UNIVERZITET „VELJKO VLAHOVIĆ" U TITOGRADU

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Mr Zdravko Uskoković

SINTEZA DINAMIČKIH REGULATORA ZA UPRAVLJANJE SLOŽENIM SISTEMIMA SA DECENTRALIZOVANOM UPRAVLJAČKOM I INFORMACIONOM STRUKTUROM

- Doktorska disertacija -

TITOGRAD, 1983. god.

Ova disertacija je nastala kao rezultat dvogodišnje saradnje sa mentorom, dr Jurajem Medanićem. Za razumijevanje, podršku i mnogobrojne sugestije tokom višečasovnih diskusija i na ovaj način mu izražavam veliku zahvalnost.

Zahvaljujem se kolegi Nikoli Gluhajiću na nesebičnom angažovanju i vremenu koje mi je posvetio prilikom provjere dobijenih rezultata na računaru, kao i na korisnim diskusijama.

Kolegama sa Elektrotehničkog fakulteta u Titogradu sam zahvalan na razumijevanju tokom izrade disertacije, a Špiru Nileviću, arh. i Jagodi Terzić na pomoći pri tehničkoj obradi.

Posebnu zahvalnost dugujem Petru Marinkoviću na optimalnim uslovima za rad koje mi je pružio za vrijeme boravka u Beogradu.

Odbranjen.

REZIME

U radu je prezentirana metodologija sinteze regulatora u vremenskom domenu za složene dinamičke sisteme, zasnovana na koncepciji projekcionog upravljanja. Suština metode sastoji se u tome da se optimalno rješenje zasnovano na linearnom kvadratnom regulatoru stanja uzima kao eksplicitan opis referentne dinamičke performanse sistema a odabrano upravljanje, koje se realizuje uzimajući u obzir ograničenja nametnuta informacionom strukturom, ima za cilj da u rezultujućem regulisanom sistemu zadrži dominantne dinamičke karakteristike referentnog rješenja.

Rješenje se najprije traži u klasi statičkih regulatora izlaza a u slučaju nepovoljnih osobina ovakvog rješenja pristup omogućava prirodan prelazak na sintezu dinamičkih regulatora niskog reda, po jedinstvenoj metodologiji koja prepoznaje činjenicu da linearni regulator stanja, statički regulator izlaza i dinamički regulator u suštini predstavljaju rješenje za isti problem upravljanja, pri čemu ograničenja nametnuta informacionom strukturom diktiraju oblik upravljanja.

Metod omogućava prirodnu generalizaciju na sintezu upravljanja u složenim sistemima sa decentralizovanom informacionom strukturom, kao i na sintezu klasičnih regulacionih struktura (PI i PID regulatori) i generalisanih PID regulatora, za sisteme centralizovane i decentralizovane strukture sa djelovanjem spoljnih poremećaja.

Pored sveobuhvatnosti koja se ogleda u primjeni metode na sintezu raznovrsnih regulacionih struktura za centralizovane i decentralizovane sisteme, sa i bez djelovanja spoljnih poremećaja, metod projekcionog upravljanja odlikuje se i jednostavnim numeričkim aspektima koji su pokazani kroz ilustrativne primjere.

ABSTRACT

This thesis presents a unified design methodology for computer-aided design of large scale linear control systems, based on the concept of projective controls. The main feature of the proposed procedure is that it uses the linear state regulator solution as an explicit description of desired system performance while the selecte controls, implemented according to the particular information structure, retain the dominant dynamic characteristics of the reference solution in the resulting closed loop system.

If the solution based on the static output regulators is n satisfactory, projective controls allow a natural generalization to low-order dynamic regulator design, using the unified design philosophy which recognizes the fact that state regulator, static output regulator and dynamic regulator basically represent the solution for the same problem, particular implementation being dependent on the existing information structure.

This methodology naturally extends to the design of large scale systems with decentralized information structure, as well as t the design of various control structures incorporating integral action for compensation of external disturbances, in centralized and decentralized setting.

Numerical aspects of the proposed procedure are appealingl simple and are illustrated by various numerical examples.

S A D R Ž A J

UVOD

U poslednje dvije decenije došlo je do intenzivnog razvoja matematičke teorije multivarijabilnih sistema što je, zajedno sa naglim prodorom sve bržih i moćnijih računara, uslovilo razvijanje velikog broja metoda za modeliranje, analizu kvalitativnih osobina sistema i sintezu upravljanja. Iako se još uvijek može govoriti o dva glavna pravca u istraživanju, od kojih je jedan baziran na savremenom opisu sistema u prostoru stanja, a drugi na generalizaciji klasičnih metoda u frekventnom domenu koje su prvobitno razvijene za sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom, sve se više radi na objedinjavanju ova dva prilaza. Cilj je da se teorijski moćnije metode zasnovane na savremenom prilazu karakterišu sa gledišta klasičnih prilaza značajnih u praktičnoj realizaciji sistema upravljanja kao što su osjetljivost sistema, robustnost u odnosu na strukturne promjene u sistemu, spoljne poremećaje, itd. Detaljan spisak literature koja obradjuje ovu problematiku dat je u preglednom radu /1/.

Zajednička osobina svih ovih metoda, kako klasičnih tako i savremenih, sadržana je u polaznoj pretpostavci da je informaciona i upravljačka struktura *centralizovana*. Naime, sve dostupne informacije o sistemu (apriorne, koje karakterišu matematički model sistema i kriterijum upravljanja i aposteriorne, koje karakterišu informacije o stanju sistema dobijene u realnom vremenu preko skupa odgovarajućih senzora) sakupljaju se u jedan upravljački centar u kome se vrši i sva potrebna obrada ovih informacija u cilju generisanja upravljanja.

Predložene su mnogobrojne metode sinteze regulatora u vremenskom domenu /2-25/. Kritička analiza rezultata pokazuje, medjutim, da se mnoštvo metoda svodi na inovacije u definiciji problema, posebno kao problema optimizacije, i u izvodjenju potrebnih uslova za optimum. Medjutim, niti su predloženi postupci dovedeni u neposrednu vezu sa razvijenom teorijom linearnog regulatora stanja, niti se isti metod može primijeniti u sintezi statičkih i dinamičkih regulatora. Prilazi sintezi regulatora stanja, statičkih regulatora izlaza i dinamičkih regulatora odlikuju se raznolokošću i odvojenim rješenjima, iako sva tri regulatora predstavljaju rješenja za isti problem. Detaljna analiza ovog aspekta problema može se naći u radovima /26,27/.

Zadnja decenija je, medjutim, u centar pažnje teoretičara dovela *složene dinamičke sisteme*. Iako u literaturi ne postoji rigorozna definicija ovog pojma, generalno se prihvata da ove sisteme karakterišu sledeće osobine:

- prostorna raspoređjenost u geografskom smislu,
- kompleksnost matematičkog modela,
- prisustvo više fenomena karakterisanih vremenskim konstantama u širokom opsegu (brza i spora dinamika),
- prirodna dekompozicija čitavog sistema na više medjusobno dinamički povezanih podsistema,
- prisustvo više kriterijuma od kojih su neki na nivou podsistema (lokalni) a drugi na nivou povezanog sistema (globalni),
- povezanost brze i spore dinamike sa lokalnim i globalnim dinamičkim procesima u sistemu,
- upravljanje posredstvom više nezavisnih ili djelimično povezanih lokalnih regulatora kojima se po mogućnosti zadovoljavaju lokalni i globalni kriterijumi,
- decentralizovana informaciona struktura zasnovana na dostupnosti samo ograničenog broja lokalnih informacija u svakom od lokalnih regulatora.

Iz ovog kratkog pregleda osobina složenih sistema jasno je da centralizovana struktura sistema automatskog upravljanja i pored značajnih teorijskih preimućstava ne daje praktički prihvatljiva rješenja za složene dinamičke sisteme. S obzirom na sve značajniju prisutnost u praksi (tipični primjeri su elektroenergetski, vodoprivredni i ekonomski sistemi, saobraćajne i komunikacione mreže, itd.) razvijeni su novi teorijski i metodološki pristupi koji uzimaju u obzir jednu ili više navedenih karakteristika.

U tom smislu razradjeni su pristupi za uprošćavanje modela i formiranje odgovarajućeg upravljanja na bazi redukovanog modela, kao na primjer metoda agregacije /28/, metode singularne i nesingularne perturbacije /29,30/, metode za analizu kvalitativnih osobina složenih sistema kao što su stabilnost /31,32/, kontrolabilnost i observabilnost /33,34/, kao i metode koje se bave formiranjem strategije upravljanja u složenim sistemima sa decentralizovanom strukturom bilo da se upravljanje vrši na jednom nivou /35-58/, ili na više nivoa (hijerarhijsko upravljanje) /59-70/.

Problemu sinteze skupa lokalnih statičkih odnosno dinamičkih regulatora za složene dinamičke sisteme sa decentralizovanom strukturom posvećena je velika pažnja, što je dovelo do značajnog broja predloženih postupaka. U radovima /35-37/ razmatrane su mogućnosti stabilizacije i podešavanja polova regulisanog sistema. Uveden je pojam *fiksnih modova** kao prirodna generalizacija pojma nekontrolabilnih i neobservabilnih polova u sistemima sa centralizovanom strukturom. Pokazano je da je potreban i dovoljan uslov za egzistenciju skupa dinamičkih regulatora kojima se mogu po volji podesiti polovi regulisanog sistema da sistem ne posjeduje fiksne modove. Radovi /37,38/ se bave potpunijom karakterizacijom uslova za stabilizaciju i podešavanje polova. Prilaz se sastoji u odredjivanju uslova pod kojima se sistem može učiniti kontrolabilnim i observabilnim iz lokalnih ulaza i izlaza jednog upravljača, primjenom statičke povratne sprege iz ostalih upravljača. Navedene ideje su dalje razradjene u radovima /47-50/ u kojima je dobijen potpuniji uvid u strukturu složenih sistema i data karakterizacija fiksnih modova preko poznatih algebarskih pojmova i koncepata teorije sistema. Problem eliminacije fiksnih modova pomoću djelimične razmjene informacija izmedju pojedinih lokalnih regulatora razmatran je u /51/, dok je isti problem rješavan u /52,53/ primjenom vremenski promjenljive povratne sprege. Prilaz iz /36/ generalisan je u radovima /39,42/ na slučaj kada na sistem djeluju spoljni poremećaji, što je rezultiralo u formulaciji problema sinteze *decentralizovanih servomehanizama*. Izvedeni su uslovi za rješenje ovog problema i definisana struktura upravljanja. U ovom kontekstu razmatran je i problem *sekvencijalne stabilnosti* /41/ kod kojeg se lokalni regulatori podešavaju jedan za drugim, uz uslov da rezultujući regulisani sistem ostaje stabilan. Optimizacija složenih sistema u odnosu na kvadratni kriterijum razmatrana je u radovima /41, 54/. Dati su potrebni uslovi za optimalnost rješenja koji se svode na sistem nelinearnih matričnih jednačina za čije rješavanje su korišćeni različiti iterativni algoritmi. Alternativni prilazi za

---

*Ovaj naziv se ustalio u literaturi iako bi, s obzirom na značenje ovog pojma, više odgovarao termin "fiksni polovi" ili "fiksne sopstvene vrijednosti".

sintezu dinamičkih regulatora u složenim sistemima prezentirani su u radovima /45,46/.

Ovi rezultati su omogućili značajan uvid u kvalitativne osobine decentralizovanih sistema i mogućnosti rješavanja problema upravljanja ali, i pored toga, još uvijek ne postoji konstruktivna procedura za sintezu decentralizovanog upravljanja koja bi na racionalan način iskoristila slobodu sadržanu u skupu statičkih ili dinamičkih regulatora za oblikovanje dinamičkih karakteristika sistema sa povratnom spregom. Naime, nedostaci procedura podešavanja polova su, s jedne strane, izraženi činjenicom da su predloženi dinamički regulatori ili suviše visokog reda ili koncentrisani u jednom lokalnom centru upravljanja a, s druge strane ne vodi se računa o optimizaciji rješenja. Kod metoda baziranih na optimizaciji teorijska razmatranja završavaju se ili izvodjenjem potrebnih uslova za optimum ili minimizacijom pogodno odabrane norme odstupanja trajektorije sistema od optimalne trajektorije. Sa ovim se, medjutim, ne dobija uvid u egzistenciju rješenja i osobine rezultujućeg sistema sa povratnom spregom. Takodje, predložena rješenja ne pružaju jedinstven pristup za sintezu statičkih i dinamičkih regulatora.

Dodatne reference i detaljnija kritična analiza dosad postignutih rezultata mogu se naći u preglednim radovima /80-82/, a od literature na našem jeziku navodimo monografiju /83/.

Dosadašnja istraživanja ukazuju na veliki značaj teorije optimalnog upravljanja, a posebno metoda linearnog kvadratnog regulatora (za determinističke sisteme) i linearnog kvadratnog Gausovog regulatora (za stohastičke sisteme), koje se mogu primijeniti u upravljanju fizičkim sistemima kod kojih se željene performanse mogu preslikati u pogodno odabrani kvadratni kriterijum. Ove metode obezbjedjuju sistematski pristup sintezi multivarijabilnih regulatora jer objedinjuju veliki broj zahtjeva i ograničenja prisutnih u praktičnim problemima /71-73/. Atraktivnost ovih metoda za praktičnu primjenu je još više povećana najnovijim istraživanjima koja pokazuju dobre performanse rješenja baziranih na ovom prilazu sa aspekta robustnosti, tolerancije prisustva nelinearnosti, poremećaja itd. /74-76/, kao i činjenicom da sa čisto računskog aspekta ne postoje značajnija ograničenja, s obzirom da je za rješenje matrične Rikatijeve jednačine razvijena veoma efikasna programska podrška /77/.

Na žalost, praktična realizacija ovih rješenja još uvijek ni izdaleka nije u skladu sa velikim mogućnostima koje ova metodologija pruža. Ovo proističe iz činjenice da je za implementaciju upravljanja potrebno imati na raspolaganju potpuni vektor stanja sistema, bilo direktnim mjerenjem, bilo upotrebom Luenbergerovog observera /78/ ili Kalmanovog estimatora /79/. Ovakav zahtjev znatno umanjuje praktičnu vrijednost rješenja za složene sisteme bilo da se radi o centralizovanoj ili decentralizovanoj strukturi.

Naime, kod složenih sistema sa centralizovanom strukturom pretpostavka o mjerljivosti kompletnog stanja je od malog praktičnog interesa s obzirom da se obično direktno mjeri samo relativno mali broj izlaznih veličina. Upotreba observera, s druge strane, nameće potrebu za veoma visokim redom dinamičkog regulatora što vodi ka složenom upravljačkom sistemu. Čak i u rijetkom slučaju kada je kompletno stanje dostupno za mjerenje, u složenim sistemima je neophodna suviše obimna instrumentacija (senzori, aktuatori) da bi rješenje bilo opravdano sa ekonomskog aspekta i aspekta pouzdanosti sistema, pogotovo što je iz prakse poznato da se prihvatljiva rješenja realizuju i na bazi malog broja mjerljivih izlaznih varijabli.

Kada se radi o složenim sistemima koji se iz raznih praktičnih razloga upravljaju sa više lokalnih regulatora kojima su dostupni samo djelovi ukupnih mjerenja, problem implementacije linearnog kvadratnog regulatora se dalje usložnjava. Naime, pošto je u prirodi rješenja baziranog na linearnom kvadratnom regulatoru stanja centralizovana struktura, decentralizacijom informacione i upravljačke strukture ukazuje se potreba za velikom mrežom komunikacionih kanala izmedju aktuatora i senzora, čime se nameću nova praktična ograničenja na implementaciju ovakvog zakona upravljanja.

S obzirom na gore izloženo, prirodno je tražiti praktična rješenja zasnovana na ograničenoj informacionoj strukturi, sa čime se optimalna vrijednost kriterijuma performanse po pravilu narušava. S druge strane poželjno je imati na raspolaganju optimalno rješenje koje bi se imalo kada bi sva stanja bila mjerljiva, jer ono omogućava da se ovo rješenje koristi kao referenca i u odnosu na njega uporede druga rješenja zasnovana na ograničenoj informacionoj strukturi.

U tom smislu u ovom radu je prikazana metoda za sintezu statičkih i dinamičkih regulatora bazirana na projekcionom upravljanju koja, u determinističkom kontekstu, uzima u obzir oba navedena zahtjeva i kojom se prevazilaze neki nedostaci do sada razvijenih postupaka za sintezu regulatora u sistemima sa centralizovanom i decentralizovanom strukturom. Naime, suština metode sastoji se u tome da se optimalno rješenje zasnovano na linearnom kvadratnom regulatoru stanja uzima kao eksplicitan opis referentne dinamičke performanse sistema a odabrano upravljanje, koje se realizuje uzimajući u obzir ograničenu informacionu strukturu, ima za cilj da u rezultujućem sistemu sa povratnom spregom zadrži dominantne dinamičke karakteristike referentnog rješenja. Kao rezultat se dobija suboptimalno rješenje pri čemu metoda omogućava da se stepen odstupanja od optimalnog referentnog rješenja opiše kvalitativnim i kvantitativnim pokazateljima. Rješenje se prvo traži u klasi statičkih regulatora izlaza, pa ako ono ne zadovoljava metoda omogućava prelazak na sintezu dinamičkih regulatora niskog reda, po jedinstvenoj metodologiji. Metoda je sveobuhvatna i u smislu da se može primijeniti na sisteme sa centralizovanom i decentralizovanom strukturom kao i u prisustvu i bez prisustva spoljnih poremećaja.

Metod projekcionih upravljanja je najrpije razvijen za sisteme sa centralizovanom strukturom /84,85/. Pokazano je da rješenja zasnovana na projekcionom upravljanju posjeduju niz osobina koje ovu metodu čine pogodnom pri sintezi statičkih i dinamičkih regulatora:

- mogućnost implementacije upravljanja na bazi raspoloživih mjerljivih izlaza,
- suboptimalnost rezultujućeg rješenja uz zadržavanje invarijantnog podprostora optimalnog referentnog rješenja, asociranog sa dominantnim dinamičkim karakteristikama,
- fleksibilnost, izražena kroz višestruke mogućnosti izbora zadržanog invarijantnog podprostora,
- mogućnost opisa odstupanja od optimalnog rješenja preko kvalitativnih (raspored komplementarnih polova regulisanog sistema) i kvantitativnih (povećanje vrijednosti kriterijuma) pokazatelja,
- prirodan prelazak na dinamičke regulatore u slučaju nezadovoljavajućeg rješenja zasnovanog na statičkim regulatorima, čime se postiže jedinstven prilaz sintezi statičkih i dinamičkih regulatora uz postepeno usložnjavanje strukture regulatora saobrazno analizi prethodnih, jednostavnijih struktura,

- mogućnost povećanja dimenzije zadržanog invarijantnog potprostora uvodjenjem dinamičkog regulatora, pri čemu se dodatna sloboda sadržana u parametrima regulatora koristi za podešavanje komplementarnih polova regulisanog sistema, preko pogodno definisanog linearnog problema podešavanja polova,
- mogućnost razlaganja postupka sinteze dinamičkog regulatora u tri faze, od kojih se u prvoj oblikuje komplementarni spektar a u ostale dvije nalaze parametri regulatora i parametri povratne sprege,
- prikladnost metodologije interaktivnom projektovanju posredstvom računara, što je neophodno s obzirom na kompleksnost modela i problema upravljanja,
- prikladnost konačnih rješenja, odnosno strukture regulatora, mikroprocesorskoj realizaciji, s obzirom da je dozvoljena proizvoljna (slična) realizacija dinamičkog regulatora,
- jednostavnost numeričkog aspekta.

U radovima /26,86/ metoda projekcionog upravljanja je proširena na sintezu regulatora u nekontrolabilnim sistemima a mogućnosti primjene ove metodologije na rješavanje praktičnih problema u elektroenergetskim sistemima razmatrane su u radovima /87,88/.

U okviru istraživanja koja su opisana u ovom radu, metodologija je najprije primijenjena na problem upravljanja složenim sistemima centralizovane strukture na koje djeluju konstantni ili sporo promjenljivi spoljni poremećaji /89,90/. S obzirom da se za otklanjanje neželjenih efekata spoljnih poremećaja u praksi široko primjenjuju PI i PID regulatori, predložena je metoda zasnovana na projekcionom upravljanju koja u okviru jedinstvenog postupka obuhvata sintezu multivarijabilnih PI, PID i generalisanih PID regulatora(koji u suštini predstavljaju dinamičke regulatore proizvoljne strukture sa integralnim djelovanjem), implementiranih preko raspoloživih izlaza sistema. Pokazano je da se, zadržavajući pogodne strukturne osobine ovakvih regulatora, projekcionim upravljanjem mogu uspješno odrediti parametri povratne sprege koji obezbjedjuju zadovoljavajuću dinamičku performansu rezultujućeg regulisanog sistema. S obzirom da sve navedene osobine projekcionog upravljanja važe i za ovaj slučaj, ovim je izvršena neposredna generalizacija metode na sintezu različitih regulacionih struktura sa integralnim djelovanjem, što za sisteme sa više ulaza i izlaza dosad nije bilo riješeno na zadovoljavajući način.

Koristeći se uvidom dobijenim iz centralizovanog slučaja i rezultatima radova /91,92/, istraživanje je nastavljeno u pravcu generalizacije metode projekcionog upravljanja na sintezu statičkih i dinamičkih regulatora u složenim sistemima sa decentralizovanom informacionom strukturom. Pokazano je /91-93/ da postoji jaka analogija izmedju rješenja zasnovanih na projekcionom upravljanju u centralizovanoj i decentralizovanoj strukturi, u smislu da većina osobina metode navedenih za centralizovani slučaj važi i za decentralizovanu strukturu. Medjutim, primjena projekcionih upravljanja na sintezu decentralizovanih regulatora nameće potrebu za odredjenim modifikacijama u samom postupku sinteze, kojima se uzimaju u obzir specifičnosti koje karakterišu decentralizovanu informacionu strukturu.

Potreba za ovakvim modifikacijama se najjasnije sagledava na problemu sinteze decentralizovanih dinamičkih regulatora. Naime, ispostavlja se da se ovaj problem, analogno centralizovanom slučaju, može riješiti u tri faze /91-93/, ali pri tome zavisnost rezidualnog spektra od slobodnih parametara regulatora postaje izrazito nelinearna i ne može se izraziti preko poznatih procedura za podešavanje polova. Zbog toga su najprije izdvojeni specijalni slučajevi kada se ova zavisnost može uprostiti /93/, a zatim je razradjena sekvencijalna procedura podešavanja rezidualnih polova /94/, u kojoj se, za usvojenu dimenziju dinamičkih regulatora, kompleksni nelinearni problem razlaže na niz rješivih linearnih problema podešavanja polova. Na ovaj način se sukcesivno podešavaju parametri pojedinih dinamičkih regulatora u cilju postepenog poboljšanja rezidualnog spektra. Ukoliko se zadovoljavajuće rješenje ne može postići sa usvojenim dimenzijama regulatora tada se, usled decentralizovane strukture, dimenzije svih dinamičkih regulatora simultano povećavaju i sekvencijalna procedura ponavlja do dobijanja prihvatljivog rješenja. Na ovaj način je izvršena generalizacija metode projekcionog upravljanja na sintezu decentralizovanih dinamičkih regulatora i u tome je jedan od osnovnih doprinosa ovog rada.

Metod projekcionog upravljanja je zatim primijenjen na problem sinteze regulatora u decentralizovanim sistemima sa konstantnim spoljnim poremećajima. Na osnovu analognih rezultata iz centralizovanog slučaja /89,98/, uvida dobijenog iz problema sinteze decentralizovanih regulatora /91-94,99/ i karakterizacije regulatora koji rješavaju generalni problem decentralizovanog servomehanizma

/39,42/, razradjena je metodologija kojom se u okviru jedinstvenog postupka razmatra sinteza decentralizovanih regulatora sa integralnim djelovanjem za kompenzaciju efekata spoljnih poremećaja /95-97/. Najprije je postupak sinteze centralizovanih PI regulatora generalisan na decentralizovanu strukturu a zatim su, uzimajući u obzir nepovoljno dejstvo integratora na dinamičke karakteristike regulisanog sistema, razmatrane i mogućnosti koje metodologija projekcionog upravljanja pruža za poboljšanje eventualno nezadovoljavajućeg rješenja zasnovanog na decentralizovanim PI regulatorima. U tom smislu predložen je postupak sinteze decentralizovanih PID regulatora i decentralizovanih generalisanih PID regulatora.

Kod sinteze decentralizovanih generalisanih PID regulatora parametri pojedinih dinamičkih regulatora podešavaju se na sekvencijalan način, shodno predloženom postupku za decentralizovane dinamičke regulatore u sistemima bez poremećaja, dok se kod sinteze decentralizovanih PID regulatora javlja jedan kvalitativno novi fenomen. Naime, pri diferenciranju raspoloživih lokalnih izlaza javlja se, usled decentralizovane informacione strukture, direktno sprezanje lokalnih regulatora preko raspoloživih lokalnih mjerenja u smislu da se upravljanja ostalih lokalnih regulatora pojavljuju u lokalnim vektorima izlaza. Zato je ovaj problem najrpije generalno razmatran u radu /99/, gdje je pokazano kako direktno sprezanje lokalnih regulatora kroz lokalne vektore izlaza utiče na primjenu metodologije projekcionog upravljanja. Prezentirani su rezultati kojima se modifikuju projekciona upravljanja za ovaj slučaj, pri čemu su korišćene osobine generalne matrične Rikatijeve jednačine i matematička indukcija. Ovi generalni rezultati su primijenjeni u radu /97/ na sintezu decentralizovanih PID regulatora.

Na ovaj način je kompletna metodologija projekcionog upravljanja, razvijena za sintezu regulatora u sistemima sa centralizovanom strukturom, generalisana na decentralizovanu strukturu pri čemu je pokazano da sve pogodne osobine ove metode važe i za ovaj slučaj. Sa ovim je demonstrirana sveobuhvatnost ove metode jer je za različite informacione strukture na jedinstven način razmatrana sinteza linearnog regulatora stanja, regulatora izlaza i klasičnih regulacionih struktura kao što su PI i PID regulatori.

Kompletna metodologija projekcionog upravljanja prezentirana je u ovom radu u dva dijela. Prvi dio, u kojem je ova metoda primijenjena na probleme upravljanja u sistemima centralizovane strukture, podijeljenjena osam odjeljaka. U odjeljku 1 data je formulacija problema upravljanja a u odjeljku 2 sinteza statičkih regulatora izlaza metodom projekcionog upravljanja. U odjeljcima 3 i 4 data je primjena projekcionog upravljanja na sintezu dinamičkih regulatora niskog reda, dok je u odjeljku 5 prikazana generalizacija ove metode na nekontrolabilne sisteme. Sinteza PI, PID i generalisanih PID regulatora za sisteme sa spoljnim poremećajima prezentirana je u odjeljcima 6,7 i 8, respektivno.

Drugi dio rada, u kojem je projekciono upravljanje primijenjeno na sintezu regulatora u decentralizovanim strukturama upravljanja, sastoji se od osam odjeljaka. Poslije uvodnih razmatranja u odjeljku 1, prezentirana je sinteza decentralizovanih statičkih regulatora bez direktnog sprezanja u odjeljku 2 i sa direktnim sprezanjem regulatora u odjeljku 3. Sinteza decentralizovanih dinamičkih regulatora obradjena je u odjeljku 4 a sekvencijalna procedura za podešavanje dinamičkih regulatora u odjeljku 5. Primjena projekcionog upravljanja na sintezu regulatora u decentralizovanim sistemima sa spoljnim poremećajima prikazana je u odjeljcima 6, 7 i 8. Prezentirana je procedura za sintezu decentralizovanih PI, PID i generalisanih PID regulatora, respektivno.

Na kraju je dat zaključak rada, literatura i prilozi. Kompletna procedura sinteze ilustrovana je nizom numeričkih primjera kroz koje su pokazani i numerički aspekti predložene metodologije.

I DIO

SINTEZA REGULATORA ZA SLOŽENE LINEARNE SISTEME SA CENTRALIZOVANOM INFORMACIONOM STRUKTUROM

I.1. FORMULACIJA PROBLEMA UPRAVLJANJA

Osnovni problem upravljanja razmatran u ovom dijelu može se definisati na sledeći način. Posmatra se složeni sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx\end{aligned} \qquad (1.1)$$

gdje su $x(t)\varepsilon R^n$ stanje sistema, $u(t)\varepsilon R^m$ upravljanje, $y(t)\varepsilon R^r$ mjereni izlaz sistema, a R^p označava p-dimenzioni vektorski prostor. Uz pretpostavku da (A,B,C) predstavlja kontrolabilni i observabilni sistem, odrediti upravljanje zasnovano na vektoru mjerljivih izlaza koje minimizira kriterijum

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^TQx+u^TRu)dt,\ Q\geq 0,\ R>0^* \qquad (1.2)$$

Motivacija za korišćenje kvadratnog kriterijuma može se naći u većem broju referenci, a posebno u /71/, a obezbedjenje željenog položaja polova u sistemu sa zatvorenom povratnom spregom izborom težinskih matrica Q i R obradjeno je u referencama /100,101/. Uticaj lokacija polova sistema na dinamičke karakteristike je dobro poznat iz klasičnih radova teorije sistema /102,103/, a razmatran je i u najnovijim radovima u kojima je težište na analizi i sintezi diskretnih sistema upravljanja /104/.

Cilj sinteze je da se odredi pogodan statički regulator strukture

$$u=Ky,\ K\varepsilon R^{mxr} \qquad (1.3)$$

a kada statički regulator ne zadovoljava, dinamički regulator strukture

$$\dot{z}=Hz+Dy,\ z\varepsilon R^p \qquad (1.4)$$

---

*Simboli > i ⩾ označavaju pozitivno definitnu i pozitivno semidefinitnu matricu, respektivno.

$$u=K_y y+K_z z \tag{1.5}$$

tako da rezultujući regulisani sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike u odnosu na dati kriterijum (1.2). Pri sintezi statičkog regulatora neophodno je odrediti jedino matricu pojačanja K, dok je kod sinteze dinamičkog regulatora neophodno odrediti red regulatora p, parametre regulatora $H\varepsilon R^{pxp}$ i $D\varepsilon R^{pxr}$ i pojačanje regulatora $K_y \varepsilon R^{mxr}$ i $K_z \varepsilon R^{mxp}$.

Veliki broj radova posvećen je ovom klasičnom problemu upravljanja. U prostoru stanja navedeni prilazi se okvirno mogu podijeliti u dvije klase: klasu prilaza u kojima se vrši postavljanje polova sistema, i klasu prilaza u kojima se vrši optimizacija pod ograničenjima koje nameće informaciona struktura. Najvažniji radovi iz ove oblasti dati su u literaturi /2-25/.

U osnovi metode postavljanja polova polazi se od stanovišta da spektar* otvorenog sistema,

$$\Lambda_o=\{\lambda_i:\phi(\lambda_i)=\det(A-\lambda_i I)=0,\ i=1,\dots,n\} \tag{1.6}$$

kao osnovna karakteristika dinamičkog ponašanja sistema ne zadovoljava. Cilj sinteze je da se spektar regulisanog sistema,

$$\Lambda_c=\{\lambda_i:\phi(\lambda_i)=\det(A+BKC-\lambda_i I)=0,\ i=1,\dots,n\} \tag{1.7}$$

dovede u željeni region kompleksne ravni. Osnovni nedostatak ovih metoda je da ako rješenje problema postoji ono nije jednoznačno, a u postavci problema ne vodi se računa o optimizaciji rješenja, odnosno ne postoji ustanovljena veza izmedju postavljanja polova posredstvom regulatora izlaza i minimuma kvadratnog kriterijuma za odabrane težinske matrice Q i R. Dosadašnji pokušaji sprezanja metode postavljanja polova sa metodama minimizacije kriterijuma dovodili su do kompleksnih problema nelinearnog programiranja /13,14/.

U osnovi metoda zasnovanih na minimizaciji kriterijuma (1.2) je pretpostavka da će minimizacija kvadratnog kriterijuma obezbijediti željene dinamičke karakteristike sistema. Medjutim, pošto je optimalno upravljanje, u slučaju ograničene informacione strukture, funkcija početnog stanja x_o (što je sa praktičnog aspekta nepogodno jer početno stanje nije unaprijed poznato), uvodi se pretpostavka da je početno stanje slučajna veličina sa raspodjelom koju karakteriše očekivana vrijednost $E\{x_o\}=0$, i kovarijansa

$$E\{x_o x_o^T\}=Q_o \tag{1.8}$$

---

*Spektar matrice sadrži skup sopstvenih vrijednosti matrice.

Problem se na taj način prevodi u minimizaciju očekivane vrijednosti kriterijuma (1.2), odnosno na odredjivanje matrice K koja minimizira

$$I=E\{\frac{1}{2}\int_0^\infty x^T\bar{Q}x dt\},\quad \bar{Q}=Q+C^TK^TB^TRBKC \tag{1.9}$$

uz ograničenje

$$\dot{x}=\bar{A}x,\quad \bar{A}=A+BKC,\quad E\{x_o x_o^T\}=Q_o \tag{1.10}$$

Usvajanjem funkcije Ljapunova $V(x)=x^TMx$, pri čemu je

$$x^T\bar{Q}x=-\frac{d}{dt}(x^TMx) \tag{1.11}$$

lako se pokazuje da se pozitivno definitna matrica M dobija kao rješenje matrične jednačine Ljapunova /136/

$$\bar{A}^TM+M\bar{A}+\bar{Q}=0 \tag{1.12}$$

dok se kriterijum može izraziti kao

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^T\bar{Q}x dt=-\frac{1}{2}x^TMx\Big|_0^\infty=-\frac{1}{2}x_o^TMx_o \tag{1.13}$$

S obzirom da je /73/

$$E\{\frac{1}{2}x_o^TMx_o\}=E\{\frac{1}{2}\mathrm{Trag}\ Mx_o x_o^T\}=\frac{1}{2}\mathrm{Trag}\ MQ_o \tag{1.14}$$

originalni problem optimizacije se može predstaviti na sledeći način: odrediti K koje minimizira

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Trag}(MQ_o) \tag{1.15}$$

uz ograničenje da M zadovoljava

$$(A+BKC)^TM+M(A+BKC)+Q+C^TK^TB^TRBKC=0 \tag{1.16}$$

Kao rezultat se dobija /15,18,19/, da je K dato izrazom

$$K=-R^{-1}B^TMLC^T(CLC^T)^{-1} \tag{1.17}$$

pri čemu je M dato jednačinom (1.16), a L zadovoljava jednačinu

$$(A+BKC)L+L(A+BKC)^T+Q_o=0 \tag{1.18}$$

i ima smisao

$$L=E\{x(t)x(t)^T\}dt \tag{1.19}$$

Sistem jednačina (1.16 - 1.18) ne posjeduje uvijek rješenje; odnosno, rješenje ne postoji kada se sistem (1.1) ne može stabilisati statičkim regulatorom izlaza. S obzirom da potrebni i dovoljni uslovi da se sistem stabiliše statičkim regulatorom izlaza nijesu poznati, slijedi da nema mogućnosti da se iz parametara sistema (A,B,C) ocijeni da li rješenje problema (1.16 - 1.18) postoji.

Drugi nedostatak metoda ogleda se u najčešće proizvoljnom izboru matrice Q_o, što, medjutim, značajno utiče na rezultat. Ovaj prilaz je uprkos ovih nedostataka često upotrebljavan, a obradjene su i generalizacije na sintezu regulatora u prisustvu poremećaja i mjernih šumova /20,22/.

Zajednički nedostatak obije metode je da rješenje nije povezano sa referentnim rješenjem, odnosno optimalnim rješenjem problema kada bi potpuni vektor stanja bio dostupan za realizaciju upravljanja. Referentni regulator stanja, kao što je poznato, karakteriše linearna povratna sprega oblika

$$u=-R^{-1}B^TM_cx \tag{1.20}$$

pri čemu je M_c rješenje algebarske Rikatijeve jednačine

$$A^TM_c+M_cA-M_cSM_c+Q=0,\quad S=BR^{-1}B^T \tag{1.21}$$

a rezultujući optimalni sistem i minimalna vrijednost kriterijuma (1.2), dati su izrazima

$$\dot{x}=(A-SM_c)x\equiv Fx \tag{1.22}$$

$$J_{min}=\frac{1}{2}x_o^TM_cx_o \tag{1.23}$$

U metodologiji sinteze zasnovanoj na primjeni projekcionih upravljanja postavlja se cilj da se u rezultujućem sistemu sa statičkim ili sa dinamičkim regulatorom, zadrži dominantna dinamika optimalnog regulatora stanja (1.22). Smisao ovog zahtjeva proističe iz činjenice da je regulator stanja optimalan i da jedino neraspoloživost neophodne informacije (vektora stanja) onemogućava njegovo korišćenje. Prirodno je da se zbog toga sistem sa optimalnim regulatorom stanja uzme kao eksplicitna definicija željenog dinamičkog ponašanja sistema, i traži dopustiva realizacija (u funkciji mjerenog izlaza, ili mjerenog izlaza iz stanja regulatora) koja zadržava dominantne karakteristike ovako definisane referentne dinamike. Treba naglasiti da se relativno često koristi prilaz u kome se primjenjuje estimator stanja $\hat{x}$, a zatim realizuje optimalni regulator stanja oblika $u=-L\hat{x}$. Medjutim, ovaj prilaz ima za posledicu uvodjenje dinamičkog regulatora visokog reda (reda n-r) dok praksa pokazuje da se često zadovoljavajuće ponašanje sistema može obezbijediti i sa regulatorima relativno niskog reda.

Korišćenje sistema (1.22) kao referentnog sistema ima i tu prednost da eksplicitno ukazuje na značaj pomijeranja pojedinih polova sistema pri minimizaciji kriterijuma (1.2). Ovu informaciju pruža spektar matrice F u poredjenju sa spektrom matrice A. Drugim riječima, korišćenje referentnog sistema (1.22) pruža eksplicitne pokazatelje željene perfomanse sistema (1.1), za razliku od kvadratnog kriterijuma (1.2) koji eksplicitno definiše ciljeve upravljanja, ali samo implicitno način postizanja ovih ciljeva.

I.2. SINTEZA STATIČKIH REGULATORA IZLAZA METODOM PROJEKCIONOG UPRAVLJANJA

Metoda sinteze statičkih regulatora na bazi projekcionog upravljanja ima za cilj da otkloni neke od uočenih nedostataka prethodnih metoda. Cilj sinteze je da se pomoću statičkog regulatora zadrži, u sistemu sa zatvorenom povratnom spregom, invarijantni podprostor optimalnog referentnog rješenja (1.22) maksimalne moguće dimenzije, uz istovremeni zadovoljavajući raspored sopstvenih vrijednosti u preostalom dijelu spektra regulisanog sistema. Projekciona upravljanja predložena su najprije u radu /105/, ali je njihova primjena ograničena samo na sintezu statičkih regulatora, čime nijesu prevazidjeni poznati nedostaci statičkih regulatora izlaza. U radovima /84 - 86/, izvršeno je uopštavanje ove ideje u smislu da se u slučaju nepodobnih karakteristika sistema sa statičkim regulatorom ovo rješenje usvoji kao polazno i dalje unapredjuje sintezom dinamičkih regulatora, pri čemu se dodatna sloboda sadržavana u parametrima regulatora koristi za oblikovanje preostalog dijela spektra regulisanog sistema. Za potrebe ovog rada izložićemo osnovne principe i karakteristike metode sinteze bazirane na projekcionom upravljanju, koja je razradjena u /84 - 86/.

Referentna optimalna dinamika odlikuje se invarijantnom strukturom definisanom spektrom

$$\bar{\Lambda}=\{\lambda_i:\phi(\lambda_i)=\det(F-\lambda_i I)=0,\quad i=1,\dots,n\} \tag{2.1}$$

i matricom pridruženih sopstvenih vektora $\bar{X}$, koja zadovoljava uslov

$$F\bar{X}=\bar{X}\bar{\Lambda} \tag{2.2}$$

pri čemu se ovdje $\bar{\Lambda}$ koristi i za obilježavanje žordanove forme matrice F. Pri tome će se pretpostaviti da u slučaju para kompleksnih polova matrice, $\bar{\Lambda}$ sadrži 2x2 submatricu strukture

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

a matrica $\bar{X}$ umjesto para konjugovano kompleksnih vektora par vektora

$$[x \quad y],\ x,y\in R^n \tag{2.3}$$

pri čemu je $x+jy$ kompleksni vektor koji odgovara kompleksnoj sopstvenoj vrijednosti $\sigma+j\omega$. Takodje će se radi jednostavnosti izlaganja prepostaviti da se sopstvene vrijednosti ne ponavljaju, iako se metodologija jednostavno generališe i na slučaj sa višestrukim sopstvenim vrijednostima.

U teoriji sistema upravljanja poznato je da se složeno kretanje sistema može razložiti na osnovne komponente kretanja, ovdje nazvane *modovi* kretanja koji su definisani sopstvenim vrijednostima matrice sistema, i čiji uticaj na izlaz sistema, kao i na vrijednost kriterijuma (1.2), zavisi i od sopstvenih vektora sistema. Takodje je dobro poznato da je dominantna dinamika sistema definisana takozvanim dominantnim sopstvenim vrijednostima sistema, odnosno sopstvenim vrijednostima sistema sa maksimalnim realnim dijelom. Ove sopstvene vrijednosti nazivaju se i spore sopstvene vrijednosti (ako im je realan dio negativan) ili nestabilne sopstvene vrijednosti (ako im je realan dio pozitivan) i degradiraju dinamičke karakteristike sistema. Zbog toga su dominantne sopstvene vrijednosti od prvostepenog značaja. Broj dominantnih sopstvenih vrijednosti (polova) zavisi od konfiguracije polova matrice F, i postaje poznat nakon odredjivanja optimalnog regulatora stanja definisanog izrazima (1.20 - 1.23).

U kojoj je mjeri moguće projekcionim upravljanjem zadržati dominantnu dinamiku referentnog sistema zavisi od broja dominantnih polova sistema i od dimenzije vektora izlaza u sistemu. Prilaz, medjutim, omogućava prelazak na dinamički regulator koji, u slučaju nezadovoljavajuće performanse statičkog regulatora, u potpunosti rješava postavljanje ostalih polova regulisanog sistema u definisani region kompleksne ravni.

Da bi definisali projekciono upravljanje posmatrajmo sistem (1.1) i kriterijum (1.2). Dinamika asociranog referentnog sistema (1.22) eksplicitno je opisana strukturom sopstvenih vektora (2.2). Neka $X_r \varepsilon R^{nxr}$ predstavlja submatricu matrice $\bar{X}$ asociranu sa podspektrom $\Lambda_r \subset \bar{\Lambda}$. Tada važi:

Definicija I.2.1,/85/. *Projekciono upravljanje* asocirano sa Λ_r definiše se izrazom

$$u=-R^{-1}B^TM_cPx \tag{2.4}$$

pri čemu je P *projekciona matrica* definisana sa

$$P=X_r(CX_r)^{-1}C \tag{2.5}$$

Primjenom projekcionog upravljanja jednačina sistema postaje

$$\dot{x}=A_cx=(A-SM_cP)x \tag{2.6}$$

i definiše dinamiku sistema sa zatvorenom povratnom spregom. Pretpostavljajući da je sistem dat u realizaciji u kojoj je $C=[I \quad 0]$, najvažnije osobine projekcionog upravljanja sumirane su u sledećoj teoremi:

Teorema I.2.1,/85/. Projekciono upravljanje $u=-R^{-1}B^TM_cPx$, $P=X_r(CX_r)^{-1}C$, i rezultujući regulisani sistem odlikuju se sledećim osobinama:

(a) Projekciono upravljanje se može realizovati u funkciji raspoloživih mjerenja, odnosno $u=-R^{-1}B^{T}M_{c}X_{r}(CX_{r})^{-1}Cx=Ky$;

(b) Rezultujući sistem sa povratnom spregom zadržava $R\{X_r\}$ kao invarijantan podprostor, odnosno $A_cX_r=X_r\Lambda_r$, pri čemu $R\{\cdot\}$ označava sliku operatora;

(c) Spektar regulisanog sistema definisan je izrazom

$$\Lambda(A_c)=\Lambda_r U \Lambda(A_r) \tag{2.7}$$

pri čemu je

$$A_r=[-N_0 \quad I]A\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}=A_{22}-N_0A_{12}, \quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}, \quad A_{11}\varepsilon R^{rxr} \tag{2.8}$$

dok je

$$N_0=X_2X_1^{-1}, \quad X_r=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}, \quad X_1\varepsilon R^{rxr} \tag{2.9}$$

(d) Vrijednost kriterijuma asociranog sa projekcionim upravljanjem je data izrazom

$$J=\frac{1}{2}x_0^{T}Mx_0 \tag{2.10}$$

pri čemu je

$$M=N_c+\begin{bmatrix}-N_0^{T}\\ I\end{bmatrix}D_{22}[-N_0 \quad I] \tag{2.11}$$

a matrica D_{22} je pozitivno definitno rješenje linearne matrične jednačine Ljapunova

$$A_r^{T}D_{22}+D_{22}A_r+G_{22}=0 \tag{2.12}$$

gdje je G_{22} definisano dekompozicijom matrice

$$M_cSM_c=G=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{12}^{T} & G_{22}\end{bmatrix}, \quad G_{11}\varepsilon R^{rxr} \tag{2.13}$$

Dokaz:

(a) S obzirom na strukturu projekcione matrice P slijedi

$$u=-R^{-1}B^TM_cX_r(CX_r)^{-1}Cx=-R^{-1}B^TM_cX_r(CX_r)^{-1}y=Ky.$$

(b) Da bi dokazali centralni dio teoreme primijetimo sledeće:

$$A_cX_r=AX_r-SM_cPX_r=AX_r-SM_cX_r(CX_r)^{-1}CX_r=AX_r-SM_cX_r=$$

$$=(A-SM_c)X_r=FX_r=X_r\Lambda_r \tag{2.14}$$

čime je tvrdnja dokazana.

(c) Da bi dokazali treći dio primijetimo da je spektar matrice invarijantan na transformacije sličnosti. Definišimo transformaciju

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ N_o & I \end{bmatrix}, \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -N_o & I \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

i primijetimo da se tada T može napisati u obliku

$$T=[X_rX_1^{-1} \quad Y], \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}, \quad V=[-N_o \quad I], \quad Y=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Spektar A_c je dakle ekvivalentan spektru matrice

$$T^{-1}A_cT=T^{-1}A_c[X_rX_1^{-1} \quad Y]=T^{-1}[A_cX_rX_1^{-1} \quad A_cY]=$$

$$=\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}[X_r\Lambda_rX_1^{-1} \quad A_cY]=\begin{bmatrix} X_1\Lambda_rX_1^{-1} & CA_cY \\ 0 & VA_cY \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Dokaz slijedi uzimajući u obzir da je

$$A_cY=AY-SM_cPY=AY \tag{2.18}$$

te je spektar matrice A_c ekvivalentan spektru matrice

$$T^{-1}A_cT=\begin{bmatrix} X_1\Lambda_rX_1^{-1} & CAY \\ 0 & A_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11t} & CAY \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

(d) Poslednji dio teoreme dokazuje se primjenom transformacije T na jednačinu koja definiše vrijednost kriterijuma (1.2) u slučaju da se primjenjuje upravljanje (2.4). Ima se da je $J=\frac{1}{2}x_0^TMx_0$, pri čemu je M definisano kao rješenje linearne matrične jednačine

$$A_c^TM+MA_c+Q+P^TM_cSM_cP=0 \qquad (2.20)$$

Dekompozicijom $M=M_c+D$ i zamjenom u gornjoj jednačini dobija se

$$A_c^TD+DA_c+A_c^TM_c+M_cA_c+Q+P^TM_cSM_cP=0 \qquad (2.21)$$

odnosno

$$A_c^TD+DA_c+A^TM_c+M_cA-M_cSM_c+Q+(I-P)^TM_cSM_c(I-P)=0 \qquad (2.22)$$

i s obzirom da M_c zadovoljava algebarsku Rikatijevu jednačinu (1.21) jednačina za D se svodi na

$$A_c^TD+DA_c+Q_c=0, \quad Q_c=(I-P)^TM_cSM_c(I-P) \qquad (2.23)$$

Primjenom transformacije sličnosti T na jednačinu (2.23) dobija se

$$A_t^TD_t+D_tA_t+Q_t=0 \qquad (2.24)$$

gdje su $A_t=T^{-1}A_cT$, $D_t=T^TDT$, $Q_t=T^TQ_cT$. Uvodeći dekompoziciju $D_t=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix}$ i uzimajući u obzir da je

$$(I-P)Y=Y, \quad (I-P)X_r=0 \qquad (2.25)$$

kao i izraz (2.19) iz dokaza prethodnog stava dobija se

$$\begin{bmatrix} A_{11t}^T & 0 \\ (CAY)^T & A_r^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11t} & CAY \\ 0 & A_r \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ Y^T \end{bmatrix}M_cSM_c\begin{bmatrix} 0 & Y \end{bmatrix}=0 \qquad (2.26)$$

te neposredno slijedi da je $D_{11}=0$, $D_{12}=0$, a D_{22} je dato kao rjemoguća prilaza ovom problemu:

- izvršiti sintezu podesnijeg statičkog regulatora, uz redukciju dimenzije zadržanog invarijantnog podprostora, pri čemu se dobija sloboda u podešavanju dinamike u komplementarnom podprostoru Z, /26/;
- pristupiti sintezi dinamičkog regulatora.

Prvi prilaz zasnovan je na sledećem rezultatu:

Teorema I.2.2, /91/. Neka je P_a projekciona matrica pridružena podspektru $\Lambda_a \subset \bar{\Lambda}$ sa invarijantnim podprostorom $R\{X_a\}$, i neka je P_b projekciona matrica pridružena podspektru $\Lambda_b \subset \bar{\Lambda}$ sa invarijantnim podprostorom $R\{X_b\}$, i neka je $\Lambda_a \cap \Lambda_b = \Lambda_o$. Tada projekciona upravljanja

$$u=-R^{-1}B^TM_cP(\mu)x,\quad P(\mu)=(1-\mu)P_a+\mu P_b,\quad 0\leq\mu\leq 1 \qquad (2.29)$$

primijenjena na (1.1) zadržavaju u rezultujućem regulisanom sistemu

$$\dot{x}=(A-SM_cP(\mu))x \qquad (2.30)$$

$R\{X_o\}$ kao invarijantni podprostor, tj. $A_cX_o=X_o\Lambda_o$.

Efekat ovog rezultata je da kako se μ mijenja od 0 do 1 podspektar Λ_o i invarijantan podprostor $R\{X_o\}$ ostaju invarijantni, dok ostali polovi sistema (2.30) opisuju trajektorije koje u osnovi predstavljaju redukovani oblik geometrijskog mjesta korijena, čime se omogućava,u principu, odredjivanje spektra A_r koji je prihvatljiviji od $\Lambda(A_{ra})$ i $\Lambda(A_{rb})$. Alternativna mogućnost u okviru ovog prilaza, koja se svodi na iskorišćavanje slobode dobijene redukovanjem dimenzije zadržanog invarijantnog podprostora za formulaciju pridruženog podproblema podešavanja polova pomoću statičkog regulatora izlaza, data je u /26/. Medjutim, s obzirom da ovaj prilaz sadrži sve poznate nedostatke rješenja baziranih na statičkom regulatoru izlaza, ovdje se nećemo detaljnije baviti njime već ćemo, u narednom odjeljku, detaljnije obraditi drugi prilaz s obzirom da sinteza dinamičkog regulatora posjeduje značajne metodološke i praktične prednosti.

I.3. SINTEZA DINAMIČKIH REGULATORA NISKOG REDA - TEORETSKA RAZMATRANJA

U slučaju da za bilo koji izbor zadržanog invarijantnog podprostora rezultujući regulisani sistem postaje nestabilan, ili stabilan ali sa nezadovoljavajućim spektralnim karakteristikama $\Lambda(A_r)$, nepodobno rješenje bazirano na statičkom regulatoru izlaza poboljšava se sintezom dinamičkog regulatora strukture

$$\dot{z}=Hz+Dy,\ z\varepsilon R^{p} \tag{3.1}$$

pri čemu ćemo za početak pretpostaviti da su dimenzija regulatora p i njegovi parametri H i D unaprijed poznati. Zadržavajući kriterijum (1.2), problem se svodi na odredjivanje parametara povratne sprege oblika

$$u=K_z z+K_y y \tag{3.2}$$

tako da rezultujući regulisani sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike.

