ j \sum_{i'=0}^P a_{i'}^k (\Delta N/2)^{i'} \right\} \end{bmatrix} \\ &= j A_k \mathbf{T}^i \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k), \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdje je $\mathbf{T} = \text{diag}\{-N/2, \dots, N/2\}$. Dalje, iz (2.19) i (2.21), slijedi da je element $\mathbf{J}_{\mathbf{aa}}$ u presjeku pozicija parametara a_i^k i $a_{i'}^{k'}$ jednak

$$\mathbf{J}_{\mathbf{aa}}(a_i^k, a_{i'}^{k'}) = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ A_k A_{k'} \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k)^H \mathbf{T}^{i+i'} \mathbf{s}_{k'}(\mathbf{a}_{k'}) \right\}, \quad (2.22)$$

dok su parametri podmatrica $\mathbf{J}_{\mathbf{Aa}}$ i $\mathbf{J}_{\mathbf{aA}}$ dati izrazom:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{aA}}(a_i^k, A_{k'}) = \mathbf{J}_{\mathbf{Aa}}(A_{k'}, a_i^k) = \frac{2}{\sigma^2} \text{Im} \left\{ A_k \mathbf{s}_k(\mathbf{a}_k) \mathbf{T}^i \mathbf{s}_{k'}(\mathbf{a}_{k'}) \right\}. \quad (2.23)$$

Na kraju, elementi inverznog FIM-a na glavnoj dijagonali predstavljaju CRLB-ove parametara vektora θ :

$$\text{CRLB}\{\theta_i\} = \{\mathbf{J}^{-1}\}_{i,i}. \quad (2.24)$$

Za razliku od monokomponentnih PPS-a, CRLB-i parametara multikomponentnih PPS-a zavise od koeficijenata polinoma faze. To znači da se, u zavisnosti od vrijednosti

koeficijenta, teorijske granice dostižnog MSE-a mogu drastično mijenjati. Takođe, može se izvesti i zaključak da će prag SNR-a kod nelinearnih estimatora zavisiti od izbora koeficijenta, što u estimaciji nije poželjno.

Zbog velikog teorijskog i praktičnog značaja, u [20] razmatrane su osobine dvokomponentnog PPS-a. Naime, autori su ukazali na dvije činjenice:

1. $\text{CRLB}\{A_1\} = \text{CRLB}\{A_2\}$ i da ovaj odnos ne zavisi od snaga komponenti;
2. ukoliko je $A_1 = A_2$, $\text{CRLB}\{a_i^1\} = \text{CRLB}\{a_i^2\}$, $i = 0, \dots, P$.

2.3 2D PPS

Vrlo često, u praktičnim aplikacijama gdje se vrši analiza digitalnih slika, susrećemo se sa 2D FM signalima [21] sa fazom predstavljenom preko 2D polinoma. Ovi signali poznati su pod nazivom 2D PPS-i i mogu se opisati sledećom relacijom:

$$x(n, m) = s(n, m) + \nu(n, m), \quad n \in [-N/2, N/2], \quad m \in [-M/2, M/2],$$

$$s(n, m) = A \exp(j\phi(n, m)) = A \exp\left(j \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^Q a_{i,k} (n\Delta)^i (m\Delta)^k\right), \quad (2.25)$$

gdje je $\nu(n, m)$ 2D Gauss-ov šum nulte srednje vrijednosti i varijanse σ^2 , A amplituda, $a_{i,k}$ parametri faze $\phi(n, m)$, i P i Q redovi polinoma faze po n i m osama, respektivno. Parametar Δ je korak odabiranja, dok je signal dimenzija $(N+1) \times (M+1)$. Kao i u prethodnim slučajevima, cilj je estimacija parametara A i $a_{i,k}$.

Specijalan slučaj signala (2.25) predstavlja 2D PPS sa fazom trougaonog oblika [21]

$$x(n, m) = A \exp\left(j \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{P-i} a_{i,k} (n\Delta)^i (m\Delta)^k\right) + \nu(n, m). \quad (2.26)$$

Kako je red faze ovoga signala određen samo sa parametrom P , za signal (2.26) kažemo da je 2D PPS P -toga reda. Često, parametri $a_{i,k}$, $0 \leq i+k \leq P$ se grupišu u tzv. *slojeve*. Koeficijent $a_{i,k}$ pripada l -tom sloju ako njegovi indeksi zadovoljavaju $i+k=l$.

2.3.1 Cramér-Rao granice 2D PPS-a

Da bismo izveli CRLB-e parametara 2D PPS-a, uvedimo sledeće vektore

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x(-N/2, -M/2), \dots, x(-N/2, M/2), x(-N/2 + 1, -M/2), \dots, \\ &\quad \dots, x(-N/2 + 1, M/2), \dots, x(N/2, -M/2), \dots, x(N/2, M/2)]^T, \\ \nu &= [\nu(-N/2, -M/2), \dots, \nu(-N/2, M/2), \nu(-N/2 + 1, -M/2), \dots, \\ &\quad \dots, \nu(-N/2 + 1, M/2), \dots, \nu(N/2, -M/2), \dots, \nu(N/2, M/2)]^T, \\ \mathbf{a} &= [a_{0,0}, \dots, a_{0,Q}, a_{1,0}, \dots, a_{1,Q}, \dots, \dots, a_{P,0}, \dots, a_{P,Q}]^T.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Sa \mathbf{t} označimo $(N + 1)(M + 1) \times 2$ matricu čiji svaki red sadrži različitu kombinaciju indeksa n i m , $n = -N/2, \dots, N/2$, $m = -M/2, \dots, M/2$. Uvođenjem zapisa $\phi(\mathbf{t})$ za vektor kolonu čiji red sadrži vrijednost $\phi(n, m)$ za kombinaciju n i m iz istoga reda matrice \mathbf{t} , relacija (2.25) može biti alternativno zapisana kao

$$\mathbf{x} = A \exp(j\phi(\mathbf{t})) + \nu = A\Phi + \nu. \quad (2.28)$$

Kako je posmatrani šum aditivni bijeli Gauss-ov sa nezavisnim realnim i imaginarnim dijelovima čija je srednja vrijednost 0 i varijansa $\sigma^2/2$, funkcija gustine raspodjele slučajne promjenljive \mathbf{x} je

$$\rho_{\mathbf{x}}(\theta) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{MN}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x} - A\Phi\|^2 \right\}, \quad (2.29)$$

gdje je $\theta = [\mathbf{a}^T, A]^T$ vektor parametara koji se estimira. Element FIM-a na poziciji (k, l) je

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{k,l} &= -E \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\}, \\ \Lambda &= \log \rho_{\mathbf{x}}(\theta) = -MN \ln \pi - MN \ln \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x} - A\Phi\|^2.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Stoga, da bismo odredili elemente ove matrice, neophodno je odrediti parcijalne izvode Λ po nepoznatim parametrima.

Izvod Λ po parametru $a_{k,l}$ iznosi

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial a_{k,l}} = \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left\{ A \frac{\partial \Phi^H}{\partial a_{k,l}} (\mathbf{x} - A\Phi) \right\}, \quad (2.31)$$

odakle slijedi

$$-E \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_{k,l} \partial a_{p,q}} \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left\{ A \frac{\partial \Phi^H}{\partial a_{k,l}} A \frac{\partial \Phi}{\partial a_{p,q}} \right\}. \quad (2.32)$$

Uvođenjem vektora

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= [-N/2, \dots, N/2]^T \otimes \mathbf{1}_{M+1}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{1}_{N+1} \otimes [-M/2, \dots, M/2]^T,\end{aligned}$$

gdje su $\mathbf{1}_{M+1}$ i $\mathbf{1}_{N+1}$ jedinični vektori kolona dužina $(M+1)$ i $(N+1)$, respektivno i \otimes Kronecker-ov proizvod, $A\partial\Phi/\partial a_{k,l}$ se može predstaviti kao

$$A \frac{\partial\Phi}{\partial a_{k,l}} = j A \mathbf{e}_1^k \cdot \mathbf{e}_2^l \cdot \Phi. \quad (2.33)$$

U (2.33) operator (\cdot) predstavlja Hadamard-ov proizvod.

Iz (2.32) i (2.33) dobijamo

$$\begin{aligned}-\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_{k,l} \partial a_{p,q}} \right\} &= \frac{2A^2}{\sigma^2} (\mathbf{e}_1^k \cdot \mathbf{e}_2^l)^T (\mathbf{e}_1^p \cdot \mathbf{e}_2^q) \\ &= \frac{2A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} n^{k+p} \sum_{m=-M/2}^{M/2} m^{l+q}.\end{aligned} \quad (2.34)$$

Slično,

$$\begin{aligned}-\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_{k,l} \partial A} \right\} &= \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left\{ A \frac{\partial\Phi^H}{\partial a_{k,l}} \Phi \right\} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \{ (j A \mathbf{e}_1^k \cdot \mathbf{e}_2^l \Phi)^H \Phi \} = 0,\end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}-\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial A^2} \right\} &= \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \{ \Phi^H \Phi \} \\ &= \frac{2(N+1)(M+1)}{\sigma^2} \approx \frac{2NM}{\sigma^2}.\end{aligned} \quad (2.36)$$

Može se pokazati da je matrica \mathbf{J} blok dijagonalna [21], pa se računanje CRLB-a amplitude i parametara faze može obaviti nezavisno jedno od drugoga:

$$\begin{aligned}\text{CRLB}\{A\} &\approx \frac{\sigma^2}{2NM}, \\ \text{CRLB}\{\mathbf{a}\} &= \frac{\sigma^2}{2A^2} \mathbf{H}_1^{-1} \otimes \mathbf{H}_2^{-1},\end{aligned} \quad (2.37)$$

gdje su elementi matrica \mathbf{H}_1 i \mathbf{H}_2 dati izrazima

$$\begin{aligned}[\mathbf{H}_1]_{k+1,p+1} &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} n^{k+p}, \\ [\mathbf{H}_2]_{l+1,q+1} &= \sum_{m=-M/2}^{M/2} m^{l+q}.\end{aligned} \quad (2.38)$$

Primjetimo da, kao i kod monokomponentnih 1D PPS-a, CRLB-i 2D PPS-a su nezavisni od parametara polinoma faze. To znači da svi signali (P, Q) reda sa istom amplitudom, imaju identične CRLB-ove. Takođe, primjetimo da CRLB amplitude zavisi samo od dimenzija signala i varijanse šuma, čime se pokazuje da snaga signala nema značaja u estimaciji amplitude.

2.4 Mjere za ocjenu performansi PPS estimatora

Kao što smo već u uvodnom dijelu napomenuli, za ocjenu performansi estimatora PPS-a koriste se tri mjere: računaska složenost estimacione procedure, MSE i prag SNR-a. U zavisnosti od situacije u kojoj se estimacija obavlja, favorizuje se jedan ili više faktora.

2.4.1 Računska složenost estimacione procedure

Za konkretan računarski sistem, računaska složenost je mjera koja daje informaciju o vremenu zauzetosti procesora u obavljanju estimacije. Kako se računari međusobno razlikuju po brzini izvršavanja, umjesto u vremenu, računaska složenost se izražava u broju računskih operacija. Ako znamo taj broj, sa informacijom o broju instrukcija u sekundi dobijamo i vrijeme izvršavanja. Često, od interesa je samo procijena reda veličine ovoga parametra, pa se složenost izražava $O(\cdot)$ notacijom. Ova veličina je presudan faktor u izboru estimatora kod aplikacija koje se izvršavaju u realnom vremenu.

2.4.2 Srednja kvadratna greška

MSE predstavlja mjeru kojom se izražava tačnost estimacione procedure. Ona nam govori koliko posmatrani estimator u prosijeku griješi. Pretpostavimo da imamo L estimacija parametra a_k , \hat{a}_k^i , $i = 1, \dots, L$. MSE parametra a_k se može odrediti na sledeći način [16]:

$$\text{MSE}\{\hat{a}_k\} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (a_k - \hat{a}_k^i)^2. \quad (2.39)$$

Imajući na umu da MSE predstavlja srednju vrijednost sume kvadrata grešaka načinjenih pri estimaciji, MSE je uvijek pozitivna veličina, koja je sa donje strane ograničena nulom.

Alternativno, MSE se može izraziti preko biasa i varijanse slučajne promjenljive $\delta\hat{a}_k =$

$a_k - \hat{a}_k$ [16]:

$$\text{MSE}\{\hat{a}_k\} = \text{var}\{\hat{a}_k\} - \text{bias}\{\hat{a}_k\}^2 = \text{E}\{(\delta\hat{a}_k)^2\} - \text{E}\{\delta\hat{a}_k\}^2. \quad (2.40)$$

Bias predstavlja srednju vrijednost greške estimacije, dok je varijansa prosječno kvadratno odstupanje estimirane od tačne vrijednosti. Ukoliko estimator rezultuje bezbiasnim estimatima, tj. $\text{bias}\{\hat{a}_k\} = 0$, vrijednost MSE-a je ograničena sa minimalnom vrijednošću varijanske (CRLB-om) koja se može ostvariti estimacionom procedurom. Stoga, cilj u estimaciji je dostići ovu granicu.

Na MSE parametara PPS-a najveći uticaj imaju dva faktora: snaga signala i snaga šuma. Odnos ove dvije veličine naziva se SNR i za signale, uvedene u prethodnoj sekciji, definiše se kao¹

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_\nu} = \frac{A^2}{\sigma^2}. \quad (2.41)$$

MSE je obrnuto proporcionalan SNR-u, tj. sa porastom SNR-a, MSE PPS parametra se smanjuje i obratno. Asimptotske vrijednosti MSE-a bezbiasnih estimatora su često linearne funkcije od SNR-a.

2.4.3 Prag odnosa signal-šum

Svaki estimator ima opseg SNR-a u kome je njegova estimacija pouzdana. Taj opseg je ograničen sa donje strane. Minimalna vrijednost u tom opsegu naziva se prag SNR-a. Dakle, to je vrijednost SNR-a ispod koga MSE se drastično pogoršava.

Postoji više načina za određivanje praga SNR-a. Jedan od mogućih pristupa je preko asimptotske relativne efikasnosti (ARE) [9]:

$$\text{ARE}\{\hat{a}_k, \sigma^2\} = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2P+1} \text{E}\{(\delta\hat{a}_k)^2\}}{\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2P+1} \text{CRLB}\{\hat{a}_k\}}. \quad (2.42)$$

Može se pokazati da je, za veću vrijednost SNR-a, ARE približno konstantna veličina, dok za manju to ne važi. Izračunajmo $\text{ARE}\{\hat{a}_P, \sigma^2\}$ za veliki SNR i obilježimo ga sa $\text{ARE}\{\hat{a}_P, 0\}$. Tada se prag SNR-a može izračunati kao vrijednost SNR-a koja zadovoljava sledeću relaciju:

$$\text{ARE}\{\hat{a}_k, \sigma^2\} = T_r \text{ARE}\{\hat{a}_k, 0\}, \quad (2.43)$$

gdje je T_r konstanta koja se određuje eksperimentalnim putem.

¹Kod multikomponentnih PPS-a, za parametar A uzima se vrijednost amplitude najjače komponente, tj. $A = \max\{A_1, A_2, \dots, A_K\}$.

Ponekad je opisani pristup za određivanje praga neupotrebljiv, jer je MSE estimatora često rezultat neke asimptotske analize koja rezultira konstantanim ARE-om za svaku vrijednost SNR-a. U tom slučaju, prag se određuje numeričkim pristupom. Naime, za različite vrijednosti SNR-a i različite signale, ARE se može odrediti numeričkim putem. Za prag se tada usvoja usrednjena vrijednost SNR-a koja zadovoljava relaciju (2.43).

Poglavlje 3

Pregled tehnika za estimaciju parametara 1D PPS-a

U ovom poglavlju, daćemo kratak pregled najznačajnijih tehnika za estimaciju parametara 1D PPS-a i naglasiti njihove prednosti i nedostatke. Za svaku uvedenu tehniku, izvršićemo ispitivanje njenih performansi, kako analitičkim putem, tako i pomoću numeričkih primjera. Poglavlje će predstavljati motivaciju za uvođenje tehnika koje će biti prikazane dalje u tezi.

3.1 Estimator maksimalne vjerodostojnosti

ML je najtačnija procedura za određivanje parametara signala (2.1). Definisan je sledećim relacijama:

$$\text{ML}(b_1, b_2, \dots, b_P) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n) \exp \left(-j \sum_{i=1}^P b_i (n\Delta)^i \right), \quad (3.1)$$

$$(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_P) = \arg \max_{(b_1, b_2, \dots, b_P)} |\text{ML}(b_1, b_2, \dots, b_P)|^2. \quad (3.2)$$

Kada se odrede koeficijenti $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_P$, amplituda i a_0 se mogu estimirati iz demodulisanog (dechirpovanog) signala $x_d(n) = x(n) \exp \left(-j \sum_{i=1}^P \hat{a}_i (n\Delta)^i \right)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_d(n) \right|, \\ \hat{a}_0 &= \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_d(n) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

ML je asimptotski efikasan estimator parametara PPS-a, tj. parametri estimirani ovom procedurom su bezbiasni sa MSE-om koji dostiže teorijske limite (CRLB). Linearnost funkcije (3.1) omogućava efikasno uklanjanje šuma, zbog čega ML ima prag SNR-a na -5 dB i nezavisan je od reda PPS-a. O performansama ML-a biće više riječi u Poglavlju 5.

Osnovni nedostatak ove estimacione tehnike je potreba za pretragom po P -dimenzionom prostoru, što je, za signale višega reda, računski izuzetno zahtjevno. Naime, da bi se odredila vrijednost ML-a u jednoj tački, potrebno je sprovesti približno $(N + 1)$ kompleksnih sabiranja i množenja. Kako su za jedno kompleksno množenje potrebna dva realna sabiranja i četiri realna množenja, i za jedno kompleksno sabiranje dva realna sabiranja, složenost funkcije (3.1) je $4(N + 1)$ realnih sabiranja i množenja. Ova funkcija se računa za sve tačke nekog unaprijed definisanog P -dimenzionog prostora. Pod pretpostavkom da je ukupan broj tačaka po jednoj osi pretrage M , složenost ML-a je $4(N + 1)M^P$ realnih sabiranja i množenja. Predstavljeno preko O notacije ovo iznosi $O(NM^P)$ operacija. Kako je M obično reda stotina, jasno je da je upotreba ML procedure opravdana i moguća za $P \leq 3$, jer je, za veći red signala, nemoguće izvršiti pretragu u realnom vremenu.

Kao alternativa ML estimatoru predložene su tehnike na bazi faznog diferenciranja, koje su opisane u nastavku.

3.2 Ambiguity funkcija višega reda

Jedan od mogućih načina za smanjenje računske složenosti estimacione procedure je smanjenje reda PPS-a. Smanjenje reda se može obaviti pomoću operatora PD-a, realizovanog preko auto-korelacione funkcije [6], [8]:

$$\begin{aligned}
 \text{PD}^0[n] &= x(n) \\
 \text{PD}^1[n; \tau_1] &= x(n + \tau_1)x^*(n - \tau_1) \\
 \text{PD}^2[n; \tau_1, \tau_2] &= \text{PD}^1[n + \tau_2; \tau_1] (\text{PD}^1[n - \tau_2; \tau_1])^* \\
 &\dots \\
 \text{PD}^K[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K] &= \text{PD}^{K-1}[n + \tau_K; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{K-1}] \\
 &\quad \times (\text{PD}^{K-1}[n - \tau_K; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{K-1}])^*, \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

gdje je $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K]$ skup parametara pomjeraja i K red PD operatora, tj. broj diferenciranja faze. $(P - 1)$ sukcesivnih koraka PD operatora transformišu PPS $s(n)$

dat sa (2.1) u kompleksnu sinusoidu kružne učestanosti $\omega = 2^{P-1}P!\Delta^{P-1}a_P \prod_{k=1}^{P-1} \tau_k$. Stoga, a_P se može estimirati određivanjem pozicije maksimuma u spektru signala $\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-1}]^1$, tj.

$$\hat{a}_P = \frac{\arg \max_{\omega} |\text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau)|^2}{2^{P-1}P!\Delta^{P-1} \prod_{k=1}^{P-1} \tau_k},$$

$$\text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau) = \sum_{n=-L}^L \text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-1}] \exp(-j\omega n\Delta), \quad L = N/2 - \sum_{i=1}^{P-1} \tau_i. \quad (3.5)$$

Funkcija (3.5) poznata je pod nazivom ambiguity funkcija višega reda ili HAF [6]. Dakle, HAF koristi 1D pretragu da bi estimirao parametar uz najviši red polinoma faze. Parametri nižeg reda se na sličan način mogu odrediti posmatranjem dechirpovanog signala $x_d(n) = x(n) \exp(-j\hat{a}_P(n\Delta)^P)$. Kompletna estimaciona procedura data je, u vidu pseudo koda, u Tabeli 3.1.

Postaviti $x_p(n) = x(n)$.

for $p = P$ **to** 1 **step** -1

Estimirati koeficijent a_p pomoću $\text{HAF}_x^{p-1}(\omega; \tau)$

$$\hat{a}_p = \frac{\arg \max_{\omega} |\text{HAF}_{x_p}^{p-1}(\omega; \tau)|^2}{2^{p-1}p!\Delta^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} \tau_k}.$$

Ukloniti estimirani koeficijent \hat{a}_p iz faze signala

$$x_{p-1}(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_p(n\Delta)^p).$$

end for

Estimirati a_0 i A

$$\hat{a}_0 = \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right),$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right|.$$

Tabela 3.1: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću HAF-a.

Prikažimo kako pomoću HAF-a možemo estimirati parametre PPS-a trećega reda,

$$x(n) = A \exp \left(j \sum_{i=0}^3 a_i (n\Delta)^i \right) + \nu(n). \quad (3.6)$$

Da bi odredili parametar a_3 , potrebno je fazu signala $x(n)$ diferencirati dva puta. Dvije

¹Za estimaciju parametara sinusoide, FT je estimator maksimalne vjerodostojnosti [22].

auto-korelacije signala (3.6) rezultovaće PPS-om prvog reda

$$\begin{aligned} \text{PD}^2[n; \tau_1, \tau_2] &= x(n + \tau_1 + \tau_2)x^*(n - \tau_1 + \tau_2)x^*(n + \tau_1 - \tau_2)x(n - \tau_1 - \tau_2) \\ &= A^4 (j24a_3\Delta^2\tau_1\tau_2(n\Delta) + j8a_2\Delta^2\tau_1\tau_2) + \nu_x(n), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje je $\nu_x(n)$ član koji potiče od šuma. Vidimo da je parametar a_3 proporcionalan frekvenciji dobijenog signala, pa se isti može estimirati kroz maksimizaciju periodograma

$$\hat{a}_3 = \frac{\arg \max_{\omega} |\text{FT}\{\text{PD}^2[n; \tau_1, \tau_2]\}|^2}{24\Delta^2\tau_1\tau_2} = \frac{\arg \max_{\omega} |\text{HAF}_x^2(\omega; \tau)|^2}{24\Delta^2\tau_1\tau_2}. \quad (3.8)$$

Nakon estimacije a_3 , potrebno je ovaj parametar ukloniti iz faze signala $x(n)$

$$x_1(n) = x(n) \exp(-j\hat{a}_3(n\Delta)^3). \quad (3.9)$$

U idealnom slučaju, $x_1(n) = A \exp(j \sum_{i=0}^2 a_i(n\Delta)^i) + \nu_1(n)$ je PPS drugoga reda, koji se može svesti na kompleksnu sinusoidu primjenom jedne auto-korelacije. Stoga, a_2 se estimira iz $\text{HAF}_{x_1}^1(\omega; \tau)$ sa

$$\hat{a}_2 = \frac{\arg \max_{\omega} |\text{HAF}_{x_1}^1(\omega; \tau)|^2}{4\Delta\tau_1}. \quad (3.10)$$

Uklanjanjem \hat{a}_2 iz faze $x_1(n)$,

$$x_2(n) = x_1(n) \exp(-j\hat{a}_2(n\Delta)^2), \quad (3.11)$$

a_1 možemo odrediti iz FT-a $x_2(n)$ ($\text{HAF}_{x_2}^0(\omega; \tau)$ se svodi na originalni FT posmatranog signala)

$$\hat{a}_1 = \arg \max_{\omega} |\text{HAF}_{x_2}^0(\omega; \tau)|^2. \quad (3.12)$$

Konačno, a_0 i A estimiramo na sledeći način

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_2(n) \exp(-j\hat{a}_1 n\Delta) \right), \\ \hat{A} &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_2(n) \exp(-j\hat{a}_1 n\Delta) \right|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.1 Računska složenost HAF estimatora

Da bi se odredila računaska složenost HAF estimacione procedure, neophodno je prethodno odrediti složenost PD operatora. Za računanje $(P - 1)$ izvoda faze signala $x(n)$ u n -tom trenutku, potrebno je izvršiti $2(P - 1)$ realnih sabiranja i $(P - 1)$

kompleksnih množenja. $\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}]$ treba izračunati za svako n (ovdje smo zanemarili skraćivanje signala), pa je ukupna složenost približno $2(P-1)(N+1)$ realnih sabiranja i $(P-1)(N+1)$ kompleksnih množenja. Kako se HAF računa kao $\text{FT}\{\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}]\}$, a znajući da složenost algoritma za računanje brzog FT-a iznosi $M \log_2 M$ kompleksnih sabiranja i množenja, gdje je M broj odbiraka signala čiji se FT traži, ukupna složenost HAF-a $(P-1)$ reda je $2(P-1)(N+1)$ realnih sabiranja, $M \log_2 M$ kompleksnih sabiranja i $(P-1)(N+1) + M \log_2 M$ kompleksnih množenja. Ovdje smo podrazumijevali da je dužina $\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}]$ M , $M > N$, jer, radi finije estimacije parametra a_P , $\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}]$ se mora interpolirati.

Znajući da jedno kompleksno sabiranje zahtjeva dva realna sabiranja i da je jedno kompleksno množenje realizovano sa dva realna sabiranja i četiri realna množenja, za određivanje $\text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau)$, potrebno je sprovesti $4(P-1)(N+1) + 4M \log_2 M$ realnih sabiranja i $4M \log_2 M$ realnih množenja. Ovo, izraženo preko $O(\cdot)$ notacije, iznosi $O(M \log_2 M)$ operacija.

Na kraju, da bi se estimirali svi parametri signala $x(n)$, HAF se računa P puta, pa je ukupna složenost HAF estimacione procedure $O(PM \log_2 M)$ operacija. Oдавde vidimo da, u poređenju sa ML-om, HAF je, sa stanovišta brzine, mnogo prihvatljivija tehnika.

3.2.2 MSE HAF estimatora

Iako postoji veliki broj radova koji se bave statističkom analizom HAF estimatora, za model opisan relacijom (2.1) u literaturi ne postoji konkretna informacija o MSE-u parametara estimiranih ovom procedurom. Zbog svoje jednostavnosti, analiza u tim radovima je pretežno fokusirana na asimetrične PPS-e². Stoga, u nastavku će biti izveden MSE koeficijenta a_P .

MSE parametra a_P se može odrediti preko perturbacione analize prvog reda [3]. Kako ova analiza pretpostavlja da broj odbiraka signala teži beskonačnosti, dobijeni rezultati će predstavljati asimptotske izraze.

Pod pretpostavkom da je $\text{SNR} \gg 0$, sabirci u $\text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-1}]$ koji sadrže više od jednog šumnog člana se mogu zanemariti, jer će, prilikom određivanja MSE-a (vidi (3.31)), matematičko očekivanje proizvoda ovakvog sabirka i nekog drugog sabirka imati

²Za razliku od modela opisanog relacijom (2.1), asimetrični modeli vrijeme posmatraju u intervalu $n \in [0, N]$. U ovom radu, mi smo se odlučili za simetrični model PPS-a iz razloga što pomenuti model ima niže vrijednosti CRLB-a [18], što estimaciju čini preciznijom.

zanemarljive vrijednosti u odnosu na u matematičko očekivanje proizvoda dva sabirka koji imaju po jedan šumni član. Ova konstatacija daje nam mogućnost alternativnog zapisa signala nakon $(P - 1)$ auto-korelacije:

$$\begin{aligned} \text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-1}] &\simeq \prod_{k=1}^{2^{P-1}} s_{b(k-1)}(n) \\ &+ \sum_{i=1}^{2^{P-1}} \nu_{b(i-1)}(n) \prod_{k=1, k \neq i}^{2^{P-1}} s_{b(k-1)}(n) = \prod_{k=1}^{2^{P-1}} s_{b(k-1)}(n) \left(1 + \sum_{i=1}^{2^{P-1}} \frac{\nu_{b(i-1)}(n)}{s_{b(i-1)}(n)} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \nu_{b(i)}(n) &= \nu\left(\sum_{k=0}^{P-2} C_k^{b(i)}\right) \left(n + \sum_{k=0}^{P-2} (-1)^{C_k^{b(i)}} \tau_{k+1} \right), \\ s_{b(i)}(n) &= s\left(\sum_{k=0}^{P-2} C_k^{b(i)}\right) \left(n + \sum_{k=0}^{P-2} (-1)^{C_k^{b(i)}} \tau_{k+1} \right), \\ C_k^{b(i)} \in \{0, 1\}, \quad s^{(i)}(n) &= \begin{cases} s(n), & i \text{ parno} \\ s^*(n), & i \text{ neparno} \end{cases}, \quad \nu^{(i)}(n) = \begin{cases} \nu(n), & i \text{ parno} \\ \nu^*(n), & i \text{ neparno} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

i $C_k^{b(i)}$ je k -ta cifra binarne reprezentacije broja i ; $b(i)$ predstavlja binarni zapis broja i . Reprezentacija preko binarnog zapisa je ovdje uzeta kako bi izrazom obuhvatili sve moguće kombinacije parametara pomjeraja. Simbol \simeq označava aproksimaciju.

Kada je signal $x(n)$ čisto deterministički, tj. kada šum nije prisutan, PD operator ne generiše interferirajuće članove pa je i HAF deterministički

$$g_N(\omega) = \text{HAF}_s^{P-1}(\omega; \tau) = A^{2^P} \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} \exp(j(\omega_0 - \omega)\Delta n), \quad (3.16)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 2^{P-1}(P-1)!a_{P-1}\Delta^{P-1} \prod_{i=1}^{P-1} \tau_i, \\ \omega_0 &= 2^{P-1}P!a_P\Delta^{P-1} \prod_{i=1}^{P-1} \tau_i, \\ N_1 &= N/2 - \sum_{i=1}^{P-1} \tau_i. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Šum $\nu(n)$ dovodi do perturbacija u $\text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau)$. Ove perturbacije se izražavaju preko razlika vrijednosti HAF-a u prisustvu šuma i u njegovom odsustvu:

$$\begin{aligned} \delta g_N(\omega) &= \text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau) - \text{HAF}_s^{P-1}(\omega; \tau) \\ &\simeq A^{2^P} \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} \eta(n) \exp(-j(\omega - \omega_0)\Delta n), \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdje je

$$\eta(n) = \sum_{i=1}^{2^{P-1}} \frac{\nu_{b(i-1)}(n)}{s_{b(i-1)}(n)} \quad (3.19)$$

član koji postoji usled prisustva šuma. Takođe, usled šuma, pozicija maksimuma HAF-a, $\hat{\omega}$, je pomjerena u odnosu na tačnu vrijednost, ω_0 . U [3], [6] pokazano je da se greška $\delta\hat{\omega} = \omega_0 - \hat{\omega}$, koja se tom prilikom pravi, može izraziti preko izvoda $g_N(\omega)$ i $\delta g_N(\omega)$

$$\delta\hat{\omega} \approx - \left[\frac{\partial^2 f_N(\omega_0)}{\partial \omega^2} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \delta f_N(\omega_0)}{\partial \omega} \right], \quad (3.20)$$

gdje su funkcije $f_N(\omega)$ i $\delta f_N(\omega)$ date kao

$$f_N(\omega) = g_N(\omega)g_N^*(\omega), \quad (3.21)$$

$$\delta f_N(\omega) \approx g_N(\omega)\delta g_N^*(\omega) + g_N^*(\omega)\delta g_N(\omega) = 2 \operatorname{Re}\{g_N(\omega)\delta g_N^*(\omega)\}. \quad (3.22)$$

Stoga, da bi odredili $\delta\hat{\omega}$, neophodno je izračunati drugi izvod $f_N(\omega)$ po ω u tački ω_0 i prvi izvod $\delta f_N(\omega)$ po ω u istoj tački. Iz relacija (3.21) i (3.22), lako je zaključiti da će ovi izvodi imati sljedeći oblik

$$\frac{\partial^2 f_N(\omega_0)}{\partial \omega^2} = 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\omega_0) \frac{\partial^2 g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega^2} + \frac{\partial g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \frac{\partial g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega} \right\}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \delta f_N(\omega_0)}{\partial \omega} \approx 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\omega_0) \frac{\partial \delta g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \delta g_N^*(\omega_0) \right\}. \quad (3.24)$$

Uvođenjem aproksimacije $\sum_{n=a}^b n^k \approx \int_a^b x^k dx$ i omogućavanjem diferenciranja po diskretnim varijablama, dobijamo vrijednosti nepoznatih članova iz gornjeg izraza:

$$g_N(\omega_0) \simeq 2A^{2^P} \exp(j\beta_0)N_1,$$

$$\frac{\partial g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \simeq -jA^{2^P} \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} \Delta n \exp(j(\omega_0 - \omega)\Delta n) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_N(\omega_0)}{\partial \omega^2} &\simeq -A^{2^P} \exp(j\beta_0) \Delta^2 \sum_{n=-N_1}^{N_1} n^2 \\ &= -A^{2^P} \exp(j\beta_0) \Delta^2 \frac{2N_1^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta g_N(\omega_0) &\simeq A^{2^P} \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} \eta(n) \exp(-j(\omega - \omega_0)\Delta n) \\ &\simeq A^{2^P} \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} \eta(n), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \simeq -j A^{2^P} \Delta \exp(j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} n \eta(n). \quad (3.25)$$

Njihovim uvrštavanjem u (3.23) i (3.24) slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_N(\omega_0)}{\partial \omega^2} &\simeq 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\omega_0) \frac{\partial^2 g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega^2} + \frac{\partial g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \frac{\partial g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega} \right\} \\ &\simeq 2 \operatorname{Re} \left\{ 2A^{2^P} \exp(j\beta_0) N_1 \left(-A^{2^P} \exp(-j\beta_0) \Delta^2 \frac{2N_1^3}{3} \right) \right\} \\ &\simeq -A^{2^{P+1}} \Delta^2 \frac{8N_1^4}{3}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_N(\omega_0)}{\partial \omega} &\approx 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\omega_0) \frac{\partial \delta g_N^*(\omega_0)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_N(\omega_0)}{\partial \omega} \delta g_N^*(\omega_0) \right\} \\ &\approx 2 \operatorname{Re} \left\{ 2A^{2^P} \exp(j\beta_0) N_1 \left(j A^{2^P} \Delta \exp(-j\beta_0) \sum_{n=-N_1}^{N_1} n \eta^*(n) \right) \right\} \\ &\approx 4A^{2^{P+1}} N_1 \Delta \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=-N_1}^{N_1} n \eta^*(n) \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

čime dobijamo i vrijednost $\delta \hat{\omega}$

$$\begin{aligned} \delta \hat{\omega} &\approx - \left[\frac{\partial^2 f_N(\omega_0)}{\partial \omega^2} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \delta f_N(\omega_0)}{\partial \omega} \right] \\ &\approx - \left[-A^{2^{P+1}} \Delta^2 \frac{8N_1^4}{3} \right]^{-1} \left[4A^{2^{P+1}} N_1 \Delta \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=-N_1}^{N_1} n \eta^*(n) \right\} \right] \\ &= \frac{3 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=-N_1}^{N_1} n \eta^*(n) \right\}}{2 \Delta N_1^3}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Bias $\hat{\omega}$ je jednak matematičkom očekivanju $\delta \hat{\omega}$. Kako je srednja vrijednost šuma $\nu_{b(i-1)}(n)$ nula, imamo

$$\operatorname{E}\{\eta(n)\} = \sum_{i=1}^{2^{P-1}} \frac{\operatorname{E}\{\nu_{b(i-1)}(n)\}}{s_{b(i-1)}(n)} = 0, \quad (3.29)$$

odakle slijedi da, kada $N \rightarrow \infty$, HAF je bezbiasan estimator, tj.

$$\operatorname{E}\{\delta \hat{\omega}\} = 0. \quad (3.30)$$

Ovo je veoma važna osobina estimatora, koja govori da prilikom estimacije parametara ne dolazi do sistematskih grešaka³. Takođe, izvedeni zaključak, u svrhu ispitivanja

³Sistematske greške su greške koje pri ponovljenim mjerenjima ostaju konstantne ili se menjaju po određenom zakonu.

performansi HAF-a, omogućava direktno poređenje MSE-a sa CRLB-om, jer je varijansa $\hat{\omega}$ jednaka MSE-u (vidi Poglavlje 2).

MSE $\hat{\omega}$ se može izračunati iz matematičkog očekivanja kvadrata greške

$$E\{(\delta\hat{\omega})^2\} \approx \frac{9}{4\Delta^2 N_1^6} E \left\{ \text{Im} \left\{ \sum_{p=-N_1}^{N_1} p\eta^*(p) \right\} \text{Im} \left\{ \sum_{q=-N_1}^{N_1} q\eta^*(q) \right\} \right\}. \quad (3.31)$$

Znajući da je $E\{\text{Im}\{X\} \text{Im}\{Y\}\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{E\{XY^*\} - E\{XY\}\}$, gornji izraz postaje

$$E\{(\delta\hat{\omega})^2\} \approx \frac{9}{8\Delta^2 N_1^6} \times \text{Re} \sum_{p=-N_1}^{N_1} \sum_{q=-N_1}^{N_1} \{pq [E\{\eta^*(p)\eta(q)\} - E\{\eta^*(p)\eta^*(q)\}]\}. \quad (3.32)$$

Kako je analiza relacije (3.32) veoma komplikovana, ili gotovo nemoguća, uvedimo sljedeću pretpostavku $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{P-1}$. Slična pretpostavka je korišćena i kod asimetričnog modela signala [8, Sekcija III.C]. U matematičkim očekivanjima $E\{\eta^*(p)\eta(q)\}$ i $E\{\eta^*(p)\eta^*(q)\}$, nenulte vrijednosti imaće samo sabirci u kojima se pojavljuju kombinacije konjugovanog i nekonjugovanog šumnog člana. Svaki od ovih sabiraka ima istu magnitudu, σ^2/A^2 , ali ona postoji u različitim tačkama, koje zavise od kombinacija p , q i τ . Pokazuje se da $E\{\eta^*(p)\eta(q)\}$ i $E\{\eta^*(p)\eta^*(q)\}$ zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$E\{\eta^*(p)\eta(q)\} = \frac{\sigma^2}{A^2} \binom{2P-2}{P-1} \delta(p-q) + \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-3+2i} [\delta(p-q+(4i-4)\tau) + \delta(p-q-(4i-4)\tau)] \quad (3.33)$$

i

$$E\{\eta^*(p)\eta^*(q)\} = \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-1}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-2+2i} [\delta(p-q+(4i-2)\tau) + \delta(p-q-(4i-2)\tau)], \quad (3.34)$$

gdje $\lceil \cdot \rceil$ predstavlja operator zaokruživanja prema prvom većem cijelom broju.

Sumiranjem (3.33) i (3.34) za svako p i q , dobijamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=-N_1}^{N_1} \sum_{q=-N_1}^{N_1} pq \left[\frac{\sigma^2}{A^2} \binom{2P-2}{P-1} \delta(p-q) \right. \\
& \left. + \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-3+2i} [\delta(p-q+(4i-4)\tau) + \delta(p-q-(4i-4)\tau)] \right] \\
& = \frac{2\sigma^2}{3A^2} \binom{2P-2}{P-1} N_1^3 + \frac{2\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-3+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-4)\tau, -N_1\}} p(p+(4i-4)\tau) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=-N_1}^{N_1} \sum_{q=-N_1}^{N_1} pq \left[\frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-1}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-2+2i} [\delta(p-q+(4i-2)\tau) + \delta(p-q-(4i-2)\tau)] \right] \\
& = \frac{2\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-1}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-2+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-2)\tau, -N_1\}} p(p+(4i-2)\tau). \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (3.35) i (3.36) u (3.32), dobijamo konačan izraz za $E\{(\delta\hat{\omega})^2\}$

$$\begin{aligned}
E\{(\delta\hat{\omega})^2\} & \approx \frac{9\sigma^2}{4A^2\Delta^2N_1^6} \left[\frac{1}{3} \binom{2P-2}{P-1} N_1^3 + \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-3+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-4)\tau, -N_1\}} \right. \\
& \left. \times p(p+(4i-4)\tau) - \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-1}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-2+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-2)\tau, -N_1\}} p(p+(4i-2)\tau) \right] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$= \frac{9\sigma^2}{4A^2\Delta^2N_1^6} [\Gamma_1 - \Gamma_2], \quad (3.38)$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 & = \frac{1}{3} \binom{2P-2}{P-1} N_1^3 + \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-3+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-4)\tau, -N_1\}} p(p+(4i-4)\tau), \\
\Gamma_2 & = \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-1}{2} \rceil} \binom{2P-2}{P-2+2i} \sum_{p=-N_1}^{\max\{N_1-(4i-2)\tau, -N_1\}} p(p+(4i-2)\tau). \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Kako je ω_0 proporcionalno a_P , tj.

$$\omega_0 = 2^{P-1} P! \alpha_P \Delta^{P-1} \tau^{P-1}, \quad (3.40)$$

MSE \hat{a}_P je

$$\begin{aligned}
E\{(\delta\hat{a}_P)^2\} & = \frac{E\{(\delta\hat{\omega})^2\}}{[2^{P-1} P! \tau^{P-1} \Delta^{P-1}]^2} \\
& \approx \frac{9\sigma^2}{A^2 2^{2P} (P!)^2 \tau^{2P-2} \Delta^{2P} N_1^6} [\Gamma_1 - \Gamma_2]. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

P	2	3	4	5	6	7	8
MSE	$\frac{96.05}{\text{SNR}N^5\Delta^4}$	$\frac{2193.6}{\text{SNR}N^7\Delta^6}$	$\frac{54689}{\text{SNR}N^9\Delta^8}$	$\frac{1.4267 \cdot 10^6}{\text{SNR}N^{11}\Delta^{10}}$	$\frac{3.8371 \cdot 10^7}{\text{SNR}N^{13}\Delta^{12}}$	$\frac{1.0389 \cdot 10^9}{\text{SNR}N^{15}\Delta^{14}}$	$\frac{2.8608 \cdot 10^{10}}{\text{SNR}N^{17}\Delta^{16}}$

Tabela 3.2: Približna vrijednost MSE-a parametra \hat{a}_P estimiranog pomoću HAF-a.

Iz dobijenog izraza možemo izvesti zaključak da MSE ne zavisi od parametara faze signala i da sa porastom reda signala, raste i udaljenost MSE-a od CRLB-a. MSE je takođe uslovljen i izborom parametra pomjeraja. Kako na ovaj parametar možemo direktno uticati, neophodno je pronaći vrijednost τ koja daje minimalnu grešku.

Optimalno τ

Na vrijednost MSE-a \hat{a}_P u velikoj mjeri utiče izbor τ . Parametar τ treba izabrati tako da $E\{(\delta\hat{a}_P)^2\}$ bude minimalno. Kako je minimizacija izraza (3.41) analitičkim putem veoma komplikovana, ili čak nemoguća, mi smo se odlučili ovaj izbor napraviti numeričkim putem. Naime, za različite kombinacije (N, τ, P) , računali smo vrijednost $E\{(\delta\hat{a}_P)^2\}$ i tražili koje τ daje minimalno MSE, za konkretno N i P . Pomoću te analize, za optimalno τ , dobili smo sledeći izraz:

$$\tau_{\text{opt}} \approx \frac{N}{2P}. \quad (3.42)$$

Kada je τ poznato, $E\{(\delta\hat{a}_P)^2\}$ se može predstaviti u zatvorenoj formi. Približne vrijednosti $E\{(\delta\hat{a}_P)^2\}$ za $P \in [1, 8]$ date su u Tabeli 3.2. Iz vrijednosti prikazanih u tabeli vidimo da sa porastom reda signala raste i MSE sa faktorom koji je približno $26N^{-2}\Delta^{-2}$. Veća vrijednost MSE-a je direktna posledica većeg broja članova u sumama (3.35) i (3.36).

Određivanje praga SNR-a

Kako međusobni odnos izraza prikazanih u Tabelama 2.1 i 3.2 za fiksno P daje konstantnu veličinu, prag SNR-a se ne može odrediti prvom metodom opisanom u Sekciji 2.4.3. Stoga određivanju praga se moralo pristupiti numeričkim putem. Rezultati numeričkog pristupa prikazani su Tabelom 3.3.

Iz Tabele 3.3 jasno je da sa povećanjem reda signala prag SNR-a raste za oko 6 dB. Ova činjenica značajno umanjuje upotrebljivost HAF-a, jer, za PPS-e velikoga reda, HAF je u mogućnosti tačno estimirati parametre faze samo pri velikom SNR-u. Kako je veliki SNR

P	2	3	4	5	6	7
Prag SNR-a [dB]	-3.0	3.7	10.4	16.6	22.6	28.5

Tabela 3.3: Prag SNR-a HAF estimacione procedure.

u praksi često nemoguće postići, HAF je limitiran na PPS-e manjeg reda. O uzrocima rasta praga SNR-a diskutovaćemo u narednoj sekciji.

3.2.3 Nedostaci HAF-a

HAF ima nekoliko nedostataka koji ograničavaju njegovu primjenu na PPS-e nižega reda. Naime, svaki korak PD operatora povećava uticaj šuma na dva načina: skraćivanjem signala za 2τ i povećavanjem broja šumnih članova. Signal $PD^{P-1}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}]$ je za $2 \sum_{i=1}^{P-1} \tau_i$ kraći u odnosu na $x(n)$. Kako suma u (3.5) ima ulogu usrednjavanja, šum će biti slabije usrednjen i njegova srednja vrijednost će biti lošije aproksimirana nego kod, recimo, ML-a. Povećanje broja šumnih članova je značajniji parametar koji smanjuje tačnost HAF-a i on je uzrokovan množenjem signala. Na primjer, od polaznog signala $x(n) = s(n) + \nu(n)$, koji ima jedan šumni član,

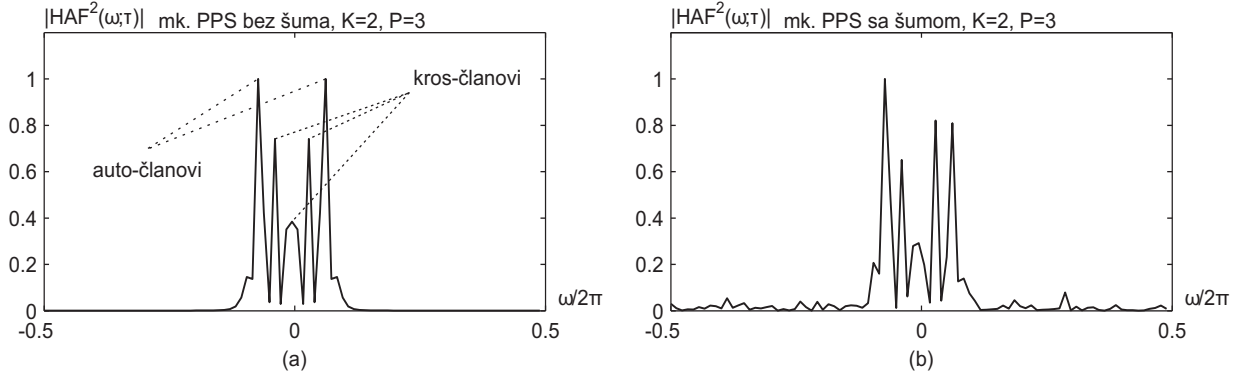
$$\begin{aligned} PD^1[n; \tau_1] &= s(n + \tau_1)s^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)s^*(n - \tau_1) \\ &\quad + s(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1) \end{aligned}$$

će imati tri šumna člana, $PD^2[n; \tau_1, \tau_2]$ 15 članova, $PD^3[n; \tau_1, \tau_2, \tau_3]$ 255 šumnih članova, itd. To povećanje broja članova utiče na povećanje praga SNR-a u prosijeku za 6 dB (vidi Tabelu 3.3) za svako novo PD. Iz tog razloga, HAF, primjenjen na PPS višega reda, ima relativno visok prag.

Kada je HAF primjenjen na signal (2.13), PD operator generiše kros-članove. Kros-članovi predstavljaju međusobne umnoške različitih komponentni signala. Na primjer, za $x^{mk}(n) = s_1(n) + s_2(n) + \nu(n)$ i

$$\begin{aligned} PD^1[n; \tau_1] &= s_1(n + \tau_1)s_1^*(n - \tau_1) + s_2(n + \tau_1)s_1^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)s_1^*(n - \tau_1) \\ &\quad + s_1(n + \tau_1)s_2^*(n - \tau_1) + s_2(n + \tau_1)s_2^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)s_2^*(n - \tau_1) \\ &\quad + s_1(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1) + s_2(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1), \end{aligned}$$

kros-članovi su $s_2(n + \tau_1)s_1^*(n - \tau_1)$ i $s_1(n + \tau_1)s_2^*(n - \tau_1)$, dok su $s_1(n + \tau_1)s_1^*(n - \tau_1)$ i $s_2(n + \tau_1)s_2^*(n - \tau_1)$ auto-članovi. Veći red PD operatora produkovaće i veći broj



Slika 3.1: Normalizovani HAF multikomponentnog PPS-a trećeg reda, $K = 2$: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma.

kros-članova. Kros-članovi se javljaju kao lažni maksimumi i, potpomognuti šumom, narušavaju reprezentaciju HAF-a. Ovi članovi mogu u potpunosti maskirati stvarne maksimume u spektru HAF-a i dovesti u pitanje tačnost estimiranog koeficijenta. Na Slici 3.1 dat je izgled HAF-a za dvokomponentni signal bez prisustva šuma i sa šumom. Sa slike vidimo, da pod uticajem šuma, kros-član, koji se nalazi desno, ima veću magnitudu u odnosu na jedan od auto-članova, što će prouzrokovati netačnu estimaciju koeficijenata.