Primjenjujući prilaz analogan onom iz prethodnog odjeljka, na osnovu jednačine sistema (1.1) i jednačine dinamičkog regulatora (3.1) definisaćemo prošireni dinamički sistem

$$\dot{x}_e=A_e x_e+B_e u,\ x_e^T=\begin{bmatrix} z^T & x^T \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$y_e=C_e x_e,\ y_e^T=\begin{bmatrix} z^T & y^T \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

sa

$$A_e=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix},\quad B_e=\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix},\quad C_e=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

dok kriterijum za prošireni sistem poprima oblik

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x_e^T Q_e x_e+u^T Ru)dt,\ Q_e=\ dg\{0,Q\}\varepsilon R^{(n+p)x(n+p)*} \tag{3.6}$$

Definišući povratnu spregu po proširenom izlazu sistema

$$u=K_e y_e=\begin{bmatrix} K_z & K_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

*Ovdje dg{0,Q} implicira blok dijagonalnost.

problem smo formalno sveli na odredjivanje statičkog regulatora izlaza za prošireni sistem, tako da se izloženi postupak iz prethodnog odjeljka može u potpunosti primijeniti na prošireni sistem, pri čemu važe sve osobine rješenja zasnovanog na primjeni projekcionog upravljanja izložene u Teoremi I.2.1.

Od interesa je istaći neke osobine rješenja koje proističu iz strukture proširenog sistema, strukture kriterijuma i parametara regulatora H i D.

Referentna dinamika proširenog sistema odredjena je rješenjem linearnog regulatora stanja za problem definisan izrazima (3.3), (3.6). Znači, optimalno upravljanje u funkciji stanja je oblika

$$u=-R^{-1}B_e^T M_e x_e \tag{3.8}$$

pri čemu je $M_e \epsilon R^{(n+p)x(n+p)}$ pozitivno semidefinitno i stabilišuće rješenje pridružene algebarske Rikatijeve jednačine

$$A_e^T M_e + M_e A_e - M_e S_e M_e + Q_e = 0, \quad S_e = B_e R^{-1} B_e^T \tag{3.9}$$

odnosno u dekomponovanom obliku

$$\begin{bmatrix} H^T & 0 \\ C^T D^T & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{3.10}$$

Jednostavno se pokazuje da algebarska Rikatijeva jednačina (3.10) uvijek posjeduje rješenje

$$M_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

pri čemu je M_c rješenje jednačine (1.21) a M_e optimizirajuće i stabilišuće rješenje u slučaju da je H stabilna matrica (usled neobservabilnosti stanja dinamičkog regulatora z u kriterijumu (3.6)), ili samo optimizirajuće rješenje u slučaju da je H nestabilna matrica, /106/. (U ovom slučaju postoji i drugo pozitivno semidefinitno rješenje jednačine (3.10), M_e', pri čemu je $M_e<M_e'$). Iz ovoga neposredno slijedi da je optimalno upravljanje u funkciji stanja za prošireni sistem dato u obliku

$$u=-R^{-1}B^TM_cx \tag{3.12}$$

dakle kao i u slučaju statičkog regulatora, jer kad je na raspolaganju čitav vektor stanja dinamički kompenzator je suvišan. Znači, referentna dinamika sistema definisana je jednačinom

$$\dot{x}_e=F_ex_e=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & F \end{bmatrix} x_e \tag{3.13}$$

Posmatrajmo sada problem konstrukcije projekcionog upravljanja. Značajna razlika u odnosu na sintezu statičkog regulatora je da sada stoji na raspolaganju ukupno r+p mjerenja, odnosno postojeći vektor izlaza y i stanje dinamičkog regulatora z. Zbog toga je, shodno rezultatima navedenim u prethodnom odjeljku, moguće zadržati (r+p)-dimenzioni invarijantni podprostor u sistemu sa zatvorenom povratnom spregom. Važno je primijetiti da ovo važi nezavisno od izbora parametara dinamičkog regulatora H i D. S obzirom da se dinamički regulator uvodi da bi se omogućila što bolja aproksimacija referentne dinamike, prirodno je da se invarijantni podprostor asocira sa sopstvenim vrijednostima matrice F. U tom smislu, neka je X_{r+p} matrica formirana od r+p sopstvenih vektora matrice F_e pridruženih $\Lambda_{r+p}\subset\Lambda(F)$. Tada projekciono upravljanje ima oblik

$$u=-R^{-1}B_e^TM_eP_ex_e \tag{3.14}$$

pri čemu je P_e definisano izrazom

$$P_e=X_{r+p}(C_eX_{r+p})^{-1}C_e \tag{3.15}$$

Izvršimo dekompoziciju matrice X_{r+p} na sledeći način

$$X_{r+p}=\begin{bmatrix} W_p & W_r \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix},\ W_p\in R^{p\times p},\ U\in R^{r\times p},\ V\in R^{(n-r)\times p} \tag{3.16}$$

Tada se, uzimajući u obzir pretpostavljenu strukturu $C=\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$, za P_e dobija

$$P_e=\begin{bmatrix}W_p & W_r\\ U & Y\\ V & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_p & W_r\\ U & Y\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}I_p & 0 & 0\\ 0 & I_r & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_p & 0 & 0\\ 0 & I_r & 0\\ N_p & N_r & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_p & 0\\ P_p & P_r\end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

pri čemu je uvedeno obilježavanje

$$\begin{bmatrix}N_p & N_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_p & W_r\\ U & Y\end{bmatrix}^{-1}, \quad P_p=\begin{bmatrix}0\\ N_p\end{bmatrix}, \quad P_r=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ N_r & 0\end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

Tada iz (3.14) slijedi da se projekciono upravljanje može napisati u obliku

$$u=-R^{-1}\begin{bmatrix}0 & B^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & M_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_p & 0\\ P_p & P_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ x\end{bmatrix}=-R^{-1}B^TM_cP_pz-R^{-1}B^TM_cP_rx=$$

$$=-R^{-1}B^TM_cP_pz-R^{-1}B^TM_cP_yy=K_zz+K_yy \qquad (3.19)$$

pri čemu je uvedena notacija

$$P_y=\begin{bmatrix}I_r\\ N_r\end{bmatrix}, \quad K_y=-R^{-1}B^TM_cP_y, \quad K_z=-R^{-1}B^TM_cP_p \qquad (3.20)$$

Primjenom upravljanja (3.19) na sistem (3.3),(3.4) dobija se jednačina dinamičkog sistema sa zatvorenom povratnom spregom oblika

$$\dot{x}_e=\begin{bmatrix}H & DC\\ -SM_cP_p & A-SM_cP_r\end{bmatrix}x_e\equiv A_{ce}x_e \qquad (3.21)$$

Uvodeći dekompoziciju $F=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}$, $F_{11}\varepsilon R^{rxr}$ i notaciju

$$A_{re}=A_{22}-N_rA_{12} \qquad (3.22)$$

$$F_r=F_{22}-N_rF_{12} \qquad (3.23)$$

$$F_o=\begin{bmatrix}H & D\\ F_{12}N_p & F_{11}+F_{12}N_r\end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

i uzimajući u obzir definicije A_{ij}, $i,j=1,2$, F_e i A_{ce} izrazima (2.8), (3.13) i (3.21), osnovne spektralne karakteristike sistema mogu se prikazati na sledeći način:

<u>Teorema I.3.1.</u> Za linearni regulator stanja (3.13) i sistem sa

zatvorenom povratnom spregom (3.21) važe sledeće spektralne dekompozicije:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \Lambda(F_e)=\Lambda_h U\Lambda(F)=\Lambda_h U\Lambda_{r+p} U\Lambda_c\\
&(b)\ \Lambda(A_{ce})=\Lambda_{r+p} U\Lambda(A_{re})\\
&(c)\ \Lambda(F_r)=\Lambda_h U\Lambda_c\\
&(d)\ \Lambda(F_o)=\Lambda_{r+p}
\end{aligned} \qquad (3.25)$$

gdje je Λ_{r+p} podspektar matrice F asociran sa projekcionim upravljanjem, a Λ_c je komplementarni spektar matrice F. Dokaz se može naći u /107/. Mi ćemo ovdje samo primijetiti da (a) neposredno slijedi iz strukture matrice F_e, dok dokaz (b) slijedi iz osnovnih osobina projekcionog upravljanja. Naime, analogno rezultatu iz prethodnog odjeljka, važi

$$A_{re}=\begin{bmatrix}-N_p & -N_r & I\end{bmatrix} A_e \begin{bmatrix}0\\0\\I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-N_p & -N_r & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H & D & 0\\ 0 & A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\I\end{bmatrix} \qquad (3.26)$$

odakle neposredno slijedi da je matrica A_{re} koja definiše preostali spektar regulisanog sistema data sa (3.22), čime se dokazuje (b).

U radu /27/ dokazan je sledeći rezultat koji će biti korišćen u daljem izlaganju:

Teorema I.3.2. Neka je $N_o=ZY^{-1}$, $Z\varepsilon R^{(n-r)xr}$, $Y\varepsilon R^{rxr}$, rješenje Rikatijeve jednačine $R(N_o)=0$ koja je asocirana sa podspektrom Λ_r matrice F. Neka je $\Lambda_o=\Lambda(F)/\Lambda_r$ komplementarni spektar matrice F i neka je

$$\begin{bmatrix}W_1\\W_2\end{bmatrix},\ W_1\varepsilon R^{rx(n-r)},\ F_1=F_{22}-N_oF_{12} \qquad (3.21)$$

matrica sopstvenih vektora asocirana sa Λ_o. Tada je

$$F_1(W_2-N_oW_1)=(W_2-N_oW_1)\Lambda_o \qquad (3.28)$$

odnosno $W_2-N_oW_1$ je matrica sopstvenih vektora matrice F_1 definisane sa (3.27).

Neposredna primjena ovog rezultata nalazi se u odredjivanju strukture sopstvenih vektora matrice F_r iz (3.23). Neka je, naime, $N=\begin{bmatrix}N_p & N_r\end{bmatrix}$ rješenje algebarske Rikatijeve jednačine asoci-

3° Za dati red i strukturu regulatora, regulisani sistem će imati spektar $\Lambda(A_{ce})=\Lambda_{r+p}\cup\Lambda(A_{re})$ koji se sastoji od zadržanih r+p sopstvenih vrijednosti referentnog rješenja i spektra rezidualne matrice A_{re}. $\Lambda(A_{re})$ se može interpretirati kao perturbirani komplementarni spektar Λ_c, koji sadrži onaj optimalni podspektar koji nije zadržan i spektar dinamičkog regulatora Λ_h.

Iz navedenog se vidi da prezentirani metod obezbjedjuje uvid u spektralne karakteristike regulisanog sistema, omogućava uporedjenje rješenja zasnovanog na povratnoj sprezi po izlazu sa optimalnim rješenjem po stanju i daje organizovan način za izbor i povećanje dimenzije dinamičkog regulatora.

Medjutim, pored ovih prednosti navedeni metod ima i mane sa gledišta sinteze. One proističu iz eliminacije važnog koraka u toku sinteze koji se sastoji u izboru odgovarajućih parametara regulatora. Naime, mi smo pretpostavili da su za datu dimenziju p regulatora njegovi parametri H i D takodje dati. Usled toga se može dogoditi da, za date H i D, bilo koji izbor Λ_{r+p} rezultira u nezadovoljavajućem, ili čak nestabilnom rezidualnom spektru $\Lambda(A_{re})$, iako se za neki drugi izbor parametara H i D rezidualni spektar može znatno poboljšati. Pored toga, u slučaju da se H i D moraju modifikovati iz dosad navedenog nije jasno kako se to može učiniti na zadovoljavajući način.

Iz osobina rješenja slijedi da je za ocjenu podobnosti rješenja baziranog na projekcionom upravljanju mjerodavna lokacija spektra rezidualne matrice $A_{re}=A_{22}-N_rA_{12}$. Najjednostavniji slučaj za sintezu bio bi kada bi postojala potpuna sloboda u izboru matrice N_r, s obzirom da bi se tada problem sinteze sveo na problem postavljanja polova matrice $A_{re}=A_{22}-N_rA_{12}$ izborom pogodne matrice N_r. Ovo je problem postavljanja polova pomoću povratne sprege u funkciji stanja čije rješenje je odavno poznato, /108/. Medjutim, iz navedenih spektralnih osobina rješenja slijedi da podspektar Λ_c matrice $F_r=F_{22}-N_rF_{12}$ ne zavisi od parametara H i D već je specificiran samo sa spektrom optimalnog referentnog rješenja. Ovaj rezultat odredjuje ograničenje na moguće vrijednosti N_r u smislu da N_r mora biti izabrano tako da garantuje da Λ_c bude podspektar od F_r. Na taj način se problem sinteze dinamičkog regulatora otežava.

U narednom odjeljku je izložen metodološki postupak koji uzima u obzir ovo ograničenje. Pokazuje se da se problem oblikovanja spektra matrice A_{re} svodi na problem postavljanja polova pomoću povratne sprege u funkciji izlaza, što je znatno složeniji, i u opštem slučaju nepotpuno riješen, problem.

I.4. METODOLOGIJA ZA SINTEZU DINAMIČKIH REGULATORA

Posmatrajmo sada praktičnu metodologiju za projektovanje dinamičkih regulatora. S obzirom na dosadašnje izlaganje, metodologija treba da omogući da se:

(a) izabere matrica N_r uz postojeće ograničenje tako da se polovi matrice A_{re} postave u željeni region kompleksne ravni,

(b) odrede parametri dinamičkog regulatora, matrice H i D koje odgovaraju ovom izboru N_r, i

(c) odrede pojačanja u povratnoj sprezi koja uz izabrani dinamički regulator obezbjedjuju implementaciju projekcionih upravljanja sa svim osobinama koje su ranije ustanovljene.

Šire posmatrano, potrebno je odlučiti da li koristiti statički ili dinamički regulator, i ako dinamički kog reda, kao i niz drugih pitanja povezanih sa ovim osnovnim dilemama. U ovom odjeljku se prvo daju odgovori na gore postavljeni uži problem a zatim se uspostavljaju metodologije projektovanja regulatora u širem smislu.

Posmatrajmo prvo problem postavljanja polova matrice A_{re}. Primijetimo da iz (3.18) slijedi

$$N_pW_p+N_rU=V \qquad (4.1)$$

$$N_pW_r+N_rY=Z \qquad (4.2)$$

Uvodeći pretpostavku da je W_p nesingularna matrica slijedi

$$N_p=(V-N_rU)W_p^{-1} \qquad (4.3)$$

matrica A_r iz statičkog regulatora definisana izrazom (2.8). Dakle, upravo matrica čije spektralne karakteristike u sintezi statičkog regulatora nijesu zadovoljile, usled čega je uočena potreba uvodjenja dinamičkog regulatora. U tom smislu izraz (4.13) upravo omogućava da se izborom proizvoljne matrice P_o utiče na spektar matrice A_{re} i umjesto spektra A_r koji ne zadovoljava dobije pogodniji spektar komplementarnih polova u regulisanom sistemu. Primijetimo, dalje, da spektar A_{re} sadrži nedominantne polove regulisanog sistema jer su dominantni polovi zadržani na lokacijama koje odredjuje referentni sistem. Zbog toga se problem postavljanja polova u odnosu na A_{re} može relaksirati i umjesto egzaktnog postavljanja na odredjene lokacije dovoljno je obezbijediti da polovi A_{re} leže u unaprijed odredjenom regionu kompleksne ravni. Ovaj region je odredjen lokacijama polova matrice A, i spektra matrice F, kao i uvedenim polovima dinamičkog kompenzatora H. U nekim slučajevima težiće se da polovi H budu lijevo od polova matrice F, u drugim ima smisla i drugačije birati polove matrice H, shodno konkretnom upravljačkom problemu. Konačno, primijetimo da je problem postavljanja polova matrice A_{re} problem postavljanja polova pomoću povratne sprege u funkciji izlaza sistema jer je problem ekvivalentan problemu postavljanja polova za sistem

$$\begin{aligned} \dot{w} &= A_r w + B_o \tilde{u} \\ \tilde{y} &= A_{12} w \\ \tilde{u} &= P_o \tilde{y} \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Problem postavljanja polova sistema u funkciji izlaza nije posebno obradjen u ovom radu, mada je dat spisak referenci koje obradjuju ovaj problem /2-13,17,24-26/. Dovoljno je napomenuti da se za rješenje ovog problema može primijeniti neki od predloženih algoritama, kao i heuristički prilazi, pogotovo kada postoji mogućnost interaktivnog projektovanja pomoću računara. Detaljno razmatranje problema postavljanja polova u sklopu ove metodologije kao i dodatne reference mogu se naći u radu /26/. Pretpostavimo sada da je odredjena matrica P_o i da su polovi A_{re} postavljeni u željeni region kompleksne ravni. Kada se ovo postigne svi dalji koraci u metodologiji jednoznačno su odredjeni eksplicitnim analitičkim izrazima. Posmatrajmo prvo problem odredjivanja parametara regulatora, odnosno odredjivanja matrica H i D.

Iz izraza (4.6) slijedi da je na osnovu odredjenog P_o i poznatih sopstvenih vektora matrice F, matrica L data izrazom

$L=(I+P_oU)^{-1}P_oY$

pri čemu je $I+P_oU$ regularna matrica za "skoro svako" P_o. Iz definicije matrice X_{r+p} date sa (3.16) slijedi

$$\begin{bmatrix} H & D & 0 \\ 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p & W_r \\ U^p & Y^r \\ V & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & W_r \\ U^p & Y^r \\ V & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \Lambda_r \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

odnosno

$$\begin{aligned} HW_p+DU&=W_p\Lambda_p \\ HW_r+DY&=W_r\Lambda_r \end{aligned} \tag{4.16}$$

Rješavajući drugu jednačinu po matrici D dobija se

$$D=(W_pL\Lambda_r-HW_pL)Y^{-1} \tag{4.17}$$

a zamjenom u prvu jednačinu iz (4.16) slijedi

$$HW_p(I-LY^{-1}U)=W_p(\Lambda_p-L\Lambda_rY^{-1}U) \tag{4.18}$$

Iz poslednjeg izraza se dobija

$$H=W_pH_oW_p^{-1},\ H_o=(\Lambda_p-L\Lambda_rY^{-1}U)(I-LY^{-1}U)^{-1} \tag{4.19}$$

Zamjenom H iz jednačine (4.16) u (4.17) i uzimajući u obzir da je

$(I-LY^{-1}U)^{-1}LY^{-1}=LY^{-1}(I-ULY^{-1})^{-1}$ dobija se

$$D=W_pL\Lambda_rY^{-1}(I+ULY^{-1})^{-1}-W_p\Lambda_pLY^{-1}(I-ULY^{-1})^{-1}$$

odnosno

$$D=W_pD_o,\ D_o=(L\Lambda_r-\Lambda_pL)(Y-UL)^{-1} \tag{4.20}$$

Jednačine (4.19) i (4.20) odredjuju strukturu i parametre regulatora. Primijetimo da postoji potpuna sloboda u strukturi regulatora, u smislu da su moguće proizvoljne transformacije sličnosti jednačina regulatora jer je W_p proizvoljna regularna matrica što implicira da postoji potpuna sloboda u realizaciji regulatora. Znači, regulator je moguće realizovati u obliku kontrolabilne ili observabilne kanonične strukture ili neke druge kanonične forme i time minimizirati broj parametara u strukturi ili zadovoljiti neke druge kriterijume u realizaciji, na primjer pomoću mikroprocesora. Što je najznačajnije ova sloboda omogućava da se raspregnu problemi odredjivanja osobina regulatora i odredjivanja strukture regulatora.

Posmatrajmo konačno problem odredjivanja parametara u povratnoj sprezi. Za odredjene parametre H i D projekciono upravljanje za prošireni sistem definisano izrazom (3.14) je potpuno specificirano i može poslužiti za odredjivanje matrica pojačanja povratne sprege. S druge strane, u prethodnom odjeljku je pokazano da važi

$$u=K_y y+K_z z \tag{4.21}$$

pri čemu je

$$K_y=-R^{-1}B^T M_c P_y,\quad P_y=\begin{bmatrix} I \\ N_r \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$K_z=-R^{-1}B^T M_c P_p,\quad P_p=\begin{bmatrix} 0 \\ N_p \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

U funkciji matrice P_o koja odredjuje rješenje s obzirom na postavljanje polova matrice A_{re}, izraz za N_r je takodje izveden i dat jednačinom

$$N_r=N_o-B_oP_o \tag{4.24}$$

Izraz za N_p dobija se polazeći od definicionog obrasca (4.3) uz korišćenje (4.9). Ima se

$$N_p=(V-N_rU)W_p^{-1}=(V-N_oU+B_oP_oU)W_p^{-1}=B_o(I+P_oU)W_p^{-1}=N_{po}W_p^{-1} \tag{4.25}$$

Kao što se moglo i očekivati N_r ne zavisi od W_p, odnosno od realizacije dinamičkog kompenzatora, dok N_p zavisi. Zbog toga je i pojačanje K_y u povratnoj sprezi nezavisno od realizacije dinamičkog regulatora, dok se pojačanje K_z mijenja sa realizacijom.

Izloženo rješenje pruža mogućnost da se organizuje sveobuhvatna metodologija sinteze podesnih regulatora za linearne sisteme visokog reda, primjenom statičkog regulatora u slučaju da zadovoljava i sintezom dinamičkog regulatora, ako se ukaže potreba. Osnovni koraci ove metodologije sastoje se u sledećem:

1. Na osnovu upravljačkog problema definisati pogodan kvadratni kriterijum koji odražava postavljene zahtjeve.

2. Kroz nekoliko iteracija odrediti pogodne vrijednosti težinskih matrica koje otežavaju stanje sistema i upravljanje, i rješavanjem optimalnog linearnog regulatora stanja definisati željenu referentnu dinamiku sistema.

3. Uporedjenjem spektra otvorenog sistema sa spektrom referentnog optimalnog sistema (koji se dobija primjenom upravljanja u funkciji stanja) sagledati podspektar sopstvenih vrijednosti koje su malo osjetljive na optimalno upravljanje i podspektar sopstvenih vrijednosti koje su značajno osjetljive na optimalno upravljanje. Podskup sopstvenih vrijednosti osjetljivih na upravljanje i podskup dominantnih sopstvenih vrijednosti predstavljaju skup sopstvenih vrijednosti koje predstavljaju kandidate za zadržavanje u sistemu sa zatvorenom povratnom spregom posredstvom projekcionih upravljanja. Pored toga lokacije ova dva spektra odredjuju i realne granice za lokaciju sopstvenih vrijednosti pri upravljanju u funkciji izlaza sistema.

4. Za svaki podskup Λ_r od r sopstvenih vrijednosti (modulo konjugovano kompleksni parovi) iz ukupno s sopstvenih vrijednosti koje su zadržane kao kandidati, odrediti projekciono upravljanje i sagledati degradaciju spektra A_r.

5. U slučaju da je za odredjenih r sopstvenih vrijednosti spektar A_r zadovoljavajući, izabrati odgovarajuće projekciono upravljanje i asocirani statički regulator kao rješenje problema.

6. U slučaju da spektar A_r ne zadovoljava za odabranu rezidualnu matricu A_r koja odgovara najpodesnijem izboru Λ_r, odrediti one sopstvene vrijednosti u $\Lambda(A_r)$ koje degradiraju performansu sistema i na osnovu njihovog broja odrediti minimalnu dimenziju dinamičkog regulatora. Za date A_r, B_0 i A_{12} koji zavise samo od slobodnog sistema i rješenja u funkciji stanja sistema, riješiti

problem postavljanja polova za matricu $A_{re}=A_r+B_oP_oA_{12}$. Ovim se poboljšavaju spektralne karakteristike A_r i umjesto $\Lambda(A_r)$ dobije $\Lambda(A_{re})$ kao komplementarni spektar sistema sa dinamičkim regulatorom.

7. U slučaju da dinamički regulator minimalnog reda ne zadovoljava povećati red uzimajući u obzir broj sopstvenih vrijednosti osjetljivih na upravljanje.

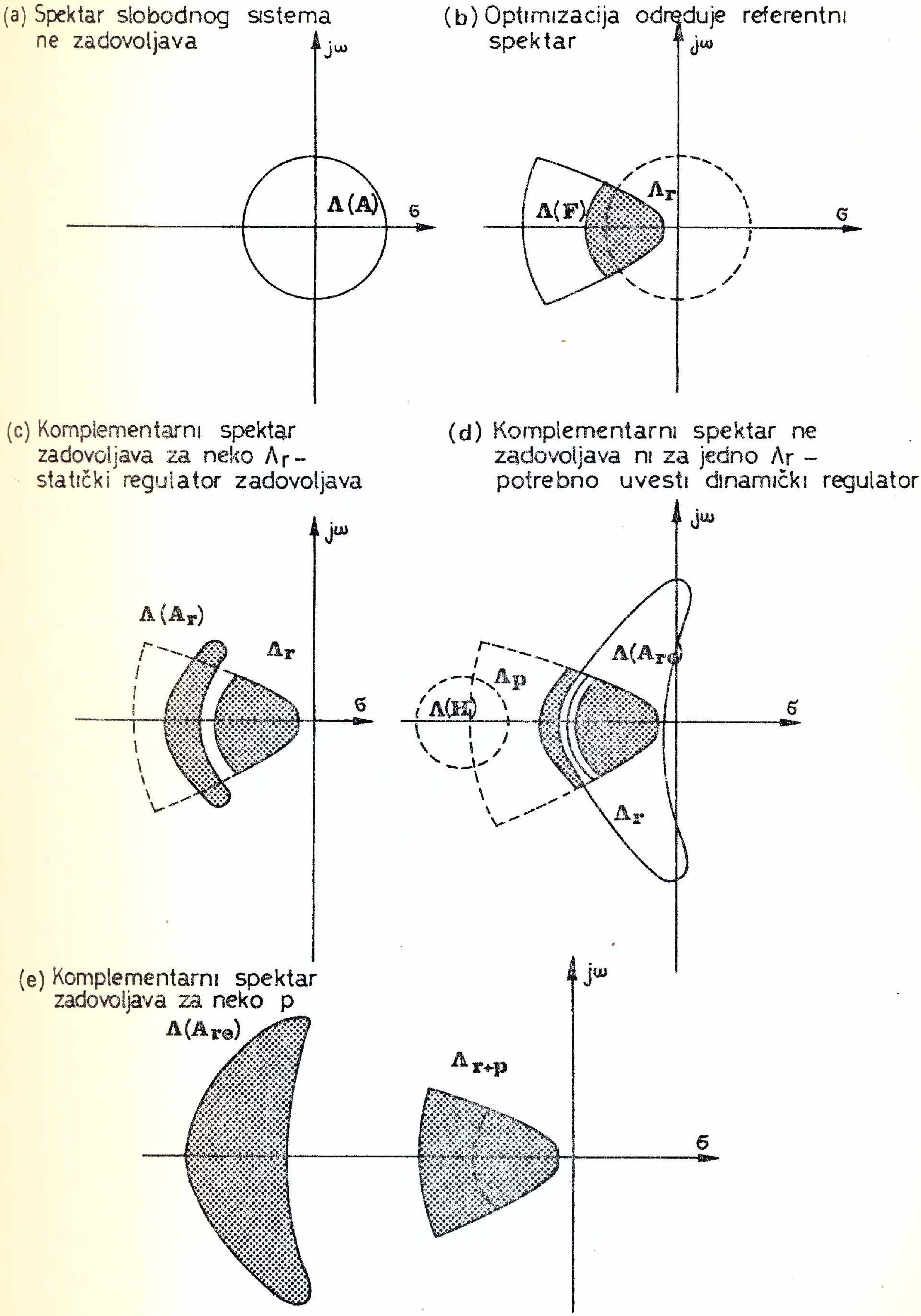
8. Sa konačno izabranim redom dinamičkog regulatora odrediti H_o i D_o.

9. Sa izabranom strukturom regulatora odrediti pojačanja u povratnoj sprezi.

10. Sa izabranim dinamičkim regulatorom vršiti simulacije koje uključuju performanse u slučaju poremećaja tipa početnih uslova, uticaja spoljnih poremećaja i uticaja nelinearnosti u modelu, koje su bile zanemarene prilikom prvobitne analize.

11. U slučaju zadovoljavajućeg rješenja izabrati kanoničnu strukturu regulatora koja je najpodesnija za praktičnu realizaciju.

Smisao metodologije najjasnije se sagledava kroz posmatranje uticaja pojedinih faza sinteze na lokaciju spektra sistema. Polazeći od pretpostavke da spektar sistema bez upravljanja nije zadovoljavajući (slika 1a) dobije se željeni referentni sistem sa zadovoljavajućim položajem spektra (slika 1b). Izborom najpovoljnijeg projekcionog upravljanja zadržava se podspektar Λ_r sa lokacijama r polova kao u referentnom spektru. Položaj polova u komplementarnom spektru $\Lambda(A_r)$ može biti zadovoljavajući (slika 1c) i tada se usvaja rezultujući statički regulator. Medjutim, položaj komplementarnog spektra može biti i nezadovoljavajući (slika 1d) i tada se na osnovu broja polova sa nezadovoljavajućim lokacijama bira dimenzija regulatora p. Ovo, nezavisno od lokacije spektra $\Lambda(H)$ dinamičkog regulatora, omogućava da se r+p sopstvenih vrijednosti zadrži na lokacijama koje su imale u referentnom spektru (slika 1e), pri čemu postoji jednoznačna relacija (do transformacije sličnosti) izmedju lokacija polova komplementarnog spektra $\Lambda(A_{re})$ i parametara regulatora H i D. Kada se odredi zadovoljavajući položaj $\Lambda(A_{re})$ odredjuju se



Slika 1. Grafički prikaz osnovne metodologije spektralne sinteze u projektovanju regulatora

prvo parametri H i D koji obezbjedjuju ovu lokaciju, a zatim i rezultujuća pojačanja regulatora K_y i K_z.

Primjer 1

Posmatrajmo sistem sedmog reda koji karakterišu sledeće matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q=\mathrm{diag}\{1,1,0,0,0,0,0\}$, $R=\mathrm{diag}\{1,1\}$

Spektar sistema bez upravljanja sadrži sledeće sopstvene vrijednosti:

$\Lambda(A)=\{-2.42,-0.32\pm j1.43,-0.56\pm j0.68,-1,0.24\}$.

Rješenje algebarske Rikatijeve jednačine M_c, i matrica stanja referentnog sistema F imaju vrijednosti:

$$M_c=\begin{bmatrix} 3.105 & 1.756 & 0.901 & 0.961 & -1.529 & -1.795 & -0.554 \\ 1.756 & 1.986 & 0.903 & 0.576 & -0.716 & -0.910 & -0.291 \\ 0.901 & 0.903 & 0.665 & 0.509 & -0.559 & -0.582 & -0.177 \\ 0.961 & 0.576 & 0.509 & 0.666 & -1.017 & -1.137 & -0.347 \\ -1.529 & -0.716 & -0.559 & -1.017 & 1.827 & 2.121 & 0.649 \\ -1.795 & -0.910 & -0.582 & -1.137 & 2.121 & 2.602 & 0.811 \\ -0.554 & -0.291 & -0.177 & -0.347 & 0.649 & 0.811 & 0.254 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.901 & -2.903 & -1.665 & 0.490 & 0.559 & 0.582 & 0.177 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.554 & 0.291 & 0.177 & -0.652 & -1.650 & -2.811 & -3.254 \end{bmatrix}$$

a spektar referentnog sistema sadrži sopstvene vrijednosti:

$\lambda_1=-0.27463$

$\lambda_{2,3}=-0.46981\pm j1.4906$

$\lambda_{4,5}=-0.61701\pm j0.68718$

$\lambda_6=-1.00$

$\lambda_7=-2.4718$

S obzirom da spektar referentnog sistema sadrži dva para konjugovano kompleksnih sopstvenih vrijednosti dopustivi parovi sopstvenih vrijednosti koji se mogu zadržati usvajanjem projekcionih upravljanja su (λ_1,λ_6), (λ_1,λ_7), (λ_6,λ_7), (λ_2,λ_3) i (λ_4,λ_5). Odredjivanjem matrice A_r koja odgovara svakoj od gornjih kombinacija dobijena je stabilna matrica za par (λ_1,λ_6). Za ovaj izbor matrice N_o i A_r definisane su izrazima

$$N_o=\begin{bmatrix}-0.2746 & 1.2746\\ 6.1241 & 7.1241\\ -3.1676 & -4.1676\\ 1.1445 & 2.1445\\ -0.5890 & -1.5890\end{bmatrix} \qquad A_r=\begin{bmatrix}0.2746 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7.1241 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 4.1676 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2.1445 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1.5890 & -1 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

a rezidualni spektar je

$\Lambda(A_r)=\{-0.08889\pm j2.657,-2.4342,-0.55669\pm j0.55414\}$.

Slijedi da spektar sistema sa projekcionim upravljanjem sadrži sopstvene vrijednosti:

$s_1^*=-0.27463$, $s_{2,3}^*=-0.08889\pm j2.6570$, $s_{4,5}^*=-0.55669\pm j0.55414$,

$s_6^*=-1$, $s_7^*=-2.4342$.

U odnosu na referentni spektar osnovna razlika je u tome što se par (λ_2,λ_3) pomjerio na lokaciju (s_2^*,s_3^*) i predstavlja relativno sporu i neprigušenu komponentu dinamike sistema.

Dakle, ovo je primjer gdje se projekcionim upravljanjem postiže stabilizacija sistema, ali gdje rezultujući spektar sistema nije zadovoljavajući. Naravno, moguće je dalje modifikovati početno rješenje statičkog regulatora i nekom od razvijenih metoda odrediti povoljnije rješenje, ili ustanoviti da ne postoji povoljnije rješenje. Alternativno, može se pristupiti sintezi dinamičkog regulatora, i ovdje se sada prikazuje način sinteze dinamičkog regulatora. U cilju poboljšanja dinamičkih karakteristika sistema uvodi se dinamički regulator prvog reda. Sada treba primijetiti da se pripajanjem regulatora, dimenzije sistema povećava na osmi red, a broj raspoloživih mjernih signala na 3. Medjutim, s obzirom da se mogu zadržati samo tri sopstvene vrijednosti matrice F, a da postoje i konjugovano kompleksni parovi, postoji samo 7 dopustivih kombinacija sopstvenih vrijednosti u spektru Λ_r:

$(\lambda_1,\lambda_6,\lambda_7)$,$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,$(\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5)$,$(\lambda_6,\lambda_2,\lambda_3)$,$(\lambda_6,\lambda_4,\lambda_5)$,

$(\lambda_7,\lambda_2,\lambda_3),(\lambda_7,\lambda_4,\lambda_5)$.

Kombinacije u kojima se zadržava (za sada nepoznati) pol regulatora nijesu uključene u dopustive s obzirom da su ekvivalentne sa kombinacijama razmatranim pri sintezi statičkog regulatora. Treba takodje primijetiti da jedina dopustiva kombinacija koja dozvoljava da se poboljša stabilno rješenje dobijeno sintezom statičkog regulatora (uz $\Lambda_r=\{\lambda_1,\lambda_6\}$) je $\Lambda_{r+p}=\{\lambda_1,\lambda_6,\lambda_7\}$. U tom slučaju poboljšano rješenje svakako postoji, s obzirom da se trivijalnim usvajanjem $D_0=0$ dobija statičko rješenje (uz $K_z=0$), te će za D_0 u okolini $D_0=0$ postojati i rješenja koja poboljšavaju dinamičke karakteristike.

Medjutim, s obzirom da kompleksni par (λ_2,λ_3) pod dejstvom statičkog regulatora odluta u neprihvatljivi dio kompleksnog domena i rezultuje u sporom, slabo prigušenom odzivu, u ovoj fazi sinteze fiksira se lokacija ovih polova na referentnim vrijednostima i usvaja $\Lambda_r=\{\lambda_2,\lambda_3\}$. Prirodno je da se kao treći pol koji bi se zadržao na referentnoj vrijednosti izabere dominantna, spora sopstvena vrijednost te je $\Lambda_{r+p}=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$. Izbor $\Lambda_r=\{\lambda_2,\lambda_3\}$ i $\Lambda_p=\{\lambda_1\}$ je ovdje jednoznačan s obzirom na konjugovano kompleksni par. Treba primijetiti da je ovim izborom onemogućeno da se prethodno statičko rješenje, i asocirana matrica A_r dalje koriste kao početno rješenje koje bi se poboljšavalo uvodjenjem dinamičkog regulatora, jer je A_r odgovaralo slučaju $\Lambda_r=\{\lambda_1,\lambda_6\}$. Umjesto toga treba odrediti nova projekciona upravljanja, te matrice N_0, A_r i B_0 koje odgovaraju izboru $\Lambda_r=\{\lambda_2,\lambda_3\}$. Sprovodjenjem neophodnih računskih operacija dobijaju se za matrice Y, Z, N_0, A_r, U, V i B_0 sledeći rezultati:

$$Y=\begin{bmatrix}10.474 & -14.058\\ 16.034 & 22.216\end{bmatrix} \qquad Z=\begin{bmatrix}-40.648 & 13.462\\ -5.382 & -10.614\\ -2.494 & -0.406\\ 1.778 & -3.526\\ 4.421 & 4.307\end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix}-0.0127\\ -0.7063\\ 0.3428\\ -0.0941\\ 0.0258\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}-0.16949\\ 0.04654\end{bmatrix}$$

$$A_r=\begin{bmatrix}-0.060 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0.407 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0.085 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0.026 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.234 & -1 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix} \qquad N_0=\begin{bmatrix}-2.44 & -0.94\\ 0.11 & -0.41\\ -0.11 & -0.08\\ 0.21 & -0.03\\ 0.06 & 0.23\end{bmatrix} \qquad B_0=\begin{bmatrix}-0.383\\ -0.668\\ 0.328\\ -0.057\\ 0.025\end{bmatrix}$$

Posmatrajmo problem izbora matrice P_0 tako da $A_{re}=A_r+B_0P_0A_{12}$ ima zadovoljavajući spektar. U ovom primjeru proizvoljno je odabrano $P_o=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$, te je dobijeno sledeće za A_{re} i $\Lambda(A_{re})$:

$$A_{re}=\begin{bmatrix}-0.443 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -0.260 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0.414 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.031 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.208 & -1 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$\Lambda(A_{re})=\{-0.24588,-0.59452\pm j0.68047,-0.39777\pm j0.48381\}$.

S obzirom na lokaciju polova može se smatrati da je usvojena vrijednost za matricu P_o zadovoljavajuća. Naravno, moguće je primjenom nekih od metoda postavljanja polova, ili iterativnim poboljšanjem rješenja na bazi osjetljivosti polova na promjenu parametara matrice P_o dalje poboljšati rješenje, ali se to ovdje ne radi s obzirom na ilustrativnu prirodu primjera.

Usvajajući spektar $\Lambda_{r+p}\cup\Lambda(A_r)$ kao zadovoljavajući pristupa se odredjivanju parametara dinamičkog regulatora. Prvo, primijetimo da su ovdje Žordanove forme za Λ_r i Λ_p date izrazima

$$\Lambda_r=\begin{bmatrix}-0.46981 & 1.49060\\ -1.49060 & -0.46981\end{bmatrix}, \quad \Lambda_p=-0.27463 .$$

Zatim se dobijaju sledeći izrazi za I+PU, L, H_o, I+UP i D_o:

$$I+UP=\begin{bmatrix}0.880 & -0.169\\ 0.046 & 1.046\end{bmatrix} \quad H_o=-0.657 \quad D_o=\begin{bmatrix}-2.035 & 0.818\end{bmatrix}$$
$$I+PU=0.877 \quad L=\begin{bmatrix}30.223 & 9.302\end{bmatrix}$$

Na kraju se odredjuje pojačanje regulatora K_y i K_z. Ovo se može učiniti koristeći neposredno izraze navedene u ovom odjeljku, a alternativno se mogu dobiti rješavajući problem odredjivanja statičkog pojačanja za prošireni sistem sa 8 koordinata stanja, s obzirom da je sada poznata struktura dinamičkog regulatora. Ovdje će se u cilju ilustracije primijeniti ovaj drugi prilaz.

Prošireni sistem karakterišu sledeće matrice:

$$A_e=\begin{bmatrix}-0.66 & -2.03 & 0.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}, \quad B_e=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$Q_e = \mathrm{diag}\{0,1,1,0,0,0,0,0\}$, $R = \mathrm{diag}\{1,1\}$

sa spektrom

$\Lambda(A_e) = \{-0.65676, -0.24719, -0.32216 \pm j1.4278, -0.5625 \pm j0.6825, -1, 0.241\}$

zatim,

$$M_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.105 & 1.756 & 0.901 & 0.961 & -1.529 & -1.795 & -0.554 \\ 0 & 1.756 & 1.986 & 0.903 & 0.576 & -0.716 & -0.910 & -0.291 \\ 0 & 0.901 & 0.903 & 0.665 & 0.509 & -0.559 & -0.582 & -0.177 \\ 0 & 0.961 & 0.576 & 0.509 & 0.666 & -1.017 & -1.137 & -0.347 \\ 0 & -1.529 & -0.716 & -0.559 & -1.017 & 1.827 & 2.121 & 0.650 \\ 0 & -1.795 & -0.910 & -0.582 & -1.137 & 2.121 & 2.601 & 0.811 \\ 0 & -0.554 & -0.291 & -0.177 & -0.347 & 0.650 & 0.811 & 0.254 \end{bmatrix}$$

$$F_e = \begin{bmatrix} -0.65 & -2.03 & 0.81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.90 & -2.90 & -1.66 & 0.49 & 0.56 & 0.58 & 0.17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.55 & 0.29 & 0.17 & -0.65 & -1.65 & -2.81 & -3.25 \end{bmatrix}$$

sa spektrom

$\Lambda(F_e) = \{-0.27463, -1, -0.6577, -0.46981 \pm j1.4906, -0.671 \pm j0.687, -2.4718\}$.

Matrice Y i Z asocirane sa sopstvenim vektorima matrice F koji odgovaraju dominantnim sopstvenim vrijednostima $\Lambda_{r+p} = \{\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5\}$ su*

$$Z = \begin{bmatrix} -0.0048 & -27.703 & -58.060 \\ -0.2705 & 14.810 & -10.017 \\ 0.1313 & 0.137 & -3.794 \\ -0.0360 & 5.590 & 1.988 \\ 0.0098 & -5.589 & 7.399 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0.3830 & -8.1880 & 46.798 \\ -0.0649 & 22.9220 & 12.971 \\ 0.0178 & -30.1030 & 28.807 \end{bmatrix}$$

te su

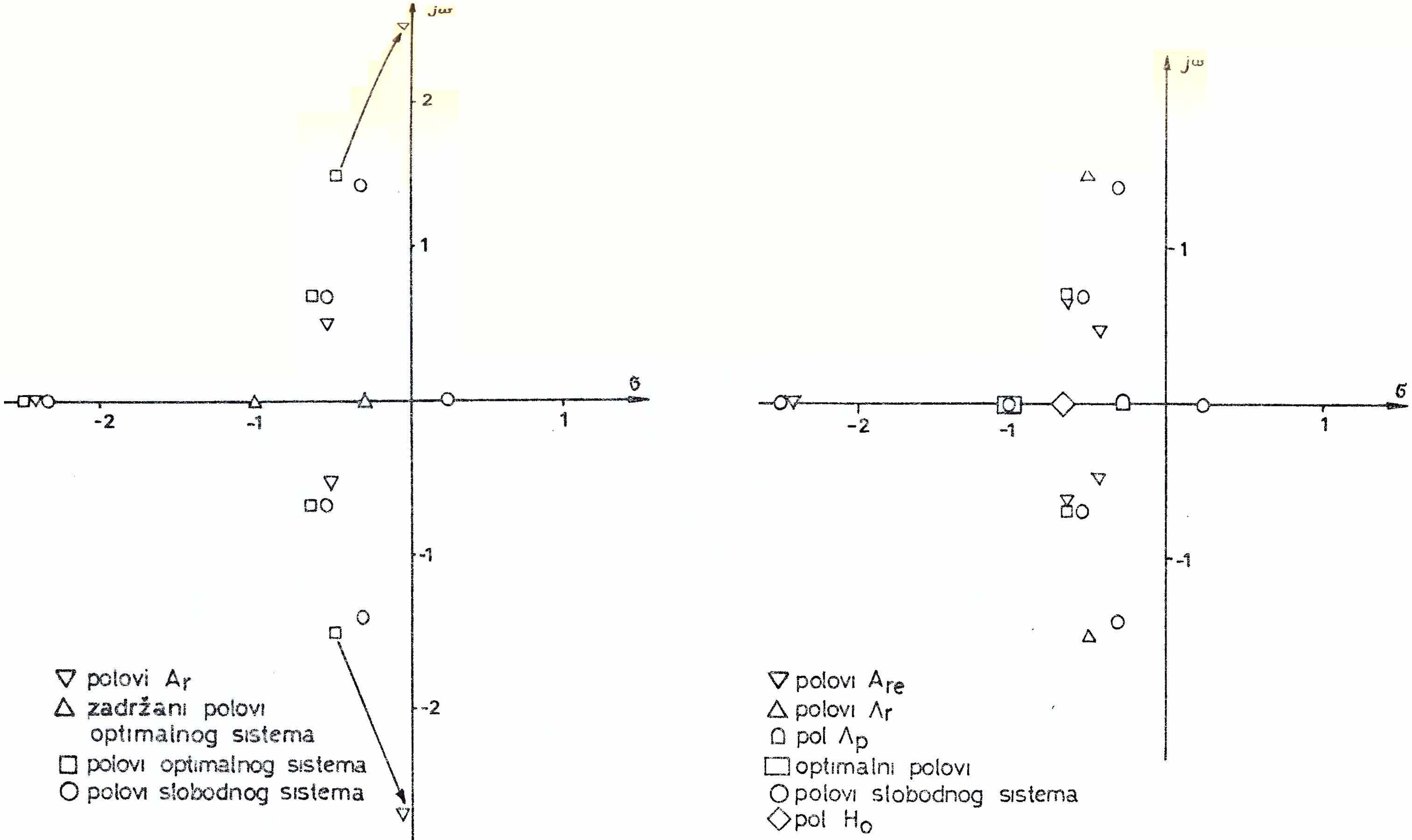
$$N = \begin{bmatrix} -0.335 & -2.059 & -0.556 \\ -0.586 & 0.779 & 0.260 \\ 0.288 & -0.435 & -0.414 \\ -0.050 & 0.267 & 0.031 \\ 0.022 & 0.037 & 0.208 \end{bmatrix}, \quad A_{re} = \begin{bmatrix} -0.443 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.260 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0.414 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.031 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.208 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

sa rezidualnim spektrom

$\Lambda(A_{re}) = \{-2.4588, -0.59453 \pm j0.68044, -0.39775 \pm j0.48386\}$.

---

*Usled programske logike došlo je do prenumeracije sopstvenih vrijednosti.



(a) statički regulator

(b) dinamički regulator

Slika 2. Polovi statičkog i dinamičkog regulatora za primjer 1.

Rezultati se, prema tome, u potpunosti poklapaju sa prethodno dobijenim, a pojačanja proširenog sistema su, shodno (3.7), (3.14) i (3.15) data izrazom

$$K_e=\begin{bmatrix}K_z & K_y\end{bmatrix}=-R^{-1}B_e^T M_e X_{r+p}(C_e X_{r+p})^{-1}.$$

Odavde se dobija

$$K_e=\begin{bmatrix}0.65843 & -0.00670 & -0.84215\\ -0.41591 & 0.51634 & 0.47450\end{bmatrix}$$

pa je

$$K_z=\begin{bmatrix}0.65843\\ -0.41591\end{bmatrix},\quad K_y=\begin{bmatrix}-0.00670 & -0.84215\\ 0.51634 & 0.47450\end{bmatrix}$$

Sopstvene vrijednosti sistema sa statičkim i dinamičkim regulatorom prikazane su na slici 2.

I.5. SINTEZA REGULATORA U NEKONTROLABILNIM SISTEMIMA

U dosadašnjem izlaganju bilo je pretpostavljeno da je sistem definisan sa (A,B,C) kontrolabilan i observabilan, medjutim, kao što je pokazano u /26,86/, ova se pretpostavka može relaksirati. U ovom odjeljku opisana metodologija sinteze generališe se na klasu observabilnih i stabilizabilnih* sistema. Pokazaće se, pored mogućnosti da se metodologija generališe na ovu klasu problema, da rezultujući dinamički regulator posjeduje osobinu separabilnosti, čiji smisao će biti objašnjen u daljem izlaganju.

Neka je dat sistem u kanoničnoj kontrolabilnoj formi

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \hat{B}_2\end{bmatrix}u,\quad \hat{y}=\begin{bmatrix}\hat{C}_1 & \hat{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix},\ \hat{x}_1\varepsilon R^{n_1},\ \hat{x}_2\varepsilon R^{n_2} \tag{5.1}$$

pri čemu je ovdje $\hat{A}_{11}$ stabilna matrica, triplet $(\hat{A}_{22},\hat{B}_2,\hat{C}_2)$ je kontrolabilan i observabilan, a par $(\hat{A}_{11},\hat{C}_1)$ je observabilan. U cilju primjene opisane metode sinteze potrebno je izvršiti transformaciju sistema tako da se matrica izlaza dovede u oblik $C=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}$. Usvajajući r_2=rang $\hat{C}_2$ neka je S proizvoljna transformacija prostora

*Sistem je "stabilizabilan" ako su sve nestabilne sopstvene vrijednosti matrice A kontrolabilne.

izlaza maksimalnog ranga koja zadovoljava uslov

$$\hat{SC}_2=\begin{bmatrix}0\\ \hat{C}_{22}\end{bmatrix},\ \text{rang}\ \hat{C}_{22}=r_2 \qquad (5.2)$$

Tada, pod dejstvom transformacije $y=S\hat{y}$, matrica izlaza poprima oblik

$$\hat{C}=\begin{bmatrix}\hat{C}_{11} & 0\\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22}\end{bmatrix},\ \hat{C}_{11}\varepsilon R^{r_1xr_1}\ ,\ \hat{C}_{22}\varepsilon R^{r_2xr_2}\ ,\ r_1+r_2=r \qquad (5.3)$$

Šta više, ako su T_1 i T_2 proizvoljne matrice takve da je transformacija

$$x'\equiv\begin{bmatrix}x_1^{\bar{c}}\\ x_2^{\bar{c}}\\ x_1^{c}\\ x_2^{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{C}_{11} & 0\\ T_1 & \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22}\\ 0 & T_2\end{bmatrix}\hat{x} \qquad (5.4)$$

invertibilna, tada se sistem može izdijeliti na sledeći način:

$$\dot{x}'=\begin{bmatrix}A'_{11} & 0\\ A'_{21} & A'_{22}\end{bmatrix}x'+\begin{bmatrix}0\\ B'_2\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}I_{r_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0\end{bmatrix}x' \qquad (5.5)$$

$$A'_{11}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ A'_{21}=\begin{bmatrix}A_{31} & A_{32}\\ A_{41} & A_{42}\end{bmatrix},\ A'_{22}=\begin{bmatrix}A_{33} & A_{34}\\ A_{43} & A_{44}\end{bmatrix},B'_2=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

Posmatrajmo sada rješenje problema linearnog regulatora stanja za sistem (5.5), pri čemu je radi jednostavnosti usvojeno R=I. Particija matrice M_c koja predstavlja rješenje algebarske Rikatijeve jednačine saobrazno particiji sistema dovodi do sledeće tri matrične jednačine:

$$A'^T_{22}M_{22}+M_{22}A'_{22}-M_{22}B'_2B'^T_2M_{22}+Q_{22}=0 \qquad (5.6a)$$

$$(A'^T_{22}-M_{22}B'_2B'^T_2)M_{21}+M_{21}A'_{11}+(Q_{21}+M_{22}A'_{21})=0 \qquad (5.6b)$$

$$A_{11}'^T M_{11} + M_{11} A_{11}' + (A_{21}'^T M_{21} + M_{21}^T M_{21} + M_{21}^T A_{21}' - M_{21}^T B_2' B_2'^T M_{21} + Q_{11}) = 0 \qquad (5.6c)$$

Optimalno upravljanje je

$$u = -\begin{bmatrix} K_1^{\bar{c}} & K_2^{\bar{c}} & K_1^c & K_2^c \end{bmatrix} x', \quad \begin{bmatrix} K_1^{\bar{c}} & K_2^{\bar{c}} \end{bmatrix} = B_2'^T M_{21}, \quad \begin{bmatrix} K_1^c & K_2^c \end{bmatrix} = B_2'^T M_{22} \qquad (5.7)$$

a matrica sistema referentnog rješenja je

$$F = \begin{bmatrix} A_{11}' & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_{21} = A_{21}' - B_2' \begin{bmatrix} K_1^{\bar{c}} & K_2^{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ F_{22} = A_{22}' - B_2' \begin{bmatrix} K_1^c & K_2^c \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad (5.8)$$

Primijetimo da je (5.6a) rješenje Rikatijeve jednačine za podsistem (A_{22}', B_2') sa težinskom matricom Q_{22}. Slijedi da optimalno upravljanje ima osobinu da je submatrica F_{22} referentnog sistema identična sa rješenjem problema regulatora stanja za sistem (A_{22}', B_2') sa težinskom matricom Q_{22}, nezavisno od strukture ostalih submatrica u sistemu (5.5) i nezavisno od težinskih matrica Q_{21} i Q_{11}. Slijedi da optimalni regulator stanja u sistemu (5.5) obezbedjuje istu dinamiku podsistema A_{22}' kao i u slučaju kada ne postoji spoljni ulaz u ovaj podsistem ($A_{21}'=0$) iz nekontrolabilnog podsistema. Sada se, medjutim, troši dodatna energija na postavljanje sopstvenih vektora (i shodno tome na podešavanje odziva) nekontrolabilnog dijela sistema, iako su sopstvene vrijednosti ovog podsistema nekontrolabilne. Ovaj zaključak važi čak i u slučaju da se u kriterijumu ne otežavaju nekontrolabilne koordinate stanja, odnosno da je $Q=dg\{0,Q_{22}\}$. Uvodeći permutaciju komponenti vektora stanja definisanu izrazom

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1^{\bar{c}^T} & x_1^{c^T} & x_2^{\bar{c}^T} & x_2^{c^T} \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

sistem se svodi na oblik

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ A_{31} & A_{33} & A_{32} & A_{34} \\ A_{21} & 0 & A_{22} & 0 \\ A_{41} & A_{43} & A_{42} & A_{44} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x \qquad (5.10)$$

Osnovni rezultat generalizacije metodologije na nekontrolabilne sisteme može se izraziti na sledeći način:

Teorema I.5.1. Neka težinske matrice (Q,R) definišu optimalni regulator stanja za observabilan, stabilizabilan sistem (5.10). Tada za dovoljno veliko p, $1 \leq p \leq n_2-r_2$, postoji dinamički kompenzator dimenzije p koji stabiliše sistem, i pri tome zadržava (r_2+p)-dimenzioni invarijantni podprostor referentnog sistema asociran sa kontrolabilnim sopstvenim vrijednostima i r_1-dimenzioni invarijantni podprostor asociran sa nekontrolabilnim sopstvenim vrijednostima. Dimenzija regulatora i parametri regulatora odredjuju se rješavanjem redukovanog problema postavljanja polova reda n_2-r_2, a regulator se odlikuje osobinom separabilnosti u smislu da je

$$u(y)=u^c(x_1^c)+u^{\bar{c}}(x_1^{\bar{c}}) \tag{5.11a}$$

$$u^c=K_z^c z^c+K_y^c x_1^c, \quad \dot{z}^c=H_o^c z^c+D_o^c x_1^c \tag{5.11b}$$

$$u^{\bar{c}}=K_z^{\bar{c}} z^{\bar{c}}+K_y^{\bar{c}} x_1^{\bar{c}}, \quad \dot{z}^{\bar{c}}=H_o^{\bar{c}} z^{\bar{c}}+D_o^{\bar{c}} x_1^{\bar{c}} \tag{5.11c}$$

pri čemu je regulator asociran sa kontrolabilnim dijelom identičan regulatoru koji bi se dobio u odsustvu nekontrolabilnog dijela sistema.

Dokaz. Neka su kontrolabilne i nekontrolabilne sopstvene vrijednosti referentnog sistema definisane izrazima

$$\Lambda(F_{22})=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n_2}, \qquad \Lambda(A_{11}^{\prime})=\{\sigma_i\}_{i=1}^{n_1} \tag{5.12}$$

U bazisu saglasnom prikazu sistema u obliku (5.10) sopstveni vektori asocirani sa kontrolabilnim sopstvenim vrijednostima imaju strukturu

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \phi_3^i \\ 0 \\ \phi_4^i \end{bmatrix}, \quad F_{22}v_i^c=v_i^c\lambda_i, \quad v_i^c=\begin{bmatrix} \phi_3^i \\ \phi_4^i \end{bmatrix}, \; i=1,\dots,n_2 \tag{5.13}$$

dok sopstveni vektori asocirani sa nekontrolabilnim sopstvenim vrijednostima imaju strukturu

$$\begin{bmatrix}\omega_1^i\\ \omega_3^i\\ \omega_2^i\\ \omega_4^i\end{bmatrix},\quad \begin{array}{l} A_{11}^{*}u_i^{\bar{c}}=u_i^{\bar{c}}\sigma_i \quad , \quad u_i^{\bar{c}}=\begin{bmatrix}\omega_1^i\\ \omega_2^i\end{bmatrix}, \quad v_i^{\bar{c}}=\begin{bmatrix}\omega_3^i\\ \omega_4^i\end{bmatrix} \\ F_{12}u_i^{\bar{c}}+F_{22}v_i^{\bar{c}}=v_i^{\bar{c}}\sigma_i \quad , \quad i=1,\dots,n_1 \end{array} \tag{5.14}$$

U sintezi dinamičkog regulatora neophodno je odrediti matrice Y,Z i odrediti spektar matrice A_{re}. S obzirom da vektori v_i^c čine bazis prostora R^{n_2} moguće je izabrati takav redosled da vektori ϕ_3^i, $i=1,\dots,r_2$ čine bazis prostora R^{r_2}. Na analogan način moguće je izabrati takav redosled da vektori ω_1^i, $i=1,\dots,r_1$ čine bazis prostora R^{r_1}. U cilju da se obezbijedi invertibilnost matrice Y i pri tome zadrži što je moguće više sopstvenih vektora asociranih sa kontrolabilnim sopstvenim vrijednostima, definišimo u saglasnosti sa (3.16) sledeće matrice

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1^{\bar{c}} & 0\\ Y_2^{\bar{c}} & Y_2^c\end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l}Y_1^{\bar{c}}=\left[\omega_1^1\dots\omega_1^{r_1}\right]\\ Y_2^{\bar{c}}=\left[\omega_3^1\dots\omega_3^{r_1}\right]\end{array} \quad Y_2^c=\left[\phi_3^1\dots\phi_3^{r_2}\right]$$

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1^{\bar{c}} & 0\\ Z_2^{\bar{c}} & Z_2^c\end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l}Z_1^{\bar{c}}=\left[\omega_2^1\dots\omega_2^{r_1}\right]\\ Z_2^{\bar{c}}=\left[\omega_4^1\dots\omega_4^{r_1}\right]\end{array} \quad Z_2^c=\left[\phi_4^1\dots\phi_4^{r_2}\right] \tag{5.15}$$

$$U=\left[u_1\dots u_{n_2-r_2}\right], \quad V=\left[v_1\dots v_{n_2-r_2}\right]$$

$$u_i=\begin{bmatrix}0\\ \phi_3^{i+r_2}\end{bmatrix}, \quad v_i=\begin{bmatrix}0\\ \phi_4^{i+r_2}\end{bmatrix}, \quad i=1,\dots,n_2-r_2$$

Iz (4.12) i (4.7) slijedi da je

$$A_r=\begin{bmatrix}A_{22}-N_o^{\bar{c}}A_{12} & 0\\ A_{42}-(N_{21}A_{12}+N_o^cA_{32}) & A_{44}-N_o^cA_{34}\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

pri čemu je

$$N_0^{\bar{c}}=Z_1^{\bar{c}}(Y_1^{\bar{c}})^{-1}, \quad N_0^c=Z_2^c(Y_2^c)^{-1}, \quad N_{21}=Z_2^{\bar{c}}(Y_1^{\bar{c}})^{-1}-Z_2^c(Y_2^c)^{-1}Y_2^{\bar{c}}(Y_1^{\bar{c}})^{-1} \tag{5.17}$$

Zadržavajući samo kontrolabilne sopstvene vrijednosti u Λ_p dobija se u slučaju i=p,

$$b_i^c=\left[\phi_3^{i+r_2}-N_0^c\phi_4^{i+r_2}\right], \quad B_i=\left[b_1^c\ldots b_i^c\right] \tag{5.18}$$

Problem postavljanja polova se tada svodi na odredjivanje matrice $P_0=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}$ tako da matrica A_{re}

$$A_{re}=A_r+\begin{bmatrix}0\\B_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{12} & 0\\A_{32} & A_{34}\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

ima zadovoljavajući spektar. Primijetimo da A_{re} sadrži nekontrolabilan podsistem $A_{22}-N_0^{\bar{c}}A_{12}$ čiji spektar sačinjava n_1-r_1 nekontrolabilnih sopstvenih vrijednosti uključenih u Λ_r. Komplementaran podspektar A_{re} podešava se rješavanjem problema postavljanja polova za redukovani sistem definisan matricama $(A_{44}-N_0^cA_{34},B_i,A_{34})$. S obzirom da vektori b_i^c prekrivaju prostor $R^{n_2-r_2}$, ovaj problem ima rješenje za neko $p\leq n_2-r_2$.

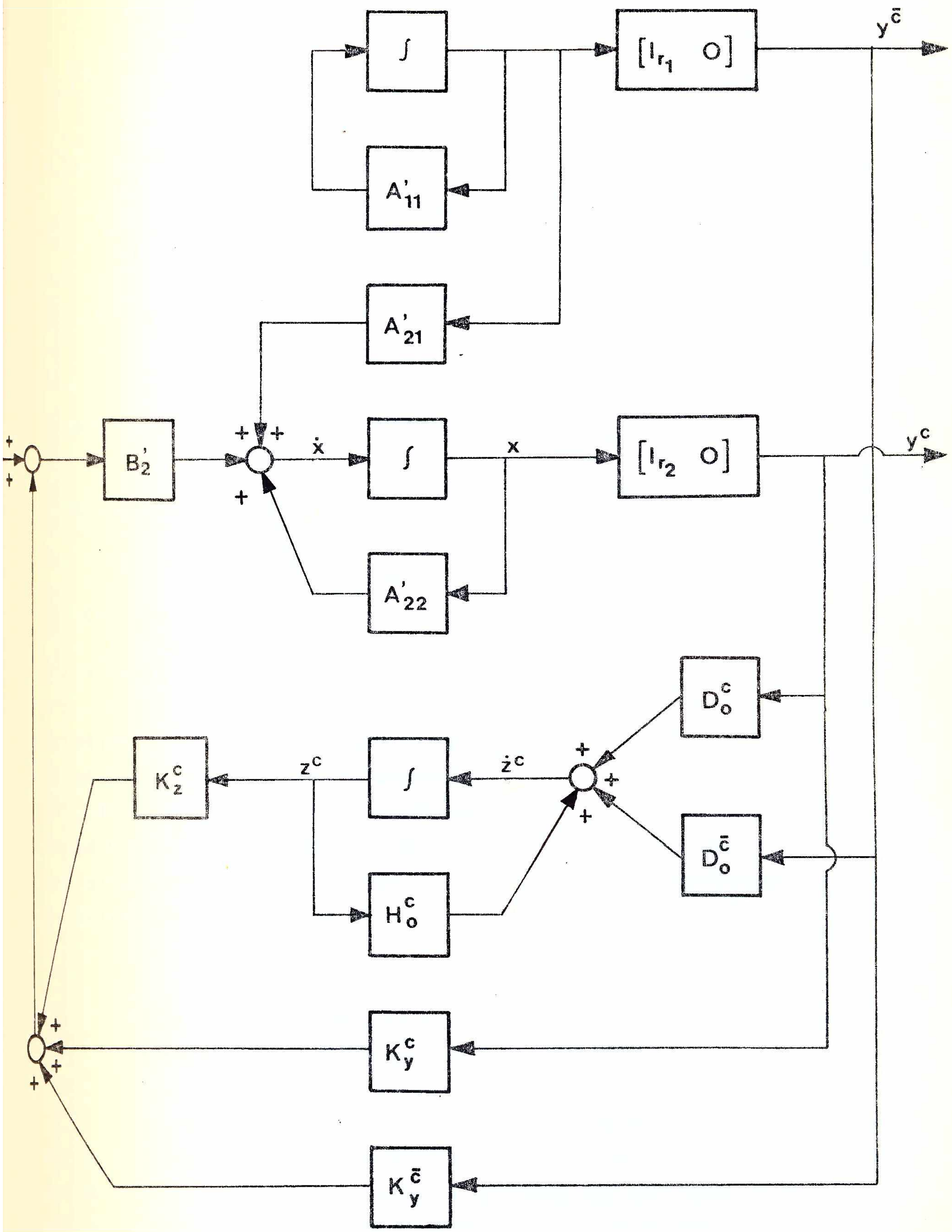
Ako se zadovoljavajuće rješenje ovog problema dobije za odredjeno P_2 tada se parametri dinamičkog regulatora odredjuju iz (4.19) i (4.20), uz $P_0=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}$, pri čemu je P_1 proizvoljno. Neka je

$$U_2=\left[\phi_3^{1+r_2}\ldots\phi_3^{p+r_2}\right], \quad V_2=\left[\phi_4^{1+r_2}\ldots\phi_4^{p+r_2}\right]$$
$$B_0=\left[b_1^c\ldots b_p^c\right], \quad \Lambda_r=dg\{\Lambda_{r1},\Lambda_{r2}\} \tag{5.20}$$

pri čemu Λ_{r_1} i Λ_{r_2} odgovaraju skupu r_1 nekontrolabilnih i skupu r_2 kontrolabilnih sopstvenih vrijednosti koje su zadržane iz referentnog sistema u prvoj fazi sinteze. Tada slijedi da je

$$u=K_z^cz^c+\begin{bmatrix}K_y^{\bar{c}} & K_y^c\end{bmatrix}y, \quad \dot{z}^c=H_0^cz^c+\begin{bmatrix}D_0^{\bar{c}} & D_0^c\end{bmatrix}y \tag{5.21}$$

pri čemu je



Slika 3. **Struktura regulatora za nekontrolabilne sisteme**

$$H_0^c=\left[\Lambda_p-L^c\Lambda_{r_2}(Y_2^c)^{-1}U_2\right](I+P_2U_2)$$

$$D_0^c=(L^c\Lambda_{r_2}-\Lambda_pL^c)(Y_2^c)^{-1}(I+U_2P_2)$$

$$D_0^{\bar{c}}=\left[L^{\bar{c}}\Lambda_{r_1}-L^c\Lambda_{r_2}(Y_2^c)^{-1}Y_2^{\bar{c}}\right](Y_1^{\bar{c}})^{-1}+\left[L^c\Lambda_{r_2}(Y_2^c)^{-1}U_2-\Lambda_p\right]P_1 \qquad (5.22)$$

$$L^c=(I+P_2U_2)^{-1}P_2Y_2^c, \quad L^{\bar{c}}=(I+P_2U_2)^{-1}(P_1Y_1^{\bar{c}}+P_2Y_2^{\bar{c}})$$

i

$$K_z^c=K_2^cN_p^c, \quad N_p^c=B_o(I+P_2U_2), \quad K_y^c=K_1^c+K_2^cN_r^c, \quad N_r^c=N_o^c-B_oP_2$$

$$K_y^{\bar{c}}=K_1^{\bar{c}}+K_2^{\bar{c}}N_o^{\bar{c}}+K_2^c(N_{21}-B_oP_1) \qquad (5.23)$$

Iz ovih relacija se neposredno dobija struktura (5.11), pri čemu je

$$y^T=\left[x_1^{\bar{c}^T} \quad x_1^{c^T}\right] \qquad (5.24)$$

Primijetimo da je regulator u izrazu (5.11b) upravo regulator koji bi se dobio kada bi kontrolabilni i observabilni sistem $(A_{22}^{\prime}, B_2^{\prime}, \left[I_{r_2} \quad 0\right])$ radio u izolovanom režimu. Drugi regulator, dat izrazom (5.11c) predstavlja modifikaciju sistema upravljanja neophodnu usled prisustva nekontrolabilnog sistema. Struktura regulatora prikazana je na slici 3.

I.6. SINTEZA MULTIVARIJABILNIH PROPORCIONALNO-INTEGRALNIH REGULATORA PRIMJENOM METODE PROJEKCIONOG UPRAVLJANJA

Metode sinteze izložene u prethodnim odjeljcima pogodne su za primjene u kojima se postavlja problem regulacije koji nastaje usled devijacije početnog stanja sistema od željene nominalne vrijednosti, odnosno regulacije spoljnih poremećaja impulsnog tipa, te se kao prvenstveni problem postavlja obezbedjenje željene dinamike prelaznog režima. Opisana rješenja, medjutim, ne zadovoljavaju kada na sistem djeluju konstantni ili sporo promjenljivi spoljni poremećaji. Mada se ovom problemu u mnogim slučajevima može prići na način opisan u odjeljku o regulaciji nekontrolabilnih sistema, u slučaju da se može pretpostaviti da su poremećaji konstantni, od teoretskog je i praktičnog interesa sagledati način na koji se razvijene metode mogu generalisati na sintezu proporcionalno-integralnih regulatora koji su široko korišćeni u praksi za otklanjanje neželjenih efekata konstantnih poremećaja.

Od kako je Johnson /109/ formulisao problem linearnog regulatora sa konstantnim poremećajem mnogi autori su razmatrali problem sinteze proporcionalno-integralnih (PI) i proporcionalno-integralno-diferencijalnih (PID) regulatora za multivarijabilne sisteme u cilju zadržavanja dobrih osobina ovih struktura regulatora u odnosu na otklanjanje uticaja konstantnih spoljnih poremećaja, praćenja konstantnih referentnih ulaza u ustaljenom stanju i smanjenja osjetljivosti odziva na varijacije parametara sistema, uz istovremeno zadovoljenje drugih željenih karakteristika vezanih primarno za dinamičko ponašanje sistema. Od postupaka koji se zasnivaju na metodama postavljanja polova sistema ovdje navodimo strukture predložene u radovima /110-113/.

Sinteza optimalnih regulatora sa integralnim dejstvom je takodje obradjena u više radova. U nekim, /114,115/, se polazi od pretpostavke da je potpuni vektor stanja sistema dostupan za mjerenje, direktno ili posredstvom observera. U drugim, /117-120/, generališe se prilaz Levina /15/ na sisteme sa konstantnim poremećajima što rezultuje u PI i PID regulatorima koji su optimalni u odnosu na izabrani kriterijum optimalnosti. Medjutim, s obzirom da se analitičko rješenje problema ne može izvesti dalje od potrebnih uslova za minimum kriterijuma, ove metode sinteze svode se na uspostavljanje odredjenog iterativnog numeričkog postupka za rješavanje potrebnih uslova koji, pod uslovom da konvergira, odredjuje optimalno rješenje, pod uslovom da ono postoji. Prije nego što se iterativnom procedurom odredi rješenje, dakle, ne može se ustanoviti ni da li ono postoji, niti kakve će biti osobine rezultujućeg regulisanog sistema.

U ovom i narednim odjeljcima metod sinteze zasnovan na projekcionim upravljanjima se generališe na probleme upravljanja u prisustvu spoljnih poremećaja i opisuje se način primjene metode u sintezi PI, PID i generalisanih PID regulatora, koji predstavljaju dinamičke regulatore niskog reda sa integralnim dejstvom. Opisane metode omogućavaju da se na sistematski način poboljšavaju performanse sistema sa povratnom spregom dok se ne odredi zadovoljavajuće rješenje problema.

Posmatrajmo problem sinteze regulatora za kontrolabilan i observabilan sistem

$$\dot{x}=Ax+Bu+d \ , \ x\in R^n, \ u\in R^m, \ d\in R^n \tag{6.1a}$$

$$y=Cx \ , \ y\in R^r \tag{6.1b}$$

u kome je d nepoznati konstantni spoljni poremećaj. S obzirom na prisustvo spoljnih poremećaja upravljanje se realizuje u obliku multivarijabilnog PI regulatora strukture

$$u=K_p y+K_i \int y dt \tag{6.2}$$

uz pretpostavku da su zadovoljena sledeća dva uslova:

(a) $\text{rang}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r$

(b) upravljanje (6.2) stabiliše sistem (6.1).

Poznato je /111,115/ da struktura regulatora implicitna u izrazu (6.2) obezbjedjuje, nezavisno od vrijednosti K_p i K_i da sistem sa povratnom spregom posjeduje sledeće osobine:

(i) vrijednost izlaza y u ustaljenom stanju, ne zavisi od spoljnjeg poremećaja ili varijacija parametara sistema;

(ii) ako se sistem pobudi konstantnim referentnim signalom $v\in R^r$, izlaz sistema prati v u ustaljenom stanju.

Primijetimo da uslov (a) implicira da je dimenzija vektora upravljanja jednaka ili veća od dimenzije vektora izlaza, i ovdje će se pretpostaviti da je $m\geq r$. Primijetimo dalje da se osobina (ii) obezbedjuje time što se u strukturi regulatora pod integralnim dejstvom koristi signal greške e=y-v, umjesto izlaz y. Primijetimo, konačno, da se problem upravljanja linearnog sistema u prisustvu konstantnih poremećaja može i alternativno razmatrati, uvodjenjem podesne transformacije koordinata stanja, ali se ovaj prilaz ovdje ne koristi, te se neće detaljnije obrazlagati. Navedimo jedino da se ovom transformacijom problem svodi na problem upravljanja bez spoljnih poremećaja, ali sa precizno definisanim početnim uslovima u transformisanom sistemu.

Za zadati sistem (6.1) i strukturu regulatora (6.2) problem je da se odrede pojačanja K_p i K_i tako da rezultujući sistem sa povratnom spregom posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike, u odnosu na odabrani kvadratni kriterijum.

U cilju primjene razvijene metodologije, uvedimo nove koordinate stanja definisane relacijom

$$\dot{w}=y \tag{6.3}$$

i definišimo prošireni vektor stanja $x_e^T=\begin{bmatrix} w^T & x^T \end{bmatrix}$. Uz prirodnu pretpostavku da se w može mjeriti definišimo prošireni mjerni vektor

$$y_e^T=\begin{bmatrix} w^T & y^T \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Prošireni dinamički sistem poprima oblik

$$\dot{x}_e=A_e x_e+B_e u+G_e d \tag{6.5a}$$

$$y_e=C_e x_e \tag{6.5b}$$

uz

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B_e=\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad C_e=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad G_e=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

a zakon upravljanja (6.2) postaje

$$u=K_e y_e \tag{6.7}$$

uz $K_e=\begin{bmatrix} K_i & K_p \end{bmatrix}$, $K_e \varepsilon R^{rx2r}$. Definišući kriterijum optimalnosti kao

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x_e^T Q_e x_e+u^T R u)dt \tag{6.8}$$

problem sinteze PI regulatora svodi se na sledeći problem sinteze statičkog regulatora: odrediti pojačanje K_e tako da upravljanje (6.7) bude optimalno u odnosu na (6.8). Primijetimo da je sada referentno rješenje moguće odrediti na dva načina, zavisno od izabrane strukture matrice Q_e. Ako je $Q_e=dg\{0\ ,\ Q\}$, $Q\varepsilon R^{nxn}$ tada će referentni sistem biti identičan sa sistemom koji bi se dobio kada bi se rješavao problem upravljanja za sistem bez spoljnih poremećaja, i tada integratori definisani relacijom (6.3) predstavljaju dinamički regulator unaprijed izabrane strukture. S druge strane integratori su uključeni sa eksplicitnim ciljem da se poboljšaju karakteristike sistema u ustaljenom stanju u slučaju da djeluju spoljni poremećaji, i njihovo uvodjenje može negativno djelovati na dinamičke karakteristike sistema, te ima osnova otežavati i koordinate stanja integratora. Formalno posmatrano, oba prilaza su moguća i jednostavno se analitički primjenjuju. Ovdje se medjutim, usvaja drugi prilaz s obzirom da omogućava da se na racionalan način uzme u obzir uticaj integratora i na regulaciju i na stabilizaciju sistema.

Primjenjujući prilaz izložen u prethodnim odjeljcima, prvo se za prošireni sistem odredjuje referentni sistem

$$F=A_e-SM, \quad S=B_eR^{-1}B_e^T \tag{6.9}$$

Referentni sistem karakteriše skup sopstvenih vrijednosti λ_i, $i=1,\dots,n+r$, i asociranih sopstvenih vektora u_i, $i=1,\dots,n+r$. Pretpostavljajući, bez gubitka opštosti, da se sistem nalazi u obliku u kome je $C_e=\begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \end{bmatrix}$ i s obzirom na 2r raspoloživih mjerenja, moguće je zadržati 2r-dimenzioni invarijantni podprostor. U tom smislu potrebno je formirati $X=\begin{bmatrix} u_1 \dots u_{2r} \end{bmatrix}$, $X\varepsilon R^{(n+r)x2r}$, birajući 2r sopstvenih vektora, izvršiti particiju X u obliku $X=\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$, $Y\varepsilon R^{2rx2r}$, $Z\varepsilon R^{(n-r)x2r}$, i definisati projekciono upravljanje

$$u=-R^{-1}B_e^TMP_ix_e \tag{6.10}$$

uz

$$P_i=\begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ N_o & 0 \end{bmatrix}, \quad N_o=ZY^{-1} \tag{6.11}$$

Sistem sa zatvorenom povratnom spregom dobija se u obliku

$$\dot{x}_e=(A_e-SMP_i)x_e \tag{6.12}$$

i zadržava R{X} kao invarijantan podprostor. Rezidualni spektar čine sopstvene vrijednosti matrice

$$A_{ri}=A_{22}-N_oA_{12}, \quad A_{ri}\varepsilon R^{(n-r)x(n-r)} \tag{6.13}$$

pri čemu su A_{12}, A_{22} blok matrice odgovarajuće particije matrice A_e:

- uvesti p-dimenzioni dinamički regulator i na taj način poboljšati dinamičke karakteristike regulisanog sistema. Ovaj prilaz se ovdje naziva problem sinteze generalisanog PID regulatora, a, u osnovi, predstavlja problem sinteze dinamičkog regulatora niskog reda sa integralnim dejstvom. Ovaj problem će biti obradjen u odjeljku I.8.

I.7. SINTEZA PID REGULATORA

Osnovni razlog za razmatranje problema sinteze PID regulatora je rasprostranjenost PID regulatora u praksi. No, i pored nesumnjive široke popularnosti PID regulatora, posebno u procesnoj industriji, relativno malo je učinjeno u primjeni rezultata moderne teorije upravljanja na sintezu PID regulatora. Postoje pokušaji sinteze optimalnih PID regulatora za multivarijabilne sisteme /118,119/ ali se analitičko razmatranje problema završava na formiranju potrebnih uslova za minimum , i dalje rješenje se svodi na primjenu različitih iterativnih numeričkih postupaka za rješenje potrebnih uslova.

U ovom odjeljku pristupa se sintezi PID regulatora primjenom principa projekcionih upravljanja. Posmatrajmo sistem (6.5) i uvedimo r novih mjerenja diferencirajući postojeće izlaze sistema, odnosno proširimo vektor izlaza (6.5b) sa mjerenjima

$$y_1=\dot{y}=C\dot{x}=CAx+CBu+Cd \tag{7.1}$$

tako da vektor izlaza postaje

$$y_a^T=\begin{bmatrix} y_e^T & y_1^T \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Jednačina sistema (6.5a) ostaje neizmijenjena dok jednačina mjernih signala postaje

$$y_a=C_a x_e+D_a u+F_a d \tag{7.3}$$

pri čemu je

$$C_a=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \\ 0 & CA \end{bmatrix}, \quad D_a=\begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix}, \quad F_a=\begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Sistem se sada opisuje jednačinama

$$\begin{aligned} \dot{x}_e&=A_e x_e+B_e u+G_e d \\ y_a&=C_a x_e+D_a u+F_a d \end{aligned} \tag{7.5}$$

a upravljanje u funkciji dostupnih mjerenja ima oblik

$$u=K_a y_a \tag{7.6}$$

ali se, u osnovi, implementira u obliku PID regulatora:

$$u=K_p y+K_i \int y dt+K_d \dot{y} \tag{7.7}$$

odnosno, K_a se dekomponuje u obliku:

$$K_a=\begin{bmatrix} K_i & K_p & K_d \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Problem sinteze PID regulatora je prema tome sveden na ekvivalentan problem sinteze statičkog regulatora izlaza. U ovom slučaju, medjutim, neophodno je izvršiti dodatnu transformaciju da bi problem bio ekvivalentan problemu definisanom u odjeljku I.2. Primjenom (7.3) u (7.6) dobija se

$$u=(I-K_a D_a)^{-1} K_a (C_a x_e+F_a d) \tag{7.9}$$

a zamjenom u (7.5) dobija se

$$\dot{x}_e=\left[A_e+B_e(I-K_a D_a)^{-1} K_a C_a\right] x_e+\left[G_e+B_e(I-K_a D_a)^{-1} K_a F_a\right] d \tag{7.10}$$

pri čemu je matrica $(I-K_a D_a)$ "skoro svuda" regularna /121/. Definišući novu matricu pojačanja izrazom

$$\tilde{K}=(I-K_a D_a)^{-1} K_a \tag{7.11}$$

originalni problem se sada može postaviti na sledeći način:
Za sistem oblika

$$\dot{x}_e=A_e x_e+B_e u+G_e d \tag{7.12a}$$

$$y_a=C_a x_e+F_a d \qquad (7.12b)$$

i upravljanje strukture

$$u=\tilde{K}y_a$$

odrediti optimalno $\tilde{K}$ u odnosu na kriterijum (6.8). Struktura sistema sa povratnom spregom (7.10)i sada garantuje otklanjanje uticaja spoljnih perturbacija na originalni vektor izlaza u ustaljenom stanju, a omogućava direktnu primjenu prilaza opisanog u odjeljku I.2 u cilju podešavanja dinamičkih karakteristika sistema.

Pretpostavljajući da je sistem dat u bazisu u kome je $C_a=\begin{bmatrix} I_{3r} & 0\end{bmatrix}$* sada se odredjuje projekciono upravljanje koje zadržava 3r-dimenzioni invarijantni podprostor referentnog sistema (6.9). U tom smislu formira se matrica $X_2=\begin{bmatrix} u_1 \dots u_{3r}\end{bmatrix}, X_2\varepsilon R^{(n+r)x3r}$, izvrši particija X_2 u obliku

$$X_2=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad Y_1\varepsilon R^{3rx3r}, \quad Z_1\varepsilon R^{(n-2r)x3r}$$

i odredjuje matrica $N_1=Z_1Y_1^{-1}$. Zatim se vrši particija matrice A_e u obliku

$$A_e=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 3r \\ n-2r \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3r & n-2r \end{array} & \end{array} \qquad (7.13)$$

i odredjuje rezidualni spektar sistema sa zatvorenom povratnom spregom, koji se sastoji iz sopstvenih vrijednosti matrice A_{rd} pri čemu je

$$A_{rd}=A'_{22}-N_1A'_{12}, \qquad A_{rd}\varepsilon R^{(n-2r)x(n-2r)} \qquad (7.14)$$

Dovoljan uslov za egzistenciju optimalnog regulatora je da spektar A_{rd} pripada lijevoj poluravni kompleksnog domena. Ako je ovaj uslov zadovoljen za odredjeni 3r-dimenzioni invarijantni podprostor referentnog sistema, i ako je rezidualni spektar zadovoljavajući, tada je optimalno pojačanje definisano izrazom

---

*Na ovaj bazis se jednostavno prelazi transformacijom sistema kao u ilustrativnom primjeru iz ovog odjeljka.

$$\tilde{K}=-R^{-1}B_e^T MP_d \qquad (7.15)$$

uz

$$P_d=\begin{bmatrix} I_{3r} & 0 \\ N_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

Primijetimo da je i u ovom slučaju moguće odrediti degradaciju kriterijuma u odnosu na optimalno, referentno rješenje, na način opisan u odjeljku I.2. Konačno, s obzirom na (7.11) K_a je dato izrazom

$$K_a=\tilde{K}(I+D_a\tilde{K})^{-1} \qquad (7.17)$$

koje nakon odgovarajuće particije odredjuje pojačanja K_p, K_i i K_d proporcionalnog, integralnog i diferencijalnog dejstva.

U zavisnosti od dimenzije sistema n i izlaza r, sada su moguća tri slučaja: (i) $n<2r$, (ii) $n=2r$, i (iii) $n>2r$. Redundansa u slučaju (i) se jednostavno otklanja deriviranjem samo q izlaza, pri čemu se q bira tako da je $n+q=2r$, čime se ovaj slučaj svodi na slučaj (ii), koji dozvoljava da se potpuna invarijantna struktura referentnog sistema zadrži u rezultujućem sistemu sa povratnom spregom. Slučaj(iii) je čest u praktičnim primjenama i u tom slučaju dobijanje zadovoljavajućeg rješenja problema svodi se na zadržavanje 3r-dimenzionog invarijantnog podprostora uz zadovoljavajući rezidualni spektar. Ako se ne može naći X_2 tako da je rezultujući sistem stabilan, ili da ima zadovoljavajuće spektralne karakteristike, metodologija dozvoljava dvije mogućnosti u daljem postupku sinteze:

- relaksirati zahtjev koji se odnosi na dimenziju zadržanog invarijantnog potprostora referentnog rješenja i, umjesto 3r-dimenzionog, zadržati $q<3r$-dimenzioni invarijantni podprostor. Sa ovim se problem svodi na problem postavljanja polova kao i u slučaju opisanom u prethodnom odjeljku;
- uvesti dodatni dinamički regulator dimenzije p, umjesto diferenciranja izlaza. Ovaj prilaz će biti opisan nakon ilustracije opisanih koraka po metodologiji na primjeru.

Primjer 2

Neka je sistem karakterisan sledećim matricama stanja, upravljanja i izlaza /119/:

$$A=\begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ -0.15 & 0 \\ 0 & -0.24 \\ 0 & 0.24 \\ 0.15 & 0 \\ 0 & -0.24 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Usvajajući upravljanje strukture

$$u=K_i \int y\,dt+K_p y+K_d \dot{y}$$

i proširenjem sistema na opisani način dobija se sistem

$$\dot{x}_e=A_e x_e+B_e u+G_e d$$

$$y_a=C_a x_e+D_a u+F_a d$$

uz

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.15 & 0 \\ -0.15 & 0 \\ 0 & -0.24 \\ 0 & 0.24 \\ 0.15 & 0 \\ 0 & -0.24 \end{bmatrix} \quad G_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_a=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_a=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.3 & -0.25 & -0.15 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & -0.15 & -0.4 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$F_a=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

U cilju svodjenja sistema na oblik u kome je $C_a=\begin{bmatrix} I_{3r} & 0 \end{bmatrix}$ uvedimo transformaciju $x_e=Tx_t$ uz

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.66 & -1.5 & 6.66 & -5.55 & 0.44 & -0.72 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -3.33 & -0.33 & -0.83 \\ 0 & 0 & -0.66 & 0 & -6.66 & 2.22 & 0.22 & 0.88 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6.66 & -1.33 & 0.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koja transformiše prošireni sistem u oblik

$$\dot{x}_t=A_tx_t+B_tu+G_ed$$

$$y_t=C_tx_t+D_au+F_ad$$

gdje je

$$A_t=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.025 & -0.015 & -0.35 & -0.066 & -0.0016 & -0.011 \\ 0 & 0 & 0 & -0.045 & 0 & -0.45 & -0.01 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_t^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0.03 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 & 0.06 & 0 & -0.24 \end{bmatrix} \quad C_t=\begin{bmatrix} I_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Spektar slobodnog sistema je

$$\Lambda_0=\{0,0,-0.1,-0.3,-0.25,-0.15,-0.2,-0.4\}$$

Usvajajući $Q_t=1000I_8$, gdje je I_8 jedinična matrica osmog reda, i $R=I_2$ i rješavanjem algebarske Rikatijeve jednačine asocirane sa transformisanim sistemom dobija se sledeće rješenje ove jednačine i matrica referentnog sistema:

$$M=\begin{bmatrix} 1559 & -358.83 & 1016.4 & -1185.6 & 586.78 & -1270.7 & -554 & -273.6 \\ -358.83 & 3305.4 & -1002 & 5445.7 & -1072.2 & 4310.3 & 174 & 840.3 \\ 10016.4 & -1002 & 5402 & -6215 & 10749 & -11743 & -2743 & -1784 \\ -1185.6 & 5445.7 & -6215 & 19946 & -12101 & 26409 & 977 & 4978 \\ 586.78 & -1072.2 & 10749 & -12101 & 30639 & -28893 & -4823 & -4060 \\ -1270.7 & 4310.3 & -11743 & 26406 & -28893 & 49377 & 1854 & 8975 \\ -554 & 174 & -2743 & 977 & -4823 & 1854 & 2395 & -6.16 \\ -237.6 & 840.34 & -1784 & 4978 & -4060 & 8975 & -6.16 & 1867 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.68 & -0.77 & -6.97 & -0.96 & -2.31 & 0.3 & -0.51 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.12 & -0.75 & 0.41 & -2.4 & 0.22 & -2.83 & 0.07 & 0.16 \\ -0.63 & -2.03 & -0.3 & -6.19 & 0.76 & -7.29 & 0.07 & 0.43 \\ -4.68 & -0.77 & -6.97 & -0.96 & -3.31 & 0.3 & -0.71 & -0.1 \\ -1.23 & 7.49 & -4.39 & 23.8 & -5.69 & 27.6 & -0.72 & -2.09 \end{bmatrix}$$

Spektar referentnog sistema je

$\lambda_1=-7.88$, $\lambda_2=-6.72$, $\lambda_{3,4}=-0.4\pm j0.28$, $\lambda_{5,6}=-0.55\pm j0.05$,

$\lambda_{7,8}=-0.17\pm j0.07$.

Zadržavajući dominantne sopstvene vrijednosti referentnog sistema dobija se iz sopstvenih vektora asociranih sa $\lambda_{5,6}$ i $\lambda_{7,8}$

$$N_1=\begin{bmatrix} -9.43 & -2.49 & -12.35 & -4.53 & -4.48 & -2.31 \\ 2.9 & 4.94 & 2.41 & 13.99 & -1.17 & 14.82 \end{bmatrix}$$

dok je rezidualni spektar sistema

$\Lambda(A_{rd})=\{-0.79,-0.23\}$

što se može smatrati zadovoljavajućim. Pojačanje $\tilde{K}$ se nalazi na osnovu izraza (7.15) i u ovom slučaju je

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix} -0.73 & 0.18 & -5.65 & 0.06 & -5.94 & 0.27 \\ -2.79 & -3.98 & -1.88 & -14.5 & 2 & -17.8 \end{bmatrix}$$

a na osnovu (7.17) pojačanja u originalnom sistemu su

$$K_i=\begin{bmatrix} -6.62 & 1.67 \\ -0.78 & -4.49 \end{bmatrix}, \quad K_p=\begin{bmatrix} -51.62 & 0.58 \\ 13.8 & -14.69 \end{bmatrix}, \quad K_d=\begin{bmatrix} -54.19 & 2.44 \\ 18.49 & -18.53 \end{bmatrix}$$

I.8. SINTEZA GENERALISANIH PID REGULATORA

Uvodjenje diferencijalnog dejstva u prethodnom odjeljku bilo je motivisano popularnošću PID regulatora u praktičnim primjenama. Medjutim, uzimajući u obzir savremeni razvoj tehnologije u oblasti upravljanja i mjerne i računske tehnike, gdje se uvode regulacioni sistemi bazirani na primjeni mikroprocesora usled velike strukturne fleksibilnosti i širih upravljačko-informacionih mogućnosti, nameće se potreba da se razmotri projektovanje dinamičkih regulatora opšte strukture sa integralnim dejstvom u cilju regulacije i kompenzacije spoljnih perturbacija.

Primijetimo da se posredstvom PI regulatora može zadržati 2r-dimenzioni invarijantni podprostor referentnog sistema, ali da usled prisustva integratora rezidualni spektar regulisanog sistema, definisan sopstvenim vrijednostima matrice $A_{ri}=A_{22}-N_oA_{12}$, može biti nezadovoljavajući. U cilju poboljšanja dinamičkih karakteristika uvedimo p-dimenzioni dinamički regulator

$$\dot{z}_1=Hz_1+Dy_e \tag{8.1}$$

pri čemu je $H\varepsilon R^{p\times p}$, $D=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}\varepsilon R^{p\times 2r}$ a y_e definisano izrazom (6.5b). Upravljanje sada ima strukturu

$$u=K_py+K_i\int ydt+K_zz_1 \tag{8.2}$$

Definišući $x_s^T=\begin{bmatrix} z_1^T & x_e^T \end{bmatrix}$ i $y_s^T=\begin{bmatrix} z_1^T & y_e^T \end{bmatrix}$ dobija se iz (6.5) i (8.1) prošireni sistem strukture

$$\begin{aligned} \dot{x}_s&=A_sx_s+B_su+G_sd \\ y_s&=C_sx_s \end{aligned} \tag{8.3}$$

gdje $A_s\varepsilon R^{(n+r+p)\times(n+r+p)}$, $B_s\varepsilon R^{(n+r+p)\times r}$, $G_s\varepsilon R^{(n+r+p)\times n}$, $C_s\varepsilon R^{(2r+p)\times(n+r+p)}$ imaju sledeću strukturu

$$A_s=\begin{bmatrix} H & DC_e \\ 0 & A_e \end{bmatrix},\quad B_s=\begin{bmatrix} 0 \\ B_e \end{bmatrix},\quad G_s=\begin{bmatrix} 0 \\ G_e \end{bmatrix},\quad C_s=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C_e \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Upravljanje (8.2) može se napisati u obliku

$$u=K_s y_s \tag{8.5}$$

pri čemu je

$$K_s=\begin{bmatrix} K_z & K_i & K_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_z & K_e \end{bmatrix},\ K_s \varepsilon R^{rx(2r+p)} \tag{8.6}$$

Definišući $Q_s=dg\{0,\ Q_e\}, Q_e \varepsilon R^{(n+p)x(n+p)}$, problem se svodi na odredjivanje K_s koje zadržava (2r+p)-dimenzioni invarijantni podprostor referentnog sistema asociranog sa (A_s, B_s, Q_s, R). Postupajući analogno proceduri iz odjeljka I.3, rješenje proširenog regulatora stanja dobija se u obliku

$$M_s=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

$$F_s=\begin{bmatrix} H & D & 0 \\ 0 & & F \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

gdje su M i F rješenje algebarske Rikatijeve jednačine i matrica stanja referentnog sistema, za sistem (6.5) i kriterijum optimalnosti (6.8).

Neka $W_p \varepsilon R^{pxp}$ i $W_{2r} \varepsilon R^{px2r}$ zadovoljavaju uslov

$$\begin{bmatrix} H & D & 0 \\ 0 & & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_p & W_{2r} \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_p & W_{2r} \\ U & Y \\ V & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \Lambda_{2r} \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

pri čemu je $\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ kao u odjeljku I.3, a $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{2r+1} \dots & u_{2r+p} \end{bmatrix}$, $\Lambda_{2r}=diag\{\lambda_1 \dots \lambda_{2r}\}$, $\Lambda_p=diag\{\lambda_{2r+1} \dots \lambda_{2r+p}\}$.

Optimizacija statičkog regulatora u izrazu (8.5) sada se nadovezuje na izbor H i D (i shodno tome W_p i W_{2r}) tako da matrica

$$A_{rs}=A_{22}-N_s\begin{bmatrix} 0 \\ A_{12} \end{bmatrix}=A_{22}-N_{s2}A_{12} \tag{8.10}$$

ima zadovoljavajući spektar, pri čemu je

$$N_s=\begin{bmatrix} N_{s1} & N_{s2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_p & W_{2r} \\ U & Y \end{bmatrix}^{-1} \qquad (8.11)$$

Pošto se (8.10) može napisati u obliku

$$A_{rs}=A_{ri}+B_oP_oA_{12} \qquad (8.12)$$

gdje je

$$B_o=V-N_oU$$
$$A_{ri}=A_{22}-N_oA_{12}$$
$$N_o=ZY^{-1} \qquad (8.13)$$
$$P_o=L(Y-UL)^{-1}$$
$$L=W_p^{-1}W_{2r}$$

zahtjev da A_{rs} posjeduje zadovoljavajući spektar je ekvivalentan rješavanju problema postavljanja polova. Primijetimo da je matrica A_{ri} u (8.12) upravo matrica čiji spektar nije bio zadovoljavajući pri sintezi optimalnog PI regulatora. Asocirani problem postavljanja polova matrice A_{rs} može se riješiti nekom od razvijenih metoda, /86/. Kada se na taj način odredi P_o parametri regulatora odredjeni su izrazima

$$H=W_pH_oW_p^{-1}, \quad H_o=(A_p-LA_{2r}Y^{-1}U)(I+P_oU) \qquad (8.14)$$

$$D=W_pD_o, \quad D_o=(LA_{2r}-A_pL)Y^{-1}(I+UP_o) \qquad (8.15)$$

Kao što se može primijetiti iz (8.14), (8.15), rješenje ponovo odredjuje parametre regulatora nezavisno od bazisa za vektor stanja regulatora, odnosno do klase sličnih realizacija. Ovo znači da se može izabrati realizacija (H,D) najprikladnija za implementaciju regulatora pomoću mikroprocesora.

Treba primijetiti da se i ovdje red regulatora p, tretira takodje kao stepen slobode u procesu sinteze. Naime, sinteza generalisanog PID regulatora se otpočinje usvajanjem p=1, a zatim se p uvećava za jedan, ili dva, zavisno od spektralnog portreta A_{ri} sve dok se ne postigne zadovoljavajući spektar A_{rs}. Dimenzija regulatora kojim se zadržavaju sve sopstvene vrijednosti (ali ne i invarijantna struktura) referentnog rješenja je p=n-r-q-1 (gdje je q=rang A_{12}), a ako se želi zadržati i invarijantna struktura referentnog rješenja tada je p=n-r, i regulator se svodi na Luenbergerov observer.

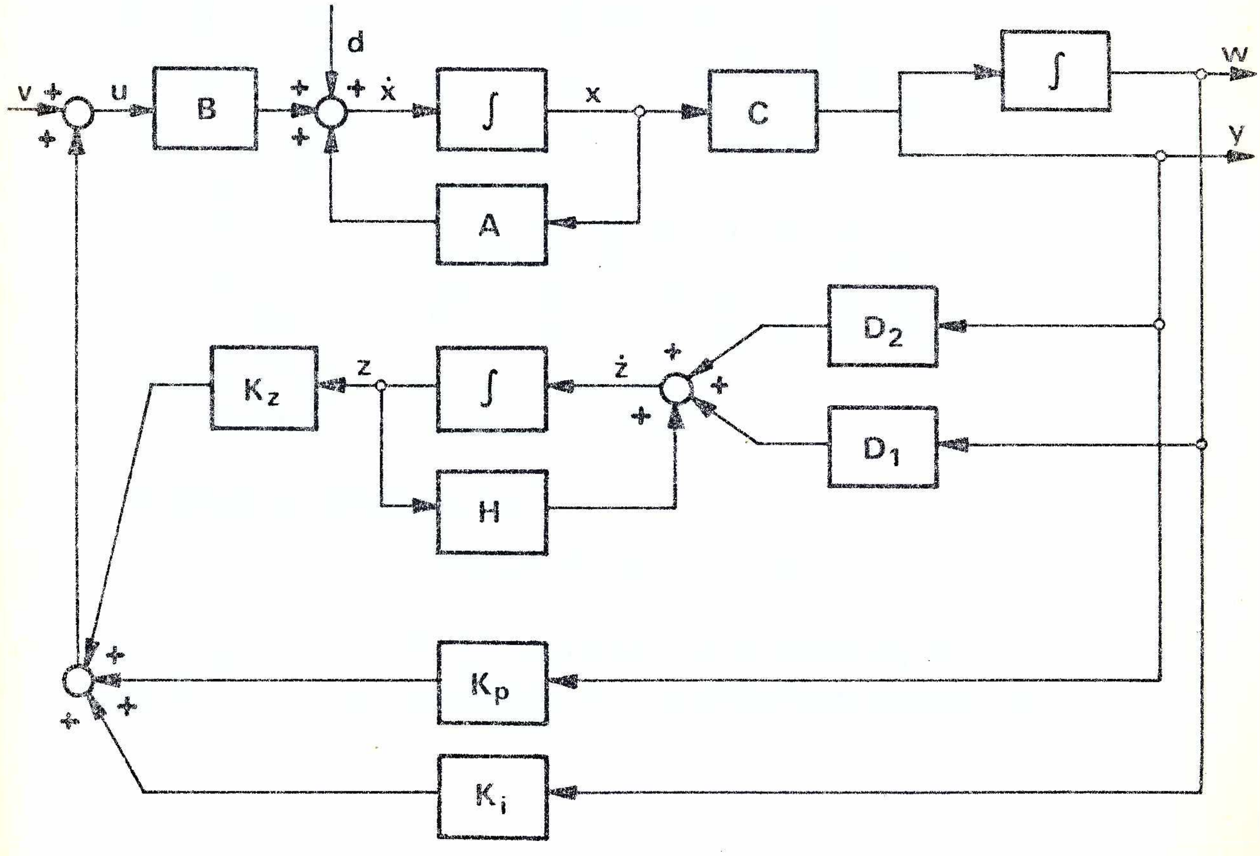
Kada se konačno odredi zadovoljavajući spektar sistema, optimalno pojačanje K_s dobija se iz

$$K_s=-R^{-1}B_s^T M_s P_s \tag{8.16}$$

pri čemu je

$$P_s=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{2r} \\ N_{s1} & N_{s2} \end{bmatrix}, \quad K_s y_s=K_z z_1+K_i \int y dt+K_p y \tag{8.17}$$

Struktura generalisanog PID regulatora prikazana je na slici 4.



Slika 4. Struktura generalisanog PID regulatora

Primjer 3

Posmatrajmo primjer sinteze generalisanog PID regulatora u cilju ilustracije opisanog postupka. Sistem je opisan istim matricama stanja, upravljanja i izlaza kao i u prethodnom primjeru. Uvodeći sada transformaciju sličnosti definisanu izrazom

$$T=\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i proširujući sistem sa stanjima integratora dobija se da je sistem definisan matricama A_e, B_e i C_e strukture

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & -0.15 & 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0.15 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$B_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.24 \\ 0 & 0.24 \\ 0.15 & 0 \\ 0 & -0.24 \end{bmatrix}, \quad C_e=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spektar slobodnog sistema je

$\Lambda(A_e)=\{0,0,-0.1,-0.3,-0.25,-0.15,-0.2,-0.4\}$.

Usvajajući $Q_e=100I_8$ i $R=I_2$, referentno rješenje, karakterisano rješenjem Rikatijeve jednačine M i optimalnom matricom stanja F:

$$M=\begin{bmatrix} 194.4 & -75.2 & 192 & -313.8 & -53.8 & -26.2 & -126.6 & 35.6 \\ -75.2 & 482 & -262.1 & 859.8 & 153.7 & 94.8 & 275 & 99.7 \\ 192 & -262.1 & 765.6 & -942.3 & -403.6 & -188 & -657.3 & 249.6 \\ -213.8 & 859.8 & -942.3 & 2287 & 597.3 & 332.5 & 954.6 & -369.5 \\ -53.8 & 153.7 & -403.6 & 597.3 & 437.4 & 234.6 & 393.7 & -204.4 \\ -26.2 & 94.8 & -188 & 332.5 & 234.6 & 247.4 & 188.9 & -30.3 \\ -126.6 & 275 & -657.3 & 954.6 & 393.7 & 188.9 & 670 & -241.6 \\ 35.6 & 99.7 & 249.6 & -369.5 & -204 & -30.3 & -241.6 & 205.8 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.47 & -0.29 & -2.54 & -0.38 & 0.07 & 0.03 & -0.19 & -0.08 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0.15 & 0.2 & -0.1 \\ -0.46 & 2.36 & -1.96 & 6.03 & -0.16 & 2.48 & 2.13 & -1.82 \\ 0.46 & -2.36 & 1.96 & -6.03 & -0.09 & -2.63 & -2.13 & 1.82 \\ -1.47 & -0.29 & -2.44 & -0.28 & 0.22 & -0.02 & -0.49 & -0.18 \\ -0.46 & 2.36 & -1.96 & 6.03 & 0.09 & 2.48 & 2.13 & -2.22 \end{bmatrix}$$

posjeduje sledeći referentni spektar:

$\lambda_1=-4.164$, $\lambda_2=-1.973$, $\lambda_{3,4}=-0.588\pm j0.0348$, $\lambda_{5,6}=-0.348\pm j0.1456$

$\lambda_{7,8}=-0.163\pm j0.07$.