Dalje, uklanjanje estimiranog koeficijenta iz faze signala uticaće na propagaciju greške od viših ka nižim koeficijentima polinoma faze. Naime, zbog greške u estimaciji parametra a_P , $\delta\hat{a}_P$, signal $x_d(n) = x(n) \exp(-j\hat{a}_P(n\Delta)^P)$ će i dalje biti PPS P -tog reda, tj.

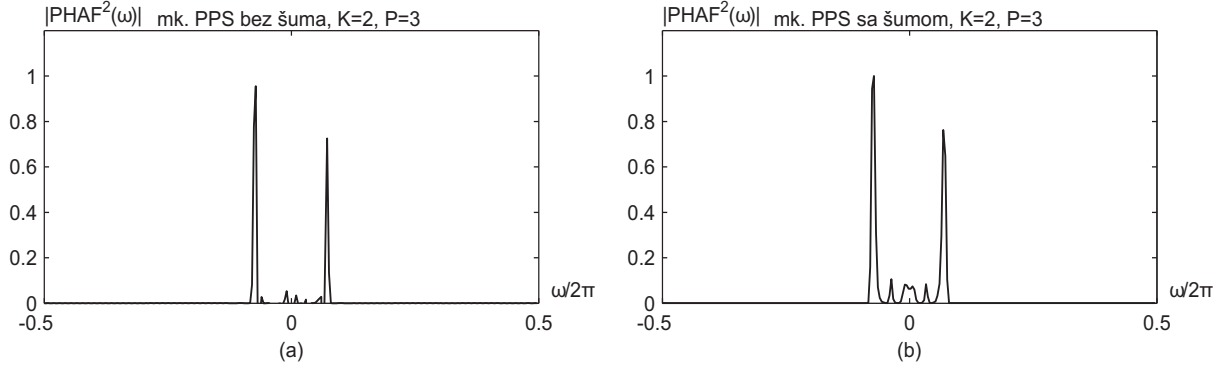
$$x_d(n) = A \exp \left\{ j \left(\sum_{i=1}^{P-1} a_i (n\Delta)^i + \delta\hat{a}_P (n\Delta)^P \right) \right\} + \nu_d(n), \quad (3.43)$$

što će uticati na tačnost estimacije koeficijenta a_{P-1} .

Dakle, da bi povećali tačnost HAF-a, neophodno je smanjiti i broj PD-a i broj dechirpovanja (demodulisanja).

3.3 Produktni HAF

Sa ciljem smanjenja uticaja kros-članova, predložena je produktna verzija HAF-a (PHAF) [8]. PHAF se definiše kao proizvod L HAF-ova računatih za različite skupove



Slika 3.2: Normalizovani PHAF multikomponentnog PPS-a trećeg reda, $K = 2$: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma.

parametara pomjeraja $\tau^{(l)} = [\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \dots, \tau_{P-1}^{(l)}]$, $l \in [1, L]$:

$$\text{PHAF}_{x^{mk}}^{P-1}(\omega) = \prod_{l=1}^L \text{HAF}_{x^{mk}}^{P-1}(\omega; \tau^{(l)}), \quad (3.44)$$

$$\text{HAF}_{x^{mk}}^{P-1}(\omega; \tau^{(l)}) = \sum_{n=-(N/2-\sum_{i=1}^{P-1} \tau_i^{(l)})}^{(N/2-\sum_{i=1}^{P-1} \tau_i^{(l)})} \text{PD}^{P-1}[n; \tau_1^{(l)}, \dots, \tau_{P-1}^{(l)}] \exp(-j\omega F_l n \Delta), \quad (3.45)$$

gdje je $F_l = \prod_{i=1}^{P-1} \tau_i^{(l)} / \tau_i^{(1)}$ parametar koji vrši skaliranje frekvencije. Pozicija maksimuma $|\text{HAF}_{x^{mk}}^{P-1}(\omega; \tau^{(l)})|$ direktno je proporcionalna koeficijentu a_P^k najjače komponente (komponente sa najvećom amplitudom), pa se isti može estimirati pomoću 1D pretrage.

Efikasnost PHAF-a u smanjenju uticaja kros-članova leži u iskorišćavanju činjenice da se, za bilo koji skup parametara pomjeraja, auto-članovi uvijek nalaze na istim pozicijama u spektru, dok pozicija kros-članova zavisi od izbora tih parametara i, generalno, za različite τ , oni se nalaze na različitim pozicijama. Stoga, proizvod više HAF-ova će pojačavati magnitudu auto-članova, dok će kros-članove slabiti. Na signal sa Slike 3.1 primjenili smo PHAF sa ukupno tri skupa parametara pomjeraja. Dobijeni rezultati su prikazani na Slici 3.2. Usljed proizvoda više HAF-ova, snaga kros-članova je dosta manja u odnosu na snagu kros-članova kod HAF-a. Zbog toga, pozicije maksimuma su očuvane čak i u prisustvu šuma.

Estimacioni algoritam, baziran na PHAF-u, dat je u Tabeli 3.4. Parametri signala $x^{mk}(n)$ se estimiraju po principu "komponenta po komponenta". Prvo se uzima pozicija najjačeg maksimuma iz $\text{PHAF}_{x^{mk}}^{P-1}(\omega)$ i iz nje odredi najviši parametar najjače komponente. Neka je taj parametar a_P^k . Potom se vrši dechirpovanje $x^{mk}(n)$ sa \hat{a}_P^k , tj. $x_d(n) = x^{mk}(n) \exp(-j\hat{a}_P^k(n\Delta)^P)$. Nakon ove modulacije, kojom se širi spektar ostalih komponenti, a spektar k -te komponente ostaje netaknut, $x_d(n)$ se može posmatrati kao

$x_k(n)$ kome je iz faze uklonjen parametar a_P^k . Niži parametri k -te komponente se sada određuju istom procedurom opisanom u Sekciji 3.2, s tom razlikom što se, umjesto HAF-a, koristi PHAF. Kada su svi parametri k -te komponente estimirani, $x_k(n)$ može biti uklonjen iz $x^{mk}(n)$ na sledeći način:

$$x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n) - \hat{A}_k \exp \left(j \sum_{i=0}^P \hat{a}_i^k(n\Delta)^i \right). \quad (3.46)$$

Parametri ostalih komponenti se mogu estimirati korišćenjem slične procedure nad signalom $x_1^{mk}(n)$.

Postavlja se pitanje kako odabrati skupove optimalnih parametara pomjeraja. Ne postoji neko generalno pravilo, ali je jasno da vrijednosti članova u skupu treba da budu skoncentrisane oko τ_{opt} definisanog u prethodnoj sekciji. Obično se za skupove parametara pomjeraja biraju članovi takvi da je njihov proizvod konstantan i iznosi $\prod_{i=1}^{P-1} \tau_i^{(l)} = \tau_{\text{opt}}^{P-1}$. Na ovaj način se izbjegava potreba za skaliranjem frekvencije prilikom računanja proizvoda HAF-ova i smanjuje složenost estimacione procedure, jer se ista može realizovati preko brzog FT-a.

Postaviti $x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n)$ i $k = 1$.

while $k \leq K$

Estimirati A_k i a_i^k najjače komponente PHAF procedurom koja je slična kao kod HAF-a.

Filtrirati estimiranu komponentu

$$x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n) - \hat{A}_k \exp \left(j \sum_{i=0}^P \hat{a}_i^k(n\Delta)^i \right).$$

Postaviti $k = k + 1$.

end while

Tabela 3.4: PHAF estimacioni algoritam.

PHAF nije primjenljiv samo na multikomponentne PPS-e. Naprotiv, on se veoma uspješno može iskoristiti i u estimaciji monokomponentnog PPS-a. Naime, pored toga što smanjuje uticaj kros-članova, proizvod više HAF-ova istovremeno smanjuje uticaj i komponenti uzrokovanih šumom i estimaciju čini pouzdanijom. Kao rezultat toga, u poređenju sa HAF-om, PHAF ima za oko 8 dB niži prag SNR-a. Dakle, sa povećanjem složenosti oko L puta, u stanju smo značajno popraviti prag SNR-a.

Iznad praga HAF-a, PHAF i HAF imaju gotovo slične performanse u pogledu MSE-a.

Za PPS-e višega reda, vrijednost MSE-a nije ni malo neznajna. Pored toga, PHAF je naslijedio i isti problem sa propagacijom greške, jer, za estimiranje parametara nižega reda, koristi dechirpovanje.

Efikasnost PHAF-a u estimaciji multikomponentnih signala je u velikoj mjeri zavisna od broja komponenti i reda signala. Naime, $(P - 1)$ auto-korelacija može generisati ogroman broj kros-članova koji dalje mogu prekriti cijeli spektar signala, tako da množenje više HAF-ova nema uticaj na smanjenje snage kros-komponenti. Štaviše, ono će ih jačati. Ilustrirajmo ovo jednim primjerom. Posmatrajmo dvokomponentni PPS četvrtog reda u odsustvu šuma. Tri auto-korelacije ovoga signala predstavljaju umnožak 8 komponenti. Spektar ovoga signala će imati dvije frekvencije koje odgovaraju parametrima komponenti signala, dok će, pored toga, postojati još $2^8 - 2 = 254$ interferirajućih članova. Ako je $N = 256$ i τ reda 30 odbiraka (što je uobičajeno), signal, nakon auto-korelacija, će imati ukupno 76 odbiraka. Dakle, velika je vjerovatnoća da ni jedan odbirak u spektru neće biti ostavljen bez komponente koja potiče od interferencije. Ove konstatacije su u suprotnosti sa uobičajenim mišljenjima o upotrebljivosti HAF-a koja je potvrđena do multikomponentnih signala trećega reda.

3.4 Integrirana generalizovana ambiguity funkcija

IGAF je još jedna od tehnika baziranih na PD-u. Definiše se na sledeći način [7]:

$$\begin{aligned} \text{IGAF}_x^P(g, h) &= \sum_{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_{P-2}} \left| \sum_n \text{PD}^{P-2}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-2}] \right. \\ &\quad \times \exp \left(-j2^{P-2}(P-1)!(gn + hn^2\Delta\frac{P}{2})\Delta^{P-1} \prod_{m=1}^{P-2} \tau_m \right) \Big|^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

U odsustvu šuma, maksimum (3.47) je u tački $(\hat{a}_{P-1}, \hat{a}_P)$, pa se dva parametra uz najviše redove mogu estimirati pretragom po 2D prostoru:

$$(\hat{a}_{P-1}, \hat{a}_P) = \arg \max_{(g, h)} \text{IGAF}_x^P(g, h). \quad (3.48)$$

Estimaciona procedura, bazirana na IGAF-u, data je u Tabeli 3.5.

Postaviti $x_p(n) = x(n)$ i $p = P$.

while $p > 1$

Estimirati koeficijente a_p i a_{p-1} pomoću $\text{IGAF}_{x_p}^p(n; g, h)$

$$(\hat{a}_{p-1}, \hat{a}_p) = \arg \max_{(g,h)} |\text{IGAF}_{x_p}^p(n; g, h)|.$$

Ukloniti estimirane koeficijente iz faze signala

$$x_{p-2}(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_p(n\Delta)^p - j\hat{a}_{p-1}(n\Delta)^{p-1}).$$

Postaviti $p = p - 2$.

end while

if $p = 1$

Estimirati a_1

$$\hat{a}_1 = \arg \max_{\omega} \left| \text{HAF}_{x_p}^0(\omega) \right|^2.$$

Ukloniti estimirani koeficijent iz faze signala

$$x_0(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_1(n\Delta)).$$

end if

Estimirati a_0 i A kao

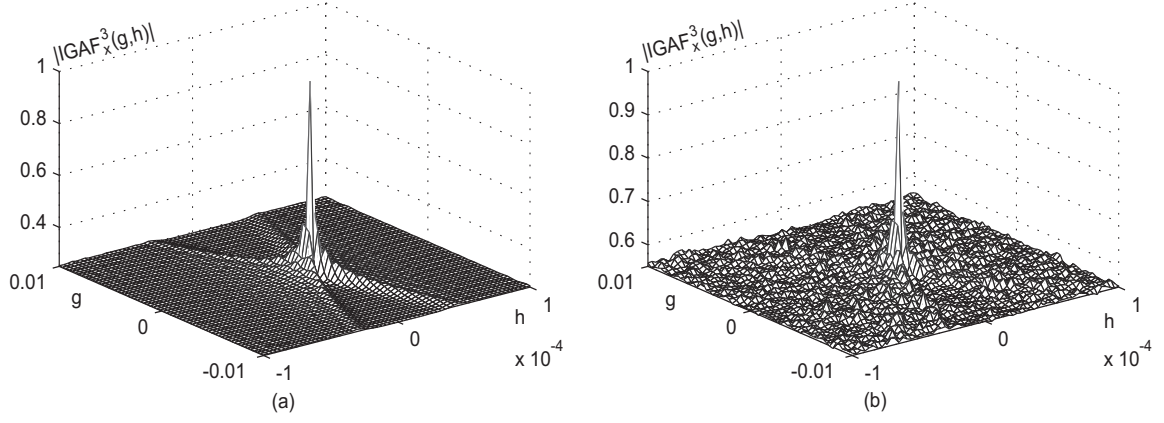
$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right), \\ \hat{A} &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right|. \end{aligned}$$

Tabela 3.5: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću IGAF-a.

Sumiranje po svim parametrima pomjeraja u IGAF-u usrednjava šum, čiji je uticaj ovime, za veće vrijednosti SNR-a, gotovo eliminisan. U poređenju sa HAF-om, IGAF koristi jedno PD manje, što mu dodatno omogućava bolje suprostavljanje šumu. Ovom procedurom se i uticaj propagacije greške smanjio, jer imamo manji broj dechirpovanja. Sve ovo čini da IGAF spada u jednu od najtačnijih estimacionih procedura. Izgled IGAF-a za PPS trećega reda u i bez prisustva šuma prikazan je na Slici 3.3. Sa slike vidimo da, i pri dodavanju relativno velikog šuma (SNR=0 dB), idealna reprezentacija IGAF-a nije narušena, tj. globalni maksimum ove funkcije je na istoj poziciji, kao i u odsustvu šuma. Pored toga, magnituda globalnog maksimuma je značajno veća u odnosu na lokalne maksimume, uzrokovane šumom, što značajno smanjuje vjerovatnoću greške u estimaciji.

3.4.1 Računska složenost IGAF-a

Praktična primjena IGAF-a je u velikoj mjeri otežana zbog računske složenosti, koja nekada prevazilazi i složenost ML-a. Naime, da bi se izvršila estimacija dva najviša parametara faze PPS-a pomoću ovoga pristupa, potrebno je IGAF izračunati M^2 puta, gdje je M broj tačaka po jednoj osi pretrage. Pod pretpostavkom da



Slika 3.3: Normalizovani IGAF PPS-a trećeg reda: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma (SNR=0 dB).

sve sume po parametrima pomjeraja imaju isti broj članova N_τ i znajući da je kompleksnost $PD^{P-2}[n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-2}]$ reda $O(PN)$ operacija, jedno računanje IGAF-a zahtijeva $O(N_\tau^{P-2}PN)$ realnih sabiranja i množenja. Iz ovoga slijedi da je ukupna složenost posmatrane procedure $O(N_\tau^{P-2}PNM^2)$ operacija. Ovo znači da na aktuelnom, komercionalnom računaru upotreba IGAF-a je moguća na signalima do trećeg reda, jer sve preko $P = 3$ bi bilo dosta vremenski zahtjevno. Stoga, u nastavku ćemo njegove performanse razmatrati nad signalima drugog i trećeg reda.

3.4.2 MSE IGAF-a

MSE-i dva najznačajnija parametra faze, za $P = 2$ i $P = 3$, su izvedeni u [7]. Mi ćemo ovdje samo prikazati dobijene rezultate.

Prema analizi sprovedenoj u [7], MSE-i parametara \hat{a}_P i \hat{a}_{P-1} , za $P = 2, 3$, mogu se odrediti sledećim relacijama:

$$\left. \begin{aligned} \text{MSE}\{\hat{a}_3\} &\approx \frac{1400}{N^7 \Delta^6 \text{SNR}} \\ \text{MSE}\{\hat{a}_2\} &\approx \frac{90}{N^5 \Delta^4 \text{SNR}} \end{aligned} \right\} \text{ za } P = 3, \\ \left. \begin{aligned} \text{MSE}\{\hat{a}_2\} &\approx \frac{90}{N^5 \Delta^4 \text{SNR}} \\ \text{MSE}\{\hat{a}_1\} &\approx \frac{6}{N^3 \Delta^2 \text{SNR}} \end{aligned} \right\} \text{ za } P = 2. \quad (3.49)$$

Poređenjem (3.49) sa CRLB-ovima prikazanim u Tabeli 2.1 izvodi se zaključak da IGAF dostiže teorijske limite pri estimaciji PPS-a drugog i trećeg reda. Zbog toga, u nekim situacijama, njena upotreba itekako može biti od interesa.

3.4.3 Prag SNR-a

I ovdje, kao i kod HAF-a, MSE je linearna funkcija od SNR-a, pa se ARE ne može iskoristiti za određivanje praga SNR-a. Zbog toga smo isti odredili pomoću simulacija. Dobijeni rezultati su pokazali da se IGAF, pri estimaciji kubičnih faznih signala ($P = 3$), može koristiti za $\text{SNR} > -6$ dB, dok je prag SNR-a za $P = 2$ na -8 dB. Ovi pragovi su validni za $N < 1000$, dok, za veće vrijednosti N , oni se smanjuju. Ovo je i za očekivati, jer za veće N imamo i veći broj članova u sumama relacije (3.47) koji bolje usrednjavaju šum.

3.5 Kubična fazna funkcija

CPF definisana kao [10], [11]

$$\text{CPF}_x(n, \Omega) = \sum_{m=-N/2+|n|}^{N/2-|n|} x(n+m)x(n-m) \exp(-j\Omega(m\Delta)^2), \quad (3.50)$$

uvedena je za estimaciju parametara PPS-a trećeg reda. Proizvodom $x(n+m)x(n-m)$ CPF, u odsustvu šuma, transformiše (2.1) u signal oblika $A^2 \exp\left(2j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi^{(2i)}(n)}{(2i)!} (m\Delta)^{2i}\right)$. Kako je $\phi^{(i)}(n) = 0$ za $i > 3$, maksimum CPF-a je pozicioniran u tački $\Omega_0(n) = 2[a_2 + 3a_3n\Delta]$. Stoga se parametri a_2 i a_3 mogu estimirati iz $\text{CPF}_x(n, \Omega)$ računatog u dvije tačke:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_0(0) &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(0, \Omega)|^2, \\ \hat{\Omega}_0(n_1) &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(n_1, \Omega)|^2, \\ \hat{a}_2 &= \hat{\Omega}_0(0)/2, \\ \hat{a}_3 &= \frac{\hat{\Omega}_0(n_1) - \hat{\Omega}_0(0)}{6n_1\Delta}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Estimaciona procedura, bazirana na CPF-u, data je u Tabeli 3.6.

Estimirati koeficijente a_3 i a_2 pomoću $\text{CPF}_x(n, \Omega)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_0(0) &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(0, \Omega)|^2, \quad \hat{\Omega}_0(n_1) = \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(n_1, \Omega)|^2, \\ \hat{a}_2 &= \hat{\Omega}_0(0)/2, \quad \hat{a}_3 = \frac{\hat{\Omega}_0(n_1) - \hat{\Omega}_0(0)}{6n_1\Delta}. \end{aligned}$$

Ukloniti estimirane koeficijente iz faze signala:

$$x_1(n) = x(n) \exp(-j\hat{a}_3(n\Delta)^3 - j\hat{a}_2(n\Delta)^2).$$

Estimirati a_1 :

$$\hat{a}_1 = \arg \max_{\omega} \left| \text{HAF}_{x_p}^0(\omega) \right|^2.$$

Ukloniti \hat{a}_1 iz faze signala:

$$x_0(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_1(n\Delta)).$$

Estimirati a_0 i A :

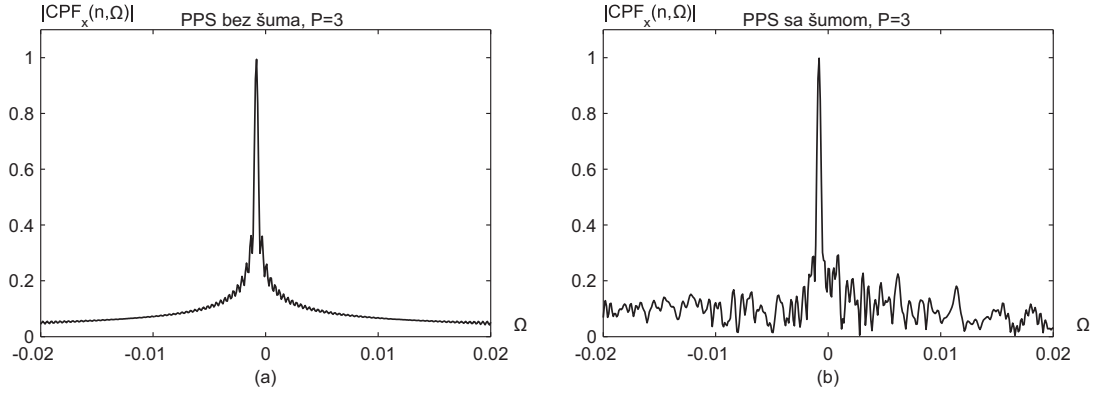
$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right), \\ \hat{A} &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right|. \end{aligned}$$

Tabela 3.6: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a trećeg reda pomoću CPF-a.

Za razliku od HAF-a, čija je nelinearnost za $P = 3$ četvrtoga reda, nelinearnost CPF-a je drugoga reda. Zahvaljujući manjoj nelinearnosti, proizvod $x(n+m)x(n-m)$ ima tri šumna člana, $s(n+m)\nu(n-m)$, $\nu(n+m)s(n-m)$ i $\nu(n+m)\nu(n-m)$, dok taj broj za PD kod HAF-a iznosi 15. Stoga, CPF je u stanju da se bolje izbori sa šumom jačega intenziteta. Pored toga, sa izborom n u stanju smo da kontroliramo dužinu signala nakon auto-korelacije, čime možemo da utičemo i na dodatno smanjenje šuma. Primjetimo da je u (3.51) CPF računat za $n = 0$, jer u tom slučaju dužina signala prije i nakon auto-korelacije ostaje ista. Parametri a_3 i a_2 se istovremeno određuju, pa je efekat propagacije greške sa koeficijenata višeg reda ka onima manjeg reda umanjen. CPF za PPS trećeg reda, računat za $n = 0$, prikazan je na Slici 3.4. U odnosu na HAF (vidi Sliku 3.1), CPF posjeduje bočne latice, međutim, iste ne utiču značajno na poziciju globalnog maksimuma, čija je vrijednost značajno veća u odnosu na ostale vrijednosti CPF-a. Ovo je demonstrirano na Slici 3.4 (b) sa koje vidimo da čak ni šum relativno velike snage (SNR=0 dB) nije uspio da poremeti poziciju maksimuma, u kojoj je CPF i dalje, po magnitudi, dosta veći u odnosu na ostale tačke.

3.5.1 Računska složenost CPF-a

Da bi se odredio CPF u tački n , za jedno Ω , potrebno je sprovesti $(N - 2|n|)$ kompleksnih sabiranja i $2(N - 2|n|)$ kompleksnih množenja (zbog male računske složenosti, broj operacija za računanje vrijednosti $\exp(j\Omega(m\Delta)^2)$ smo zanemarili), što, kada se pretvori u realne operacije, iznosi $6(N - 2|n|)$ realnih sabiranja i $8(N - 2|n|)$ realnih množenja. Pod pretpostavkom da je Ω osa podijeljena na M tačaka, složenost CPF-a za fiksno n je $6M(N - 2|n|)$ realnih sabiranja i $8M(N - 2|n|)$ realnih množenja. Ovo, predstavljeno O notacijom, iznosi $O(M(N - 2|n|))$ operacija. Kako se CPF računa u dvije



Slika 3.4: Normalizovani CPF PPS-a trećeg reda: (a) bez prisustva šuma; (b) u prisustvu šuma (SNR=0 dB).

tačke, od kojih je jedna $n = 0$, ukupna složenost estimacione procedure je reda $O(MN)$ operacija.

Sa složenošću od $O(NM)$ operacija, CPF je veoma pogodna za implementaciju u sistemima koji rade u realnom vremenu. Ta složenost se može dodatno umanjiti razbijanjem CPF-a na blokove [10].

3.5.2 MSE CPF-a

Perturbaciona analiza prvoga reda iz Sekcije 3.2.2 pokazala je da je CPF bezbiasan estimator sa sledećim izrazima za MSE parametara \hat{a}_3 i \hat{a}_2 [11]:

$$\begin{aligned} \text{MSE}\{\hat{a}_3\} &\approx \frac{2038 + \frac{1844}{\text{SNR}}}{N^7 \Delta^6 \text{SNR}}, \\ \text{MSE}\{\hat{a}_2\} &\approx \frac{90 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{N^5 \Delta^4 \text{SNR}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Izrazi u (3.52) dobijeni su za $n \approx 0.11N$ (ova vrijednost n -a ujedno i minimizuje MSE). Za velike vrijednosti SNR-a, $\text{MSE}\{\hat{a}_2\}$ je približno jednak $\text{CRLB}\{\hat{a}_2\}$, dok je $\text{MSE}\{\hat{a}_3\}/\text{CRLB}\{\hat{a}_3\} \approx 1.63$ dB. Primjetimo da, za \hat{a}_3 , CPF ima manje MSE u odnosu na HAF estimacionu proceduru (vidi Tabelu 3.2).

3.5.3 Prag SNR-a

Rezultati za MSE, prikazani u Sekciji 3.5.2, omogućavaju da se određivanju praga SNR-a CPF-a pristupi preko ARE-a. Kako je od najveće važnosti estimacija a_3 , prag u estimaciji ovoga parametra, predstavlja i prag CPF-a. Iz (2.42) i Tabele 2.1. slijedi

$$\text{ARE}\{\hat{a}_3, \sigma^2\} = 1.46 + 1.32\text{SNR}^{-1}. \quad (3.53)$$

Za velike vrijednosti SNR-a, važi

$$\text{ARE}\{\hat{a}_3, 0\} \approx 1.46, \quad (3.54)$$

što, kada se uvrsti u (2.43), uz $T_r = 2.5$, koje smo eksperimentalnim putem odredili, daje

$$\text{SNR} = \frac{1.32}{1.46(T_r - 1)} \approx -2.2 \text{ dB}. \quad (3.55)$$

Dakle, vidimo da prag SNR CPF-a iznosi oko -2.2 dB. Ovo je za oko 6 dB manje u odnosu na prag HAF-a. Dobijeni rezultat je i očekivan, budući da smo u Tabeli 3.3 pokazali da smanjenjem broja auto-korelacija za 1, prag SNR-a se smanjuje za 6 dB.

3.6 HO-WD i HO-CPF

U nekim aplikacijama, kao što su radari i sonari, javlja se potreba za preciznom estimacijom parametara PPS-a višega reda pri malom SNR-u [23], [24]. Zbog visokog praga SNR-a, tehnike bazirane na faznom diferenciranju ne mogu biti iskorišćene ovdje. Upotreba ML-a je takode nemoguća, jer ove aplikacije zahtijevaju obradu podataka u realnom vremenu.

Da bi se estimirali PPS-i višega reda, predložene su HO-CPF i HO-WD [14], [15]:

$$\text{HOCPF}_x(n, \omega_{L_1}) = \sum_{m=-N/2+|n|}^{N/2-|n|} x(n+m)x(n-m) \exp(-j \sum_{l=1}^{L_1} \omega_l (\Delta m)^{2l}), \quad (3.56)$$

$$\text{HOWD}_x(n, \omega_{L_2}) = \sum_{m=-N/2+|n|}^{N/2-|n|} x(n+m)x^*(n-m) \exp(-j \sum_{l=1}^{L_2} \omega_l (\Delta m)^{2l-1}), \quad (3.57)$$

gdje je $\omega_{L_1} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L_1}]$, $\omega_{L_2} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L_2}]$, $L_1 = \lfloor P/2 \rfloor$ and $L_2 = \lceil P/2 \rceil$. HO-CPF i HO-WD dostižu maksimume u tačkama čije koordinate odgovaraju parnim i neparnim izvodima faze signala $x(n)$:

$$\begin{aligned} \left[\phi^{(2)}(n), \frac{2\phi^{(4)}(n)}{4!}, \dots, \frac{2\phi^{(2L_1)}(n)}{(2L_1)!} \right] &= \arg \max_{\omega_{L_1}} |\text{HOCPF}_s(n, \omega_{L_1})|^2, \\ \left[2\phi^{(1)}(n), \frac{2\phi^{(3)}(n)}{3!}, \dots, \frac{2\phi^{(2L_2-1)}(n)}{(2L_2-1)!} \right] &= \arg \max_{\omega_{L_2}} |\text{HOWD}_s(n, \omega_{L_2})|^2, \end{aligned} \quad (3.58)$$

respektivno, pa pretragom za pozicijama maksimuma ovih funkcija, računatih u dva trenutka, u stanju smo estimirati parametre PPS-a.

HO-CPF i HO-WD predstavljaju kompromis između ML-a i tehnika baziranih na PD-u. Sa samo jednom auto-korelacijom signala smanjila se dimenzija pretrage sa P

a_P		
P	HO-WD	HO-CPF
4	$\frac{32506.26 \left(1 + \frac{0.86}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^9 \Delta^8}$	$\frac{22050 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^9 \Delta^8}$
5	$\frac{349272 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{11} \Delta^{10}}$	$\frac{5.202 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{0.8}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{11} \Delta^{10}}$
6	$\frac{8.301 \cdot 10^6 \left(1 + \frac{0.81}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{13} \Delta^{12}}$	$\frac{5549544 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{13} \Delta^{12}}$
a_{P-1}		
P	HO-WD	HO-CPF
4	$\frac{1400 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^7 \Delta^6}$	$\frac{30072.36 \left(1 + \frac{0.61}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^7 \Delta^6}$
5	$\frac{7.624 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{0.65}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^9 \Delta^8}$	$\frac{22050 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^9 \Delta^8}$
6	$\frac{349272 \left(1 + \frac{1}{2\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{11} \Delta^{10}}$	$\frac{1.772 \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0.67}{\text{SNR}}\right)}{\text{SNR} N^{11} \Delta^{10}}$

Tabela 3.7: MSE-i dva najviša parametra PPS-a dobijeni pomoću HO-CPF-a i HO-WD-a.

na približno $P/2$, što je otvorilo primjenu na PPS do sedmog reda. Zbog nelinearnosti drugoga reda, ovi estimatori su mnogo otporniji na šum, jer auto-korelacija generiše samo tri šumna člana. Primjetimo da su jedino koeficijenti $\{a_1, a_0, A\}$ kod HO-CPF-a i $\{a_0, A\}$ kod HO-WD-a podložni uticaju propagacije greške. Kako je broj PD-a nezavisan od reda signala, HO-CPF i HO-WD imaju konstantan prag i on iznosi oko 0 dB.

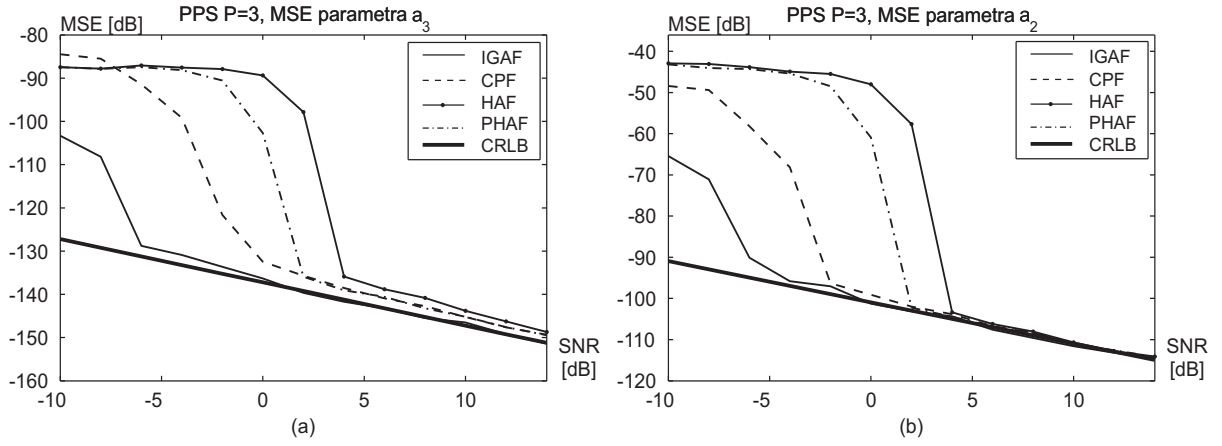
MSE-i dva najviša parametra, za različito P , dati su u Tabeli 3.7. Parametri, estimirani pomoću opisanih tehnika, su bezbiasni, pa se mogu porediti sa CRLB-ovima. Iz Tabele 3.7 možemo primjetiti da su HO-CPF i HO-WD asimptotski optimalne tehnike za pojedine koeficijente, dok za neke nisu. O uzrocima takvog ponašanja posmatranih estimatora diskutovaćemo u narednom poglavlju, u kome ćemo i predložiti proceduru za efikasno uklanjanje ovih nedostataka.

3.7 Numerički primjeri

U ovoj sekciji ćemo numeričkim putem, na konkretnim primjerima, ispitati performanse estimacionih procedura uvedenih u ovom poglavlju.

Primjer 1. U ovom primjeru, izvršili smo međusobno poređenje IGAF-a, CPF-a, HAF-a i PHAF-a na monokomponentnom PPS-u trećega reda:

$$x(n) = \exp \left(j(n\Delta - 4.1 \cdot 10^{-4}(n\Delta)^2 + 8.2 \cdot 10^{-6}(n\Delta)^3) \right) + \nu(n). \quad (3.59)$$



Slika 3.5: MSE-i dva najviša parametara faze PPS-a trećega reda estimiranih pomoću IGAF-a, CPF-a, HAF-a, PHAF-a i odgovarajući CRLB-ovi: (a) MSE-i parametra a_3 ; (b) MSE-i parametra a_2 .

Ukupan broj odbiraka je $N + 1 = 257$ i signal je odabran sa periodom $\Delta = 1$. SNR je posmatran u opsegu od -10 dB do 14 dB sa korakom od 2 dB. Parametri kod CPF-a i HAF-a birani su prema uputstvima iz Sekcija 3.2 i 3.5, dok smo za računanje PHAF-a koristili ukupno pet različitih skupova parametara pomjeraja. MSE-i dva najviša koeficijenta polinoma faze, dobijeni pomoću Monte Carlo simulacija, sa ukupno 100 iteracija, prikazani su na Slici 3.5.

Kao što je i za očekivati, najbolji rezultati postignuti su pomoću IGAF estimatora. Prag SNR-a ovog estimatora je na -6 dB i za veće vrijednosti SNR-a, MSE-i oba parametara faze dostižu CRLB-e. Druga po redu po performansama je CPF, čiji pragovi SNR-a su za a_3 i a_2 na oko 0 dB i -2 dB, respektivno. MSE parametra a_3 estimiranog pomoću CPF-a je oko 2 dB iznad CRLB-a, dok za parametar a_2 isti se nalazi na CRLB-u. Za veći SNR, PHAF ima gotovo identične performanse kao i CPF, međutim, njegov prag SNR-a je na oko 2 dB. Sa pragom na 4 dB i MSE-om koji je za a_3 iznad CRLB-a za oko 4.5 dB, HAF je najlošiji estimator.

Iako ima najbolje performanse, upotreba IGAF-a, u ovom slučaju, je prihvatljiva jedino u slučaju kada je SNR ispod 0 dB. Za sve ostale SNR-ove, najefikasnija je CPF, jer, pored nižeg praga, ista ima manju računsku kompleksnost.

Primjer 2. U želji da demonstriramo prednosti i nedostatke HAF-a, PHAF-a, HO-CPF-a i HO-WD-a u estimaciji monokomponentnog PPS-a višega reda, posmatrali smo sledeća

dva signala:

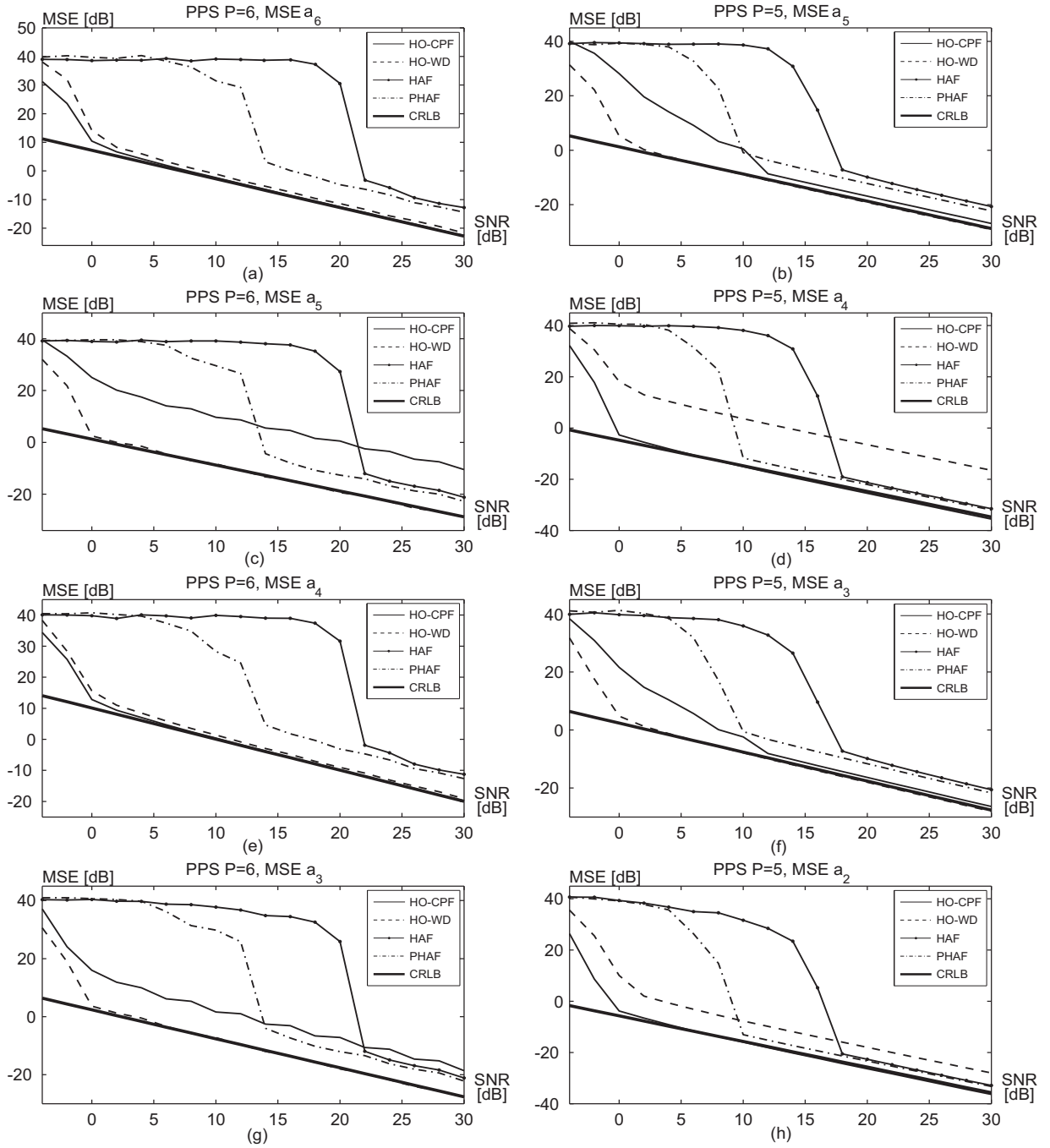
$$x_l(n) = \exp \left(j \sum_{i=1}^{P_k} a_i (\Delta n)^i \right) + \nu(n), \quad l = 1, 2, \quad (3.60)$$

gdje a_i predstavlja element vektora $\mathbf{B} = [12\pi, 6\pi, 14\pi, 19\pi, 11\pi, 4\pi]$ na i -toj poziciji i $P_1 = 5, P_2 = 6, \Delta = 2/257, N = 128$. SNR je razmatran na intervalu od -4 dB do 30 dB u koracima od 2 dB. Da bi odredili MSE pomenutih estimatora, koristili smo Monte Carlo simulacije sa ukupno 200 iteracija. Dobijeni rezultati za četiri najviša parametra faze su prikazani na Slici 3.6. Grafici u prvoj koloni slike odgovaraju signalu $x_2(n)$, dok oni u drugoj koloni odgovaraju signalu $x_1(n)$.

Sa slike se da uočiti da HAF i PHAF imaju značajno lošije performanse u odnosu na HO-CPF i HO-WD. Naime, zbog visoke vrijednosti praga SNR-a (18 dB za signal $x_1(n)$ i 22 dB za signal $x_2(n)$) HAF se izdvaja kao tehnika čije funkcionisanje je moguće jedino za više vrijednosti SNR-a. Prag SNR-a PHAF-a je za oko 8 dB manji u odnosu na odgovarajući prag HAF-a, dok HO-CPF i HO-WD imaju pragove koji su nezavisni od reda signala i iznose 0 dB za većinu koeficijenata. MSE HAF-a i PHAF-a u područjima gdje te tehnike daju zadovoljavajuće rezultate je za oko 6 dB veći u odnosu na odgovarajući CRLB.

MSE-i parnih i neparnih parametara određenih pomoću HO-CPF-a i HO-WD-a, respektivno, se nalaze na odgovarajućim CRLB-ovima, dok, u zavisnosti da li je red signala paran ili ne, MSE-i neparnih (HO-CPF)/parnih (HO-WD) parametara se ponašaju različito. Za neparno P , MSE-i HO-CPF parametara a_5 i a_3 su dosta blizu CRLB-ova, ali njihovi pragovi SNR-a su na 12 dB. Za parno P , evidentan je veliki MSE HO-CPF parametara a_5 i a_3 . Slična situacija je i sa HO-WD-om. Za neparno P , parni parametri estimirani ovom procedurom imaju MSE koji premašuje MSE HAF-a i PHAF-a, dok je, za parno P , MSE dosta blizu CRLB-a.

Iz ovoga primjera izvodi se zaključak da je, u slučaju neparnog P , bolje koristiti HO-CPF, a, u slučaju parnog P , HO-WD. O načinima za poboljšanje performansi ovih procedura biće riječi u narednom poglavlju.



Slika 3.6: MSE-i četiri najviša parametra faze PPS-a šestog i petog reda dobijeni pomoću HO-CPF-a, HO-WD-a, HAF-a i PHAF-a: (a), (c), (e) i (g) - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; (b), (d), (f) i (h) - MSE-i parametara signala $x_1(n)$.

Poglavlje 4

Nove tehnike za estimaciju 1D PPS-a

U ovom poglavlju, prezentovaćemo tehnike koje predstavljaju jedne od glavnih doprinosa ove teze u estimaciji parametara PPS-a. Tehnike su bazirane na modifikaciji estimatora PPS-a opisanih u prethodnom poglavlju. Sciljem poboljšanja performansi ovih estimatora, definisaćemo estimacione tehnike koje u svojoj proceduri implementiraju manji broj PD-a i koje nastoje da očuvaju što je moguće duži signal nakon PD-a. Takođe, raspravljaćemo i o načinu kako nelinearno odabiranje signala može pomoći u poboljšanju performansi CPF-a.

4.1 Hibridni CPF-HAF estimator

Ključni uticaj na tačnost estimatora ima njegov stepen nelinearnosti. Što je ova veličina veća, estimacija je podložnija greškama i obratno. Te greške se ogledaju kako u visokom pragu SNR-a, tako i u povećanoj vrijednosti MSE-a. Zbog velikog stepena nelinearnosti za signale većega reda, koji raste sa porastom P , HAF ima visok prag SNR-a i ograničen je na PPS-e nižega reda. U prethodnom poglavlju vidjeli smo da postoje dva načina za poboljšanje performansi HAF estimatora: smanjenje broja PD-a i modifikacija auto-korelacione funkcije preko koje je realizovan PD. Oba načina rezultuju u smanjenju stepena nelinearnosti estimatorske funkcije. Hibridni CPF-HAF (HCPF-HAF) [25], [26], nastao kao rezultat istraživanja prilikom izrade doktorske teze, kako bi poboljšao performanse, a zadržao sličnu računsku kompleksnost, koristi oba pristupa. HCPF-HAF predstavlja generalizaciju CPF-a za signale višega reda ($P \geq 3$).

HCPF-HAF pomoću PD operatora transformiše $x(n)$ ($P \geq 3$) u PPS trećeg reda koji

se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \text{PD}^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] &= A^{2^{P-3}} \exp\{jC_3 a_P(n\Delta)^3 + jC_2 a_{P-1}(n\Delta)^2 \\ &+ j(C'_1 a_{P-2} + C''_1 a_P)(n\Delta) + j(C'_0 a_{P-3} + C''_0 a_{P-1})\} + \nu_x(n), \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} C_3 &= 2^{P-4} \frac{P! \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta)}{3}, \\ C_2 &= 2^{P-4} (P-1)! \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta), \\ C'_1 &= 2^{P-3} (P-2)! \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta), \\ C''_1 &= 2^{P-4} \frac{P!}{3} \left[\sum_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta)^2 \right] \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta), \\ C'_0 &= 2^{P-3} (P-3)! \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta), \\ C''_0 &= 2^{P-4} \frac{(P-1)!}{3} \left[\sum_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta)^2 \right] \Pi_{i=1}^{P-3}(\tau_i \Delta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

i $\nu_x(n)$ je suma svih članova u kojima se šum pojavljuje jednom ili više puta. Na primjer, za $P = 4$, $\nu_x(n) = s(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)s^*(n - \tau_1) + \nu(n + \tau_1)\nu^*(n - \tau_1)$. Kako su dva najviša parametra u fazi (4.1) direktno proporcionalna najvišim parametrima faze signala $x(n)$, a_P i a_{P-1} mogu se estimirati pomoću CPF-a, računatog u dvije tačke, $n = 0$ i $n = n_1$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{P-1} &= \hat{\Omega}_0 / (2C_2), \\ \hat{a}_P &= (\hat{\Omega}_{n_1} - \hat{\Omega}_0) / (6n_1 \Delta C_3), \\ \hat{\Omega}_0 &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(0, \Omega)|^2, \\ \hat{\Omega}_{n_1} &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_x(n_1, \Omega)|^2, \\ \text{CPF}_x(0, \Omega) &= \sum_k \text{PD}^{P-3}[k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \\ &\times \text{PD}^{P-3}[-k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta)^2), \\ \text{CPF}_x(n_1, \Omega) &= \sum_k \text{PD}^{P-3}[n_1 + k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \\ &\times \text{PD}^{P-3}[n_1 - k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta)^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Parametri nižega reda se mogu odrediti na dva načina. Prvi je da estimiramo sve parametre $\text{PD}^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}]$ i iz njih odredimo a_{P-2} i a_{P-3} . Drugi način je da uklonimo \hat{a}_P i \hat{a}_{P-1} iz faze signala $x(n)$ i ponovimo proceduru. Naša istraživanja su pokazala da je, sa stanovišta tačnosti, drugi pristup bolji i zbog toga će on biti uzet u obzir u nastavku. Algoritam, koji ilustruje HCPF-HAF proceduru, je prikazan u Tabeli 4.1.

Postaviti $x_p(n) = x(n)$ i $p = P$.

while $p > 2$

Estimirati koeficijente a_p i a_{p-1} pomoću HCPF-HAF-a

$$\begin{aligned}\hat{a}_{p-1} &= \hat{\Omega}_0 / (2C_2), \\ \hat{a}_p &= (\hat{\Omega}_{n_1} - \hat{\Omega}_0) / (6n_1\Delta C_3), \\ \hat{\Omega}_0 &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_{x_p}(0, \Omega)|^2, \\ \hat{\Omega}_{n_1} &= \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_{x_p}(n_1, \Omega)|^2, \\ \text{CPF}_{x_p}(0, \Omega) &= \sum_k \text{PD}^{P-3}[k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \\ &\times \text{PD}^{P-3}[-k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta)^2), \\ \text{CPF}_{x_p}(n_1, \Omega) &= \sum_k \text{PD}^{P-3}[n_1 + k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \\ &\times \text{PD}^{P-3}[n_1 - k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta)^2).\end{aligned}$$

Ukloniti estimirane koeficijente iz faze signala

$$x_{p-2}(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_p(n\Delta)^p - j\hat{a}_{p-1}(n\Delta)^{p-1}).$$

Postaviti $p = p - 2$.

end while

if $p = 2$

Estimirati a_2

$$\hat{a}_2 = 0.5 \arg \max_{\omega} \left| \text{HAF}_{x_p}^1(\omega) \right|^2.$$

Ukloniti estimirani koeficijent iz faze signala

$$x_1(n) = x_p(n) \exp(-j\hat{a}_2(n\Delta)^2).$$

end if

Estimirati a_1

$$\hat{a}_1 = \arg \max_{\omega} \left| \text{HAF}_{x_1}^0(\omega) \right|^2.$$

Ukloniti estimirani koeficijent iz faze signala

$$x_0(n) = x_1(n) \exp(-j\hat{a}_1(n\Delta)).$$

Estimirati a_0 i A

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= \angle \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right), \\ \hat{A} &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_0(n) \right|.\end{aligned}$$

Tabela 4.1: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a pomoću HCPF-HAF-a.

Svođenjem PPS-a P -tog reda na PPS trećega reda i estimacijom tako dobijenog signala CPF-om, stepen nelinearnosti HCPF-HAF-a je manji za dva u odnosu na HAF proceduru,

čime se značajno smanjio broj kros-članova i članova uzrokovanih šumom. Razlika između broja interferirajućih članova HCPF-HAF-a i HAF-a drastično raste sa porastom reda signala. Za signal P -tog reda ($P > 1$), HAF sadrži $2^{2^{P-1}} - 1$ interferirajućih članova, dok je taj broj kod HCPF-HAF-a $2^{2^{P-2}} - 1$. Ovo znači da, recimo, kada je $P = 5$, HCPF-HAF ima 65278 interferirajućih članova manje od HAF-a. Pored toga, kako HCPF-HAF koristi $(P - 3)$ PD-a, rezultujući signal nakon faznog diferenciranja je duži, pa je i uticaj šuma na tačnost estimacije manji. Sa HCPF-HAF-om smo smanjili i uticaj propagacije greške, budući da istovremeno određujemo po dva parametra faze signala, pa tek onda vršimo dechirpovanje.

4.1.1 Računska složenost HCPF-HAF-a

Da bi se estimirala dva najviša parametra u fazi signala $x(n)$, potrebno je izvršiti približno $6(P - 3)(N + 1) + 16MN$ realnih sabiranja i $8(P - 3)(N + 1) + 32MN$ realnih množenja, gdje je M broj tačaka na Ω osi. To znači da je složenost prvog koraka HCPF-HAF-a reda $O(MN)$ operacija. Pod pretpostavkom da estimacije parametra a_1 , za parno P i $\{a_1, a_2\}$, za neparno P , imaju istu složenost kao računanje CPF-a u jednoj i dvije tačke, respektivno, ukupna složenost HCPF-HAF-a je $O(PNM)$ operacija. Ova složenost je nešto veća u odnosu na složenost HAF-a, ali, primjetimo, da se ista može smanjiti upotrebom tehnika za razbijanje CPF-a na blokove. Iz razloga male računske kompleksnosti, u ovoj analizi složenosti, zanemarili smo broj operacija potrebnih za dechirpovanje signala, kao i za određivanje inicijalne faze i amplitude. Relativno mala složenost omogućava upotrebu HCPF-HAF-a u scenarijima koji zahtijevaju estimaciju parametara PPS-a u realnom vremenu.

4.1.2 MSE HCPF-HAF estimatora

MSE parametara a_P i a_{P-1} se mogu odrediti analizom sličnoj onoj koja je sprovedena u Sekciji 3.2.2. Da bi odredili ove izraze, neophodno je prethodno odrediti MSE parametra Ω .

MSE parametra Ω

I ovdje se, kao i u Sekciji 3.2.2, može pretpostaviti scenario velikog SNR-a. Pod tom pretpostavkom, svi članovi u $PD^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}]$ koji sadrže više od jedan šumni član

se mogu zanemariti, tj.

$$\text{PD}^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \simeq \prod_{k=1}^{2^{P-3}} s_{b(k-1)}(n) + \sum_{i=1}^{2^{P-3}} \nu_{b(i-1)}(n) \prod_{k=1, k \neq i}^{2^{P-3}} s_{b(k-1)}(n), \quad (4.4)$$

gdje je sada

$$\begin{aligned} \nu_{b(i)}(n) &= \nu^{(\sum_{k=0}^{P-4} C_k^{b(i)})} \left(n + \sum_{k=0}^{P-4} (-1)^{C_k^{b(i)}} \tau_{k+1} \right), \\ s_{b(i)}(n) &= s^{(\sum_{k=0}^{P-4} C_k^{b(i)})} \left(n + \sum_{k=0}^{P-4} (-1)^{C_k^{b(i)}} \tau_{k+1} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Parametri $C_k^{b(i)}$, $s^{(i)}(n)$ i $\nu^{(i)}(n)$ imaju isto značenje kao i kod HAF-a (vidi relaciju (3.15)).

Kako HCPF-HAF u posljednjem koraku računa auto-korelaciju (4.4), tj. $\text{PD}^{P-3}[n + m; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \text{PD}^{P-3}[n - m; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}]$, neophodno je odrediti oblik signala nakon ove auto-korelacije. Zbog uvedene pretpostavke o velikom SNR-u, i ovdje možemo zanemariti sabirke u kojima se šum pojavljuje više od jednom. Na osnovu ovoga, iz (4.4) slijedi

$$\begin{aligned} &\text{PD}^{P-3}[n + m; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \text{PD}^{P-3}[n - m; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \\ &\simeq \prod_{k=1}^{2^{P-3}} s_{b(k-1)}(n + m) s_{b(k-1)}(n - m) \\ &\times \left(1 + \sum_{i=1}^{2^{P-3}} \frac{(\nu_{b(i-1)}(n - m) s_{b(i-1)}(n + m) + \nu_{b(i-1)}(n + m) s_{b(i-1)}(n - m))}{s_{b(i-1)}(n + m) s_{b(i-1)}(n - m)} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

U odsustvu šuma $x(n) = s(n)$, pa je HCPF-HAF idealno skoncentrisan oko drugog izvoda faze signala $\text{PD}^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}]$. Vrijednosti HCPF-HAF-a su, u ovom slučaju, determinističke i mogu se izraziti relacijom:

$$g_N(\Omega) = \text{CPF}_s(n_1, \Omega) = A^{2^{P-2}} \exp(j\beta_0) \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \exp(j(\Omega_0 - \Omega)(\Delta p)^2), \quad (4.7)$$

gdje je β_0 parametar koji je nezavisan od Δ i p , i

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 6C_3 a_P n_1 \Delta + 2C_2 a_{P-1}, \\ N_1 &= N/2 - \sum_{i=1}^{P-3} \tau_i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Šum $\nu(n)$ uzrokuje perturbacije u spektru CPF-a koje se predstavljaju preko razlike CPF-ova računatih za signal u prisustvu i odsustvu šuma:

$$\begin{aligned} \delta g_N(\Omega) &= \text{CPF}_x(n_1, \Omega) - \text{CPF}_s(n_1, \Omega) \\ &\simeq A^{2^{P-2}} \exp(j\beta_0) \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \eta_{n_1}(p) \exp(-j(\Omega - \Omega_0)(\Delta p)^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdje je

$$\eta_{m_1}(p) = \sum_{i=1}^{2^{P-3}} \frac{\nu_{b(i-1)}(n_1 - p) s_{b(i-1)}(n_1 + p) + \nu_{b(i-1)}(n_1 + p) s_{b(i-1)}(n_1 - p)}{s_{b(i-1)}(n_1 + p) s_{b(i-1)}(n_1 - p)} \quad (4.10)$$

član koji potiče od šuma. Te perturbacije utiču da $\hat{\Omega}$ bude pomjeren u odnosu na tačnu vrijednost Ω_0 . Greška $\delta\hat{\Omega} = \Omega_0 - \hat{\Omega}$ uzrokovana šumom, može se predstaviti preko relacija izvedenih u [3] i [6]

$$\delta\hat{\Omega} \approx - \left[\frac{\partial^2 f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega^2} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \delta f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} \right], \quad (4.11)$$

gdje je

$$f_N(\Omega) = g_N(\Omega) g_N^*(\Omega), \quad (4.12)$$

$$\delta f_N(\Omega) \approx g_N(\Omega) \delta g_N^*(\Omega) + g_N^*(\Omega) \delta g_N(\Omega) = 2 \operatorname{Re}\{g_N(\Omega) \delta g_N^*(\Omega)\}. \quad (4.13)$$

Iz gornjih izraza primjećujemo da određivanje $\delta\hat{\Omega}$ zahtijeva računanje izvoda funkcija $f_N(\Omega)$ i $\delta f_N(\Omega)$ u tački Ω_0 . Primjenom osobine izvoda proizvoda dvije funkcije, iz (4.12) i (4.13), slijedi

$$\frac{\partial^2 f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega^2} = 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\Omega_0) \frac{\partial^2 g_N^*(\Omega_0)}{\partial \Omega^2} + \frac{\partial g_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} \frac{\partial g_N^*(\Omega_0)}{\partial \Omega} \right\}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \delta f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} \approx 2 \operatorname{Re} \left\{ g_N(\Omega_0) \frac{\partial \delta g_N^*(\Omega_0)}{\partial \Omega} + \frac{\partial g_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} \delta g_N^*(\Omega_0) \right\}. \quad (4.15)$$

Pod pretpostavkom da su $g_N(\Omega)$ i $\delta g_N(\Omega)$ diferencijabilne funkcije i da se računanje sume oblika $\sum_{n=a}^b n^k$ može aproksimirati računanjem integrala $\int_a^b x^k dx$, možemo odrediti članove iz izraza (4.14) i (4.15)

$$\begin{aligned} g_N(\Omega_0) &\simeq 2A^{2^{P-2}} \exp(j\beta_0)(N_1 - |n_1|), \\ \frac{\partial g_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} &\simeq -2jA^{2^{P-2}} \Delta^2 \exp(j\beta_0) \frac{(N_1 - |n_1|)^3}{3}, \\ \frac{\partial^2 g_N(\Omega_0)}{\partial \Omega^2} &\simeq -2A^{2^{P-2}} \Delta^4 \exp(j\beta_0) \frac{(N_1 - |n_1|)^5}{5}, \\ \delta g_N(\Omega_0) &\simeq A^{2^{P-2}} \exp(j\beta_0) \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \eta_{m_1}(p), \\ \frac{\partial \delta g_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} &\simeq -jA^{2^{P-2}} \Delta^2 \exp(j\beta_0) \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} p^2 \eta_{m_1}(p). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u (4.14) i (4.15), nepoznati izvodi poprimaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial^2 f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega^2} \simeq -\frac{32A^{2^{P-1}} \Delta^4 (N_1 - |n_1|)^6}{45}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \delta f_N(\Omega_0)}{\partial \Omega} \approx 4A^{2^{P-1}} \Delta^2 (N_1 - |n_1|) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \eta_{n_1}^*(p) \right\}, \quad (4.18)$$

čijom zamjenom u (4.11) dobijamo

$$\delta \hat{\Omega} \approx - \frac{45 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \eta_{n_1}^*(p) \right\}}{8 \Delta^2 (N_1 - |n_1|)^5}. \quad (4.19)$$

Kako je srednja vrijednost šuma jednaka nuli, $E\{\eta_{n_1}^*(p)\}=0$, HCPF-HAF je bezbiasan estimator Ω , tj.

$$E\{\delta \hat{\Omega}\} \approx 0.$$

Pošto se parametri dva najviša reda faze PPS-a računaju na osnovu estimacije Ω , zaključujemo da su i estimacije \hat{a}_P i \hat{a}_{P-1} takođe bezbiasne, što nam, kao i kod HAF-a, omogućava direktno poređenje MSE-a estimiranih koeficijenata sa odgovarajućim CRLB-ovima.

MSE $\hat{\Omega}$ predstavlja matematičko očekivanje kvadrata greške $\delta \hat{\Omega}$, tj.

$$E\{(\delta \hat{\Omega})^2\} \approx \frac{2025}{64 \Delta^4 (N_1 - |n_1|)^{10}} \times E \left\{ \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \eta_{n_1}^*(p) \right\} \right. \quad (4.20)$$

$$\left. \times \operatorname{Im} \left\{ \sum_{q=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(q^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \eta_{n_1}^*(q) \right\} \right\}. \quad (4.21)$$

Korišćenjem identiteta $E\{\operatorname{Im}\{X\} \operatorname{Im}\{Y\}\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{E\{XY^*\} - E\{XY\}\}$, gornji izraz se može svesti na:

$$E\{(\delta \hat{\Omega})^2\} \approx \frac{2025}{128 \Delta^4 (N_1 - |n_1|)^{10}} \times \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \sum_{q=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \left(q^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \right. \\ \left. \times [E\{\eta_{n_1}^*(p) \eta_{n_1}(q)\} - E\{\eta_{n_1}^*(p) \eta_{n_1}^*(q)\}] \right\}. \quad (4.22)$$

Da bismo odredili MSE greške $\delta \hat{\Omega}$, neophodno je odrediti matematička očekivanja $E\{\eta_{n_1}^*(p) \eta_{n_1}(q)\}$ i $E\{\eta_{n_1}^*(p) \eta_{n_1}^*(q)\}$. Ako bismo za parametre pomjeraja usvojili neke proizvoljne vrijednosti, ova očekivanja bi bilo vrlo teško, ili čak nemoguće, izračunati. Zbog toga ćemo nadalje pretpostaviti $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{P-3}$. Pod tom pretpostavkom,

nenultu vrijednost imaće samo oni članovi proizvoda $\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}(q)$ i $\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}^*(q)$ u kojima se javlja jedan konjugovani i jedan nekonjugovani šumni član. Može se pokazati da važi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}(q)\} &= \frac{2\sigma^2}{A^2} \binom{2P-6}{P-3} [\delta(p-q) + \delta(p+q)] \\ &+ \frac{2\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} [\delta(p-q+(4i-4)\tau) + \delta(p-q-(4i-4)\tau) \\ &+ \delta(p+q+(4i-4)\tau) + \delta(p+q-(4i-4)\tau)], \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}^*(q)\} &= \frac{2\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} [\delta(p+q+(4i-2)\tau) \\ &+ \delta(p+q-(4i-2)\tau) + \delta(p-q+(4i-2)\tau) + \delta(p-q-(4i-2)\tau)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Koristeći relacije (4.23) i (4.24), imamo

$$\begin{aligned} &\sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \sum_{q=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(q^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \mathbb{E}\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}(q)\} \\ &= 4 \frac{\sigma^2}{A^2} \binom{2P-6}{P-3} \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right)^2 \\ &+ 4 \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} \sum_{p=\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-4)\tau\}}^{\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-4)\tau\}} \\ &\times \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left((p+(4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \\ &+ 4 \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} \sum_{p=\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-4)\tau\}}^{\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-4)\tau\}} \\ &\times \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left((p-(4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

i

$$\begin{aligned} &\sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \sum_{q=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(q^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \mathbb{E}\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_{n_1}^*(q)\} \\ &= 4 \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} \sum_{p=\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-2)\tau\}}^{\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-2)\tau\}} \\ &\times \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left((p+(4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \\ &+ 4 \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} \sum_{p=\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-2)\tau\}}^{\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-2)\tau\}} \\ &\times \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left((p-(4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

što, kada se uvrsti u (4.22), daje konačan izraz za $E\{(\delta\hat{\Omega})^2\}$:

$$E\{(\delta\hat{\Omega})^2\} \approx \frac{2025\sigma^2(\Gamma_1(n_1) - \Gamma_2(n_1))}{32A^2\Delta^4(N_1 - |n_1|)^{10}}, \quad (4.27)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(n_1) = & \binom{2P-6}{P-3} \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right)^2 \\ & + \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} \left[\sum_{p=\max\{-N_1+|n_1|, -N_1+|n_1|-(4i-4)\tau\}}^{\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-4)\tau\}} \right. \\ & \times \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \left((p + (4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \\ & + \sum_{p=\min\{N_1-|n_1|, N_1-|n_1|+(4i-4)\tau\}}^{\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-4)\tau\}} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \\ & \left. \times \left((p - (4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(n_1) = & \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} \left[\sum_{p=\max\{-N_1+|n_1|, -N_1+|n_1|-(4i-2)\tau\}}^{\max\{-N_1+|n_1|, N_1-|n_1|-(4i-2)\tau\}} \right. \\ & \times \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \left((p + (4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \\ & + \sum_{p=\min\{N_1-|n_1|, N_1-|n_1|+(4i-2)\tau\}}^{\min\{N_1-|n_1|, -N_1+|n_1|+(4i-2)\tau\}} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \\ & \left. \times \left((p - (4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Iz dobijenog izraza primjećujemo da $E\{(\delta\hat{\Omega})^2\}$ ne zavisi od parametara faze PPS-a, već samo od SNR-a, broja odbiraka i periode odabiranja. U nastavku ćemo izvesti izraze za MSE parametara \hat{a}_{P-1} i \hat{a}_P .

MSE \hat{a}_{P-1}

MSE parametra \hat{a}_{P-1} možemo odrediti na osnovu veze a_{P-1} i $\Omega(0) = \Omega|_{n_1=0}$,

$$a_{P-1} = \frac{\Omega(0)}{(P-1)!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-3}}. \quad (4.30)$$

Greška koja se pravi pri estimaciji a_{P-1} proporcionalna je grešci estimacije Ω u $n = 0$:

$$\delta\hat{a}_{P-1} = \hat{a}_{P-1} - a_{P-1} = \frac{\hat{\Omega}(0) - \Omega(0)}{(P-1)!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-3}}.$$

Stoga, MSE \hat{a}_{P-1} je

$$\begin{aligned} E\{(\delta\hat{a}_{P-1})^2\} &= \frac{E\{(\delta\hat{\Omega}(0))^2\}}{[(P-1)!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-3}]^2} \\ &\approx \frac{2025\sigma^2(\Gamma_1(0) - \Gamma_2(0))}{A^22^{2P-1}\tau^{2P-6}\Delta^{2P-2}N_1^{10}((P-1)!)^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

MSE \hat{a}_P

Parametar a_P se može dobiti iz $\Omega(n_1)$ i $\Omega(0)$ pomoću sledeće relacije

$$a_P = \frac{\Omega(n_1) - \Omega(0)}{P!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-2}n_1}, \quad (4.32)$$

pa je greška pri estimaciji ovoga parametra jednaka

$$\delta\hat{a}_P = \frac{\delta\hat{\Omega}(n_1) - \delta\hat{\Omega}(0)}{P!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-2}n_1}.$$

Na osnovu gornje relacije, MSE \hat{a}_P je

$$E\{(\delta\hat{a}_P)^2\} = \frac{E\{(\delta\hat{\Omega}(n_1))^2\} + E\{(\delta\hat{\Omega}(0))^2\} - 2E\{\delta\hat{\Omega}(n_1)\delta\hat{\Omega}(0)\}}{[P!2^{P-3}\tau^{P-3}\Delta^{P-2}n_1]^2}. \quad (4.33)$$

Da bi se odredilo $E\{(\delta\hat{a}_P)^2\}$, potrebno je odrediti $E\{\delta\hat{\Omega}(n_1)\delta\hat{\Omega}(0)\}$. Uvođenjem notacije

$$\delta\hat{\Omega}(n_1) \approx -\frac{45 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \left(p^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \eta_{n_1}^*(p) \right\}}{8\Delta^2(N_1 - |n_1|)^5}, \quad (4.34)$$

očekivanje $E\{\delta\hat{\Omega}(n_1)\delta\hat{\Omega}(0)\}$ postaje

$$\begin{aligned} & E\{\delta\hat{\Omega}(n_1)\delta\hat{\Omega}(0)\} \approx \\ & \approx \frac{2025}{128\Delta^4 N_1^5 (N_1 - |n_1|)^5} \sum_{p=-N_1+|n_1|}^{N_1-|n_1|} \sum_{q=-N_1}^{N_1} \left(p^2 - \frac{(N_1 - |n_1|)^2}{3} \right) \left(q^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \\ & \quad \times \{E\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_0(q)\} - E\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_0^*(q)\}\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Uzimajući u obzir samo članove iz proizvoda $\eta_{n_1}^*(p)\eta_0(q)$ i $\eta_{n_1}^*(p)\eta_0^*(q)$ koji sadrže proizvod oblika $\nu(\cdot)\nu^*(\cdot)$ (ostali članovi su jednaki nuli), prvo očekivanje iz poslednje linije relacije (4.35) iznosi

$$\begin{aligned} & E\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_0(q)\} = \\ & = \frac{\sigma^2}{A^2} \binom{2P-6}{P-3} [\delta(-p+q+n_1) + \delta(-p-q+n_1) + \delta(p-q+n_1) + \delta(p+q+n_1)] \\ & + \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} [\delta(-p+q+n_1+(4i-4)\tau) + \delta(-p+q+n_1-(4i-4)\tau) \\ & + \delta(-p-q+n_1+(4i-4)\tau) + \delta(-p-q+n_1-(4i-4)\tau) + \delta(p-q+n_1+(4i-4)\tau) \\ & + \delta(p-q+n_1-(4i-4)\tau) + \delta(p+q+n_1+(4i-4)\tau) + \delta(p+q+n_1-(4i-4)\tau)], \end{aligned} \quad (4.36)$$

dok je drugo

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\eta_{n_1}^*(p)\eta_0^*(q)\} = \\
& = \frac{\sigma^2}{A^2} \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} [\delta(n_1-p+q+(4i-2)\tau) + \delta(n_1-p+q-(4i-2)\tau) \\
& + \delta(n_1+p+q+(4i-2)\tau) + \delta(n_1+p+q-(4i-2)\tau) + \delta(n_1+p-q+(4i-2)\tau) \\
& + \delta(n_1+p-q-(4i-2)\tau) + \delta(n_1-p-q+(4i-2)\tau) + \delta(n_1-p-q-(4i-2)\tau)].
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Zamjena (4.36) i (4.37) u (4.35) daje

$$\mathbb{E}\{\delta\hat{\Omega}(n_1)\delta\hat{\Omega}(0)\} \approx \frac{2025\sigma^2(\Gamma_3(n_1) - \Gamma_4(n_1))}{32A^2\Delta^4N_1^5(N_1 - |n_1|)^5}, \tag{4.38}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\Gamma_3(n_1) &= \binom{2P-6}{P-3} \sum_{p=-N_1+|n_1|-n_1}^{N_1-|n_1|-n_1} \left((p+n_1)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(p^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \\
&+ \sum_{i=2}^{\lceil \frac{P-2}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-5+2i} \left[\sum_{p=\max\{-N_1, -N_1+|n_1|-n_1-(4i-4)\tau\}}^{\max\{-N_1, N_1-|n_1|-n_1-(4i-4)\tau\}} \right. \\
&\quad \times \left((p+n_1+(4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(p^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \\
&+ \left. \sum_{k_1=\min\{N_1, -N_1+|n_1|-n_1+(4i-4)\tau\}}^{\min\{N_1, N_1-|n_1|-n_1+(4i-4)\tau\}} \left((p+n_1-(4i-4)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(p^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(n_1) &= \sum_{i=1}^{\lceil \frac{P-3}{2} \rceil} \binom{2P-6}{P-4+2i} \left[\sum_{k_1=\max\{-N_1, -N_1+|n_1|-n_1-(4i-2)\tau\}}^{\max\{-N_1, N_1-|n_1|-n_1-(4i-2)\tau\}} \right. \\
&\quad \times \left((p+n_1+(4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(p^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \\
&+ \left. \sum_{k_1=\min\{N_1, -N_1+|n_1|-n_1+(4i-2)\tau\}}^{\min\{N_1, N_1-|n_1|-n_1+(4i-2)\tau\}} \left((p+n_1-(4i-2)\tau)^2 - \frac{(N_1-|n_1|)^2}{3} \right) \left(p^2 - \frac{N_1^2}{3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Konačno, iz (3.38), (4.33) i (4.38), imamo

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{(\delta\hat{a}_P)^2\} \approx \frac{2025\sigma^2}{A^2(P!)^22^{2P-1}\tau^{2P-6}\Delta^{2P}n_1^2} \\
& \times \left[\frac{\Gamma_1(n_1) - \Gamma_2(n_1)}{(N_1 - |n_1|)^{10}} + \frac{\Gamma_1(0) - \Gamma_2(0)}{N_1^{10}} - \frac{2(\Gamma_3(n_1) - \Gamma_4(n_1))}{N_1^5(N_1 - |n_1|)^5} \right].
\end{aligned} \tag{4.41}$$

P	a_P		a_{P-1}	
	MSE	MSE/CRLB	MSE	MSE/CRLB
4	$\frac{41963.95}{\text{SNR}N^9\Delta^8}$	1.9031	$\frac{1651.34}{\text{SNR}N^7\Delta^6}$	1.1795
5	$\frac{10.16 \cdot 10^5}{\text{SNR}N^{11}\Delta^{10}}$	2.9089	$\frac{36048.93}{\text{SNR}N^9\Delta^8}$	1.6349
6	$\frac{2.4763 \cdot 10^7}{\text{SNR}N^{13}\Delta^{12}}$	4.4622	$\frac{8.5058 \cdot 10^5}{\text{SNR}N^{11}\Delta^{10}}$	2.4353
7	$\frac{6.6078 \cdot 10^8}{\text{SNR}N^{15}\Delta^{14}}$	7.4800	$\frac{2.1077 \cdot 10^7}{\text{SNR}N^{13}\Delta^{12}}$	3.7980
8	$\frac{1.8948 \cdot 10^{10}}{\text{SNR}N^{17}\Delta^{16}}$	13.4583	$\frac{5.4830 \cdot 10^8}{\text{SNR}N^{15}\Delta^{14}}$	6.2068
9	$\frac{5.2532 \cdot 10^{11}}{\text{SNR}N^{19}\Delta^{18}}$	23.3923	$\frac{1.5913 \cdot 10^{10}}{\text{SNR}N^{17}\Delta^{16}}$	11.3026
10	$\frac{1.3420 \cdot 10^{13}}{\text{SNR}N^{21}\Delta^{20}}$	37.4426	$\frac{4.7687 \cdot 10^{11}}{\text{SNR}N^{19}\Delta^{18}}$	21.2348

Tabela 4.2: MSE HCPF-HAF-a za različito P .

Određivanje optimalnog τ i n_1

Primjetimo da MSE zavisi od izbora parametara pomjeraja i vremenskog trenutka u kojem se računa CPF. τ i n_1 treba izabrati tako da očekivana kvadratna odstupanja (3.41) i (4.41) imaju minimalnu vrijednost. Kako se radi o dosta komplikovanim izrazima, optimalno τ , u oznaci τ^{opt} i optimalno n_1 , u oznaci n_1^{opt} , se ne mogu odrediti analitički. Stoga smo rješavanju ovog problema pristupili numeričkim putem. Za svako P iz intervala $[4, 10]$ i za različite dužine signala, određivali smo τ koje minimizuje $E\{(\delta\hat{a}_{P-1})^2\}$. Analiza je pokazala da, za veliko N , odnos $\frac{N}{\tau^{\text{opt}}}$ je približno konstantan. Kada se dobijeni rezultati aproksimiraju sa polinomom, dobija se sledeći izraz za τ^{opt} :

$$\tau^{\text{opt}} \approx \lceil (-0.006P + 0.107)N \rceil. \quad (4.42)$$

Zamjenom τ^{opt} u (4.41) i sprovođenjem slične procedure dobija se i n_1^{opt} :

$$n_1^{\text{opt}} \approx \lceil (0.0254 + 1.4474e^{-0.7305P})N \rceil. \quad (4.43)$$

Kako dobijeni rezultati nisu mogli biti aproksimirani polinomom malog reda, iskoristili smo aproksimaciju eksponencijalnom funkcijom.

Asimptotske vrijednosti MSE-a parametara a_P i a_{P-1} , izračunatih za τ^{opt} i n_1^{opt} , date su u Tabeli 4.2. Ako rezultate za a_P uporedimo sa rezultatima HAF-a, koji su prikazani u Tabeli 3.2, primjetićemo da HAF ima za oko 1.4 puta veći MSE u odnosu na HCPF-HAF. Ovo je direktna posledica većeg broja interferirajućih članova koje posjeduje HAF.

P	4	5	6	7
$N = 100$	9	12	17	21.5
$N = 300$	2.5	8	14.5	19.5
$N = 500$	2	7	13.5	19
$N = 700$	1	6.5	13	19

Tabela 4.3: Prag SNR-a HCPF-HAF-a za različito P i N .

SNR Prag HCPF-HAF-a

I ovdje, kao i kod analize HAF estimatora, zbog konstantnog $\text{ARE}\{\hat{a}_k, \sigma^2\}$, prag SNR-a ne može biti određen analitičkim putem. Stoga, s ciljem određivanja praga, vršili smo estimaciju parametara više signala sa različitim N i P . Preciznije, P smo mijenjali od 4 do 7, dok je N uzimalo vrijednosti od 100 do 1100 sa korakom od 200. Dobijene rezultate sumirali smo u Tabeli 4.3. Kako se, za $N > 700$, prag SNR-a ne mijenja, rezultati za $N = 700$ predstavljaju asimptotske vrijednosti. U poređenju sa HAF-om (vidi Tabelu 3.3), HCPF-HAF ima za oko 9 dB niži prag SNR-a.

Dakle, sa jednom auto-korelacijom manje i modifikacijom poslednje auto-korelacione funkcije, dobili smo veoma značajna poboljšanja u ovoj veličini. Ovo je posebno značajno za PPS-e velikoga reda, jer je poznato da u tim situacijama HAF ima veoma visok prag.

4.2 Produktna verzija HCPF-HAF-a

Iako se sa HCPF-HAF-om broj diferenciranja faze smanjio za 1, PD operator i dalje generiše veliki broj kros-članova koji onemogućavaju tačnu estimaciju parametara multikomponentnog PPS-a. Kros-članovi naročito dolaze do izražaja za veći red polinoma faze, kada se estimacija ne može izvršiti čak i u odsustvu šuma.

Uticao kros-članova se može umanjiti množenjem više HCPF-HAF-ova računatih za različite skupove parametara pomjeraja $\tau^{(l)}, l = 1, \dots, L$:

$$\text{PCPF}_{x^{mk}}(n, \Omega) = \prod_{l=1}^L |\text{CPF}_{x^{mk}}^l(n, \Omega)|, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \text{CPF}_{x^{mk}}^l(n, \Omega) = & \sum_k \text{PD}^{P-3}[n+k, \tau_1^{(l)}, \dots, \tau_{P-3}^{(l)}] \\ & \times \text{PD}^{P-3}[n-k, \tau_1^{(l)}, \dots, \tau_{P-3}^{(l)}] \exp(-j\Omega F_l(k\Delta)^2), \end{aligned} \quad (4.45)$$

gdje je $F_l = \Pi_{i=1}^{P-3} \tau_i^{(l)} / \tau_i^{(1)}$ operator skaliranja. Prema analogiji sa HAF-om, ovu funkciju smo nazvali produktna HCPF-HAF (PHCPF-HAF). Kao i kod HAF-a, usljed različitih skupova parametara pomjeraja, u svakom HCPF-HAF-u kros-članovi će egzistirati na različitim pozicijama, dok će se auto-članovi nalaziti na istim. Prema tome, proizvod različitih HCPF-HAF-ova će naglašavati auto-članove, a slabiti kros-članove. Za razliku od PHAF-a, zbog manje PD-a, PHCPF-HAF ima bolje performanse koje se ogledaju kako u nižem pragu SNR-a, tako i u tačnosti.

Postaviti $x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n)$ i $k = 1$.

while $k \leq K$

Estimirati A_k i a_i^k , $i = 0, \dots, P$, najjače komponente pomoću PHCPF-HAF-a.

Filtrirati estimiranu komponentu

$$x_1^{mk}(n) = x_1^{mk}(n) - \hat{A}_k \exp \left(j \sum_{i=0}^P \hat{a}_i^k (n\Delta)^i \right).$$

Postaviti $k = k + 1$.

end while

Tabela 4.4: PHCPF-HAF estimacioni algoritam.

Dva najviša parametra u fazi svake komponente mogu se estimirati lociranjem pozicija M najjaćih maksimuma u spektrima $\text{PCPF}_{x^{mk}}(n_1, \Omega)$ računatog u dvije taćke. Parametri nižega reda se dalje određuju izdvajanjem komponenti signala procedurom sličnom kao kod PHAF-a i primjenom PHCPF-HAF-a na tako dobijeni monokomponentni PPS (vidi Tabelu 4.4).

4.3 Estimator baziran na kombinaciji HO-CPF-a i HO-WD-a

Procedure opisane u Sekciji 3.6 estimiraju koeficijente faze PPS-a na osnovu računanja HO-CPF/HO-WD u dvije taćke. Jedna taćka je, obićno, u sredini vremenskog intervala, $n = 0$, dok je druga pomjerena za iznos n_1 . Usljed pomjeranja taćke u kojoj se računaju ove funkcije, dolazi do skraćivanja korisnog dijela signala za $2n_1$ odbiraka, što utiće na smanjenje performansi estimatora. Kako se parametri estimiraju iz sistema jednaćina, na taćnost estimacije će dodatno uticati kros-korelacije između razlićitih koeficijenata faze. To znaći da će MSE parametra biti veći ukoliko u njegovom izračunavanju učestvuje više

parametara i obratno.

Rečeno se može potvrditi posmatranjem vrijednosti MSE-a datih u Tabeli 3.7. Prilikom računanja izraza u ovoj tabeli, za n_1 smo birali onu vrijednost koja minimizuje MSE. Primjetimo da se MSE-i parnih/neparnih parametara kod HO-CPF/HO-WD-a za veliko SNR podudaraju sa CRLB-ovima, dok, za neparne/parne parametre, to nije slučaj. Ovo je direktna posledica toga što je odgovarajući parni/neparni parametar direktno proporcionalan parnom/neparnom izvodu dobijenom pomoću HO-CPF/HO-WD računatom u $n = 0$. Koeficijent proporcionalnosti u ovom slučaju ne sadrži druge parametre i zbog toga kros-korelacija koeficijenata ne utiče na MSE. Za razliku od parnih/neparnih, neparni/parni koeficijenti se određuju iz HO-CPF/HO-WD-a računatog za $n = n_1$ i zavisni su od drugih parametara. Primjetimo da, ukoliko izraz za računanje vrijednosti parametra sadrži više drugih faznih koeficijenata, njegov MSE je značajno veći od onog koji sadrži manje koeficijenata.

S ciljem očuvanja dobrih i eliminacijom loših karakteristika HO-CPF-a i HO-WD-a, u [27] je predložena procedura za estimaciju parametara PPS-a, bazirana na kombinaciji ove dvije tehnike. Umjesto računanja HO-CPF-a ili HO-WD-a u dvije tačke, predložili smo estimaciju parametara na osnovu računanja HO-CPF-a i HO-WD-a u tački $n = 0$. Estimaciona procedura je opisana u nastavku:

korak 1: Izračunati HO-WD u $n = 0$ i estimirati parametre $a_{2i-1}, i = 1, 2, \dots, L_2$ na sledeći način:

$$(\hat{a}_1, \hat{a}_3, \dots, \hat{a}_{2L_2-1}) = \frac{1}{2} \arg \max_{\omega_{L_2}} |\text{HOWD}_x(0, \omega_{L_2})|^2. \quad (4.46)$$

korak 2: Estimirati $a_{2i}, i = 1, 2, \dots, L_1$ iz $\text{HOCPF}_x(0, \omega_{L_1})$

$$(\hat{a}_2, \hat{a}_4, \dots, \hat{a}_{2L_1}) = \frac{1}{2} \arg \max_{\omega_{L_1}} |\text{HOCPF}_x(0, \omega_{L_1})|^2. \quad (4.47)$$

korak 3: Ukloniti estimirane parametre iz faze signala

$$x_d(n) = x(n) \exp \left(-j \sum_{i=1}^P \hat{a}_i (\Delta n)^i \right) \quad (4.48)$$

i estimirati A i a_0 .

U daljem tekstu ovu proceduru ćemo nazivati HOCPF-WD.

Primjetimo da smo ovom procedurom ostvarili težnju da dužina signala prije i poslije auto-korelacija ostane ista. Ovo nam daje najbolji učinak koji možemo postići u

potiskivanju uticaja šuma. Drugo, kako je svaki parametar u fazi signala proporcionalan samo jednom izvodu faze, eliminisan je i uticaj kros-korelacija koeficijenata na tačnost estimacije.

4.3.1 Složenost HOCPF-WD-a

Primjetimo da je, za parno P , kompleksnost HOCPF-WD-a istog reda kao i kompleksnost HO-CPF/HO-WD-a, jer obje transformacije zahtijevaju pretragu po prostoru istih dimenzija. Za neparno P , HOCPF-WD je nešto složenija procedura u odnosu na HO-CPF, jer je dimenzija HO-WD-a veća za jedan. Međutim, pretraga za parametrom a_1 se može obaviti pomoću algoritma za računanje brzog FT-a, što izjednačava kompleksnost ove dvije tehnike. Takođe, kompleksnost HOCPF-WD-a se može smanjiti upotrebom stohastičkih algoritama pretrage o kojima će biti riječi u narednom poglavlju.

4.3.2 MSE HOCPF-WD-a

Statistička analiza sprovedena u [14] i [15], pokazala je da HO-CPF i HO-WD proizvode bezbiasne i asimptotski efikasne izvode faze signala $x(n)$. Kako je u HOCPF-WD-u svaki fazni parametar proporcionalan samo jednom izvodu faze, bias i MSE HOCPF-WD-a se mogu odrediti iz rezultata ove analize.

Iz [14] i [15], veoma lako se može pokazati da su parametri estimirani pomoću HOCPF-WD-a asimptotski bezbiasni, $E\{\delta\hat{a}_l\} = 0$, $l = 1, 2, \dots, P$, sa MSE-om datim izrazom:

$$E\{(\delta\hat{a}_l)^2\} = \frac{(1 + \frac{1}{2\text{SNR}})}{4(N/2)^{2l+1}\Delta^{2l} \cdot \text{SNR}} [\mathbf{T}^{-1}]_{ll}, \quad l = 1, 2, \dots, P, \quad (4.49)$$

gdje je \mathbf{T} matrica dimenzija $L \times L$ čiji je (g, k) element

$$[\mathbf{T}]_{gk} = \begin{cases} \frac{4gk}{(2g+1)(2g+1)(2g+2k+1)}, & l \text{ parno,} \\ \frac{1}{(2g+2k-1)}, & l \text{ neparno.} \end{cases} \quad (4.50)$$

U Tabeli 4.5, dati su MSE-i dva najviša koeficijenta za $P = 4, 5$ i 6 .

Iz Tabele 4.5 vidimo da, za veliki SNR, HOCPF-WD dostiže CRLB za sve parametre faze, čime smo značajno nadmašili HO-CPF i HO-WD, koji za neparne i parne parametre, respektivno, imaju značajne vrijednosti MSE-a. Primjera radi, za $P = 6$, MSE koeficijenta \hat{a}_5 , estimiranog pomoću HO-CPF-a, je za 17 dB veći nego CRLB (vidi Tabele 3.7 i 2.1).

P	a_P	a_{P-1}
4	$\frac{22050(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^9\Delta^8}$	$\frac{1400(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^7\Delta^6}$
5	$\frac{349272(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^{11}\Delta^{10}}$	$\frac{22050(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^9\Delta^8}$
6	$\frac{5549544(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^{13}\Delta^{12}}$	$\frac{349272(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNR}N^{11}\Delta^{10}}$

Tabela 4.5: MSE-i dva najviša parametra PPS-a estimiranog pomoću HOCPPF-WD-a.

Razlog velikog MSE-a \hat{a}_5 je zbog toga što on zavisi od estimacije $\phi^{(6)}(0)$, $\phi^{(4)}(n_1)$, $\phi^{(4)}(0)$, tj.

$$a_5 = \frac{\phi^{(4)}(n_1) - \frac{\phi^{(6)}(0)}{2}n_1^2 - \phi^{(4)}(0)}{120n_1}, \quad (4.51)$$

čije kros-korelacije, $E\{\phi^{(4)}(n_1)\phi^{(4)}(0)\}$, $E\{\phi^{(6)}(n_1)\phi^{(4)}(0)\}$ i $E\{\phi^{(6)}(n_1)\phi^{(4)}(n_1)\}$, značajno uvećavaju MSE.

Rezultate statističke analize provjerićemo u sekciji sa numeričkim primjerima.

4.4 Neuniformno odabiranje CPF-a

U [28] je iskorišćeno neuniformno odabiranje signala kako bi se smanjila nelinearnost estimatorskih funkcija. Tako npr. ovo odabiranje je omogućilo analizu PPS-a petoga reda sa estimatorima čija je nelinearnost svega četvrtoga reda. U ovoj sekciji ćemo ideju o neuniformnom odabiranju iskoristiti sa ciljem implementacije FT-a u računanje CPF-a.

Posmatrajmo monokomponentni PPS trećega reda. Računanje CPF-a ovoga signala se može razdvojiti na dva koraka:

korak 1: Računanje auto-korelacije $x(n+m)x(n-m)$:

$$\begin{aligned} x(n+m)x(n-m) = & A^2 \exp(j(6a_3nm^2\Delta^3 + 2a_2(m\Delta)^2 \\ & + 2a_3(n\Delta)^3 + 2a_2(n\Delta)^2 + 2a_1n\Delta + 2a_0)) + \nu_x(n); \end{aligned} \quad (4.52)$$

korak 2: Primjena kvadratnog filtra $\sum_m[\cdot] \exp(-j\Omega m^2)$:

$$\text{CPF}(n, \Omega) = \sum_{m=-N/2+|n|}^{N/2-|n|} x(n+m)x(n-m) \exp(-j\Omega m^2).$$

Da bi u računanju CPF-a implementirali brzi FT, neophodno je, umjesto kvadratnog filtra, koristiti filtar oblika $\sum_m[\cdot] \exp(-j\omega m)$. Uvođenjem smjene $m = \sqrt{Ck}$ u (4.52)

dobijamo

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= x(n + \sqrt{Ck})x(n - \sqrt{Ck}) \\
&= A^2 \exp(j(6a_3n\Delta^3Ck + 2a_2\Delta^2Ck + 2a_3(n\Delta)^3 \\
&\quad + 2a_2(n\Delta)^2 + 2a_1n\Delta + 2a_0)) + \nu_x(n).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Izraz (4.53) omogućava zapis CPF-a preko FT-a:

$$\begin{aligned}
\text{CPF}(n, \Omega) &= \sum_{k=-N/2+|n|}^{N/2-|n|} x_1(k) \exp(-j\Omega C \Delta^2 k) \\
&= \text{FT}\{x_1(k)\}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Računanje CPF-a preko FT-a je od velike važnosti iz dva razloga. Prvi razlog je smanjena računaska kompleksnost u odnosu na klasični CPF, jer sa brzim FT-om CPF zahtijeva $O(M \log_2 M)$ operacija. Drugi, što je mnogo važniji razlog, je mogućnost implementacije svih algoritama za poboljšanje tačnosti estimiranih parametara koji svoje funkcionisanje baziraju na FT-u. Ti algoritmi, u koraku poboljšanja tačnosti parametara, zahtijevaju značajno manje računskih operacija u odnosu na klasičnu interpolaciju. O ovim algoritmima će biti više riječi u Poglavlju 7.

4.4.1 Interpolacija signala $x(n)$

Primjetimo da računanje (4.53) zahtijeva interpolaciju signala $x(n)$, jer $n + \sqrt{Ck}$ i $n - \sqrt{Ck}$ predstavljaju necjelobrojne vrijednosti. Nepoznate vrijednosti $x(n + \sqrt{Ck})$ i $x(n - \sqrt{Ck})$ moguće je odrediti pomoću procedure koja se sastoji iz dva koraka [28]:

korak 1: Interpolacija signala $x(n)$ sa faktorom 2 ili 4 standardnim interpolacionim tehnikama s ciljem dobijanja signala $x_i(n)$;

korak 2: Računanje približne vrijednosti signala $x_i(n)$ u željenoj tački n_0 pomoću relacije

$$x_i(n_0) = \frac{n_0 - \lfloor n_0 \rfloor}{\lceil n_0 \rceil - \lfloor n_0 \rfloor} x_i(\lceil n_0 \rceil) + \frac{\lceil n_0 \rceil - n_0}{\lceil n_0 \rceil - \lfloor n_0 \rfloor} x_i(\lfloor n_0 \rfloor). \tag{4.55}$$

Prilikom sprovođenja opisane procedure treba voditi računa o tome da nelinearnost može narušiti prirodu šuma. Naime, šum u relaciji (2.1) je bijeli, dok, nakon interpolacije, ne mora značiti da će ostati takav [28]. Na tip šuma možemo uticati izborom parametra C . U [28] je pokazano da $C \approx N/2 - |n|$ obezbjeđuje istovremeno i očuvanje tipa šuma i veliku gustinu preodabiranja signala.

Veoma interesantno je ispitati kako nelinearno odabiranje signala utiče na tačnost CPF procedure. Ovim ćemo se baviti u narednoj sekciji.

4.5 Numerički primjeri

U ovoj Sekciji izvršićemo numeričko poređenje tehnika predloženih u doktorskoj tezi sa odgovarajućim tehnikama opisanim u Poglavlju 3. Cilj će nam biti da istaknemo prednosti tih tehnika i izložimo razloge za njihovo korišćenje.

Primjer 1. U ovom primjeru za cilj imamo verifikaciju rezultata statističke analize iz Sekcije 4.1.2 i komparaciju HCPF-HAF-a sa HAF-om.

Performanse HCPF-HAF-a i HAF-a smo ispitali pomoću sledećih monokomponentnih PPS-ova:

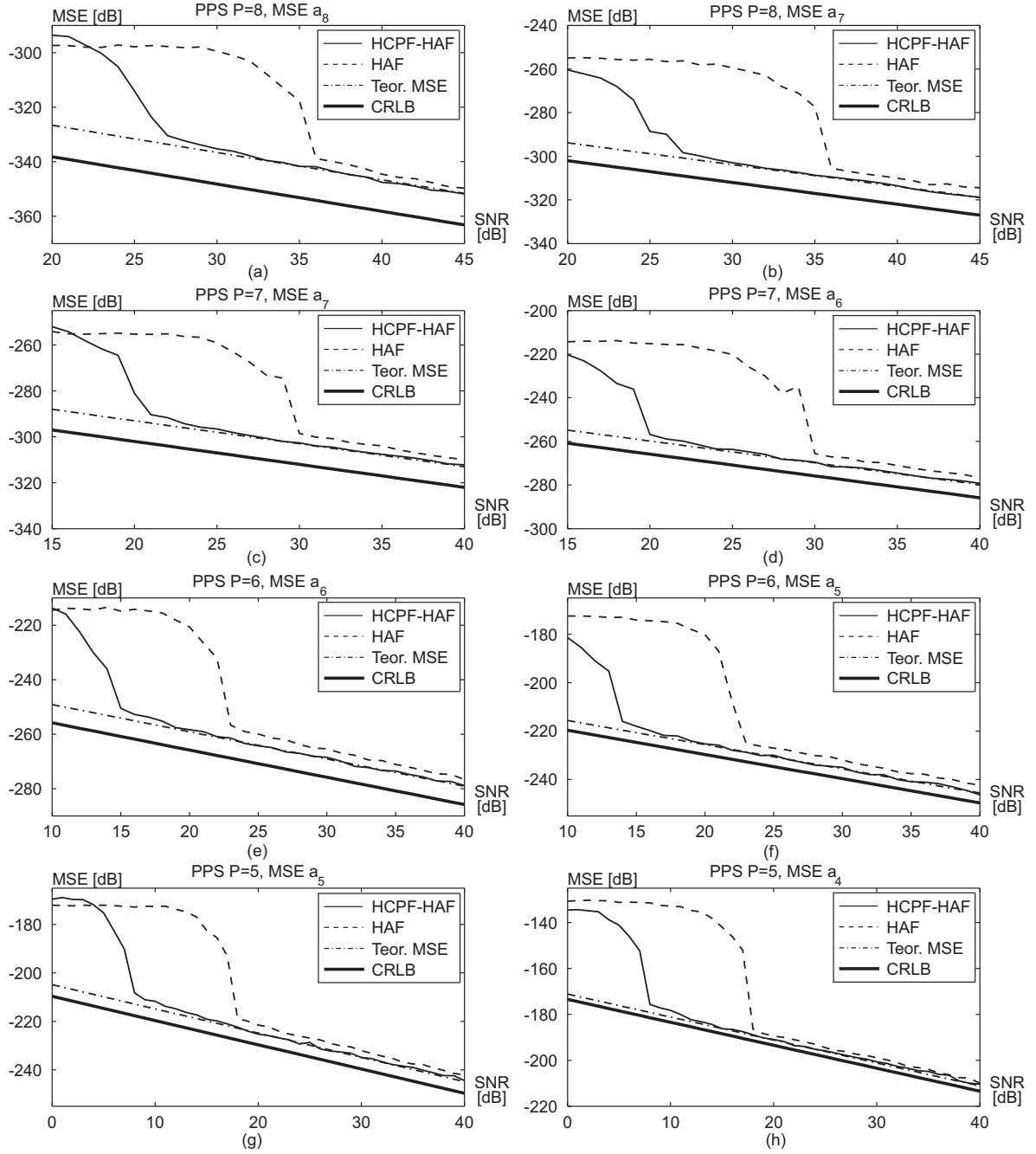
$$x_l(n) = \exp \left(j \sum_{i=1}^{P_k} a_i(n\Delta)^i \right) + \nu(n), \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad (4.56)$$

gdje je $P_k = 8, 7, 6$ i 5 , i a_i je i -ti element vektora $\mathbf{G} = \{0, 1, -2.1 \cdot 10^{-4}, 8.2 \cdot 10^{-6}, 6.2 \cdot 10^{-8}, 2.3 \cdot 10^{-10}, 5.4 \cdot 10^{-12}, 7.3 \cdot 10^{-14}, -2.3 \cdot 10^{-16}\}$. Signal je odabran sa $\Delta = 1$ i ukupan broj odbiraka je 257. HCPF-HAF i HAF su računati za optimalne vrijednosti parametara pomjeraja (vidi Sekcije 3.2.2 i 4.1.2). Za dobijanje MSE-a koristili smo Monte Carlo simulacije sa 300 iteracija.