Zadržavajući 4-dimenzioni invarijantni podprostor asociran sa dominantnim sopstvenim vrijednostima $\lambda_{5,6}$ i $\lambda_{7,8}$ dobija se

$$N_0=\begin{bmatrix} -16.23 & -3.92 & -92.48 & -23.29 \\ 9.25 & 2.06 & 11.09 & 2.10 \\ -13.04 & -3.36 & -37.94 & -10.11 \\ -1.72 & 0.27 & -29.35 & -5.41 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} -0.255 & -0.0094 & 0.275 & 0.031 \\ 10 & 0 & -0.73 & 0.084 \\ 0.087 & 0.04 & -0.043 & -0.024 \\ -0.348 & -0.145 & 0.113 & 0.065 \end{bmatrix}$$ na osnovu (6.11), i

$$A_{ri}=\begin{bmatrix} -14.12 & 8.13 & 13.92 & 6.9 \\ 1.66 & -1.02 & -1.53 & -8.98 \\ -5.69 & 3.41 & 5.61 & 2.78 \\ -4.4 & 2.28 & 4.02 & 1.99 \end{bmatrix}$$ na osnovu (6.13).

Rezidualni spektar je $\Lambda(A_{ri})=\{-7.16,-0.38,-0.18,0.18\}$, te slijedi da bi rezultujući regulisani sistem bio nestabilan. Pošto je samo jedna sopstvena vrijednost nestabilna uvodi se dinamički regulator prvog reda. Dodatni mjerni signal iskoristiće se da se zadrži referentna sopstvena vrijednost $\lambda_2=-1.973$ (primijetimo da bi za zadržavanje kompleksnog para $\lambda_{3,4}$ bilo neophodno da se uvede regulator drugog reda). Koristeći (8.13) dobija se sada

$$U=\begin{bmatrix}-0.317\\0.042\\0.626\\-0.083\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}0.0064\\-0.006\\0.7\\0.007\end{bmatrix}\quad i\quad B_o=\begin{bmatrix}50.98\\-3.7\\19.62\\17.37\end{bmatrix}$$

Usvajajući $P_o=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, dobija se na osnovu (8.12) za A_{rs} i spektar A_{rs} sledeće:

$$A_{rs}=\begin{bmatrix}-6.47 & -2.06 & -1.37 & 6.9\\1.1 & -0.28 & -0.42 & -0.898\\-2.74 & -0.51 & -0.27 & 2.78\\-1.79 & -1.19 & -0.19 & 1.99\end{bmatrix}$$

$\Lambda(A_{rs})=\{-4.47,-0.34,-0.11\pm j0.18\}$.

Slijedi da je sada A_{rs} stabilna matrica i usvojena vrijednost P_o može se smatrati zadovoljavajućom. Mada je sada moguće da se dalje poboljšava rješenje i dobije i bolji spektar za A_{rs} variranjem P_o, ili primjenom neke od metoda postavljanja polova, to se u ovom ilustrativnom primjeru ne sprovodi.

Pošto je ovdje

$$\Lambda_{2r}=\begin{bmatrix}-0.348 & 0.145 & 0 & 0\\-0.145 & -0.348 & 0 & 0\\0 & 0 & -0.163 & 0.07\\0 & 0 & -0.07 & -0.163\end{bmatrix},\quad \Lambda_p=-1.973$$

a L je, na osnovu (8.13), dato sa

$$L=\begin{bmatrix}5.53 & 0.53 & -2.88 & -0.51\end{bmatrix}$$

za parametre regulatora se, na osnovu (8.14), (8.15), dobija

$H_o=-1.605,\quad D_o=\begin{bmatrix}-6.25 & 1.87 & -5.36 & -11.6\end{bmatrix}$.

Konačno, na osnovu (8.16), pojačanja regulatora su:

$$K_z=\begin{bmatrix}3.286\\-4.247\end{bmatrix},\quad K_i=\begin{bmatrix}-26.33 & -19.98\\31.24 & 25.54\end{bmatrix},\quad K_p=\begin{bmatrix}-29.64 & 6.92\\19.26 & -12.74\end{bmatrix}$$

II DIO

SINTEZA REGULATORA ZA SLOŽENE DINAMIČKE SISTEME SA DECENTRALIZOVANOM UPRAVLJAČKOM I INFORMACIONOM STRUKTUROM

II.1. UVODNA RAZMATRANJA

U ovom dijelu rada posmatraćemo složeni linearni sistem kojim se upravlja skupom regulatora pri čemu svaki regulator ima zaseban skup upravljačkih varijabli, i svaki koristi zaseban skup mjerenja. Matematički model posmatranog sistema opisan je sa

$$\begin{aligned} \dot{x}&=Ax+\sum_{i=1}^{k} B_i u_i, \quad x\in R^n, \quad u_i\in R^{m_i} \\ y_i&=C_i x, \quad y_i\in R^{r_i}, \quad i=1,\dots,k \end{aligned} \tag{1.1}$$

Problem upravljanja sistema (1.1) skupom dinamičkih regulatora, zasnovanim na raspoloživim lokalnim izlazima, oblika

$$\dot{z}_i=H_i z_i+D_i y_i, \quad z_i\in R^{p_i}, \quad i=1,\dots,k \tag{1.2}$$

pri čemu je skup lokalnih upravljanja definisan sa

$$u_i=K_{zi}z_i+K_{yi}y_i, \quad K_{zi}\in R^{m_i\times p_i}, \quad K_{yi}\in R^{m_i\times r_i}, \quad i=1,\dots,k \tag{1.3}$$

u najopštijem slučaju zahtijeva da se odrede :

(i) dimenzije regulatora p_i, $i=1,\dots,k$

(ii) parametri regulatora H_i, D_i, $i=1,\dots,k$

(iii) pojačanja povratne sprege K_{zi}, K_{yi}, $i=1,\dots,k$

tako da rezultujući regulisani sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike. Mi ćemo pretpostaviti da su fizički zahtjevi na dinamičke performanse sistema prevedeni u kvadratni kriterijum oblika

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T Q x+\sum_{i=1}^{k} u_i^T R_{ii} u_i\right)dt, \quad Q\geq 0, \quad R_{ii}>0, \quad i=1,\dots,k \tag{1.4}$$

Napomenimo da se problem sinteze skupa statičkih regulatora oblika

$$u_i=K_i y_i, \quad K_i \varepsilon R^{m_i x r_i}, \quad i=1,\ldots,k \tag{1.5}$$

dobija kao specijalan slučaj navedenog problema, za $D_i=0, K_{zi}=0$, $i=1,\ldots,k$.

Metodologija kojom je u ovom dijelu rješavan ovako generalno postavljeni problem upravljanja zasnovana je na koncepciji projekcionog upravljanja i rezultira u konstruktivnoj proceduri za sintezu decentralizovanih statičkih i dinamičkih regulatora kojom se prevazilaze neki nedostaci dosad predloženih rješenja,/35-58/. Predloženi postupak u suštini predstavlja generalizaciju metodologije razvijene za centralizovanu strukturu koja je prezentirana u prvom dijelu rada.

Glavna osobina ove metode je da se u okviru jedinstvenog pristupa posmatraju sinteza linearnog kvadratnog regulatora i sinteza statičkih i dinamičkih regulatora za centralizovanu i decentralizovanu strukturu, i to u prisustvu i bez prisustva spoljnih poremećaja. Ovakva sveobuhvatnost predložene metode proističe iz toga što se u njoj eksplicitno prepoznaje činjenica da glavna razlika izmedju sinteze regulatora stanja, sinteze centralizovanih regulatora izlaza i sinteze decentralizovanih regulatora izlaza proizilazi iz različite informacione strukture pridružene pojedinim od navedenih problema, sa čime se ukazuju mogućnosti razvijanja konstruktivne metodologije za sintezu regulatora u raznim informacionim strukturama, pri čemu se linearni kvadratni regulator stanja uzima kao referentno rješenje u odnosu na koje se uporedjuju ostale alternative. Naime, uvodeći

$$\begin{gathered} y^T=\left[y_1^T \ldots y_k^T\right], \quad z^T=\left[z_1^T \ldots z_k^T\right], \quad u^T=\left[u_1^T \ldots u_k^T\right], \quad B=\left[B_1 \ldots B_k\right] \\ C^T=\left[C_1^T \ldots C_k^T\right], \quad R=dg\{R_{11},\ldots,R_{kk}\}, \quad H=dg\{H_{11},\ldots,H_{kk}\}, D=dg\{D_1,\ldots,D_k\} \\ K=dg\{K_1,\ldots,K_k\}, \quad K_y=dg\{K_{y1},\ldots,K_{yk}\}, \quad K_z=dg\{K_{z1},\ldots,K_{zk}\} \end{gathered} \tag{1.6}$$

sistem, kriterijum i statički i dinamički regulator se mogu predstaviti kao

$$\dot{x}=Ax+Bu, \quad y=Cx$$

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^TQx+u^TRu)dt$$

$$u=Ky \tag{1.7}$$

$$\dot{z}=Hz+Dy$$

$$u=K_zz+K_yy$$

Osnovna razlika izmedju centralizovanog i decentralizovanog slučaja proizilazi s obzirom na ograničenje da matrice K_y, K_z, H, D, K i R u decentralizovanom slučaju imaju blok-dijagonalnu strukturu dok u centralizovanom slučaju sve ove matrice imaju potpuno slobodnu strukturu.

Napomenimo, konačno, da i pored toga što je struktura informacionog i upravljačkog sistema decentralizovana (čime se pojednostavljuje praktična realizacija sa gledišta obrade signala i prenosa informacija u realnom vremenu), navedene osobine metode projekcionog upravljanja impliciraju centralizovani algoritamski postupak. Naime, pošto je u toku sinteze potrebno poznavati rješenje linearnog kvadratnog regulatora stanja, nameće se potreba da se off-line izračunavanja vrše centralizovano, što, medjutim, ne umanjuje praktični značaj metode s obzirom na razvijenu efikasnu softversku podršku za pridruženi numerički problem.

II.2. SINTEZA DECENTRALIZOVANIH STATIČKIH REGULATORA METODOM PROJEKCIONOG UPRAVLJANJA

Za složeni linearni sistem

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k}B_iu_i \tag{2.1a}$$

$$y_i=C_ix, \quad i=1,\ldots,k \tag{2.1b}$$

gdje su $x\varepsilon R^n$ stanje, $u_i\varepsilon R^{m_i}$ lokalna upravljanja, $y_i\varepsilon R^{r_i}$ lokalni vektori mjerljivih izlaza a matrice A, B_i, C_i, i=1,...,k, odgovarajućih dimenzija, problem sinteze decentralizovanog statičkog regulatora (zasnovanog na mjerljivim lokalnim izlazima sistema) sastoji se u odredjivanju skupa lokalnih upravljanja oblika

$$u_i=K_iy_i,\quad K_i\varepsilon R^{m_i\times r_i},\quad i=1,\dots,k \tag{2.2}$$

koji obezbjedjuje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike rezultujućeg regulisanog sistema, za pogodno odabrani kriterijum performanse

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x^TQx+\sum_{i=1}^{k}u_i^TR_{ii}u)dt,\quad Q\geq0,\quad R_{ii}>0 \tag{2.3}$$

Pošto minimizacija kriterijuma (2.3) u odnosu na K_i, $i=1,\dots,k$, kao rezultat daje pojačanja povratne sprege zavisna od početnih uslova, kao jedan od mogućih pristupa za eliminaciju ove zavisnosti predložena je metoda, /15/, u kojoj se pretpostavlja da je početno stanje slučajna veličina karakterisana sledećom očekivanom vrijednošću i kovarijantnom matricom:

$$E\{x_o\}=0,\quad E\{x_ox_o^T\}=Q_o \tag{2.4}$$

Sa ovim se, analogno centralizovanom slučaju, problem svodi na nalaženje skupa K_i, $i=1,\dots,k$, koji minimizira očekivanu vrijednost kriterijuma

$$I=E\{\frac{1}{2}\int_0^\infty x^T(Q+\sum_{i=1}^{k}C_i^TK_i^TR_{ii}K_iC_i)xdt\} \tag{2.5}$$

uz ograničenje

$$\dot{x}=(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)x,\quad E\{x_ox_o^T\}=Q_o \tag{2.6}$$

tj. na problem: naći skup K_i, $i=1,\dots,k$, koji minimizira

$$I=\mathrm{Trag}(MQ_o) \tag{2.7}$$

pri čemu je M rješenje linearne jednačine Ljapunova

$$(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)^TM+M(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)+Q+\sum_{i=1}^{k}C_i^TK_i^TR_{ii}K_iC_i=0 \tag{2.8}$$

Sada se rješenje problema odredjivanja pojačanja K_i $i=1,\dots,k$, dobija primjenom operacija gradijentnih matrica /122/ na Lagranžijan

$L(K_i,M,\tilde{V})$ koji je definisan sa

$$L(K_i,M,\tilde{V})=\frac{1}{2}\mathrm{Trag}(MQ_o)+\frac{1}{2}\mathrm{Trag}\{\Big[(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)^TM+$$

$$+M(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)+Q+\sum_{i=1}^{k}C_i^TK_i^TR_{ii}K_iC_i\Big]\tilde{V}\} \qquad (2.9)$$

gdje je simetrična matrica $\tilde{V}$ Lagranžov multiplikator. Potrebni uslovi za optimalnost dobijaju se izračunavanjem sledećih parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial L}{\partial K_i}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{V}}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial M}=0,\quad i=1,\ldots,k \qquad (2.10)$$

što rezultira u optimalnim pojačanjima

$$K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM\tilde{V}C_i^T(C_i\tilde{V}C_i^T)^{-1}\ ,\quad i=1,\ldots,k \qquad (2.11)$$

pri čemu je M dato jednačinom (2.8) a $\tilde{V}$ zadovoljava relaciju

$$(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)\tilde{V}+\tilde{V}(A+\sum_{i=1}^{k}B_iK_iC_i)^T+Q_o=0 \qquad (2.12)$$

Za rješavanje sistema nelinearnih jednačina (2.9), (2.11), (2.12) predloženo je više iterativnih numeričkih algoritama ali je očigledno da ovaj pristup sadrži sve one nedostatke koji su navedeni za centralizovani slučaj. Naime, pored toga što se analitički tretman problema završava sa potrebnim uslovima za optimalnost (2.9), (2.11), (2.12), predložena metoda ne daje uvid u egzistenciju rješenja, a ako rješenje postoji ne može se, na osnovu parametara sistema, ništa reći o njegovim osobinama. S druge strane, rješenje zasnovano na ovakvom pristupu ne može se povezati sa referentnim rješenjem koje bi se imalo u slučaju potpune povratne sprege po stanju i ne postoji prirodan prelazak na poboljšanje rješenja uvodjenjem skupa dinamičkih regulatora u slučaju da rješenje sa statičkim regulatorom ne zadovoljava.

S obzirom da su navedeni nedostaci u centralizovanom slučaju djelimično ili potpuno otklonjeni primjenom metode projekcionog upravljanja, ispitana je mogućnost generalizacije ovog prilaza na sisteme sa decentralizovanom strukturom. Kao motivacija za ispitivanje mogućnosti ovakve generalizacije poslužila je sličnost jednačine kojom je definisana vrijednost kriterijuma sa odgovarajućom jednačinom u centralizovanom slučaju. Naime, za upravljanje oblika (2.2) sa proizvoljnim K_i, $i=1,\dots,k$, vrijednost kriterijuma (2.3) se može izraziti kao

$$J(x_o,K_1,\dots,K_k)=\frac{1}{2}x_o^T M x_o \tag{2.13}$$

pri čemu M zadovoljava (2.8). S druge strane, uvodeći

$$S_i=B_i R_{ii}^{-1} B_i^T, \quad S=BR^{-1}B^T \tag{2.14}$$

lako se pokazuje da važi

$$S=\sum_{i=1}^{k} S_i \tag{2.15}$$

Jednostavnim matričnim manipulacijama, uz korišćenje (2.15), pokazuje se da se (2.8) može napisati u obliku

$$A^T M+MA-MSM+Q+\sum_{i=1}^{k} W_i(M,K_i)=0 \tag{2.16}$$

pri čemu je

$$W_i(M,K_i)=(R_{ii}^{-1}B_i^T M+K_iC_i)^T R_{ii}(R_{ii}^{-1}B_i^T M+K_iC_i) \tag{2.17}$$

Uočavajući analogiju sa odgovarajućom jednačinom iz centralizovanog slučaja, /84/, i uzimajući u obzir separabilnost člana $W_i(M,K_i)$ u odnosu na K_i kao i Teoremu komparacije, /123/, u radovima /91, 92/ predložen je prilaz kojim se minimizira doprinos člana $W_i(M,K_i)$ u jednačini (2.16) izborom K_i, $i=1,\dots,k$, koji minimiziraju otežanu normu člana $E_i=R_{ii}^{-1}B_i^T M+K_iC_i$, u srednje kvadratnom smislu. Uzimajući pogodne težinske matrice G_i, $i=1,\dots,k$, matrice pojačanja K_i, $i=1,\dots,k$, koje minimiziraju normu $I_i=\mathrm{Trag}(E_iG_iE_i^T)^{1/2}$ su date sa

$$K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^T M G_i C_i(C_iG_iC_i^T)^{-1}, \quad i=1,\dots,k \tag{2.18}$$

Uvodeći projekcione matrice

$$P_i=G_iC_i^T(C_iG_iC_i^T)^{-1}C_i, \quad R_i=I-P_i \tag{2.19}$$

i zamjenjujući (2.18) u (2.17) dobija se $W_i=R_i^T M S_i M R_i$, sa čime se jednačina(2.16) svodi na

$$A^TM+MA-MSM+Q+\sum_{i=1}^{k} R_i^TMS_iMR_i=0 \qquad (2.20)$$

Znači, jednačina koja daje vrijednost kriterijuma pridružena pojačanjima (2.18) postaje, kao i u centralizovanom slučaju, /84-86/, proširena algebarska Rikatijeva jednačina, s tom razlikom što se ovdje javlja suma od k članova od kojih svaki predstavlja povećanje kriterijuma usled ograničenih informacija dostupnih odgovarajućem lokalnom regulatoru. S obzirom na ovu analogiju, očekuje se da se prilaz iz /84/ može generalizovati na decentralizovani slučaj. Ovaj prilaz bi vodio ka odredjivanju posebne klase projekcionih matrica R_i, $i=1,...,k$, koje garantuju egzistenciju pozitivno definitnog rješenja ($M>0$) jednačine (2.20) i obezbjedjuju da rezultujući regulisani sistem posjeduje osobine povezane sa osobinama rješenja zasnovanog na regulatoru stanja. Umjesto toga, mi ćemo, analogno pristupu za centralizovani slučaj iz prvog dijela ovog rada, definisati projekciona upravljanja, ispitati njihove osobine i povezati rezultujuće rješenje sa rješenjem jednačine (2.20). S obzirom da projekciona upravljanja odgovaraju specijalnim izborima težinskih matrica G_i, $i=1,...,k$, može se očekivati da će neke, ili sve, osobine rješenja zasnovanih na projekcionim upravljanjima važiti i u decentralizovanom slučaju. Ovo ćemo najprije pokazati za slučaj kada svi lokalni regulatori imaju na raspolaganju isti broj mjerenja $r_i=r$, $i=1,...,k$, a zatim i za opšti slučaj proizvoljnog broja lokalnih mjerenja.

Poseban slučaj, $r_i=r$, $i=1,...,k$

Iz izraza za S, (2.15), slijedi da prva četiri člana u (2.20) predstavljaju Rikatijevu jednačinu (I.1.21) za optimalnu vrijednost kriterijuma pridruženu linearnom regulatoru stanja. Ova činjenica ponovo opravdava izbor linearnog regulatora stanja kao rješenja koje karakteriše referentnu željenu dinamiku. Ovo rješenje je definisano sa jednačinom optimalnog sistema

$$\dot{x}=(A-SM_c)x=Fx \qquad (2.21)$$

optimalnim upravljanjem

$$u=-R^{-1}B^TM_cx \tag{2.22}$$

i optimalnom vrijednošću kriterijuma $J_o=\frac{1}{2}x_o^TM_cx_o$, gdje je M_c rješenje algebarske Rikatijeve jednačine. Cilj decentralizovanog projekcionog upravljanja je da se u pridruženom regulisanom sistemu zadrži dominantna dinamika ovog referentnog rješenja, što, usled ograničenja na informacionu strukturu, dovodi do degradacije performanse regulisanog sistema. U slučaju da je za neko rješenje bazirano na primjeni projekcionog upravljanja degradacija performanse nedopustiva, mora se obezbijediti poboljšanje ovakvog početnog rješenja ili pogodnijim statičkim regulatorom ili dinamičkim regulatorom. U ovom odjeljku ćemo definisati projekciona upravljanja za decentralizovanu strukturu, ispitati njihove osobine i razmotriti mogućnosti modifikovanja rješenja u klasi statičkih regulatora za slučaj da je potrebno ili stabilizovati rezultujući sistem ili poboljšati njegove spektralne karakteristike.

Definišimo $\bar{X}$ i $\bar{\Lambda}$ kao matricu sopstvenih vektora i spektar matrice F i neka je $X_r\in R^{n\times r}$ formirana od r sopstvenih vektora pridruženih podspektru $\Lambda_r\subset\bar{\Lambda}$. Neka je $Y\in R^{n\times(n-r)}$ proizvoljna matrica koja zadovoljava uslov da je matrica $T=\begin{bmatrix}X_r & Y\end{bmatrix}$ regularna i neka je $V\in R^{(n-r)\times n}$ definisana sa $T^{-1}=\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}$.

Skup projekcionih matrica pridruženih pojedinim lokalnim regulatorima definisan je sa

$$P_i=X_r(C_iX_r)^{-1}C_i,\quad R_i=I-P_i,\quad i=1,\ldots,k \tag{2.23}$$

a odgovarajuća projekciona upravljanja sa

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cP_ix,\quad i=1,\ldots,k \tag{2.24}$$

Očigledno je da se ovako definisan skup projekcionih upravljanja može implementirati statičkim regulatorima izlaza

$$u_i=K_iy_i,\quad K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cX_r(C_iX_r)^{-1},\quad i=1,\ldots,k \tag{2.25}$$

Primjenom projekcionog upravljanja(2.24) na sistem (1.1) dobija se regulisani sistem čija je dinamika opisana sa

$$\dot{x}=A_cx, \quad A_c=A-\sum_{i=1}^{k} S_iM_cP_i \tag{2.26}$$

a lako se pokazuje da je pridružena vrijednost kriterijuma data sa $J=\frac{1}{2}x_o^TMx_o$, pri čemu M zadovoljava jednačinu

$$A_c^TM+MA_c+Q+\sum_{i=1}^{k} P_i^TM_cS_iM_cP_i=0 \tag{2.27}$$

Osobine projekcionih upravljanja (2.24) i rezultujućeg regulisanog sistema (2.26) mogu se sada opisati sledećim rezultatima:

Teorema II.2.1

(a) $R\{X_r\}$ je invarijantni podprostor regulisanog sistema (2.26) a Λ_r njegov podspektar, odnosno $A_cX_r=X_r\Lambda_r$;

(b) Preostali polovi regulisanog sistema dati su sa $\Lambda(A_r)$, gdje je A_r definisana sa

$$A_r=VA_cY \tag{2.28}$$

Dokaz. Iz osobina projekcionih matrica P_i i definicije S_i, $i=1,...k$, slijedi

$$A_cX_r=AX_r-\sum_{i=1}^{k} S_iM_cP_iX_r=AX_r-\sum_{i=1}^{k} S_iM_cX_r=AX_r-SM_cX_r=FX_r.$$

Iz definicije X_r i gornjeg izraza proizilazi

$$A_cX_r=X_r\Lambda_r \tag{2.29}$$

čime je stav (a) dokazan. Da bi dokažali (b) primijenimo transformaciju sličnosti $T=\begin{bmatrix}X_r & Y\end{bmatrix}$ na regulisani sistem (2.26), čime se dobija matrica transformisanog sistema

$$A_t=T^{-1}A_cT=\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}A_c\begin{bmatrix}X_r & Y\end{bmatrix} \tag{2.30}$$

odnosno u dekomponovanom obliku

$$A_t=\begin{bmatrix}UA_cX_r & UA_cY\\ VA_cX_r & VA_cY\end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Uzimajući u obzir (2.29) i $VX_r=0$, $UX_r=I$, dobija se

$$A_t=\begin{bmatrix}\Lambda_r & UA_cY\\ 0 & VA_cY\end{bmatrix} \tag{2.32}$$

odakle, s obzirom na blok-trougaonu strukturu A_t i invarijantnost spektra matrice na transformacije sličnosti, neposredno slijedi

$$\Lambda(A_c)=\Lambda_r\cup\Lambda(A_r) \tag{2.33}$$

pri čemu je A_r dato sa (2.28).

Teorema II.2.2 Ako je A_c stabilna matrica, za svako $x_o\varepsilon R\{X_r\}$ važi

$$\tfrac{1}{2}x_o^TMx_o=\tfrac{1}{2}x_o^TM_cx_o \tag{2.34}$$

gdje M definiše vrijednost kriterijuma asociranu sa projekcionim upravljanjem. Štaviše, M zadovoljava proširenu algebarsku Rikatijevu jednačinu (2.20) pri čemu je R_i definisano sa (2.23).

Dokaz. Dekompozicijom $M=M_c+D$ i zamjenom u (2.27), uz korišćenje činjenice da M_c zadovoljava Rikatijevu jednačinu, dobija se da D zadovoljava

$$A_c^TD+DA_c+Q_c=0,\quad Q_c=\sum_{i=1}^{k}R_i^TM_cS_iM_cR_i \tag{2.35}$$

Primjenom transformacije T, (2.35) prelazi u

$$A_t^TD_t+D_tA_t+Q_t=0,\quad D_t=T^TDT,\quad Q_t=T^TQ_cT,\quad A_t=T^{-1}A_cT \tag{2.36}$$

Uvodeći dekompoziciju

$$D_t=\begin{bmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^T & D_o\end{bmatrix} \tag{2.37}$$

i koristeći $R_iT=R_i[X_r\quad Y]=[0\quad R_iY]$, jednačina (2.36) se može napisati u dekomponovanom obliku

$$\begin{bmatrix}\Lambda_r & 0\\ (UA_cY)^T & A_r^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^T & D_o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^T & D_o\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_r & UA_cY\\ 0 & A_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & G_o\end{bmatrix}=0 \tag{2.38}$$

pri čemu je $G_o = \sum_{i=1}^{k} Y^T R_i^T M_c S_i M_c R_i Y$, Jednačina (2.38) daje skup linearnih jednačina

$$\Lambda_r D_1 + D_1 \Lambda_r = 0 \tag{2.38a}$$

$$\Lambda_r D_2 + D_1 U A_c Y + D_2 A_r = 0 \tag{2.38b}$$

$$(UA_c Y)^T D_2 + A_r^T D_o + D_2^T U A_c Y + D_o A_r + G_o = 0 \tag{2.38c}$$

Iz (2.38a) slijedi $D_1=0$, a kada je A_c stabilna matrica Λ_r i $-A_r$ nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti pa iz (2.38b) slijedi $D_2=0$. Konačno, iz (2.38c) slijedi da je D_o dato kao rješenje jednačine Ljapunova

$$A_r^T D_o + D_o A_r + G_o = 0 \tag{2.39}$$

dok je D dato sa

$$D = T^{-T} D_t T^{-1} = \begin{bmatrix} U^T & V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = V^T D_o V \tag{2.40}$$

Znači,

$$\tfrac{1}{2} x_o^T M x_o = \tfrac{1}{2} x_o^T (M_c + D) x_o = \tfrac{1}{2} x_o^T M_c x_o + \tfrac{1}{2} x_o^T D x_o$$

odakle neposredno slijedi (2.34), jer je $Dx_o = V^T D_o V x_o = 0$ za svako $x_o \in R\{X_r\}$.

Da bi pokazali da $M = M_c + V^T D_o V$ zadovoljava (2.20), transformišimo ovu jednačinu u oblik

$$(A - \sum_{i=1}^{k} S_i M P_i)^T M + M(A - \sum_{i=1}^{k} S_i M P_i) + Q + \sum_{i=1}^{k} P_i^T M S_i M P_i = 0 \tag{2.41}$$

Koristeći

$$MP_i = (M_c + V^T D_o V) P_i = (M_c + V^T D_o V) X_r (C_i X_r)^{-1} C_i = 0$$

(2.41) se lako svodi na (2.27), čime je tvrdnja dokazana.

Znači, kada je rezultujući sistem sa povratnom spregom stabilan, rješenje dobijeno primjenom decentralizovanih projekcionih upravljanja posjeduje sve osobine odredjene za centralizovani problem upravljanja. Napomenimo da takvo rješenje odgovara onom koje bi se dobilo rješavanjem (2.20) za poseban skup projekcionih matrica R_i, $i=1,\ldots,k$, definisan sa (2.23), tj. rješenju asociranom sa skupom G_i, $i=1,\ldots,k$, implicitno povezanim sa R_i, $i=1,\ldots,k$, relacijama (2.19) i (2.23).

Opšti slučaj

Posmatrjmo sada opšti slučaj kada su r_i, $i=1,\ldots,k$, proizvoljni. U ovom slučaju projekcione matrice (2.23) se moraju modifikovati jer X_r nije kompatibilno sa različitim dimenzijama matrica C_i, $i=1,\ldots,k$. Neka su F, $\bar{X}$, definisani kao i za prethodni slučaj i neka su $X_i \varepsilon R^{nxr_i}$, $i=1,\ldots,k$, formirani od r_i sopstvenih vektora matrice F pridruženih podspektrima $\Lambda_i \subset \bar{\Lambda}$. Definišimo sada projekcione matrice izrazima

$$P_i=X_i(C_iX_i)^{-1}C_i,\quad R_i=I-P_i,\quad i=1,\ldots,k \tag{2.42}$$

i zadržimo definiciju projekcionih upravljanja (2.24), tako da su regulisani sistem i jednačina koja daje vrijednost kriterijuma dati sa (2.26) i (2.27). Tada važi sledeći rezultat:

Teorema II.2.3

(a) Neka je $\Lambda_o=\bigcap_{i=1}^{k}\Lambda_i$ i neka se X_o sastoji od sopstvenih vektora asociranih sa Λ_o. Tada $R\{X_o\}$ predstavlja invarijantni podprostor sistema (2.26), tj.

$$A_cX_o=X_o\Lambda_o \tag{2.43}$$

(b) $\Lambda(A_c)=\Lambda_o U\Lambda(A_r)$, pri čemu je A_r dato sa (2.28) za pogodno definisane V i Y.

Dokaz. Neka je $\lambda_m \varepsilon \Lambda_o$ i neka x_m označava asocirani sopstveni vektor. Tada iz osobine projekcionih matrica: $P_iX_i=X_i$, $i=1,\ldots,k$, slijedi $P_ix_m=x_m$. Znači,

$$A_cx_m=Ax_m-\sum_{i=1}^{k}S_iM_cP_ix_m=Ax_m-\sum_{i=1}^{k}S_iM_cx_m=Fx_m$$

odnosno

$$A_cx_m=\lambda_mx_m \tag{2.44}$$

Pošto ovo važi za svaku sopstvenu vrijednost, ili par kompleksnih sopstvenih vrijednosti, iz Λ_o, stav (a) je dokazan.

Definišući $T=\begin{bmatrix} X_o & Y \end{bmatrix}$ i $T^{-1}=\begin{bmatrix} U_o \\ V \end{bmatrix}$, (b) se pokazuje jednostavnim ponavljanjem dokaza Teoreme II.2.1 b).

Iz ovog rezultata slijedi da je maksimalna dimenzija invarijantnog podprostora koji se može zadržati u regulisanom sistemu data sa

$$r=\min_i r_i \tag{2.45}$$

kao i da se r-dimenzioni podprostor može zadržati samo ako se pri definiciji projekcionog upravljanja primjenjuje sledeći princip inkluzije: ako je $r_i<r_j$ tada $\Lambda_i\subset\Lambda_j$.

Definišimo $r_{max}=\max_i r_i$ i označimo sa Λ_{max} podspektar matrice F asociran sa projekcionim upravljanjem onog upravljača koji ima najveći broj dostupnih mjerenja. Formirajmo X_{max} od pridruženih sopstvenih vektora. Uz pretpostavku da je A_c stabilna matrica važi:

Teorema II.2.4 Za svako $x_o \varepsilon R\{X_o\}$ važi $\frac{1}{2}x_o^T M x_o=\frac{1}{2}x_o^T M_c x_o$. Štaviše, ako je $\Lambda_i\subset\Lambda_{max}$ za svako i=1,...,k, M se može razdvojiti na $M=M_c+D=$ $=M_c+V^T D_r V$ pri čemu je D_r dobijeno kao rješenje matrične jednačine Ljapunova oblika (2.39), za pogodno definisane A_r i G_o.

Dokaz. Postaviti $X_r=X_o$ i $\Lambda_r=\Lambda_o$ i ponoviti dokaz teoreme II.2.2.

Ovi rezultati pokazuju da pogodne osobine rješenja zasnovanih na projekcionom upravljanju važe i za slučaj decentralizovane strukture sa proizvoljnim dimenzijama lokalnih mjernih vektora. Medjutim, pored ovih privlačnih karakteristika, projekciona upravljanja posjeduju i odredjena ograničenja koja je takodje važno uočiti kako bi se sinteza upravljanja mogla modifikovati u slučaju da je rezultujući sistem sa povratnom spregom ili nestabilan, ili stabilan ali sa nezadovoljavajućim spektralnim karakteristikama. Osnovna mana, kao i kod svih rješenja baziranih na povratnoj sprezi po izlazu, proističe iz činjenice da uslovi za stabilizaciju sistema povratnom spregom po izlazu još nijesu poznati. S druge strane, čak i u slučaju da se sistem može stabilisati, kompletna sloboda sadržana u izboru parametara povratne sprege se primjenom projekcionog upravljanja koristi za zadržavanje invarijantnog podprostora u rezultujućem regulisanom sistemu, definisanog referentnim optimalnim rješenjem. Drugim riječima, projekciona upravljanja sintetizuju rezultujući regulisani sistem komponovanjem optimalnih referentnih osobina u invarijantnom podprostoru $R=R\{X_r\}$ sa fiksiranim karakteristikama, uzrokovanim projekcionim upravljanjima, u komplementarnom podprostoru Z, pri čemu je $\dim R=r$ i $\dim Z=n-r$. Na ovaj način se garantuje optimalna performansa u podprostoru R po cijenu moguće znatne degradacije u podprostoru Z. Poredjenje spektra rezidualne matrice A_r, asocirane sa Z, i rezidualnog spektra $\Lambda(F)$ (nezadržanog u $\Lambda(A_c)$) služi kao kvalitativni pokazatelj ove degradacije, a matrica D obezbjedjuje kvantitativan pokazatelj degradacije performanse. Kada se pomenuta degradacija može tolerisati, rješenje definisano projekcionim upravljanjem se ocjenjuje kao prihvatljivo. U slučaju da je rezultujuća degradacija performanse neprihvatljiva ili je regulisani sistem nestabilan, moraju se preduzeti dalji koraci u cilju poboljšanja rješenja. Kao i kod centralizovanog slučaja, metoda pruža mogućnost da se ovo učini na dva osnovna načina. Prvi se sastoji u dopuštanju izvjesne degradacije performanse u podprostoru R, a da se dobijena sloboda iskoristi u poboljšanju performanse u podprostoru Z. Ustvari, dimenzija podprostora R se redukuje a dimenzija Z se povećava uz poboljšanje performanse u ovom podprostoru. Kod drugog načina se povećava dimenzija R uvodjenjem dinamičkih regulatora a sloboda sadržana u izboru njihovih parametara se koristi za oblikovanje karakteristika sistema u komplementarnom podprostoru Z. Ovdje ćemo detaljnije razmotriti prvi način, a drugi će biti prezentiran u narednim odjeljcima.

Osnovna teškoća pri primjeni prvog načina sastoji se u tome što se, usled nepostojanja uslova za stabilizovanje sistema regulatorom izlaza, ne može unaprijed znati da li rješenje postoji. Medjutim, rješenja asocirana sa projekcionim upravljanjima daju uvid u praktične mogućnosti poboljšanja početnog nezadovoljavajućeg rješenja, na osnovu kojeg se možemo odlučiti da li će se ovaj način uopšte primjenjivati u datom problemu upravljanja. U tom smislu razmotrit ćemo dvije alternative koje postoje u okviru ovog prilaza. Prvo ćemo analizirati karakteristike regulisanog sistema kada se primijeni konveksna kombinacija projekcionih upravljanja a zatim ćemo prezentirati generalni prilaz u kome se sloboda dobijena redukovanjem dimenzije R prevodi na decentralizovani problem podešavanja spektra asociranog sa podprostorom Z povećane dimenzije.

Neka su P_i^j projekcione matrice pridružene i-tom regulatoru i odgovarajućim $\Lambda_i^j \subset \bar{\Lambda}$, $j=1,\ldots,s$, $i=1,\ldots,k$, definisane sa (2.42). Tada važi sledeće uopštenje Teoreme II.2.3.

Teorema II.2.5 Neka su $P_i = \sum_{j=1}^{s} a_j P_i^j$, $i=1,\ldots,k$, pri čemu su a_j, $j=1,\ldots,s$, skalari iz skupa

$$S_a = \{a_q:\ \sum_{q=1}^{s} a_q = 1,\ 0 \leq a_q \leq 1\}$$

i neka lokalni regulatori primjenjuju projekciona upravljanja definisana sa (2.24). Neka je

$$\Lambda_i = \bigcap_{j=1}^{s} \Lambda_i^j, \quad \Lambda_o = \bigcap_{i=1}^{k} \Lambda_i$$

i označimo sa X_o matricu sopstvenih vektora od F pridruženu Λ_o. Tada je $R\{X_o\}$ invarijantan podprostor rezultujućeg sistema, tj. $A_c X_o = X_o \Lambda_o$, pri čemu je $A_c = A - \sum_{i=1}^{k} S_i M_c P_i$.

Dokaz. Neka je $x_m \varepsilon R\{X_o\}$ sopstveni vektor asociran sa $\lambda_m \varepsilon \Lambda_o$. Tada je $P_i^j x_m = x_m$ a pošto a_j pripada skupu S_a važi: $P_i x_m = x_m$. Znači,

$$A_c x_m = A x_m - \sum_{i=1}^{k} S_i M_c x_m = F x_m = x_m \lambda_m.$$

Da bi ilustrovali efekat projekcionih upravljanja ovog tipa na spektralne karakteristike regulisanog sistema, razmotrimo detaljnije slučaj kada svi regulatori koriste linearnu kombinaciju od dva člana oblika $P_i = aP_i^1 + (1-a)P_i^2$, pri čemu je podspektar $\Lambda_r^1 = \Lambda_o U \lambda_s$ od F pridružen P_i^1 a podspektar $\Lambda_r^2 = \Lambda_o U \lambda_p$ pridružen P_i^2, za $i=1,\ldots,k$. Označimo, dalje, rezidualne spektre pridružene Λ_r^j sa $\Lambda(A_r^j)$, $j=1,2$, i neka je s_p lokacija pola λ_p u podspektru $\Lambda(A_r^1)$, sa $Re\{s_p\}>0$. Na sličan način, neka je s_s lokacija pola λ_s u podspektru $\Lambda(A_r^1)$, sa $Re\{s_s\}>0$. Parametrizacijom $A_r = A_r(a)$ i puštanjem da a poprima vrijednosti od 0 do 1, polovi komplementarni Λ_o u regulisanom sistemu opisuju geometrijska mjesta korijena. Duž grana GMK-a pol s_s se kreće iz nestabilne oblasti ka lokaciji odredjenoj polom λ_s, dok stabilan pol λ_p prelazi u nestabilnu oblast ka lokaciji s_p. Pretpostavljajući da postoji neka vrijednost $a\varepsilon(0,1)$ za koju su i $s_p(a)$ i $s_s(a)$ stabilni polovi, korišćenje konveksne kombinacije projekcionih upravljanja daje stabilan sistem i na taj način poboljšava prethodno rješenje. Naravno, isti postupak se može primijeniti u slučaju da je regulisani sistem stabilan ali mu treba poboljšati spektralne karakteristike.

U opštem slučaju, prvi način se može interpretirati kao korišćenje slobode dobijene redukovanjem dimenzije podprostora R u oblikovanju spektralnih karakteristika komplementarnog podprostora Z. Ispitujući razne $\Lambda(A_r)$ pridružene pojedinim projekcionim upravljanjima u ovakvom pristupu se prvo odredi broj nestabilnih polova za svaki pojedini slučaj, i na toj osnovi se odredjuje redukovana dimenzija R. Poslije toga može se uspostaviti sledeća procedura za oblikovanje spektralnih karakteristika proširenog podprostora Z.

Definišimo $\bar{T}_i\varepsilon R^{r_o x r_i}$, $i=1,\ldots,k$,kao proizvoljne matrice koje zadovoljavaju uslov da je observabilni podprostor para $(A,\bar{T}_iC_i)$ ekvivalentan observabilnom podprostoru para (A,C_i). Uzimajući $r_o<r_i$, $i=1,\ldots,k$, možemo na ovaj način uvesti sažimanje dostupnih mjerenja u decentralizovanoj strukturi i problem sinteze statičkog regulatora modifikovati tako da se dobije isti problem ali sa manjim brojem mjerenja dostupnih svakom pojedinom regulatoru. Radi jednostavnosti izlaganja pretpostavili smo da je sažimanje izvršeno tako da svaki lokalni regulator ima na raspolaganju isti broj kondenzovanih mjerenja. U prilog opravdanosti ove pretpostavke ide i činjenica da je dimenzija invarijantnog podprostora koji je moguće zadržati sa decentralizovanom strukturom diktirana od strane onog regulatora koji ima na raspolaganju najmanji broj mjerenja, dok je dodatna sloboda sadržana u preostalim dostupnim mjerenjima sa pomenutom procedurom sažimanja ionako prevedena u pogodan izbor matrica $\bar{T}_i$, $i=1,\ldots,k$. Znači, sa pretpostavkom o istom broju kondenzovanih mjerenja nećemo izgubiti u opštosti razmatranja. Definišući $\bar{C}_i=\bar{T}_iC_i$, $i=1,\ldots,k$, problem se formalno svodi na već riješeni slučaj. Primjenjujući odgovarajuća projekciona upravljanja, sve osobine rješenja koje važe za slučaj $r_i=r$, $i=1,\ldots,k$, i koje su date Teoremama II.2.1 i II.2.2 važe i za ovaj slučaj. Naime, neka je $X_o\varepsilon R^{nxr_o}$ matrica sopstvenih vektora asocirana sa zadržanim podspe-

ktrom Λ_o i neka su, shodno ovakvom izboru X_o, definisane na odgovarajući način matrice $\bar{Y}$, $\bar{V}$, $\bar{P}_i$ i $\bar{R}_i$, $i=1,\dots,k$. Pošto je

$$\bar{P}_i=X_o(\bar{C}_iX_o)^{-1}\bar{C}_i=X_o(\bar{T}_iC_iX_o)^{-1}\bar{T}_iC_i,\ i=1,\dots,k \qquad (2.46)$$

regulisani sistem je opisan matricom stanja

$$\bar{A}_c=A-\sum_{i=1}^{k} S_iM_c\bar{P}_i \qquad (2.47)$$

i lako se pokazuje da važi

$$\Lambda(\bar{A}_c)=\Lambda_oU\Lambda(\bar{A}_r) \qquad (2.48)$$

pri čemu je

$$\bar{A}_r=\bar{V}\bar{A}_c\bar{Y} \qquad (2.49)$$

Asocirana vrijednost kriterijuma je $\bar{M}=M_c+\bar{V}^TD_m\bar{V}$, pri čemu D_m zadovoljava matričnu jednačinu Ljapunova

$$\bar{A}_r^TD_m+D_m\bar{A}_r+\bar{G}_o=0 \qquad (2.50)$$

gdje je $\bar{G}_o$ definisano analogno izrazu (2.38). Uzimajući u obzir (2.46) i (2.47), rezidualna matrica $\bar{A}_r$ se može napisati kao

$$\bar{A}_r=\bar{V}A\bar{Y}-\sum_{i=1}^{k}\bar{V}S_iM_cX_o(\bar{T}_iC_iX_o)^{-1}\bar{T}_iC_i\bar{Y} \qquad (2.51)$$

Uvodeći pseudo-inverziju $(C_iX_o)^{\dagger}=(X_o^TC_i^TC_iX_o)^{-1}X_o^TC_i^T$ slijedi

$$(\bar{T}_iC_iX_o)^{-1}\bar{T}_i=(C_iX_o)^{\dagger}+M_i\left[I_{ri}-C_iX_o(C_iX_o)^{\dagger}\right] \qquad (2.52)$$

pri čemu je $M_i\epsilon R^{r_o\times r_i}$ proizvoljna matrica. Zamjenom (2.52) u (2.51) dobija se

$$\bar{A}_r=\bar{A}_o+\sum_{i=1}^{k}B_{io}M_iA_{io} \qquad (2.53)$$

pri čemu je

$$A_o=\bar{V}\left[A-\sum_{i=1}^{k}S_iM_cX_o(C_iX_o)^{\dagger}\right]C_i\bar{Y} \qquad (2.54)$$

$$B_{io}=-\bar{V}S_iM_cX_o \qquad (2.55)$$

$$A_{io}=M_i\left[I_{ri}-C_iX_o(C_iX_o)^{\dagger}\right]C_i\bar{Y} \qquad (2.56)$$

Pošto je rang $I_{ri}-C_iX_o(C_iX_o)^{\dagger}=r_i-r_o$, proizvod $M_i\left[I_{ri}-C_iX_o(C_iX_o)^{\dagger}\right]$ se može izraziti kao F_iN_i gdje je N_i odredjeno sa $I_{ri}-C_iX_o(C_iX_o)^{\dagger}$ a $F_i\varepsilon R^{r_o\times(r_i-r_o)}$ je proizvoljna matrica. Znači, (2.53) se može napisati kao

$$\bar{A}_r=\bar{A}_o+\sum_{i=1}^{k}B_{io}F_iA_{1i}, \quad A_{1i}=N_iC_i\bar{Y} \qquad (2.57)$$

čime se problem oblikovanja rezidualnog spektra sveo na problem decentralizovanog postavljanja polova u funkciji izlaza.

Konačno, napomenimo da kada se problem oblikovanja rezidualnog spektra uspješno riješi bilo kojim od navedenih načina tada su preostale faze u postupku sinteze statičkih regulatora eksplicitno definisane prostim analitičkim izrazima. Naime, pojačanja povratne grane koja implementiraju projekciono upravljanje data su u najopštijem slučaju sa

$$K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cX_o(\bar{T}_iC_iX_o)^{-1}\bar{T}_i, \quad i=1,\ldots,k \qquad (2.58)$$

dok se degradacija vrijednosti kriterijuma asocirana sa projekcionim upravljanjem dobija kao rješenje jednačine (2.50).

Primjer 4

Posmatrajmo sistem 12-tog reda sa tri upravljačka centra i ukupno devet mjerenja, definisan sledećim matricama

$$A=\begin{bmatrix}
-0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -0.6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & -12 & -20 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -6
\end{bmatrix}
\quad
B=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$
C=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

pri čemu su težinske matrice u kriterijumu optimalnosti $Q=\mathrm{diag}\{10,10,10,100,10,10,100,10,10,100,10,10\}$ i $R=I_3$.

Spektri slobodnog sistema, optimalnog sistema sa povratnom spregom po stanju i sistema sa zatvorenom povratnom spregom u slučaju da su svih devet mjerenja dostupni svim regulatorima, dati su u Tabeli 1. Zadnji spektar odgovara slučaju kada su projekciona upravljanja za sva tri regulatora formirana uzimajući $\Lambda_0=\{\lambda_4,\lambda_5,\ldots,\lambda_{12}\}$.

σ_0	ω_0	σ^*	ω^*	σ_c	ω_c
-19.4030	0.00000	-19.6580	0.00000	-19.0040	0.00000
-5.74270	0.00000	-4.68350	0.00000	-4.22010	0.00000
-3.51110	0.00000	-6.52510	0.00000	-1.84990	0.00000
0.19077	0.00000	-1.03030	1.04510	-0.80128	0.98791
-0.49067	0.71048	-1.03030	-1.04510	-0.80128	-0.98791
-0.49067	-0.71048	-0.80129	0.98791	-1.03030	1.04510
-0.85307	0.00000	-0.80129	-0.98791	-1.03030	-1.04510
-0.52447	0.00000	-0.46153	0.68043	-0.46153	0.68043
-0.1093E-01	0.72177	-0.46153	-0.68043	-0.46153	-0.68043
-0.1093E-01	-0.72177	-0.69671	0.00000	-0.36801	0.00000
-0.17670	0.61101	-0.47529	0.00000	-0.47529	0.00000
-0.17670	-0.61101	-0.36802	0.00000	-0.69672	0.00000

Tabela 1

Kada se upravljačkim centrima nametnu ograničenja na mjerenja koja mogu koristiti u implementaciji upravljanja tada dolazi do decentralizovanog problema upravljanja. Za ilustraciju uzmimo slučaj kada su upravljačkim centrima dostupna sledeća mjerenja: prvi upravljački centar koristi $\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_8\}$, drugi $\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_6,y_7,y_8\}$ a treći $\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_6,y_8,y_9\}$.

Za ovakvu informacionu strukturu ne postoji kombinacija od sedam optimalnih sopstvenih vektora za koju bi projekciono upravljanje rezultirala u stabilnom regulisanom sistemu. Za slučaj dva izbora zadržanih invarijantnih podprostora pridruženih $\Lambda^1=\{\lambda_6,\lambda_7,\lambda_8,\lambda_9,\lambda_{10},\lambda_{11},\lambda_{12}\}$ i $\Lambda^2=\{\lambda_4,\lambda_5,\lambda_8,\lambda_9,\lambda_{10},\lambda_{11},\lambda_{12}\}$, respektivno, odgovarajući spektri regulisanog sistema su dati u

Tabeli 2.

σ_1	ω_1	σ_2	ω_2
-37.1460	0.00000	-37.2520	0.00000
-4.17500	0.00000	-4.13910	0.28128
-3.17970	0.00000	-4.13910	-0.28128
-0.80128	0.98791	0.30144	1.36810
-0.80128	-0.98791	0.30144	-1.36810
0.50345	0.00000	-1.03030	1.04510
-0.46153	0.68043	-1.03030	-1.04510
-0.46153	-0.68043	-0.56154	0.68045
-1.26890	0.00000	-0.46154	-0.68045
-0.36802	0.00000	-0.36802	0.00000
-0.69671	0.00000	-0.69670	0.00000
-0.47529	0.00000	-0.47528	0.00000

Tabela 2

Iz ove tabele je očigledno da jedan pol iz kompleksnog para $\lambda_{4,5}$, poslije razdvajanja na dva realna pola, postaje nestabilan za Λ^1 dok kompleksan par $\lambda_{6,7}$ postaje nestabilan za Λ^2. Konveksna kombinacija projekcionih matrica asocirana sa Λ^1 i Λ^2 oblika $P_i=aP_i^1+(1-a)P_i^2$, i=1,2,3, je zatim korišćena u pokušaju da se regulisani sistem stabilizuje. Ispostavilo se da je ovo moguće učiniti za pogodan izbor parametra a, a kao ilustraciju u Tabeli 3 navodimo dva stabilna spektra asocirana sa a=0.3 i a=0.35, respektivno. Primijetimo da je, s obzirom na Teoremu II.2.5, u regulisanom sistemu zadržan samo invarijantni podprostor asociran sa $\Lambda_0=\{\lambda_8,\lambda_9,\lambda_{10},\lambda_{11},\lambda_{12}\}$.

σ_a	ω_a	σ_a	ω_a
-37.2210	0.00000	-37.2160	0.00000
-4.37010	0.00000	-4.38260	0.00000
-3.42500	0.00000	-3.31930	0.00000
-0.3676E-01	1.35820	-0.79099E-01	1.36960
-0.3676E-01	-1.35820	-0.79099E-01	-1.36960
-1.64750	0.00000	-1.82240	0.00000
-0.46150	0.68043	-0.46151	0.68043
-0.46150	-0.68043	-0.46151	-0.68043
-0.21517	0.00000	-0.47932E-01	0.00000
-0.47534	0.00000	-0.47531	0.00000
-0.36800	0.00000	-0.69673	0.00000
-0.69674	0.00000	-0.26801	0.00000
a=0.3		a=0.35	

Tabela 3

Ako se nametnu strožija ograničenja na informacionu strukturu uzimajući da su prvom upravljačkom centru dostupna mjerenja $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, drugom $\{y_1,y_2,y_3,y_6\}$ a trećem $\{y_1,y_2,y_3,y_8\}$, nalazi se da u ovom slučaju postoje dva skupa projekcionih upravljanja koja daju stabilan regulisani sistem. Prvi je asociran sa podspektrom $\Lambda^I=\{\lambda_8,\lambda_9,\lambda_{10},\lambda_{12}\}$ a drugi sa $\Lambda^{II}=\{\lambda_8,\lambda_9,\lambda_{11},\lambda_{12}\}$. Odgovarajući spektri regulisanog sistema su prezentirani u Tabeli 4.

σ_I	ω_I	σ_{II}	ω_{II}
-19.4030	0.00000	-19.4030	0.00000
-5.74210	0.00000	-5.74540	0.00000
-3.48400	0.00000	-3.55270	0.00000
-0.46502E-01	0.70797	-0.46154	0.68055
-0.46502E-01	-0.70797	-0.46154	-0.68055
-0.46153	0.68044	-0.92167E-01	0.60707
-0.46153	-0.68044	-0.92167E-01	-0.60707
-0.69671	0.00000	-0.27101	0.64244
-0.15556	0.34028	-0.27101	-0.64244
-0.15556	-0.34028	-0.36800	0.00000
-0.17874	0.00000	-0.47519	0.00000
-0.36802	0.00000	-0.64990E-02	0.00000
Λ^I		Λ^{II}	

Tabela 4

II.3. SINTEZA SPREGNUTIH DECENTRALIZOVANIH REGULATORA

U dosadašnjem izlaganju upoznali smo se sa nekim osobinama rješenja baziranih na projekcionim upravljanjima. U ovom odjeljku ćemo posmatrati specijalni problem koji se javlja pri sintezi decentralizovanih statičkih regulatora kada su lokalni upravljači direktno spregnuti preko raspoloživih lokalnih mjerenja u smislu da se upravljanja ostalih lokalnih regulatora pojavljuju u lokalnim mjernim vektorima. Ovakvi problemi mogu prirodno proizaći iz same strukture konkretnog složenog sistema. Još važnije, oni se javljaju kada se neke poznate metode sinteze ili strukture regulatora primijene u rješavanju problema upravljanja. Kao primjer jednog takvog slučaja, navedimo problem upravljanja koji se dobija primjenom metode *singularne perturbacije*. Neka je dat sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_{11}u_1+B_{12}u_2\\ \mu\dot{x}_2&=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_{21}u_1+B_{22}u_2\end{aligned}\qquad(3.1)$$

$$\begin{aligned}y_1&=C_{11}x_1+C_{12}x_2\\ y_2&=C_{21}x_1+C_{22}x_2\end{aligned}\qquad(3.2)$$

gdje je μ mali parametar. Problem upravljanja se rješava dekompozicijom dinamike na brzu i sporu dinamiku, tj. uvodeći dvije vremenske skale. Pod odredjenim uslovima, /124/, spori sistem se svodi na

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1+(B_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}B_{21})u_1+(B_{12}-A_{12}A_{22}^{-1}B_{22})u_2\\ y_1&=(C_{11}-C_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1-C_{12}A_{22}^{-1}B_{21}u_1-C_{12}A_{22}^{-1}B_{22}u_2\\ y_2&=(C_{21}-C_{22}A_{22}^{-1}A_{21})x_1-C_{22}A_{22}^{-1}B_{21}u_1-C_{22}A_{22}^{-1}B_{22}u_2\end{aligned}\qquad(3.3)$$

Slijedi da se za $C_{12}A_{22}^{-1}B_{22}\neq 0$ i $C_{22}A_{22}^{-1}B_{22}\neq 0$, javlja direktno sprezanje upravljanja posredstvom izlaza. Drugi važan slučaj, koji će biti detaljno obradjen u narednim odjeljcima, pojavljuje se kada se vrši sinteza PD regulatora u decentralizovanim sistemima (ili još opštije PID regulatora). Da bi se odredila pojačanja za unaprijed zadatu decentralizovanu PD strukturu regulatora potrebno je "generisati" pomoćna mjerenja:

$$\dot{y}_i=C_i\dot{x}=C_i(Ax+\sum_{i=1}^{k}B_iu_i)=C_iAx+\sum_{j=1}^{k}C_iB_ju_j,\quad i=1,\dots,k\qquad(3.4)$$

odakle je jasno da dolazi do direktnog sprezanja ako je $C_iB_j\neq 0$ i $C_jB_i\neq 0$, za $i\neq j$.

Iz izloženog se vidi da je ovaj problem važan i sa teoretske i sa praktične tačke gledišta. Medjutim, prisustvo ostalih upravljanja u lokalnim mjerenjima dovodi do znatnih teškoća u primjeni metoda sinteze. Ovdje ćemo razmotriti kako se ovo odražava na primjenu metodologije projekcionih upravljanja i, koristeći osobine generalne algebarske Rikatijeve jednačine, pokazati kako se ovaj problem može prevazići. Najprije ćemo posmatrati problem sinteze za slučaj dva lokalna upravljača a zatim ćemo, koristeći matematičku indukciju, generalisati ovako dobijeno rješenje na proizvoljan broj upravljača.

Slučaj dva lokalna upravljača

Neka je dat sistem

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k} B_i u_i,\quad k=2 \tag{3.5a}$$

$$y_i=C_i x+\sum_{j=1}^{k} D_{ij} u_j,\quad i=1,\dots,k \tag{3.5b}$$

i kriterijum

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^T Q x+\sum_{i=1}^{k} u_i^T R_{ii} u_i)dt,\quad k=2 \tag{3.6}$$

i neka se, u smislu metode projekcionih upravljanja, problem sinteze sastoji u odredjivanju povratne sprege oblika

$$u_i=K_i y_i,\quad i=1,\dots,k \tag{3.7}$$

tako da rezultujući regulisani sistem zadrži invarijantni podprostor referentnog optimalnog regulatora stanja

$$\dot{x}=(A-SM_c)x=Fx,\qquad A^T M_c+M_c A-M_c S M_c+Q=0 \tag{3.8}$$

maksimalne dimenzije koju dozvoljava informaciona struktura.

Pretpostavimo najprije da nema direktnog sprezanja, tj. da je $D_{ij}=0$, za $i\neq j$. Tada se upravljanja (3.7) mogu izraziti kao $u_i=K_i y_i=K_i(C_i x+D_{ii}u_i)$, $i=1,2$, odnosno

$$u_i=(I-K_i D_{ii})^{-1}K_i C_i x,\quad i=1,2 \tag{3.9}$$

tako da regulisani sistem postaje

$$\dot{x}=(A+\sum_{i=1}^{k} B_i(I-K_i D_{ii})^{-1}K_i C_i)x \tag{3.10}$$

Definišući nove matrice pojačanja

$$L_i=(I-K_i D_{ii})^{-1}K_i,\quad i=1,2 \tag{3.11}$$

originalni problem se može izraziti na sledeći način: za dati sistem (5.5a) sa lokalnim mjerenjima $y_i=C_i x$, $i=1,2$, i lokalnim upravljanjima $u_i=L_i y_i$, naći optimalnu vrijednost za L_i, $i=1,2$, u odnosu na kriterijum (3.6), i u smislu projekcionih upravljanja.

Uzimajući u obzir rezultate iz prethodnog odjeljka, rješenje za ovaj problem se lako nalazi kao $L_i=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i}(C_i X_{r_i})^{-1}$ odakle, s obzirom na (3.11), slijedi rješenje za originalni problem u obliku

$$K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i}(C_i X_{r_i})^{-1}(I-D_{ii}R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i}(C_i X_{r_i})^{-1})=$$

$$=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i}(C_i X_{r_i}-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i})^{-1},\quad i=1,2 \qquad (3.12)$$

gdje su X_{r_i}, $i=1,2$, odgovarajuće matrice formirane od sopstvenih vektora matrice F.

Generalni problem kada su i D_{12} i D_{21} različiti od nule, medjutim, ne dopušta ovako jednostavno rješenje. Primjenjujući isti postupak sa L_i, $i=1,2$, definisanim izrazom (3.11) dolazi se do

$$u_i=L_i C_i x+L_i D_{ij} C_j,\quad i=1,2,\quad j=1,2,\quad i\neq j \qquad (3.13)$$

odakle se u_i, $i=1,2$, mogu izraziti kao

$$u_i=(I-L_i D_{ij} L_j D_{ji})^{-1} L_i(C_i+D_{ij} L_j C_j),\quad i=1,2,\quad j=1,2,\quad i\neq j \qquad (3.14)$$

Uočavamo da su sada lokalna upravljanja u_i, $i=1,2$, nelinearne funkcije od L_i, $i=1,2$, tako da se ovaj problem ne može rješavati prostim proširenjem prethodno razvijenog postupka.

Da bi ovaj problem mogli riješiti uvedimo *ekvivalentna pojačanja* kao

$$\bar{K}_i=\bar{K}_i(L_i,L_j)=(I-L_i D_{ij} L_j D_{ji})^{-1} L_i,\quad i=1,2,\quad j=1,2,\quad i\neq 1 \qquad (3.15)$$

i *ekvivalentne matrice izlaza* kao

$$\bar{C}_i=\bar{C}_i(L_j)=C_i+D_{ij} L_j C_j,\quad i=1,2,\quad j=1,2,\quad i\neq j \qquad (3.16)$$

Sada smo u prilici da originalni problem preformulišemo na sledeći način: za dati sistem (3.5a) sa ekvivalentnim lokalnim izlazima

$$\bar{y}_i=\bar{C}_i x,\quad \bar{C}_i\varepsilon R^{r_i x n},\quad i=1,2 \tag{3.17}$$

naći ekvivalentna lokalna upravljanja

$$u_i=\bar{K}_i\bar{y}_i,\quad \bar{K}_i\varepsilon R^{m_i x r_i},\quad i=1,2 \tag{3.18}$$

optimalna u odnosu na (3.6) u smislu projekcionih upravljanja.

Prisjetimo se da su, za ovako definisan problem, projekciona upravljanja izražena preko odgovarajućih projekcionih matrica i da im je struktura data sa (2.24). S obzirom na definiciju ekvivalentnih matrica izlaza (3.16) projekcione matrice će, po analogiji sa (2.42), imati oblik

$$\bar{P}_i=X_{r_i}(\bar{C}_i X_{r_i})^{-1}\bar{C}_i\ ,\quad i=1,2 \tag{3.19}$$

pa su projekciona upravljanja definisana sa

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c \bar{P}_i x=-T_i(\bar{C}_i X_{r_i})^{-1}\bar{C}_i x\ ,\quad i=1,2 \tag{3.20}$$

pri čemu smo uveli obilježavanje

$$T_i=R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X_{r_i},\quad i=1,2 \tag{3.27}$$

Uporedjivanjem (3.18) i (3.20) neposredno slijedi da će pojačanja L_i, i=1,2, koja zadovoljavaju

$$\bar{K}_i=-T_i(\bar{C}_i X_{r_i})^{-1},\quad i=1,2 \tag{3.22}$$

obezbijediti da $R\{X_0\}=R\{X_{r_1}\}\cap R\{X_{r_2}\}$ bude invarijantni podprostor rezultujućeg regulisanog sistema. Iz (3.15), (3.16) i (3.22), slijedi da L_i, i=1,2, moraju zadovoljiti spregnute matrične jednačine

$$\begin{aligned}(I-L_1D_{12}L_2D_{21})^{-1}L_1&=-T_1\left[(C_1+D_{12}L_2C_2)X_{r_1}\right]^{-1}\\ (I-L_2D_{21}L_1D_{12})^{-1}L_2&=-T_2\left[(C_2+D_{21}L_1C_1)X_{r_2}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.23}$$

koje se lako svode na

$$L_1C_1X_{r_1}+L_1D_{12}L_2C_2X_{r_1}=-T_1+L_1D_{12}L_2D_{21}T_1$$
$$L_2C_2X_{r_2}+L_2D_{21}L_1C_1X_{r_2}=-T_2+L_2D_{21}L_1D_{12}T_2 \qquad (3.24)$$

Bilo koje rješenje L_1, L_2 ovog para jednačina takvo da su inverzije iz (3.23) definisane daje, preko raspregnutih jednačina (3.11), originalna pojačanja K_1, K_2 koja garantuju zadržavanje invarijantnog podprostora $\dot{R}\{X_o\}$ u rezultujućem regulisanom sistemu. Ako je, pored toga, i pridruženi rezidualni spektar zadovoljavajući, ovakve vrijednosti L_i, $i=1,2$, predstavljaju rješenje za postavljeni problem decentralizovanog statičkog regulatora izlaza.

Sada ćemo potražiti analitičko rješenje jednačina (3.24) prevodjenjem ovog para jednačina u ekvivalentnu generalnu algebarsku Rikatijevu jednačinu. Uvodeći $M_{ij}\varepsilon R^{r_i x r_j}$, $U_{ij}\varepsilon R^{r_i x r_j}$ i $S_{ij}\varepsilon R^{r_i x r_j}$ posredstvom izraza

$$M_{ij}=C_iX_{rj}, \quad i,j=1,2 \qquad (3.25)$$

$$U_{ij}=D_{ij}T_j, \quad i,j=1,2, \quad i\neq j \qquad (3.26)$$

$$S_{ij}=M_{ij}-U_{ij}, \quad i,j=1,2, \quad i\neq j \qquad (3.27)$$

jednačine (3.24) se svode na

$$L_1M_{11}+L_1D_{12}L_2S_{21}=-T_1 \qquad (3.28a)$$

$$L_2M_{22}+L_2D_{21}L_1S_{12}=-T_2 \qquad (3.28b)$$

Množenjem (3.28b) slijeva sa L_1D_{12} i uvodjenjem nove promjenljive

$$Z_1=L_1D_{12}L_2 \qquad (3.29)$$

izraz (3.28) se može svesti na

$$L_1M_{11}+Z_1S_{21}=-T_1 \qquad (3.30a)$$

$$Z_1M_{22}+Z_1D_{21}L_1S_{12}=-L_1D_{12}T_2 \qquad (3.30b)$$

Zamjenom L_1 iz (3.30a) u (3.30b) dobije se

$$Z_1D_{21}Z_1S_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+Z_1(U_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+S_{21}M_{11}^{-1}U_{12}-M_{22})+T_1M_{11}^{-1}U_{12}=0 \qquad (3.31)$$

pri čemu napominjemo da je M_{11} u opštem slučaju regularna matrica. Označimo sada

$$Q_{21}=S_{21}M_{11}^{-1}S_{12} \qquad (3.32)$$

a pošto je $Q_{21}\varepsilon R^{r_2 x r_2}$, očigledno je da će Q_{21} biti nesingularna matrica samo ako je $r_2<r_1$. Pretpostavljajući za sada da ovo važi, svedimo (3.31) na

$$Z_1F_{12}Z_1+Z_1F_{11}-F_{21}=0 \qquad (3.33)$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} &F_{12}=D_{21}\\ &F_{11}=(U_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+S_{21}M_{11}^{-1}U_{12}-M_{22})Q_{21}^{-1} \qquad (3.34)\\ &F_{21}=-T_1M_{11}^{-1}U_{12}Q_{21}^{-1} \end{aligned}$$

Uočimo sada da (3.33) predstavlja generalnu algebarsku matričnu Rikatijevu jednačinu pri čemu je $Z_1\varepsilon R^{m_1 x r_2}$, dok F_{ij}, $i,j=1,2$, predstavljaju submatrice $(m_1+r_2)x(m_1+r_2)$ matrice koeficijenata

$$F=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

asocirane sa (3.33). Poznato je, /125,126/, da (3.33) u opštem slučaju posjeduje višestruka rješenja. Pretpostavljajući da smo dobili rješenja Z_1^j, $j=1,\ldots,p$, odgovarajuća pojačanja L_i^j, $i=1,2$, se iz (3.28) dobijaju kao

$$\begin{aligned} &L_1^j=-T_1M_{11}^{-1}-Z_1^jS_{21}M_{11}^{-1}\\ &L_2^j=-T_2(M_{22}+D_{21}L_1^jS_{12})^{-1} \end{aligned} \qquad j=1,\ldots,p \qquad (3.36)$$

Za slučaj da je $r_1<r_2$, definišimo $Z_2=L_2D_{21}L_1$ i pomnožimo (3.28a) slijeva sa L_2D_{21}, pri čemu se dobija

$$
\begin{aligned}
&Z_2M_{11}+Z_2D_{12}L_2S_{21}=-T_1\\
&L_2M_{22}+Z_2S_{12}=-T_2
\end{aligned}
\qquad (3.37)
$$

odakle, poslije postupka analognog prethodnom slučaju, dobijamo drugu generalnu Rikatijevu jednačinu

$$Z_2\bar{F}_{12}Z_2+Z_2\bar{F}_{11}-\bar{F}_{21}=0 \qquad (3.38)$$

pri čemu su

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_{12}=D_{12}\\
&\bar{F}_{11}=(U_{12}M_{22}^{-1}S_{21}+S_{12}M_{22}^{-1}U_{21}-M_{11})Q_{12}^{-1}\\
&\bar{F}_{21}=-T_2M_{22}^{-1}U_{21}Q_{12}^{-1}
\end{aligned}
\qquad (3.39)
$$

u ovom slučaju submatrice matrice koeficijenata

$$\bar{F}=\begin{bmatrix}\bar{F}_{11} & \bar{F}_{12}\\ \bar{F}_{21} & 0\end{bmatrix}\varepsilon R^{(m_2+r_1)x(m_2+r_1)} \qquad (3.40)$$

a matrica

$$Q_{12}=S_{12}M_{22}^{-1}S_{21},\ Q_{12}\varepsilon R^{r_1xr_1} \qquad (3.41)$$

je u opštem slučaju invertibilna. Rješavajući jednačinu (3.38) po Z_2, dobijemo Z_2^j, $j=1,\dots,q$, a L_1^j, L_2^j se dobijaju iz (3.28) kao

$$
\begin{aligned}
&L_2^j=-T_2M_{22}^{-1}-Z_2^jS_{12}M_{22}^{-1}\\
&L_1^j=-T_1(M_{11}+D_{12}L_2^jS_{21})^{-1} \qquad j=1,\dots,q
\end{aligned}
\qquad (3.42)
$$

Znači, u zavisnosti od dimenzija r_1 i r_2 lokalnih izlaza postupak se svodi na rješavanje (3.33) ili (3.38) a zatim se iz (3.36) ili (3.42) nalaze pojačanja L_i^j, $i=1,2$. Prema tome, preostalo je da se karakterišu rješenja (3.33) ili (3.38) (po mogućnosti analitički) i da se razriješe pitanja povezana sa egzistencijom i višestrukošću rješenja.

Rješavanju generalne matrične Rikatijeve jednačine oblika (3.33) ili (3.38) posvećena je značajna pažnja u literaturi, /125, 126, 106/. Pokazano je da se svako njeno rješenje može asocirati sa različitom spektralnom dekompozicijom pridružene matrice koeficijenata kao i da se rješenje konstruiše iz generalizovanih sopstvenih vektora pridruženih odgovarajućoj spektralnoj dekompoziciji. Koristeći ove opšte rezultate, mi ćemo sada ispitati osobine rješenja jednačine (3.33) i ispitati egzistenciju i jedinstvenost rješenja za pridruženi problem sinteze regulatora, pri čemu će analogni rezultati važiti za jednačinu (3.38) u slučaju da je $r_1<r_2$.

Posmatrajmo jednačinu (3.33) i označimo sa $S=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu\}$, $\nu=m_1+r$, $r=r_2$, spektar matrice F definisane izrazom (3.35) a sa $\{g_1,g_2,\ldots g_\nu\}$ generalisane sopstvene vektore od F. Dekomponujmo sopstvene vektore kao $g_i=\begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix}$, sa $w_i\varepsilon R^r$ i označimo, za dato r,

$G_j=[g_{i1},g_{i2},\ldots,g_{ir}]$, $W_j=[w_{i1},w_{i2},\ldots,w_{ir}]$, $V_j=[v_{i1},v_{i2},\ldots,v_{ir}]$

matrice odgovarajućih dimenzija formirane od kombinacije r generalnih sopstvenih vektora. Neka S_j označava podspektar pridružen sopstvenim vektorima iz G_j a $\bar{S}_j$ komplementarni spektar od F; $S,\bar{S}_j$ i S_j će takodje označavati odgovarajuće Žordanove forme.

<u>Definicija II.3.1,/126/</u> Kombinacija od r sopstvenih vektora karakterisana spektrom S_j i matricama G_j, W_j, V_j naziva se *dopustiva kombinacija* ako:

(a) S_j sadrži kompleksne sopstvene vrijednosti u konjugovanim parovima, i

(b) kada su samo neke sopstvene vrijednosti, pridružene datom Žordanovom bloku od S, sadržane u S_j tada su najniži po redu generalisani sopstveni vektori u pridruženom lancu sadržani u G_j.

<u>Teorema II.3.1, /125,126/</u> Sva realna rješenja Z_1^j, $j=1,\ldots,p$, $p\leqslant\binom{\nu}{r}$, jednačine (3.33) imaju oblik $Z_1^j=V_jW_j^{-1}$, za neku dopustivu kombinaciju karakterisanu sa G_j i S_j. Obrnuto, za svaku dopustivu kombinaciju za koju je W_j nesingularna matrica, $Z_1^j=V_jW_j^{-1}$ je rješenje jednačine (3.33). Štaviše, $S(F_{11}^j)=S_j$, W_j je matrica sopstvenih vektora matrice F_{11}^j a $S(F_{22}^j)=\bar{S}_j$, pri čemu je

$$\begin{aligned} F_{11}^j&=F_{11}+F_{12}Z_1^j \\ F_{22}^j&=F_{22}-Z_1^jF_{12} \end{aligned} \qquad (3.43)$$

Primjena ovih opštih rezultata, koji karakterišu rješenja generalne algebarske Rikatijeve jednačine, na jednačinu (3.33), sa matricom koeficijenata definisanom sa (3.34), daje sledeće rezultate:

Lema II.3.1 Pod pretpostavkom da važi princip inkluzije, tj. $R\{X_{r2}\}\subset R\{X_{r1}\}$, spektar matrice F je dat sa

$$S(F)=S(-I_{r_2})\cup S(F_{21}F_{12})=S_1\cup\bar{S}_1 \tag{3.44}$$

Dokaz Primijenimo transformaciju sličnosti

$$T=\begin{bmatrix} I_r & F_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix} I_r & -F_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

na matricu F, čime dobijamo

$$F_t=\begin{bmatrix} F_{11}-F_{12}F_{21} & (F_{11}-F_{12}F_{21}+I)F_{12} \\ F_{21} & F_{21}F_{12} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Da bi dokazali lemu pokazaćemo da važi

$$F_{11}-F_{12}F_{21}=-I \tag{3.47}$$

pošto se tada F_t svodi na

$$F_t=\begin{bmatrix} -I_{r_2} & 0 \\ F_{21} & F_{21}F_{12} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

odakle dokaz neposredno slijedi. Po definiciji imamo

$$F_{11}-F_{12}F_{21}=(U_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+S_{21}M_{11}^{-1}U_{12}-M_{22}+U_{21}M_{11}^{-1}U_{12})Q_{21}^{-1}=$$
$$=(U_{21}M_{11}^{-1}S_{12}-M_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+M_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+S_{21}M_{11}^{-1}U_{12}-M_{22}+U_{21}M_{11}^{-1}U_{12})Q_{21}^{-1}$$

pa uzimajući u obzir (3.27) i (3.32), slijedi

$$F_{11}-F_{12}F_{21}=(-S_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+M_{21}M_{11}^{-1}S_{12}+(S_{21}+U_{21})M_{11}^{-1}U_{12}-M_{22})Q_{21}^{-1}=$$
$$=(-Q_{21}+M_{21}M_{11}^{-1}(S_{12}+U_{12})-M_{22})Q_{21}^{-1}=(-Q_{21}+M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}-M_{22})Q_{21}^{-1}$$

Medjutim, iz principa inkluzije i osobina projekcionih matrica imamo

$$M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}-M_{22}=C_2X_{r_1}(C_1X_{r_1})^{-1}X_{r_2}-C_2X_{r_2}=C_2P_1X_{r_2}-C_2X_{r_2}=$$

$$=C_2X_{r_2}-C_2X_{r_2}=0 \tag{3.49}$$

što znači da (3.47) važi, pa je lema dokazana.

Lema II.3.2 Rješenje Z_1^1 jednačine (3.33) pridruženo spektru S_1 je

$$Z_1^1=-F_{21}=-T_1M_{11}^{-1}U_{12}Q_{21}^{-1} \tag{3.50}$$

Dokaz Direktno slijedi iz definicije W_1, V_1 i Z_1^1, tj.

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix}(-I)$$

odakle je $F_{21}W_1=-V_1$, tj. $Z_1^1=V_1W_1^{-1}=-F_{21}$.

Za ovo rješenje, L_1^1 i L_2^1 se dobijaju iz (3.36) kao

$$\begin{aligned} L_1^1&=-T_1M_{11}^{-1}-T_1M_{11}^{-1}U_{12}Q_{21}^{-1}S_{21}M_{11}^{-1} \\ L_2^1&=-T_2(M_{22}+D_{21}L_1^1S_{12})^{-1} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Ovo rješenje se dalje može uprostiti, s obzirom da je

$$L_1^1S_{12}=-T_1M_{11}^{-1}S_{12}-T_1M_{11}^{-1}U_{12}Q_{21}^{-1}S_{21}M_{11}^{-1}S_{12}=-T_1M_{11}^{-1}S_{12}-T_1M_{11}^{-1}U_{12}Q_{21}^{-1}Q_{21}=$$

$$=-T_1M_{11}^{-1}S_{12}-T_1M_{11}^{-1}U_{12}=-T_1M_{11}^{-1}M_{12}$$

pa je, pošto S_{12} u opštem slučaju ima puni rang,

$$L_1^1=-T_1M_{11}^{-1}M_{12}S_{12}^{\dagger} \tag{3.52}$$

pri čemu $\dagger$ označava pseudo-inverziju. Takodje, uzimajući u obzir (3.49) dobija se

$$\begin{aligned} L_2^1&=-T_2(M_{22}-D_{21}T_1M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}=-T_2(M_{22}-U_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}= \\ &=-T_2(M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}-U_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}=-T_2(S_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Primijetimo da u specijalnom slučaju kada oba regulatora imaju isti broj mjerenja, tj. $r_1=r_2$, rješenja za L_1^1 i L_2^1, koja odgovaraju negativnim jediničnim sopstvenim vrijednostima, poprimaju posebno prosti oblik

$$L_1^1=-T_1S_{12}^{-1}$$
$$L_2^1=-T_2S_{21}^{-1} \tag{3.54}$$

S obzirom da je dimenzija matrice F $(m_1+r_2)x(m_1+r_2)$ i da je njen spektar dat sa $S(F)=S(-I_{r_2})US(F_{21}F_{12})$, slijedi da kada je $m_1<r_2$, tada su sve preostale sopstvene vrijednosti od F generalno različite od nule; posledice ove činjenice ćemo razmatrati uskoro. Medjutim, u slučaju da je $m_1>r_2$ maksimalni rang od $F_{21}F_{12}$ je r_2 tako da $S(F_{21}F_{12})$ sadrži najmanje $t=m_1-r_2$ nultih sopstvenih vrijednosti. Znači tada važi $S(F_{21}F_{12})=S(O_t)US(F_{12}F_{21})=S_oUS_r$. Iz strukture sopstvenih vektora pridružene spektru $S(F_{21}F_{12})$

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_o & W_r \\ V_o & V_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_o & W_r \\ V_o & V_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_r \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

neposredno slijedi da je $W_o=0$, što znači da sopstveni vektori pridruženi nultim sopstvenim vrijednostima nijesu dopustivi u smislu Definicije II.3.1. Primijetimo, medjutim, da jedno rješenje jednačine (3.33) može biti asocirano sa r_2 nenultih sopstvenih vrijednosti iz $S_r=S(F_{12}F_{21})$. Da bi dobili ovo rješenje primijetimo da iz (3.55) slijedi

$$F_{11}W_r+F_{12}V_r=W_rS_r \tag{3.56}$$

$$F_{21}W_r=V_rS_r \tag{3.57}$$

Prema tome važi

$$F_{12}F_{21}W_r=F_{12}V_rS_r=(-F_{11}W_r+W_rS_r)S_r=-F_{11}W_rS_r+W_rS_r^2 \tag{3.58}$$

što uz korišćenje (3.47) i pregrupisavanje članova, daje

$$F_{12}F_{21}W_r(I+S_r)=W_rS_r(I+S_r) \tag{3.59}$$

odakle, ako S_r nema negativnih jediničnih sopstvenih vrijednosti, slijedi

$$F_{12}F_{21}W_r=W_rS_r \tag{3.60}$$

Uzimajući u obzir (3.57), (3.60) i definiciju Z_1^2, slijedi

$$Z_1^2=V_rW_r^{-1}=F_{21}W_rS_r^{-1}W_r^{-1}=F_{21}(F_{12}F_{21})^{-1} \tag{3.61}$$

Znači, Z_1^2 predstavlja rješenje za Rikatijevu jednačinu (3.33). Medjutim, lako se pokazuje da je za ovo rješenje $I-L_1^2D_{12}L_2^2D_{21}$ singularna matrica, tj.

$$\begin{aligned}\det(I-L_1^2D_{12}L_2^2D_{21})&=\det(I-Z_1^2F_{12})=\det(I-F_{21}(F_{12}F_{21})^{-1}F_{12})=\\&=\det(I-F_{12}F_{21}(F_{12}F_{21})^{-1})=0\end{aligned} \tag{3.62}$$

Ova činjenica eliminiše Z_1^2 kao rješenje problema sinteze decentralizovanih statičkih regulatora metodom projekcionog upravljanja, s obzirom da inverzija matrice $(I-L_1^2D_{12}L_2^2D_{21})$, koja se pojavljuje u (3.23), nije definisana.

Za slučaj da je $r_2>r_1$ potrebno je riješiti (3.38) pa se analognim postupkom dobije spektar matrice $\bar{F}$, sa strukturom $S(\bar{F})=S(-I_{r_1})\cup S(\bar{F}_{21}\bar{F}_{12})$ kao i rješenje (3.38) pridruženo $S(-I_{r_1})$:

$$Z_2^1=-\bar{F}_{21} \tag{3.63}$$

što daje

$$\begin{aligned}L_1^1&=-T_1(S_{12}M_{22}^{-1}M_{21})^{-1}\\L_2^1&=-T_2M_{22}^{-1}M_{21}S_{21}^{\dagger}\end{aligned} \tag{3.64}$$

i, potpuno analogno, sve ostale rezultate dobijene za prethodni slučaj.

Sada nam je još preostalo da ispitamo da li rješenja (3.33) koja su pridružena podspektru S_b formiranom od b negativnih jediničnih sopstvenih vrijednosti i r_2-b (za slučaj $r_2<r_1$) sopstvenih vrijednosti iz $S(F_{12}F_{21})$, daju punovažna rješenja za pojačanja L_1 i L_2. Odgovor na ova pitanja daje sledeća

<u>Teorema II.3.2</u> Rješenje Z_1^1 jednačine (3.33) koje odgovara podspektru $S(-I_{r_2})$ je jedino rješenje za koje je $\det(I-Z_1D_{21})\neq 0$.

<u>Dokaz</u> Uočimo da se, s obzirom na (3.47), jednačina (3.33) može napisati kao

$$(I-Z_1F_{12})(Z_1+F_{21})=0 \tag{3.65}$$

Pretpostavimo sada da je $\hat{Z}$ rješenje (3.65) tako da je $\hat{Z}+F_{21}\neq 0$.

Tada iz uslova $(I-\hat{Z}F_{12})(\hat{Z}+F_{21})=0$ slijedi $(\hat{Z}+F_{21})\subset N\{I-\hat{Z}F_{12}\}$, što znači da je rang $(I-\hat{Z}F_{21})<r_2$, odnosno $\det(I-\hat{Z}F_{21})=0$, što dokazuje teoremu. Napomenimo da $N\{\cdot\}$ predstavlja jezgro (kernel) linearnog operatora.

Sada smo u prilici da sumiramo dosad dobijene rezultate u vidu sledeće

Teorema II.3.3 Optimalna projekciona upravljanja za problem sa direktnim sprezanjem kroz lokalne izlaze postoje za $r_2<r_1$ i odabrani invarijantni podprostor $R\{X_{r_2}\}$ i pod pretpostavkom da važi princip inkluzije $(R\{X_{r_2}\}\subset R\{X_{r_1}\})$, ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) rezultujući regulisani sistem je stabilan,

(b) $M_{11}=C_1X_{r_1}$ je regularna matrica,

(c) $Q_{21}=(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c)X_{r_1}M_{11}^{-1}(C_1-D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_c)X_{r2}$ je regularna matrica,

(d) matrice $I+D_{ii}L_i^1$, $i=1,2$, su regularne, za L_i^1, $i=1,2$, date izrazima (3.52) i (3.53), respektivno,

(e) $F_{21}F_{12}=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_{r1}(C_1X_{r_1})^{-1}D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_{r_2}Q_{21}^{-1}D_{21}$ ne sadrži u svom spektru negativne jedinične sopstvene vrijednosti.

Dokaz Uslovi (a) i (b) direktno slijede iz rezultata prethodnog odjeljka i definicije projekcionih matrica. Uslov (c) slijedi iz transformacije skupa spregnutih matričnih jednačina u odgovarajuću generalnu Rikatijevu jednačinu. Uslov (d) mora biti zadovoljen da bi se dobila originalna pojačanja K_i, $i=1,2$, koja implementiraju decentralizovano upravljanje, dok uslov (e) mora biti zadovoljen da bi se garantovalo da je $\det(I-Z_1^1F_{12})\neq 0$. Kada su ovi uslovi zadovoljeni, egzistencija i jedinstvenost rješenja za problem decentralizovanog statičkog regulatora izlaza lako slijedi iz prethodnih rezultata.

Napomenimo da potpuno analogni rezultati važe za slučaj $r_2>r_1$ u smislu da je jedino važeće rješenje $Z_2^1=-\bar{F}_{21}$. Dokaz ovog rezultata je izostavljen da bi se izbjeglo nepotrebno ponavljanje.

Konačno, preuredićemo izraze za L_i, K_i, $i=1,2$, u pogodniji oblik koji će nam kasnije poslužiti za generalizaciju gornjih rezultata za slučaj decentralizovanog upravljanja sa proizvoljnim brojem regulatora. Naime, za $r_1=r_2$ se lako pokazuje da se L_i, $i=1,2$, iz (3.54) mogu izraziti kao

$$L_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cX_r\left[(C_i-D_{ij}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r\right]^{-1}=-T_i(C_iX_r-D_{ij}T_j)^{-1} \quad (3.66)$$

$i=1,2,\ j=1,2,\ i\neq j$

pri čemu se odgovarajuća originalna pojačanja koja implementiraju decentralizovano upravljanje dobijaju kao

$$K_i=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cX_r\left[(C_i-D_{ii}R_{ii}^{-1}B_i^TM_c-D_{ij}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r\right]^{-1} \quad (3.67)$$

$i=1,2,\ j=1,2,\ i\neq j$

Na sličan način, za $r_2<r_1$ se dobija

$$L_1=-T_1\{\left[C_1-D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_{r_2}(C_2X_{r_2}-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_{r_2})^{-1}(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c)\right]X_{r_1}\}^{-1}$$

$$L_2=-T_2\left[(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c)X_{r_2}\right]^{-1} \quad (3.68)$$

odnosno, uvodeći

$$C_{2e}=C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c \quad (3.69)$$

i projekcionu matricu

$$P_{12}=X_{r_2}(C_{2e}X_{r_2})^{-1}C_{2e} \quad (3.70)$$

imamo

$$L_1=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_{r_1}\left[(C_1-D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_cP_{12})X_{r_1}\right]^{-1}$$

$$L_2=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_{r_2}\left[(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c)X_{r_2}\right]^{-1} \quad (3.71)$$

Originalna pojačanja su u ovom slučaju

$$K_1=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_{r_1}\left[(C_1-D_{11}R_{11}^{-1}B_1^TM_c-D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_cP_{12})X_{r_1}\right]^{-1}$$

$$K_2=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_{r_2}\left[(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c-D_{22}R_{22}^{-1}B_2^TM_c)X_{r_2}\right]^{-1} \quad (3.72)$$

a lako se pokazuje da analogni rezultati važe za $r_2>r_1$.

Iz navedenih izraza se lako uočava da oni predstavljaju pogodnu generalizaciju decentralizovanih pojačanja dobijenih metodom projekcionog upravljanja u smislu da ako su $D_{ij}=0$, $i,j=1,2$, (3.67) i (3.72) se svode na (2.25).

Opšti slučaj

Pošto smo na ovaj način dobili jednoznačno rješenje za slučaj dva upravljača sada ćemo pokazati kako se rješenje može generalizovati na slučaj kada je k iz relacije (3.5) proizvoljno, tj. kada broj upravljača nije ograničen. Da bi dobili uvid u mogućnost generalizacije, posmatrajmo prvo slučaj kada je k=3, tj.

$$\dot{x}=Ax+B_1u_1+B_2u_2+B_3u_3 \tag{3.73a}$$

$$\begin{aligned}y_1&=C_1x+D_{11}u_1+D_{12}u_2+D_{13}u_3\\ y_2&=C_2x+D_{21}u_1+D_{22}u_2+D_{23}u_3\\ y_3&=C_3x+D_{31}u_1+D_{32}u_2+D_{33}u_3\end{aligned} \tag{3.73b}$$

pri čemu ćemo, radi jednostavnosti izlaganja, pretpostaviti da je $r_i=r$, i=1,2,3. Problem se ponovo sastoji u nalaženju skupa lokalnih upravljanja oblika (3.7) koji će, pretpostavljajući da važi princip inkluzije, garantovati zadržavanje izabranog invarijantnog podprostora $R\{X_r\}$ u regulisanom sistemu.

Definišući L_i, i=1,2,3, kao u (3.11), i uzimajući u obzir (3.73b) lokalna upravljanja postaju

$$\begin{aligned}u_1&=L_1C_1x+L_1D_{12}u_2+L_1D_{13}u_3\\ u_2&=L_2C_2x+L_2D_{21}u_1+L_2D_{23}u_3\\ u_3&=L_3C_3x+L_3D_{31}u_1+L_3D_{32}u_2\end{aligned} \tag{3.74}$$

Odavde se, izvodjenjem osnovnih manipulacija, dobijaju tri para lokalnih upravljanja

$$\begin{aligned}u_1&=L_{13}C_{13}x+L_{13}D_{12}^3u_2\\ u_2&=L_{23}C_{23}x+L_{23}D_{21}^3u_1\end{aligned} \tag{3.75}$$

uz

$$L_{13}=(I-L_1D_{13}L_3D_{31})^{-1}L_1,\quad C_{13}=C_1+D_{13}L_3C_3,\quad D_{12}^3=D_{12}+D_{13}L_3D_{32}$$

$$L_{23}=(I-L_2D_{23}L_3D_{32})^{-1}L_2,\quad C_{23}=C_2+D_{23}L_3C_3,\quad D_{21}^3=D_{21}+D_{23}L_3D_{31},$$

odnosno

$$u_2=L_{21}C_{21}x+L_{21}D^1_{23}u_3$$
$$u_3=L_{31}C_{31}x+L_{31}D^1_{32}u_2 \tag{3.76}$$

uz

$$L_{21}=(I-L_2D_{21}L_1D_{12})^{-1}L_2,\ C_{21}=C_2+D_{21}L_1C_1,\ D^1_{23}=D_{23}+D_{21}L_1D_{13}$$
$$L_{31}=(I-L_3D_{31}L_1D_{13})^{-1}L_3,\ C_{31}=C_3+D_{31}L_1C_1,\ D^1_{32}=D_{32}+D_{31}L_1D_{12}$$

i konačno

$$u_1=L_{12}C_{12}x+L_{12}D^2_{13}u_3$$
$$u_3=L_{32}C_{32}x+L_{32}D^2_{31}u_1 \tag{3.77}$$

uz

$$L_{12}=(I-L_1D_{12}L_2D_{21})^{-1}L_1,\ C_{12}=C_1+D_{12}L_2C_2,\ D^2_{13}=D_{13}+D_{12}L_2D_{23}$$
$$L_{32}=(I-L_3D_{32}L_2D_{23})^{-1}L_3,\ C_{32}=C_3+D_{32}L_2C_2,\ D^2_{31}=D_{31}+D_{32}L_2D_{21}$$

Daljim uprošćavanjem se dobijaju, iz (3.76)

$$u_2=\bar{K}_{21}\bar{C}_{21}x$$
$$u_3=\bar{K}_{31}\bar{C}_{31}x \tag{3.78}$$

uz

$$\bar{K}_{21}=(I-L_{21}D^1_{23}L_{31}D^1_{32})^{-1}L_{21},\ \bar{C}_{21}=C_{21}+D^1_{23}L_{31}C_{31}$$
$$\bar{K}_{31}=(I-L_{31}D^1_{32}L_{21}D^1_{23})^{-1}L_{31},\ \bar{C}_{31}=C_{31}+D^1_{32}L_{21}C_{21}$$

odnosno iz (3.77)

$$u_1=\bar{K}_{12}\bar{C}_{12}x$$
$$u_3=\bar{K}_{32}\bar{C}_{32}x \tag{3.79}$$

uz

$$\bar{K}_{12}=(I-L_{12}D^2_{13}L_{32}D^2_{31})^{-1}L_{12},\ \bar{C}_{12}=C_{12}+D^2_{13}L_{32}C_{32}$$
$$\bar{K}_{32}=(I-L_{32}D^2_{31}L_{12}D^2_{12})^{-1}L_{32},\ \bar{C}_{32}=C_{32}+D^2_{31}L_{12}C_{12}$$

i iz (3.75)

$$u_1=\bar{K}_{13}\bar{C}_{13}x$$
$$u_2=\bar{K}_{23}\bar{C}_{23}x \qquad (3.80)$$

uz

$$\bar{K}_{13}=(I-L_{13}D_{12}^{3}L_{23}D_{21}^{3})^{-1}L_{13},\quad \bar{C}_{13}=C_{13}+D_{12}^{3}L_{23}C_{23}$$
$$\bar{K}_{23}=(I-L_{23}D_{21}^{3}L_{13}D_{12}^{3})^{-1}L_{23},\quad \bar{C}_{23}=C_{23}+D_{21}^{3}L_{13}C_{13}$$

Koristeći prilaz zasnovan na projekcionim upravljanjima dobija se, iz (3.78)

$$\bar{K}_{21}=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_r(\bar{C}_{21}X_r)^{-1}=-T_2(\bar{C}_{21}X_r)^{-1} \qquad (3.81a)$$
$$\bar{K}_{31}=-R_{33}^{-1}B_3^TM_cX_r(\bar{C}_{31}X_r)^{-1}=-T_3(\bar{C}_{31}X_r)^{-1} \qquad (3.81b)$$

iz (3.79)

$$\bar{K}_{21}=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_r(\bar{C}_{13}X_r)^{-1}=-T_1(\bar{C}_{12}X_r)^{-1} \qquad (3.82a)$$
$$\bar{K}_{32}=-R_{33}^{-1}B_3^TM_cX_r(\bar{C}_{32}X_r)^{-1}=-T_3(\bar{C}_{32}X_r)^{-1} \qquad (3.82b)$$

i iz (3.80)

$$\bar{K}_{13}=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_r(\bar{C}_{13}X_r)^{-1}=-T_1(\bar{C}_{13}X_r)^{-1} \qquad (3.83a)$$
$$\bar{K}_{23}=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_r(\bar{C}_{23}X_r)^{-1}=-T_2(\bar{C}_{23}X_r)^{-1} \qquad (3.83b)$$

Predstavimo sada jednačine (3.81) - (3.83) u razvijenoj formi:

$$(I-L_{21}D_{23}^{1}L_{31}D_{32}^{1})^{-1}L_{21}=-T_2\left[(C_{21}+D_{23}^{1}L_{31}C_{31})X_r\right]^{-1} \qquad (3.81a)$$
$$(I-L_{31}D_{32}^{1}L_{21}D_{23}^{1})^{-1}L_{31}=-T_3\left[(C_{31}+D_{32}^{1}L_{21}C_{21})X_r\right]^{-1} \qquad (3.81b)$$
$$(I-L_{12}D_{13}^{2}L_{32}D_{31}^{2})^{-1}L_{12}=-T_1\left[(C_{12}+D_{13}^{2}L_{32}C_{32})X_r\right]^{-1} \qquad (3.82a)$$
$$(I-L_{32}D_{31}^{2}L_{12}D_{13}^{2})^{-1}L_{32}=-T_3\left[(C_{32}+D_{31}^{2}L_{12}C_{12})X_r\right]^{-1} \qquad (3.82b)$$
$$(I-L_{13}D_{12}^{3}L_{23}D_{21}^{3})^{-1}L_{13}=-T_1\left[(C_{13}+D_{12}^{3}L_{23}C_{23})X_r\right]^{-1} \qquad (3.83a)$$
$$(I-L_{23}D_{21}^{3}L_{13}D_{12}^{3})^{-1}L_{23}=-T_2\left[(C_{23}+D_{21}^{3}L_{13}C_{13})X_r\right]^{-1} \qquad (3.83b)$$

Primjećujemo da su jednačine (3.81 - 3.83) istog oblika kao i (3.23), tako da na osnovu prethodnih rezultata možemo naći njihova rješenja izražena preko pomoćnih varijabli L_{ij}, $i,j=1,2,3$. U tom smislu, jedinstveno rješenje za (3.81) je:

$$L_{21}=-T_2(C_{21}X_r-D^1_{23}T_3)^{-1} \tag{3.84a}$$

$$L_{31}=-T_3(C_{31}X_r-D^1_{32}T_2)^{-1} \tag{3.84b}$$

a na sličan način se dobijaju rješenja za (3.82) kao

$$L_{12}=-T_1(C_{12}X_r-D^2_{13}T_3)^{-1} \tag{3.85a}$$

$$L_{32}=-T_3(C_{32}X_r-D^2_{31}T_1)^{-1} \tag{3.85b}$$

i za (3.83) kao

$$L_{13}=-T_1(C_{13}X_r-D^3_{12}T_2)^{-1} \tag{3.86a}$$

$$L_{23}=-T_2(C_{23}X_r-D^3_{21}T_1)^{-1} \tag{3.86b}$$

Pošto su pomoćne varijable L_{ij}, $i,j=1,2,3$, funkcije L_i, $i=1,2,3$, sada ćemo odrediti pojačanja L_i, $i=1,2,3$, koja će preko raspregnutih jednačina (3.11) dati originalna pojačanja K_i, $i=1,2,3$. Da bi ovo uradili uočimo da se gornje jednačine mogu napisati u razvijenom obliku kao

$$(I-L_2D_{21}L_1D_{12})^{-1}L_2=-T_2[(C_2-D_{23}R^{-1}_{33}B^T_3M_c)X_r+D_{21}L_1(C_1-D_{13}R^{-1}_{33}B^T_3M_c)X_r]^{-1} \tag{3.87a}$$

$$(I-L_3D_{31}L_1D_{13})^{-1}L_3=-T_3[(C_3-D_{32}R^{-1}_{22}B^T_2M_c)X_r+D_{31}L_1(C_1-D_{12}R^{-1}_{22}B^T_2M_c)X_r]^{-1} \tag{3.87b}$$

$$(I-L_1D_{12}L_2D_{21})^{-1}L_1=-T_1[(C_1-D_{13}R^{-1}_{33}B^T_3M_c)X_r+D_{12}L_2(C_2-D_{23}R^{-1}_{33}B^T_3M_c)X_r]^{-1} \tag{3.88a}$$

$$(I-L_3D_{32}L_2D_{23})^{-1}L_3=-T_3[(C_3-D_{31}R^{-1}_{11}B^T_1M_c)X_r+D_{32}L_2(C_2-D_{21}R^{-1}_{11}B^T_1M_c)X_r]^{-1} \tag{3.88b}$$

$$(I-L_1D_{13}L_3D_{31})^{-1}L_1=-T_1[(C_1-D_{12}R^{-1}_{22}B^T_2M_c)X_r+D_{13}L_3(C_3-D_{32}R^{-1}_{22}B^T_2M_c)X_r]^{-1} \tag{3.89a}$$

$$(I-L_2D_{23}L_3D_{32})^{-1}L_2=-T_2[(C_2-D_{21}R^{-1}_{11}B^T_1M_c)X_r+D_{23}L_3(C_3-D_{31}R^{-1}_{11}B^T_1M_c)X_r]^{-1} \tag{3.89b}$$

kao i da je dovoljno uzeti tri nezavisne jednačine od gornjih šest da bi se dobilo rješenje za L_i, $i=1,2,3$. Naime, posmatrajmo (3.88a) i (3.87a) i primijetimo da su one oblika (3.23), tako da se jedinstveno rješenje za L_1 i L_2 dobija kao

$$L_1=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cX_r[(C_1-D_{12}R_{22}^{-1}B_2^TM_c-D_{13}R_{33}^{-1}B_3^TM_c)X_r]^{-1} \tag{3.90}$$

$$L_2=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cX_r[(C_2-D_{21}R_{11}^{-1}B_1^TM_c-D_{23}R_{33}^{-1}B_3^TM_c)X_r]^{-1} \tag{3.91}$$

Zamjenom (3.90) u (3.87b) dobija se

$$L_3=-R_{33}^{-1}B_3^TM_cX_r[(C_3-D_{31}R_{11}^{-1}B_1^TM_c-D_{32}R_{22}^{-1}B_2^TM_c)X_r]^{-1} \tag{3.92}$$

a zatim se odredjuju originalna pojačanja K_i, $i=1,2,3$, na prethodno opisan način.

Posmatrajući oblik dobijenih rješenja, sada možemo dokazati sledeći rezultat:

Lema II.3.3 Za sistem (3.5) sa proizvoljnim k i $r_i=r$, $i=1,\ldots,k$, pojačanja K_i, $i=1,\ldots,k$, koja implementiraju decentralizovano upravljanje (3.7) zadržavajući $R\{X_r\}$ kao invarijantni podprostor rezultujućeg regulisanog sistema data su izrazima

$$K_i=L_i(I+D_{ii}L_i)^{-1},\quad i=1,\ldots,k \tag{3.93}$$

pri čemu su

$$L_i=-T_i(C_iX_r-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}D_{ij}T_j)^{-1},\quad T_j=R_{jj}^{-1}B_j^TM_cX_r,\quad i=1,\ldots,k \tag{3.94}$$

Dokaz Dokazaćemo lemu pomoću matematičke indukcije. Naime, već smo pokazali da (3.94) važi za k=1,2,3, pa ako iz pretpostavke da rezultat važi za k-1, dokažemo da važi i za k, lema je dokazana.

Posmatrajmo, u tom smislu, problem sa k-1 upravljača

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k-1}B_iu_i \tag{3.95}$$

$$y_i=C_ix+\sum_{j=1}^{k-1}D_{ij}u_j,\quad i=1,\ldots,k-1 \tag{3.96}$$

$$u_i=K_iy_i,\quad i=1,\ldots,k-1 \tag{3.97}$$

Uzimajući L_i, $i=1,\ldots,k-1$, iz izraza (3.11), imamo

$$u_i=L_iC_ix+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} L_iD_{ij}u_j,\quad i=1,\dots,k-1 \tag{3.98}$$

Pretpostavljajući da su jedinstvena rješenja za L_i, $i=1,\dots,k-1$, data sa

$$L_i=-T_i(C_iX_r-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} D_{ij}T_j)^{-1},\quad i=1,\dots,k-1 \tag{3.99}$$

razmotrimo isti problem sa k upravljača i izrazimo lokalna upravljanja kao

$$u_i=L_iC_ix+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} L_iD_{ij}u_j,\quad i=1,\dots,k \tag{3.100}$$

Sukcesivnom eliminacijom u_q, $q=1,\dots,k$, iz preostalih jednačina za lokalna upravljanja, dobijamo k skupova od po k-1 lokalnih upravljanja oblika

$$u_i=L_{iq}C_{iq}x+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,q}}^{k} L_{iq}D_{ij}^{q}u_j,\quad i=1,\dots,k,\ q=1,\dots,k,\ i\neq q \tag{3.101}$$

pri čemu je

$$C_{iq}=C_i+D_{iq}L_qC_q,\ L_{iq}=(I-L_iD_{iq}L_qD_{qi})^{-1},\ D_{ij}^{q}=D_{ij}+D_{iq}L_qD_{qi} \tag{3.101b}$$

Primjenom metodologije projekcionih upravljanja, svaki od k problema definisanih sa (3.101) ima oblik (3.98) za koji smo pretpostavili jedinstveno rješenje oblika

$$L_{iq}=-T_i(C_{iq}X_r-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,q}}^{k} D_{ij}^{q}T_j)^{-1},\quad i,q=1,\dots,k,\ i\neq q \tag{3.102}$$

Uočavajući simetriju koja postoji u problemu, imamo takodje

$$L_{qi}=-T_q(C_{qi}X_r-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,q}}^{k} D_{qj}^{i}T_j)^{-1},\quad i,q=1,\dots,k,\ i\neq q \tag{3.103}$$

Uzimajući u obzir (3.101b), relacije (3.102) i (3.103) postaju

$$(I-L_iD_{iq}L_qD_{qi})^{-1}L_i=-T_i[(C_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,q}}^{k}D_{ij}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r+D_{iq}L_q(C_q-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,q}}^{k}D_{qj}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r]^{-1} \qquad (3.104)$$

$$(I-L_qD_{qi}L_iD_{iq})^{-1}L_q=-T_q[(C_q-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,q}}^{k}D_{qj}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r+D_{qi}L_i(C_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,q}}^{k}D_{ij}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c)X_r]^{-1} \qquad (3.105)$$

pri čemu je očigledno da su (3.104) i (3.105) oblika (3.23), sa jedinstvenim rješenjem za L_i datim sa

$$L_i=-T_i(C_iX_r-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}D_{ij}T_j)^{-1} \qquad (3.106)$$

Pošto, zbog simetrije problema, ovo važi za $i=1,\ldots,k$, lema je dokazana.