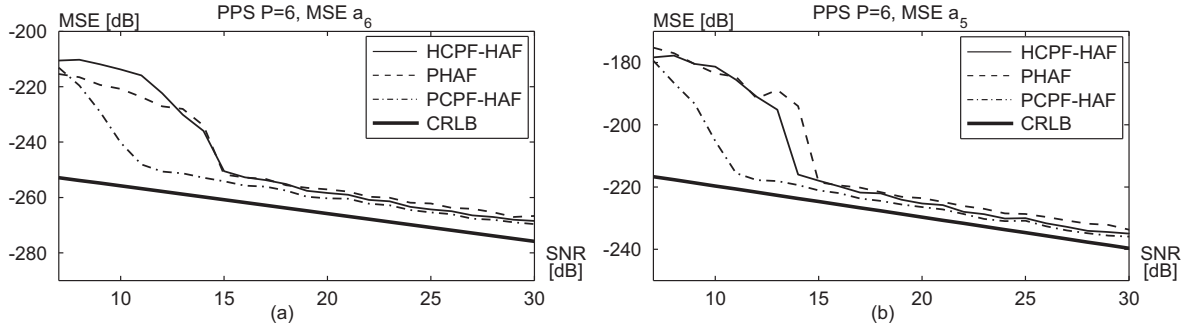
Različite signale smo razmatrali na različitim opsezima SNR-a: $x_1(n)$ je razmatran na opsegu $[20, 45]$ dB, $x_2(n)$ na opsegu $[15, 40]$ dB, $x_3(n)$ i $x_4(n)$ na opsegu $[0, 40]$ dB. MSE-i dva najviša parametra faze, estimiranih pomoću HCPF-HAF-a i HAF-a, prikazani su na Slici 4.1. Na istoj slici prikazane su i teorijske vrijednosti MSE-a dobijene analizom sprovedenom u Sekciji 4.1.2.

Sa Slike 4.1, može se primjetiti da HCPF-HAF ima od 8 dB do 10 dB niži prag SNR-a nego HAF. Pragovi HAF-a su na 36 dB, 30 dB, 23 dB i 18 dB za $P = 8, 7, 6$ i 5 , respektivno, dok HCPF-HAF ima pragove na 27 dB, 21 dB, 15 dB i 8 dB za $P = 8, 7, 6$ i 5 , respektivno. U dijelu gdje obje tehnike daju zadovoljavajuću tačnost, HCPF-HAF ima za 3 dB niži MSE. Takođe, primjetimo da teorijski dobijene vrijednosti MSE-a u potpunosti prate rezultate simulacija, što potvrđuje validnost izraza dobijenih u Sekciji 4.1.2.

Ovaj primjer potvrđuje značajne prednosti HCPF-HAF pristupa u odnosu na HAF. Zbog velikog dobitka u pragu SNR-a, modifikacija HAF-a, predložena u Sekciji 4.1, pokazala se kao ozbiljan kandidat da zamjeni HAF u estimaciji PPS-a. MSE HCPF-HAF-a



Slika 4.1: MSE-i dva najviša parametra signala $x_l(n)$, $l = 1, \dots, 4$ estimiranih pomoću HCPF-HAF-a i HAF-a, kao i odgovarajući teorijski MSE-i: lijeva kolona - parametri a_P ; desna kolona - parametri a_{P-1} .



Slika 4.2: Poređenje HCPF-HAF-a, PCPF-HAF-a i PHAF-a na monokomponentnom PPS-u šestog reda: (a) MSE parametra \hat{a}_6 ; (b) MSE parametra \hat{a}_5 .

se dodatno može umanjiti upotrebom tehnika za poboljšanje tačnosti parametara. O ovome će biti više riječi u Poglavlju 7.

Primjer 2. Kako su PHAF i PCPF-HAF metode koje posjeduju mehanizme za ublažavanje uticaja kros-komponenti i interferirajućih komponenti, pravedno bi bilo izvršiti njihovo međusobno poređenje. Takođe, od interesa je i vidjeti gdje je ovdje mjesto HCPF-HAF-u. S tim ciljem, posmatrali smo signal $x_3(n)$ iz Primjera 1 i estimirali njegove parametre pomenutim tehnikama. Za računanje PCPF-HAF-a i PHAF-a, koristili smo po pet skupova parametara pomjeraja. MSE-i dva najviša parametra prikazani su na Slici 4.2. Metodologija za njihovo određivanje je ista kao i ona korišćena u Primjeru 1.

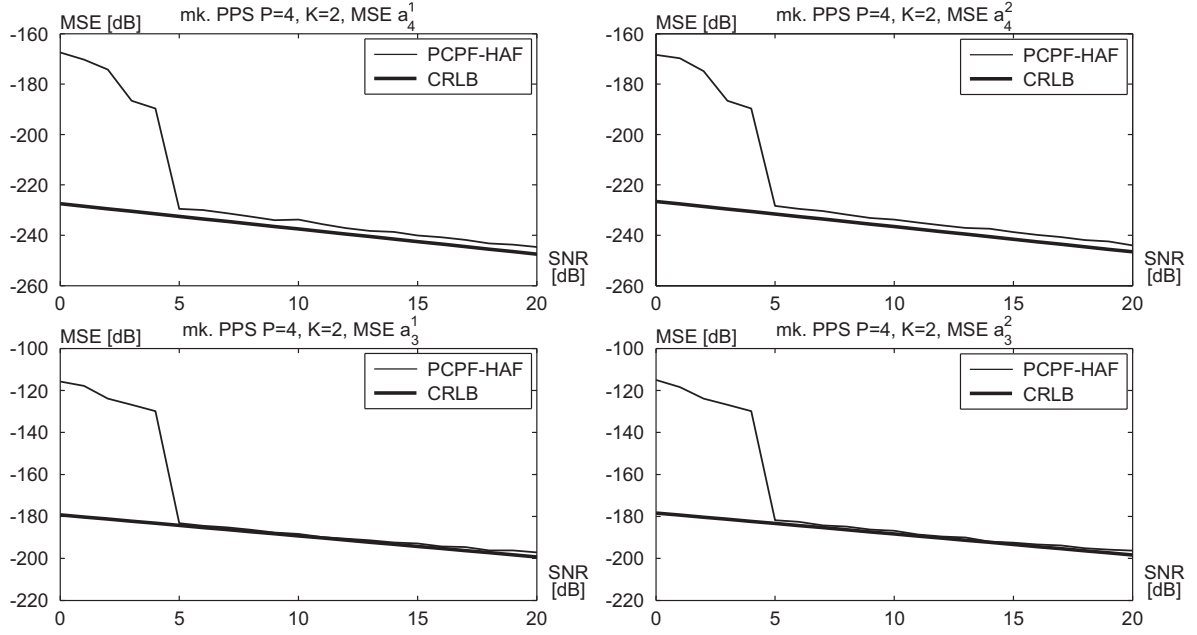
Prema numeričkim rezultatima, HCPF-HAF i PHAF imaju slične karakteristike. MSE HCPF-HAF-a je neznatno manji u odnosu na MSE PHAF-a. Međutim, u pogledu računске složenosti, HCPF-HAF je prihvatljiviji. PCPF-HAF ima najbolje performanse, kako u pogledu praga SNR-a (4 dB niži u odnosu na HCPF-HAF), tako i u pogledu MSE-a (2 dB niža u odnosu na HCPF-HAF).

Prema ovoj numeričkoj analizi, PCPF-HAF treba koristiti u slučajevima kada HCPF-HAF ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Primjer 3. Performanse PCPF-HAF-a ispitali smo na dvokomponentnom PPS-u četvrtoga reda:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= s_1(n) + s_2(n) + \nu(n) \\
 &= \exp(j(0.77n + 2.41 \cdot 10^{-4}n^2 - 1.61 \cdot 10^{-6}n^3 - 3.34 \cdot 10^{-9}n^4)) \\
 &\quad + 0.9 \exp(j(-0.83n - 6.82 \cdot 10^{-4}n^2 + 3.94 \cdot 10^{-6}n^3 + 2.35 \cdot 10^{-9}n^4)) + \nu(n), \\
 n &\in [-512, 512],
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

PCPF-HAF je računat za ukupno sedam parametara pomjeraja $\tau^{(l)} = \tau^{\text{opt}} + \mathbf{K}(l), l =$



Slika 4.3: MSE-i parametara \hat{a}_3^1 , \hat{a}_4^1 , \hat{a}_3^2 i \hat{a}_4^2 estimiranih pomoću PCPF-HAF-a: lijeva kolona - MSE-i prve komponente; desna kolona - MSE-i druge komponente.

1, 2, ..., 7, $\mathbf{K} = [-38, -26, -4, 0, 4, 26, 38]$. MSE-i parametara a_3^1 , a_4^1 , a_3^2 i a_4^2 prikazani su na Slici 4.3. Rezultati su dobijeni pomoću Monte Carlo simulacija sa ukupno 300 iteracija.

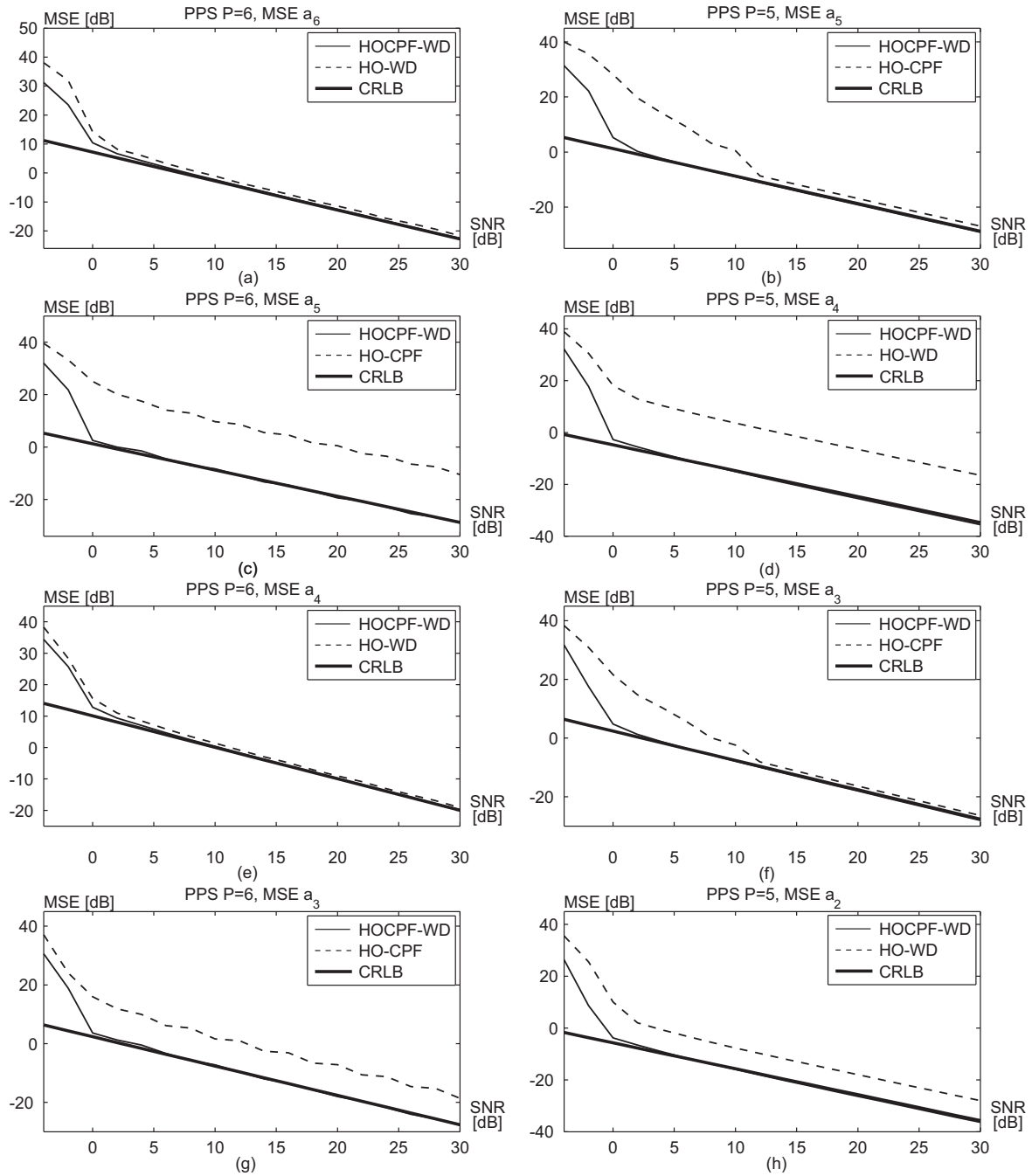
Sa Slike 4.3 vidimo da PCPF-HAF ima prag SNR-a na oko 5 dB. MSE-i parametara a_4^1 i a_4^2 su za 2 dB iznad CRLB-a, dok su MSE-i parametara a_3^1 i a_3^2 za 1 dB lošiji u odnosu na CRLB-e.

Rezultati za PHAF ovdje nisu uključeni, jer za $P = 4$ PHAF nije u stanju tačno estimirati parametre multikomponentnog PPS-a, čak ni za veoma veliki SNR. Naime, PD operator generiše 254 kros-članova i 6305 šumnih članova koji u potpunosti maskiraju auto-članove i čine estimaciju nemogućom.

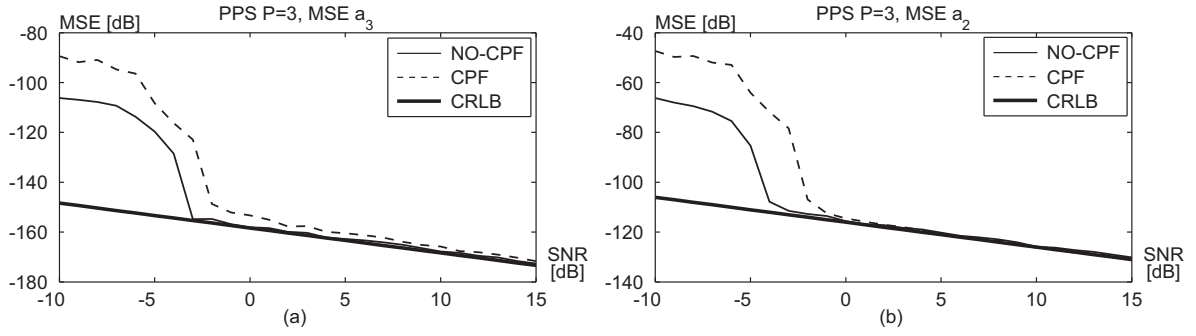
Ovim primjerom pokazali smo prednost HPCF-HAF pristupa i u estimaciji multikomponentnog PPS-a.

Primjer 4. U ovom primjeru demonstriraćemo prednosti HOCPF-WD pristupa u odnosu na HO-CPF i HO-WD.

Posmatrali smo iste signale kao u Primjeru 2 Sekcije 3.7. Njihove parametre smo estimirali HO-CPF-om, HO-WD-om i HOCPF-WD-om. MSE-i četiri najviša parametra faze, dobijeni pomoću 200 iteracija Monte Carlo simulacija, prikazani su na Slici 4.4. Na svakom grafiku, pored rezultata dobijenih HOCPF-WD-om, ilustrovani su odgovarajući rezultati HO-WD-a ili HO-CPF-a, koje smo nastojali poboljšati.



Slika 4.4: MSE-i parametara PPS-a petog i šestog reda estimiranih pomoću HO-CPF-a, HO-WD-a i HOCPF-WD-a: lijeva kolona - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; desna kolona - MSE-i parametara signala $x_1(n)$.



Slika 4.5: MSE-i parametara \hat{a}_3 i \hat{a}_2 PPS-a trećega reda estimiranih CPF-om i NO-CPF-om:
(a) MSE \hat{a}_3 ; (b) MSE \hat{a}_2 .

Za razliku od HO-CPF-a i HO-WD-a, čije su performanse za neparne i parne parametre, respektivno, značajno lošije, zbog računanja ovih funkcija u tački koja je pomjerena od centra, MSE-i HOCPF-WD-a su na teorijskom minimumu. Primjera radi, MSE \hat{a}_5 HO-CPF-a, za $P = 6$, je za više od 20 dB iznad CRLB-a. Takođe, ova tehnika ima stabilan prag SNR-a i on je na oko 0 dB.

Dakle, da zaključimo, sa HOCPF-WD-om smo iskoristili sve prednosti HO-WD i HO-CPF pristupa, koje su nam omogućile visoku tačnost estimiranih parametara sa značajno redukovanom složenošću u odnosu na ML.

Primjer 5. Da bismo pokazali da neuniformno odabiranje CPF-a ne utiče na smanjenje performansi ove funkcije, posmatrali smo PPS trećega reda:

$$x(n) = \exp(j(0.9 + 0.39n + 1.25 \cdot 10^{-4}n^2 + 1.82 \cdot 10^{-6}n^3)) + \nu(n),$$

$$n \in [-257, 257], \quad (4.58)$$

na intervalu SNR-a od -10 dB do 15 dB. Za računanje neuniformno odabranog CPF-a (NO-CPF) koristili smo interpolaciju sa faktorom 2, dok je izbor ostalih parametara napravljen prema upustvima iz Sekcija 3.5 i 4.4. MSE-i a_3 i a_2 , dobijeni pomoću Monte Carlo simulacija sa 300 iteracija, prikazani su na Slici 4.5.

Sa Slike 4.5 vidimo da neuniformno odabiranje CPF-a povećava tačnost ove funkcije. Naime, NO-CPF ima za oko 1 dB niži prag SNR-a i 2 dB niži MSE za parametar a_3 . Primjetimo, da NO-CPF za oba parametra dostiže teorijske limite u MSE-u, dok to za standardni CPF nije slučaj.

Dakle, postoje dva razloga zašto koristiti NO-CPF umjesto CPF-a. Prvi je, niža računaska kompleksnost u odnosu na CPF, a drugi je, niži prag SNR-a i manji MSE.

Ovim primjerom zaključujemo poglavlje u kome smo prezentovali doprinose teze u

estimaciji 1D PPS-a. U nastavku vidjećemo način na koji možemo optimizovati pretragu kod višedimenzionih estimatora i time smanjiti njihovu računsku složenost.

Poglavlje 5

Genetički algoritmi u estimaciji PPS-a

Zbog računske kompleksnosti, odlične statističke osobine ML-a, HO-WD-a i HO-CPF-a su uvijek u drugom planu. Već smo pomenuli da je primjena ML-a i HO-CPF/HO-WD-a u realnom vremenu moguća na signalima do maksimalno trećeg i sedmog reda, respektivno. Da bi ove tehnike bile u mogućnosti efikasno estimirati parametre signala višega reda, neophodno je redukovati broj tačaka u kojima se iste računaju. Zbog multidimenzionalnosti optimizacionih funkcija i ogromnog broja lokalnih optimuma koji raste sa porastom P , ovo ne predstavlja lak zadatak. Gradijentne tehnike za optimizaciju, kakve su npr. razne verzije LMS algoritama [29], [30], ovdje nisu korisne jer će ogroman broj lokalnih minimuma u većini slučajeva uticati da izlaz iz algoritma bude lokalni, a ne globalni, optimum. Da bi izbjegli ovaj problem, u [31] smo predložili upotrebu GA, stohastičke metode za optimizaciju pretrage. Stoga se u ovom poglavlju bavimo GA i njihovim uticajima na tačnost ML-a, HO-WD-a i HO-CPF-a. Cilj će nam biti da odredimo limite GA u estimaciji parametara PPS-a.

5.1 Uvod u GA

Genetički algoritmi su stohastičke metode pretraživanje bazirane na oponašanju biološkog procesa evolucije [32]-[34]. Oni probleme predstavljaju u vidu hromozoma i do rješenja dolaze kroz iterativni postupak, primjenom operatora mutacije i ukrštanja. Jedna iteracija genetičkog algoritma naziva se generacijom. Broj generacija je direktno uslovljen konvergencijom GA. Ukoliko GA brže konvergira, njihov broj je manji i obrnuto. Čest je slučaj i da GA ima fiksni broj generacija.

Kodiranje problema je prvi i ujedno i najvažniji korak u implementaciji GA. Pravilnim

izborom tipa kodiranja znatno se može ograničiti skup mogućih vrijednosti rješenja i samim tim skratiti vrijeme izvršavanja. Radi povećavanja performansi algoritma, reprezentacija u vidu hromozoma je poželjna. Jedan hromozom predstavlja rješenje konkretnog problema i njega čini niz varijabli koje se nazivaju geni. U zavisnosti od načina reprezentacije gena, razlikujemo nekoliko šema kodiranja [33]: binarno kodiranje, kodiranje zasnovano na reprezentaciji gena preko realnih brojeva, order-based reprezentacija, embeded list reprezentacija, itd. Zbog svoje jednostavnosti i lakog načina realizacije, binarno kodiranje hromozoma je danas najpopularniji vid kodiranja. Međutim, postoje aplikacije gdje se ovaj tip kodiranja ne može iskoristiti. To je npr. pri kodiranju boja. Ako bismo boju kodirali preko niza bita, promjena vrijednosti jednog bita bi znatno uticala na vrijednost boje. Stoga, u ovakvim i sličnim aplikacijama se koristi kodiranje hromozoma preko niza realnih brojeva.

Funkcionisanje GA se može opisati kroz nekoliko koraka:

korak 1: Inicijalizacija;

korak 2: Izračunavanje ocjenjivačke funkcije (engl. *cost function*);

korak 3: Selekcija;

korak 4: Primjena GA operatora;

korak 5: Ponavljanje koraka 2., 3. i 4. sve dok se ne ispuni kriterijum konvergencije ili se ne dostigne maksimalan broj generacija.

GA u svakoj iteraciji radi sa populacijom rješenja. Populaciju čini skup hromozoma koji u datom trenutku predstavljaju moguća rješenja problema. Da bi GA počeo sa radom, tu populaciju je neophodno nekako formirati. Inicijalizacija je korak GA u kome se formira početna populacija. Hromozomi koji čine početnu populaciju se najčešće biraju slučajno ili po nekoj pseudo-slučajnoj osnovi, uz poštovanje odgovarajućih ograničenja u vrijednostima gena.

Ocjenjivačka funkcija (OF) predstavlja direktnu vezu između problema koji se nastoji riješiti i GA. Naime, na njoj je da da kvalitativnu ocjenu odgovarajućeg rješenja. Ova funkcija kao ulazni argument ima hromozom, a vraća broj ili listu brojeva koji predstavljaju mjeru performansi proslijeđenog hromozoma. Kako, u zavisnosti od različitih problema, opseg mogućih vrijednosti OF-a može značajno da varira, često se vrši

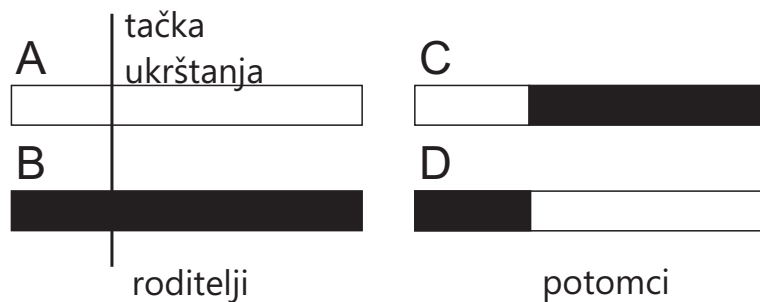
skaliranje vrijednosti OF-a u neki fiksni opseg. Tehnike koje se bave ovim problemom se nazivaju tehnike skaliranja OF-a. Najznačajniji predstavnici ovih tehnika su: windowing i tehnika linearne normalizacije [34].

Cilj selekcije je izbor genetskog materijala za formiranje populacije u sledećoj generaciji. Hromozomi, izabrani u ovom koraku, se nazivaju roditelji i na njih se, u narednom koraku GA, primjenjuju operatori mutacije i ukrštanja. Da bi GA napredovao ka rješenju problema, neophodno je obezbjediti raznovrsnost genetskog materijala. Stoga, selekcijom ne treba uzeti samo najbolje jedinke iz populacije, jer u tom slučaju nema ni govora o raznovrsnosti. Selekcija bi trebala da svakom rješenju da mogućnost da bude izabran za roditelja u narednoj generaciji, naravno, proporcionalno vrijednosti njegovog OF-a. Postoji nekoliko tipova selekcije [33], [34]: selekcija na bazi ruleta, selekcija na bazi takmičenja, stohastička selekcija, itd. Selekcija na bazi ruletnog točka je najčešće korišćena. Naime, ona simulira ruletni točak na taj način što svako polje na ovom točku predstavlja po jednu jedinku iz populacije. Polja su različite veličine, proporcionalna vrijednosti OF-a svakog hromozoma. Ovako selekcija daje mogućnost jedinkama sa većom vrijednošću OF-a da prije budu izabrane, nego one sa manjom.

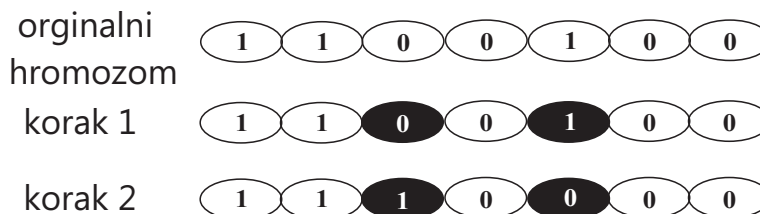
Populacija naredne generacije se formira primjenom GA operatora na izabrane roditelje. Od GA operatora najznačajniji su operator ukrštanja i operator mutacije. Operatorom ukrštanja vrši se kombinovanje genetskog materijala dvije jedinke s ciljem formiranja dva nova hromozoma. Na Slici 5.1. dat je primjer ukrštanja sa jednom tačkom. Roditelji čiji se genetički materijal ukršta su obilježeni sa A i B, dok rezultat ukrštanja predstavljaju hromozomi C i D. Formiranje jedinki C i D se obavlja na sledeći način: slučajno se bira tačka ukrštanja koja dijeli A i B na dva dijela. Jedinka C se formira od genetskog materijala A koji se nalazi lijevo od tačke ukrštanja i desnog dijela hromozoma B, dok se jedinka D formira obrnuto. Pored ukrštanja sa jednom tačkom postoji i ukrštanje sa više tačaka.

Mutacija je operator kojim se na slučajni način mijenja vrijednost gena u hromozomu. Sastoji se od dva koraka. U prvom koraku se slučajno biraju geni čija se vrijednost mijenja, dok se u drugom koraku vrši zamjena vrijednosti gena, nekim takođe slučajnim vrijednostima. Primjer primjene operatora mutacije je prikazan na Slici 5.2.

Kako se ne bi dogodilo da se u generacijama koje su prethodile finalnoj generaciji nalaze rješenja sa boljom vrijednošću OF-a nego u finalnoj generaciji, javlja se potreba da dio roditelja iz prethodne generacije bude sadržan i u narednoj generaciji. Broj jedinki iz



Slika 5.1: Ukrštanje sa jednom tačkom.



Slika 5.2: Primjer mutacije.

prethodne generacije naziva se *elit count*.

Terminacija GA se može realizovati na više načina. Najpopularniji načini su definisanjem maksimalnog broja generacija i praćenjem vrijednosti OF-a. Ako se desi da se vrijednost OF najbolje jedinke u specificiranom broju generacija vrlo malo mijenja, to je znak da je GA konvergirao ka rješenju i da treba prekinuti iteracije. U engleskoj terminologiji, ovaj parametar GA je poznat pod nazivom *stall generation*.

5.2 Postavka GA

Iz Sekcije 5.1 može se primjetiti da GA ima veliki broj parametara koje treba podesiti. Od njihovog izbora zavise i performanse samog algoritma. Kako ne postoji neki matematički model koji bi nam za konkretni problem dao skup tih parametara, izbor istih napravili smo sprovođenjem niza eksperimenata sa signalima različitog oblika faze. Postavka GA dobijena ovim putem pokazala se kao vrlo efikasno sredstvo za estimaciju PPS-a. Ta postavka je sumirana u Tabeli 5.1. Maksimalan broj generacija je 300. Hromozomi, organizovani u 5 podgrupa od po 30 jedinki, kodirani su pomoću vektora realnih brojeva dvostruke preciznosti. Inicijalna populacija je kreirana slučajno i uniformno je distribuirana. Vrijednosti gena u inicijalnoj populaciji kreću se u intervalu $[0, 50]$. Za OF korišćene su relacije (3.1), (3.56) i (3.57). Roditelji za formiranje naredne generacije birani su na osnovu selekcije pomoću ruletnog točka. Iz svake podgrupe,

Maks. generacija	300
Br. stab. generacija	20
OF	ML/HO-CPF/HO-WD
Populacija	
veličina	5×30
tip kodiranja	vektor realnih brojeva
Inicijalna populacija	
distribucija	uniformna
opseg vrijednosti	$[0, 50]$
Selekcija	ruletni točak
Elite count	2
Ukrštanje	
tip	heuristično
odnos	1.2
Mutacija	
tip	Gauss-ova
inic. var	0.8
Migracija	
smjer	oba smjera
interval	20
proc. jedinki	20%
Stall generation	20

Tabela 5.1: Postavka GA za optimizaciju pretrage u ML-u, HO-WD-u i HO-CPF-u.

minimum dva roditelja su članovi naredne generacije. Ukrštanje je obavljeno heurističkim operatorom ukrštanja sa odnosom 1.2, dok je mutacija izvršena pomoću Gauss-ove distribucije. Podešeno je da varijansa mutacije linearno opada od 0.8 do 0, kako se broj generacija povećava. Migracija između podgrupa vršena je nakon svakih 20 generacija u oba smjera. 20% jedinki je migriralo iz jedne u drugu podgrupu. Ukoliko ne bi bilo promjene u vrijednosti OF-a u 20 generacija, GA bi završio sa iteracijama.

5.2.1 Problem divergencije

Slučajno kreiranje inicijalne populacije, oblik optimizacione funkcije i multidimenzionalna pretraga mogu dovesti do divergencije GA. Naša istraživanja pokazala su da je vjerovatnoća divergencije GA oko 1%. Stoga, da bi rezultati, dobijeni GA-om, bili pouzdani, neophodno je uspostaviti mehanizam za detekciju divergencije. Ukoliko do divergencije dođe, GA bi trebalo ponovo pokrenuti.

Divergencija GA se može detektovati poređenjem vrijednosti OF-a u posljednjem koraku GA, O_f , sa matematičkim očekivanjem estimacione funkcije, ME, računate u tački stvarnog maksimuma:

$$\begin{aligned} &\text{ako je } (O_f > \varepsilon \text{ME}), \quad \text{GA konvergira,} \\ &\text{u suprotnom,} \quad \quad \quad \text{GA divergira.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ε ($\varepsilon < 1$) predstavlja konstantu koja se određuje eksperimentalnim putem. U našim primjerima usvojicemo $\varepsilon = 0.7$.

Potrebna matematička očekivanja za realizaciju pomenutog mehanizma detekcije data su u nastavku [31]:

$$\begin{aligned} \text{ME}_{\text{ML}} &= \text{E}\{|\text{ML}(b_1, b_2, \dots, b_P)|^2\} \approx A^2 N^2 + N\sigma^2, \\ \text{ME}_{\text{HOCPF}} &= \text{E}\{|\text{HOCPF}_x(n, \omega_{L_1}^{\text{tačna}})|^2\} \approx A^4 N^2 + 2\sigma^2 N(2A^2 + \sigma^2), \\ \text{ME}_{\text{HOWD}} &= \text{E}\{\text{HOWD}_x(n, \omega_{L_2}^{\text{tačna}})\} \approx A^2 N + \sigma^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Da bismo izračunali ove vrijednosti, neophodno je poznavanje amplitude signala i varijanse šuma. Ove dvije veličine mogu se procijeniti na osnovu sledećih relacija [35]:

$$\begin{aligned} \hat{A}^2 &= \sqrt{|2E_2^2 - E_4|}, \\ \hat{\sigma}^2 &= |E_2 - \hat{A}^2|, \\ E_i &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=-N/2}^{N/2} x^i(n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Vjerovatnoća divergencije zavisi od upotrebljene tehnike i reda PPS-a. Postoji granica iznad koje GA nije u stanju da izbjegne divergenciju. Limiti ML-a, HO-CPF-a i HO-WD-a sa GA implementiranim na strani pretrage će biti izučavani u sekciji sa numeričkim primjerima.

5.3 Računska složenost GA

Osnovna prednost pristupa estimaciji parametara sa GA je u znatno manjem prostoru po kojem se vrši pretraga nego što je to slučaj sa direktnom pretragom. GA je od koristi u slučajevima kada se do rješenja ne može doći u razumnom vremenu.

Zbog stohastičke prirode GA, precizni matematički izrazi, koji opisuju kompleksnost GA, ne mogu biti izvedeni. Složenost GA je u najvećoj mjeri uslovljena maksimalnim brojem ponovnog pokretanja algoritma (r), brojem generacija, itd. Stoga ćemo u nastavku analizu složenosti obaviti za najkompleksniji slučaj, sa maksimalnim brojem pokretanja algoritma.

Broj tačaka u kojima se ML, HO-CPF i HO-WD računaju u našem slučaju je između 150×300 i $150 \times 300 \times r$ (usvojimo $r = 20$), dok procedura sa direktnom pretragom ove funkcije računa u M^P (ML) i $M^{P/2}$ (HO-CPF i HO-WD) tačaka. Ako pretpostavimo da je $M = 100$, možemo izvesti zaključak da je direktna pretraga isplativije rješenje u slučaju 1D i 2D pretraga. Za 3D pretrage, GA u najnepovoljnijem slučaju ima sličnu kompleksnost kao i direktna pretraga. Međutim, pokazuje se da GA, za 3D prostore, konvergira za $r < 20$, što ga stavlja ispred direktne pretrage. Za prostore višega reda (4D i veće), GA je daleko prihvatljiviji. Činjenica koja ide u prilog GA je i to da je M često mnogo veće od 100.

Dakle, da zaključimo, direktna pretraga je bolje rješenje jedino u slučajevima 1D i 2D pretraga.

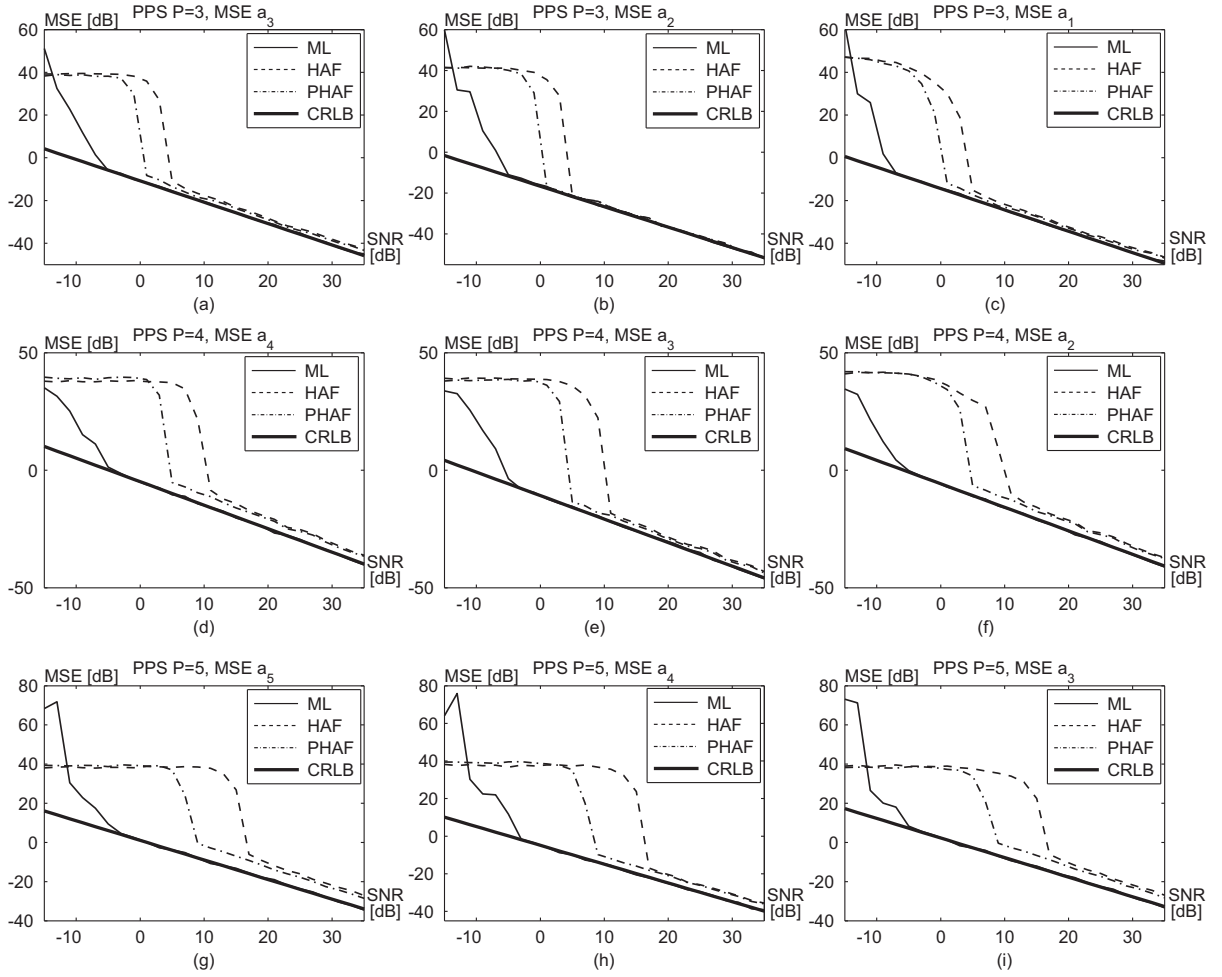
5.4 Numerički primjer

Zbog stohastičkih karakteristika GA, nismo u stanju odrediti njegove performanse analitičkim putem. Stoga, u ovoj sekciji, te performanse će biti određene pomoću simulacija. Pored ispitivanja tačnosti pristupa sa GA, cilj nam je i da, za pojedinačnu funkciju (ML, HO-CPF ili HO-WD), pronađemo najviši red polinoma za koji GA daje zadovoljavajuće rezultate.

U tu svrhu, posmatrali smo deset PPS-ova:

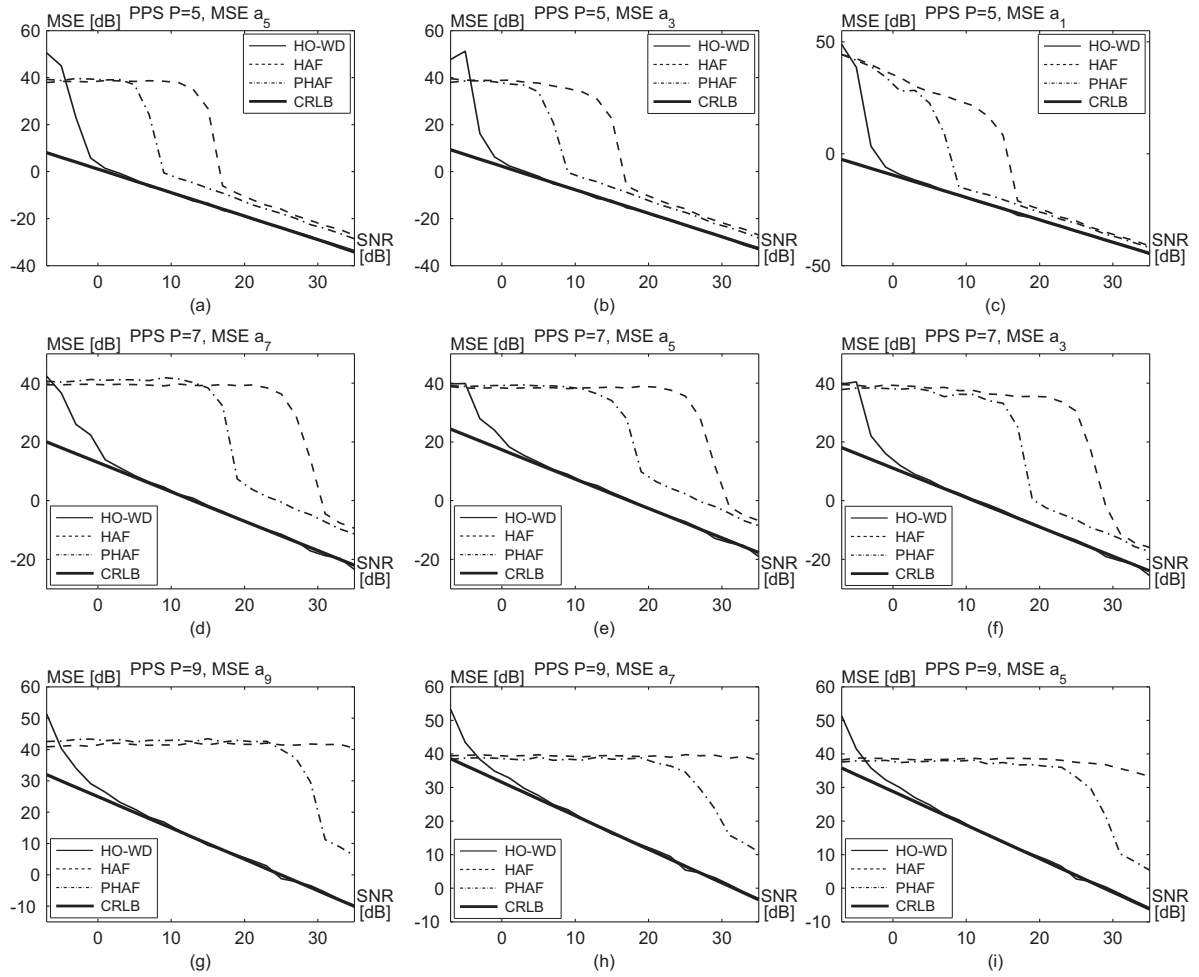
$$x_k(n) = \exp \left(j \sum_{i=1}^{k+2} \mathbf{G}(i)(n\Delta)^i \right) + \nu(n), \quad k = 1, \dots, 10, \quad (5.4)$$

gdje je $N = 256$, $\Delta = 7.8 \cdot 10^{-4}$ i $\mathbf{G}(i)$ je i -ti element vektora $\mathbf{G} = [6, 12.5, 6.5, 4,$



Slika 5.3: MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću ML, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 3$, (a) MSE \hat{a}_3 , (b) MSE \hat{a}_2 i (c) MSE \hat{a}_1 ; druga vrsta - $P = 4$, (d) MSE \hat{a}_4 , (e) MSE \hat{a}_3 i (f) MSE \hat{a}_2 ; treća vrsta - $P = 5$, (g) MSE \hat{a}_5 , (h) MSE \hat{a}_4 i (i) MSE \hat{a}_3 .

3, 12, 1.5, 5.5, 9, 7.5, 2, 10.5]. Imperativ nam je bio da ispitamo ponašanje GA kada se primjeni na 3D, 4D i 5D i 6D prostore pretraga. Stoga, sa ML-om smo estimirali parametre signala $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ i $x_4(n)$, sa HO-WD-om signale $x_3(n)$, $x_5(n)$, $x_7(n)$ i $x_9(n)$ i sa HO-CPF-om $x_4(n)$, $x_6(n)$, $x_8(n)$ i $x_{10}(n)$. MSE-i karakterističnih parametara faze posmatranih signala prikazani su na Slikama 5.3, 5.4 i 5.5 (sa slike su izostavljeni grafici onih signala za koje GA nije u stanju izvršiti estimaciju). Takođe, u cilju verifikacije tačnosti estimiranih parametara, prikazali smo MSE-e parametara dobijenih pomoću HAF-a i PHAF-a, kao i odgovarajuće CRLB-ove. MSE-i su određeni pomoću 200 iteracija Monte Carlo simulacija i SNR je posmatran u intervalu od -15 dB do 35 dB sa koracima od 2 dB. Za računanje PHAF-a koristili smo pet skupova parametara pomjeraja.



Slika 5.4: MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću HO-WD, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 5$, (a) MSE \hat{a}_5 , (b) MSE \hat{a}_3 i (c) MSE \hat{a}_1 ; druga vrsta - $P = 7$, (d) MSE \hat{a}_7 , (e) MSE \hat{a}_5 i (f) MSE \hat{a}_3 ; treća vrsta - $P = 9$, (g) MSE \hat{a}_9 , (h) MSE \hat{a}_7 i (i) MSE \hat{a}_5 .

Rezultati dobijeni ML-om za $P = 3, 4$ i 5 prikazani su u prvoj, drugoj i trećoj vrsti Slike 5.3, respektivno. Prag SNR-a ML-a je nezavisan od reda signala i iznosi -5 dB, dok MSE dostiže teorijske limite. Dakle, GA ne unosi poremećaj u tačnost. S druge strane, HAF i PHAF imaju značajno veće pragove (više od 7 dB) i njihov MSE raste sa povećavanjem reda signala. $P = 5$ je bio i najveći red signala za koji GA može da da zadovoljavajuće rezultate. Za $P > 5$ broj lokalnih minimuma u OF-u je toliki da ni mehanizam za detekciju divergencije nije uspio da se izbori sa istim.

MSE-i parametara estimiranih pomoću HO-WD-a sa GA prikazani su na Slici 5.4. Prag SNR-a HO-WD-a je na oko 0 dB, što je za 9 dB, 20 dB i 31 dB manje u odnosu na prag PHAF-a za $P = 5$, $P = 7$ i $P = 9$, respektivno. I kod HO-WD-a, GA je u stanju da dostigne CRLB-e. Za $P > 10$, ova tehnika nije u stanju estimirati parametre PPS-a.

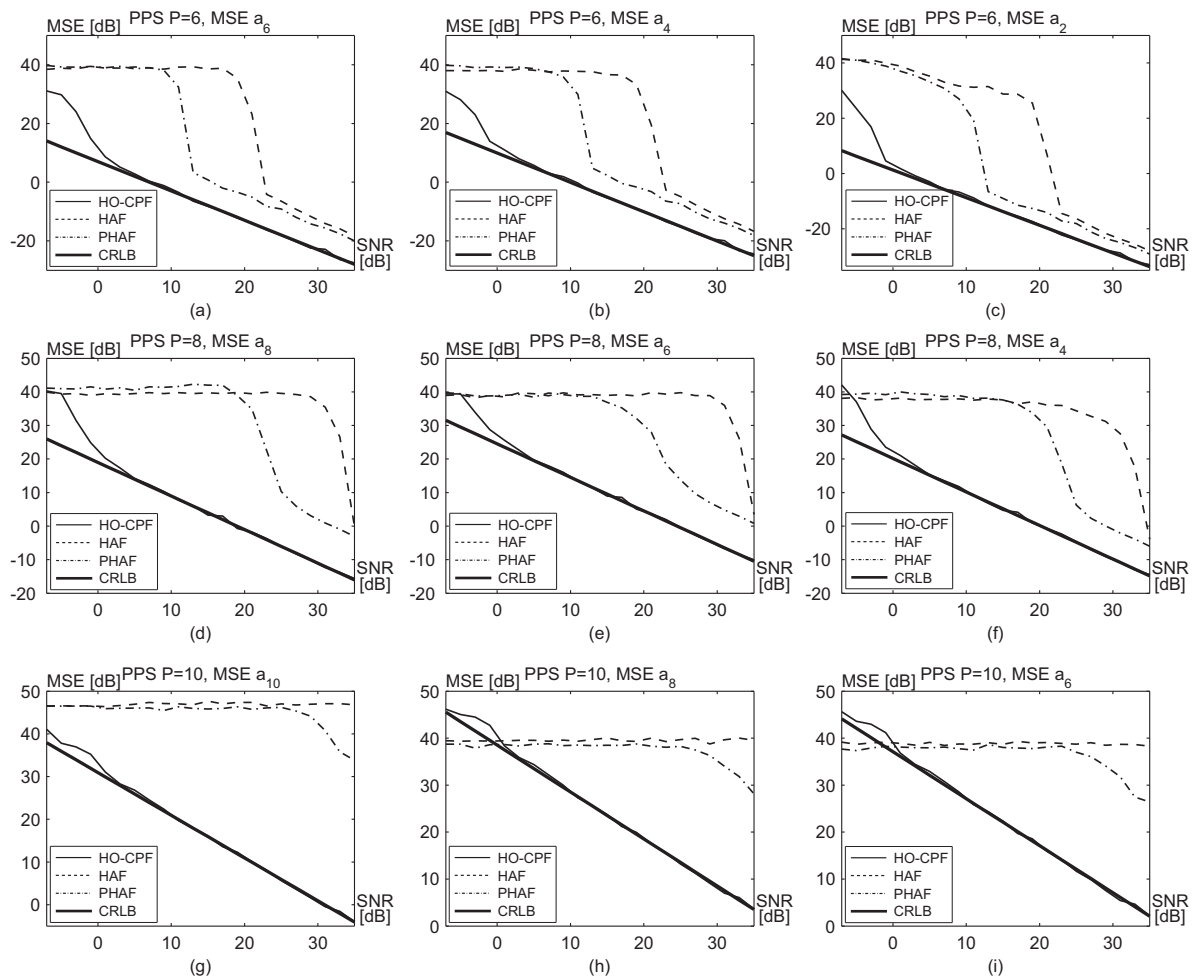
Tehnika	$P = 4$	$P = 6$	$P = 8$	$P = 10$
ML	4.64×10^{11}	8.51×10^{15}	1.34×10^{20}	1.93×10^{24}
HO-WD	4.12×10^7	7.22×10^9	1.13×10^{12}	1.65×10^{14}
HO-CPF	5.16×10^7	8.77×10^9	1.34×10^{12}	1.9×10^{14}
ML-GA	$[2.12, 3.19] \times 10^8$	\times	\times	\times
HO-WD-GA	\times	$[4.5, 6.5] \times 10^8$	$[5.4, 8.8] \times 10^8$	$[1.1, 1.3] \times 10^9$
HO-CPF-GA	\times	$[4.7, 7] \times 10^8$	$[1.2, 1.3] \times 10^9$	$[5.2, 5.3] \times 10^9$

Tabela 5.2: Prosječan broj računskih operacija GA za ML-om, HO-WD-om i HO-CPF-om.

I na kraju, Slika 5.5 ilustruje MSE-e HO-CPF-a. Svi parametri estimirani ovom metodom su asimptotski efikasni sa SNR pragom na oko 0 dB. I ovaj algoritam nadmašuje HAF i PHAF. Primjera radi, prag SNR-a HO-CPF-a sa GA je niži od praga PHAF-a za više od 15 dB. GA je bio u stanju izvršiti estimaciju PPS-a do $P = 10$ reda.

Radi demonstracije efikasnosti GA, u Tabeli 5.2 uporedili smo prosječan broj računskih operacija GA sa potrebnim brojem operacija ukoliko bi se koristila direktna pretraga. Broj operacija GA je računat za opseg SNR-a od 0 dB do 30 dB i svaki podatak u tabeli je predstavljen sa dvije vrijednosti: minimalnim i maksimalnim brojem operacija tokom trajanja iteracija. Iz tabele se može primjetiti da za 3D prostore pretrage GA ima manju kompleksnost nego odgovarajuće tehnike bazirane na direktnoj pretrazi, dok za pretrage viših dimenzija, GA je nesumnjivo bolje rješenje.

Dakle, u ovom primjeru smo vidjeli da smo sa GA u stanju unaprijediti performanse ML-a, HO-CPF-a i HO-WD-a. Naime, praktična aplikacija ML-a je sada moguća do PPS-a petoga reda, dok se HO-WD i HO-CPF mogu koristiti za PPS-e do $P = 10$. Pri tome, jedna od važnih karakteristika GA je da ne utiče na tačnost procedura u optimizaciju čijih pretraga je uključen, tj. svi algoritmi na koje je primjenjen su i dalje asimptotski efikasni. Implementacijom GA u posmatrane procedure, omogućili smo primjenu istih u bilo kojoj praktičnoj aplikaciji, jer trenutne aplikacije razmatraju PPS-e do desetog reda [23], [24].



Slika 5.5: MSE-i parametara PPS-a estimiranih pomoću HO-CPF, HAF i PHAF estimacionih procedura: prva vrsta - $P = 6$, (a) MSE \hat{a}_6 , (b) MSE \hat{a}_4 i (c) MSE \hat{a}_2 ; druga vrsta - $P = 8$, (d) MSE \hat{a}_8 , (e) MSE \hat{a}_6 i (f) MSE \hat{a}_4 ; treća vrsta - $P = 10$, (g) MSE \hat{a}_{10} , (h) MSE \hat{a}_8 i (i) MSE \hat{a}_6 .

Poglavlje 6

Tehnike za estimaciju parametara 2D PPS-a

2D PPS model signala ima široku primjenu u Synthetic Aperture Radar (SAR) i Inverse SAR (ISAR) radarskim sistemima, kao i u sonarima [21]. Na primjer, radarska slika predstavlja 2D FT 2D PPS-a. Stoga, od važnosti je izučavanje tehnika za estimaciju parametara ovih signala. U ovom poglavlju daćemo pregled, za nas, najznačajnijih tehnika za estimaciju parametara 2D PPS-a. Pored toga, izvršićemo generalizaciju HCPF-HAF-a opisanog u Sekciji 4.1 na 2D PPS.

6.1 Francos-Friedlander-ov metod

Francos-Friedlander-ov metod (FFM) predstavlja generalizaciju HAF-a na 2D PPS-e [36]-[38]. Naime, FFM koristi 2D PD operator da transformiše 2D PPS u signal, čiji se parametri mogu estimirati maksimizacijom 1D ili 2D periodograma. U zavisnosti od oblika faze 2D PPS-a (pravougaoni (relacija (2.25)) ili trougaoni (relacija (2.26))), razlikujemo dvije varijante FFM-a. Kod 2D PPS-a sa fazom pravougaonog oblika, FFM sa 2D PD operatorom transformiše signal u 1D PPS, pa se estimacija parametara ovoga signala svodi na estimaciju 1D PPS-a pomoću HAF-a. S druge strane, estimacija parametara 2D PPS-a sa fazom trougaonog oblika obavlja se transformacijom 2D PPS-a u 2D kompleksnu sinusoidu čije su frekvencije proporcionalne parametrima najvišeg sloja faze. Stoga, estimacijom frekvencije sinusoide, određuju se vrijednosti koeficijenata polinoma faze. U nastavku, objasnićemo algoritam za estimaciju parametara signala (2.26).

2D PD operator, u oznaci $PD_{x(n,m)}^{Q_1, Q_2}[n, m; \tau_n, \tau_m]$, može se posmatrati kao proces iz dva

koraka. U prvom koraku, signal $x(n, m)$ se 1D PD operatorom diferencira po n osi Q_1 put, da bi se potom, u drugom koraku, dobijeni signal istim operatorom diferencirao po m osi Q_2 puta. Ovo se može zapisati i matematičkim relacijama na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{PD}_{x(n,m)}^{Q_1,0}[n, m; \tau_n, 0] &= \text{PD}_{x(n,m)}^{Q_1}[n; \tau_n], \\ \text{PD}_{x(n,m)}^{Q_1,Q_2}[n, m; \tau_n, \tau_m] &= \text{PD}_{\text{PD}_{x(n,m)}^{Q_1,0}[n,m;\tau_n,0]}^{Q_2}[m; \tau_m]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

U relaciji (6.1), donji indeks 1D PD operatora i karakteri u uglastim zagradama (n ili m) govore o signalu i vremenskoj osi na koju se PD primjenjuje, respektivno. Primjetimo da smo ovdje podrazumjevali da su u svakom koraku 1D PD-a, po jednoj osi (n ili m), parametri pomjeraja jednaki. Jedan korak u PD operatoru po odgovarajućoj osi smanjuje red polinoma faze po istoj osi za jedan. $\text{PD}_{x(n,m)}^{q,P-1-q}[n, m; \tau_n, \tau_m]$ će transformisati signal $x(n, m)$ u kompleksnu sinusoidu sa frekvencijama (f_n, f_m) koje iznose:

$$\begin{aligned} f_n &= 2^{P-1}(q+1)!(P-1-q)!\tau_n^q\tau_m^{P-1-q}\Delta^{P-1}a_{q+1,P-1-q}, \\ f_m &= 2^{P-1}q!(P-q)!\tau_n^q\tau_m^{P-1-q}\Delta^{P-1}a_{q,P-q}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

pa se $a_{q+1,P-1-q}$ i $a_{q,P-q}$ mogu estimirati iz 2D FT-a na sledeći način:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_n, \hat{f}_m) &= \arg \max_{(f_n, f_m)} |\text{FT}\{\text{PD}_{x(n,m)}^{q,P-1-q}[n, m; \tau_n, \tau_m]\}|, \\ \hat{a}_{q+1,P-1-q} &= \frac{\hat{f}_n}{2^{P-1}(q+1)!(P-1-q)!\tau_n^q\tau_m^{P-1-q}\Delta^{P-1}}, \\ \hat{a}_{q,P-q} &= \frac{\hat{f}_m}{2^{P-1}q!(P-q)!\tau_n^q\tau_m^{P-1-q}\Delta^{P-1}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Da bi se estimirali svi parametri P -tog sloja, q mora uzeti sve vrijednosti u intervalu $[0, P-1]$. Tako, na primjer, za 2D PPS trećega reda, potrebno je izračunati $\text{PD}_{x(n,m)}^{0,2}[n, m; \tau_n, \tau_m]$, $\text{PD}_{x(n,m)}^{1,1}[n, m; \tau_n, \tau_m]$ i $\text{PD}_{x(n,m)}^{2,0}[n, m; \tau_n, \tau_m]$ i iz FT-a ovih signala odrediti pozicije maksimuma. Parametri nižih slojeva se mogu estimirati sličnom procedurom primjenjenom nad dechirpovanim signalom. Kompletan FFM algoritam je prikazan u Tabeli 6.1.

Postaviti $p = P$, $x_p(n, m) = x(n, m)$, $n \in [-N/2, N/2]$, $m \in [-M/2, M/2]$.

while $p \geq 2$

for $q = 0$ **to** $p-1$

 Estimirati $a_{q+1,p-1-q}$ i $a_{q,p-q}$

$$(\hat{f}_n, \hat{f}_m) = \arg \max_{(f_n, f_m)} |\text{FT}\{\text{PD}_{x_p(n,m)}^{q,p-1-q}[n, m; \tau_n, \tau_m]\}|,$$

$$\hat{a}_{q+1,p-1-q} = \frac{\hat{f}_n}{2^{p-1}(q+1)!(p-1-q)!\tau_n^q\tau_m^{p-1-q}\Delta^{p-1}},$$

$$\hat{a}_{q,p-q} = \frac{\hat{f}_m}{2^{p-1}q!(p-q)!\tau_n^q\tau_m^{p-1-q}\Delta^{p-1}}.$$

end for

Dechirpovati estimirane parametre

$$x_{p-1}(n, m) = x_p(n, m) \exp \left(-j \sum_k \sum_{\substack{l \\ k+l=p}} \hat{a}_{k,l} (n\Delta)^k (m\Delta)^l \right).$$

Postaviti $p = p - 1$.

end while

Estimirati $a_{1,0}$ i $a_{0,1}$

$$(\hat{f}_n, \hat{f}_m) = \arg \max_{(f_n, f_m)} |\text{FT}\{x_1(n, m)\}|,$$

$$\hat{a}_{1,0} = \frac{\hat{f}_n}{2},$$

$$\hat{a}_{0,1} = \frac{\hat{f}_m}{2}.$$

Ukloniti estimirane parametre iz faze signala $x_1(n, m)$

$$x_0(n, m) = x_1(n, m) \exp \left(-j \sum_k \sum_{\substack{l \\ k+l=1}} \hat{a}_{k,l} (n\Delta)^k (m\Delta)^l \right).$$

Estimirati $a_{0,0}$ kao

$$\hat{a}_{0,0} = \frac{1}{NM} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \sum_{m=-M/2}^{M/2} \angle x_0(n, m).$$

Tabela 6.1: FMM estimacioni algoritam.

Performanse FFM-a su značajno uslovljene izborom parametara τ_n i τ_m . Veće vrijednosti parametara pomjeraja smanjuju dužinu resultantnog signala, dok manje vrijednosti utiču na povećanje kros-korelacije između susjednih odbiraka. U [38], analiziran je uticaj ovih parametara na tačnost estimacije, gdje je pokazano da je MSE približno ravna funkcija u okolini tačke globalnog minimuma. Vrijednosti τ_n i τ_m koje minimizuju MSE za različito P mogu se odrediti pomoću relacija:

$$\tau_n^{\text{opt}} = \frac{N}{2(q+1)},$$

$$\tau_m^{\text{opt}} = \frac{M}{2(P-q)}.$$
(6.4)

Primjetimo da estimacija parametara FFM-om zahtijeva sprovođenje pretrage po 2D prostoru. Dimenzija pretrage se može smanjiti dodatnom auto-korelacijom, koja bi transformisala 2D kompleksnu sinusoidu u 1D kompleksnu sinusoidu, ali ova operacija

nije poželjna, jer dolazi do povećavanja broja kros- i interferentnih članova.

FFM je, od HAF-a, naslijedio slične mane: visok prag SNR-a i propagaciju greške. Uticaj ovih efekata raste sa porastom reda signala. Stoga, da bi se poboljšale karakteristike ovoga estimatora, potrebno je smanjiti broj PD-a.

6.2 2D CPF

Povedeni odličnim performansama CPF-a kod 1D PPS-a, u [39] i [40] predložena je 2D verzija CPF-a (2D CPF) za estimaciju parametara 2D PPS-a trećega reda:

$$\begin{aligned} \text{CPF2D}(n, m; \mathbf{\Omega}(n, m)) &= \sum_{\tau_n = -N_{\min}(n)}^{N_{\min}(n)} \sum_{\tau_m = -M_{\min}(m)}^{M_{\min}(m)} x(n + \tau_n, m + \tau_m) x(n - \tau_n, m - \tau_m) \\ &\times \exp(-j\Delta^2 (\Omega_n \tau_n^2 + \Omega_m \tau_m^2 + 2\Omega_{nm} \tau_{nm}^2)), \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(n, m) &= [\Omega_n(n, m), \Omega_m(n, m), \Omega_{nm}(n, m)], \\ N_{\min}(p) &= \min\{N/2 - p - 1, N/2 + p\}, \\ M_{\min}(p) &= \min\{M/2 - p - 1, M/2 + p\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

U odsustvu šuma, maksimum 2D CPF-a je pozicioniran u tački čije koordinate odgovaraju drugim parcijalnim izvodima faze $\phi(n, m)$:

$$\begin{aligned} \Omega_n(n, m) &= \frac{\partial^2 \phi(n, m)}{\partial n^2} = 2a_{2,0} + 2a_{2,1}\Delta m + 6a_{3,0}\Delta n, \\ \Omega_m(n, m) &= \frac{\partial^2 \phi(n, m)}{\partial m^2} = 2a_{0,2} + 2a_{1,2}\Delta n + 6a_{0,3}\Delta m, \\ \Omega_{nm}(n, m) &= \frac{\partial^2 \phi(n, m)}{\partial n \partial m} = 2a_{2,1}\Delta n + 2a_{1,2}\Delta m + a_{1,1}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Svaki parcijalni izvod sadrži po tri parametra faze signala $s(n, m)$ iz drugog i trećeg sloja. Stoga, da bi se estimirali koeficijenti faze, neophodno je izračunati 2D CPF u tri tačke i, na osnovu estimacija izvoda, riješiti tri sistema jednačina sa po tri nepoznate. Ova procedura se može opisati pomoću tri koraka:

korak 1: Izabrati tri tačke sa vremenskih osa, (n_i, m_i) , $i = 1, 2, 3$;

korak 2: Estimirati odgovarajuće $\mathbf{\Omega}(n_i, m_i)$, $i = 1, 2, 3$ pretragom za maksimumom u (6.5);

korak 3: Estimirati parametre $\{a_{3,0}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{0,3}, a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}\}$ pomoću sledećih relacija:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{a}_{2,0} \\ \hat{a}_{3,0} \\ \hat{a}'_{2,1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 6\Delta n_1 & 2\Delta m_1 \\ 2 & 6\Delta n_2 & 2\Delta m_2 \\ 2 & 6\Delta n_3 & 2\Delta m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_n(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_n(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_n(n_3, m_3) \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \hat{a}_{0,2} \\ \hat{a}_{0,3} \\ \hat{a}'_{1,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 6\Delta m_1 & 2\Delta n_1 \\ 2 & 6\Delta m_2 & 2\Delta n_2 \\ 2 & 6\Delta m_3 & 2\Delta n_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_m(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_m(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_m(n_3, m_3) \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \hat{a}_{1,1} \\ \hat{a}''_{2,1} \\ \hat{a}''_{1,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2\Delta n_1 & 2\Delta m_1 \\ 1 & 2\Delta n_2 & 2\Delta m_2 \\ 1 & 2\Delta n_3 & 2\Delta m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{nm}(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_{nm}(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_{nm}(n_3, m_3) \end{bmatrix}, \\
\hat{a}_{1,2} &= \frac{\hat{a}'_{1,2} + \hat{a}''_{1,2}}{2}, \\
\hat{a}_{2,1} &= \frac{\hat{a}'_{2,1} + \hat{a}''_{2,1}}{2}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Kao i kod FFM-a, parametri nižih slojeva mogu se estimirati dechirpovanjem. Primjetimo da, za razliku od FFM-a, 2D CPF, pored niže nelinearnosti, ima i smanjen uticaj propagacije greške. Naime, svi parametri drugog i trećeg sloja su oslobođeni ovog fenomena.

Najveći problem 2D CPF-a je potreba za pretragom po 3D prostoru parametara, $[\Omega_n(n, m), \Omega_m(n, m), \Omega_{nm}(n, m)]$, što je računski veoma zahtjevno. Međutim, u [39] upotrebom GA značajno je umanjena kompleksnost ove estimacione procedure, čime je omogućena brza estimacija.

MSE-i parametara $\{a_{3,0}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{0,3}, a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}\}$ prikazani su u Tabeli 6.2, gdje su dati i odgovarajući CRLB-i [39]. Izrazi u Tabeli 6.2 dobijeni su izborom sledećih vremenskih trenutaka $(n_1, m_1) = (0, 0)$, $(n_2, m_2) = (0.11N, 0)$, $(n_3, m_3) = (0, 0.25M)$, koji minimizuju MSE. Iz tabele vidimo da su, za veliko SNR, parametri drugoga sloja asimptotski optimalni, dok to, za parametre trećega sloja, nije slučaj. Naime, MSE-i ovih parametara su oko 1.35 puta veći u odnosu na odgovarajuće CRLB-e.

CPF je, i ovdje, pokazala značajno bolje performanse u odnosu na HAF (FFM), koje se ogledaju u smanjenom pragu SNR-a za oko 8 dB i manjim MSE-om.

Parametri faze	MSE	CRLB
a_{20}	$\frac{90(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNRN}^5 M \Delta^4}$	$\frac{90}{\text{SNRN}^5 M \Delta^4}$
a_{02}	$\frac{90(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNRM}^5 N \Delta^4}$	$\frac{90}{\text{SNRM}^5 N \Delta^4}$
a_{11}	$\frac{72(1+\frac{1}{2\text{SNR}})}{\text{SNRM}^3 N^3 \Delta^4}$	$\frac{72}{\text{SNRM}^3 N^3 \Delta^4}$
a_{30}	$\frac{2036.03+\frac{1844.46}{\text{SNR}}}{\text{SNRN}^7 M \Delta^6}$	$\frac{1400}{\text{SNRN}^7 M \Delta^6}$
a_{03}	$\frac{2036.03+\frac{1844.46}{\text{SNR}}}{\text{SNRN}^7 M \Delta^6}$	$\frac{1400}{\text{SNRN}^7 M \Delta^6}$
a_{21}	$\frac{1440+\frac{2160}{\text{SNR}}}{\text{SNRN}^5 M^3 \Delta^6}$	$\frac{1080}{\text{SNRN}^5 M^3 \Delta^6}$
a_{12}	$\frac{1440+\frac{2160}{\text{SNR}}}{\text{SNRN}^3 M^5 \Delta^6}$	$\frac{1080}{\text{SNRN}^3 M^5 \Delta^6}$

Tabela 6.2: MSE-i parametara 2D PPS-a estimiranih pomoću 2D-CPF-a i odgovarajući CRLB-i.

6.3 2D HCPF-HAF

2D HCPF-HAF je jedan od doprinosa ove teze [26]. Kao i 2D CPF za CPF, 2D HCPF-HAF predstavlja generalizaciju HCPF-HAF-a na 2D PPS-e. Ideja je ista - upotrebiti 2D PD da bi se dobio 2D PPS trećega reda, čiji su parametri dva najviša sloja proporcionalni parametrima najviših slojeva posmatranog signala. Potom estimirati te parametre 2D CPF-om.

Ako 2D PD operatorom diferenciramo fazu signala $s(n, m)$ iz (2.26) ukupno $(P - 3)$ puta po m i n osi, dobićemo 2D PPS trećega reda

$$\begin{aligned}
& \text{PD}_{s(n,m)}^{q,P-3-q}[n, m; \tau_n, \tau_m] = A^{2^{P-3}} \\
& \times \exp \left(j \sum_{k+l=P} \sum_{k \geq q, l \geq P-3-q} 2^{P-3} \frac{k!l!a_{k,l}n^{k-q}m^{l-P+3+q}\tau_n^q\tau_m^{P-3-q}\Delta^P}{(k-q)!(l-P+3+q)} + \right. \\
& \left. j \sum_{k+l=P-1} \sum_{k \geq q, l \geq P-3-q} 2^{P-3} \frac{k!l!a_{k,l}n^{k-q}m^{l-P+3+q}\tau_n^q\tau_m^{P-3-q}\Delta^{P-1}}{(k-q)!(l-P+3+q)} + j\phi_1(n, m) \right), \quad (6.9)
\end{aligned}$$

gdje je q ($q \leq P - 3$) broj diferenciranja po n osi i $\phi_1(n, m)$ polinom trougaonog oblika prvog stepena (vidjeti $\phi(n, m)$ iz relacije (2.26)). Primjetimo da u prvoj sumi figurišu samo koeficijenti iz P -tog sloja signala $s(n, m)$, dok se u drugoj sumi nalaze samo koeficijenti iz $(P-1)$ -og sloja. Stoga, estimacijom parametara trećeg i drugog sloja signala $\text{PD}_{s(n,m)}^{q,P-3-q}[n, m; \tau_n, \tau_m]$ možemo odrediti odgovarajuće parametre P -tog i $(P-1)$ -og sloja faze $s(n, m)$, respektivno. Estimaciju ova dva sloja možemo obaviti istovremeno, pomoću 2D CPF-a uvedenog u prethodnoj sekciji.

Primjetimo da je računanje 2D PD-a za jednu vrijednost q nedovoljno, jer smo u stanju da estimiramo samo sedam koeficijenata, četiri iz P -tog sloja i tri iz $(P - 1)$ -og sloja. Da bi odredili sve parametre dva najviša sloja, neophodno je napraviti takve izbore q koji će rezultirati 2D PPS-ovima trećega reda čije faze zajedno u drugom i trećem sloju sadrže ove koeficijente. Kada se odrede parametri dva najviša sloja, parametri nižih slojeva se mogu estimirati na osnovu dechirpovanog signala primjenom slične procedure. Estimaciona procedura na bazi 2D HCPF-HAF-a je sumirana u Tabeli 6.3.

Postaviti $p = P$, $x_p(n, m) = x(n, m)$, $n \in [-N/2, N/2]$, $m \in [-M/2, M/2]$.

while $p \geq 3$

Estimirati parametre dva najviša sloja signala $x_p(n, m)$ maksimizacijom 2D CPF-a primijenjenog na signalima $\text{PD}_{x_p(n, m)}^{q, p-3-q}[n, m; \tau_n, \tau_m]$, za q -ove izabrane iz intervala $[0, q]$.

Ukloniti estimirane parametre $\hat{a}_{k, l}$, $p - 1 \leq k + l \leq p$, iz faze signala $x_p(n, m)$

$$x'_{p-2}(n, m) = x_p(n, m) \exp \left(-j \sum_{k+l=p-1} \hat{a}_{k, l} (n\Delta)^k (m\Delta)^l \right).$$

Postaviti $p = p - 2$.

end while

Estimirati parametre $\hat{a}_{k, l}$, $0 \leq k + l \leq p$ signala $x_p(n, m)$ pomoću FFM-a opisanog u Sekciji 6.1.

Tabela 6.3: 2D HCPF-HAF estimacioni algoritam.

Estimaciju parametara dva najviša sloja pomoću 2D HCPF-HAF-a objasnimo na primjeru 2D PPS-a četvrtog reda. Dva PD-a signala $s(n, m)$ po n osi daju signal čija je faza oblika:

$$\begin{aligned} \angle \text{PD}_{s(n, m)}^{2, 0}[n, m; \tau_n, \tau_m] = & 2a_{1, 3}\Delta^4\tau_n m^3 + 8a_{4, 0}\Delta^4\tau_n n^3 + 6a_{3, 1}\Delta^4\tau_n m n^2 + 4a_{2, 2}\Delta^4 m^2 n \tau_n \\ & + 2a_{1, 2}\Delta^3\tau_n m^2 + 6a_{3, 0}\Delta^3\tau_n n^2 + 4a_{2, 1}\Delta^3 m n \tau_n + 2a_{1, 1}\Delta^2\tau_n m \\ & + 2a_{3, 1}\Delta^4\tau_n^3 m + 8a_{4, 0}\Delta^4\tau_n^3 n + 4a_{2, 0}\Delta^2\tau_n n + 2a_{1, 0}\Delta\tau_n + 2a_{3, 0}\Delta^2\tau_n^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

2D CPF primijenjen na $\text{PD}^{2, 0}[n, m; \tau_n, \tau_m]$ imaće maksimum u tački čije su koordinate

date sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}
\Omega_n(n, m) &= 12a_{3,0}\Delta\tau_n + 12a_{3,1}\Delta^2\tau_n m + 48a_{4,0}\Delta^2\tau_n n, \\
\Omega_m(n, m) &= 4a_{1,2}\Delta\tau_n + 8a_{2,2}\Delta^2\tau_n n + 12a_{1,3}\Delta^2\tau_n m, \\
\Omega_{nm}(n, m) &= 4a_{2,1}\Delta\tau_n + 8a_{2,2}\Delta^2\tau_n m + 12a_{3,1}\Delta^2\tau_n n.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Stoga, parametri $\{a_{3,0}, a_{3,1}, a_{4,0}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{2,1}\}$ se mogu estimirati određivanjem pozicija maksimuma 2-D CPF-a u tri tačke (n_1, m_1) , (n_2, m_2) i (n_3, m_3) i rješavanjem sistema dobijenih jednačina:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{a}_{3,0} \\ \hat{a}'_{3,1} \\ \hat{a}_{4,0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12\Delta\tau_n & 12\Delta^2\tau_n m_1 & 48\Delta^2\tau_n n_1 \\ 12\Delta\tau_n & 12\Delta^2\tau_n m_2 & 48\Delta^2\tau_n n_2 \\ 12\Delta\tau_n & 12\Delta^2\tau_n m_3 & 48\Delta^2\tau_n n_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_n(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_n(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_n(n_3, m_3) \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \hat{a}_{1,2} \\ \hat{a}'_{2,2} \\ \hat{a}_{1,3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_1 & 12\Delta^2\tau_n m_1 \\ 4\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_2 & 12\Delta^2\tau_n m_2 \\ 4\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_3 & 12\Delta^2\tau_n m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_m(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_m(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_m(n_3, m_3) \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \hat{a}''_{3,1} \\ \hat{a}''_{2,2} \\ \hat{a}_{2,1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_1 & 4\Delta^2\tau_n m_1 \\ 12\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_2 & 4\Delta^2\tau_n m_2 \\ 12\Delta\tau_n & 8\Delta^2\tau_n n_3 & 4\Delta^2\tau_n m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{nm}(n_1, m_1) \\ \hat{\Omega}_{nm}(n_2, m_2) \\ \hat{\Omega}_{nm}(n_3, m_3) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

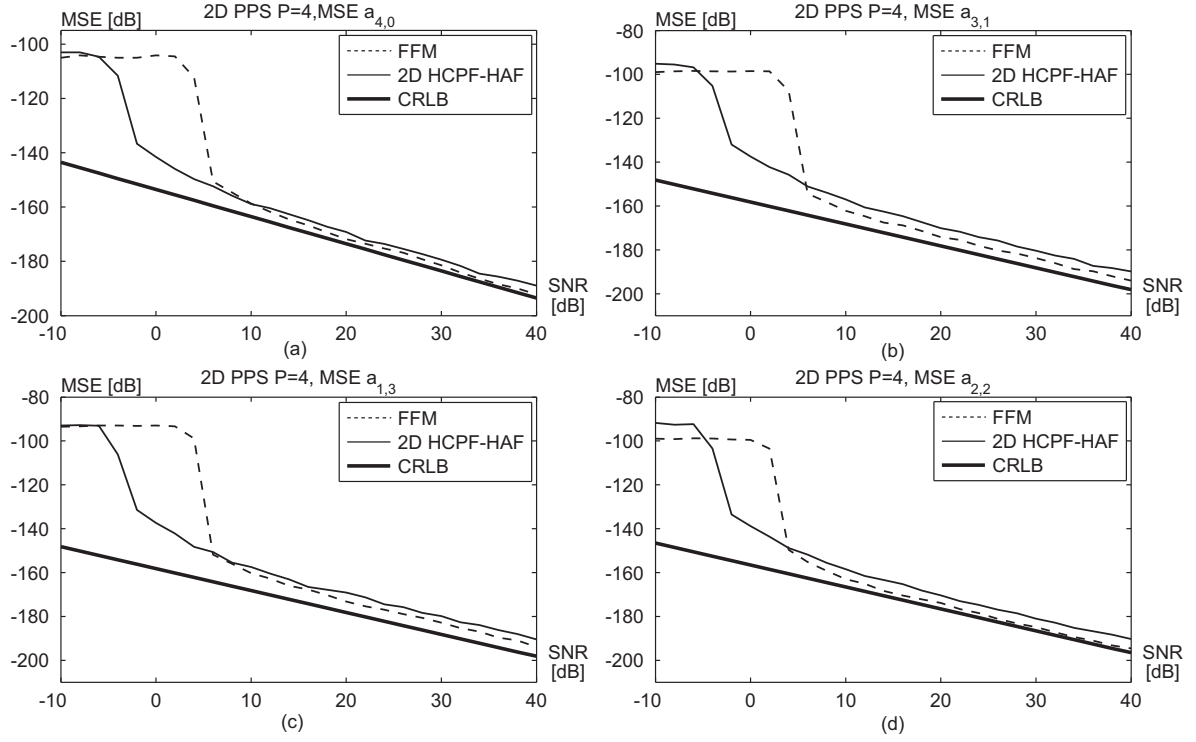
Slično, $a_{0,3}$ i $a_{0,4}$ se određuju pomoću iste procedure, primjenjene na $\text{PD}^{0,2}[n, m; \tau_n, \tau_m]$.

Na ovaj način smo estimaciju 2D PPS-a P -tog reda sveli na estimacije 2D PPS-ova trećeg reda, koje su značajno računski prihvatljivije od standardnog ML-a. Za potrebe optimizacije pretrage u 2D CPF-u, u sekciji sa numeričkim primjerima, definisćemo odgovarajuću postavku GA sa kojom će GA biti u stanju da efikasno obavi postavljeni zadatak.

Performanse opisanog estimatora ispitaćemo na numeričkim primjerima u narednoj sekciji.

6.4 Numerički primjer

S ciljem evaluacije performansi 2D HCPF-HAF-a, posmatrali smo trougaoni 2D PPS četvrtog reda sa sledećim parametrima: $A = 1$, $a_{0,0} = 1$, $a_{1,0} = 4.5 \cdot 10^{-1}$, $a_{0,1} = 8.2 \cdot 10^{-2}$, $a_{2,0} = -1.5 \cdot 10^{-3}$, $a_{1,1} = 6 \cdot 10^{-3}$, $a_{0,2} = -2.2 \cdot 10^{-3}$, $a_{3,0} = 1.7 \cdot 10^{-5}$, $a_{2,1} = 4 \cdot 10^{-5}$,



Slika 6.1: MSE-i parametara 2D PPS-a estimiranih pomoću FFM-a i 2D HCPF-HAF-a: (a) MSE $\hat{a}_{4,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{3,1}$; (c) MSE $\hat{a}_{1,3}$ i (d) MSE $\hat{a}_{2,2}$.

$a_{1,2} = 3.73 \cdot 10^{-5}$, $a_{0,3} = -1.35 \cdot 10^{-5}$, $a_{0,4} = 4.5 \cdot 10^{-6}$, $a_{4,0} = -2.3 \cdot 10^{-6}$, $a_{1,3} = 1.23 \cdot 10^{-6}$, $a_{3,1} = 3.2 \cdot 10^{-6}$ i $a_{2,2} = 6.2 \cdot 10^{-6}$. Signal je odabran sa korakom $\Delta = 1$ i $M = N = 100$.

Parametre ovoga signala estimirali smo pomoću FFM-a i 2D HCPF-HAF-a. U cilju minimizacije greške, izbor τ_n i τ_m kod FFM-a je napravljen prema uputstvima iz [38], dok smo, kod 2D HCPF-HAF-a, koristili $\tau_n = \tau_m = 12$. 2D CPF je računat u sledeće tri tačke: (5, 5), (5, 10) i (10, 5). Kako estimacija parametara pomoću 2D HCPF-HAF-a zahtijeva 3 pretrage po 3D prostoru, optimizaciju smo izvršili pomoću GA čije su postavke date u Tabeli 6.4. Za dobijanje numeričkih vrijednosti MSE-a, korišćeno je 300 iteracija Monte Carlo simulacija. SNR je posmatran u rasponu od -10 dB do 40 dB.

MSE-i karakterističnih parametara najvišeg sloja, $\hat{a}_{4,0}$, $\hat{a}_{3,1}$, $\hat{a}_{1,2}$ i $\hat{a}_{2,2}$, prikazani su na Slikama 6.1 (a), (b), (c) i (d), respektivno. Odavde možemo zaključiti da 2D HCPF-HAF ima oko 8 dB niži prag SNR-a u odnosu na FFM. Naime, prag 2D HCPF-HAF-a je na -2 dB, dok je prag FFM-a na 6 dB. Međutim, MSE FFM-a iznad praga je u prosijeku od 2 dB do 3 dB manji u odnosu na MSE 2D HCPF-HAF-a. Ovo je posledica korišćenja GA u optimizaciji pretrage 2D CPF-a. Slično ponašanje MSE-a dobijeno je i u [39], gdje je pokazano da 2D CPF, u slučaju direktne pretrage, daje asimptotski efikasne parametre, dok GA unosi određenu grešku.

Mak. generacija	300
Br. stab. generacija	20
OF	2D CPF
Populacija	
veličina	5×25
tip kodiranja	vektor realnih brojeva
Inicijalna populacija	
distribucija	uniformna
opseg vrijednosti	$[-2 \cdot 10^{-3}; 9.5 \cdot 10^{-3}]$
Selekcija	ruletni točak
Elite count	2
Ukrštanje	
tip	heuristično
odnos	1.2
Mutacija	
tip	Gauss-ova
inic. var	0.8
Migracija	
smjer	oba smjera
interval	20
proc. jedinki	20%
Stall generation	20

Tabela 6.4: Postavka GA za optimizaciju pretrage u 2D HCPF-HAF-u.

I pored ove mane GA, 8 dB niži prag predstavlja ogroman dobitak, jer omogućava primjenjivost tehnike za značajno niže vrijednosti SNR-a. U narednom poglavlju vidjećemo kako se tehnikama za poboljšanje tačnosti parametara može otkloniti ovaj nedostatak 2D HCPF-HAF-a uzrokovan GA-om.

Poglavlje 7

Tehnike za poboljšanje tačnosti PPS parametara

Tačnost estimacione procedure je uslovljena gustom prostora (brojem tačaka) po kome se vrši pretraga. Pretraga izvršena po prostoru koji sadrži više tačaka produkovaće preciznije estimirane vrijednosti i obratno. Međutim, gušći prostor ujedno znači i veću računsku složenost. Stoga, u praksi, estimacija parametara se odvija u dva koraka. U prvom koraku se vrši pretraga po prostoru sa manje tačaka da bi se dobila informacija o mogućoj poziciji maksimuma. Ovo predstavlja tzv. *grubu estimaciju*. Potom, u drugom koraku, formira se fina mreža oko grubo estimiranog parametra i ponovo vrši pretraga, koja će dati precizniju poziciju maksimuma. Kako i ovaj drugi korak nekada zna da bude zahtjevan, pristupilo se pronalaženju tehnika za precizno određivanje pozicije maksimuma sa što manjom računskom složnošću. U ovom poglavlju upoznaćemo se sa Aboutanios-Mulgrew (AM) algoritmom, dihotomnom pretragom i O'Shea metodom [41]-[44]. Pokazaćemo da se prve dvije tehnike veoma uspješno mogu upotrebiti u estimaciji parametara PPS-a, dok ćemo treću metodu generalizovati za 2D PPS-e i multikomponentne PPS-e.

7.1 AM algoritam

AM algoritam prvobitno je bio predložen kao metoda za fino određivanje frekvencije sinusoide, kada je gruba procijena iste poznata [43]. U [43], pokazano je da se frekvencija sinusoide može estimirati sa tačnošću CRLB-a na osnovu računanja FT-a u samo par

tačaka. Kako HAF u osnovi ima estimaciju frekvencije, u [45] je AM primjenjen na ovu estimacionu proceduru.

Ideju koja je motivisala pronalazak AM algoritma objasnimo na primjeru estimacije frekvencije sinusoidalnog signala zahvaćenog aditivnim bijelim Gauss-ovim šumom $\nu(n)$

$$y(n) = A \exp(j(2\pi k \Delta f + \phi_0)) + \nu(n), \quad n \in [0, N-1], \quad (7.1)$$

gdje su A , f i ϕ_0 amplituda, frekvencija i inicijalna faza signala, respektivno, dok parametar Δ predstavlja korak odabiranja. N je broj odbiraka signala.

Frekvenciju ovoga signala možemo odrediti lociranjem maksimuma njegovog FT-a¹

$$\hat{f} = \arg \max_{\lambda} \left| \sum_{k=0}^{N-1} y(n) \exp(-j2\pi k \lambda) \right|^2.$$

Ako sa \hat{m} označimo poziciju maksimuma FT-a, frekvencija signala zadovoljava sljedeću relaciju

$$f = \frac{\hat{m} + \delta}{N\Delta}, \quad (7.2)$$

gdje je δ , $\delta \in [-0.5, 0.5]$, parametar koji govori za koliko je stvarna vrijednost frekvencije pomjerena u odnosu na poziciju maksimuma. Stoga, precizno određivanje f se svodi na estimaciju parametra δ .

Da bi odredili δ posmatrajmo dva odbirka FT-a

$$X_p = \sum_{k=0}^{N-1} y(n) \exp\left(-j2\pi k \frac{\hat{m} + p}{N}\right), \quad p = \pm 0.5. \quad (7.3)$$

Zamjenom (7.1) i (7.2) u relaciju (7.3), dobijamo

$$X_p = \exp(j\phi_0) \frac{1 + \exp(j2\pi\delta)}{1 - \exp(j2\pi\frac{\delta-p}{N})} + V_p, \quad (7.4)$$

gdje je V_p član koji potiče od šuma. Pod pretpostavkom $(\delta - p) \ll N$, X_p možemo zapisati kao

$$X_p = b \frac{\delta}{\delta - p} + V_p, \\ b = -N \exp(j\phi_0) \frac{1 + \exp(j2\pi\delta)}{j2\pi\delta}. \quad (7.5)$$

U odsustvu šuma, magnituda X_p je

$$|X_p| = |b\delta| \left| \frac{1}{\delta - p} \right|. \quad (7.6)$$

¹Maksimizacija FT-a $y(n)$ predstavlja ML ovoga signala.

Kako je $|\delta| \leq 0.5$, slijedi

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{|b\delta|^{\frac{1}{0.5-\delta}} - |b\delta|^{\frac{1}{0.5+\delta}}}{|b\delta|^{\frac{1}{0.5-\delta}} + |b\delta|^{\frac{1}{0.5+\delta}}} = \frac{1}{2} \frac{|X_{0.5}| - |X_{-0.5}|}{|X_{0.5}| + |X_{-0.5}|}. \quad (7.7)$$

Gornja relacija daje nam direktnu vezu između vrijednosti za koju treba korigovati frekvenciju sa odbircima FT-a. Vidimo, da za finu interpolaciju frekvencije, dovoljno je izračunati FT u samo dvije tačke.

Kako šum značajno može narušiti reprezentaciju FT-a, u [43] je predloženo određivanje δ kroz nekoliko iteracija. Umjesto da ovaj iterativni postupak objasnimo na estimaciji sinusoide, vratimo se parametarskoj estimaciji PPS-a, koja je i tema ovoga rada, i opišimo kako pomoću AM algoritma možemo poboljšati tačnost parametara HAF-a.

Pretpostavimo da imamo grubu procijenu parametra a_P , \hat{a}_P^c :

$$\begin{aligned} \hat{a}_P^c &= \frac{1}{k} \arg \max_{\omega} |\text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau)|^2, \\ \text{HAF}_x^{P-1}(\omega; \tau) &= \sum_n \text{PD}^{P-1}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-1}] \exp(-j\omega n), \\ k &= 2^{P-1} P! \Delta^{P-1} \prod_{k=1}^{P-1} \tau_k. \end{aligned} \quad (7.8)$$

AM tehnika vrši poboljšanje tačnosti \hat{a}_P^c kroz iterativnu proceduru koja se sastoji iz tri koraka:

korak 1: Postaviti $\delta = 0$;

korak 2: Za $q = 1, 2, \dots, Q$ izračunati

$$\delta = \delta + \frac{1}{2} \frac{|\text{HAF}_x^{P-1}(k\hat{a}_P^c + \delta + 0.5; \tau)| - |\text{HAF}_x^{P-1}(k\hat{a}_P^c + \delta - 0.5; \tau)|}{|\text{HAF}_x^{P-1}(k\hat{a}_P^c + \delta + 0.5; \tau)| + |\text{HAF}_x^{P-1}(k\hat{a}_P^c + \delta - 0.5; \tau)|}, \quad (7.9)$$

korak 3: Odrediti poboljšani parametar \hat{a}_P

$$\hat{a}_P = \hat{a}_P^c + \frac{\delta\pi}{N\Delta^P 2^{P-1} P! \prod_{k=1}^{P-1} \tau_k}. \quad (7.10)$$

Pokazuje se da je, za dostizanje limita propisanih MSE-om, dovoljno obaviti $Q = 2$ iteracije. To znači da poboljšanje tačnosti HAF parametara ima veoma malu kompleksnost, jer zahtijeva računanje FT-a u svega četiri tačke.

Osnovna mana AM algoritma je u tome što se ova tehnika može upotrebiti jedino u estimacionim procedurama koje u posljednjem koraku vrše estimaciju frekvencije. Kako standardna CPF procedura ne uključuje estimaciju frekvencije, AM algoritam je ovdje neupotrebljiv. Međutim, sa definisanjem NO-CPF-a, omogućili smo primjenu AM-a i u računanju CPF-a.

7.2 Dihotomna pretraga

Kao i AM algoritam, i dihotomna pretraga je iterativni algoritam [41], [42]. To je još jedna od tehnika koja je uspostavljena za estimaciju frekvencije. Međutim, zbog svojih karakteristika i jednostavnosti, vrlo lako se može primjeniti na bilo koji estimator koji uključuje pretragu za parametrima. Stoga, mi smo ovaj algoritam primjenili na CPF i HCPF-HAF u [46] i dobili zadovoljavajuće rezultate.

U želji da generalizujemo ovaj algoritam na sve 1D estimatore uvedene u radu, pretpostavimo da je cilj estimacije maksimizacija funkcije $EF(k)$, gdje je EF bilo koji 1D estimator i k osa po kojoj se vrši pretraga. Pretpostavimo još da je inicijalna pretraga za maksimumom EF -a obavljena na intervalu $[K_{\min}, K_{\max}]$ sa rezolucijom Δk . Poziciju maksimuma dobijenog na osnovu ove pretrage označimo sa m^c .

Standardne tehnike za estimaciju parametara bi, u koraku poboljšanja tačnosti, izvršile preodabiranje k ose na intervalu $[m^c - \Delta k, m^c + \Delta k]$ u novih $2\Delta k/\Delta k_1$ tačaka (Δk_1 je korak preodabiranja), i potom obavile ponovnu pretragu za maksimumom $EF(k)$. Dobijeni parametar bi proglasili za poboljšani koeficijent, \hat{m} . Ovaj postupak, dakle, za poboljšanje tačnosti parametra m zahtijeva ponovno računanje estimatorske funkcije u $2\Delta k/\Delta k_1$ tačaka, što nekada može da predstavlja dosta zahtjevnju proceduru.

Za razliku od opisane procedure, dihotomna pretraga, da bi došla do pozicije stvarnog maksimuma, u svakoj iteraciji računa $EF(k)$ za tačku na početku, na kraju i u sredini posmatranog intervala. Potom novi interval formira od tačke koja se nalazi u sredini prethodnog intervala i one tačke sa ivica za koju je $EF(k)$ veći. Postupak se ponavlja određen broj puta i kada se završi, tačka u sredini intervala, dobijenog u poslednjoj iteraciji, predstavlja \hat{m} .

Dihotomni algoritam, opisan kroz tri koraka slijedi u nastavku:

korak 1: Sa EF_0 označimo $EF(k)$ računat za $k = m^c$, tj. $EF_0 = EF(m^c)$. Izračunati $EF(k)$ za $k = m^c \pm \Delta k/2$:

$$EF_{\pm 1} = EF(m^c \pm \Delta k/2);$$

korak 2: Ponoviti L puta sledeće korake:

$$\Delta k = \Delta k/2,$$

ako je $EF_1 > EF_{-1}$ onda

$$EF_{-1} = EF_0 \text{ i } k = k + \Delta k,$$

u suprotnom

$$EF_1 = EF_0 \text{ i } k = k - \Delta k.$$

Izračunati $EF(k)$ i postaviti $EF_0 = EF(k)$.

korak 3: Na kraju, \hat{m} predstavlja poslednju vrijednost k :

$$\hat{m} = k.$$

Algoritam je izveden pod pretpostavkom da je, u okolini m , EF , za $k < m$, monotono rastuća funkcija, dok je, za $k > m$, monotono opadajuća funkcija. Pod tim uslovima, jasno je da se m nalazi u intervalu $[m^c - \Delta k/2, m^c + \Delta k/2]$. Da li je m sa lijeve ili desne strane m^c , zavisi od vrijednosti EF -a na krajevima posmatranog intervala. Ako je $EF(m^c - \Delta k/2) > EF(m^c + \Delta k/2)$, sigurni smo da je pozicija stvarnog maksimuma lijevo od m^c , i obratno. Da bi odredio poziciju stvarnog maksimuma, opisani algoritam u drugom koraku, u svakoj iteraciji, vrši polovljenje posmatranog intervala, usmjeravajući pretragu ka većim vrijednostima EF -a. Nakon L iteracija, algoritam pretpostavlja da je interval oko m dovoljno sužen i za vrijednost m , u trećem koraku, usvaja vrijednost središnje tačke poslednjeg posmatranog intervala. U sekciji sa numeričkim primjerima vidjećemo koliko je dovoljno iteracija sprovesti da bi se dostigle teorijske vrijednosti MSE-a upotrebljene tehnike.

Primjetimo da L iteracija dihotomne pretrage je ekvivalentno preodabiranju ose pretrage u 2^L tačaka. Poboljšanje tačnosti parametara se pomoću ovog algoritma ostvaruje kroz računanje estimatorske funkcije u $(L + 2)$ tačaka. To znači da se dihotomnom pretragom kompleksnost poboljšanja tačnosti parametara smanjuje za $[2^L - (L + 2)]U$ operacija, gdje je U složenost korišćene estimatorske funkcije.

7.3 Dihotomna pretraga u 2D prostorima

Još jedan od doprinosa ove teze predstavlja implementaciju algoritma dihotomne pretrage na 2D prostore. Estimatorska funkcija je sada 2D funkcija, $EF(k_1, k_2)$. Cilj je obaviti efikasnu pretragu po $[K_1^{\min}, K_1^{\max}] \times [K_2^{\min}, K_2^{\max}]$. Pretpostavimo da gruba pretraga sa koracima Δk_1 i Δk_2 daje početne estimacije (m_1^c, m_2^c) pozicije maksimuma funkcije $EF(k_1, k_2)$. Pozicija stvarnog maksimuma (m_1, m_2) se nalazi u 2D prostoru $[m_1^c - \Delta k_1/2, m_1^c + \Delta k_1/2] \times [m_2^c - \Delta k_2/2, m_2^c + \Delta k_2/2]$. Posmatrani 2D interval se

može podijeliti na četiri podintervala, $I_1 = [m_1^c, m_1^c + \Delta k_1/2] \times [m_2^c, m_2^c + \Delta k_2/2]$, $I_2 = [m_1^c - \Delta k_1/2, m_1^c] \times [m_2^c, m_2^c + \Delta k_2/2]$, $I_3 = [m_1^c - \Delta k_1/2, m_1^c] \times [m_2^c - \Delta k_2/2, m_2^c]$ i $I_4 = [m_1^c, m_1^c + \Delta k_1/2] \times [m_2^c - \Delta k_2/2, m_2^c]$, i pretraga za (m_1, m_2) usmjeriti ka jednom od njih. Kao i u 1D slučaju, izbor podintervala se obavlja poređenjem vrijednosti $EF(k_1, k_2)$. Ako je $EF(m_1^c - \Delta k_1/2, m_2^c) > EF(m_1^c + \Delta k_1/2, m_2^c)$ pretragu treba skoncentrisati na I_2 i I_3 . Da li izabrati I_2 ili I_3 , zavisi od odnosa vrijednosti estimatorske funkcije u tačkama $(m_1^c, m_2^c \pm \Delta k_2/2)$. Ako je $EF(m_1^c, m_2^c - \Delta k_2/2) > EF(m_1^c, m_2^c + \Delta k_2/2)$ maksimum se sigurno nalazi u podintervalu I_3 , dok je u suprotnom u I_2 . Slično, ako je $EF(m_1^c - \Delta k_1/2, m_2^c) \leq EF(m_1^c + \Delta k_1/2, m_2^c)$, pretraga se ograničava na I_1 i I_4 i poređenjem EF -a u $(m_1^c, m_2^c \pm \Delta k_2/2)$ određuje izbor podintervala. Interval pretrage treba sužavati kroz L iteracija i središnju tačku poslednjeg intervala treba uzeti za tačku stvarnog maksimuma.