Napomenimo da se originalna pojačanja koja realizuju decentralizovano upravljanje (3.97) mogu napisati kao

$$K_i=-T_i(C_iX_r-\sum_{j=1}^{k}D_{ij}T_jX_r)^{-1},\quad i=1,\ldots,k \qquad (3.107)$$

Sada nam je preostalo da razmotrimo sintezu decentralizovanih projekcionih upravljanja za najopštiji slučaj sa k upravljača od kojih svaki ima proizvoljan broj dostupnih lokalnih mjerenja. Ispostavlja se da se decentralizovana pojačanja ponovo mogu analitički izraziti ali da su pri tome odgovarajući izrazi složeniji od onih dobijenih za poseban slučaj $r_i=r$, $i=1,\ldots,k$. S druge strane, lokalna pojačanja asocirana sa različitim upravljačima će u opštem slučaju imati različit oblik koji zavisi od dimenzije pridruženog lokalnog vektora izlaza i njenog odnosa sa dimenzijama preostalih lokalnih izlaza. Kao ilustraciju navešćemo analitičke izraze za tri pojačanja pridružena upravljačima sa najmanjim brojem mjerenja. U tom smislu pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da su dimenzije lokalnih vektora izlaza poredjane na sledeći način:

$r_1>r_2>\ldots>r_p>r_q>r_k$

pri čemu je $p=k-2$, $q=k-1$. Pretpostavimo takodje da važi princip inkluzije: $R\{X_{rk}\}\subset R\{X_{ri}\}$ za $r_k<r_i$. Ponovo se može pokazati da su lokalna pojačanja koja zadržavaju $R\{X_{rk}\}$ u rezultujućem regulisanom

sistemu data sa (3.93), pri čemu su

$$L_k=-T_k(C_{ke}X_{rk})^{-1},\quad C_{ke}=C_k-\sum_{j=1}^{k-1}D_{kj}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c \tag{3.108}$$

$$L_q=-T_q(C_{qe}X_{rq})^{-1},\quad C_{qe}=C_q-\sum_{j=1}^{p}D_{qj}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c-D_{qk}R_{kk}^{-1}B_k^TM_cP_{qk}$$

$$P_{qk}=X_{rk}(C_{ke}X_{rk})^{-1}C_{ke} \tag{3.109}$$

$$L_p=-T_p(C_{pe}X_{rp})^{-1} \tag{3.110}$$

uz

$$C_{pe}=C_p-\sum_{j=1}^{k-3}D_{pj}R_{jj}^{-1}B_j^TM_c-D_{pq}R_{qq}^{-1}B_q^TM_cP_{pq}-D_{pk}R_{kk}^{-1}B_kM_cP_{pq}+X_{rk}(C_{ke}X_{rk})^{-1}D_{kq}R_{kk}^{-1}B_q^TM_cR_{pq}$$

$$P_{pq}=X_{rq}(A_pX_{rq})^{-1},\quad R_{pq}=I-P_{pq}$$

$$A_p=C_{qe}-D_{qk}T_k(C_{ke}X_{rk})^{-1}D_{kq}R_{qq}^{-1}B_q^TM_c$$

Navedeni rezultat je zasnovan na rješenju za odgovarajući problem za dva upravljača datom sa (3.71), i može se lako dokazati potpuno analogno prethodnom postupku, pa zbog toga izostavljamo detalje.

Sa rezultatima navedenim u ovom odjeljku, primjena metodologije projekcionih upravljanja za sintezu decentralizovanih statičkih regulatora uspješno je proširena na slučaj direktnog sprezanja lokalnih upravljača preko lokalnih mjerenja, a konkretna primjena na sintezu industrijskih tipova decentralizovanih regulatora će biti razmatrana detaljnije u narednim odjeljcima.

II. 4. SINTEZA DINAMIČKIH REGULATORA NISKOG REDA U SISTEMIMA SA DECENTRALIZOVANOM STRUKTUROM

Ako se u datom problemu upravljanja, koji je definisan sistemom

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k} B_i u_i, \quad x\varepsilon R^n, \quad u_i \varepsilon R^{m_i} \tag{4.1a}$$

$$y_i=C_i x, \quad y_i \varepsilon R^{r_i}, \quad i=1,\ldots,k \tag{4.1b}$$

i kriterijumom

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^T Qx+\sum_{i=1}^{k} u_i^T R_{ii} u_i)dt \tag{4.2}$$

ne dobije zadovoljavajuće rješenje primjenom decentralizovanih statičkih regulatora razradjenih u Odjeljku II.2 i oblika

$$u_i=K_i y_i, \quad i=1,\ldots,k \tag{4.3}$$

nameće se potreba za uvodjenjem skupa dinamičkih regulatora oblika

$$\dot{z}_i=H_i z_i+D_i y_i, \quad z_i \varepsilon R^{p_i}, \quad i=1,\ldots,k \tag{4.4}$$

$$u_i=K_{zi} z_i+K_{yi} y_i, \quad i=1,\ldots,k \tag{4.5}$$

u cilju poboljšanja rješenja. Pri tome se kao slobodni parametri u sintezi u najopštijem slučaju pojavljuju dimenzije dinamičkih regulatora p_i, $i=1,\ldots,k$, parametri regulatora H_i, D_i, $i=1,\ldots,k$, i parametri povratne sprege K_{zi}, K_{yi}, $i=1,\ldots,k$. Pošto je, kao što je pokazano u prvom dijelu ovog rada, sličan problem uspješno riješen u slučaju centralizovane informacione strukture primjenom projekcionih upravljanja ovdje se izlaže generalizacija metodologije na sisteme sa decentralizovanom informacionom strukturom, čime se problem sinteze statičkih i dinamičkih regulatora za centralizovanu i decentralizovanu strukturu povezuje u jedinstvenu cjelinu.

U tom smislu posmatrajmo opšti slučaj sa k upravljačkih centara pri čemu svaki ima različiti broj dostupnih mjerenja. Problem se razmatra smatrajući da važe sledeće pretpostavke:

(a) Prvi regulator ima najmanji broj dostupnih mjerenja, $r_1=r_{min}$ dok se broj mjerenja koja stoje na raspolaganju ostalim upravljačkim centrima kreće izmedju r_{min} i $r_{max} \geq r_{min}$;

(b) Matematički model sistema je u formi gdje su prvih r_{min} stanja istovremeno i izlazi sistema asocirani sa prvim regulatorom, tj. $C_1 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \end{bmatrix}$;

(c) Sistem ne posjeduje fiksne modove*;

(d) Svi upravljački centri koriste dinamičke regulatore dimenzije p_i, $i=1,\dots,k$, tako da važi

$$r_i + p_i = r \geq r_{max}, \quad i=1,\dots,k \tag{4.6}$$

Smisao ovih pretpostavki i opravdanost njihovog uvodjenja biće diskutovani kasnije, a sada za dati problem decentralizovanog upravljanja definisan izrazima (4.1), (4.2), (4.4) i (4.5), razmotrimo efekte primjene projekcionih upravljanja na sistem (4.1), (4.4) u cilju poboljšanja performanse regulisanog sistema u odnosu na performanse postignute statičkim regulatorima oblika (4.3).

U tom smislu, pretpostavljajući da su svi dinamički regulatori stabilni u otvorenom režimu i da su kompletna stanja dinamičkih regulatora dostupna odgovarajućem upravljačkom centru, definišimo prošireni sistem

$$\dot{x}_e = A_e x_e + \sum_{i=1}^{k} B_{ie} u_i, \quad x_e^T = \begin{bmatrix} z_1^T \dots z_k^T & x^T \end{bmatrix} \tag{4.7a}$$

$$y_{ie} = C_{ie} x_e, \quad y_{ie}^T = \begin{bmatrix} z_i^T & y_i^T \end{bmatrix}, \quad i=1,\dots,k \tag{4.7b}$$

gdje je

$$A_e = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \dots 0 & D_1 & 0 \\ 0 & H_2 \dots 0 & D_{21} & D_{22} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots H_k & D_{k1} & D_{k2} \\ 0 & 0 \dots 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \dots 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

---

*Za dati sistem (A,B,C) i skup matrica $\mathcal{K} = \{K: K = dg\{K_1,\dots,K_k\}\}$, skup fiksnih modova sistema (A,B,C) u odnosu na $\mathcal{K}$ je dat izrazom, /36/, $\sigma(A,B,C,\mathcal{K}) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \Lambda(A+BKC)$.

pri čemu su

$$H=dg\{H_1,\dots,H_k\},\ D=dg\{D_1,\dots,D_k\},\ C^T=\left[C_1^T\dots C_k^T\right]$$

$$DC=\begin{bmatrix} D_1C_1 \\ D_2C_2 \\ \vdots \\ D_kC_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_{21} & D_{22} \\ \vdots & \vdots \\ D_{k1} & D_{k2} \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} H\varepsilon R^{pxp},\ DC\varepsilon R^{pxn},\ p=\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \\ D_{i1}\varepsilon R^{p_i x r_{min}},\ D_{i2}\varepsilon R^{p_i x (n-r_{min})} \end{matrix} \tag{4.9}$$

i

$$C_{ie}=\begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix}\varepsilon R^{(r_i+p_i)x(n+p)},\quad J_i=\left[0\dots I_{pi}\dots 0\right]\varepsilon R^{p_i x p},\ i=1,\dots,k \tag{4.10}$$

sa odgovarajućim kriterijumom

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x_e^T Q_e x_e+\sum_{i=1}^{k} u_i^T R_{ii} u_i)dt,\ Q_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\ \varepsilon R^{(n+p)x(n+p)} \tag{4.11}$$

Da bi odredili projekciona upravljanja za ovakav prošireni sistem potrebno je naći odgovarajuće referentno rješenje. Pošto su $H_1,\dots,H_k$ stabilne matrice a stanja dinamičkih regulatora $z_1,\dots,z_k$ nijesu observabilna u kriterijumu (4.11) to je, analogno centralizovanom slučaju, referentno optimalno rješenje karakterisano sa rješenjem

$$M_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

proširene Rikatijeve jednačine, i pridruženom matricom optimalnog regulisanog sistema

$$F_e=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

pri čemu M_c i F karakterišu linearni regulator stanja za problem (4.1a), (4.2). Ovakvo optimalno rješenje je eksplicitno karakterisano invarijantnom strukturom definisanom optimalnim spektrom $\Lambda_e=\Lambda(F)\cup\Lambda(H)$ i matricom pridruženih sopstvenih vektora $\bar{X}_e\varepsilon R^{(n+p)x(n+p)}$ pri čemu je $F_e\bar{X}_e=\bar{X}_e\Lambda_e$, a očigledno je da je ova invarijantna struktura u prostoru R^n (pridruženom vektoru stanja originalnog sistema (4.1)) ista kao i za originalno referentno rješenje asocirano sa (4.1a) , (4.2).

Kada su parametri dinamičkih regulatora H_i, D_i, $i=1,\dots,k$, unaprijed fiksirani, matrica F_e i njeni sopstveni vektori su fiksirani pa su, shodno tome, projekciona upravljanja za prošireni sistem definisana sa $u_i=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^{T}M_eP_{ie}$, uz pogodno definisane projekcione matrice P_{ie}, $i=1,\dots,k$, u potpunosti odredjena, čime se problem formalno svodi na ranije izučeni problem statičkog decentralizovanog regulatora izlaza. U tom smislu, lako je pokazati da svi rezultati navedeni za ovaj problem u Odjeljku II.2 važe i za prošireni sistem. Glavna razlika je u tome što sada, s obzirom na pretpostavku (d), svaki upravljački centar ima na raspolaganju $r=r_i+p_i$ mjerenja proširenog sistema tako da se u rezultujućem regulisanom sistemu može zadržati r-dimenzioni invarijantni podprostor $R\{X_e\}$, pri čemu je X_e formirana od sopstvenih vektora matrice F_e pridruženih podspektru $\Lambda_r=\Lambda_{ri}\cup\Lambda_{pi}$ matrice F. Pošto su sopstvene vrijednosti matrice F definisane samo referentnim rješenjem za originalni problem pa, prema tome, ne zavise od parametara dinamičkih regulatora, zadržavanje konkretnog podspektra Λ_r od F u regulisanom sistemu je takodje invarijantno u odnosu na parametre regulatora. Parametri regulatora utiču samo na lokacije preostalih n+p-r polova regulisanog sistema. Ovi polovi su odredjeni spektrom pogodno definisane rezidualne matrice A_{re}. Pitanje kako parametri regulatora utiču na rezidualne polove je glavni problem u toku sinteze, jer kada se on riješi ostali koraci u sintezi su, kao što će biti pokazano, eksplicitno definisani.

Uzimajući u obzir navedeno razmatranje, smisao pretpostavke (d) postaje jasan. Naime, očigledno je da je za zadržavanje nekog invarijantnog podprostora u regulisanom sistemu potrebno zajedničko djelovanje svih upravljačkih centara, tj. da bi zadržali q-dimenzioni podprostor svaki upravljački centar mora imati q dostupnih mjerenja. Pošto jedan upravljački centar ima na raspolaganju r_{max} mjerenja, prirodno je da se informaciona struktura ostalih upravljačkih centara unaprijedi tako da svi imaju takodje r_{max} mjerenja. Dalje povećanje dimenzije dinamičkih regulatora nije apriori opravdano pošto dimenzije svih dinamičkih regulatora moraju biti simultano povećane da bi se zadržao invarijantni podprostor veće dimenzije. Može se ispostaviti da je ovako nešto neophodno u nekim problemima upravljanja ali to mora proizaći iz analize mogućnosti koju pružaju dinamički regulatori, kao što je ovdje uvedeno relacijom (4.6). Pretpostavka (a) je uvedena da bi, zajedno sa pretpostavkom (b), omogućila olakšanje analize, kao i da bi se u najvećoj mjeri iskoristile mogućnosti koje u sintezi pruža metoda projekcionog upravljanja. Napominjemo da se sa ove dvije pretpostavke ne gubi u opštosti razmatranja, s obzirom da bilo koji sistem može lako biti transformisan u oblik kompatibilan sa (a) i (b). Konačno, pretpostavka (c) garantuje da se sa skupom dinamičkih regulatora dovoljno visokog reda polovi regulisanog sistema mogu skoro uvijek proizvoljno podesiti, /36/.

Pretpostavimo sada, analogno centralizovanom slučaju, da su parametri H_i, D_i, $i=1,\dots,k$, proizvoljni i neka su Λ_r sopstvene vrijednosti matrice F izabrane za zadržavanje u regulisanom sistemu, pri čemu je Λ_r dekomponovana kao $\Lambda_r=dg\{\Lambda_{pi},\Lambda_{ri}\}$, $i=1,\dots,k$, kompatibilno sa različitim brojem mjerenja asociranim svakom upravljačkom centru. Označimo sopstvene vektore matrice F_e, asocirane sa

$\Lambda_r=\Lambda_{pi}\cup\Lambda_{ri}$, sa $X_e=\begin{bmatrix} W^i \\ X^i \end{bmatrix}$ gdje je $W^i=\begin{bmatrix} W_p^i & W_r^i \end{bmatrix}$, $W_p^i \varepsilon R^{p\times p_i}$, $W_r^i \varepsilon R^{p\times r_i}$,

a $X^i=\begin{bmatrix} X_p^i & X_r^i \end{bmatrix}$, $X_p^i \varepsilon R^{n\times p_i}$, $X_r^i \varepsilon R^{n\times r_i}$, $i=1,\dots,k$, su matrice formirane od sopstvenih vektora matrice F. Tada, uz dekompoziciju matrica W_p^i i W_r^i, $i=1,\dots,k$, kao

$$W_p^i=\begin{bmatrix} W_{p1}^i \\ W_{p2}^i \\ \vdots \\ W_{pk}^i \end{bmatrix},\quad W_r^i=\begin{bmatrix} W_{r1}^i \\ W_{r2}^i \\ \vdots \\ W_{rk}^i \end{bmatrix},\quad W_{pj}^i \varepsilon R^{p_j\times p_i},\ W_{rj}^i \varepsilon R^{p_j\times r_i},\quad \begin{matrix} i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k \end{matrix}$$

iz definicije sopstvenih vektora i strukture matrice F_e slijedi

$$\left.\begin{matrix} H_i W_{pi}^i + D_i C_i X_p^i = W_{pi}^i \Lambda_{pi} \\ H_i W_{ri}^i + D_i C_i X_r^i = W_{ri}^i \Lambda_{ri} \end{matrix}\right. \qquad i=1,\dots,k \tag{4.14}$$

Definišući

$$X_{pi} \equiv C_i X_p^i \varepsilon R^{r_i\times p_i},\quad X_{ri} \equiv C_i X_r^i \varepsilon R^{r_i\times r_i} \qquad i=1,\dots,k \tag{4.15a}$$

$$W_{pi} \equiv W_{pi}^{i} = J_i W_p^i \varepsilon R^{p_i \times p_i}, \quad W_{ri} \equiv W_{ri}^{i} = J^i W_r^i \varepsilon R^{p_i \times r_i}, \quad i=1,\dots,k \tag{4.15b}$$

imamo

$$\begin{aligned} H_i W_{pi} + D_i X_{pi} &= W_{pi} \Lambda_{pi} \\ H_i W_{ri} + D_i X_{ri} &= W_{ri} \Lambda_{ri} \end{aligned} \qquad i=1,\dots,k \tag{4.16}$$

tako da kada se jednom odrede W_{pi}, W_{ri}, $i=1,\dots,k$, tada se parametri pojedinih dinamičkih regulatora odredjuju iz raspregnutih jednačina.

Koristeći se uvidom dobijenim iz analognog centralizovanog problema ispitaćemo zavisnost rezidualne matrice A_{re} od W_{pi}, W_{ri} i od H_i, D_i, $i=1,\dots,k$. Pri tome se očekuje da se, kao i u centralizovanom problemu, može pokazati da spektar matrice A_{re} zavisi od parametara W_{pi}, W_{ri} a da ne zavisi eksplicitno od H_i, D_i, $i=1,\dots,k$. Ovakva zavisnost bi omogućila da se problem sinteze dinamičkih regulatora dekomponuje u tri faze:

(i) oblikovanje spektra matrice A_{re}, a samim tim i spektra regulisanog sistema $\Lambda(A_{ce})$, izborom W_{pi}, W_{ri}, $i=1,\dots,k$;

(ii) odredjivanje parametara H_i, D_i iz (4.16) za odredjene W_{pi}, W_{ri}, $i=1,\dots,k$;

(iii) odredjivanje projekcionih upravljanja i parametara povratne sprege za nadjene parametre regulatora.

S obzirom da zadnje dvije faze sinteze imaju relativno prosta analitička rješenja, koncentrisaćemo pažnju na odredjivanje pogodnog izraza za matricu A_{re}, u funkciji od W_{pi}, W_{ri}, ako je to moguće. Kao što će biti pokazano, ispostavlja se da zavisnost spektra rezidualne matrice A_{re} od slobodnih parametara W_{pi}, W_{ri}, može biti izražena preko pomoćnih varijabli $L_i = W_{pi}^{-1} W_{ri}$, $i=1,\dots,k$.

Iz definicije projekcionih upravljanja imamo:

$$u_i = -R_{ii}^{-1} B_{ie}^T M_e P_{ie}, \quad i=1,\dots,k \tag{4.17}$$

gdje su

$$P_{ie} = X_e (C_{ie} X_e)^{-1} C_{ie}, \quad i=1,\dots,k \tag{4.18}$$

pa je regulisani sistem opisan matricom stanja

$$A_{ce}=A_e-\sum_{i=1}^{k} B_{ie}R_{ii}^{-1}B_{ie}^{T}M_eP_{ie} \qquad (4.19)$$

pri čemu iz osobina projekcionih upravljanja važi

$$A_{ce}X_e=X_e\Lambda_r \qquad (4.20)$$

Znači, sama činjenica da svi upravljački centri koriste projekciona upravljanja garantuje da su $r=r_i+p_i$ izabranih sopstvenih vrijednosti matrice A_{ce} nekontrolabilni kroz parametre dinamičkih regulatora! Imajući ovo u vidu, pogodno je dekomponovati A_{ce} na odgovarajući način i tako eliminisati iz razmatranja tih r nekontrolabilnih sopstvenih vrijednosti. Da bi to uradili prvo ćemo permutovati stanja proširenog sistema i to tako da prvih r komponenti u novom vektoru stanja budu z_1 i y_1 (usled pretpostavke (b)). Na taj način se reprezentacija matematičkog modela proširenog sistema podesi prema prvom regulatoru. Označimo matricu rezultujućeg transformisanog regulisanog sistema sa $\hat{A}_{ce}$, i izvršimo dekompoziciju $\hat{A}_{ce}$ kao

$$\hat{A}_{ce}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{11}\varepsilon R^{r\times r} \qquad (4.21)$$

pri čemu su $\hat{A}_{ij}$, i,j=1,2, dati u prilogu A. Definišimo potom transformaciju sličnosti odredjenu sa

$$\hat{T}=\begin{bmatrix}\hat{X}_e & \hat{Y}\end{bmatrix}, \quad \hat{Y}=\begin{bmatrix}0\\ I_q\end{bmatrix}, \quad q\equiv n+p-r, \quad p\equiv\sum_{i=1}^{k}p_i$$

$$\hat{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{U}\\ \hat{V}\end{bmatrix}, \quad \hat{V}=\begin{bmatrix}-\hat{N} & I_q\end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

pri čemu je $\hat{X}_e$ matirca permutovanih sopstvenih vektora proširenog sistema pridruženih Λ_r, takva da je permutacija sopstvenih vektora kompatibilna sa već izvršenom permutacijom A_{ce} u novu matricu $\hat{A}_{ce}$. Tada važi

$$\hat{T}^{-1}\hat{A}_{ce}\hat{T}=\begin{bmatrix}\hat{U}\hat{A}_{ce}\hat{X}_e & \hat{U}\hat{A}_{ce}\hat{Y}\\ \hat{V}\hat{A}_{ce}\hat{X}_e & \hat{V}\hat{A}_{ce}\hat{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_r & \hat{U}\hat{A}_{ce}\hat{Y}\\ 0 & \hat{V}\hat{A}_{ce}\hat{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_r & \hat{U}\hat{A}_{ce}\hat{Y}\\ 0 & A_{re}\end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

pri čemu je rezidualna matrica A_{re} definisana kao

$$A_{re}=\hat{V}\hat{A}_{ce}\hat{Y}=\hat{A}_{22}-\hat{N}\hat{A}_{12} \qquad (4.24)$$

Ispitivanje zavisnosti spektra rezidualne matrice A_{re} od slobodnih parametara W_{pi}, W_{ri}, H_i, D_i, $i=1,\ldots,k$, prezentirano je u prilogu A. Tamo je pokazano da ako uvedemo pomoćne parametre L_i, definisane sa

$$L_i=W_{pi}^{-1}W_{ri},\quad i=1,\ldots,k \tag{4.25}$$

tada se zavisnost spektra $\Lambda(A_{re})$ može izraziti u funkciji samo parametara L_i, $i=1,\ldots,k$, pri čemu se ispostavlja da su $\hat{A}_{12}$ i $\hat{A}_{22}$ nelinearne funkcije od $L_1,\ldots,L_k$, dok je $\hat{N}$ nelinearna funkcija od L_1 a linearna funkcija od $L_2,\ldots,L_k$.

Znači, dekompoziciju problema sinteze je moguće izvršiti ali se, na žalost, pri tom suočavamo sa problemom oblikovanja rezidualnog spektra $\Lambda(A_{re})$ koji, usled nelinearne zavisnosti A_{re} od L_i, $i=1,\ldots,k$, prevazilazi uobičajene formulacije problema postavljanja polova. Prema tome, problem sinteze je moguće riješiti ali mnogo teže nego odgovarajući problem iz centralizovanog slučaja. Za sada napomenimo da se kao jedan od mogućih načina rješavanja problema postavljanja polova matrice A_{re} mogu upotrijebiti heurističke procedure sprovedene uz pomoć savremenih digitalnih računara, dok ćemo u narednom odjeljku prezentirati organizovani način za metodološki pristup ovom problemu.

Kada se odrede L_i, $i=1,\ldots,k$, koji daju zadovoljavajući rezidualni spektar, parametri povratne sprege se lako računaju iz (4.17), dok se parametri regulatora nalaze iz (4.16) kao

$$H_i=W_{pi}(\Lambda_{pi}-L_i\Lambda_{ri}X_{ri}^{-1}X_{pi})(I-L_iX_{ri}^{-1}X_{pi})^{-1}W_{pi}^{-1}$$

$$D_i=W_{pi}(L_i\Lambda_{ri}-\Lambda_{pi}L_i)(X_{ri}-X_{pi}L_i)^{-1}\qquad i=1,\ldots,k \tag{4.26}$$

pri čemu su W_{pi}, $i=1,\ldots,k$, proizvoljne regularne matrice, tako da je moguća bilo koja pogodna realizacija dinamičkih regulatora.

Napomenimo da se relacija (4.26) u pojedinim slučajevima mora donekle modifikovati. Naime, može se desiti da matrica Λ_r sadrži kompleksne parove tako da za odredjenu dimenziju j-tog lokalnog vektora izlaza nju nije moguće dekomponovati u blok dijagonalnu formu $\Lambda_r=dg\{\Lambda_{pj},\Lambda_{rj}\}$, kompatibilno sa brojem mjerenja j-tog upravljačkog centra i dimenzijom asociranog dinamičkog regulatora. U tom slučaju se matrica Λ_r dekomponuje kao

$\Lambda_r=\begin{bmatrix} J^j_{11} & J^j_{12} \\ J^j_{21} & J^j_{22} \end{bmatrix}$, $J^j_{11}\varepsilon R^{p_j\times p_j}$, pa relacija (4.14) za j-ti upravljački centar postaje

$$H_jW^j_{pj}+D_jC_jX^j_p=W^j_{pj}J^j_{11}+W^j_{rj}J^j_{21}$$
$$H_jW^j_{rj}+D_jC_jX^j_r=W^j_{pj}J^j_{12}+W^j_{rj}J^j_{22} \tag{4.14a}$$

odnosno, koristeći (4.15),

$$H_jW_{pj}+D_jX_{pj}=W_{pj}J^j_{11}+W_{rj}J^j_{21}$$
$$H_jW_{rj}+D_jX_{rj}=W_{pj}J^j_{12}+W_{rj}J^j_{22} \tag{4.16a}$$

Lako se pokazuje da se odavde parametri H_j i D_j dobijaju kao

$$H_j=W_{pj}\left[J^j_{11}-J^j_{12}X^{-1}_{rj}X_{pj}-L_j(J^j_{22}X^{-1}_{rj}X_{pj}-J^j_{21})\right](I-L_jX^{-1}_{rj}X_{pj})^{-1}W^{-1}_{pj}$$
$$D_j=W_{pj}\left[L_j(J^j_{22}-J^j_{21}L_j)-(J^j_{11}L_j-J^j_{12})\right](X_{rj}-X_{pj}L_j)^{-1} \tag{4.26a}$$

Očigledno je da (4.26) predstavlja samo specijalan slučaj relacije (4.26a), jer za $J^j_{12}=J^j_{21}=0$ submatrice J^j_{11} i J^j_{22} postaju Λ_{pj} i Λ_{rj} pa (4.26a) prelazi u (4.26).

Specijalni slučajevi, kod kojih problem postavljanja rezidualnih polova poprima jednostavan oblik, mogu se riješiti potpuno analogno centralizovanom problemu. U nekim drugim slučajevima, dio slobode sadržane u parametrima L_i, $i=1,\ldots,k$, može se žrtvovati u cilju svodjenja problema postavljanja polova na prostiji oblik. U daljem izlaganju ćemo razmotriti dvije takve klase problema. Prva nastaje u slučaju da svi upravljački centri osim jednog (bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti prvog) imaju na raspolaganju r mjerenja. Ovo bi bio primjer decentralizovanog problema kod kojeg problem podešavanja rezidualnih polova poprima prostu formu. Drugi nastaje u slučaju da svi upravljački centri osim prvog unaprijed fiksiraju parametre pridruženih dinamičkih kompenzatora, i ovo bi bio primjer problema kod kojeg se odredjena sloboda u slobodnim parametrima žrtvuje radi uprošćavanja problema oblikovanja rezidualnog spektra.

Neka je dat problem sa k upravljačkih centara pri čemu je $r_1=r_{min}$, $r_i=r$, $i=2,\dots,k$. U ovom slučaju samo jedan upravljački centar koristi dinamički regulator reda $p=r-r_{min}$ sa čime se omogućava da se zajedničkim dejstvom zadrži r-dimenzioni umjesto r_{min}-dimenzioni invarijantni podprostor od referentnog rješenja u rezultujućem regulisanom sistemu. Definišimo

$$X_e=\begin{bmatrix} W \\ X \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_{p1} & W_{r1} \\ X_p & X_r \end{bmatrix}$$

i izvršimo dekompoziciju X_r, X_p kao $X_p=\begin{bmatrix} X_{p1} \\ U_1 \end{bmatrix}$, $X_r=\begin{bmatrix} X_{r1} \\ Z_1 \end{bmatrix}$, tako da je transformacija sličnosti (4.22) sada odredjena matricom

$$T_e=\begin{bmatrix} W_{p1} & W_{11} & 0 \\ X_{p1} & X_{r1} & 0 \\ U_1 & Z_1 & I_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_e & Y_e \end{bmatrix},\ q=n+p-r \tag{4.27}$$

Uzimajući u obzir da je $P_{1e}Y_e=0$, nalazimo da je rezidualna matrica data sa $A_{re}=V_eA_{ce}Y_e=V_eA^1_{ce}Y_e$, pri čemu je

$$A^1_{ce}=A_e-\sum_{i=2}^{k} S_{ie}M_eP_{ie} \tag{4.28}$$

i

$$S_{ie}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix},\ M_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix},\ P_{ie}=X_e\begin{bmatrix} C_iX_p & C_iX_r \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & C_i \end{bmatrix},\ i=2,\dots,k.$$

Uvodjenjem dekompozicije $X_i=\begin{bmatrix} C_iX_p & C_iX_r \end{bmatrix}$ imamo

$$A^1_{ce}=\begin{bmatrix} H_1 & D_1C_1 \\ 0 & A \end{bmatrix}-\sum_{i=2}^{k}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_i \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

gdje je

$$G_i=S_iM_cXX_i^{-1}C_i,\ i=2,\dots,k \tag{4.30}$$

Iz (4.29) i (4.30) očigledno je da se A^1_{ce} može predstaviti u obliku

$$A^1_{ce}=\begin{bmatrix} H_1 & D_1C_1 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix},\quad \bar{A}=A-\sum_{i=2}^{k} G_i \tag{4.31}$$

pri čemu $\bar{A}$ ne zavisi od W_{p1} i W_{r1}. Particija $\bar{A}$ u obliku

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{11}\varepsilon R^{r_{min}\times r_{min}}$$

s obzirom na pretpostavku (b), daje

$$A_{ce}^{1}=\begin{bmatrix} H_1 & D_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

S druge strane, pošto je

$$V_e=\begin{bmatrix} -N & I \end{bmatrix}, \quad N=\begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{p1} & W_{r1} \\ X_{p1} & X_{r1} \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.33}$$

slijedi

$$A_{re}=\hat{A}_{22}-N\hat{A}_{12}, \quad \hat{A}_{22}=A_{22}, \quad \hat{A}_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_{12} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Iz (4.25) i (A.12) sada imamo

$$N\hat{A}_{12}=\begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{11}^{1} & K_{12}^{1} \\ K_{21}^{1} & K_{22}^{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -L_1 \\ I \end{bmatrix}K_{22}^{1}C_o \tag{4.35}$$

gdje je $C_o=\bar{A}_{12}$, tako da se dobija

$$A_{re}=\bar{A}_{22}-\begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -L_1 \\ I \end{bmatrix}K_{22}^{1}C_o=A_r+B_oP_oC_o \tag{4.36}$$

pri čemu napominjemo da je izraz za A_{re} sveden na ovaj oblik uvodjenjem parametra

$$P_o=L_1(X_{r1}-X_{p1}L_1)^{-1} \tag{4.37}$$

što uz identitete

$$L_1=(I+P_oX_{p1})^{-1}P_oX_{r1}, \quad (X_{r1}-X_{p1}L_1)^{-1}=X_{r1}^{-1}(I+X_{p1}P_o)$$

daje

$$\begin{bmatrix} -L_1 \\ I \end{bmatrix} K_{22}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{r1}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_p \\ -X_{r1}^{-1} X_{p1} \end{bmatrix} P_o \tag{4.38}$$

tako da su A_r i B_o iz (4.36) definisani sa

$$A_r = \bar{A}_{22} - \begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_{r1}^{-1} \end{bmatrix} C_o = \bar{A}_{22} - Z_1 X_{r1}^{-1} C_o = \bar{A}_{22} - N_o C_o \tag{4.39}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} U_1 & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -X_{r1}^{-1} X_{p1} \end{bmatrix} = U_1 - Z_1 X_{r1}^{-1} X_{p1} = U_1 - N_o X_{p1} \tag{4.40}$$

S obzirom da A_r, B_o, C_o iz (4.36) ne zavise od W_{p1}, W_{r1} (pa znači ni od parametara dinamičkog regulatora H_1 i D_1), sva sloboda sadržana u parametrima regulatora preslikana je u proizvoljan izbor matrice P_o a iz oblika (4.36) je jasno da se pridruženi problem oblikovanja rezidualnog spektra u ovom slučaju sveo na linearni problem postavljanja polova pomoću povratne sprege po izlazu, koji se može riješiti koristeći postojeće algoritme, /86/. Važno je napomenuti da u ovom slučaju oblikovanje spektra $\Lambda(A_{re})$ predstavlja u suštini poboljšanje spektra $\Lambda(A_r)$ koji je smatran nepodobnim prilikom sinteze decentralizovanih statičkih regulatora, tj. kada je samo r_{min} - dimenzioni invarijantni podprostor referentnog rješenja zadržan u regulisanom sistemu.

Sa dobijenim P_o izračuna se odgovarajuće L_1 pa se iz (4.26) (za i=1) dobiju parametri regulatora H_1 i D_1. Sa tako izračunatim parametrima, pojačanja povratne sprege se lako odredjuju iz (4.17) a mogu se, po analogiji sa centralizovanim problemom, prikazati i pomoću direktnih analitičkih izraza i to za prvi upravljački centar sa

$$\begin{aligned} K_{z1} &= -R_{11}^{-1} B_1^T M_c P_z \\ K_{y1} &= -R_{11}^{-1} B_1^T M_c P_y \end{aligned} \tag{4.41}$$

pri čemu je

$$P_z = \begin{bmatrix} 0 \\ N_p \end{bmatrix}, \quad P_y = \begin{bmatrix} I \\ N_r \end{bmatrix}, \quad N_p = B_o(I + P_o X_{p1}), N_r = N_o - B_o P_o \tag{4.42}$$

dok se ostala pojačanja dobijaju kao

$$K_{zi}=0,\ K_{yi}=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c XX_i^{-1},\ i=2,\dots,k \tag{4.43}$$

Dakle, upravljačkim centrima i=2,...,k, treba odrediti samo parametre povratne sprege asocirane sa statičkim regulatorima. Iz gornjih izraza je važno uočiti da se sinteza statičkih regulatora za ove upravljačke centre može vršiti potpuno nezavisno jedan od drugog, čim se odredi invarijantni podprostor dimenzije r koji se zadržava u rezultujućem regulisanom sistemu. Pošto su pojačanja povratne sprege za ove upravljačke centre nezavisna i od dinamičkog regulatora koji koristi prvi upravljački centar, najprije treba odrediti njih a zatim parametre dinamičkog regulatora na opisani način.

Znači, za posmatrani specijalni slučaj može se izvršiti potpuno uopštavanje procedure za sintezu dinamičkog regulatora iz problema sa jednim upravljačkim centrom. Naime, prvo se može pokušati sinteza decentralizovanih statičkih regulatora pa ako se ispostavi da je rezidualni spektar ili nestabilan ili nezadovoljavajući, dodaje se dinamički kompenzator onom upravljačkom centru koji ima najmanji broj mjerenja. Sa ovim se, s jedne strane, dimenzija zadržanog invarijantnog podprostora povećava sa r_{min} na $r=r_{min}+p$ a, s druge strane, dodatna sloboda sadržana u parametrima dinamičkog regulatora koristi za oblikovanje pridruženog rezidualnog spektra.

Slučaj kada veći broj upravljačkih centara koristi dinamičke regulatore ali tako da je kod svih, osim prvog, struktura regulatora unaprijed fiksirana, može se smatrati kao varijacija gore opisanog problema. Razlika se ogleda samo u tome što neki upravljački centri imaju manji broj mjerenja pa im se broj efektivnih mjerenja povećava uvodjenjem dinamičkih regulatora. Osnovni efekat ovoga sastoji se u povećanju dimenzije sistema. Naime, dimenzija sistema je u ovom slučaju povećana sa $n+p_1$ na $n+p$, $p\equiv p_1+\dots+p_k$, tako da se povećava i dimenzija rezidualne matrice i to sa $n-r_1$ na $n+p_2+\dots+p_k-r_1$. Iz ovoga je jasno da se u tom slučaju mora žrtvovati znatna sloboda u cilju dobijanja rješivog problema postavljanja polova. Treba, medjutim, napomenuti da, zbog pretpostavke (a), dinamički regulator prvog upravljačkog centra ima najveću dimenziju što znači da se zadržava veći broj stepeni slobode nego u slučaju da smo njega fiksirali a bilo koji drugi ostavili slobodnim u postupku sinteze.

Važno je napomenuti da je i za ovaj slučaj sinteza dinamičkih regulatora i odgovarajućih parametara povratne sprege raspregnuta. Naime, svaki upravljački centar, osim prvog, izabere H_i i D_i a zatim odredjuje asocirane parametre povratne sprege K_{zi}, K_{yi} koji su sada u potpunosti odredjeni sa H_i, D_i i prethodno nadjenim optimalnim referentnim rješenjem. Prvi upravljački centar rješava zatim problem oblikovanja rezidualnog spektra i odredjuje sopstvene parametre H_1, D_1, K_{z1} i K_{y1}, čime se sinteza završava. Da bi ovo eksplicitno pokazali razmotrimo detaljnije strukturu projekcionih upravljanja pridruženih upravljačkim centrima i=2,...,k. Naime,

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^T M_e X_e (C_{ie}X_e)^{-1}C_{ie}=-R_{ii}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & B_i^T M_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W^i \\ X^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{pi} & W_{ri} \\ X_{pi} & X_{ri} \end{bmatrix}^{-1} C_{ie}, \text{ to jest}$$

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_i^T M_c X^i \begin{bmatrix} W_{pi} & W_{ri} \\ X_{pi} & X_{ri} \end{bmatrix}^{-1} C_{ie}, \quad i=2,\dots,k \tag{4.44}$$

pri čemu su W_{pi}, W_{ri}, i=2,...,k, rješenja raspregnutih Silvesterovih jednačina oblika

$$\begin{aligned} H_i W_{pi}-W_{pi}\Lambda_{pi}&=-D_i X_{pi} \\ H_i W_{ri}-W_{ri}\Lambda_{ri}&=-D_i X_{ri} \end{aligned} \qquad i=2,\dots,k \tag{4.45}$$

za fiksirane H_i, D_i i poznate X_{pi}, X_{ri}, Λ_{pi}, Λ_{ri}, i=2,...,k.

Navedene činjenice pokazuju još jednu fundamentalnu osobinu projekcionih upravljanja. Naime, ako upravljački centri ne koriste informacije o stanju dinamičkih regulatora ostalih centara u sintezi sopstvenih pojačanja povratne sprege, tada se potreba dogovora izmedju upravljačkih centara završava izborom pogodnog invarijantnog podprostora kojeg treba zadržati zajedničkim djelovanjem. Ovo otvara mogućnosti za organizovaniji prilaz generalnom problemu sinteze decentralizovanih dinamičkih regulatora, koji ćemo razmotriti u narednom odjeljku.

Primjer 5

Sistem sa dva upravljačka centra opisan je sa

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -3 & 0 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Uvodeći pogodnu transformaciju sličnosti

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

dobija se transformisani sistem pogodan za računanje:

$$A_t=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & -2 & -3\end{bmatrix},\quad B_{1t}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad B_{2t}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C_{1t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C_{2t}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Spektar slobodnog sistema je

$$\Lambda(A)=\{-2.1\pm j2.46, 0.13\pm j1.18, -3.55, -2.84, -0.69\}$$

a uzimajući $Q_t=\mathrm{diag}\{100,10,100,0,0,0,0\}$ i $R=I_2$, i rješavajući Rikatijevu jednačinu dobijaju se

$$M_c=\begin{bmatrix}42.40 & 0.86 & -22.06 & 12.57 & -4.32 & 6.02 & 1.94\\ 0.86 & 3.41 & -3.23 & 1.97 & -0.50 & -0.23 & 0.71\\ -22.06 & -3.23 & 40.16 & -11.85 & 7.46 & -0.54 & -2.71\\ 12.57 & 1.97 & -11.85 & 14.78 & -4.55 & 5.11 & 4.76\\ -4.32 & -0.50 & 7.46 & -4.55 & 2.63 & -0.49 & -1.39\\ 6.02 & -0.23 & -0.54 & 5.11 & -0.49 & 3.38 & 1.52\\ 1.94 & 0.71 & -2.71 & 4.76 & -1.39 & 1.52 & 1.73\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & -1.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & -2.00 & -1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \\ -2.00 & 1.00 & 0.00 & -1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.32 & 0.50 & -8.46 & 1.55 & -3.63 & -0.51 & 0.39 \\ 0.00 & -1.00 & -2.00 & 2.00 & -1.00 & -2.00 & 1.00 \\ -2.49 & -0.71 & 1.71 & -4.76 & -1.61 & -3.52 & -4.73 \end{bmatrix}$$

tako da je optimalni referentni spektar $\Lambda(F)$ dat sa

$\lambda_{1,2}=-2.56\pm j2.79$, $\lambda_{3,4}=-1.36\pm j2.13$, $\lambda_5=-0.95$, $\lambda_6=-3.7$, $\lambda_7=-2.88$.

Pošto je u ovom slučaju $\min_i r_i=1$, $i=1,2$, mogli bi pokušati sintezu statičkog decentralizovanog regulatora koji zadržava jednodimenzioni invarijantni podprostor. Medjutim, da bi ilustrovali sintezu dinamičkog regulatora pridružimo prvom upravljačkom centru dinamički regulator

$\dot{z}_1=H_1z_1+D_1y_1$, $z_1\varepsilon R^1$

i zadržimo invarijantni podprostor asociran sa kompleksnim parom $\lambda_{3,4}$ kome odgovara matrica optimalnih sopstvenih vektora

$$X=\begin{bmatrix} 0.23 & 0.31 \\ -0.23 & -0.18 \\ -0.19 & 0.17 \\ -0.82 & 0.29 \\ 0.04 & -0.42 \\ -0.11 & 0.26 \\ 0.44 & -0.90 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{p1} & X_{r1} \\ U_1 & Z_1 \end{bmatrix}$$

i pridružena Žordanova forma $\Lambda_r=\begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.36 & 2.13 \\ -2.13 & -1.36 \end{bmatrix}$

Iz (4.32) dobijamo

$$C_0=\bar{A}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \bar{A}_{22}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & -9.6 & 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

a izračunavanjem N_0 i B_0 iz (4.40) kao

$$N_0^T=\begin{bmatrix} -0.57 & 0.56 & 0.92 & -1.37 & 0.84 & -2.90 \end{bmatrix}$$

$$B_0^T=\begin{bmatrix} -0.10 & -0.32 & -1.03 & 0.35 & -0.31 & 1.10 \end{bmatrix}$$

na osnovu (4.39) dobija se

$$A_r=\begin{bmatrix} -2.00 & -1.57 & 0.57 & 1.00 & 0.57 & 0.00 \\ 0.00 & -0.44 & -0.56 & 1.00 & 0.44 & 0.00 \\ 1.00 & 0.92 & -1.92 & 1.00 & 0.08 & 1.00 \\ 0.00 & -2.37 & -1.63 & -1.00 & 0.37 & -1.00 \\ -1.00 & -1.16 & 1.16 & -1.00 & -2.84 & 1.00 \\ -4.01 & -12.56 & 2.90 & -3.00 & 0.90 & -3.00 \end{bmatrix}$$

čime je definisan problem postavljanja polova (4.36). Uzimajući $P_o=6$ rezidualna matrica A_{re} postaje

$$A_{re}=\begin{bmatrix} -2.00 & -0.99 & -0.01 & 1.00 & -0.01 & 0.00 \\ 0.00 & 1.47 & -2.47 & 1.00 & -1.47 & 0.00 \\ 1.00 & 7.10 & -8.10 & 1.00 & -6.10 & 1.00 \\ 0.00 & -4.47 & 0.47 & -1.00 & 2.47 & -1.00 \\ -1.00 & 0.67 & -0.67 & -1.00 & -4.67 & 1.00 \\ -4.01 & -19.16 & 9.50 & -3.00 & 7.50 & -3.00 \end{bmatrix}$$

sa asociranim rezidualnim spektrom

$$\Lambda(A_{re})=\{-9.17,\ -2.9\pm j0.8,\ -0.4\pm j0.49,\ -1.55\}$$

koji se može smatrati zadovoljavajućim. Za ovu vrijednost P_o nadjemo $L_1=0.79$ a zatim iz (4.26a) dobijemo parametre regulatora H_1 i D_1 kao $H_1=-9.03$, $D_1=26.36$. Parametri povratne sprege za prvi upravljački centar dobijaju se iz (4.41) kao $K_{z1}=-4.49$, $K_{y1}=15.43$, a parametri povratne sprege za drugi upravljački centar iz (4.43) kao $K_{y2}=\begin{bmatrix}-4.01 & -8.66\end{bmatrix}$, $K_{z2}=0$, čime se sinteza završava.

II.5. SEKVENCIJALNA PROCEDURA ZA SINTEZU DECENTRALIZOVANIH DINAMIČKIH REGULATORA

U prethodnom odjeljku smo pokazali da se generalni problem sinteze decentralizovanih dinamičkih regulatora može, analogno centralizovanom problemu, razložiti na tri faze pri čemu se u prvoj oblikuje rezidualni spektar regulisanog sistema a u preostale dvije faze se nalaze parametri regulatora i parametri povratne sprege. Takodje je pokazano da, kada se problem podešavanja rezidualnih polova uspješno riješi, preostale dvije faze u sintezi imaju rješenja opisana eksplicitnim analitičkim postupkom.

Medjutim, za prvu fazu u sintezi nije dato rješenje koje bi, sa metodološke tačke gledišta, u potpunosti zadovoljavalo.

Naime, i pored toga što je zavisnost rezidualnog spektra od slobodnih parametara u sintezi znatno pojednostavljena i izražena u funkciji manjeg broja pomoćnih varijabli L_i, $i=1,\dots,k$, ispostavlja se da je i ova zavisnost suviše složena da bi se, u opštem slučaju, mogla izraziti preko do sada poznatih procedura podešavanja polova. Ispostavilo se, takodje, da u specijalnom slučaju kada svi upravljački centri, osim jednog, koriste dinamičke regulatore fiksirane strukture, pomenuta zavisnost može biti svedena na linearni problem podešavanja polova u funkciji izlaza, čime se sve osobine centralizovanog rješenja generalizuju i na ovaj slučaj. Pored ovoga, pokazano je da se problem sinteze parametara regulatora i parametara povratne sprege za pojedine upravljačke centre može raspregnuti u smislu da kada se jednom odrede parametri regulatora q-tog upravljačkog centra, H_q i D_q, parametri pridružene povratne sprege su potpuno odredjeni, za unaprijed izabrani invarijantni podprostor referentnog rješenja koji treba zadržati u regulisanom sistemu. Sa ovim se dobija značajan uvid u mogućnosti organizovanja jednog metodološkog prilaza generalnom problemu sinteze dinamičkih regulatora.

U tom smislu, posmatrajmo sistem (4.1) sa definisanim kriterijumom (4.2) i razmotrimo problem odredjivanja parametara dinamičkih regulatora oblika (4.4) i parametara povratne sprege oblika (4.5), u duhu metodologije projekcionih upravljanja. Radi jednostavnosti izlaganja uvedimo privremenu pretpostavku

(e) sva mjerenja u sistemu su linearno nezavisna,

pri čemu ćemo kasnije pokazati da ona ne ograničava opštost razmatranja. Da bi obezbijedili bazis prostora stanja najpogodniji za analizu, uvedimo pogodnu transformaciju sličnosti tako da su prvih r_1 stanja u novom sistemu istovremeno izlazi pridruženi prvom upravljačkom centru, sledećih r_2 stanja izlazi pridruženi drugom upravljačkom centru, itd. Izvršimo dekompoziciju proširenog vektora stanja kao $x_e^T=\left[z_1^T\dots z_k^T x_1^T\; x_2^T\dots x_k^T\; x_s^T\right]$, $x_i\varepsilon R^{r_i}$, $x_s\varepsilon R^{n-\bar{r}}$, $\bar{r}=\sum_{i=1}^{k} r_i$, pa se prošireni sistem odredjen sa (4.1), (4.4) definiše sa (4.7), pri čemu su sada

$$A_e=\begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 & 0 & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_k & 0 & 0 & \dots & D_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} & A_{1s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} & A_{ks} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sk} & A_{ss} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H & D \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$D=\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{ie}=\begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix}, \quad C_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 \dots I_{r_i} \dots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dok su ostale veličine definisane kao u (4.9) i (4.10). Za izabrani invarijantni podprostor referentnog rješenja (4.11) karakterisan podspektrom $\Lambda_r=\Lambda_{ri}\cup\Lambda_{pi}\subset\Lambda(F)$, asocirani sopstveni vektori su definisani kao u prethodnom odjeljku, s tom razlikom što ćemo sada vektore X_p^i i X_r^i dekomponovati kao

$$X_p^i=\begin{bmatrix} X_{p1}^i \\ X_{p2}^i \\ \vdots \\ X_{pk}^i \\ X_{ps}^i \end{bmatrix}, \quad X_r^i=\begin{bmatrix} X_{r1}^i \\ X_{r2}^i \\ \vdots \\ X_{rk}^i \\ X_{rs}^i \end{bmatrix}, \quad X_{pi}^i\in R^{r_i\times p_i}, \quad X_{ri}^i\in R^{r_i\times r_i} \tag{5.2}$$

tako da sada, usled pretpostavke (e), X_{pi} i X_{ri} iz (4.15a) postaju

$$X_{pi}=C_iX_p^i=X_{pi}^i, \quad X_{ri}=C_iX_r^i=X_{ri}^i, \quad i=1,\dots,k \tag{5.3}$$

Imajući ovo u vidu, iz strukture referentnog rješenja i definicije sopstvenih vektora slijedi da važi izraz (4.26) koji služi za odredjivanje parametara H_i, D_i, za poznate W_{pi}, W_{ri}, $i=1,\dots,k$. Primjenom projekcionih upravljanja oblika (4.17), regulisani sistem je opisan sa (4.19) pri čemu se, uzimajući u obzir (A.1-A.3), matrica regulisanog sistema može napisati kao

$$A_{ce}=\begin{bmatrix} H & D \\ E & \bar{A} \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

gdje su $\bar{A}$ i E definisani relacijom (A.4). Uočimo da sada član G_i iz (A.4), zbog strukture matrica C_i, $i=1,\ldots,k$, utiče samo na i-tu blok-kolonu matrice $\bar{A}$ a takodje važi da član E_i iz (A.4) utiče samo na i-tu blok-kolonu matrice E, jer ova činjenica ne zavisi od pretpostavke (e). Dekomponujući

$$G=\begin{bmatrix} G_1 & \ldots & G_k \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} E_1 & \ldots & E_k \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

uočava se da struktura G_i i E_i, $i=1,\ldots,k$, ne zavisi od parametara q-tog dinamičkog regulatora H_q, D_q, za $q\neq i$. Naime, iz (A.4) je očigledno da E_i zavisi samo od H_i, D_i (i to preko K_{11}^i, K_{21}^i), dok G_i zavisi takodje samo od H_i, D_i (preko K_{12}^i, K_{22}^i).