Opisana procedura za profinjenje parametara EF -a sumirana je u tri koraka:

korak 1: Izračunati $EF(k_1, k_2)$ u četiri tačke $(m_1^c \pm \Delta k_1/2, m_2^c)$ i $(m_1^c, m_2^c \pm \Delta k_2/2)$:

$$EF_{\pm 1}^{k_1} = EF(m_1^c \pm \Delta k_1/2, m_2^c),$$

$$EF_{\pm 1}^{k_2} = EF(m_1^c, m_2^c \pm \Delta k_2/2);$$

korak 2: Suziti interval pretrage za pozicijom maksimuma EF -a L puta pomoću sledećih koraka:

$$\Delta k_1 = \Delta k_1/2,$$

$$\Delta k_2 = \Delta k_2/2.$$

Ako je $EF_1^{k_1} > EF_{-1}^{k_1}$, onda

$$\hat{m}_1 = \hat{m}_1 + \Delta k_1,$$

u suprotnom

$$\hat{m}_1 = \hat{m}_1 - \Delta k_1.$$

Ako je $EF_1^{k_2} > EF_{-1}^{k_2}$, onda

$$\hat{m}_2 = \hat{m}_2 + \Delta k_2,$$

u suprotnom

$$\hat{m}_2 = \hat{m}_2 - \Delta k_2.$$

Izračunaj:

$$\text{EF}_{\pm 1}^{k_1} = \text{EF}(\hat{m}_1 \pm \Delta k_1/2, \hat{m}_2),$$

$$\text{EF}_{\pm 1}^{k_2} = \text{EF}(\hat{m}_1, \hat{m}_2 \pm \Delta k_2/2).$$

korak 3: Pozicija stvarnog maksimuma je tačka (\hat{m}_1, \hat{m}_2) .

Efikasnost ove procedure biće razmatrana u sekciji sa numeričkim primjerima.

Fina estimacija pomoću 2D dihotomne pretrage zahtijeva računanje estimatorske funkcije u ukupno $4(L+1)$ tačaka. Znajući da je 2D dihotomna pretraga ekvivalentna interpolaciji prostora pretrage u $2^L \times 2^L$ tačaka, ovim algoritmom postizemo ogromnu uštedu u broju računskih operacija. Ta ušteda iznosi $(2^L \times 2^L - 4(L+1))U$ operacija u odnosu na klasičnu interpolaciju, gdje je U složenost estimatorske funkcije.

Dihotomna pretraga se može implementirati i za prostore pretrage višega reda. Primjetimo da sa porastom dimenzija pretrage, ušteda u broju računskih operacija se drastično povećava.

7.4 O'Shea metod

Za razliku od prve dvije tehnike, koje su poboljšanje tačnosti parametara obavljale iterativnim postupkom i bile fokusirane na samo jedan parametar, O'Shea metod vrši poboljšanje tačnosti svih parametara odjednom, ne koristeći iterativne postupke [44]. Pod pretpostavkom da je izvršena inicijalna estimacija parametara $a_i, i = 1, \dots, P$, tj. da su nam poznati inicijalni parametri $\hat{a}_i^c, i = 1, \dots, P$, tačnost parametara PPS-a može se poboljšati kroz proceduru iz četiri koraka koja je opisana u nastavku:

korak 1: Ukloniti $\hat{a}_i^c, i = 1, \dots, P$ iz faze signala $x(n)$

$$x_d(n) = x(n) \exp \left(-j \sum_{k=1}^P \hat{a}_k^c (n\Delta)^k \right). \quad (7.11)$$

korak 2: Filtrom sa pokretnom sredinom, dužine M , filtrirati signal $x_d(n)$:

$$x_0(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=(m-1)M+1}^{mM} x_d(n), \quad m = -Q, \dots, Q,$$

gdje je $Q = \lfloor \frac{1}{2}(N/M - 1) \rfloor$.

korak 3: Formirati vektor \mathbf{V} od odbiraka faze signala $x_0(m)$, kojoj su prethodno odstranjeni nagli skokovi od $\pm 2\pi$. \mathbf{V} je polinom sa parametrima $\mathbf{a} = [a_0, \delta a_1, \dots, \delta a_P]$, gdje je $\delta a_i = a_i - \hat{a}_i^c$, $k = 1, 2, \dots, P$. Elementi vektora \mathbf{a} se mogu odrediti sledećom matričnom jednačinom

$$\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_0, \hat{\delta a}_1, \dots, \hat{\delta a}_P] = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{V}, \quad (7.12)$$

gdje je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -Q\Delta & \dots & (-Q\Delta)^P \\ 1 & -(Q-1)\Delta & \dots & -(Q-1)\Delta^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Q\Delta & \dots & (Q\Delta)^P \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

korak 4: Izračunati finalne parametre pomoću relacija

$$\hat{a}_i = \hat{a}_i^c + \frac{\hat{\delta a}_i}{M^k}, \quad i = 1, 2, \dots, P, \quad (7.14)$$

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0. \quad (7.15)$$

Idealno, signal $x_d(n)$ bi trebao da bude PPS nultog reda. Međutim, kako su, pri inicijalnoj estimaciji, načinjene greške $\delta a_i = a_i - \hat{a}_i^c$, $k = 1, 2, \dots, P$, $x_d(n)$ je i dalje PPS P -tog reda. O'Shea metod koristi tu činjenicu i u koracima 2. i 3. estimira ove greške. Da bi se omogućila efikasna estimacija ovih novih parametara, u drugom koraku je obavljeno filtriranje signala, koje ima za cilj povećanje SNR-a. Ovaj odnos se u prosjeku povećava sa faktorom M . Zbog relativno malih vrijednosti $\hat{\delta a}_i$, faza signala $x_0(n)$ ima malo naglih skokova, koji se mogu odstraniti nekom od tehnika za razvoj faze [47]. Kada se odredi faza, jednostavnim matričnim jednačinama iz koraka 3. može se doći do vrijednosti grešaka načinjenih pri inicijalnoj estimaciji.

Algoritam opisan u ovoj sekciji predstavlja vrlo efikasnu metodu za poboljšanje tačnosti parametara PPS-a. Tačnost O'Shea metoda za velike vrijednosti SNR-a je reda CRLB-a i, za razliku od AM algoritma i dihotomne pretrage, ista nije ograničena MSE-ovima tehnike koja je korišćena za dobijanje inicijalnih parametara.

Efikasnost O'Shea algoritma zavisi od uspješnosti izdvajanja faze iz signala $x_0(m)$. Uspješno izdvajanje faze iz ovoga signala moguće je ostvariti ukoliko su varijacije između susjednih odbiraka $x_0(m)$ manje od $\pi/4$ [44]. U [44] pokazano je da je pomenuti uslov zadovoljen ukoliko važi

$$|\delta a_i| < \frac{\pi}{4iPM(N/2)^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, P. \quad (7.16)$$

Može se pokazati da je kompleksnost O'Shea algoritma $O(P^2NM^{-1})$ operacija zbog čega se isti veoma uspješno može implementirati u sistemima koji rade u realnom vremenu.

7.5 Generalizacija O'Shea metode za estimaciju multikomponentnih PPS-a

U [48], O'Shea metod smo iskoristili za poboljšanje tačnosti parametara multikomponentnog PPS-a. Pretpostavimo da su putem PHAF-a, ili neke druge procedure, određeni inicijalni parametri $\hat{a}_i^{k,c}$, $i = 0, \dots, P, k = 1, \dots, K$. Tačnost parametara faze l -te komponente signala $x^{mk}(n)$ može se poboljšati primjenom O'Shea metode na signal

$$x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n) - \sum_{k=1, k \neq l}^K A_k \exp \left(-j \sum_{i=0}^P \hat{a}_i^{k,c} (n\Delta)^k \right). \quad (7.17)$$

Odrediti inicijalne parametre $a_i^{k,c}$, $i = 0, \dots, P, k = 1, \dots, K$.

Postaviti $l = 1$ i $\tilde{a}_i^k = a_i^{k,c}$.

while $l \leq K$

$$x_1^{mk}(n) = x^{mk}(n) - \sum_{k=1, k \neq l}^K A_k \exp \left(j \sum_{i=0}^P \tilde{a}_i^k (n\Delta)^i \right),$$

O'Shea metodom poboljšati tačnost parametara a_i^l , $i = 0, \dots, P$.

Izlaz iz O'Shea algoritma obilježimo sa \hat{a}_i^l , $i = 0, \dots, P$.

Postaviti $\tilde{a}_i^l = \hat{a}_i^l$, $i = 0, \dots, P$ i $l = l + 1$.

end while

\hat{a}_i^k , $i = 0, \dots, P, k = 1, \dots, K$ predstavljaju poboljšane parametre.

Tabela 7.1: Algoritam za poboljšanje tačnosti parametara multikomponentnog PPS-a.

U (7.17), $x_1^{mk}(n)$ odgovara monokomponentnom PPS-u kod koga su sve komponente, osim l -te uklonjene. Kada su \hat{a}_i^l , $i = 0, \dots, P$ određeni, poboljšanje ostalih parametara se vrši ponavljanjem procedure za svako $k \in [1, K]$, $k \neq l$. Ovdje treba napomenuti da, ako su fini parametri l -te komponente već poznati, prilikom uklanjanja te komponente iz $x^{mk}(n)$, u relaciji (7.17) treba koristiti \hat{a}_i^l , $i = 0, \dots, P$ umjesto $\hat{a}_i^{l,c}$, $i = 0, \dots, P$. Na ovaj način smo poboljšanje tačnosti multikomponentnih signala sveli na poboljšanje tačnosti monokomponentnih signala. S ciljem dobijanja preciznijih rezultata, opisana procedura

se može ponoviti više puta. Inicijalna istraživanja pokazala su da je za dostizanje tačnosti propisane CRLB-om, dovoljno sprovesti dvije iteracije.

Kompletni algoritam je sumiran u Tabeli 7.1. Performanse ovog algoritma ispitaćemo na numeričkim primjerima.

7.6 Implementacija O'Shea metoda na 2D signale

Poboljšanje parametara 2D signala O'Shea metodom se može obaviti svođenjem 2D problema na 1D. Posmatrajmo signal $x(n, m)$ iz relacije (2.26) za fiksno m i za fiksno n :

$$\begin{aligned}
x_m^{1D}(n) &= A \exp(j[(a_{0,0} + a_{0,1}m\Delta + a_{0,2}(m\Delta)^2 + \dots + a_{0,P}(m\Delta)^P) \\
&\quad + (a_{1,0} + a_{1,1}m\Delta + a_{1,2}(m\Delta)^2 + \dots + a_{1,P-1}(m\Delta)^{P-1})n\Delta + \dots + a_{P,0}(n\Delta)^P]) \\
&= A \exp\left(j \sum_{i=0}^P g_i^n(m)(n\Delta)^i\right), \\
g_i^n(m) &= \sum_{k=0}^{P-i} a_{i,k}(m\Delta)^k, \\
x_n^{1D}(m) &= A \exp(j[(a_{0,0} + a_{1,0}n\Delta + a_{2,0}(n\Delta)^2 + \dots + a_{P,0}(n\Delta)^P) \\
&\quad + (a_{0,1} + a_{1,1}n\Delta + a_{2,1}(n\Delta)^2 + \dots + a_{P-1,1}(n\Delta)^{P-1})m\Delta + \dots + a_{P,P}(m\Delta)^P]) \\
&= A \exp\left(j \sum_{i=0}^P g_i^m(n)(m\Delta)^i\right), \\
g_i^m(n) &= \sum_{k=0}^{P-i} a_{k,i}(n\Delta)^k, \tag{7.18}
\end{aligned}$$

respektivno. Signali $x_m^{1D}(n)$ i $x_n^{1D}(m)$ nisu ništa drugo nego 1D PPS-i P -tog reda čiji su parametri faze polinomijalne funkcije koje zavise od parametara $a_{i,k}$, $0 \leq i+k \leq P$. Ako su poznate inicijalne estimacije $a_{i,k}^c$, $0 \leq i+k \leq P$, poznate su nam i inicijalne estimacije $g_i^{n,c}(m)$ i $g_i^{m,c}(n)$ za $i = 0, \dots, P$, koje se mogu poboljšati korišćenjem procedure opisane u Sekciji 7.4.

Primjenom 1D O'Shea metode na signale $x_m^{1D}(n)$ i $x_n^{1D}(m)$ za svako m i n , respektivno, dobijamo skupove poboljšanih parametara $\hat{g}_i^n(m)$, $m = -M/2, \dots, M/2$ i $\hat{g}_i^m(n)$, $n = -N/2, \dots, N/2$ iz kojih, dalje, polinomijalnom regresijom možemo odrediti $\hat{a}_{i,k}$, $0 \leq i+k \leq P$.

Uvedimo vektore $\mathbf{a}_i^n = [a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,P-i}]^T$ i $\mathbf{a}_i^m = [a_{0,i}, a_{1,i}, \dots, a_{P-i,i}]^T$. Elemente

ovih vektora možemo izračunati pomoću sledećih matričnih jednačina:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_i^n &= [(\mathbf{X}_i^n)^T \mathbf{X}_i^n]^{-1} (\mathbf{X}_i^n)^T \hat{\mathbf{G}}_i^n, \\ \hat{\mathbf{a}}_i^m &= [(\mathbf{X}_i^m)^T \mathbf{X}_i^m]^{-1} (\mathbf{X}_i^m)^T \hat{\mathbf{G}}_i^m,\end{aligned}$$

gdje su

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i^n &= \begin{bmatrix} 1 & -(M/2)\Delta & [-(M/2)\Delta]^2 & \cdots & [-(M/2)\Delta]^{P-i} \\ 1 & -(M/2+1)\Delta & [-(M/2+1)\Delta]^2 & \cdots & [-(M/2+1)\Delta]^{P-i} \\ 1 & -(M/2+2)\Delta & [-(M/2+2)\Delta]^2 & \cdots & [-(M/2+2)\Delta]^{P-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (M/2)\Delta & [(M/2)\Delta]^2 & \cdots & [(M/2)\Delta]^{P-i} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_i^m &= \begin{bmatrix} 1 & -(N/2)\Delta & [-(N/2)\Delta]^2 & \cdots & [-(N/2)\Delta]^{P-i} \\ 1 & -(N/2+1)\Delta & [-(N/2+1)\Delta]^2 & \cdots & [-(N/2+1)\Delta]^{P-i} \\ 1 & -(N/2+2)\Delta & [-(N/2+2)\Delta]^2 & \cdots & [-(N/2+2)\Delta]^{P-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (N/2)\Delta & [(N/2)\Delta]^2 & \cdots & [(N/2)\Delta]^{P-i} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{G}}_i^n &= [\hat{g}_i^n(-M/2) \quad \hat{g}_i^n(-M/2+1) \quad \hat{g}_i^n(-M/2+2) \quad \cdots \quad \hat{g}_i^n(M/2)]^T, \\ \hat{\mathbf{G}}_i^m &= [\hat{g}_i^m(-N/2) \quad \hat{g}_i^m(-N/2+1) \quad \hat{g}_i^m(-N/2+2) \quad \cdots \quad \hat{g}_i^m(N/2)]^T.\end{aligned}\quad (7.19)$$

Ponavljanjem gornje procedure za svako $i = 0, 1, \dots, P$, svi parametri faze signala $x(n, m)$ mogu biti određeni. Kako $\hat{\mathbf{a}}_i^n$, $i = 0, \dots, P$, sadrži sve fazne parametre, kao i $\hat{\mathbf{a}}_i^m$, $i = 0, \dots, P$, finalni parametri se mogu dobiti usrednjavanjem odgovarajućih vrijednosti sadržanih u ova dva vektora. Opisani algoritam se vrlo lako može prilagoditi estimaciji parametara 2D PPS-a datog relacijom (2.25).

Uzimajući u obzir samo najkompleksnije operacije, može se pokazati da je kompleksnost predloženog algoritma za poboljšanje tačnosti parametara 2D PPS-a P -toga reda $O(P^2 N M L_{\text{MA}}^{-1})$ operacija, gdje je L_{MA} dužina filtra sa pokretnom sredinom korišćenog u 1D O'Shea algoritmu.

U sekciji sa numeričkim primjerima vidjećemo da predloženi algoritam dostiže teorijske limite u estimaciji parametara 2D PPS-a.

7.7 Numerički primjeri

Numerička evaluacija tehnika za poboljšanje tačnosti parametara PPS-a će biti razmatrana u ovoj sekciji. Pored poređenja tehnika za brzo pretraživanje parametara, procijenimo tačnost O'Shea metode primjenjene kako na multikomponentne PPS-e, tako i na 2D PPS-e. Za dobijanje MSE-a, u svim primjerima, koristili smo Monte Carlo simulacije sa ukupno 300 iteracija.

Primjer 1. AM algoritam, dihotomnu pretragu i klasični algoritam za interpolaciju frekvencijske ose putem FT-a uporedili smo na monokomponentnom PPS-u trećega reda:

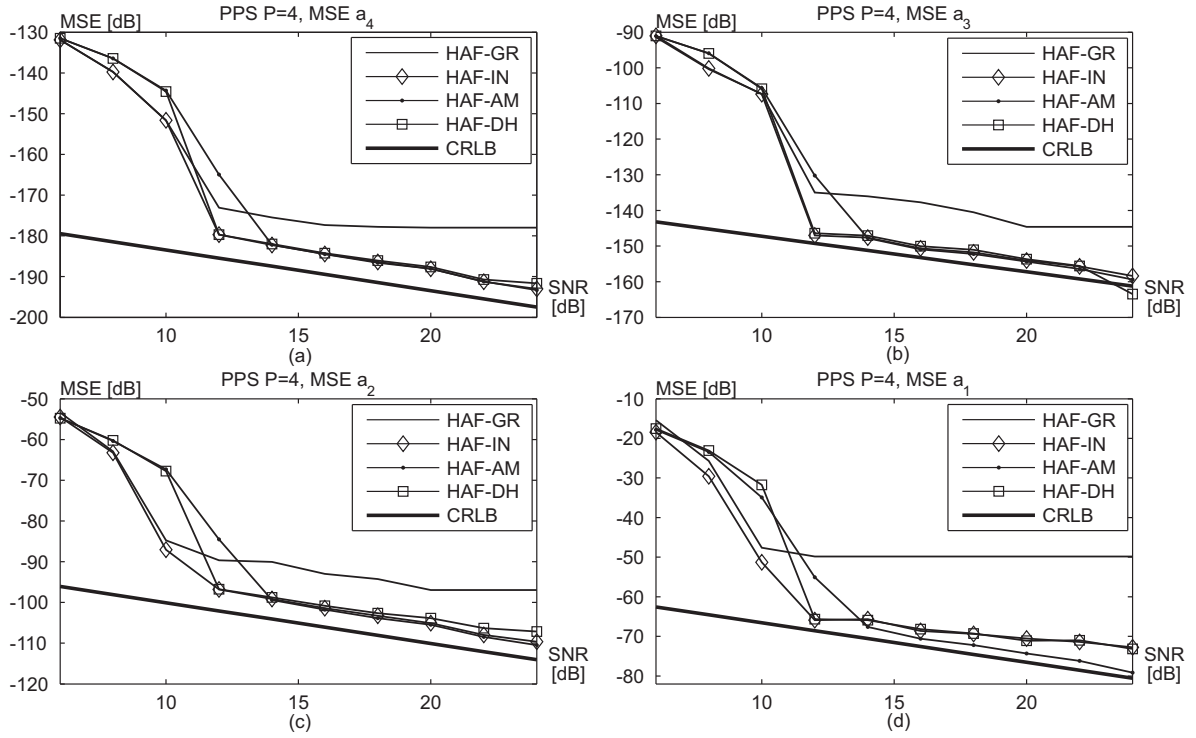
$$\begin{aligned} x(n) &= \exp \left(j(0.7n - 3.5 \cdot 10^{-3}n^2 + 6.7 \cdot 10^{-6}n^3 - 2.4 \cdot 10^{-8}) \right) + \nu(n), \\ n &\in [-128, 128]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Cilj nam je bio da provjerimo da li AM algoritam (HAF-AM) i dihotomna pretraga (HAF-DH), kada se primjene na HAF, dostižu rezultate koji se mogu ostvariti interpolacijom frekvencijske ose (HAF-IN). Parametri HAF-a birani su prema uputstvima iz Sekcije 3.2.2. Koristili smo ukupno 5 iteracija AM algoritma i dihotomne pretrage, što je ekvivalentno interpolaciji frekvencijske ose sa faktorom 2^5 . MSE-i parametara \hat{a}_4 , \hat{a}_3 , \hat{a}_2 i \hat{a}_1 dobijenih pomoću ove tri tehnike prikazane su na Slikama 7.1 (a), (b), (c) i (d), respektivno. Kao dodatnu krivu (HAF-GR), predstavili smo i MSE-e koji bi se dobili ako bismo koristili samo grubu pretragu.

Sa slike vidimo da u opsegu gdje sve tehnike daju zadovoljavajuće rezultate, tačnost dihotomne pretrage i AM algoritma je približna tačnosti koja se postigla interpolacijom frekvencijske ose. Primjetimo i da dihotomna pretraga, za veće vrijednosti SNR-a, ima nešto manju tačnost u odnosu na ostala dva pristupa. Sa povećanjem broja iteracija, ovo se može prevazići. Sledeće što treba uočiti je da HAF-AM ima veći prag u odnosu na HAF-DH i HAF-IN. Razlog za to se nalazi u činjenici da u opsegu SNR-a oko praga, vjerovatnoća pojave vrijednosti estimiranog parametra koja odstupa od uobičajene je velika. Za takve vrijednosti, idealna reprezentacija HAF-a je značajno narušena.

Sa Slike 7.1 (d) može se izvesti zaključak da gruba estimacija kod AM algoritma može da bude manje preciznija u odnosu na dihotomnu pretragu. I pored dosta grube estimacije, AM algoritam je uspio dostići teorijske limite i nadmašiti čak i HAF-IN.

Ovim primjerom smo pokazali da nisko kompleksne tehnike za finu pretragu po frekvencijskoj osi mogu biti dosta uspješno iskorišćene i u estimaciji parametara PPS-a.



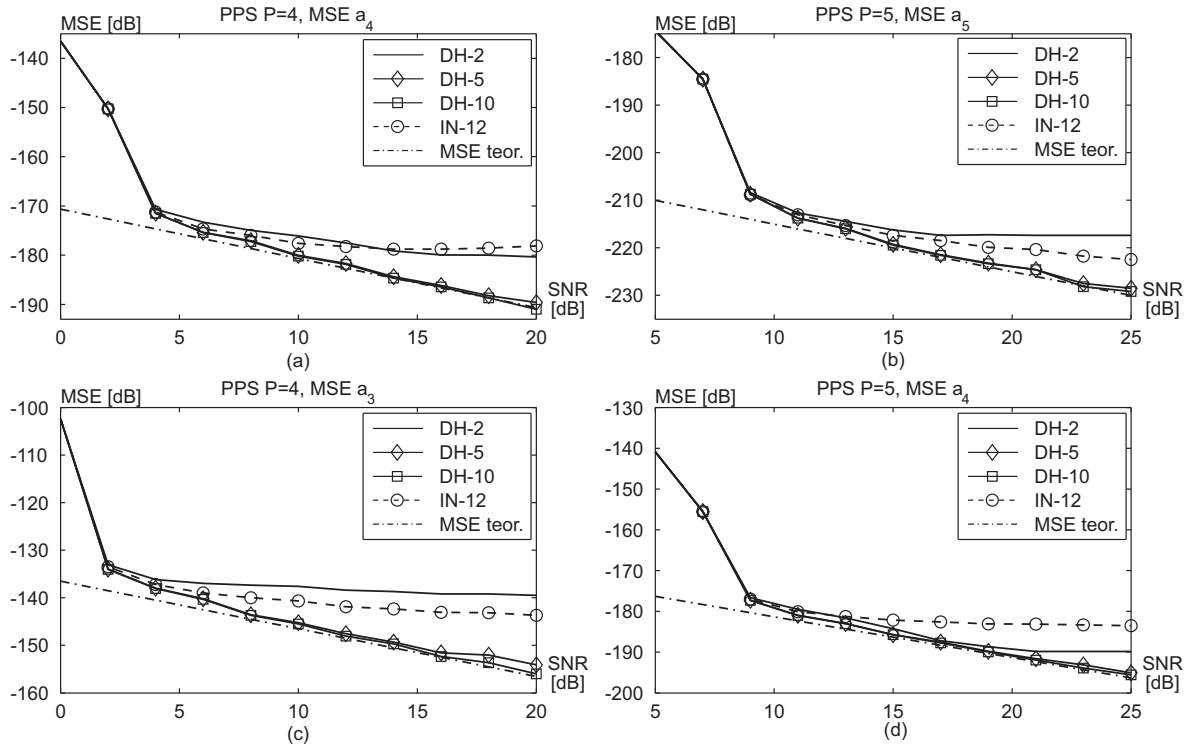
Slika 7.1: MSE-i parametara PPS-a četvrtog reda dobijeni pomoću HAF-a sa implementiranom dihotomnom pretragom, AM algoritmom i klasičnom interpolacijom: (a) MSE \hat{a}_4 ; (b) MSE \hat{a}_3 ; (c) MSE \hat{a}_2 i (d) MSE \hat{a}_1 .

Da li izabrati AM algoritam ili dihotomnu pretragu, zavisi od konkretne situacije. Za niži prag SNR-a poželjnije je koristiti dihotomnu pretragu, dok, u ostalim slučajevima, bolje je izabrati AM algoritam.

Primjer 2. U želji da ispitamo performanse dihotomne pretrage primjenjene u HCPF-HAF estimacionoj proceduri, posmatrali smo dva PPS-a:

$$x_k(n) = \exp \left(j \sum_{i=1}^{P_k} a_i (n\Delta)^i \right) + \nu(n), \quad k = 1, 2, \quad (7.21)$$

gdje $n \in [-128, 128]$, $\Delta = 1$, $P_1 = 4$, $P_2 = 5$ i a_i je i -ti element vektora $\mathbf{B} = [1, -2.1 \cdot 10^{-4}, 7.1 \cdot 10^{-6}, 6.2 \cdot 10^{-8}, 2.3 \cdot 10^{-10}]$. Cilj nam je bio odrediti potreban broj iteracija dihotomne pretrage kojom bismo dostigli teorijske granice HCPF-HAF-a. Stoga, parametri posmatranog signala su estimirani HCPF-HAF-om koji u svom algoritmu ima implementiranu dihotomnu pretragu sa 2, 5 i 10 iteracija. Da bismo istakli prednost dihotomne pretrage u odnosu na klasičnu interpolaciju, posmatrali smo i HCPF-HAF sa interpolacijom Ω ose sa ukupno 12 tačaka. Na ovaj izbor smo se odlučili iz razloga što je računaska složenost 10 iteracija dihotomne pretrage ekvivalentna složenosti interpolacije u 12 tačaka (vidi Sekciju 7.2). Na Slici 7.2 dali smo poređenje pomenutih tehnika



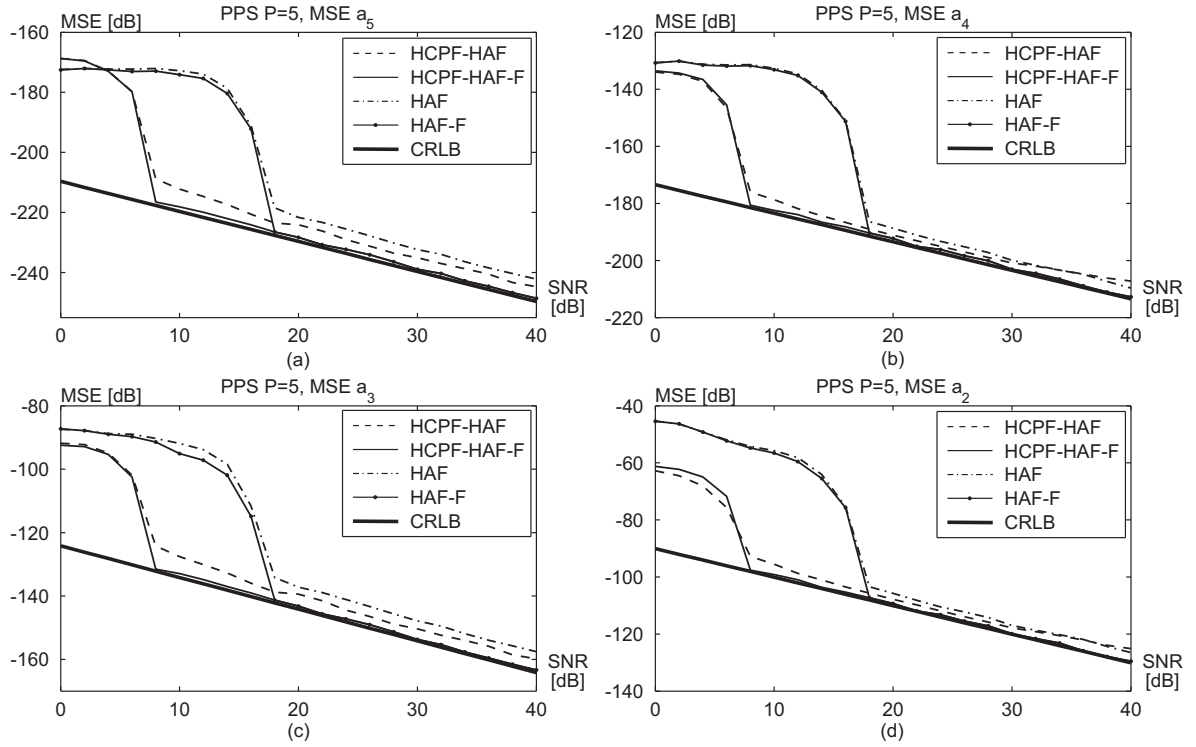
Slika 7.2: MSE-i dva najviša parametra faze signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ estimiranih pomoću HCPF-HAF-a sa dihotomnom pretragom i klasičnom interpolacijom Ω ose: (a) i (c) - MSE-i \hat{a}_4 i \hat{a}_3 signala $x_1(n)$; (b) i (d) - MSE-i \hat{a}_5 i \hat{a}_4 signala $x_2(n)$.

primjenjenih na signale $x_1(n)$ i $x_2(n)$.

U prvoj koloni Slike 7.2 prikazani su MSE-i dva najviša parametra faze signala $x_1(n)$, dok su MSE-i dva najviša parametra faze signala $x_2(n)$ dati u drugoj koloni. Primjetimo da su dvije iteracije dihotomne pretrage nedovoljne za tačnu estimaciju parametara PPS-a, jer, za velike vrijednosti SNR-a, MSE-i parametara su za više od 7 dB veći u odnosu na teorijski limit HCPF-HAF-a. Sa pet iteracija, HCPF-HAF dostiže teorijski MSE i dalje, sa povećavanjem broja iteracija (10 iteracija), imamo neznatna poboljšanja. S druge strane, interpolacija u 12 tačaka je isuviše mala da bi dobili na preciznosti. Zbog toga, HCPF-HAF sa interpolacijom ima značajno odstupanje od teorijskih rezultata.

Dakle, u ovom primjeru smo demonstrirali značaj primjene dihotomne pretrage u HCPF-HAF estimacionoj proceduri. Vidjeli smo da, sa samo pet iteracija, dihotomna pretraga je u stanju da postigne teorijske vrijednosti MSE-a. Ovo značajno umanjuje složenost HCPF-HAF-a.

Primjer 3. Iz statističke analize HAF-a i HCPF-HAF-a, kao i iz numeričkih primjera iz Poglavlja 4, može se primjetiti da rastojanje MSE-a HAF-a i HCPF-HAF-a od CRLB-a raste sa porastom reda signala. Razlog tome je veći broj šumnih članova koje generiše



Slika 7.3: MSE-i parametara \hat{a}_5 , \hat{a}_4 , \hat{a}_3 i \hat{a}_2 dobijenih pomoću HAF-a i HCPF-HAF-a, kao i MSE-i parametara poboljšanih O'Shea algoritmom: (a) MSE \hat{a}_5 ; (b) MSE \hat{a}_4 ; (c) MSE \hat{a}_3 i (d) MSE \hat{a}_2 .

PD operator. Tačnost HAF-a i HCPF-HAF-a možemo poboljšati O'Shea algoritmom, koji se može primjeniti nakon estimacije parametara ovim metodama. Cilj primjera je evaluacija performansi HAF-a i HCPF-HAF-a kada se u njihovu proceduru uključi O'Shea algoritam. Da bismo ovo obavili, posmatrali smo PPS petoga reda:

$$x(n) = \exp(j(n - 4.3 \cdot 10^{-4}n^2 + 1.2 \cdot 10^{-6}n^3 - 7.9 \cdot 10^{-8}n^4 + 4.1 \cdot 10^{-10}n^5)) + \nu(n),$$

$$n \in [-128, 128] \quad (7.22)$$

na intervalu SNR-a od 0 dB do 40 dB. Na Slici 7.3 prikazani su MSE-i četiri najviša parametra faze dobijeni pomoću HAF-a i HCPF-HAF-a, kao i MSE-i parametara poboljšanih O'Shea algoritmom (HAF-F i HCPF-HAF-F). Sa Slike 7.3 možemo primjetiti da sa implementacijom O'Shea algoritma u HAF i HCPF-HAF procedure, MSE-i parametara su na odgovarajućim CRLB-ovima, tj. estimirani parametri su asimptotski efikasni. Primjetimo takođe da je O'Shea algoritam očuvao prag HAF i HCPF-HAF tehnika.

Implementacijom O'Shea u estimacionu proceduru HCPF-HAF-a kompletirali smo našu priču o ovoj tehnici, koja je pokazala značajne prednosti u odnosu na konkurentne

tehnike. Dakle, sa O'Shea algoritmom HCPF-HAF je sada asimptotski efikasna tehnika za PPS proizvoljnog reda.

Primjer 4. Da bi ispitili performanse procedure za poboljšanje tačnosti parametara multikomponentnog PPS-a, posmatrali smo trokomponentni signal trećega reda:

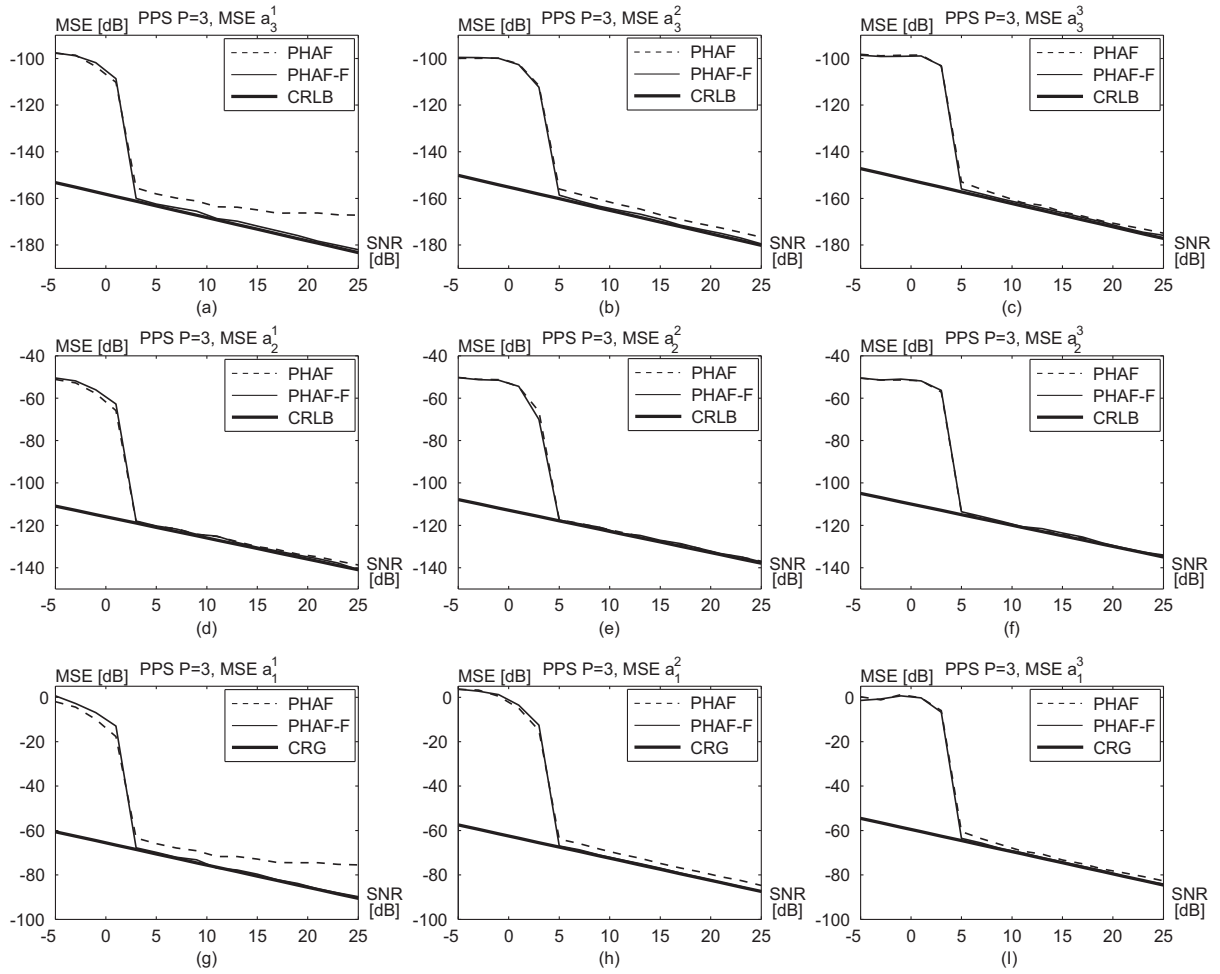
$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) \\ &= \exp(j(n - 2.1 \cdot 10^{-4}n^2 + 8.2 \cdot 10^{-6}n^3)) \\ &\quad + 0.7 \exp(j(-0.6n + 7.6 \cdot 10^{-4}n^2 - 3.2 \cdot 10^{-6}n^3)) \\ &\quad + 0.5 \exp(j(0.8n - 2.1 \cdot 10^{-4}n^2 + 6.3 \cdot 10^{-6}n^3)) + \nu(n). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Signal je razmatran za $n \in [-256, 256]$ i njegovi parametri su estimirani pomoću klasičnog PHAF-a i PHAF-a sa implementiranim algoritmom za poboljšanje tačnosti parametara (PHAF-F). Za računanje PHAF/PHAF-F koristili smo pet skupova parametara pomjeraja. MSE-i estimiranih parametara faze signala $x(n)$ prikazani su na Slici 7.4. Grafici u prvoj, drugoj i trećoj koloni slike odgovaraju parametrima signala $x_1(n)$, $x_2(n)$ i $x_3(n)$, respektivno. SNR prikazan na graficima računat je u odnosu na snagu najjače komponente ($x_1(n)$).

Sa Slike 7.4 vidimo da klasični PHAF najveće greške pravi kod estimacije parametara prve komponente. Razlog tome je što, prilikom estimiranja parametara $x_1(n)$, signal sadrži sve tri komponente. Greška se smanjuje sa estimacijom druge dvije komponente, jer će signal na koji se PHAF primjenjuje sadržati dvije i, na kraju, samo jednu komponentu. Primjetimo da je estimacija parametara a_2^k , $k = 1, 2, 3$, asimptotski efikasna, jer PHAF koristi samo jednu auto-korelaciju i proizvod pet HAF-ova, koji eliminiše i šum i kros-članove. Prag SNR-a ove tehnike je na oko 5 dB. S druge strane, PHAF-F je asimptotski efikasan za sve parametre signala $x(n)$, tj. MSE ovoga estimatora dostiže CRLB, čime se dokazalo da O'Shea algoritam može biti uspješno implementiran i u estimaciji multikomponentnog PPS-a. I ovdje, kao i kod monokomponentnih PPS-a, implementirano poboljšanje tačnosti parametara ne utiče na prag SNR-a.

Dakle, ovim primjerom smo pokazali da sa O'Shea algoritmom možemo dostići teorijske limite u pogledu MSE-a i kod multikomponentnog PPS-a. Time smo značajno proširili primjenu ovoga algoritma.

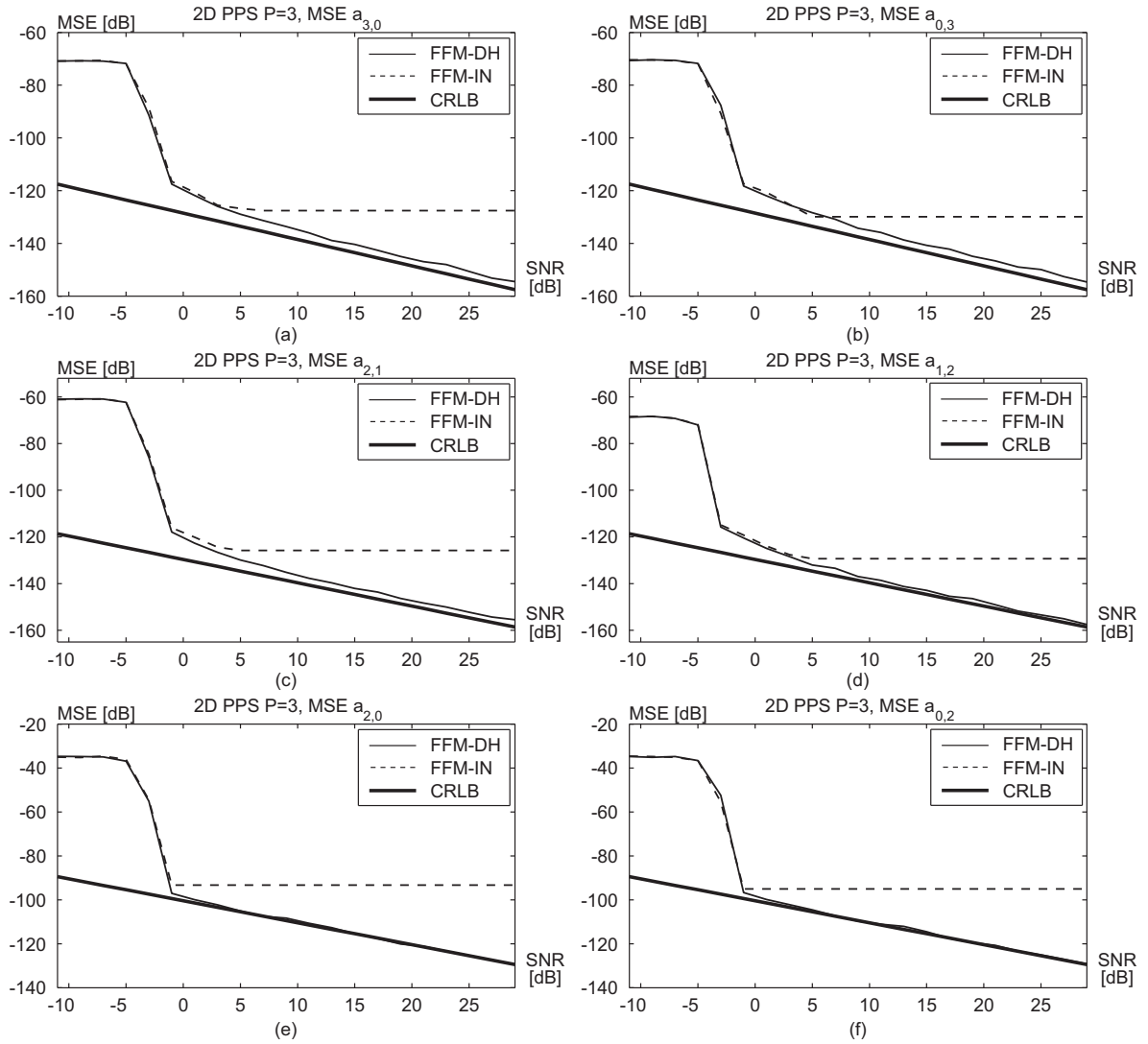
Primjer 5. Efikasnost dihotomne pretrage kod FFM-a provjerili smo na 2D PPS-u trećeg reda sa sledećim parametrima: $A = 1$, $a_{0,0} = 1$, $a_{1,0} = 4.5 \cdot 10^{-1}$, $a_{0,1} = 8.2 \cdot 10^{-2}$, $a_{2,0} = -1.5 \cdot 10^{-3}$, $a_{1,1} = 6 \cdot 10^{-3}$, $a_{0,2} = -2.2 \cdot 10^{-3}$, $a_{3,0} = 1.7 \cdot 10^{-5}$, $a_{2,1} = 4 \cdot 10^{-5}$,



Slika 7.4: MSE-i parametara trokomponentnog PPS-a estimiranih pomoću PHAF-a i PHAF-F-a: (a), (d) i (g) - MSE-i parametara signala $x_1(n)$; (b), (e) i (h) - MSE-i parametara signala $x_2(n)$; (c), (f) i (i) - MSE-i parametara signala $x_3(n)$;

$a_{1,2} = 3.73 \cdot 10^{-5}$, $a_{0,3} = -1.35 \cdot 10^{-5}$, $N = 100$, $M = 100$ i $\Delta = 1$. Posmatrali smo FFM u čiju proceduru za finu pretragu parametara smo uključili dihotomnu pretragu sa 25 iteracija (FFM-DH) i klasičnu interpolaciju frekvencijskih osa sa faktorom 10 (FFM-IN). Cilj nam je bio provjeriti odnos tačnosti ove dvije tehnike pri istoj računskoj složenosti. MSE-i parametara $\hat{a}_{3,0}$, $\hat{a}_{0,3}$, $\hat{a}_{2,1}$, $\hat{a}_{1,2}$, \hat{a}_{20} i $\hat{a}_{0,2}$ su prikazani na Slici 7.5.

Sa Slike 7.5 se vidi da FFM-IN, zbog malog broja tačaka (100) u 2D prostoru u kome se obavlja fina pretraga, ima limitiranu tačnost. Naime, MSE FFM-IN-a parametara trećega sloja do nekih 3 dB prati MSE FFM-DH-a, da bi potom dostigao konstantnu vrijednost i ne mijenjao se do kraja intervala SNR-a. S druge strane, zahvaljujući visokoj rezoluciji ostvarenoj sa 25 iteracija dihotomne pretrage, FFM-DH dostiže krajne granice tačnosti FFM-a. Te granice se ogledaju u MSE-u koji je za parametre najvišeg sloja od (2-3) dB veći od odgovarajućih CRLB-a, dok, za parametre drugoga sloja, MSE dostiže CRLB.

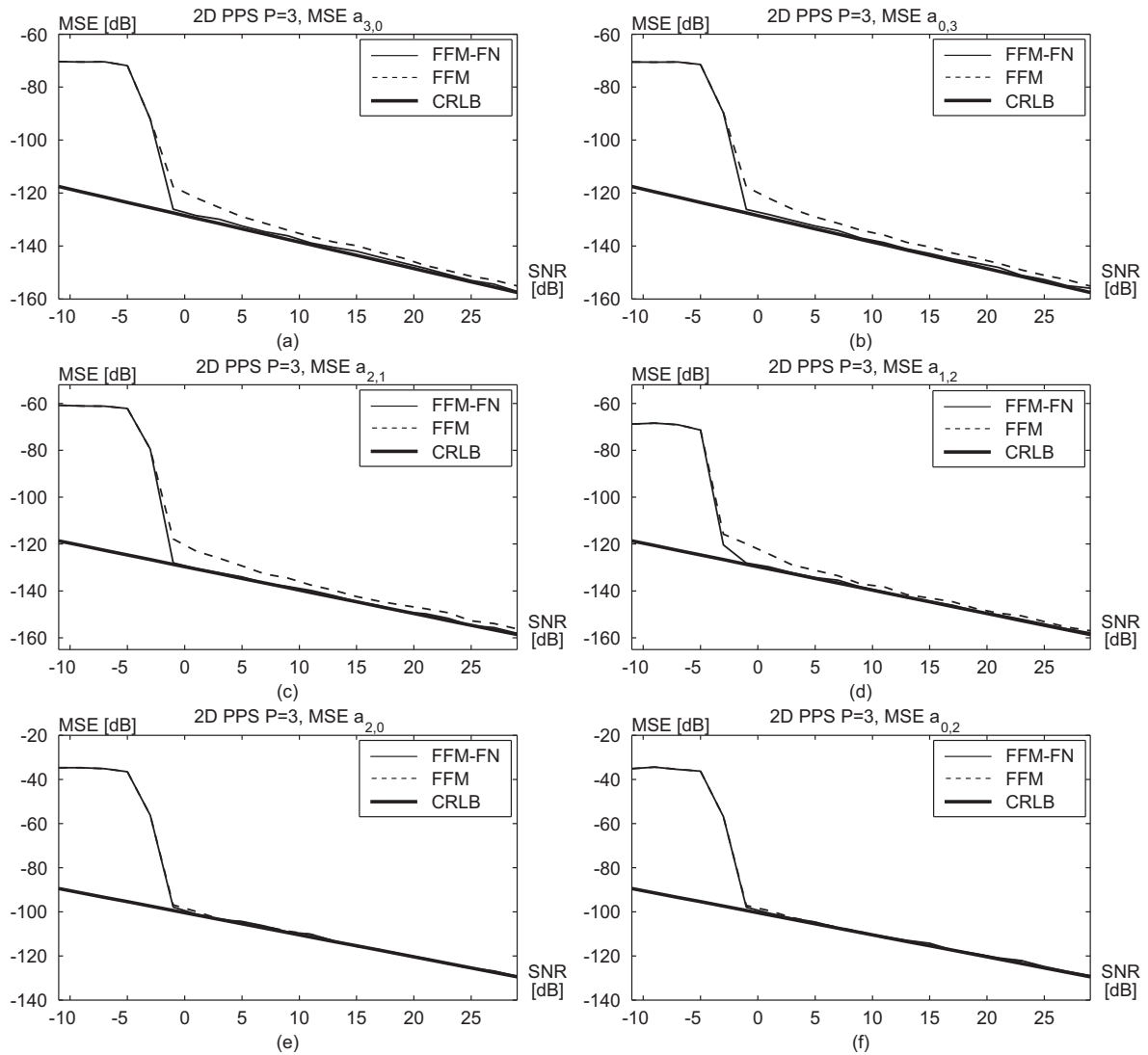


Slika 7.5: MSE-i parametara 2D PPS-a trećega reda estimiranih pomoću FFM-DH-a i FFM-IN-a: (a) MSE $\hat{a}_{3,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{0,3}$; (c) MSE $\hat{a}_{2,1}$; (d) MSE $\hat{a}_{1,2}$; (e) MSE $\hat{a}_{2,0}$; (f) MSE $\hat{a}_{0,2}$.

Prag SNR-a FFM-DH-a i FFM-IN-a je isti i iznosi oko -1 dB.

U ovom primjeru vidjeli smo da značaj dihotomne pretrage itekako dolazi do izražaja kada je u pitanju estimacija 2D PPS-a. Kod 2D PPS-a, da bi se izvršila fina pretraga, potrebno je 2D prostor interpolirati u velikom broju tačaka, što zna da bude računski zahtjevno. Sa implementacijom dihotomne pretrage, uspjeli smo da ostvarimo visoku tačnost sa značajno manjom kompleksnošću.

Primjer 6. U želji da smanjimo MSE koeficijenata 2D PPS-a, u ovom primjeru smo na parametre estimirane FFM-om primjenili 2D O'Shea algoritam (FFM-FN). Signal sa istim parametrima kao i u Primjeru 5 je razmatran i ovdje. Na Slici 7.6 izvršili smo poređenje MSE-a FFM-a i FFM-FN-a.



Slika 7.6: MSE-i parametara 2D PPS-a trećega reda estimiranih pomoću FFM-a i FFM-FN-a:
 (a) MSE $\hat{a}_{3,0}$; (b) MSE $\hat{a}_{0,3}$; (c) MSE $\hat{a}_{2,1}$; (d) MSE $\hat{a}_{1,2}$; (e) MSE $\hat{a}_{2,0}$; (f) MSE $\hat{a}_{0,2}$.

Sa grafika (a), (b), (c) i (d) Slike 7.6 vidimo da sa implementacijom algoritma iz Sekcije 7.6 MSE-i parametara FFM-FN-a dostižu CRLB-e, pri tome ne mijenjajući prag originalnog FFM-a koji i dalje ostaje na -1 dB. Dakle, sa O'Shea algoritmom, ostvarili smo za 2 dB manji MSE. Može se pokazati da se, sa porastom reda 2D PPS-a, povećava i ova razlika.

Ovim primjerom i završavamo poglavlje u kome smo pokazali superiornost O'Shea algoritma u poboljšavanju parametara monokomponentnog PPS-a, multikomponentnog PPS-a i 2D PPS-a. Napominjemo, da smo u ovoj sekciji evaluirali performanse samo nekih reprezentativnih tehnika. Slični rezultati se mogu ostvariti i sa drugim estimacionim metodama uzetim za određivanje inicijalnih/grubih parametara.

Poglavlje 8

Primjena estimatora PPS-a

U ovom poglavlju, znanje stečeno u estimaciji parametara PPS-a primjenićemo na estimaciju signala koji stižu na antensku rešetku i estimaciju radarskih signala. Pokazaćemo kako se na osnovu HAF-a i CPF-a može izvršiti efikasna estimacija PPS-a primljenog antenskom rešetkom. Kako je u ovakvim sistemima od interesa i poznavanje dolaznog ugla (DOA - engl. *direction of arrival*), pored parametara PPS-a estimiraćemo i ovu veličinu. U radarskim sistemima signali od interesa su obično multikomponentni. Zbog toga ćemo u ovom poglavlju predložiti modifikaciju CPF-a koja je u stanju da se izbori sa kros-članovima, uzrokovanim postojanjem više komponenti signala i nelinearnošću CPF-a.

8.1 Estimacija parametara PPS-a primljenog antenskom rešetkom

U sonarima, signali emitovani/reflektovani od strane morskog sisara mogu se modelovati PPS modelom [49]-[51]. Da bi se što tačnije odredili parametri i dolazni uglovi, akvizicija ovih signala se obavlja pomoću rešetke od nekoliko desetina do nekoliko stotina pravilno raspoređenih senzora. Naš cilj u ovoj sekciji biće da na osnovu podataka sa prijemnih senzora, uz pomoć estimatora opisanih u Sekciji 3, izvršimo procijenu DOA-e i parametara emitovanog signala.

U literaturi se mogu naći brojni radovi koji se bave problematikom estimacije ovakvih signala. Kao i estimatore PPS-a, i estimaciju signala u sonarima prate isti problemi. Tačnije tehnike zahtijevaju veliku računsku složenost, dok su one, manje tačne, računski

prihvatljivije. Polinomijalno fazni beamformer (PFB) predstavlja tehniku uvedenu sa ciljem smanjenja računске kompleksnosti ML-a [32]. Iako je njegova kompleksnost značajno manja u odnosu na ML, PFB je primjenljiv samo do PPS-a drugoga reda, jer za signale većega reda zahtijeva 4D i veću pretragu. U [52], autori su koristili HAF da bi došli do grubih parametara koje su kasnije poboljšavali pomoću Kalman-ovih filtara. Kasnije je ovaj metod primjenjen na multikomponentne signale [53]. Da bi se estimirali multikomponentni signali, u [52] i [53] predložene su tehnike za "slijepo" razdvajanje komponenti. Takođe, predložene su i tehnike koje vrše estimaciju podvodnih kanala kroz koje se signal prostire [50], [51]. Ove tehnike su bazirane na vremensko-frekvencijskoj analizi i Mellin-ovim transformacijama.

Svi navedeni estimatori izvedeni su pod pretpostavkom da je primljeni signal uskopojasan. Međutim, kada se radi o mrežama senzora čiji je broj reda stotina, pretpostavka o uskopojasnosti ne stoji. Stoga, kao jedan od doprinosa ove teze je i novi algoritam za estimaciju parametara PPS-a primljenih ovakvim sistemima [54]. Opis ovog algoritma, kao i ispitivanje njegovih prerformansi biće centralni dio ovoga poglavlja.

8.1.1 Model signala

PPS $s(n)$, definisan u Sekciji 2.1, primljen antenskom rešetkom od M omnidirekcionih senzora, se može predstaviti sledećim modelom:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{a}(\theta, n)s(n) + \mathbf{v}(n), \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad (8.1)$$

gdje je $\mathbf{a}(\theta, n)$ tzv. *array steering vector* dimenzija $M \times 1$, $\mathbf{v}(n)$ vektor Gauss-ovog šuma dimenzija $M \times 1$ i $N + 1$ broj odbiraka signala $s(n)$. Pretpostavimo da je N paran broj.

Array steering vektorom se modeluje uticaj različitog vremena dolaska signala $s(n)$ na senzore antenske rešetke:

$$\mathbf{a}(\theta, n) = [1, \exp(j\omega(n)\psi), \dots, \exp(j\omega(n)(M-1)\psi)]^T. \quad (8.2)$$

U relaciji (8.2), $\omega(n)$ je trenutna frekvencija signala,

$$\omega(n) = \sum_{i=0}^{P-1} (i+1)a_{i+1}(n\Delta)^i, \quad (8.3)$$

dok se preko ψ izražava DOA, θ , na sledeći način:

$$\psi = \frac{d}{c} \sin(\theta), \quad (8.4)$$

gdje je d rastojanje između dva susjedna senzora i c brzina prostiranja signala. Cilj estimacije je odrediti vektor nepoznatih parametara $\mathbf{V} = [\theta, a_1, \dots, a_P]$ obradom $\mathbf{y}(n)$.

8.1.2 Polinomijalni fazni beamformer

PFB se definiše kao [32]:

$$F(\mathbf{V}) = \frac{1}{MN} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} \mathbf{y}^H(n) \exp \left(j \sum_{k=1}^P a_k (n\Delta)^k \right) \mathbf{a}(\theta, n) \right|^2, \quad (8.5)$$

gdje $(\cdot)^H$ predstavlja Hermitski operator. Izraz u relaciji (8.5) je $(P+1)$ dimenziona funkcija i njenom maksimizacijom moguće je odrediti nepoznate parametre $[\theta, a_1, \dots, a_P]$.

Zbog velike računске kompleksnosti, PFB je ograničen na PPS do drugoga reda. U [32], upotreba GA u optimizaciji ove funkcije, smanjila je složenost, ali, istovremeno, je pogoršala i tačnost estimiranih parametara. U želji da estimiramo parametre PPS-a i DOA-u, sa što manjom računskom složenošću, u narednoj sekciji, razmatraćemo način implementiranja 1D estimatora PPS-a u estimaciji parametara signala $\mathbf{y}(n)$.

8.1.3 1D estimacija signala primljenih antenskom rešetkom

Da bismo imali jasniju reprezentaciju modela signala opisanog u Sekciji 8.1.1, posmatrajmo signal primljen m -tim senzorom:

$$y_m(n) = A \exp \left\{ j(a_P(n\Delta)^P + \sum_{i=0}^{P-1} (a_i + (i+1)a_{i+1}\psi m)(n\Delta)^i) \right\} + \nu_m(n),$$

$$m = 0, \dots, M-1. \quad (8.6)$$

Za fiksno m , ovo je i dalje PPS P -tog reda i njegovi parametri se mogu estimirati primjenom PD operatora.

$(P-1)$ autokorelacija $y_m(n)$ rezultuje sledećim signalom

$$\begin{aligned} \text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau] &= A^{2^{P-1}} \exp \{ j[2^{P-1} P! \tau^{P-1} \Delta^P a_P(n + m\psi/\Delta) \\ &\quad + 2^{P-1} (P-1)! (\tau\Delta)^{P-1} a_{P-1}] \} + \nu_{1,m}(n) \\ &= B \exp \{ j2^{P-1} P! \tau^{P-1} \Delta^P a_P n \} \exp \{ j2^{P-1} P! \tau^{P-1} \Delta^{P-1} a_P \psi m \} + \nu_{1,m}(n), \\ &\quad m = 0, \dots, M-1, |n| \leq N/2 - (P-1)\tau, \end{aligned} \quad (8.7)$$

gdje je

$$B = A^{2^{P-1}} \exp \{j2^{P-1}(P-1)!(\tau\Delta)^{P-1}a_{P-1}\}. \quad (8.8)$$

Primjetimo da $\text{PD}_{x_m(n)}^{P-1}[n, \tau]$ predstavlja proizvod dvije kompleksne sinusoide po n i m osi, respektivno. Kružna učestanost sinusoide po n osi je $\omega_n = 2^{P-1}P!\tau^{P-1}\Delta^P a_P$, dok one po m osi iznosi $\omega_m = 2^{P-1}P!\tau^{P-1}\Delta^{P-1}a_P\psi$. Kako su nepoznate u ovim frekvencijama samo parametri a_P i θ , iste se mogu estimirati estimacijom ω_n i ω_m :

$$\hat{a}_P = \frac{\hat{\omega}_n}{2^{P-1}P!\tau^{P-1}\Delta^P}, \quad (8.9)$$

$$\hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{c}{d}\hat{\psi}\right) = \arcsin\left(\frac{c}{d}\frac{\hat{\omega}_m}{2^{P-1}P!\tau^{P-1}\Delta^{P-1}\hat{a}_P}\right). \quad (8.10)$$

Parametar ω_n možemo estimirati lokacijom maksimuma FT-a $\text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau]$ računatog po n osi, dok ω_m se može odrediti iz FT-a istog signala ali sada računatog po m -osi. Kako imamo M senzora i ukupno $N + 1 - 2(P-1)\tau$ odbiraka signala, imaćemo i toliko estimiranih parametara ω_n i ω_m , respektivno. Konačna vrijednost parametra se može dobiti usrednjavanjem rezultata po svakom senzoru ili vremenskom trenutku. U [54], predloženo je α -trimovanje dobijenih rezultata umjesto standardnog usrednjavanja dobijenih estimacija. α -trimovanje niza \mathbf{X} , od N elemenata, se definiše relacijom:

$$\text{Trim}_\alpha[\mathbf{X}] = \frac{1}{N(1-2\alpha)} \sum_{k=\lceil \alpha N \rceil}^{\lceil (1-\alpha)N \rceil} X^s(n), \quad (8.11)$$

gdje je $\text{Trim}_\alpha[\cdot]$ operator trimovanja, α procenat odbačenih elemenata i \mathbf{X}^s sortiran vektor estimacija \mathbf{X} . α -trimovanje omogućava da u usrednjavanju dobijenih vrijednosti ne učestvuju one najveće i najmanje, jer one vjerovatno predstavljaju estimacije koje po vrijednostima značajno odstupaju od uobičajenih, tj. okarakterisane su velikom greškom.

Parametri nižega reda mogu se odrediti dechirpovanjem estimiranih parametara,

$$y_m^d(n) = y_m(n) \exp\left(-j\left((n\Delta)^P + Pm(n\Delta)^{P-1}\hat{\psi}\right)\hat{a}_P\right), \quad m = 0, \dots, M-1, \quad (8.12)$$

i ponavljanjem slične procedure. Na ovaj način smo problem estimacije parametara $[\theta, a_1, \dots, a_P]$ sveli na pretraživanje po 1D prostoru. U daljem tekstu, ovu metodu ćemo zvati PPS estimator (PPSE).

Primjetimo da za estimaciju parametara faze signala $s(n)$ može biti korišćena bilo koja estimaciona procedura opisana u Sekcijama 3 i 4.1, dok se parametar θ mora odrediti iz $\text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau]$.

U Tabelama 8.1 i 8.2 dati su algoritmi za estimaciju parametara PPS-a drugog i trećeg reda zasnovani na korišćenju α -trimovanja. PPS drugog reda estimiran je uz pomoć HAF-a, dok se za estimaciju parametara PPS-a trećeg reda koristi CPF, jer je pokazao određene prednosti u odnosu na HAF.

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Izračunati $\text{PD}_{y_m(n)}^1[n, \tau] = y_m(n + \tau) y_m^*(n - \tau)$, gdje je $\tau = N/4$.

Estimirati a_2^m iz FT $\text{PD}_{y_m(n)}^1[n, \tau]$ računajte po n osi

$$\hat{a}_2^m = \frac{\arg \max_{\omega_n} \{ \text{FT}_n [\text{PD}_{y_m(n)}^1[n, \tau]] \}}{4\tau\Delta^2}.$$

end for

Estimirati a_2 pomoću α -trim operatora:

$$\hat{a}_2 = \text{Trim}_\alpha [\hat{a}_2^0, \hat{a}_2^1, \dots, \hat{a}_2^{M-1}].$$

for $n = -N/4$ **to** $N/4$

Estimirati θ^n iz FT-a $\text{PD}_{y_m(n)}^1[n, \tau]$ računatog po m osi

$$\hat{\theta}^n = \arcsin \left(\frac{c}{d} \frac{\arg \max_{\omega_m} \{ \text{FT}_m [\text{PD}_{y_m(n)}^1[n, \tau]] \}}{4\tau\Delta\hat{a}_2} \right).$$

end for

Estimirati θ i ψ

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \text{Trim}_\alpha \left[\hat{\theta}^{-\frac{N}{4}}, \hat{\theta}^{-\frac{N}{4}+1}, \dots, \hat{\theta}^{\frac{N}{4}} \right], \\ \hat{\psi} &= \frac{d}{c} \sin(\hat{\theta}). \end{aligned}$$

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Ukloniti estimirane parametre iz faze m -tog signala

$$\hat{y}_m^d(n) = x_m(n) \exp \left\{ -j((n\Delta)^2 + 2m(n\Delta)\hat{\psi})\hat{a}_2 \right\}.$$

Estimirati a_1^m iz FT-a $\hat{y}_m^d(n)$ računatog po n osi

$$\hat{a}_1^m = \arg \max_{\omega} \{ \text{FT}_n [\hat{y}_m^d(n)] \}.$$

end for

Estimirati a_1 kao

$$\hat{a}_1 = \text{Trim}_\alpha [\hat{a}_1^0, \hat{a}_1^1, \dots, \hat{a}_1^{M-1}].$$

Tabela 8.1: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a, $P = 2$.

Pretpostavimo $y_m(n)$ sledećeg oblika:

$$y_m(n) = A \exp \{ j[A_0 + A_1 n\Delta + A_2 (n\Delta)^2 + A_3 (n\Delta)^3] \},$$

$$A_0 = a_0 + a_1 m\psi,$$

$$A_1 = a_1 + 2a_2 m\psi,$$

$$A_2 = a_2 + 3a_3m\psi,$$

$$A_3 = a_3.$$

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Estimirati parametre A_3^m and A_2^m pomoću CPF-a računatog u dva vremenska trenutka $n = 0$ i $n = n_1 \approx 0.11N$ na sledeći način:

$$\Omega_0 = \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_{y_m}(0, \Omega)|,$$

$$\Omega_1 = \arg \max_{\Omega} |\text{CPF}_{y_m}(n_1, \Omega)|,$$

$$\hat{A}_2^m = \Omega_0/2,$$

$$\hat{A}_3^m = (\Omega_1 - \Omega_0)/(6n_1\Delta).$$

Izračunati $\text{PD}_{y_m(n)}^2[n, \tau]$, gdje je $\tau = N/6$.

end for

K1: Estimirati A_3

$$\hat{A}_3 = \hat{a}_3 = \text{Trim}_{\alpha} [\hat{A}_3^0, \hat{A}_3^1, \dots, \hat{A}_3^{M-1}].$$

for $n = -N/6$ **to** $N/6$

Estimirati θ^n

$$\hat{\theta}^n = \arcsin \left(\frac{c}{d} \frac{\arg \max_{\omega_m} \{ \text{FT}_m [\text{PD}_{y_m(n)}^2[n, \tau]] \}}{24\tau^2 \Delta^2 \hat{a}_3} \right).$$

end for

Estimirati θ i ψ

$$\hat{\theta} = \text{Trim}_{\alpha} \left[\hat{\theta}^{-\frac{N}{6}}, \hat{\theta}^{-\frac{N}{6}+1}, \dots, \hat{\theta}^{\frac{N}{6}} \right],$$

$$\hat{\psi} = \frac{d}{c} \sin(\hat{\theta}).$$

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Estimirati a_2^m iz \hat{A}_2^m sa $\hat{a}_2^m = \hat{A}_2^m - 3\hat{a}_3m\hat{\psi}$.

end for

Estimirati a_2

$$\hat{a}_2 = \text{Trim}_{\alpha} [\hat{a}_2^0, \hat{a}_2^1, \dots, \hat{a}_2^{M-1}].$$

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Ukloniti \hat{A}_2^m i \hat{A}_3^m iz faze signala $y_m(n)$

$$\hat{y}_m^d(n) = \hat{y}_m(n) \exp \left\{ -j \left(\hat{A}_2^m(n\Delta)^2 + \hat{A}_3^m(n\Delta)^3 \right) \right\}.$$

Estimirati A_1^m iz FT-a $\hat{y}_m^d(n)$ računatog po n osi

$$\hat{A}_1^m = \arg \max_{\omega} \{ \text{FT}_n [\hat{y}_m^d(n)] \}.$$

Estimirati a_1^m iz \hat{A}_1^m , $\hat{a}_1^m = \hat{A}_1^m - 2\hat{a}_2m\hat{\psi}$.

end for

Estimirati a_1

$$\hat{a}_1 = \text{Trim}_\alpha [\hat{a}_1^0, \hat{a}_1^1, \dots, \hat{a}_1^{M-1}] .$$

Poboljšanje estimacije

for $m = 0$ **to** $M - 1$

Poboljšati tačnost parametara A_1^m , A_2^m and A_3^m uz pomoć O'Shea algoritma.

end for

Ponoviti korake počev od **K1**, koristeći poboljšane parametre A_1^m , A_2^m i A_3^m .

Tabela 8.2: Algoritam za estimaciju parametara PPS-a, $P = 3$.

Estimacija parametara PPS-a višega i nepoznatog reda

U podvodnoj akustici često se sreću signali koji se mogu modelovati PPS-om čiji je red veći od tri [24]. Algoritam opisan u ovoj sekciji se uspješno može primjeniti i na ovakve signale. Nakon estimacije a_P i θ korišćenjem (8.9) i (8.10), parametri nižega reda se određuju primjenom HAF-a na signal (8.12). Međutim, ovdje treba imati na umu da, zbog visokog praga, HAF ne može biti korišćen na niskim SNR-ovima. Stoga, u takvim uslovima bolje je upotrebiti HCPF-HAF ili HOCPF-WD.

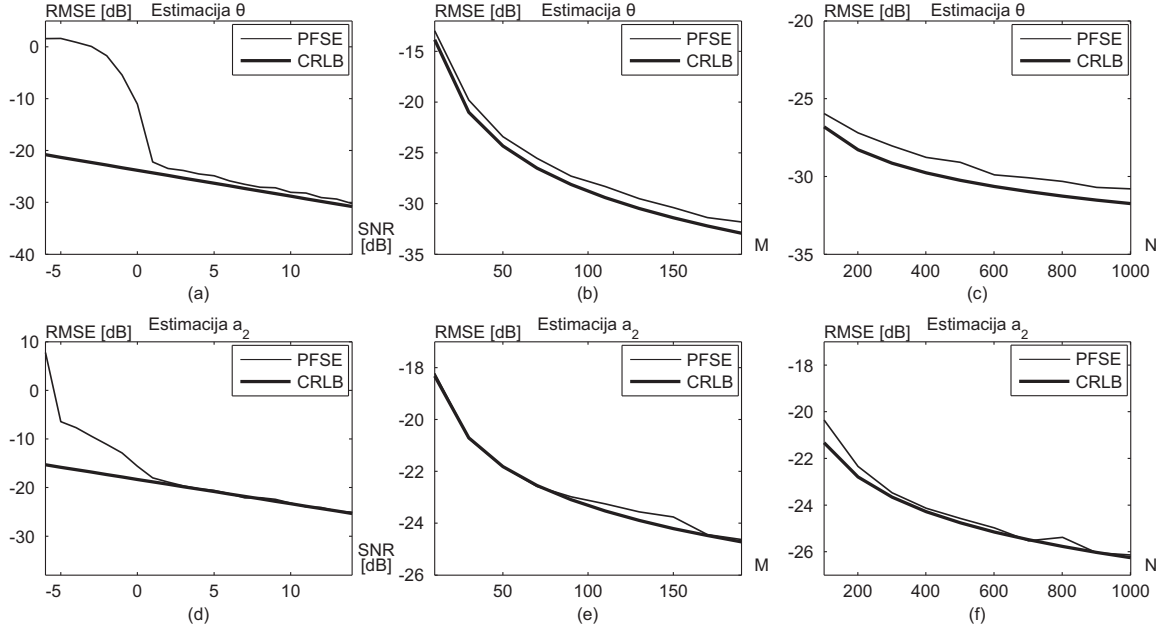
Ukoliko red PPS-a nije poznat, PD operator može poslužiti za određivanje ove veličine [9]. Naime, da bi odredili P , fazu $y_m(n)$ treba diferencirati sve dok se ne dobije signal čiji spektar sadrži samo jednosmjernu komponentu. Broj PD-a odgovara redu signala. Alternativni način za određivanje P opisan je u [55].

Dodatno poboljšanje robusnosti PPS estimatora

Jedna od dodatnih mogućnosti, koja povećava robusnost \hat{a}_P i $\hat{\theta}$ je, umjesto usrednjavanja dobijenih estimacija, usrednjavanje spektara $\text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau]$ računatih po senzoru ili po vremenu [56]:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \arg \max_{\omega} \sum_{n=-N/2+(P-1)\tau}^{N/2-(P-1)\tau} \left| \text{FT}_n \left\{ \text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau] \right\} \right|, \\ \hat{\omega}_m &= \arg \max_{\omega} \sum_{m=0}^{M-1} \left| \text{FT}_m \left\{ \text{PD}_{y_m(n)}^{P-1}[n, \tau] \right\} \right|. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ovdje usrednjavanje spektara ima isti efekat kao i proizvod kod PHAF-a. Naime, stvarni maksimumi u spektrima računatih po m/n osi će uvijek biti na istim pozicijama, dok, oni



Slika 8.1: RMSE-i $\hat{\theta}$ i \hat{a}_2 ($P = 2$) za tri scenarija: (a) i (d) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b) i (e) promjenjivo M , $N = 256$, SNR= 10 dB; (c) i (f) promjenjivo N , SNR= 10 dB, $M = 100$.

nastali usljed šuma, će se nalaziti na različitim pozicijama od spektra do spektra. Stoga, sabiranje će jačati stvarne maksimume, a slabiti lažne.

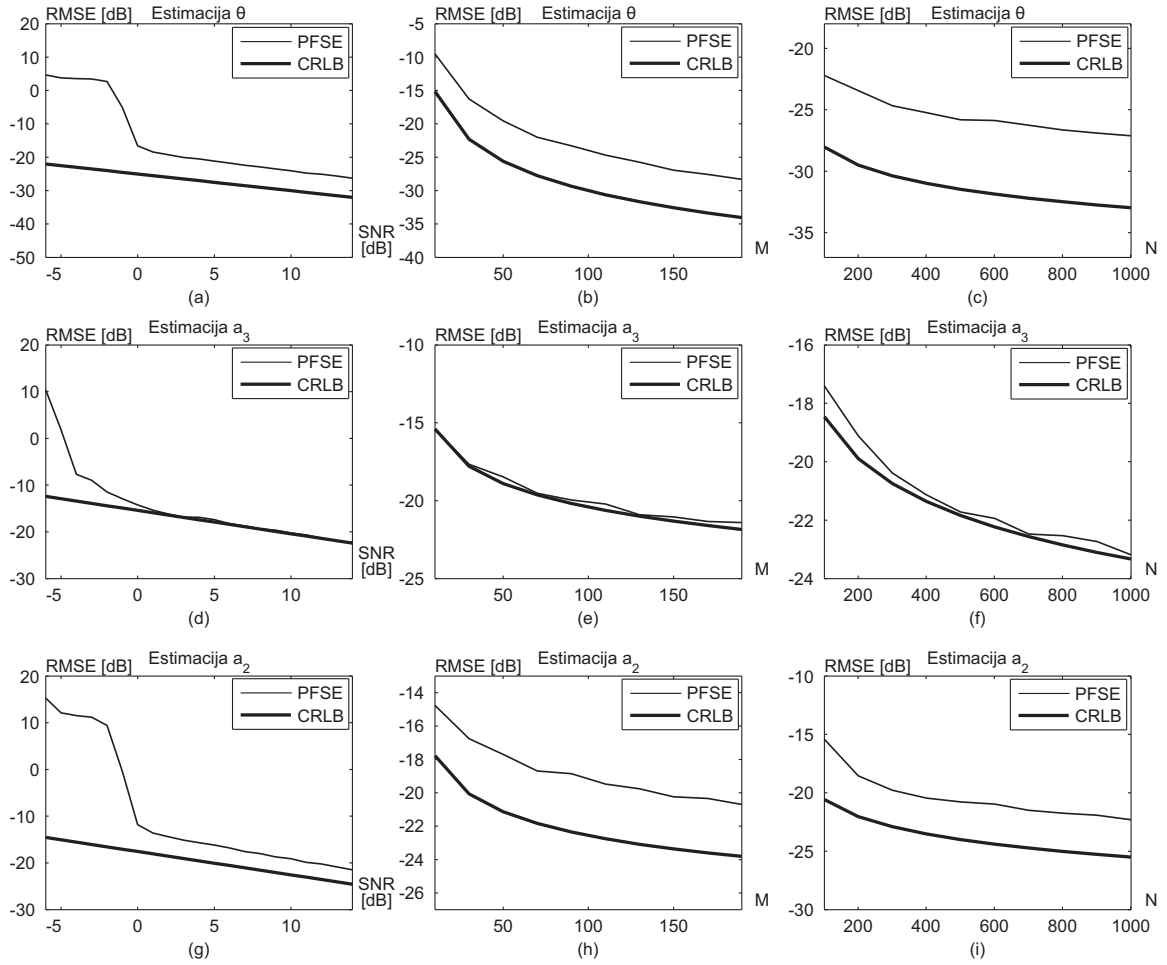
Računska složenost PPS estimatora za $P = 2$ i $P = 3$

Može se pokazati da je složenost algoritama opisanih u Tabelama 8.1 i 8.2 reda $O(MN \log_2 MN)$ i $O(QMN)$, respektivno, gdje je Q broj tačaka na Ω osi korišćenoj prilikom računanja CPF-a [54]. Složenost algoritma za $P = 3$ može se dodatno smanjiti korišćenjem pristupa opisanog u Sekciji 4.4. Za razliku od PPSE-a, PFB ima složenost koja je reda $O(MNN_\theta N_{a_1} N_{a_2})$ ($P = 2$) i $O(MNN_\theta N_{a_1} N_{a_2} N_{a_3})$ ($P = 3$), gdje je N_θ , N_{a_1} , N_{a_2} i N_{a_3} broj tačaka po θ , a_1 , a_2 i a_3 osama pretraga, respektivno. Dakle, vidimo da opisani pristup ima značajno manju kompleksnost u odnosu na PFB, što ga stavlja u red potencijalnih kandidata za primjenu u realnim aplikacijama.

U narednom poglavlju ispitaćemo performanse opisane estimacione procedure.

8.1.4 Numerički primjeri

U ovoj sekciji izvršićemo evaluaciju performansi estimatora opisanog u prethodnoj sekciji. Kao mjera za ocjenu performansi, umjesto MSE-a, biće korišćen RMSE koji



Slika 8.2: RMSE $\hat{\theta}$, \hat{a}_2 i \hat{a}_3 ($P = 3$) za tri scenarija: (a), (d) i (g) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b), (e) i (h) promjenjivo M , $N = 256$, SNR= 10 dB; (c), (f) i (i) promjenjivo N , SNR= 10 dB, $M = 100$.

predstavlja korijen MSE-a (RMSE - engl. *root mean squared error*). Ova jedinica je uobičajena za predstavljanje greške u obradi signala u sistemima zasnovanim na mrežama senzora. Za potrebe računanja RMSE-a korist ćemo Monte Carlo simulacije sa 500 iteracija. Tri scenarija su razmatrana: zavisnost RMSE-a od SNR-a, zavisnost RMSE-a od M i zavisnost RMSE-a od N . Rastojanje između senzora u svim primjerima je $d = 1.5$, dok je brzina prostiranja kroz medijum $c = 1500$ m/s. Dolazni ugao signala je $\theta = \pi/6$.

Primjer 1. U ovom primjeru posmatrali smo PPS drugoga reda:

$$s(n) = \exp(j(19\pi + 5\pi(n\Delta) + 11\pi(n\Delta)^2)), (n\Delta) \in [-1, 1]. \quad (8.14)$$

U prvom scenariju snimali smo zavisnost RMSE-a od SNR-a, koji je razmatran u opsegu od -6 dB do 14 dB sa korakom od 1 dB. Ukupan broj odbiraka signala je $N + 1 =$

257 i signal je primljen sa $M = 100$ senzora. RMSE-i $\hat{\theta}$ i \hat{a}_2 estimiranih pomoću PPSE-a prikazani su na Slikama 8.1 (a) i (d), respektivno. Na graficima smo takođe prikazali i odgovarajuće CRLB-ove [32]. Sa slika se može zaključiti da je prag ove estimacione tehnike oko 2 dB. Iznad praga, RMSE \hat{a}_2 dostiže CRLB, dok je RMSE $\hat{\theta}$ za oko 1 dB iznad CRLB-a.

U drugom scenariju gledali smo zavisnost RMSE-a od broja senzora. Naime, M smo posmatrali u intervalu od 10 do 190 sa koracima od 10. RMSE-i PPSE-a prikazani su na Slikama 8.1 (b) i (e). Treći scenario podrazumjevaio je snimanje karakteristika estimatora u zavisnosti od ukupnog broja odbiraka signala, koji je išao od 101 do 1001 pri fiksnom SNR= 10 dB i $M = 100$. RMSE-i prikazani su na Slikama 8.1 (c) i (f). Za poslednja dva slučaja, posmatrani estimator se pokazao dosta stabilnim. Naime, pokazano je da rastojanje RMSE-a od CRLB-a u posmatranim intervalima ne zavisi od M i N . To rastojanje je isto kao i u prvom scenariju.

RMSE parametra \hat{a}_1 ovdje nije prikazan. Na njegovu tačnost veliki uticaj ima estimacija θ , pa se može pokazati da je RMSE ovoga parametra za oko 1 dB iznad CRLB-a.

Primjer 2. Ovdje smo snimali karakteristike PPSE-a na signalu trećega reda:

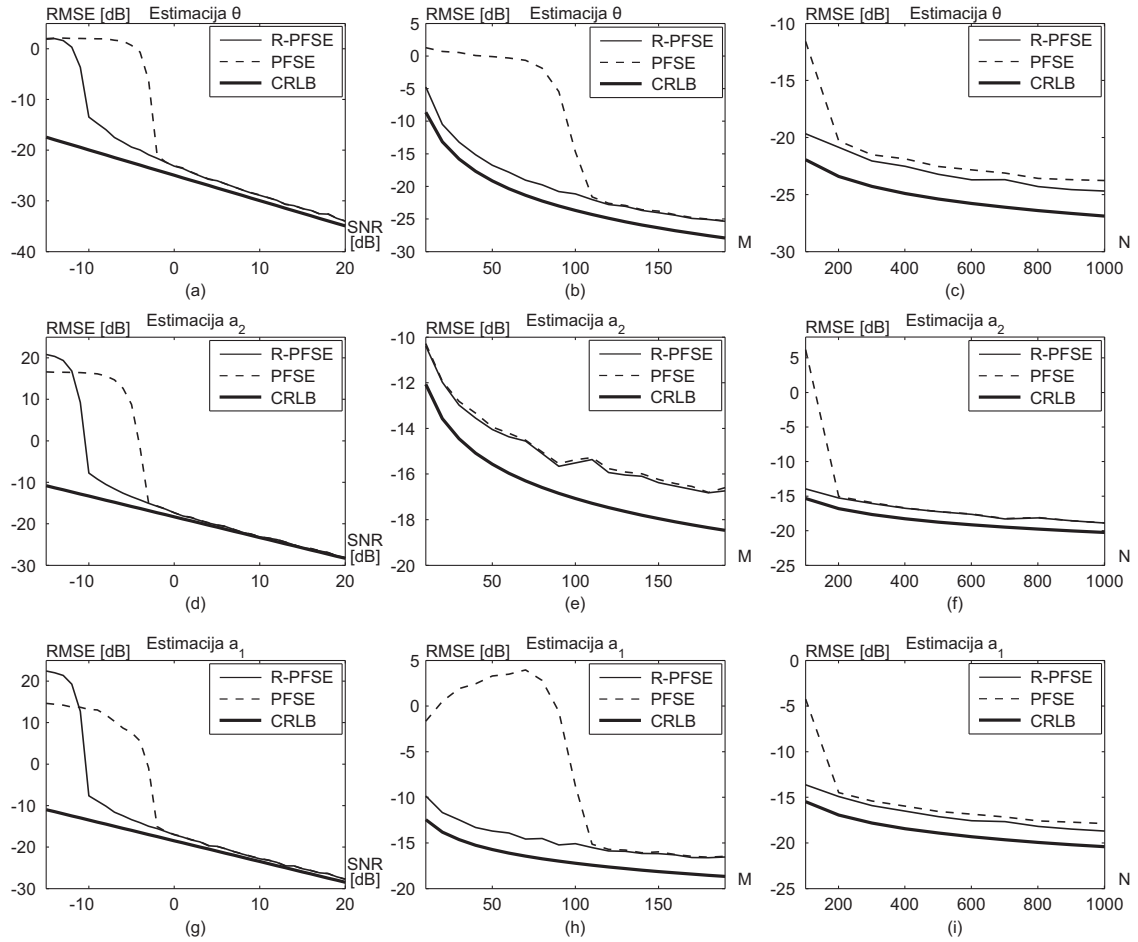
$$s(n) = \exp(j(19\pi + 5\pi(n\Delta) + 11\pi(n\Delta)^2 + 7\pi(n\Delta)^3)), (n\Delta) \in [-1, 1]. \quad (8.15)$$

Potpuno ista tri scenarija su razmatrana kao i u Primjeru 1. Dobijeni rezultati za a_2 , a_3 i θ prikazani su na Slici 8.2. Parametri su estimirani pomoću algoritma datog u Tabeli 8.2.

Prag SNR-a PPSE-a je oko 0 dB. Za sva tri slučaja RMSE parametra \hat{a}_3 je asimptotski efikasan, dok su RMSE-i \hat{a}_2 i $\hat{\theta}$ oko 3 dB i 6 dB iznad CRLB-a, respektivno.

Razlog primjetno lošijih performansi \hat{a}_2 u odnosu \hat{a}_3 leži u činjenici da tačnost \hat{a}_2 zavisi od tačnosti \hat{A}_2 , \hat{a}_3 i $\hat{\theta}$. Primjetimo takođe i lošije performanse $\hat{\theta}$ u odnosu na performanse \hat{a}_3 . Na $\hat{\theta}$ utiče estimacija \hat{a}_P i ω_m , kao i nelinearnost funkcije arcsin. Međutim, niska računaska kompleksnost ove tehnike opravdava pomenuti gubitak u tačnosti.

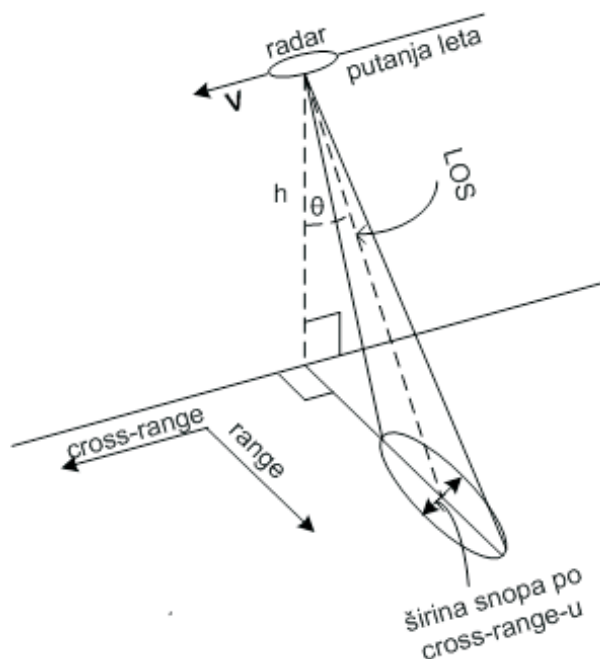
Primjer 3. U ovom primjeru smo izvršili poređenje klasičnog PPSE-a i PPSE-a koji umjesto α -timovanog operatora koristi usrednjavanje spektara PD-a (R-PPSE). Posmatrani signal je PPS drugoga reda, $x(n) = \exp(j(17\pi - 6\pi(n\Delta) + 14\pi(n\Delta)^2))$, $(n\Delta) \in [-1, 1]$. Tri scenarija su posmatrana: a) promjenljivi SNR (SNR $\in [-15, 20]$ dB), $N + 1 = 257$ i $M = 100$; b) promjenjivo M ($M \in [10, 190]$), SNR= -2 dB i $N = 256$; c) promjenjivo N ($N \in [100, 1000]$), SNR= -2 dB i $M = 100$. RMSE-i parametara PPS-a dobijenih PPSE-om i R-PPSE-om prikazani su na Slici 8.3.



Slika 8.3: RMSE $\hat{\theta}$, \hat{a}_2 i \hat{a}_1 estimiranih pomoću PPSE-a i R-PPSE-a ($P = 2$) za tri scenarija: (a), (d) i (g) promjenljivi SNR, $N = 256$, $M = 100$; (b), (e) i (h) promjenjivo M , $N = 256$, SNR = -2 dB; (c), (f) i (i) promjenjivo N , SNR = 2 dB, $M = 100$.

U slučaju promjenjivog SNR-a, prag R-PPSE-a je za oko 8 dB niži u odnosu na prag PPSE-a, dok, iznad praga PPSE-a, obje tehnike imaju sličnu vrijednost RMSE-a, koja je dosta blizu CRLB-a. Za promjenjivo M , R-PPSE daje tačne estimacije nezavisno od broja senzora, dok tačni rezultati PPSE-a su ostvarljivi za $M > 100$. I u slučaju promjenjive dužine signala, metod zasnovan na usrednjavanju spektara je bolji u odnosu na metod zasnovan na α -trimovanju.

Ovim primjerom zaključujemo da je metod zasnovan na usrednjavanju spektra signala nakon PD-a mnogo robusniji od α -trimovanja. Pored toga što je robusniji, ovaj metod je i računski prihvatljiviji, jer ne uključuje sortiranje elemenata niza, koje se u drugom metodu ne može izbjeći. Sve ovo govori da je u realnim aplikacijama bolje koristiti R-PPSE.



Slika 8.4: Princip funkcionisanja SAR sistema.

8.2 Estimacija parametara SAR signala

Signali u SAR sistemima se često predstavljaju preko PPS modela. Stoga, u ovoj sekciji ćemo pokazati na koji način se može izvršiti estimacija parametara ovih signala. Kako su posmatrani signali pretežno multikomponentni, estimaciju parametara ćemo obaviti pomoću CPF-a prilagođenog ovakvim signalima [57].

8.2.1 Princip rada SAR sistema

SAR sistemi služe za snimanje površine zemlje iz vazduha. Princip funkcionisanja ovoga sistema ilustrovan je Slikom 8.4. Radar, krećući se konstantnom brzinom V na visini H emituje elektromagnetni snop usmjeren prema zemlji, normalno na pravac kretanja [58]. Emitovani snop se reflektuje od površine zemlje i prima prijemnom antenom. Zbog propagacije kroz medijum i refleksije, primljeni signal je zakašnjen, oslabljen i frekvencijski modulisan. Na osnovu razlike poslatog i primljenog signala u stanju smo izvesti zaključke o radarskoj sceni. Tako npr. kašnjenje signala daje informaciju o udaljenosti mete od radara.

Standardna radarska slika posjeduje dvije koordinate, *cross-range* (*azimuth*) i *range*. Cross-range predstavlja pravac kretanja radara i visoka rezolucija po ovoj koordinati postiže se promjenom položaja radara tokom emitovanja i prijema signala. Kako, prilikom

emitovanja signala, dolazi do širenja radarskog snopa, njegova projekcija na zemlju ima oblik elipse. Duža osa elipse je normalna na pravac kretanja radara koji se naziva *range*. Da bi se poboljšala rezolucija po ovoj koordinati, predajni signal se dijeli u odbirke.

Vizuelizacija radarskog signala obično se sprovodi računanjem 2D FT-a primljenog signala u range/cross-range domenu. Stacionarne mete daju idealnu sliku radarske scene. Međutim, uslijed kretanja objekata dolazi do frekvencijske modulacije poslatog signala koja se na radarskoj slici manifestuje razmazivanjem i dislociranjem meta u odnosu na stvarnu poziciju [59], [58]. Takve radarske slike su, bez prethodnog pretprocesiranja, neupotrebljive. Za procesiranje radarskog signala obično se koriste tehnike za kompenzaciju kretanja ili vremensko-frekvencijske reprezentacije, koje zahtijevaju sprovođenje značajnog broja računskih operacija. Smanjenje potrebnog broja računskih operacija za fokusiranje radarskih slika mi ćemo, u ovoj sekciji, obaviti pomoću CPF-a, koga ćemo prilagoditi multikomponentnim signalima.

8.2.2 Oblik signala na prijemu

Da bismo znanje iz parametarske estimacije primjenili u radarima, neophodno je fazu primljenog signala izraziti preko polinoma. Na osnovu modela tačkastih reflektora [58], kontura objekta u radarskoj sceni može se predstaviti preko sume FM signala:

$$q(m, n) = \sum_i \sigma_i \exp(j\phi_i(m, n)),$$

$$n \in [-N/2, N/2], m \in [-M/2, M/2], \quad (8.16)$$

gdje su σ_i i $\phi_i(m, n)$ amplituda i faza i -tog reflektora, respektivno. Parametar m odgovara rednom broju signala emitovanog prema meti (tzv. sporo vrijeme - korespondira cross-range-u), dok n rednom broju odbirka unutar jednog signala (tzv. brzo vrijeme - korespondira range-u). U zavisnosti od tipa kretanja mete, faza i -tog reflektora ima različite oblike. U Tabeli 8.3 dati su izgledi faze signala za karakteristične tipove kretanja.

Informacija o poziciji reflektora, $(a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$, sadržana je u članu $a_i^{(1)}m + b_i^{(1)}n$, dok ostali koeficijenti polinoma faze daju neke druge informacije, kao što je npr. informacija o ubrzanju mete.

2D FT signala (8.16) predstavlja standardnu radarsku sliku

$$Q(m', n') = \sum_m \sum_n q(m, n) w(m, n) \exp(-j2\pi m' m / (M + 1) - j2\pi n' n / (N + 1)), \quad (8.17)$$

$\phi_i(m, n)$	tip kretanja reflektora
$a_i^{(1)}m + b_i^{(1)}n$	stacionarni objekat
$a_i^{(2)}m^2/2 + a_i^{(1)}m + b_i^{(1)}n$	objekat koji se kreće
$\sum_{p=1}^P a_i^{(p)}m^p/p! + b_i^{(1)}n$	neuniformno kretanje
$a_i^{(1)}m + b_i^{(1)}n + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K d_i^{(p,k)}(m^p/p!)(n^k/k!)$	komplikovano kretanje
$a_i^{(1)}m + b_i^{(1)}n + c_i \sin(\alpha_i m + \beta_i n + \varphi_i)$	rotacija i vibracija

Tabela 8.3: Oblik faze reflektora za različite tipove kretanja.

gdje je $w(m, n)$ prozorska funkcija sa osobinom da je njen FT, $W(m', n')$, visokokoncentrisan u frekvencijskom domenu. Pod pretpostavkom da se radarska scena sastoji iz samo jednog stacionarnog objekta, 2D FT primljenog signala ima sledeći oblik:

$$Q_i(m', n') = \sigma_i W(m' - (M+1)a_i^{(1)}/2\pi, n' - (N+1)b_i^{(1)}/2\pi), \quad (8.18)$$

odakle se izvodi zaključak da je koncentracija radarske slike proporcionalna poziciji reflektora, $(a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$. Usled drugih tipova kretanja, $Q_i(m', n')$ će imati i dodatne članove $\psi_i(m, n) = \phi_i(m, n) - a_i^{(1)}m - b_i^{(1)}n$ koji uzrokuju razmazivanje i dislociranje komponenti:

$$Q_i(m', n') = \sigma_i W(m' - (M+1)a_i^{(1)}/2\pi, n' - (N+1)b_i^{(1)}/2\pi) *_m *_n \text{FT}\{\exp(j\psi_i(m, n))\}. \quad (8.19)$$

Oznaka $*_m *_n$ inicira da se radi o 2D konvoluciji po m i n osi.

Poređenjem (8.18) i (8.19) vidimo da se fokusiranje radarske slike svodi na eliminaciju člana $\psi_i(m, n)$ iz faze primljenog signala. U literaturi postoje različite tehnike koje se bave pomenutim problemom i one obično fokusiranje slike obavljaju kroz estimaciju parametara kretanja. Kako se u ovom radu bavimo estimacijom parametara polinoma faze, pomenuti problem možemo riješiti estimacijom parametara faze signala i dechirpovanjem nepoželjnih članova.

Analizu radarskih signala ograničimo na signale sa fazama prikazanim u prva tri reda Tabele 8.3. Primjetimo da kod ovih tipova kretanja defokusiranje se dešava samo po cross-range-u, pa estimaciju parametara 2D signala $q(m, n)$ možemo svesti na estimaciju 1D signala. Fiksiranjem n koordinate, $q(m, n)$ postaje 1D PPS čiji parametri faze uz stepen m , koji je veći od 1, predstavljaju neželjene članove uzrokovane kretanjem mete. Njihovom estimacijom i uklanjanjem iz faze dobijamo signal koji predstavlja kompleksnu sinusoidu, koja odgovara stacionarnim objektima. Ponavljanjem procedure

za svako n dobićemo fokusiranu radarsku sliku. Radi smanjenja računske kompleksnosti opisane procedure, estimaciju parametara treba vršiti samo ako se duž range-a detektuje postojanje jedne ili više meta.

U slučaju postojanja više od jedne mete u okviru istoga range-a, $q(m, n)$ je multikomponentni signal, pa njegove parametre moramo estimirati pomoću tehnika namijenjenih estimaciji multikomponentnih PPS-a. U cilju mogućnosti korišćenja CPF-a za ovu namjenu, neophodno je izvršiti njegovo prilagođenje multikomponentnim signalima. Ovo prilagođenje će biti obavljeno u narednoj sekciji pomoću kratkotrajnog FT-a (STFT engl. - *short time Fourier transform*).