Uzimajući u obzir ova razmatranja, sada možemo pristupiti sekvencijalnoj proceduri za podešavanje rezidualnog spektra regulisanog sistema u generalnom slučaju kada su svi H_i, D_i, $i=1,\ldots,k$, slobodni. Kao prvi korak u ovom postupku odaberimo proizvoljne konstantne vrijednosti za parametre svih dinamičkih regulatora, osim prvog, tj. uzmimo

$$H_i=H_i^o, \quad D_i=D_i^o \quad , \; i=1,\ldots,k \qquad (5.6)$$

i iz raspregnutih Silvesterovih jednačina oblika

$$\left.\begin{aligned} H_i^oW_{pi}^o-W_{pi}^o\Lambda_{pi}&=-D_i^oX_{pi} \\ H_i^oW_{ri}^o-W_{ri}^o\Lambda_{ri}&=-D_i^oX_{ri} \end{aligned}\right\} \quad i=2,\ldots,k \qquad (5.7)$$

nadjimo pridružene W_{pi}^o, W_{ri}^o, $i=2,\ldots,k$. Sa ovako usvojenim parametrima ostalih regulatora možemo, uzimajući u obzir rezultate iz prethodnog odjeljka, nastaviti da izaberemo parametre prvog regulatora H_1, D_1 u cilju podešavanja rezidualnog spektra. Da bi ovo uradili, pogodno je napisati matricu A_{ce} u razvijenoj formi

$$A_{ce}=\begin{bmatrix} H_1 & 0\ \dots & 0 & D_1 & 0 & \dots\ 0 & 0 \\ 0 & H_2^o\dots & 0 & 0 & D_2^o & \dots\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ \dots & H_k^o & 0 & 0 & \dots\ D_k^o & 0 \\ E_{11} & E_{12}\dots & E_{1k} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\dots & \bar{A}_{1k} & A_{1s} \\ E_{21} & E_{22}\dots & E_{2k} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\dots & \bar{A}_{2k} & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2}\dots & E_{kk} & \bar{A}_{k1} & \bar{A}_{k2}\dots & \bar{A}_{kk} & A_{ks} \\ E_{s1} & E_{s2}\dots & E_{sk} & \bar{A}_{s1} & \bar{A}_{s2}\dots & \bar{A}_{sk} & A_{ss} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

i permutovati stanja proširenog sistema tako da novi vektor stanja bude

$x_e^{1^T}=\left[z_1^T\ x_1^T\ z_2^T\ \dots\ z_k^T\ x_2^T\ x_3^T\ \dots\ x_k^T\ x_s^T\right].$

Matrica regulisanog sistema asocirana sa ovakvom permutacijom postaje

$$A_{ce}^1=\left[\begin{array}{c|c|cccccc} H_1 & D_1 & 0\ \dots & 0 & 0 & 0\ \dots & 0 & 0 \\ \hline E_{11} & \bar{A}_{11} & E_{12}\dots & E_{1k} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13}\dots & \bar{A}_{1k} & A_{1s} \\ \hline 0 & 0 & H_2^o\ \dots & 0 & D_2^o & 0\ \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ \dots & H_k^o & 0 & 0\ \dots & D_k^o & 0 \\ E_{21} & \bar{A}_{21} & E_{22}\dots & E_{2k} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23}\dots & \bar{A}_{2k} & A_{2s} \\ E_{31} & \bar{A}_{31} & E_{32}\dots & E_{3k} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33}\dots & \bar{A}_{3k} & A_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{k1} & \bar{A}_{k1} & E_{k2}\dots & E_{kk} & \bar{A}_{k2} & \bar{A}_{k3}\dots & \bar{A}_{kk} & A_{ks} \\ E_{s1} & \bar{A}_{s1} & E_{s2}\dots & E_{sk} & \bar{A}_{s2} & \bar{A}_{s3}\dots & \bar{A}_{sk} & A_{ss} \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} H_1 & D_1 & 0 \\ E_{11}^1 & A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ E_{21}^1 & A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Uvodeći pogodnu transformaciju sličnosti T^1, kompatibilnu sa ovakvom reprezentacijom sistema, moguće je, analogno postupku iz prethodnog odjeljka, eliminisati iz razmatranja $r=r_i+p_i$ sopstvenih vrijednosti regulisanog sistema nekontrolabilnih kroz parametre dinamičkih regulatora. Uz T^1 dato sa

$$T^1=\left[\begin{array}{cc|c} W_{p1} & W_{r1} & \\ X_{p1} & X_{r1} & 0 \\ \hline W_{p2}^{1o} & W_{r2}^{1o} & \\ \vdots & \vdots & \\ W_{pk}^{1o} & W_{rk}^{1o} & \\ X_{p2}^{1o} & X_{r2}^{1o} & \\ \vdots & \vdots & I_{n+p-r} \\ X_{pk}^{1o} & X_{rk}^{1o} & \\ X_{ps}^{1o} & X_{rs}^{1o} & \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cc|c} W_{p1} & W_{r1} & \\ X_{p1} & X_{r1} & 0 \\ \hline U_1^o & Z_1^o & I_q \end{array}\right] \tag{5.10}$$

izraz za rezidualnu matricu dobija se, po analogiji sa (3.36), kao

$$A_{re}^1=A^1+B^1P^1C^1 \tag{5.11}$$

pri čemu su sada

$$A^1=A_{22}^1-N^1C^1,\quad N^1=Z_1^oX_{r1}^{-1}$$
$$C^1\equiv A_{12}^1=\left[E_{12}\ E_{13}\ldots E_{1k}\ \bar{A}_{12}\ \bar{A}_{13}\ldots\bar{A}_{1k}\ A_{1s}\right],\quad B^1=U_1^o-N^1X_{p1} \tag{5.12}$$

a

$$P_1=L_1(X_{r1}-X_{p1}L_1)^{-1} \tag{5.13}$$

gdje je

$$L_1=W_{p1}^{-1}W_{r1} \tag{5.14}$$

Sa ovim smo čitavu slobodu sadržanu u parametrima H_1, D_1, preslikali u izbor P^1 pošto su za fiksirane H_i^o, D_i^o, $i=2,\ldots,k$, A^1, B^1 i C^1 iz (5.11) konstantne matrice, kao što se vidi iz (5.12). Relacija (5.11), na taj način definiše linearni problem postavljanja polova koji je moguće riješiti postojećim algoritmima i u cilju oblikovanja rezidualnog spektra $\Lambda(A_{re}^1)$. Pri tome su moguća dva ishoda

- za neku vrijednost P^1 rezidualni spektar zadovoljava,
- ne postoji vrijednost P^1 koja rezultira u prihvatljivom rezidualnom spektru.

U prvom slučaju se izračuna

$$L_1=(I+P^1X_{p1})^{-1}P^1X_{r1} \tag{5.15}$$

i odrede parametri H_1 i D_1 iz (4.26). Pojačanja povratne grane za prvi upravljački centar nalaze se iz

$$\begin{aligned} K_{z1}&=-R_{11}^{-1}B_1^TM_cP_{z1} \\ K_{y1}&=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cP_{y1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

pri čemu je

$$P_{z1}=(X_p^1-X_r^1X_{r1}^{-1}X_{p1})(I-L_1X_{r1}^{-1}X_{p1})^{-1}W_{p1}^{-1},\ P_{y1}=(X_r^1-X_p^1L_1)(X_{r1}-X_{p1}L_1)^{-1} \tag{5.17}$$

dok se za ostale upravljačke centre dobijaju pojačanja

$$K_{ie}^o=\begin{bmatrix}K_{zi}^o & K_{yi}^o\end{bmatrix}=-R_{ii}^{-1}B_i^TM_cX^i\begin{bmatrix}W_{pi}^o & W_{ri}^o \\ X_{pi}^o & X_{ri}^o\end{bmatrix}^{-1},\ i=2,\dots,k \tag{5.18}$$

pri čemu su W_{pi}^o, W_{ri}^o odredjeni ranije, za date H_i^o, D_i^o, $i=2,\dots,k$. Sa ovim se procedura završava.

U slučaju da nijedna vrijednost P^1 ne daje potpuno zadovoljavajući rezidualni spektar možemo djelimično poboljšati rezidualni spektar pogodnim izborom P^1 (na primjer možemo postaviti dodatnih p_1+q_1-1 polova regulisanog sistema na njihove optimalne lokacije, pri čemu je q_1=rang C^1). Drugim riječima, popravimo rezidualni spektar koliko nam to dozvoljava sloboda sadržana u P^1 i za tako odabranu vrijednost izračunamo pridružene parametre H_1 i D_1. Pošto je, medjutim, rezidualni spektar još uvijek neprihvatljiv, prelazimo na drugi korak u sekvencijalnoj proceduri.

Posmatrajmo sada matricu rezultujućeg regulisanog sistema (5.9). Za izabranu vrijednost H_i^o, D_i^o, $i=2,\dots,k$, i izračunate vrijednosti H_1 i D_1 iz prethodnog koraka, njen spektar se sastoji od zadržanog podspektra $\Lambda_r=\Lambda_{ri}\cup\Lambda_{pi}$ i rezidualnog spektra $\Lambda(A_{re}^1)$, tj. $\Lambda(A_{ce}^1)=\Lambda_r\cup\Lambda(A_{re}^1)$. Uvodeći odgovarajuću permutaciju promjenljivih stanja koja će ih poredjati kao z_2, x_2, z_1, $z_3,\dots,z_k$, $x_2,\dots,x_k$, x_s, dobijamo sledeću reprezentaciju istog sistema

$$
A^2_{ce}=\left[\begin{array}{c|c|ccccccccc}
H_2^o & D_2^o & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
E_{22} & \bar{A}_{22} & E_{21} & E_{23} & \cdots & E_{2k} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{23} & \cdots & \bar{A}_{2k} & A_{2s} \\
\hline
0 & 0 & H_1 & 0 & \cdots & 0 & D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & H_3^o & \cdots & 0 & 0 & D_3^o & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & H_k^o & 0 & 0 & \cdots & D_k^o & 0 \\
E_{12} & \bar{A}_{12} & E_{11} & E_{13} & \cdots & E_{1k} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{13} & \cdots & \bar{A}_{1k} & A_{1s} \\
E_{32} & \bar{A}_{32} & E_{31} & E_{33} & \cdots & E_{3k} & \bar{A}_{31} & \bar{A}_{33} & \cdots & \bar{A}_{3k} & A_{3s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
E_{k2} & \bar{A}_{k2} & E_{k1} & E_{k3} & \cdots & E_{kk} & \bar{A}_{k1} & \bar{A}_{k3} & \cdots & \bar{A}_{kk} & A_{ks} \\
E_{s2} & \bar{A}_{s2} & E_{s1} & E_{s3} & \cdots & E_{sk} & \bar{A}_{s1} & \bar{A}_{s3} & \cdots & \bar{A}_{sk} & A_{ss}
\end{array}\right]
\equiv\begin{bmatrix}
H_2^o & D_2^o & 0 \\
E_{11}^2 & A_{11}^2 & A_{12}^2 \\
E_{21}^2 & A_{21}^2 & A_{22}^2
\end{bmatrix} \qquad (5.19)
$$

prilagodjenu drugom upravljačkom centru. Uvodeći transformaciju sličnosti

$$
T^2=\left[\begin{array}{cc|c}
W_{p2}^o & W_{r2}^o & 0 \\
X_{p2} & X_{r2} & \\
\hline
W_{p1}^2 & W_{r1}^2 & \\
W_{p3}^2 & W_{r3}^2 & \\
\vdots & \vdots & \\
W_{pk}^2 & W_{rk}^2 & \\
X_{p1}^2 & X_{r1}^2 & I_{n+p-r} \\
X_{p3}^2 & X_{r3}^2 & \\
\vdots & \vdots & \\
X_{pk}^2 & X_{rk}^2 & \\
X_{ps}^2 & X_{rs}^2 &
\end{array}\right]
\equiv\left[\begin{array}{cc|c}
W_{p2}^o & W_{r2}^o & 0 \\
X_{p2} & X_{r2} & \\
\hline
U_2^o & Z_2^o & I_q
\end{array}\right] \qquad (5.20)
$$

analogno prethodnom koraku, eliminišemo iz razmatranja zadržanih r optimalnih polova i dobijemo rezidualnu matricu kao

$$
A_{re}^{2o}=A^2+B^2P_o^2C^2 \qquad (5.21)
$$

pri čemu je

$$A^2=A_{22}^2-N^2C^2,\ N^2=Z_2^oX_{r2}^{-1}$$
$$C^2=A_{12}^2=\left[E_{21}\ E_{23}..E_{2k}\ \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{23}..\bar{A}_{2k}\ A_{2s}\right],\ B^2=U_2^o-N^2X_{p2} \qquad (5.22)$$

Napominjemo, takodje, da je A_{22}^2 definisano sa (5.19), dok je P_o^2 iz (5.22) dato sa

$$P_o^2=L_2^o(X_{r2}-X_{p2}L_2^o)^{-1},\ L_2^o=W_{p2}^{o-1}W_{r2}^o \qquad (5.23)$$

S obzirom da su sopstvene vrijednosti matrice invarijantne na transformacije sličnosti, slijedi

$$\Lambda(A_{ce}^1)=\Lambda(A_{ce}^2) \qquad (5.24)$$

a pošto je $\Lambda(A_{ce}^1)=\Lambda_r U\Lambda(A_{re}^1)$ i $\Lambda(A_{ce}^2)=\Lambda_r U\Lambda(A_{re}^{2o})$, slijedi

$$\Lambda(A_{re}^1)=\Lambda(A_{re}^{2o}) \qquad (5.25)$$

za fiksirane H_i^o; D_i^o, $i=2,\dots,k$, i H_1, D_1 izračunate u prvom koraku. Ovdje je važno napomenuti da je, u ovoj reprezentaciji, kompletan uticaj parametara H_2^o i D_2^o na rezidualni spektar preslikan u matricu P_o^2, s obzirom da A^2, B^2 i C^2 iz (5.21) ne zavise od H_2^o i D_2^o. Znači, ako sada zamijenimo P_o^2 iz (5.21) sa nekim drugim P^2 ova promjena će, ustvari, na jednoznačan način (do transformacije sličnosti) odgovarati promjeni parametara drugog regulatora H_2^o i D_2^o koji poprimaju vrijednosti H_2 i D_2, pri čemu će parametri ostalih dinamičkih regulatora ostati nepromijenjeni. Uzimajući, u (5.21), $P^2=P_o^2+\Delta P^2$ umjesto P_o^2, dobijamo novu rezidualnu matricu

$$A_{re}^2=A^2+B^2P^2C^2=A^2+B^2(P_o^2+\Delta P^2)C^2=A^2+B^2P_o^2C^2+B^2\Delta P^2C^2$$

odnosno, uzimajući u obzir (5.21),

$$A_{re}^2=A_{re}^{2o}+B^2\Delta P^2C^2 \qquad (5.26)$$

Sa ovim smo, s obzirom na (5.25), u suštini uveli novi linearni problem podešavanja rezidualnih polova jer se sada sloboda sadržana u izboru parametra ΔP^2 može, pomoću poznatih algoritama, iskoristiti za popravljanje rezidualnog spektra $\Lambda(A_{re}^1)$ smatranog nepodobnim u prvom koraku sekvencijalne procedure. Varijacijom slobodnog parametra ΔP^2 rezidualni spektar se može podešavati tako da bude ili potpuno prihvatljiv ili djelimično poboljšan. Ako je moguće potpuno prihvatljivo oblikovanje rezidualnog spektra izračunamo $P^2=P_o^2+\Delta P^2$ i nadjemo $L_2=(I+P^2X_{p2})^{-1}P^2X_{r2}$ a zatim iz (4.26) odredimo odgovarajuće nove vrijednosti za parametre drugog regulatora H_2 i D_2. Proceduru u tom slučaju završavamo prepodešavanjem parametara povratne sprege drugog upravljačkog centra, tj. računanjem

$$
\begin{aligned}
K_{z2}&=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cP_{z2}\\
K_{y2}&=-R_{22}^{-1}B_2^TM_cP_{y2}
\end{aligned}
\qquad (5.27)
$$

pri čemu su

$$
P_{z2}=(X_p^2-X_r^2X_{r2}^{-1}X_{p2})(I-L_2X_{r2}^{-1}X_{p2})^{-1}W_{p2}^{-1},\quad P_{y2}=(X_r^2-X_p^2L_2)(X_{r2}-X_{p2}L_2)^{-1} \qquad (5.28)
$$

dok parametri povratne sprege za ostale upravljačke centre ostaju na svojim starim vrijednostima, odredjenim u prvom koraku procedure.

Ako se rezidualni spektar može samo djelimično popraviti u drugom koraku, tada sa izračunatim vrijednostima H_2 i D_2 koje odgovaraju tako poboljšanom rezidualnom spektru, prelazimo na sledeće korake u sintezi u kojima se, na potpuno analogan način, podešavaju parametri trećeg, četvrtog, itd., dinamičkog regulatora i odgovarajući parametri povratne sprege. Pri ovome treba voditi računa da se, radi što potpunijeg korišćenja slobode sadržane u parametrima regulatora, prvo podešavaju parametri onih dinamičkih regulatora pridruženih upravljačkim centrima sa manjim brojem mjerenja jer je dimenzija ovih regulatora veća, što znači da sadrže i veći broj slobodnih parametara. Na taj način se podese svi parametri skupa dinamičkih regulatora pa ako i tada rezidualni spektar nije potpuno prihvatljiv može se ista procedura iterativno ponoviti, dok se potpuno ne ispitaju mogućnosti sinteze zadovoljavajućeg sistema sa datim dimenzijama dinamičkih regulatora.

Konačno, ako se ispostavi da za date dimenzije dinamičkih regulatora i izabrani invarijantni podprostor, po pravilu asociran sa dominantnom dinamikom referentnog rješenja, nije moguće dobiti zadovoljavajuće rješenje, procedura dozvoljava dva moguća načina da se sinteza modifikuje:

- izabrati drugu kombinaciju sopstvenih vrijednosti i vektora referentnog sistema, i pokušati sa istim dimenzijama regulatora dobiti zadovoljavajuće rješenje,
- povećati dimenzije dinamičkih regulatora p_i na p_i+1, $i=1,\ldots,k$ čime se može povećati dimenzija zadržanog invarijantnog podprostora za jedan i iskoristiti sloboda u dodatnim parametrima regulatora za poboljšanje rezidualnog spektra, na potpuno analogan način prethodnom postupku.

Navedena procedura se generalizuje i za opšti slučaj kada ne važi pretpostavka (e), tj. kada su pojedina mjerenja uključena u više lokalnih mjernih vektora. Razlika u odnosu na prethodni slučaj ogleda se u tome što matrica C_q za proizvoljni regulator nije više oblika (5.1) i što se, usled proizvoljne strukture matrice C_q, matrica G ne može više dekomponovati na način dat u (5.5) jer dolazi do preklapanja u nenultim blok-kolonama matrica G_i, $i=1,\ldots,k$. Medjutim, bez obzira na pretpostavku (e), reprezentacija sistema uvijek može pogodnom transformacijom T^q prevesti u oblik u kome je $y_{qe}=C_{qe}x_e$, sa $C_{qe}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$, $r=r_i+p_i$. Za fiksirane parametre ostalih regulatora H_i^o i D_i^o, $i=1,\ldots,k$, $i\neq q$, i izabrani invarijantni podprostor referentnog rješenja asociran sa $\Lambda_r=\Lambda_{ri}\cup\Lambda_{pi}$ može se, analogno prethodnom slučaju lako pokazati da odgovarajuća reprezentacija matrice regulisanog sistema može biti prevedena u oblik

$$A_{ce}^q=\begin{bmatrix} H_q & D_q & 0 \\ E_{11}^q & A_{11}^q & A_{12}^q \\ E_{21}^q & A_{21}^q & A_{22}^q \end{bmatrix}, \quad A_{11}^q\in R^{r_q\times r_q} \tag{5.29}$$

pri čemu A_{12}^q i A_{22}^q ne zavise od parametara q-tog regulatora H_q i D_q. Tada se fundamentalna osobina projekcionih upravljanja za ovaj generalni slučaj može izraziti sledećim rezultatom:

<u>Teorema II.5.1</u> Sa navedenim pretpostavkama, rezidualni spektar regulisanog sistema je $\Lambda(A_{re}^q)$, sa

$$A_{re}^q=A^q+B^qP^qC^q \tag{5.30}$$

pri čemu su $A^q = A^q_{22} - Z^q_o X^{-1}_{rq} C^q$, $C^q = A^q_{12}$, $B^q = U^q_o - Z^q_o X^{-1}_{rq} X_{pq}$ i ne zavise od W_{pq}, W_{rq}, a U^q_o i Z^q_o su definisani sa

$$X^q_e = \begin{bmatrix} W_{pq} & W_{rq} \\ X_{pq} & X_{rq} \\ U^q_o & Z^q_o \end{bmatrix}$$

gdje je X^q_e matrica sopstvenih referentnih vektora pridruženih zadržanom invarijantnom podprostoru i permutovanih kompatibilno sa transformacijom T^q. Matrice W_{pq} i W_{rq} su ovdje definisane kao i ranije, dok su X_{pq} i X_{rq} dati izrazom (4.15a) (za i=q).

Dokaz se lako izvodi na osnovu prethodnog razmatranja i rezultata iz prethodnog odjeljka, pa je ovdje izostavljen.

Navedeni rezultat otvara mogućnost za kompletno uopštenje navedene sekvencijalne procedure za generalni slučaj kada sva mjerenja nijesu linearno nezavisna. Jedina razlika je u tome što se računski aspekt problema u izvjesnoj mjeri usložnjava pošto je u svakom koraku procedure potrebno dodatno izračunavanje za nalaženje pogodne transformacije T^q.

Sa rezultatima prezentiranim u ovom odjeljku u potpunosti je omogućena generalizacija metodologije za sintezu statičkih i dinamičkih regulatora bazirane na projekcionom upravljanju, prikazane u prvom dijelu rada za slučaj centralizovane strukture, na generalni slučaj decentralizovane informacione i upravljačke strukture u kojem više upravljačkih centara upravlja složenim sistemom na osnovu lokalnih mjerenja. Naime, kompletan postupak sinteze sumiran u 11 koraka u Odjeljku I.4 za centralizovanu strukturu može se sada generalisati na slučaj decentralizovane strukture. Jedine razlike nastaju u koraku 8 gdje, usled novih ograničenja na informacionu strukturu nastalih decentralizacijom umjesto jednog problema podešavanja polova, rezidualne polove sada podešavamo više puta i to posebno za svaki upravljački centar ako je to potrebno.

Prije nego predjemo na razmatranje mogućnosti primjene projekcionog upravljanja na sintezu regulatora u sistemima decentralizovane strukture sa konstantnim poremećajima, pokazaćemo kako se izložena procedura za sintezu decentralizovanih dinamičkih regulatora može primijeniti na sisteme oblika

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k}B_iu_i \tag{5.31a}$$

$$y_i=C_ix+D_{ii}u_i,\quad i=1,\dots,k \tag{5.31b}$$

kod kojih su lokalna mjerenja direktno spregnuta sa asociranim lokalnim upravljačkim varijablama. Problem sinteze decentralizovanih dinamičkih regulatora sastoji se ponovo u nalaženju

$$\dot{z}_i=H_iz_i+D_iy_i,\quad i=1,\dots,k,\quad z_i\varepsilon R^{p_i} \tag{5.32}$$

$$u_i=K_{zi}z_i+K_{yi}y_i,\quad i=1,\dots,k \tag{5.33}$$

tako da rezultujući regulisani sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike.

Koristeći (5.31b), lokalna upravljanja možemo izraziti kao

$$\begin{gathered}u_i=\hat{K}_{zi}z_i+\hat{K}_{yi}\hat{y}_i\quad,\ i=1,\dots,k\\ \hat{K}_{zi}=(I-K_{yi}D_{ii})^{-1}K_{zi},\hat{K}_{yi}=(I-K_{yi}D_{ii})^{-1}K_{yi},\ \hat{y}_i=C_ix\end{gathered} \tag{5.34}$$

a sa (5.34) jednačina dinamičkog regulatora pridružena i-tom upravljačkom centru postaje

$$\dot{z}_i=\hat{H}_iz_i+\hat{D}_i\hat{y}_i,\quad \hat{H}_i=H_i+D_iD_{ii}\hat{K}_{zi},\quad \hat{D}_i=D_i(I+D_{ii}\hat{K}_{yi}) \tag{5.35}$$

Znači, originalni problem je moguće svesti na sledeći ekvivalentni problem: Za dati sistem (5.31a) i skup lokalnih mjerenja

$$\hat{y}_i=C_ix,\quad i=1,\dots,k \tag{5.31c}$$

naći skup dinamičkih regulatora oblika (5.35) i parametre povratne sprege oblika (5.34). Za ovako definisan problem možemo primijeniti izložene postupke za sintezu i odrediti red dinamičkih regulatora p_i, parametre $\hat{H}_i$ i $\hat{D}_i$ kao i parametre povratne sprege $\hat{K}_{zi}$ i $\hat{K}_{yi}$, $i=1,\dots,k$, koji garantuju zadovoljavajuće dinamičke performanse regulisanog sistema. Tada se sinteza završava nalaženjem odgovarajućih parametara za originalni problem, u obliku

$$K_{yi}=\hat{K}_{yi}(I+D_{ii}\hat{K}_{yi})^{-1},\quad i=1,\dots,k \tag{5.36}$$

$$K_{zi}=(I-K_{yi}D_{ii})\hat{K}_{zi},\quad i=1,\dots,k \tag{5.37}$$

$$D_i=\hat{D}_i(I+D_{ii}\hat{K}_{yi})^{-1},\quad i=1,\dots,k \tag{5.38}$$

$$H_i=\hat{H}_i-D_iD_{ii}\hat{K}_{zi},\quad i=1,\dots,k \tag{5.39}$$

Primjer 6

Posmatrajmo sistem iz prethodnog primjera kod koga je informaciona struktura donekle promijenjena, tako da sada svaki upravljački centar ima na raspolaganju po dva mjerenja opisana matricama

$$C_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Transformacijom sličnosti

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

dobijamo sistem

$$\dot{x}_t=A_tx_t+B_{1t}u_1+B_{2t}u_2,\quad y_1=C_{1t}x_t,\quad y_2=C_{2t}x_t$$

$$A_t=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1&0&1&0\\-2&-1&1&0&1&1&1\\0&0&-2&-1&1&0&0\\-1&0&0&-1&1&1&0\\-2&-3&0&-1&-1&-1&-1\\0&2&-1&-2&-1&-2&1\\-1&0&0&-1&-3&-2&-3\end{bmatrix},\quad B_{1t}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad B_{2t}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C_{1t}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C_{2t}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

pogodan za računanje. Spektar slobodnog sistema je isti kao u prethodnom primjeru, a uzimajući $Q_t=\mathrm{diag}\{100,0,10,100,0,0,0\}$ i $R=I_2$ i rješavajući asociranu Rikatijevu jednačinu dobijaju se M_c i F, sa optimalnim referentnim spektrom $\Lambda(F)$ istim kao u prethodnom primjeru:

$$\lambda_{1,2}=-2.56\pm j2.79,\quad \lambda_{3,4}=-1.36\pm j2.13,\quad \lambda_5=-0.95,\quad \lambda_6=-3.7,\quad \lambda_7=-2.88.$$

Pošto oba upravljačka centra imaju po dva mjerenja, sa statičkim regulatorom možemo zadržati dvodimenzioni invarijantni podprostor referentnog rješenja. Ako, u tom smislu, izaberemo invarijantni podprostor asociran sa dominantnim kompleksnim parom $\lambda_{3,4}$, ispostavlja se da je asocirani rezidualni spektar

$$\Lambda(A_r)=\{0.54,-0.24,-3.66,-2.46\pm j0.93\}$$

nestabilan. Sada bi mogli potražiti neko drugo rješenje zadržavanjem ostalih dopustivih kombinacija optimalnih sopstvenih vektora. Umjesto toga ćemo, radi ilustracije, uvesti dinamičke regulatore

$$\dot{z}_1=H_1z_1+D_1y_1,\quad z_1\varepsilon R^1$$

$$\dot{z}_2=H_2z_2+D_2y_2,\quad z_2\varepsilon R^1$$

sa kojima ćemo popraviti nezadovoljavajuće rješenje dobijeno statičkim regulatorom uz zadržani invarijantni podprostor asociran sa $\lambda_{3,4}$. U tom smislu, koristeći dodatna mjerenja asocirana sa z_1 i z_2, zadržaćemo dodatni jednodimenzioni invarijantni podprostor asociran sa dominantnim realnim polom λ_5 i sprovesti opisanu sekvencijalnu proceduru za podešavanje rezidualnog spektra.

Odaberimo prvo proizvoljne vrijednosti za parametre drugog regulatora $H_2^o=-1$, $D_2^o=\begin{bmatrix}0.5 & 1\end{bmatrix}$ i iz (5.7), (5.23) izračunajmo pridruženu vrijednost $P_o^2=\begin{bmatrix}-0.47 & 0.25\end{bmatrix}$. Iz (5.12) dobijamo matrice

$$A^1=\begin{bmatrix}-1.00 & 0.47 & 1.40 & -0.03 & -0.43 & -0.03\\ 0.00 & -2.09 & -1.66 & 0.91 & 0.56 & -0.09\\ 0.00 & -0.31 & -0.73 & 0.69 & 0.42 & -0.31\\ 0.00 & 0.34 & -2.05 & -0.66 & 0.39 & -0.66\\ 0.00 & -1.30 & -1.43 & -1.30 & -2.87 & 0.70\\ 0.30 & -2.79 & -11.66 & -1.93 & 0.98 & -1.93\end{bmatrix},\quad B^1=\begin{bmatrix}0.99\\ 0.12\\ -0.04\\ 0.16\\ -0.15\\ 0.02\end{bmatrix}$$

$$C^1=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

koje definišu problem postavljanja polova (5.11). Uzimajući $P^1=\begin{bmatrix}8 & -1.5\end{bmatrix}$ dobijamo djelimično poboljšani ali još uvijek nestabilni rezidualni spektar

$$\Lambda(A_{re}^1)=\{-3.84,-0.23,-1.63,0.31,-2.49\pm j0.98\}.$$

Iz (5.15) izračunamo $L_1=\begin{bmatrix}-2.23 & -1.47\end{bmatrix}$ a iz (4.26) parametre prvog regulatora $H_1=-2.02$, $D_1=\begin{bmatrix}20.5 & 8.93\end{bmatrix}$.

Sada promijenimo reprezentaciju regulisanog sistema i podesimo je prema drugom upravljaču. Na taj način dobijemo novi problem podešavanja polova oblika (5.26), pri čemu su

$$A_{re}^{2o}=\begin{bmatrix} -2.02 & 18.73 & 8.93 & 14.81 & 1.80 & 0.00 \\ 0.00 & -0.63 & 1.00 & 0.90 & 0.63 & 0.00 \\ 0.00 & 0.87 & -1.00 & -3.06 & -1.87 & 1.00 \\ -0.09 & -0.23 & -1.31 & -0.60 & 0.41 & 1.00 \\ 0.00 & 1.10 & 2.00 & -1.66 & -3.10 & 1.00 \\ 0.00 & -4.78 & 0.00 & -0.39 & 1.78 & 3.00 \end{bmatrix}, \quad B^2=\begin{bmatrix} 2.73 \\ 0.17 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ -0.06 \\ -0.30 \end{bmatrix}$$

$$C^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sa $\Delta P^2=\begin{bmatrix} -6 & 4.3 \end{bmatrix}$ dobijamo rezidualnu matricu

$$A_{re}^{2}=\begin{bmatrix} -2.02 & 6.99 & 8.93 & 10.17 & 13.55 & 0.00 \\ 0.00 & -1.38 & 1.00 & 0.61 & 1.38 & 0.00 \\ 0.00 & 0.94 & -1.00 & -3.04 & -1.94 & 1.00 \\ -0.09 & -0.17 & -1.31 & -0.58 & 0.34 & -1.00 \\ 0.00 & 1.34 & 2.00 & -1.56 & -3.34 & 1.00 \\ 0.00 & -3.49 & 0.00 & 0.12 & 0.49 & -3.00 \end{bmatrix}$$

sa asociranim stabilnim rezidualnim spektrom

$\Lambda(A_{re}^2)=\{-0.13\pm j0.07, -2.48\pm j0.99, -2.09, -4.01\}$

koji se može smatrati prihvatljivim, iako se i dalje može poboljšati ili variranjem ΔP^2 ili ponovnim podešavanjem parametara prvog regulatora.

Sa izračunatim $P^2=P_o^2+\Delta P^2=\begin{bmatrix} -6.47 & 4.55 \end{bmatrix}$ nadjemo $L_2=\begin{bmatrix} -2.23 & -7.02 \end{bmatrix}$ i odgovarajuće vrijednosti za parametre drugog regulatora $H_2=-1.96$, $D_2=\begin{bmatrix} 14.46 & 94.48 \end{bmatrix}$. Sintezu završavamo izračunavanjem parametara povratne sprege

$K_{z1}=-0.09$, $K_{y1}=\begin{bmatrix} 3.17 & 1.69 \end{bmatrix}$

$K_{z2}=0.06$, $K_{y2}=\begin{bmatrix} -1.93 & -10.13 \end{bmatrix}$.

Program na jeziku LAS (Linearna Algebra i Sistemi), /130, 131/ na osnovu kojeg je ovaj primjer uradjen na računaru PDP 11/34 u Institutu "M.Pupin", prezentiran je u Prilogu B.

II. 6. SINTEZA DECENTRALIZOVANIH PI REGULATORA METODOM PROJEKCIONOG UPRAVLJANJA

Postupci razvijeni u prethodnim odjeljcima zasnovani su na polaznoj pretpostavci da su jedini poremećaji koji djeluju na složeni sistem sa decentralizovanom strukturom tipa početnih uslova, tj. impulsnog tipa. Pokazano je da se u takvim uslovima uticaj ovakvog tipa poremećaja eliminiše na zadovoljavajući način primjenom projekcionog upravljanja. Medjutim, za sisteme u kojima djeluju konstantni ili sporo promjenljivi poremećaji, navedene procedure ne zadovoljavaju postavljene zahtjeve regulacije, tj. ne uspijevaju da obezbijede eliminaciju uticaja ovakvog tipa poremećaja na izabrane lokalne izlaze sistema. Zbog toga ćemo, analogno centralizovanom slučaju, izvršiti modifikaciju predloženih postupaka tako da se i u decentralizovanim sistemima sa djelovanjem konstantnih poremećaja obezbijede željene performanse sistema.

U tom smislu posmatrajmo složeni sistem opisan sa

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{k} B_i u_i + d, \quad x\varepsilon R^n, \quad u_i \varepsilon R^{m_i} \tag{6.1a}$$

$$y_i=C_i x, \quad y_i \varepsilon R^{r_i}, \quad i=1,\dots,k \tag{6.1b}$$

pri čemu je $d\varepsilon R^n$ vektor konstantnih nemjerljivih poremećaja koji djeluju na sistem, a matrice A, B_i, C_i, su odgovarajućih dimenzija, i sa rang $B_i=m_i$, rang $C_i=r_i$, $i=1,\dots,k$. Problem koji se postavlja u ovakvim sistemima u opštem slučaju se svodi na odredjivanje skupa lokalnih upravljačkih varijabli u_i, $i=1,\dots,k$, koje obezbjedjuju da rezultujući regulisani sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike i prihvatljive performanse u ustaljenom stanju.

S obzirom na veliki praktični značaj, ovom problemu je u literaturi posvećena odgovarajuća pažnja, /39,41,44,54/, ali predložene metode posjeduju sve one nedostatke koje smo ranije pomenuli u kontekstu istog problema bez prisustva poremećaja. Naime, rješenje zasnovano na optimizaciji /41,54/, po pravilu se završavaju iterativnim računskim algoritmima dok se kod pristupa baziranih na postavljanju polova /39,44/ koriste dinamički regulatori suviše visokog reda da bi bili prihvatljivi za praktičnu realizaciju. Medjutim, iz navedenih istraživanja dobijen je značajan uvid u strukturu regulatora koji obezbjedjuje rješenje postavljenog problema. Naime, u radu /39/, u kojem je razmatran opšti problem sinteze decentralizovanog servomehanizma, predloženo je da se decentralizovano upravljanje realizuje u obliku skupa PI regulatora u funkciji lokalnih izlaza, oblika

$$u_i = K_i^P y_i + K_i^I \int y_i dt, \quad i=1,\dots,k \tag{6.2}$$

Uvodjenjem

$$\begin{gathered}B=\begin{bmatrix}B_1 & \dots & B_k\end{bmatrix}, \quad C^T=\begin{bmatrix}C_1^T & \dots & C_k^T\end{bmatrix} \\ \mathbb{K}=\{K:\ K=dg\{K_1,\dots,K_k\},\ K_i \varepsilon R^{m_i \times 2r_i}\}, \quad C^*=\begin{bmatrix}C_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ C_k^*\end{bmatrix} \varepsilon R^{2r \times (n+r)} \\ C_i^*=\begin{bmatrix}C_i & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{r_i} & \dots & 0\end{bmatrix} \varepsilon R^{2r_i \times (n+r)}, \quad r=\sum_{i=1}^{k} r_i\end{gathered} \tag{6.3}$$

strukturne osobine upravljanja (6.2) opisane su sledećim rezultatom:

<u>Teorema II.6.1,/39/</u> Uz pretpostavku da važe sledeći uslovi:

(a) skup upravljanja (6.2) stabilizuje sistem (6.1),

(b) fiksni modovi sistema $\{C^*, \begin{bmatrix}A & 0 \\ C & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix}\}$ u odnosu na $\mathbb{K}$ ne sadrže koordinatni početak kompleksne ravni,

rezultujući regulisani sistem (6.1), (6.2) posjeduje, nezavisno od konkretnog izbora parametara povratne sprege K_i^P, K_i^I, $i=1,\dots,k$, sledeće osobine:

(i) lokalni vektori izlaza y_i, $i=1,\dots,k$, u ustaljenom stanju ne zavise od nemjerljivih proizvoljnih konstantnih poremećaja i varijacija u parametrima sistema,

(ii) kada je sistem pobudjen skupom konstantnih lokalnih referentnih vektora $v_i \varepsilon R^{r_i}$, izlazni vektori u ustaljenom stanju idealno prate v_i, $i=1,\dots,k$.

Iz uslova (b) slijedi da dimenzije m_i lokalnih vektora upravljanja moraju biti najmanje jednake dimenzijama asociranih lokalnih izlaza, pa se ovdje pretpostavlja da je ovaj uslov zadovoljen, tj.

$m_i \geq r_i$. Primijetimo, takodje, da se za slučaj $r_i = m_i$, $i=1,\ldots,k$, uslov (b) svodi na rang $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r$, što je ekvivalentno uslovu da *prenosne nule*, /127-129/, sistema (A,B,C) ne sadrže koordinatni početak kompleksne ravni. Primijetimo, konačno, da za zadovoljenje osobine (ii) struktura upravljanja (6.2) ostaje ista s tim što tada pod integralom $e_i = y_i - v_i$, zamjenjuje y_i, $i=1,\ldots,k$.

Iz navedenog se vidi da PI regulatori posjeduju željene strukturne osobine sa aspekta ponašanja regulisanog sistema u ustaljenom stanju. Medjutim, problem sinteze parametara povratne sprege K_i^P, K_i^I, $i=1,\ldots,k$, u cilju zadovoljavanja željenih dinamičkih performansi sistema, još uvijek nema potpuno prihvatljivo rješenje. Imajući ovo u vidu mi ćemo, koristeći navedene strukturne osobine regulatora sa integralnim djelovanjem, proširiti metodu projekcionih upravljanja i na ovaj slučaj.

Dalje razmatranje ćemo bazirati na analognom pristupu razvijenom za slučaj centralizovane strukture u prvom dijelu rada i rezultatima dobijenim za decentralizovane sisteme bez spoljnih poremećaja u prethodnim odjeljcima. Napomenimo da se sistem (6.1) pogodnim smjenama može transformisati u odgovarajući sistem bez poremećaja ali sa različitim početnim uslovima. Pošto rješenja bazirana na projekcionim upravljanjima ne zavise od početnih uslova, mi ćemo u daljem razmatranju zanemariti početne uslove i koncentrisati pažnju na oblikovanju dinamičkih karakteristika sistema izborom pogodnih parametara povratne sprege, imajući pri tome u vidu da su zadovoljavajuće karakteristike u ustaljenom stanju garantovane samom strukturom upravljanja (6.2), tj. prisustvom integralnog djelovanja.

Prema tome, za dati sistem (6.1) i skup regulatora (6.2) fiksirane strukture posmatraćemo problem odredjivanja matrica pojačanja povratne sprege K_i^P, K_i^I, $i=1,\ldots,k$, tako da rezultujući sistem posjeduje zadovoljavajuće dinamičke performanse, mjerene pogodno odabranim kvadratnim kriterijumom. Da bi primijenili metodologiju projekcionog upravljanja na rješavanje ovako postavljenog problema uvedimo skup integratora

$$\dot{w}_i = y_i, \quad i=1,\ldots,k \tag{6.4}$$

i definišimo prošireni vektor stanja kao $x_e^T = [w_1^T \ldots w_k^T \quad x^T] \equiv [w^T \quad x^T]$.

Pretpostavljajući da su w_i, $i=1,\ldots,k$, dostupni za mjerenje asociranom upravljačkom centru definišimo proširene lokalne izlaze kao

$$y_{ie}^T=\begin{bmatrix} w_i^T & y_i^T \end{bmatrix}, \quad i=1,\ldots,k \tag{6.5}$$

Prošireni sistem je tada opisan sa

$$\dot{x}_e=A_e x_e+\sum_{i=1}^{k} B_{ie}u_i+G_e d \tag{6.6a}$$

$$y_{ie}=C_{ie}x_e, \quad i=1,\ldots,k \tag{6.6b}$$

pri čemu su

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B_{ie}=\begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}, \quad G_e=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C_{ie}=\begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \tag{6.6c}$$

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & I_{r_i} & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

a upravljanja (6.2) postaju

$$u_i=K_{ie}y_{ie}, \quad i=1,\ldots,k \tag{6.7}$$

pri čemu je $K_{ie}=\begin{bmatrix} K_i^I & K_i^P \end{bmatrix}\varepsilon R^{m_i\times 2r_i}$. Očigledno je da smo na ovaj način uveli dinamičke regulatore fiksirane strukture. Po analogiji sa centralizovanim problemom definišimo kriterijum

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x_e^T Q_e x_e+\sum_{i=1}^{k} u_i^T R_{ii}u_i)dt, \quad Q_e\varepsilon R^{(n+r)\times(n+r)} \tag{6.8}$$

sa čime se problem sinteze optimalnih decentralizovanih PI regulatora prevodi na sledeći problem decentralizovanog statičkog regulatora izlaza: odrediti pojačanja K_{ie}, $i=1,\ldots,k$, tako da je upravljanje (6.7) optimalno u odnosu na kriterijum (6.8) u smislu projekcionih upravljanja.

Da bi riješili ovaj problem prvo ćemo naći asocirano referentno optimalno rješenje

$$\dot{x}_e=F_e x_e, \quad F_e=A_e-S_e M_e, \quad S_e=\sum_{i=1}^{k} S_{ie}=\sum_{i=1}^{k} B_{ie}R_{ii}^{-1}B_{ie}^T=B_e R^{-1}B_e^T \tag{6.9}$$

pri čemu je $M_e\varepsilon R^{(n+r)\times(n+r)}$ rješenje asocirane Rikatijeve jednačine

$$A_e^T M_e + M_e A_e - M_e S_e M_e + Q_e = 0 \qquad (6.10)$$

Referentno rješenje je eksplicitno definisano svojom invarijantnom strukturom, tj. skupom optimalnih sopstvenih vrijednosti $\Lambda=\{\lambda_j\}_{j=1}^{n+r}$ i pridruženih sopstvenih vektora $\{g_j\}_{j=1}^{n+r}$. Iz rezultata Odjeljka II.2 jasno je da možemo sada, korišćenjem projekcionih upravljanja, zadržati $\bar{r}$-dimenzioni invarijantni podprostor pri čemu je $\bar{r}=\min \bar{r}_i$, $\bar{r}_i=2r_i$. Naime, formirajmo $\bar{X}_{ri}=[g_i \ldots g_{ri}]\varepsilon R^{(n+r)x\bar{r}_i}$ od izabranih $\bar{r}_i$ sopstvenih vektora pridruženih $\Lambda_{\bar{r}i}\subset\Lambda$, $i=1,\ldots,k$, i definišimo asocirana projekciona upravljanja

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^T M_e P_{ie} x_e, \quad i=1,\ldots,k \qquad (6.11)$$

pri čemu su $P_{ie}=\bar{X}_{ri}(C_{ie}\bar{X}_{ri})^{-1}C_{ie}$, $i=1,\ldots,k$, i važi princip inkluzije $R\{\bar{X}_r\}\subset R\{\bar{X}_{ri}\}$, za $i=1,\ldots,k$. Rezultujući regulisani sistem tada postaje

$$\dot{x}_e=(A_e-\sum_{i=1}^{k} S_{ie}M_eP_{ie})x_e=A_{ce}x_e \qquad (6.12)$$

i posjeduje osobinu: $A_{ce}\bar{X}_r=\bar{X}_r\Lambda_{\bar{r}}$, za $\Lambda_{\bar{r}}=\bigcap_{i=1}^{k}\Lambda_{\bar{r}i}$, tj. $R\{\bar{X}_r\}$ predstavlja invarijantni podprostor regulisanog sistema. Preostale polove regulisanog sistema definiše spektar rezidualne matrice $A_r=V_eA_{ce}Y_e$, pri čemu je $Y_e\varepsilon R^{(n+r)x(n+r-\bar{r})}$ proizvoljna matrica uz uslov da je $T_e=\begin{bmatrix}\bar{X}_r & Y_e\end{bmatrix}$ regularna matrica, a $V_e\varepsilon R^{(n+r-\bar{r})x(n+r)}$ je definisana sa $T_e^{-1}=\begin{bmatrix}U_e\\V_e\end{bmatrix}$. Ako su, za konkretan izbor $\bar{X}_r$(po mogućnosti asociran sa dominantnom referentnom dinamikom), komplementarnih $n+r-\bar{r}$ polova locirani u prihvatljivoj oblasti kompleksne ravni, tada se ovakvo rješenje može ocijeniti kao zadovoljavajuće i procedura se završava nalaženjem suboptimalnih pojačanja povratne sprege

$$K_{ie}=\begin{bmatrix}K_i^I & K_i^P\end{bmatrix}=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^TM_e\bar{X}_{ri}(C_{ie}\bar{X}_{ri})^{-1}, \quad i=1,\ldots,k \qquad (6.13)$$

Takodje je moguće, shodno Teoremi II.2.4, izračunati i povećanje vrijednosti kriterijuma D_e asocirano sa projekcionim upravljanjem.

Medjutim, pošto su integratori uvedeni sa eksplicitnim ciljem da poboljšaju ponašanje sistema u ustaljenom stanju, može se desiti da u konkretnom upravljačkom problemu nijedna kombinacija zadržanih optimalnih sopstvenih vektora ne rezultuje u prihvatljivom rješenju. U tom slučaju metoda omogućava tri moguća načina za poboljšanje nezadovoljavajućeg rješenja:

- smanjiti dimenziju zadržanog invarijantnog podprostora na $\bar{q}<\bar{r}$, čime se, shodno razmatranju u Odjeljku II.2, dobija decentralizovani problem podešavanja rezidualnih polova,
- povećati broj efektivnih mjerenja u upravljačkim centrima diferenciranjem postojećih lokalnih izlaza i na taj način iskoristiti ovako dobijene mjerne signale za popravljanje dinamike regulisanog sistema. Ovaj način vodi ka sintezi decentralizovanih PID regulatora i biće razmatran u narednom odjeljku,
- treća mogućnost, koja će biti detaljnije proučena u Odjeljku II.8, sastoji se u uvodjenju dinamičkih regulatora u pojedinim upravljačkim centrima, čime se pruža prilika za poboljšanje neprihvatljivog rješenja, proizašlog iz sinteze decentralizovanih PI regulatora.

Primjer 7

Sistem sa dva upravljačka centra, na koji djeluju spoljni poremećaji opisan je matricama

$$A=\begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.025 & -0.015 & -0.350 & -0.066 & -0.0016 & -0.011 \\ 0.000 & -0.045 & 0.000 & -0.450 & -0.010 & 0.025 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.200 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.400 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.03 \\ 0.15 \\ 0.00 \end{bmatrix}, \quad B_2=\begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.200 \\ 0.024 & 0.000 \\ 0.060 & 1.000 \\ 0.000 & 0.050 \\ -0.240 & 0.000 \end{bmatrix}, \quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i zadovoljava uslov (b). Uvodeći integratore $\dot{w}_i=y_i$, $i=1,2$, i transformišući prošireni sistem u oblik pogodan za računanje dobijemo

$$A_e=\begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.05 & -0.01 & -0.45 & 0.00 & 0.03\\ 0.00 & -0.03 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & -0.07 & -0.35 & -0.01\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.40 \end{bmatrix}$$

$$B_{1e}=\begin{bmatrix} 0.00\\ 0.15\\ 0.00\\ 0.00\\ 0.00\\ 0.15\\ 0.03\\ 0.00\\ 0.00 \end{bmatrix},\quad B_{2e}=\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.20\\ 0.00 & 0.50\\ 0.06 & 1.00\\ 0.02 & 0.00\\ -0.24 & 0.00 \end{bmatrix},\quad C_{1e}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2e}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usvajajući $Q_e=100I_9$, $R=I_3$, rješavanjem asocirane Rikatijeve jednačine dobijamo matricu referentnog rješenja (6.9) sa optimalnim referentnim spektrom $\Lambda(F_e)$:

$\lambda_1=-11.36$, $\lambda_2=-2.46$, $\lambda_{3,4}=-1.37\pm j0.15$, $\lambda_{5,6}=-0.89\pm j0.47$,

$\lambda_{7,8}=-0.23\pm j0.24$, $\lambda_9=-0.38$.

Primjenom procedure za sintezu decentralizovanih PI regulatora iz ovog odjeljka, nalazimo da postoje sledeće tri kombinacije koje rezultiraju u stabilnom regulisanom sistemu:

1^o prvi upravljački centar zadržava invarijantni podprostor asociran sa $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ dok drugi zadržava invarijantni podprostor asociran sa $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_7,\lambda_8\}$;

2^o prvi upravljački centar zadržava $\{\lambda_1,\lambda_9\}$ a drugi $\{\lambda_1,\lambda_9,\lambda_7,\lambda_8\}$;

3^o prvi upravljački centar zadržava $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ a drugi $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$.