8.2.3 Modifikacija kubične fazne funkcije

S ciljem adaptacije CPF-a na multikomponentne signale, za trenutak posmatrajmo kontinualnu verziju ove funkcije

$$\text{CPF}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau)s(t - \tau) \exp(-j\Omega\tau^2) d\tau.$$

Kada je $s(t)$ multikomponentan, tj. $s(t) = \sum_i s_i(t) = \sum_i A_i \exp(j\phi_i(t))$, CPF se može prikazati u vidu sume auto- i kros-članova:

$$\text{CPF}(t, \Omega) = \sum_i \text{CPF}_i(t, \Omega) + \sum_{i \neq j} \text{CPF}_{ij}(t, \Omega), \quad (8.20)$$

Kros-članovi, $\text{CPF}_{ij}(t, \Omega)$, značajno narušavaju reprezentaciju CPF-a i estimaciju čine nemogućom. Da bi CPF prilagodili na multikomponentne signale, u [57] smo predložili modifikovanu verziju CPF-a baziranu na STFT-u. STFT je definisan na sledeći način

$$\text{STFT}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau)w^*(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (8.21)$$

gdje je $w^*(\tau)$ prozorska funkcija. Zbog linearnosti, STFT ne generiše kros-članove¹ i kao takav je poželjan u estimaciji parametara PPS-a.

Da bi iskoristili STFT, neophodno je CPF izraziti preko ove transformacije. Znajući da se $s(t + \tau)$ može zapisati preko STFT-a,

$$s(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \text{STFT}(t, \omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (8.22)$$

¹U STFT-u kros-članovi se mogu javiti samo ako su u vremensko-frekvencijskoj ravni komponente signala suviše blizu jedna drugoj.

CPF se svodi na sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
\text{CPF}(t, \Omega) &= \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{STFT}(t, \omega_1) \text{STFT}(t, \omega_2) \exp(j\omega_1\tau - j\omega_2\tau) \times \\
&\quad \exp(-j\Omega\tau^2) d\tau d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{STFT}(t, \omega_1) \text{STFT}(t, \omega_2) \Pi_{\Omega}(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \int_{\omega} \int_{\theta} \text{STFT}(t, \omega + \theta) \text{STFT}(t, \omega - \theta) \Pi_{\Omega}(2\theta) d\omega d\theta, \tag{8.23}
\end{aligned}$$

gdje je

$$\Pi_{\Omega}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\Omega\tau^2) \exp(-j\theta\tau) d\tau. \tag{8.24}$$

Ako pretpostavimo da se značajan dio energije komponente signala nalazi u regionu $[\omega_{b_i}(t), \omega_{e_i}(t)]$ i da se komponente signala ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada CPF i -te komponente možemo zapisati na sljedeći način:

$$\text{CPF}_i(t, \Omega) = \iint_{\omega_{b_i}(t) \leq \omega \pm \theta \leq \omega_{e_i}(t)} \text{CPF}(t, \omega + \theta) \text{CPF}(t, \omega - \theta) \Pi_{\Omega}(2\theta) d\omega d\theta.$$

Prelaskom nazad na diskretne signale, dobijamo i diskretan oblik CPF-a:

$$\begin{aligned}
\text{CPF}_i(n, \Omega) &= \sum_{k=k'_i}^{k''_i} [\text{STFT}_i^2(n, k) \Pi_{\Omega}(0) + 2 \sum_{l=1}^{\min[k''_i - k, k - k'_i]} \\
&\quad \text{STFT}_i(n, k + l) \text{STFT}_i(n, k - l) \text{Re}\{\Pi_{\Omega}(2l)\}], \tag{8.25}
\end{aligned}$$

gdje pozicije k'_i i k''_i predstavljaju početak i kraj i -tog regiona.

Dakle, separacijom komponenti u frekvencijskom domenu, CPF sada računamo odvojeno za svaku komponentu. Način određivanja regiona komponenti zavisi od tipa primljenog signala i u literaturi postoji veliki broj radova koji se bave ovim problemom. Za razdvajanje komponenti u radarskim signalima u [57] mi smo odabrali Otsu algoritam [60].

Otsu algoritam

Otsu algoritam u digitalnoj obradi slike je često korišćena metoda za određivanje praga kod bipolarnog histograma. Ovdje se ovaj algoritam može upotrebiti za detekciju da li

određeni odbirak STFT-a pripada signalu ili ne. Generalno, izlaz iz Otsu algoritma je vrijednost praga sa kojom poredimo odbirak STFT-a. Ako je vrijednost odbirka STFT-a iznad praga, on pripada komponenti signala i obrnuto. Način kako funkcioniše Otsu algoritam prikazan je u Tabeli 8.4.

Postaviti prag $T_p = \max ||\text{STFT}(n, k)||/2$ i $p = 1$.

do

$$T_1 = \text{mean}\{(n, k) \in [-N/2, N/2] \times [-K_{\min}, K_{\max}], |\text{STFT}(n, k)| \geq T\},$$

$$T_2 = \text{mean}\{(n, k) \in [-N/2, N/2] \times [-K_{\min}, K_{\max}], |\text{STFT}(n, k)| < T\},$$

$$T_{p+1} = (T_1 + T_2)/2.$$

Postaviti $p = p + 1$.

while $p \leq p_{\max}$ **and** $|T_{p-1} - T_p| > F$

Izlaz iz algoritma je prag T_p .

Tabela 8.4: Otsu algoritam.

Algoritam kreće od inicijalnog praga $T = \max ||\text{STFT}(n, k)||/2$. U narednom koraku računaju se srednje vrijednosti onih odbiraka STFT-a koji se nalaze iznad praga (T_1) i srednje vrijednosti odbiraka koji se nalaze ispod praga (T_2). Potom se nova vrijednost praga računa kao srednja vrijednost T_1 i T_2 . Postupak se ponavlja sve dok razlika između pragova dvije susjedne iteracije ne padne ispod neke vrijednosti ili do određenog broja iteracija.

Problem Otsu algoritma je velika osjetljivost na šum. Kao posljedica pojave šuma algoritam može proizvesti veliki broj lažnih komponenti. Stvaran broj meta je u tom slučaju znatno manji od detektovanog broja. Uz pretpostavku da je broj komponenti na početku poznat i da iznosi K , K regiona sa najvećom energijom odgovaraće komponentama signala. Pored toga, u prisustvu šuma velike varijanse, pokazalo se da pomenuti algoritam teži da suzi širinu regiona, tako da je neophodno postaviti minimalnu širinu regiona.

8.2.4 Primjeri

Da bi demonstrirali prednosti modifikovanog CPF-a u odnosu na standardni CPF, prije nego što pređemo na estimaciju radarskih signala, izvršićemo poređenje ova dva pristupa na konkretnom analitičkom signalu.

Primjer 1. Klasični CPF i CPF predložen u prethodnoj sekciji uporedili smo na trokomponentnom PPS-u:

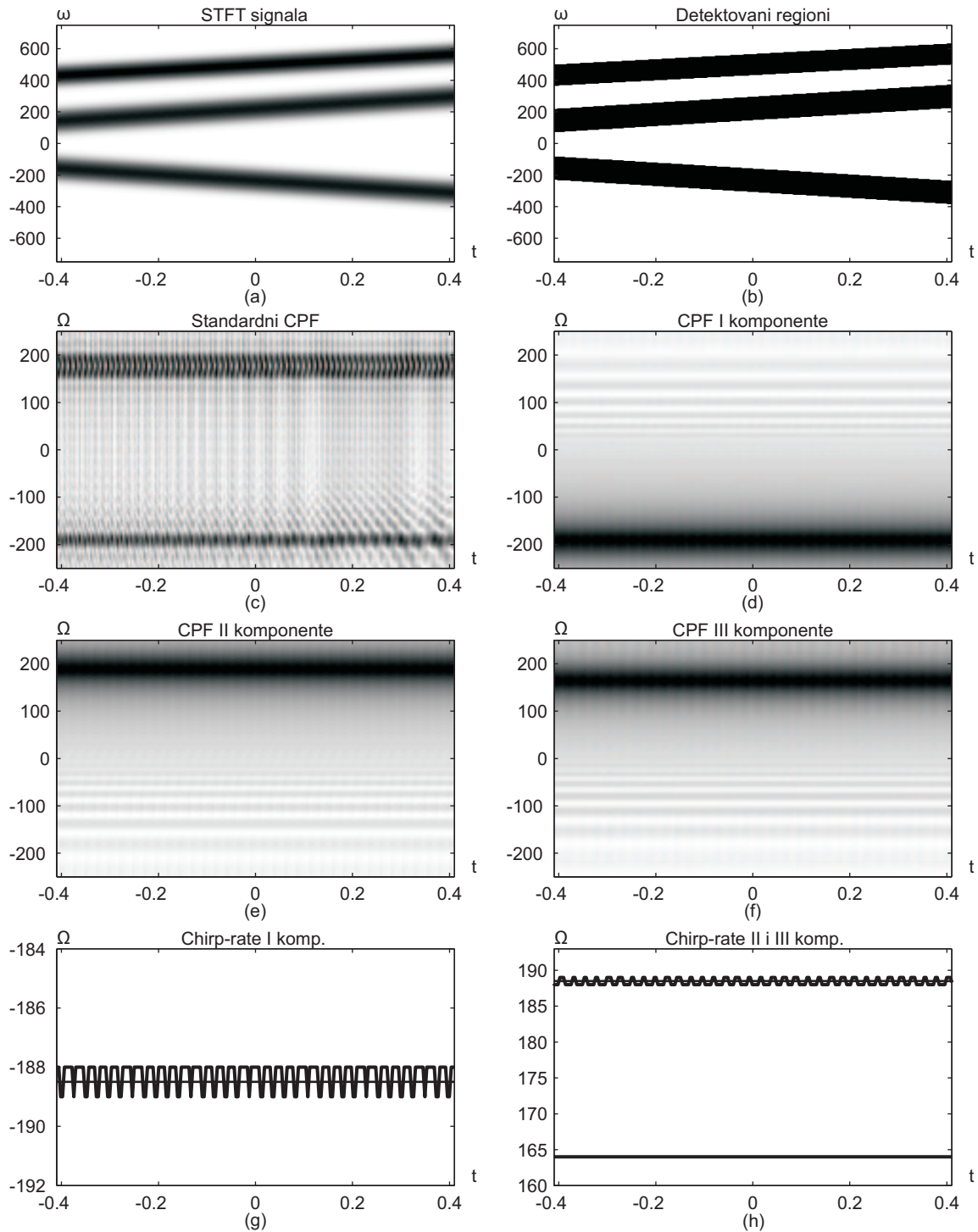
$$s(t) = \exp(-j30\pi t^2 - j72\pi t) + \exp(j30\pi t^2 + j72\pi t) + \exp(j26.1\pi t^2 + j160\pi t + j0.34\pi), \quad (8.26)$$

gdje je $t = n\Delta$, $t \in [-0.4, 0.4]$ i $\Delta = 1/257$. Dobijeni rezultati prikazani su na Slici 8.5. STFT signala $s(t)$ i regioni detektovani Otsu algoritmom ilustrovani su na Slikama 8.5 (a) i (b), respektivno, dok je na Slici 8.5 (c) prikazan oblik klasičnog CPF-a ovoga signala. Kao što se da primjetiti, komponente signala u CPF-u se nalaze suviše blizu jedna drugoj, tako da klasični CPF nije u stanju izvršiti njihovo razdvajanje. Pored toga, evidentni su i odgovarajući oscilatorni efekti u ovoj reprezentaciji. CPF računat pomoću relacije (8.25) (Slike 8.5 (d)-(f)), oslobođen je ovih efekata. Estimirana vrijednost chirp-rate-a² za prvu komponentu ilustrovana je na Slici 8.5 (g), dok su na Slici 8.5 (h) prikazane vrijednosti za drugu i treću komponentu signala. Greška koja postoji na ovim slikama uzrokovana je diksretizacijom chirp-rate intervala.

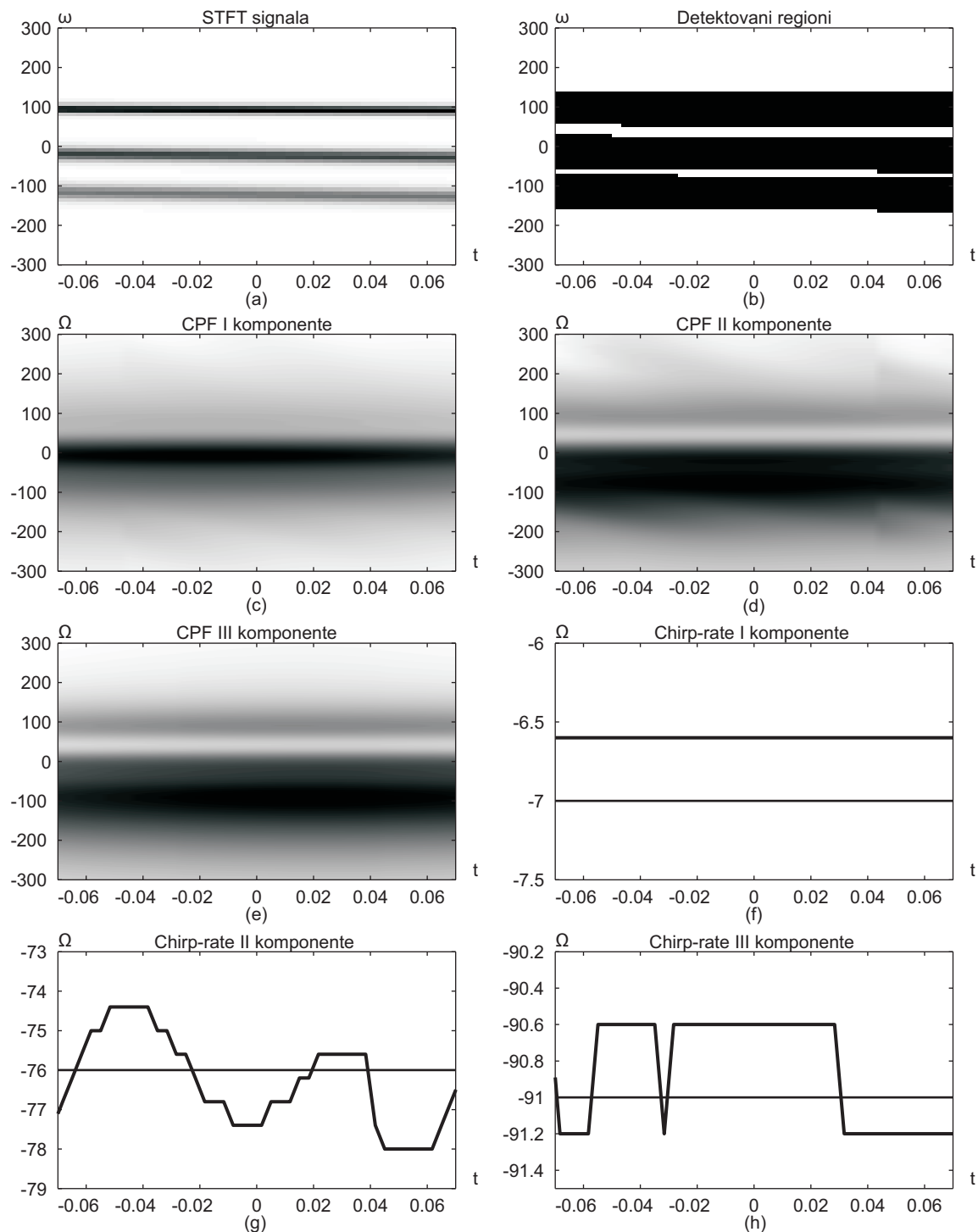
Primjer 2. U želji da testiramo modifikovani CPF u estimaciji parametara radarskog signala, posmatrali smo CV 580 SAR sistem sa sljedećim parametrima: radnom frekvencijom radara $f_0 = 5.3$ GHz, opsegom poslatih linearnih FM signala $B = 25$ MHz i koherentnim vremenom integracije $\Delta = 1/300$ s sa $M = 256$ odbiraka. Broj odbiraka jednoga signala je $N = 256$. Radar se nalazi na avionu koji se kreće na visini $H = 6$ km duž x -ose brzinom $V = 130$ m/s. Rastojanje radara od mete je 10 km.

Radarska scena sastoji se od tri mete koje se nalaze na istim pozicijama duž range-a, dok su početne pozicije duž cross-range-a: $x_{01} = -45$ m, $x_{02} = 0$ m i $x_{03} = 45$ m. Mete su se kretale duž cross-range-a sa sljedećim brzinama: $v_{x1} = 5$ m/s, $v_{x2} = 15$ m/s i $v_{x3} = 20$ m/s. Usljed takvog kretanja primljeni radarski signal za fiksni range, koji odgovara poziciji range u okviru koga se mete nalaze, predstavlja sumu tri linearne FM komponente [23]. To nam je dalo mogućnost estimiranja parametara faze ovoga signala. Kako nam cilj nije bio formiranje radarske slike, već prikaz estimiranih koeficijenata, analizirali smo samo jedan range. Razdvajanje komponenti signala u vremensko-frekvencijskoj ravni obavili smo pomoću Otsu algoritma. Radi tačnije estimacije postavili smo da minimalna širina detektovanog regiona iznosi 8 odbiraka, međutim čak i bez toga, dobijene vrijednosti su dosta dobre. Slika 8.6 prikazuje rezultate dobijene primjenom CPF-a na primljeni

²U radarima, chirp-rate predstavlja drugi izvod faze signala.



Slika 8.5: Analitički signal sa tri linearne FM komponente: (a) STFT; (b) Detektovani regioni dobijeni pomoću Otsu algoritma; (c) Oblik standardnog CPF-a; (d) Modifikovani CPF prve komponente; (e) Modifikovani CPF druge komponente; (f) Modifikovani CPF treće komponente; (g) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za prvu komponentu; (h) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za drugu i treću komponentu.



Slika 8.6: Radarski signal sa tri linearne FM komponente: (a) STFT; (b) Detektovani regioni; (c) CPF prve komponente; (d) CPF druge komponente; (e) CPF treće komponente; (f) Estimirana (debela linija) i stvarna vrijednost (tanka linija) chirp-rate-a za prvu komponentu; (g) Estimirana (debela linija) i stvarna vrijednost (tanka linija) chirp-rate-a za drugu komponentu; (h) Estimirana (debela linija) i stvarna (tanka linija) vrijednost chirp-rate-a za treću komponentu.

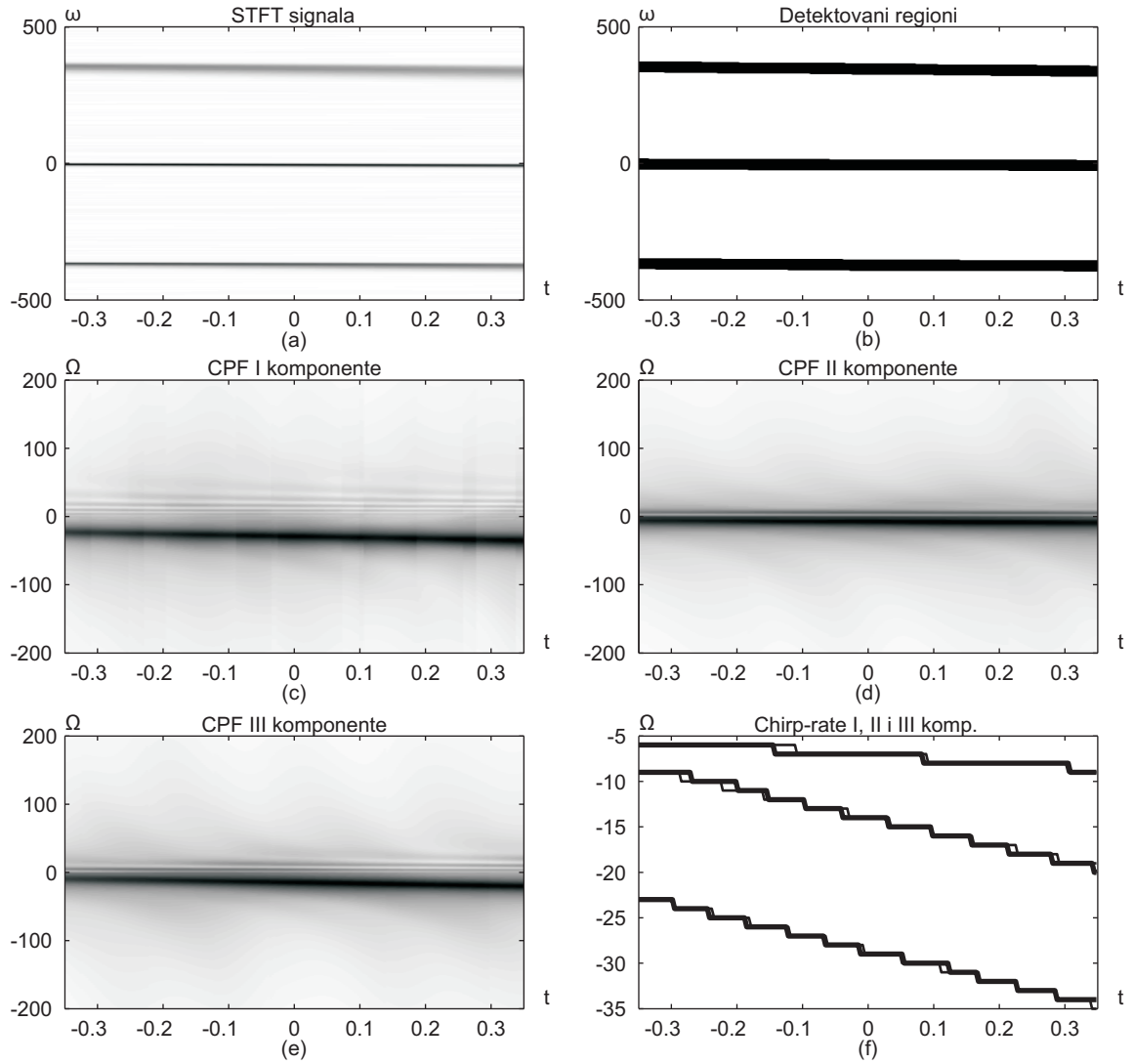
signal. Na Slici 8.6 (a) prikazana je STFT radarskog signala, dok Slika 8.6 (b) prikazuje regione detektovanih komponenti. Svaki region odgovara jednoj meti. Detektovani regioni se ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, što ispunjava uslov koji je potreban da bismo uopšte mogli primjeniti modifikaciju CPF-a. Vrijednosti CPF računate za svaku komponentu pojedinačno prikazane su na Slikama 8.6 (c)-(e), dok Slike 8.6 (f)-(h) ilustruju estimirane koeficijente (debela linija) i njihove stvarne vrijednosti (tanka linija). Procijenjene vrijednosti dobro prate stvarne. Odstupanja druge i treće komponente postoje zbog blizine njihovih regiona.

Primjer 3. Parametri radara su isti kao u prethodnom primjeru, s tom razlikom što je broj odbiraka jednoga signala $N = 1024$ i koherentno vrijeme integracije $\Delta = 3.4133$. Radarska scena se sastoji od tri mete duž istog range-a sa početnim pozicijama: $x_{01} = -150$ m, $x_{02} = 0$ m i $x_{03} = 150$ m. Mete se kreću duž cross-range-a sa ubrzanjima: $a_{x1} = 2.6$ m/s², $a_{x2} = 0.6$ m/s² i $a_{x3} = 2.2$ m/s². Usled ovakvoga kretanja, radarski signal će imati značajne vrijednosti koeficijenata uz treći stepen polinoma faze. Radarskom signalu smo superponirali i bijeli Gauss-ov šum standardne devijacije 10.

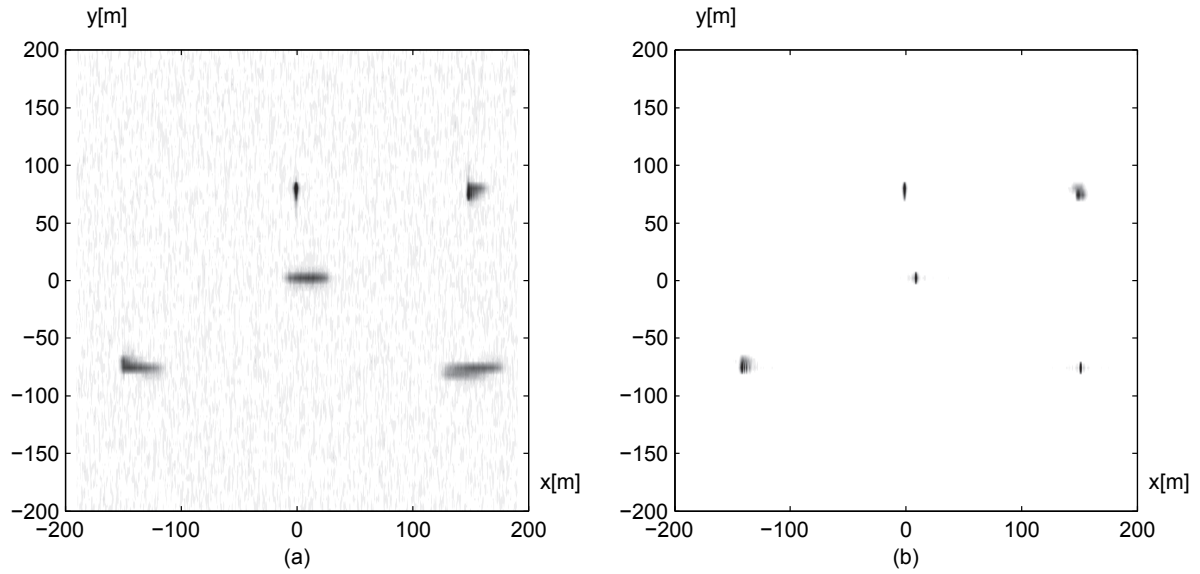
Iz razloga velikog rastojanja meta u vremensko-frekvencijskoj ravni koristili smo minimalnu širinu regiona od 16 odbiraka. Na Slici 8.7 prikazani su rezultati primjene CPF-a na ovaj tip signala. STFT radarskog signala i detektovani regioni prikazani su na Slikama 8.7 (a) i (b), respektivno, dok Slike 8.7 (c)-(e) ilustruju CPF računat za svaku komponentu pojedinačno. Estimirane i tačne vrijednosti koeficijenata svake komponente prikazane su na Slici 8.7 (f). I pored relativno velikog nivoa šuma, Otsu algoritam nije proizvodio lažne komponente. Razlog male greške između estimiranih i tačnih vrijednosti je zbog velikog rastojanja između detektovanih regiona. Standardne devijacije za prvu, drugu i treću komponentu su respektivno 0.3651, 0.2488 i 0.2845.

Primjer 4. U ovom primjeru iskoristili smo CPF za fokusiranje radarske slike. Svi parametri radara isti su kao u Primjeru 2. U obzir smo uzeli pet meta sa početnim pozicijama i brzinama prikazanim u Tabeli 8.5. Koristili smo sljedeću proceduru za fokusiranje: za svaki range računali smo FT po "sporom vremenu" i poredili ga sa globalnim pragom dobijenim pomoću Otsu algoritma. Ukoliko je apsolutna vrijednost FT-a veća od praga, u tom range-u postoji jedna ili više meta, pa smo primjenjivali CPF za estimaciju parametara toga signala.

Pokazalo se da broj detektovanih regiona u vremensko-frekvencijskoj ravni odgovara broju meta, pa je ista tehnika za određivanje regiona korišćena i u frekvencijskom domenu.



Slika 8.7: Radarski signal koji se sastoji od tri PPS komponente trećega reda: (a) STFT; (b) Detektovani regioni; (c) CPF prve komponente; (d) CPF druge komponente; (e) CPF treće komponente; (f) Estimirane (debela linija) i stvarne (tanka linija) vrijednosti chirp-rate-a za svaku komponentu.



Slika 8.8: Radarska slika prije (a) i poslije (b) fokusiranja.

R. br. mete	1	2	3	4	5
$x_0[\text{m}]$	0	30	0	-45	45
$y_0[\text{m}]$	90	90	0	-90	-90
$v_x[\text{m} / \text{s}]$	0	12	15	5	20
$a_x[\text{m} / \text{s}]$	0	1	0	0	0

Tabela 8.5: Parametri meta.

U tu svrhu, FT računat za određeni range korišćen je za određivanje praga kod Otsu algoritma. Dalje smo vršili razdvajanje detektovanih komponenti i računali njihove inverzne FT-e. Potom smo vršili dechirpovanje detektovanih komponenti pomoću srednje vrijednosti odgovarajućih estimiranih koeficijenata. Rezultujuće signale smo sumirali i računali FT dobijene sume. Tako dobijena slika prikazana je na Slici 8.8. Možemo primjetiti jako izoštravanje pokretnih meta bez defokusiranja stacionarne, koja je već dobro fokusirana.

Zaključak

Primjena polinomijalno-faznog modela signala u radarima, sonarima, biomedicini i dr., doprinijela je rapidnom razvoju tehnika za estimaciju PPS-a. Razvoj estimatora je pratio razvoj računarske tehnike. Kako su prvi estimatori nastajali u vrijeme skromnijih računarskih kapaciteta, njihova kompleksnost je bila relativno mala, ali im je tačnost bila dosta limitirana. Sa pojavom "moćnijih" računarskih sistema, nastaju i kompleksniji, ali, u isto vrijeme i tačniji estimatori. U periodu dugom nešto više od pet decenija nastale su čitave klase estimatora PPS-a.

Danas, izbor estimatora predstavlja kompromis između tačnosti i računske složenosti. S jedne strane imamo estimatore koji su relativno jednostavni za implementaciju u aplikacijama koje zahtijevaju obradu podataka u realnom vremenu, ali, u pogledu tačnosti, ne mogu zadovoljiti sve strožije zahtjeve za preciznošću. S druge strane, estimatori velike tačnosti nisu pogodni, jer zahtijevaju veliku procesorsku moć, koja, nekada, prevazilazi savremena tehnička rješenja. Računska složenost je obično uslovljena i redom polinoma preko koga je predstavljena faza signala. Što je red polinoma veći, veća je i njegova složenost. Cilj ove teze je unapređenje postojećih estimatora PPS-a. Fokus rada je išao u dva pravca: povećanju tačnosti estimatora niske računske složenosti i smanjenju kompleksnosti estimatora velike tačnosti.

Manja računaska kompleksnost u estimaciji PPS-a postiže se smanjenjem reda signala, koje se može obaviti diferenciranjem faze signala. Međutim, diferenciranje faze je dovelo do nekih neželjenih efekata kao što su povećanje praga SNR-a, pojava kros-članova i povećanje broja šumnih članova. Pored toga, tehnike bazirane na PD-u imaju problem sa propagacijom greške od parametara višega reda ka onima nižega reda. Kao rezultat, za PPS višega reda (reda većeg od 3), ove tehnike ne mogu dati zadovoljavajuće rezultate. Stoga, naš cilj u ovom radu je smanjenje uticaja pomenutih efekata. Prvi pristup u rješavanju ovoga problema oslanjao se na smanjenje broja auto-korelacija, jer što je ovaj

broj manji, manja je i greška u estimaciji. U Poglavlju 4, definisali smo HCPF-HAF, koji, za razliku od standardnog HAF-a, koristi jedno PD manje i ima modifikovan PD u poslednjem koraku. Kompleksnom statističkom analizom, potvrđenom rezultatima numeričkih primjera, pokazali smo da HCPF-HAF nadmašuje HAF i u MSE-u (oko 3 dB niža MSE) i pragu SNR-a (8–10 dB niži prag). Kako istovremeno određuje dva parametra, HCPF-HAF ima i značajno manji uticaj propagacije greške. Ideju HCPF-HAF-a, koji je definisan za monokomponentne PPS-e, proširili smo i na multikomponentne PPS-e i 2D PPS-e. Naime, u Sekciji 4.2 smo definisali PHCPF-HAF koji nadmašuje PHAF i u estimaciji monokomponentnih PPS-a i multikomponentnih PPS-a. Ovdje treba istaći da je PHCPF-HAF, za razliku od PHAF-a, u stanju izvršiti estimaciju parametara multikomponentnog PPS-a četvrtoga reda sa tačnošću koja je vrlo blizu CRLB-u. 2D verzija HCPF-HAF-a, uvedena u Poglavlju 6, predložena je za estimaciju parametara 2D PPS-a. Analiza njenih performansi pokazala je niži prag SNR-a za oko 8 dB u odnosu na FFM.

Drugi pristup u poboljšanju tačnosti ogledao se u obezbeđivanju što veće dužine resultantnog signala nakon PD-a i estimacije parametara faze sa parnim i neparnim indeksom nezavisno jedan od drugog. HO-CPF i HO-WD estimiraju parametre faze računanjem estimatorske funkcije u dvije tačke, $n = 0$ i $n = n_1$. U radu smo pokazali da parametri koji se računaju samo na osnovu HO-CPF/HO-WD-a u $n = 0$, su asimptotski efikasni, tj. dostižu CRLB-e, dok, oni koji zavise od vrijednosti HO-CPF/HO-WD-a računatog u obje tačke, u nekim situacijama imaju značajne vrijednosti MSE-a. U cilju prevazilaženja ovog problema, definisali smo estimacionu proceduru, koja je, na osnovu kombinacije HO-CPF-a i HO-WD-a računatih u $n = 0$, u stanju estimirati sve parametre PPS-a sa tačnošću CRLB-a. Procedura dostiže teorijske limite u estimaciji na osnovu dvije činjenice: sa većom dužinom signala nakon PD-a uticaj šuma se značajno smanjuje i, ukoliko je estimacija parnih parametara nezavisna od neparnih, njihov MSE će biti minimalan. Ova estimaciona procedura ima prag SNR-a koji je nezavisan od reda signala i iznosi oko 0 dB. I ovdje smo sva naša tvrđenja potvrdili kako statističkom analizom, tako i numeričkim primjerima.

Upotreba estimatora visoke tačnosti, ML, HO-CPF i HO-WD, je, zbog potrebe za pretragom po višedimenzionom prostoru, limitirana na PPS nižeg reda (ML do PPS-a trećega reda, dok HO-CPF/HO-WD do PPS-a šestoga reda). Jedan od ciljeva teze je smanjenje kompleksnosti ML/HO-CPF/HO-WD-a i time pomjeranje njihovih

limita ka PPS-ima većega reda. Smanjenje kompleksnosti ovih tehnika moguće je optimizacijom pretrage. Međutim, zbog ogromnog broja lokalnih maksimuma, ovo ne predstavlja lak zadatak. U ovom radu, mi smo se odlučili obaviti optimizaciju pretrage pomoću GA. Kao stohastička metoda, GA se može izboriti sa lokalnim optimumima. Implementiranjem GA u pretragu za pozicijom maksimuma ML/HO-CPF/HO-WD-a i definisanjem mehanizma za detekciju divergencije istog, omogućili smo praktičnu primjenu ML-a i HO-CPF/HO-WD-a do PPS-a petog, odnosno desetog reda. Pri tome treba napomenuti da sa upotrebom GA ne gubimo na tačnosti, tj. ML/HO-CPF/HO-WD je i dalje asimptotski efikasna tehnika.

Estimacija parametara PPS-a se obavlja u dva koraka. U prvom se izvrši gruba pretraga po prostoru parametara, da bi se dobila početna estimacija. Potom se tačnost estimiranih parametara poboljšava finom pretragom. Drugi korak, u zavisnosti od zahtjeva, nekada zna da bude računski kompleksan. Stoga, u ovom radu smo se pozabavili i problemom optimizacije fine pretrage. Naime, predložili smo dihotomni algoritam za finu pretragu za pozicijom maksimuma HCPF-HAF-a i PHCPF-HAF-a, koji je u stanju da sa samo par računanja estimatorske funkcije dostigne teorijske limite estimatora dobijene asimptotskom analizom. Taj algoritam je dalje generalizovan i za 2D pretrage, gdje je, u pogledu uštede u računskim operacijama, čak i više došao do izražaja.

U želji da MSE estimatora, nastalih kao rezultat naših istraživanja, spustimo na CRLB, čak i za veće redove PPS-a, u njihovu estimacionu proceduru uključili smo O'Shea algoritam, koji je do sada bio definisan samo za monokomponentne PPS-e. Pokazali smo da primjenom O'Shea algoritma, nakon estimacije HCPF-HAF-om i PHCPF-HAF-om, možemo ostvariti pomenuti cilj. Takođe, u ovom radu, izvršili smo generalizaciju O'Shea algoritma na multikomponentne PPS-e i 2D PPS-e. Numerička analiza performansi ovih generalizacija opravdala je očekivanja u smislu potvrđivanja asimptotske efikasnosti estimacije.

Pokazali smo i kako se pomoću neuniformnog odabiranja signala računanje CPF-a može izraziti preko FT-a, čime se kompleksnost ove tehnike značajno smanjuje. Pri tome, numerička analiza je pokazala da ova modifikacija ima čak i manji prag u odnosu na klasični CPF.

Na kraju, razmatrali smo i estimaciju radarskih signala i signala koji stižu na antensku rešetku. Za potrebe estimacije radarskih signala, definisali smo modifikaciju CPF-a na bazi STFT-a koja je u stanju da potisne kros-članove nastale usled postojanja više

komponenti signala. Predložili smo takođe i efikasne algoritme za združenu estimaciju dolaznog ugla i parametara PPS-a koji stiže na antensku rešetku. Zbog relativno male kompleksnosti, predloženi metod je veoma pogodan za aplikacije koje rade u realnom vremenu.

Literatura

- [1] B. Boashash, *Time frequency signal analysis and processing : A comprehensive reference*. Boston: Elsevier, 2003.
- [2] B. Porat, *Digital processing of random signals: Theory and methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [3] S. Peleg and B. Friedlander, “The discrete polynomial phase transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 8, pp. 1901–1914, August 1995.
- [4] D. C. Reid, A. M. Zoubir, and B. Boashash, “Aircraft flight parameter estimation based on passive acoustic techniques using the polynomial Wigner–Ville distribution,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 102, no. 1, pp. 207–223, July 1997.
- [5] M. Stone, “The generalized Weierstrass approximation theorem,” *Mathematics magazine*, vol. 21, no. 5, pp. 237–254, 1948.
- [6] S. Peleg and B. Porat, “Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 27, no. 4, pp. 607–616, July 1991.
- [7] S. Barbarossa and V. Petrone, “Analysis of polynomial-phase signals by the integrated generalized ambiguity function,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 316–327, February 1997.
- [8] S. Barbarossa, A. Scaglione, and G. Giannakis, “Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 691–708, March 1998.

- [9] B. Porat and B. Friedlander, "Asymptotic statistical analysis of the high-order ambiguity function for parameter estimation of polynomial-phase signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 3, pp. 995–1001, May 1996.
- [10] P. O'Shea, "A new technique for instantaneous frequency rate estimation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 9, no. 8, pp. 251–252, August 2002.
- [11] —, "A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 385–393, February 2004.
- [12] P. Wang, I. Djurović, and J. Yang, "Generalized high-order phase function for parameter estimation of polynomial phase signal," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 3023–3028, July 2008.
- [13] —, "Modifications of the cubic phase function," *Chinese Journal of Electronics*, vol. 17, no. 1, pp. 189–194, January 2008.
- [14] P. Wang, H. Li, I. Djurović, and B. Himed, "Instantaneous frequency rate estimation for high-order polynomial-phase signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, no. 9, pp. 782–785, September 2009.
- [15] V. Katkovnik, "Nonparametric estimation of instantaneous frequency," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 1, pp. 183–189, January 1997.
- [16] A. Papoulis and S. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, ser. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill, 2002.
- [17] S. Peleg and B. Porat, "The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 749–752, March 1991.
- [18] B. Ristić and B. Boashash, "Comments on "The Cramer-Rao lower bounds for signals with constant amplitude and polynomial phase," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1708–1709, June 1998.
- [19] S. Peleg and B. Friedlander, "Multicomponent signal analysis using the polynomial-phase transform," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 378–387, January 1996.

- [20] D. S. Pham and A. M. Zoubir, "Analysis of multicomponent polynomial phase signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 1, pp. 56–65, January 2007.
- [21] J. M. Francos and B. Friedlander, "Two-dimensional polynomial phase signals: Parameter estimation and bounds," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 9, no. 2, pp. 173–205, April 1998.
- [22] D. Rife and R. Boorstyn, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 591 – 598, September 1974.
- [23] J. Sharma, C. Gierull, and M. Collins, "Compensating the effects of target acceleration in dual-channel SAR-GMTI," *IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation*, vol. 153, no. 1, pp. 53–62, February 2006.
- [24] C. Ioana and A. Quinquis, "Time-frequency analysis using warped-based high-order phase modeling," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2005, pp. 2856–2873, January 2005.
- [25] M. Simeunović and I. Djurović, "CPF-HAF estimator of polynomial-phase signals," *Electronics Letters*, vol. 47, no. 17, pp. 965–966, August 2011.
- [26] I. Djurović, M. Simeunović, S. Djukanović, and P. Wang, "A hybrid CPF-HAF estimation of polynomial-phase signals: Detailed statistical analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 10, pp. 5010–5023, October 2012.
- [27] I. Djurović and M. Simeunović, "Combining the HO-CPF and HO-WD for PPS estimation," *IEEE Signal Processing Letters*, submitted.
- [28] P. O'Shea, "Improving polynomial phase parameter estimation by using nonuniformly spaced signal sample methods," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 7, pp. 3405–3414, July 2012.
- [29] M. H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley and Sons: NY, USA, 1996.
- [30] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall: NY, USA, 1996.

- [31] I. Djurović, M. Simeunović, and B. Lutovac, "Are genetic algorithms useful for the parameter estimation of fm signals?" *Digital Signal Processing*, vol. 22, no. 6, pp. 1137–1144, December 2012.
- [32] A. B. Gershman, M. Pesavento, and M. G. Amin, "Estimating parameters of multiple wideband polynomial-phase sources in sensor arrays," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2924–2934, December 2001.
- [33] K. Tang, K. Man, S. Kwong, and Q. He, "Genetic algorithms and their applications," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 6, pp. 22–37, November 1996.
- [34] J. P. Rennard. (2012, February) Introduction to genetic algorithms. [Online]. Available: <http://www.rennard.org/alife/english/gavintrgb.html>
- [35] S. C. Sekhar and T. V. Sreenivas, "Signal-to-noise ratio estimation using higher-order moments," *Signal Processing*, vol. 86, no. 4, pp. 716–732, 2006.
- [36] B. Friedlander and J. Francos, "An estimation algorithm for 2-D polynomial phase signals," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, no. 6, pp. 1084–1087, June 1996.
- [37] ———, "Model based phase unwrapping of 2-D signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 12, pp. 2999–3007, December 1996.
- [38] J. Francos and B. Friedlander, "Optimal parameter selection in the phase differencing algorithm for 2-D phase estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 1, pp. 273–279, January 1999.
- [39] I. Djurović, P. Wang, and C. Ioana, "Parameter estimation of 2-D cubic phase signal using cubic phase function with genetic algorithm," *Signal Processing*, vol. 90, no. 9, pp. 2698–2707, September 2010.
- [40] I. Djurović, P. Wang, C. Ioana, and M. Simeunović, "Cubic phase function for two-dimensional polynomial-phase signals," in *in Proceedings of 2010 European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2010)*, August 2010, pp. 23–27.
- [41] Y. Zakharov and T. Tozer, "Frequency estimator with dichotomous search of periodogram peak," *Electronics Letters*, vol. 35, no. 19, pp. 1608–1609, September 1999.

- [42] E. Aboutanios, “A modified dichotomous search frequency estimator,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 2, pp. 186–188, February 2004.
- [43] E. Aboutanios and B. Mulgrew, “Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1237–1242, April 2005.
- [44] P. O’Shea, “On refining polynomial phase signal parameter estimates,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 46, no. 3, pp. 978–987, July 2010.
- [45] S. Djukanović and V. Popović, “An efficient peak frequency estimator for product high-order ambiguity function,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, May 2011, pp. 3804–3807.
- [46] S. Djukanović, M. Simeunović, and I. Djurović, “Refinement in the estimation of multicomponent polynomial-phase signals,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012 IEEE International Conference on*, March 2012, pp. 3957–960.
- [47] R. McKilliam, I. Clarkson, B. Quinn, and B. Moran, “Polynomial-phase estimation, phase unwrapping and the nearest lattice point problem,” in *Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on*, November 2009.
- [48] M. Simeunović, S. Djukanović, and I. Djurović, “A fine search method for the cubic-phase function-based estimator,” in *EUSIPCO 2012, Bucharest, Romania*, August 2012, pp. 924–928.
- [49] C. Ioana and A. Quinquis, “On the unitary equivalence application in the polynomial phase signal processing,” in *Proc. Seventh Int Signal Processing and Its Applications Symp*, vol. 1, 2003, pp. 153–156.
- [50] A. Jarrot, C. Ioana, C. Gervaise, and A. Quinquis, “A time-frequency characterization framework for signals issued from underwater dispersive environments,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2007*, vol. 3, 2007.

- [51] N. F. Josso, J. J. Zhang, A. Papandreou-Suppappola, C. Ioana, J. I. Mars, C. Gervaise, and Y. Stephan, "Wideband discrete transformation of acoustic signals in underwater environments," in *Proc. Conf Signals, Systems and Computers Record of the Forty-Third Asilomar Conf*, 2009, pp. 118–122.
- [52] A. Ouldali, S. Sadoudi, and Z. Messaoudi, "Estimating wideband polynomial phase signals in sensor arrays using the extended Kalman filter," *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 2, pp. 34–41, 2008.
- [53] M. Adjrad and A. Belouchrani, "Estimation of multicomponent polynomial-phase signals impinging on a multisensor array using state-space modeling," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 1, pp. 32–45, 2007.
- [54] I. Djurović, S. Djukanović, M. Simeunović, P. Raković, and B. Barkat, "An efficient joint estimation of wideband polynomial-phase signal parameters and direction-of-arrival in sensor array," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2012, pp. 1–10, 2012.
- [55] M. Ikram and G. Tong Zhou, "Order determination and parameter estimation of multicomponent polynomial phase signals," in *Statistical Signal and Array Processing, 1998. Proceedings., Ninth IEEE SP Workshop on*, September 1998, pp. 352–355.
- [56] S. Djukanović, M. Simeunović, and I. Djurović, "Efficient parameter estimation of polynomial-phase signals impinging on a sensor array," in *Embedded Computing (MECO), 2012 Mediterranean Conference on*, June 2012, pp. 116–119.
- [57] I. Djurović, C. Ioana, T. Thayaparan, L. Stanković, P. Wang, V. Popović, and M. Simeunović, "Cubic-phase function evaluation for multicomponent signals with application to SAR imaging," *IET Signal Processing*, vol. 4, no. 4, pp. 371–381, August 2010.
- [58] V. C. Chen and H. Ling, *Time-frequency transforms for radar imaging and signal analysis*. Boston, USA: Artech House, 2002.
- [59] R. Raney, "Synthetic aperture imaging radar and moving targets," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-7, no. 3, pp. 499–505, May 1971.

- [60] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital image processing*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002.

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Број 02/1-492/1
Подгорица, 11. 04. 2013. год.

jav. 6

IZJAVA O AUTORSTVU

Potpisani/a **Marko Simeunović**

Broj upisa

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА			
Примљено <u>12.04.2013</u>			
Орг. јед.	Број	Прилог	Заставка
09-	258		

IZJAVLJUJEM

da je doktorska disertacija pod naslovom:

Razvoj estimatora polinomijalno-faznih signala sa naprednim tehnikama za pretraživanje parametara

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija ni u cjelini, ni u djelovima nije bila predložena za sticanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova i
- da nijesam kršio/la autorska prava i koristio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

Marko Simeunović

u Podgorici

11/04/2013

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Број 02/1-192/2
Подгорица, 11. 04. 2013 год.

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА			
Примљено <u>12. 04. 2013</u>			
Орг. јед.	Број	Прилог	Вређаност
<u>041-</u>	<u>258</u>		

**IZJAVA O ISTOVJETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE
VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime i prezime autora **Marko Simeunović**

Broj upisa

Studijski program **Računari, digitalna obrada signala**

Naslov disertacije

Razvoj estimatora polinomijalno-faznih signala sa naprednim tehnikama za pretraživanje parametara

Mentor **prof. dr Igor Đurović**

Potpisani/a **Marko Simeunović**

Izjavljujem da je štampana verzija doktorske disertacije istovjetna elektronskoj verziji, koju sam predao/la radi pohranjivanja u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore**.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje ličnih podataka u vezi sa sticanjem akademskog zvanja doktora nauka (ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naslov disertacije i datum odbrane) na mrežnim stranicama i u publikacijama Univerziteta Crne Gore.

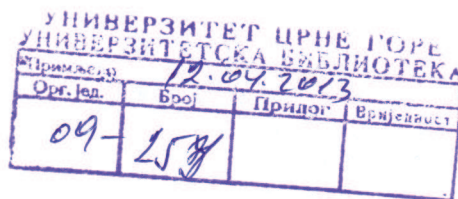
Potpis doktoranda



u Podgorici

11/04/2013

Број 02/1-492/3
Подгорица, 11.04. 2013. год.



IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Razvoj estimatora polinomijalno-faznih signala sa naprednim tehnikama za pretraživanje parametara

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la¹.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | Autorstvo |
| <input type="checkbox"/> | Autorstvo – bez prerada |
| <input type="checkbox"/> | Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima |
| <input type="checkbox"/> | Autorstvo – nekomercijalno |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada |
| <input type="checkbox"/> | Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima |

Potpis doktoranda

u Podgorici

11/04/2013

¹ Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)