Za prvu kombinaciju se nalazi da su rezidualna matrica A_r i asocirani rezidualni spektar dati sa

$$A_r=\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.00 & 0.9 & 0.00 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.00 & 4.7 & 0.00 \\ -43.3 & -11.3 & -28.8 & -0.2 & 1.00 & -11.3 & 0.00 \\ -108.2 & -28.4 & -72.0 & -0.6 & 0.00 & -55.5 & 0.00 \\ -244.8 & -64.2 & -158.5 & 0.8 & -0.45 & -112.4 & 0.02 \\ -11.3 & -2.9 & -5.7 & 0.7 & -0.06 & -1.4 & -0.01 \\ 113.2 & 29.2 & 57.2 & -6.9 & 0.00 & 3.8 & -0.40 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(A_r)=\{-12.07,-16.43,-1.92,-0.33\pm j0.23,-0.34\pm j0.09\}.$$

Znači, rezultujući regulisani sistem je stabilan i spektar mu se sastoji od zadržanih λ_1,λ_2 i $\Lambda(A_r)$. Za ovaj slučaj se, na osnovu (6.13), dobijaju pojačanja povratne sprege

$$K_{1e}=\begin{bmatrix} 95.84 & 43.37 \end{bmatrix},\quad K_{2e}=\begin{bmatrix} -472.02 & -122.01 & -238.43 & 28.86 \\ -216.54 & -56.88 & -144.14 & -0.95 \end{bmatrix}$$

odnosno, poslije odgovarajuće dekompozicije:

$$K_1^I=95.84,\quad K_1^P=43.37\ ,\quad K_2^I=\begin{bmatrix} -472.02 & -122.01 \\ -216.54 & -56.88 \end{bmatrix},\quad K_2^P=\begin{bmatrix} -238.43 & 28.86 \\ -144.14 & -0.95 \end{bmatrix}$$

II.7. SINTEZA DECENTRALIZOVANIH PID REGULATORA

S obzirom na njihovu veliku popularnost u praktičnim primjenama, od interesa je razmotriti mogućnost generalizacije postupka za sintezu optimalnih PID regulatora iz centralizovanog slučaja na sisteme sa decentralizovanom strukturom. U tom smislu, posmatrajmo sistem (6.6a) i uvedimo r_i, $i=1,\dots,k$, dodatnih mjerenja asociranom upravljačkom centru diferenciranjem postojećih lokalnih izlaza, tj. proširimo skup lokalnih vektora izlaza (6.6b) sa

$$y_{id}=\dot{y}_i=C_i(Ax+\sum_{i=1}^{k}B_iu_i+d),\quad i=1,\dots,k \tag{7.1}$$

tako da novi lokalni vektori izlaza postaju

$$y_{ia}^T=\begin{bmatrix} y_{ie}^T & y_{id}^T \end{bmatrix},\quad y_{ia}\in R^{\hat{r}_i},\quad \hat{r}_i\equiv 3r_i,\quad i=1,\dots,k \tag{7.2}$$

Zadržavajući staru jednačinu stanja, novi sistem dobija oblik

$$\dot{x}_e = A_e x_e + \sum_{i=1}^{k} B_{ie} u_i + G_e d \tag{7.3a}$$

$$y_{ia} = C_{ia} x_e + \sum_{j=1}^{k} D_{ij} u_j + E_i d \quad , \quad i=1,\dots,k \tag{7.3b}$$

pri čemu su

$$C_{ia} = \begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \\ 0 & C_i A \end{bmatrix} \varepsilon R^{\hat{r}_i x(n+r)} \quad , \quad D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i B_j \end{bmatrix} \varepsilon R^{\hat{r}_i x m_j}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i \end{bmatrix} \varepsilon R^{\hat{r}_i x n}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I_{r_i} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad r = \sum_{i=1}^{k} r_i \tag{7.4}$$

dok su A_e, B_{ie}, G_e, definisani ranije. Sa ovako proširenim vektorima lokalnih izlaza skup statičkih regulatora oblika

$$u_i = K_{ia} y_{ia}, \quad i=1,\dots,k \tag{7.5a}$$

će u suštini biti realizovan kao decentralizovano PID upravljanje

$$u_i = K_i^P y_i + K_i^I \int y_i dt + K_i^D \dot{y}_i, \quad i=1,\dots,k \tag{7.5b}$$

Pri ovome, u zavisnosti od strukture samoga sistema, mogu nastupiti dva slučaja:

(i) $C_i B_j = C_j B_i = 0$, za svako $i \neq j$, $i,j=1,\dots,k$

(ii) $C_i B_j \neq 0$, $C_j B_i \neq 0$, za neko $i \neq j$, $i,j=1,\dots,k$.

Za slučaj (i) ne postoji direktno sprezanje izmedju pojedinih regulatora, jer su lokalni vektori izlaza dati sa

$$y_{ia} = C_{ia} x_e + D_{ii} u_i + E_i d, \quad i=1,\dots,k \tag{7.6}$$

pa se problem sinteze decentralizovanih PID regulatora svodi na sledeći problem statičkog decentralizovanog regulatora izlaza: Za dati sistem (7.3a), (7.6) sa upravljanjima ograničenim na oblik (7.5) naći pojačanja K_{ia}, $i=1,\dots,k$, koja daju optimalno rješenje u odnosu na kriterijum (6.8).

Za rješenje ovog problema metodom projekcionih upravljanja, uvešćemo skup novih pojačanja

$$L_i=(I-K_{ia}D_{ii})^{-1}K_{ia},\ i=1,\dots,k \tag{7.7}$$

pri čemu inverzija $(I-K_{ia}D_{ii})^{-1}$ postoji za "skoro svako" K_{ia}, i preformulisati originalni problem na sledeći način:
za dati sistem

$$\dot{x}_e=A_e x_e+\sum_{i=1}^{k} B_{ie}u_i+G_e d$$
$$y_{ia}=C_{ia}x_e+E_i d\ ,\ i=1,\dots,k \tag{7.8}$$

i upravljanja

$$u_i=L_i y_{ia},\ i=1,\dots,k \tag{7.9}$$

naći optimalne vrijednosti za L_i, $i=1,\dots,k$, u odnosu na (6.8). Primijetimo da ponovo struktura upravljanja (7.9) garantuje eliminaciju uticaja spoljnih poremećaja na lokalne vektore izlaza, u ustaljenom stanju. Imajući ovo u vidu, možemo formalno primijeniti metodologiju za sintezu decentralizovanih statičkih regulatora. Naime, prisjećajući se referentnog rješenja (6.9), sada možemo zadržati $\hat{r}$-dimenzioni invarijantni podprostor u regulisanom sistemu, pri čemu je $\hat{r}=\min_i \hat{r}_i$. U tom smislu formirajmo matricu sopstvenih vektora $\hat{X}_r=\{g_1..g_{\hat{r}}\}\in R^{(n+r)x\hat{r}}$ i definišimo projekciona upravljanja

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^T M_e\hat{X}_{ri}(C_{ia}\hat{X}_{ri})^{-1}y_{ia}=L_i y_{ia},\ i=1,\dots,k \tag{7.10}$$

pri čemu je $R\{\hat{X}_{ri}\}\supset R\{\hat{X}_r\}$, $i=1,\dots,k$. Rezultujući regulisani sistem će zadržati $R\{\hat{X}_r\}$ kao invarijantni podprostor, dok će rezidualni spektar biti definisan sa $\Lambda(A_{ra})$, za pogodno odredjenu rezidualnu matricu A_{ra}. S obzirom da za ovakvo rješenje važe sve osobine rješenja baziranog na decentralizovanom statičkom regulatoru, potrebno je ispitati osobine različitih rezidualnih matrica A_{ra}, i ako se za konkretan izbor $\hat{X}_r$ ispostavi da je rezidualni spektar zadovoljavajući, sinteza se vrši nalaženjem L_i, $i=1,\dots,k$, iz (7.10) i izračunavanjem originalnih pojačanja

$$K_{ia}=\begin{bmatrix}K_i^I & K_i^P & K_i^D\end{bmatrix}=L_i(I+D_{ii}L_i)^{-1},\ i=1,\dots,k \tag{7.11}$$

Ako nijedna kombinacija zadržanog invarijantnog podprostora dimenzije $\hat{r}$ ne rezultira u prihvatljivom rješenju, možemo modifikovati postupak ili smanjenjem dimenzije zadržanog podprostora na $\hat{q}<\hat{r}$ ili uvodjenjem skupa dinamičkih regulatora proizvoljne strukture

Napomena Uslov $C_iB_j=0$, $C_jB_i=0$, $i\neq j$, koji karakteriše slučaj (i) je uvijek zadovoljen u pojedinim strukturama složenih sistema. Naime posmatrajmo složeni sistem, često srijetan u literaturi /55-58, 66-69/, koji se sastoji od skupa medjusobno povezanih podsistema oblika

$$\Sigma_i: \begin{array}{l} \dot{x}_i=A_{ii}x_i+B_{ii}u_i+\sum_{j=1}^{k}A_{ij}x_j \\ y_i=C_{ii}x_i, \quad i=1,\dots,k \end{array} \qquad (7.12)$$

Definisanjem vektora stanja $x^T=[x_1^T \ \dots \ x_k^T]$, ukupni složeni sistem se može napisati kao

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_1+\dots+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B_{kk} \end{bmatrix} u_k\equiv Ax+\sum_{i=1}^{k}B_iu_i$$

$$\begin{array}{l} y_1=[C_{11} \ \ 0 \ \cdots \ 0]x\equiv C_1x \\ \vdots \\ y_k=[0 \ \ 0 \ \cdots \ C_{kk}]x\equiv C_kx \end{array} \qquad (7.13)$$

pa je iz strukture C_i, B_i, $i=1,\dots,k$, očigledno da uslov (i) važi.

Za slučaj (ii) očigledno je da dolazi do sprezanja pojedinih regulatora preko lokalnih izlaza, pa se na njega može direktno primijeniti razmatranje iz Odjeljka II.3. Naime, za odabrani invarijantni podprostor $R\{\hat{X}_r\}$, i uz pretpostavku da je $\hat{r}_i=\hat{r}$, $i=1,\dots,k$, projekciona upravljanja koja obezbjedjuju zadržavanje $R\{\hat{X}_r\}$ u rezultujućem regulisanom sistemu imaju oblik

$$u_i=K_{ia}y_{ia}, \quad K_{ia}=-R_{ii}^{-1}B_{ie}^TM_e\hat{X}_r(C_{ia}\hat{X}_r-\sum_{j=1}^{k}D_{ij}\hat{T}_j)^{-1}, \quad i=1,\dots,k \qquad (7.14)$$

pri čemu su

$$\hat{T}_j = R_{jj}^{-1} B_{je}^T M_e \hat{X}_r, \quad j=1,\dots,k \tag{7.15}$$

Napominjemo da kada su $\hat{P}_i$, $i=1,\dots,k$, proizvoljni, važe rezultati analogni odgovarajućim rezultatima iz odjeljka II.3. Ostale osobine rješenja ostaju iste kao kod rješenja baziranog na decentralizovanim PI regulatorima pa ih ovdje nećemo diskutovati, radi izbjegavanja nepotrebnog ponavljanja.

Primjer 8

Složeni sistem opisan je sa

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2 + D, \quad y_1 = C_1x, \quad y_2 = C_2x$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.0 & 0.00 & 0.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.3 & 0.00 & 0.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.25 & 0.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.00 & -0.15 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.00 & 0.00 & -0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.00 & 0.00 & 0.0 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.15 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.15 \\ 0.00 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -0.24 \\ 0.24 \\ 0.00 \\ -0.24 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Decentralizovani zakon upravljanja ćemo potražiti u obliku (7.5b):

$$u_1 = K_1^I \int y_1 dt + K_1^P y_1 + K_1^D \dot{y}_1$$

$$u_2 = K_2^I \int y_2 dt + K_2^P y_2 + K_2^D \dot{y}_2$$

pa se proširivanjem sistema sa integratorima dobija sistem oblika (7.3):

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_{1e} u_1 + B_{2e} u_2 + G_e d$$

$$y_{1a} = C_{1a} x_e + D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + E_1 d$$

$$y_{2a} = C_{2a} x_e + D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + E_2 d$$

pri čemu su

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & 2.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & -0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & -0.30 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0.00 & -0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.15 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.40 \end{bmatrix}, \quad B_{1e}=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.15 \\ -0.15 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.15 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_{2e}=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -0.24 \\ 0.24 \\ 0.00 \\ -0.24 \end{bmatrix}, \quad C_{1a}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & -0.10 & 0 & -0.25 & -0.15 & -0.20 & -0.40 \end{bmatrix}$$

$$C_{2a}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 2.00 & 0 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & 0 & -0.60 & 0 & -0.15 & -0.20 & -0.40 \end{bmatrix}$$

$$G_e=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad D_{11}=\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad D_{12}=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -0.24 \end{bmatrix}, \quad D_{21}=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -0.15 \end{bmatrix}, \quad D_{22}=0$$

$$E_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pogodnom transformacijom sličnosti

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 1 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 1.67 & 6.67 & 0 & -1.33 & -4.44 & 0.11 & 0.56 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & -0.50 & -3.33 & -0.17 & -0.83 \\ 0 & -0.67 & -6.67 & 0 & -0.67 & -2.22 & -0.44 & -2.22 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 2.00 & 6.67 & -0.67 & 0.67 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

dobija se

$$A_t=\begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 1.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & -0.03 & -0.35 & 0 & -0.01 & -0.03 & 0.00 & 0.04 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & -0.05 & -0.45 & 0.00 & 0.03 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.00 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.40 \end{bmatrix}$$

$$B_{1t}=\begin{bmatrix}0.00\\0.30\\-0.05\\0.00\\-0.15\\0.06\\0.15\\0.00\end{bmatrix},\quad B_{2t}=\begin{bmatrix}0.00\\-0.24\\0.12\\0.00\\0.00\\0.06\\0.00\\-0.24\end{bmatrix},\quad C_{1t}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C_{2t}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Usvajanjem $Q_t=100I_8, R=I_2$, dobije se referentno rješenje sa asociranim optimalnim spektrom $\Lambda(F_e)$:

$\lambda_1=-2.48$, $\lambda_2=-4.52$, $\lambda_3=-0.93$, $\lambda_{4,5}=-0.4\pm j0.25$, $\lambda_6=-0.3$,

$\lambda_{7,8}=-0.17\pm j0.01$.

Pošto oba regulatora imaju na raspolaganju po tri mjerenja u proširenom sistemu, moguće je zadržati trodimenzioni invarijantni podprostor u rezultujućem regulisanom sistemu. Ako se izabere invarijantni podprostor asociran sa $\{\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5\}$, jednoznačno rješenje za odgovarajuća pojačanja povratne sprege dobija se na osnovu (7.14) kao

$$K_{1a}=\begin{bmatrix}7.80 & 24.56 & 25.82\end{bmatrix}$$

$$K_{2a}=\begin{bmatrix}-0.73 & -4.08 & -5.85\end{bmatrix}$$

Sa ovakvim pojačanjima povratne sprege, matrica regulisanog sistema postaje

$$A_c=\begin{bmatrix}0.00&1.00&0.00&0.00&0.00&0.00&0.00&0.00\\-0.50&-1.57&-0.72&-0.13&-0.70&-1.01&0.00&0.00\\-0.34&-1.09&-1.51&-0.29&-1.64&-2.57&0.00&0.04\\0.00&0.00&0.00&0.00&1.00&0.00&0.00&0.00\\0.84&2.64&2.89&0.51&2.82&5.05&0.00&0.00\\-0.63&-1.98&-2.17&-0.42&-2.41&-3.85&-0.01&0.02\\-0.84&-2.64&-2.89&-0.51&-2.82&-4.05&-0.20&0.00\\1.18&3.71&4.05&0.89&4.95&7.10&0.00&-0.40\end{bmatrix}$$

sa

$$\Lambda(A_c)=\{-2.48,\ -0.4\pm j0.25, -0.39\pm j0.13, -0.17\pm j0.01, -0.3\}.$$

Znači, rezultujući regulisani sistem je stabilan i njegov spektar se sastoji od zadržanih sopstvenih vrijednosti $\lambda_1,\lambda_4,\lambda_5$, i rezidualnog spektra $\{-0.39\pm j0.13, -0.3, -0.17\pm j0.01\}$ koji se može smatrati prihvatljivim. Primijetimo da su optimalni polovi λ_6 i $\lambda_{7,8}$ praktično neosjetljivi na upravljanje pa ih, i pored toga što su dominantni, nije bilo potrebno zadržavati projekcionim upravljanjem.

Konačno, poslije odgovarajuće dekompozicije dobijaju se parametri povratne sprege za pojedine regulatore asocirani sa integralnim, proporcionalnim i diferencijalnim djelovanjem

$K_1^I=7.8,\ K_1^P=24.56,\ K_1^D=26.82$

$K_2^I=-0.73,\ K_2^P=-4.08,\ K_2^D=-5.85.$

II. 8. SINTEZA GENERALIZOVANIH DECENTRALIZOVANIH PID REGULATORA

U slučaju nezadovoljavajućeg rješenja baziranog na decentralizovanim PI regulatorima, dinamičke karakteristike regulisanog sistema se mogu popraviti uvodjenjem skupa dinamičkih regulatora proizvoljne strukture

$$\dot{z}_i=H_i z_i+D_i y_{ie},\quad z_i \varepsilon R^{p_i},\quad i=1,\dots,k \tag{8.1}$$

Savremena kretanja u instrumentaciji sistema upravljanja povećavaju značaj ovakvog tipa regulatora, s obzirom da mikroprocesorski bazirani upravljački uredjaji posjeduju veću strukturnu fleksibilnost od klasičnih PI i PID regulatora. Regulatori (8.1), zajedno sa sistemom (6.6a), čine prošireni dinamički sistem

$$\dot{x}_g=A_g x_g+\sum_{i=1}^{k} B_{ig}u_i+G_g d,\quad x_g^T=\begin{bmatrix} z_1^T \dots z_k^T & x_e^T\end{bmatrix}\varepsilon R^{n+r+p},\quad p=\sum_{i=1}^{k} p_i,\ r=\sum_{i=1}^{k} r_i \tag{8.2a}$$

$$y_{ig}=C_{ig}x_g,\quad y_{ig}^T=\begin{bmatrix} z_i^T & y_{ie}^T\end{bmatrix}\varepsilon R^{\tilde{r}_i},\quad \tilde{r}_i=\bar{r}_i+p_i,\quad i=1,\dots,k \tag{8.2b}$$

pri čemu su

$$A_g=\begin{bmatrix} H & DC_e \\ 0 & A_e \end{bmatrix},\ H=dg\{H_i\},\ D=dg\{D_i\},\ C_e^T=\left[C_{1e}^T \dots C_{ke}^T\right]$$
$$G_g=\begin{bmatrix} 0 \\ G_e \end{bmatrix},\ C_{ig}=\begin{bmatrix} \bar{J}_i & 0 \\ 0 & C_{ie} \end{bmatrix},\ B_{ig}=\begin{bmatrix} 0 \\ B_{ie} \end{bmatrix},\ \bar{J}_i=\left[0 \ \dots \ I_{pi} \dots 0\right] \qquad (8.3)$$

dok se lokalna upravljanja mogu izraziti u obliku

$$u_i=K_{zi}z_i+K_i^I \int y_i dt+K_i^P y_i=K_{ig}y_{ig}, \quad i=1,\dots,k \qquad (8.4)$$

Zadržavajući kriterijum (6.8) referentno rješenje za prošireni sistem karakterisano je sa $M_g=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_e \end{bmatrix}$ i matricom zatvorenog sistema $F_g=\begin{bmatrix} H & DC_e \\ 0 & F_e \end{bmatrix}$, tako da smo problem sinteze generalisanih PID regulatora formalno sveli na problem sinteze dinamičkih regulatora razradjen u odjeljcima II.4 i II.5. Naime, za $F_gX_g=X_g\Lambda_g$, $X_g\varepsilon R^{(n+r+p)x(n+r+p)}$, projekciona upravljanja oblika

$$u_i=-R_{ii}^{-1}B_{ig}^TM_gP_{ig}x_g,\ P_{ig}=X_{ig}(C_{ig}X_{ig})^{-1}C_{ig},\ X_{ig}\subset X_g,\ i=1,\dots,k \qquad (8.5)$$

rezultiraju u regulisanom sistemu

$$\dot{x}_g=A_{cg}x_g,\ A_{cg}=A_g-\sum_{i=1}^{k}S_{ig}M_gP_{ig},\ S_{ig}=B_{ig}R_{ii}^{-1}B_{ig}^T \qquad (8.6)$$

Ako dimenzije dinamičkih regulatora izaberemo tako da važi $\tilde{r}_i=\tilde{r}=const$, $i=1,\dots,k$, tada sve osobine projekcionih upravljanja i rezultujućeg sistema (8.6) ustanovljene u Odjeljku II.4 važe i za ovaj slučaj. Naime, za odabrani podspektar $\Lambda_{\tilde{r}}=\Lambda_{\tilde{r}_i}\cup\Lambda_{pi}$, $\Lambda_{\tilde{r}}\subset\Lambda(F_e)$ regulisani sistem (8.6) zadržava pridruženi invarijantni podprostor $R\{\tilde{X}_r\}$, tj.

$$A_{cg}\tilde{X}_r=\tilde{X}_r\Lambda_{\tilde{r}} \qquad (8.7)$$

i to nezavisno od izbora parametara H_i, D_i, $i=1,\dots,k$. Rezidualni spektar je pri tome definisan polovima pogodno definisane rezidualne matrice $A_{rg}\varepsilon R^{(n+r+p-\tilde{r})x(n+r+p-\tilde{r})}$. Pogodnom dekompozicijom matrice sopstvenih vektora proširenog sistema odabranih za zadržavanj

$\tilde{X}_r$ i definicijom $W_{pi}\varepsilon R^{p_i x p_i}$, $W_{ri}\varepsilon R^{p_i x \bar{r}_i}$, $X_{pi}\varepsilon R^{\bar{r}_i x p_i}$, $X_{ri}\varepsilon R^{\bar{r}_i x \bar{r}_i}$ potpuno analogno relaciji (4.15), pri čemu su C_i i J_i zamijenjeni sa C_{ie} i $\bar{J}_i$, i definisanjem

$$L_i=W_{pi}^{-1}W_{ri},\ P^i=L_i(X_{ri}-X_{pi}L_i)^{-1} \tag{8.8}$$

osnovne osobine rješenja sa decentralizovanim generalisanim PID regulatorima mogu se sumirati kao:

Teorema II.8.1

(i) zavisnost rezidualnog spektra $\Lambda(A_{rg})$ od parametara H_i, D_i, $i=1,\ldots,k$, može se formulisati u funkciji pomoćnih parametara P^i, $i=1,\ldots,k$;

(ii) pretpostavljajući da su odredjeni P^i, $i=1,\ldots,k$, koji daju prihvatljivi rezidualni spektar, parametri regulatora H_i i D_i se odredjuju jednoznačno (do transformacije sličnosti W_{pi}), sa

$$\begin{aligned} &H_i=W_{pi}H_{io}W_{pi}^{-1},H_{io}=(A_{pi}-L_iA_{ri}X_{ri}^{-1}X_{pi})(I-L_iX_{ri}^{-1}X_{pi})^{-1} \\ &D_i=W_{pi}D_{io},D_{io}=(L_iA_{ri}-A_{pi}L_i)(X_{ri}-X_{pi}L_i)^{-1}\ ,\ i=1,\ldots,k \end{aligned} \tag{8.9}$$

(iii) za odredjene H_i, D_i, $i=1,\ldots,k$, parametri povratne sprege se nalaze iz (8.5).

Dokaz je očigledan na osnovu do sada izloženog pa će biti izostavljen. Napomenimo samo da ovaj rezultat ponovo omogućava razlaganje sinteze u tri faze, potpuno analogno sintezi decentralizovanih dinamičkih regulatora za sisteme bez poremećaja; u prvoj fazi se podešavaju rezidualni polovi sistema a u ostale dvije nalaze parametri regulatora i povratne sprege. Medjutim, i ovdje je zavisnost $\Lambda(A_{rg})$ od slobodnih parametara u sintezi složena, i ne može se svesti na linearni problem podešavanja polova. Zbog toga se i ovdje podešavanje rezidualnih polova vrši u sekvencijalnoj proceduri, tako da se poboljšava rezidualni spektar u svakom koraku podesnim izborom parametara jednog po jednog dinamičkog regulatora.

Pretpostavimo, naime, da su $H_i=H_i^o$, $D_i=D_i^o$, $i=1,\dots,k$, $i\neq q$, fiksirani i da je izabran podspektar $\Lambda_{\tilde{r}}$. Tada je i pridružena matrica sopstvenih vektora fiksirana, izuzev submatrica W_{pq} i W_{rq} asociranih sa q-tim upravljačkim centrom. Primjenom projekcionih upravljanja (8.5) i uvodjenjem pogodne transformacije sličnosti T^q koja će dovesti prošireni sistem u takvu reprezentaciju u kojoj su prvih $\tilde{r}$ stanja y_{qg}, pri čemu je $y_{qg}=C_{qg}x_g$, $C_{qg}=\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0\end{bmatrix}$, lako se pokazuje da asocirana matrica rezultujućeg regulisanog sistema može biti dekomponovana kao

$$A_{cg}^q=\begin{bmatrix} H_q & D_q & C_{qg} \\ \tilde{E}^q & & \tilde{A}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_q & D_q & 0 \\ \tilde{E}_{11}^q & \tilde{A}_{11}^q & \tilde{A}_{12}^q \\ \tilde{E}_{21}^q & \tilde{A}_{21}^q & \tilde{A}_{22}^q \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11}^q \varepsilon R^{\bar{r}_q \times \bar{r}_q} \tag{8.10}$$

pri čemu $\tilde{A}_{12}^q$ i $\tilde{A}_{22}^q$ ne zavise od W_{pq} i W_{rq} (tj. od H_q i D_q).

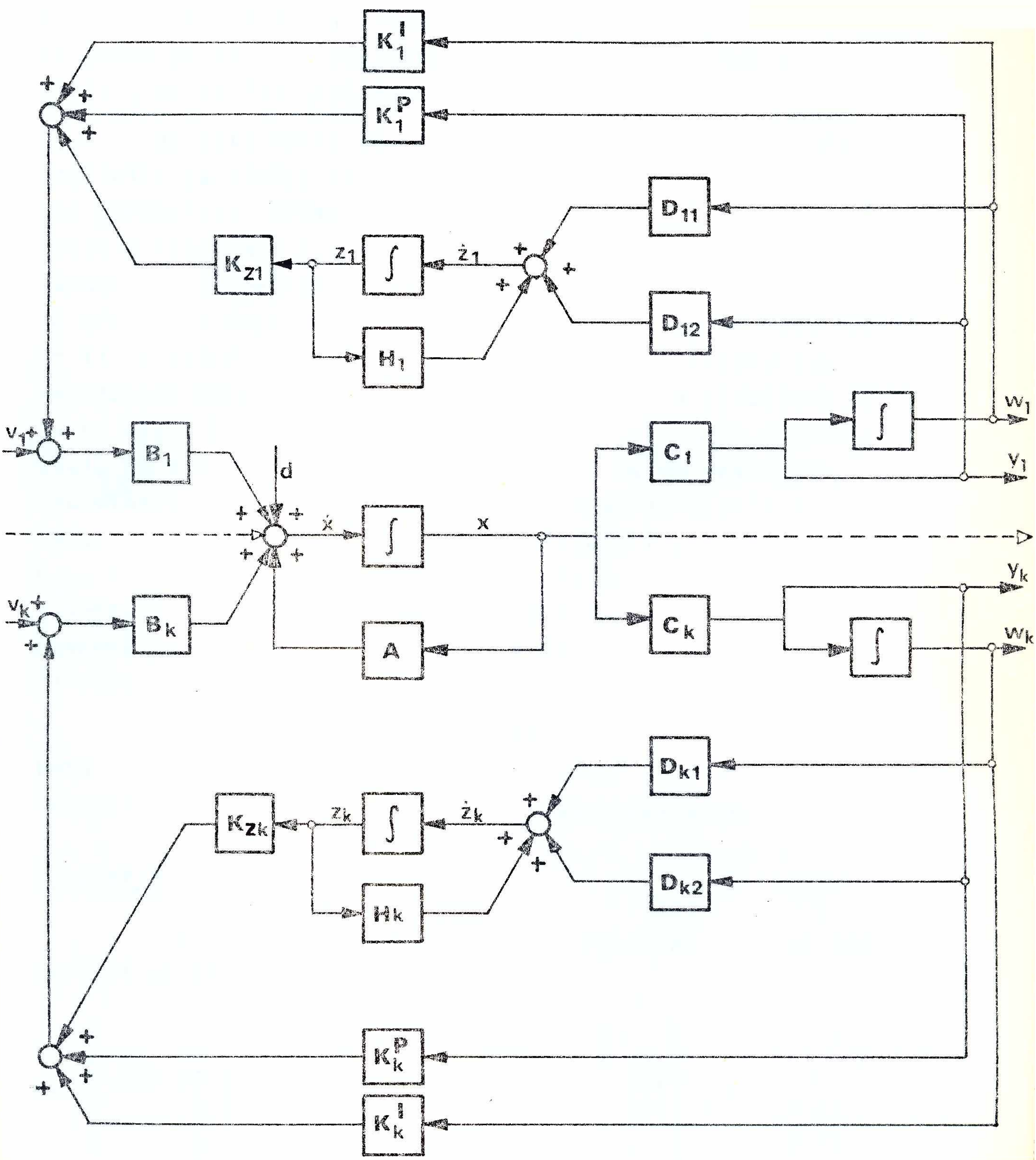
Rezidualna matrica A_{rg}^q u ovakvoj reprezentaciji poprima oblik

$$A_{rg}^q=A_r^q+\tilde{B}^q P^q \tilde{C}^q \tag{8.11}$$

gdje su $A_r^q=\tilde{A}_{22}^q-\tilde{Z}_o^q X_{rq}^{-1}\tilde{C}^q$, $\tilde{C}^q=\tilde{A}_{12}^q$, $\tilde{B}^q=\tilde{U}_o^q-\tilde{Z}_o^q X_{rq}^{-1}X_{pq}$, a $\tilde{U}_o^q$ i $\tilde{Z}_o^q$ se dobijaju iz sledeće dekompozicije matrice sopstvenih vektora

$$\tilde{X}_r^q=\begin{bmatrix} W_{pq} & W_{rq} \\ X_{pq} & X_{rq} \\ \tilde{U}_o^q & \tilde{Z}_o^q \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

asocirane sa $\Lambda_{\tilde{r}}$ i permutovane u skladu sa transformacijom T^q. S obzirom da A_r^q, $\tilde{B}^q$, $\tilde{C}^q$ ne zavise od W_{pq}, W_{rq}, očigledno je da se rezidualni polovi mogu podešavati u sekvencijalnoj proceduri potpuno analogno razmatranju iz Odjeljka II.5. Naime, podešavajući reprezentaciju sistema prema pojedinim regulatorima, rezidualni spektar se poboljšava nizom podešavanja polova tipa (8.11), dok se ne dobije zadovoljavajući raspored rezidualnih polova. Ako je potrebno procedura se iterativno ponavlja a ako i to ne da zado-



Slika 5. Struktura decentralizovanog generalisanog PID regulatora

voljavajuće rješenje, dimenzije dinamičkih regulatora se povećavaju za jedan pa se isti postupak ponavlja. Detalji ove procedure su očigledni, pa se izostavljaju.

Na ovaj način smo metodologiju projekcionih upravljanja proširili na slučaj decentralizovane strukture sa prisustvom spoljnih poremećaja. Uzimajući u obzir da je prisustvo integralnog djelovanja neophodno u upravljanju radi otklanjanja dejstva spoljnih poremećaja posmatrane su, u okviru jedinstvenog pristupa, različite strukture decentralizovanih regulatora koje se mogu realizovati ili klasičnim PI i PID regulatorima ili mikroprocesorskom implementacijom generalisanih PID regulatora, čija struktura je prikazana na slici 5. Fundamentalna osobina projekcionih upravljanja sastoji se u tome što postoji metodološki način postepenog povećanja dimenzije dinamičkih regulatora (koji se završava izborom p_i, $i=1,\dots,k$) i izbora parametara regulatora i povratne sprege H_i, D_i, K_{zi}, K_i^P, K_i^I, $i=1,\dots,k$, pri čemu se istovremeno povećava dimenzija zadržanog invarijantnog podprostora i popravljaju nezadovoljavajuće spektralne karakteristike rješenja baziranog na decentralizovanim PI regulatorima.

Sa ovim je metodologija razvijena za centralizovanu strukturu iz prvog dijela ovog rada, proširena na sisteme sa decentralizovanom upravljačkom i informacionom strukturom.

Primjer 9

Sistem sa decentralizovanom strukturom na koga djeluju spoljni poremećaji opisan je sa

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.025 & -0.015 & -0.35 & -0.066 & -0.0016 & -0.011 \\ 0 & -0.045 & 0 & -0.450 & -0.01 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_1=\begin{bmatrix} 0.15 \\ 0 \\ 0 \\ 0.03 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.024 \\ 0.06 \\ 0 \\ -0.24 \end{bmatrix}, \quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S obzirom na dejstvo spoljnjih poremećaja, uvešćemo integratore $\dot{w}_i=y_i$, $i=1,2$, i transformisati asocirani prošireni sistem u oblik pogodan za potrebna izračunavanja. Na taj način se dobija:

$$A_e=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.025 & 0 & -0.015 & -0.35 & -0.066 & -0.0016 & -0.011 \\ 0 & 0 & 0 & -0.045 & 0 & -0.45 & -0.01 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_{1e}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.15 & 0 \end{bmatrix},\quad B_{2e}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 & 0.06 & 0 & -0.24 \end{bmatrix}$$

$$C_{1e}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad C_{2e}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za $Q_e=100I_8$, $R_{11}=R_{22}=1$, optimalno referentno rješenje je karakterisano spektrom

$\lambda_1=-2.51$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_{3,4}=-0.4\pm j0.28$, $\lambda_5=-0.53$, $\lambda_6=-0.61$,

$\lambda_{7,8}=-0.17\pm j0.07$.

Pri sintezi decentralizovanih PI regulatora možemo zadržati dvodimenzioni invarijantni podprostor referentnog rješenja. Ako u tom smislu izaberemo invarijantni podprostor asociran sa λ_3, λ_4, rezidualni spektar je

$\Lambda(A_r)=\{-0.14,-0.58,0.11,-0.32,-0.17\pm j0.07\}$,

što znači da bi rezultujući regulisani sistem bio nestabilan. U stvarnom postupku sinteze probali bi sada neku drugu kombinaciju optimalnih sopstvenih vektora u cilju dobijanja prihvatljivog rezidualnog spektra. Medjutim, za ilustrativne svrhe ovog primjera, umjesto toga ćemo uvesti par dinamičkih regulatora oblika (8.1) i dimenzije $p_1=p_2=1$, i sprovesti sekvencijalnu proceduru za sintezu decentralizovanih generalisanih PID regulatora.

S obzirom da sada oba regulatora imaju na raspolaganju po tri mjerenja zadržaćemo invarijantni podprostor asociran sa $\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$. Primijetimo ovdje da ne zadržavamo dominantni kompleksni par $\lambda_{7,8}$ pošto je relativno slabo kontrolabilan. Usvojimo sada proizvoljno

$H_2^o=-1$, $D_2^o=\begin{bmatrix}-3 & 5\end{bmatrix}$

čime dolazimo do problema podešavanja polova oblika (8.11), sa

$$A_r^1=\begin{bmatrix}-1.00 & -3.00 & 5.00 & 50.90 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 5.51 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.41 & 1.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & -0.11 & -1.22 & -0.07 & 0.00 & -0.01\\ 0.01 & 0.01 & -0.28 & -3.21 & -0.45 & -0.01 & 0.03\\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.78 & 0.00 & -0.20 & 0.00\\ -0.04 & -0.04 & 0.94 & 11.55 & 0.00 & 0.00 & -0.40\end{bmatrix},\quad \tilde{B}^1=\begin{bmatrix}-1.36\\ 0.14\\ -0.10\\ 0.00\\ 0.04\\ 0.01\\ -0.12\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}^1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Usvajanjem $P^1=\begin{bmatrix}0 & 12\end{bmatrix}$ dobijamo rezidualni spektar

$\Lambda(A_{rg}^1)=\{-0.66,-1.29,-0.54,-0.15\pm j0.07,-0.14,-0.34\}$.

U ovom slučaju je

$\Lambda_{p1}=\Lambda_{p2}=\Lambda_p=-0.53$

$\Lambda_{r1}=\Lambda_{r2}=\Lambda_r=\begin{bmatrix}-0.40 & 0.28\\ -0.28 & -0.40\end{bmatrix}$

a L_1 se dobija kao $L_1=\begin{bmatrix}-0.15 & -0.19\end{bmatrix}$ pa se parametri H_1 i D_1 računaju iz (8.9)

$H_1=-0.46$, $D_1=\begin{bmatrix}-4.40 & -6.18\end{bmatrix}$.

Pošto je rezultujući regulisani sistem stabilan, proceduru bi mogli završiti računanjem parametara povratne sprege iz (8.5). Medjutim, radi ilustracije ćemo nastaviti proceduru i poboljšati rezidualni spektar preko novog podešavanja polova oblika

$A_{rg}^2=A_{rg}^{2o}+\tilde{B}^2\Delta P^2\tilde{C}^2$, $\Lambda(A_{rg}^{2o})=\Lambda(A_{rg}^1)$

asociranog sa drugim regulatorom. Za naš primjer su

$$A^{2o}_{rg}=\begin{bmatrix} -0.465 & -4.40 & -6.181 & 0.000 & 74.448 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.00 & 1.000 & 0.000 & 2.013 & 0.000 & 0.000 \\ 0.004 & 0.54 & -1.734 & 1.000 & -1.009 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.00 & -0.025 & -0.350 & -0.373 & -0.0016 & -0.011 \\ 0.001 & 0.11 & -0.347 & 0.000 & -0.126 & -0.010 & 0.025 \\ 0.004 & -0.54 & -1.734 & 0.000 & -2.386 & -0.200 & 0.000 \\ 0.000 & 0.00 & 0.000 & 0.000 & -4.880 & 0.000 & -0.400 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}^2=\begin{bmatrix} 1.15 \\ 0.04 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.05 \\ -0.04 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{C}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa se izborom $\Delta P^2=\begin{bmatrix} 0 & 70 \end{bmatrix}$ dobija poboljšani rezidualni spektar

$\Lambda(A^2_{rg})=\{-0.96,-1.47,-0.53,-0.34,-0.17\pm j0.09,-0.2\}$.

Sa ranije izračunatim P^2_o (asociranim sa H^o_2 i D^o_2) nalazimo $P^2=P^2_o+\Delta P^2=\begin{bmatrix} 4.22 & 129.92 \end{bmatrix}$, a zatim $L_2=\begin{bmatrix} 0.44 & 1.11 \end{bmatrix}$ što omogućava da se iz (8.9) izračunaju nove vrijednosti za parametre drugog regulatora

$H_2=-1.55$, $D_2=\begin{bmatrix} -3.76 & 16.03 \end{bmatrix}$

Konačno, parametre povratne sprege dobijamo iz (8.5) kao

$K_{z1}=0.03$, $K^I_1=-3.59$, $K^P_1=-11.56$

$K_{z2}=0.33$, $K^I_2=0.18$, $K^P_2=-7.51$.

ZAKLJUČAK

U radu je razmatran problem upravljanja za složene linearne sisteme sa ograničenom informacionom strukturom centralizovanog i decentralizovanog tipa, sa i bez djelovanja spoljnih poremećaja. Opisana metoda sinteze regulatora bazirana je na konceptu projekcionog upravljanja i odlikuje se jedinstvenim metodološkim postupkom koji, za centralizovanu i decentralizovanu strukturu, objedinjuje sintezu optimalnog regulatora stanja, statičkih i dinamičkih regulatora izlaza kao i regulatora PI i PID tipa i generalisanih PID regulatora, za slučaj da na sistem djeluju spoljni poremećaji. Navedena metodologija omogućava da se po potrebi proširuje struktura regulatora, pri čemu se u svakom koraku uporedjuju konačne spektralne karakteristike rezultujućeg regulisanog sistema sa karakteristikama referentnog optimalnog sistema, a samo u slučaju zadovoljavajućeg rješenja vrši se proračun parametara regulatora. U svakoj fazi sinteze eventualni nezadovoljavajući rezultat prethodne faze služi kao polazna osnova za unapredjenje rješenja. U postupku sinteze se istovremeno, mada raspregnuto i sekvencijalno, odredjuju red regulatora p_i, parametri regulatora H_i, D_i i parametri povratne sprege K_{zi}, K_{yi}. Posebna prednost metode je u tome što se sinteza zasniva na zadržavanju invarijantnih podprostora referentnog rješenja i na podešavanju rezidualnog spektra sistema, usled čega su rezultati sinteze invarijantni odnosno nezavisni od konkretnog izbora bazisa u realizaciji regulatora. Ovo implicira da se može izabrati proizvoljna realizacija regulatora u klasi sličnih realizacija, što je posebno podesno pri implementaciji regulatora pomoću mikroprocesora.

Numerički aspekti metode su veoma jednostavni. Naime, osnovnu numeričku podlogu čine programi za odredjivanje sopstvenih vrijednosti i sopstvenih vektora matrice. Ovi programi su dovoljni i za izračunavanje optimalnog referentnog rješenja, jer se rješenje matrične Rikatijeve jednačine može naći iz sopstvenih vektora odgovarajuće matrice koeficijenata, /106/. Pored ovoga, za podešavanje rezidualnog spektra potrebno je riješiti problem postavljanja polova regulatorom izlaza i ovaj problem se rješava primjenom već razvijenih algoritama. Pri ovome treba naglasiti da su rezidualni polovi asocirani sa nedominantnom dinamikom sistema pa ih je dovoljno postaviti u odredjeni domen kompleksne ravni, a ne na relativno precizno definisane lokacije. Sve ostale faze u sintezi odredjene su direktnim analitičkim izrazima za koje su potrebne samo osnovne manipulacije sa matricama.

S obzirom na višestruku mogućnost izbora invarijantnog podprostora i na uvodjenje složenijih regulatora na osnovu prethodnih proračuna i posmatranja lokacija rezidualnih sopstvenih vrijednosti, sinteza regulatora se u potpunosti i na zadovoljavajući način,sa aspekta pogodnosti za projektanta, može realizovati razvojem programskog sistema za interaktivno projektovanje pomoću računara. Numerički primjeri prezentirani u cilju ilustracije numeričkog aspekta predložene metodologije uradjeni su na računaru PDP 11/34 i korišćenjem programskog sistema LAS (Linearna Algebra i Sistemi) opisanog u radovima /130,131/.

Važni aspekti metode koji su preostali za dalja istraživanja su mogućnost generalizacije na diskretne sisteme upravljanja i uključivanje u postupak sinteze efekata koji se javljaju pri praktičnoj realizaciji digitalnih regulatora (uticaj periode odabiranja, konačne dužine riječi, računskog i komunikacijskog kašnjenja, itd.). U ovom smislu već su dobijeni odredjeni rezultati za sisteme sa centralizovanom strukturom /137,138/. Takodje, uzimajući u obzir činjenicu da je poznavanje modela sistema nepotpuno i da postoji mogućnost strukturnih promjena u operativnom režimu sistema (na primjer prekid neke od povratnih sprega), potrebno je u postupak sinteze uklopiti i ovakve efekte važne pri praktičnoj realizaciji upravljanja, tj. ispitati osobine metodologije projekcionog upravljanja sa aspekta integriteta, robustnosti na velike varijacije parametara, prisustvo nelinearnosti, itd.

LITERATURA

/1/ M. Stojić,"Razvoj i mogućnosti praktične primene savremenih metoda upravljanja multivarijabilnim sistemima", JUREMA 1980,Zagreb

/2/ F. M. Brash, J. B. Pearson,"Pole placement using dynamic compensators", IEEE Trans. on AC,AC-15, Feb. 1970, 34-43

/3/ H. Seraji,"A new method for pole assignement using output feedback", Int. J. Control, vol. 28, No 1, 1978, 147-155

/4/ H. Kimura,"Pole assignement by gain output feedback", IEEE Trans. on AC, AC-20, No 4, Aug. 1975, 509-516

/5/ H. Kimura," A further result on the problem of pole assignement by output feedback", IEEE Trans. on AC, AC-22, No 3, June 1977, 458-463

/6/ A. Bradshaw, B. Porter,"Design of linear multivariable discrete time output feedback regulators", Int. J. Systems Sci., vol. 9, No 8, 1978, 857-863

/7/ A. I. Vardulakis,"Generalized root locus assignement of all poles of a multivariable system by output feedback", Int. J. Control, vol. 23, No 1, 1976, 39-47

/8/ A. G. J. McFarlane, B. Kouvaritakis, J. M. Edmunds,"Complex variable methods for multivariable feedback system analysis and design", in *Alternates for linear multivariable control*, edited by M. Sain, J. Pechzkoraski, and J. Melsa, National Engineering Consortium, Inc., Chicago, 1978

/9/ N. Munro, "Further results on pole shifting using output feedback" Int. J. Control, vol. 20, No 5, 1974, 775-789

/10/ H. M. Power,"Dyadic output feedback laws generated as Kroneker products: Optimal and suboptimal solutions", Int. J. Control, vol. 23, No 6, 1976, 785-798

/11/ Y. Bar-Ness,"Optimal closed-loop poles assignement", Int. J. Control, vol. 27, No 3, 1978, 421-430

/12/ B. Sridhar, D. P. Lindorff, "Pole placement with constant gain output feedback", Int. J. Control, vol. 18, No 5, 1973,993-1003

/13/ H. R. Sirisena, S. S. Choi, "Pole placement in prescribed regions of the complex plane using output feedback", IEEE Trans. on AC, AC-20, Dec. 1975, 810-812

/14/ L. F. Miller, R. G. Cochran, J. W. Howze,"Output feedback stabilization by minimization of a spectral radius function", Int. J. Control, vol. 27, 1978, 455-462

/15/ W. S. Levine, M. Athans,"On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems", IEEE Trans. on AC, Feb. 1970, 44-48

/16/ H. P. Horisberger, P. R. Belanger,"Solution of the optimal constant output feedback problem by conjugate gradients", IEEE Trans. on AC, AC-19, Aug. 1974, 434-435

/17/ S. P. Bingulac, J. Medanić,"An efficient pole placement by output feedback", Proc. XX Ann. Allerton Conf., University of Illinois, Urbana, USA, Oct. 1982

/18/ T. L. Johnson, M. Athans,"On the design of optimal constrained compensators for linear control systems", IEEE Trans. on AC, AC-15, Dec. 1970, 658-660

/19/ W. S. Levine, T. L. Johnson, M. Athans,"Optimal limited state variable feedback controllers for linear systems", IEEE Trans. on AC, Dec.1972, 823-825

/20/ J. M. Mendel, J. Feather,"On the design of optimal time-invariant compensators for linear stochastic time-invariant systems", IEEE Trans. on AC, Oct. 1975, 653-657

/21/ C. S. Berger,"An algorithm for designing suboptimal dynamic controllers", IEEE Trans. on AC, AC-19, Oct. 1974, 596-597

/22/ R. B. Asher, J. C. Durrett,"Linear discrete stochastic control with a reduced order dynamic compensator", IEEE Trans. on AC, AC-21, 1976, 626-627

/23/ D. E. McBrinn, R. J. Roy,"Stabilization of linear multivariable systems by output feedback", IEEE Trans. on AC, AC-17, Apr. 1972, 243-245

/24/ T. Topaloglu, D. E. Seborg,"A design procedure for pole assignement using output feedback", Int. J. Control, vol. 22, 1975, 741-748

/25/ N. Munro, S. Novin-Hirbod,"Pole assignement using full-rank ouput feedback compensators", Int. J. System Sci., vol.10, March 1979, 285-306

/26/ W. Hopkins, Jr., *Output feedback pole placement in the design of compensators for suboptimal linear quadratic regulators*, MS Thesis, Coordinated Science Laboratory Report R-847, University of Illinois, Urbana, USA, June 1979

/27/ J. Medanić, *Design of low-order dynamic regulators for linear time-invariant systems,* Izveštaj za Rep. Zaj. za Naučne Delatnosti SR Srbije, Beograd 1981

/28/ M. Aoki,"Some aproximation methods for estimation and control of large scale systems", IEEE Trans. on AC,Apr.1978, 173-187

/29/ P. Kokotović, R. OMalley, P. Sannuti,"Singular perturbations and order reduction in control theory- An overview", Automatica, 12, 1976, 123-132

/30/ F. N. Bailey, H. K. Ramapriyan,"Bounds on suboptimality in the control of linear dynamic systems", IEEE Trans. on AC, AC-18, Oct. 1973, 532-534

/31/ P. Moylan, D. Hill,"Stability criteria for large scale systems", IEEE Trans. on AC, Apr. 1978, 143-149

/32/ F. Callier, W. Chan, C. Desoer,"Input-output stability of interconnected systems using decomposition: an improved formulation", IEEE Trans. on AC, Apr. 1978, 150-163

/33/ H. Kobayashi, H. Hanafusa, T. Yoshikawa,"Controllability under decentralized information structure", IEEE Trans. on AC, Apr. 1978, 182-187

/34/ C. Lin,"Structural controllability", IEEE Trans. on AC, June 1974, 201-208

/35/ M. Aoki,"On feedback stabilizability of decentralized dynamic systems", Automatica, 8, 1972, 163-173

/36/ S. Wang, E. J. Davison,"On the stabilization of decentralized control systems", IEEE Trans. on AC, Oct. 1973, 473-478

/37/ J. Corfmat, A. Morse,"Decentralized control of linear multivariable systems", Automatica, 12, 1976, 479-495

/38/ J. Corfmat, A. Morse,"Control of linear systems through specified input channels", SIAM J. Contr. and Opt., vol. 14,Jan. 1976

/39/ E. J. Davison,"The robust decentralized control of a general servomechanism problem", IEEE Trans. on AC, Feb.1976, 14-24

/40/ E. J. Davison,"Connectibility and structural controllability of composite systems", IFAC Symp. on Large Scale Systems, Theory and Appl., Udine, Italy, June, 1976

/41/ E. J. Davison, W. Gesing,"Sequential stability and optimization of large-scale decentralized systems", Automatica, 15, 1979, 307-324

/42/ E. J. Davison,"The robust decentralized servomechanism problem with extra stabilizing control agent", IEEE Trans. on AC, Apr. 1977, 526-528

/43/ M. Sundareshan,"Decentralized observatin in large-scale systems, IEEE Trans. on AC,Dec. 1977, 863-867

/44/ E. J. Davison, U. Ozguner,"Synthesis of the decentralized robust servomechanism problem using local models", IEEE Trans. on AC, June 1982, 583-599

/45/ Dj. Petkovski, M. Rakić,"Decentralizovano upravljanje složenim sistemima koordinacijom", XXVI Jug. konf. ETAN-a, Subotica, Jun 1982

/46/ M. Rakić, Dj. Petkovski, Lj. Lazarević,"Jedan postupak projektovanja blisko-optimalnog upravljanja složenim sistemima", XXVII Jug. konf. ETAN-a, Struga, Jun 1983

/47/ P. Fessas,"Decentralized control of linear dynamical systems via polinomial matrix methods", Int. J. Control, vol. 30, 1979, 259-276

/48/ P. Fessas,"Decentralized control of linear dynamical systems via polinomial matrix methods, Part II: Arbitrary interconnected systems", Int. J. Control, vol. 32, 1980, 127-147

/49/ B. D. O. Anderson, D, Clements,"Algebraic characterization of fixed modes in decentralized control", Automatica,17, 1981, 703-712

/50/ H. Seraji,"On fixed modes in decentralized control systems", Int. J. Control, vol.35, 1982, 775-784

/51/ V. Armebtano, M. Singh,"A procedure to eliminate decentralized fixed modes with reduced information exchange", IEEE Trans. on AC, Feb. 1982, 258-260

/52/ B. D. O. Anderson, J. Moore,"Time-varying feedback laws for decentralized control", IEEE Trans. on AC, Oct. 1981, 1133-1138

/53/S. Wang,"Stabilization of decentralized control systems via time varying controllers", IEEE Trans. on AC,June 1982, 741-744

/54/ E. J. Davison, N. S. Rau, F. V. Palmy,"The optimal decentralized control of a power system consisting of a number of interconnected synchronous machines", Int. J. Control, vol. 18, 1973, 1313-1328

/55/ D. Šiljak,"On decentralized control and estimation", VII World Congress of IFAC, Helsinki, 1978

/56/ M. Ikeda, D. Šiljak,"Decentralized stabilization of linear time varying systems", IEEE Trans. on AC, Feb. 1980, 106-107

/57/ M. Sezar, O. Huseyin,"On decentralized stabilization of interconnected systems", Automatica, 16, 1980, 205-209

/58/ A. Mahalanabis, R. Singh,"On decentralized feedback stabilization of large scale interconnected systems", Int. J. Control, vol. 32, 1980, 115-126

/59/ D. Šiljak, M. Vukčević,"On decentralized estimation", Int. J. Control, 1978, vol.27,113-131

/60/ M. Hassan, M. Singh,"The optimization of nonlinear systems using new two-level method", Automatica, 1976

/61/ D. Šiljak, M. Sundareshan,"A multilevel optimization of large-scale dynamic systems", IEEE Trans. on AC, Feb. 1976, 79-84

/62/ U. Ozguner, W. Perkins,"Optimal control of multilevel large-scale systems", Int. J. Control, vol. 28, 1978, 967-980

/63/ J. Medanić,"Hierarchial decomposition in the modeling and control of large-scale systems", Automatika,23, 1982, 3-10

/64/ M. S. Mahmoud,"Multilevel systems control and applications: A survey", IEEE Trans. Sys. Man, and Cyb., SMC-7, March 1977, 125-143

/65/ D. Wismer, Ed., *Optimization methods for large scale systems with applications*, McGrow-Hill, New York,1971

/66/ M. Singh, S. Drew, J. Coales,"Comparisons of practical hierarhical control methods for interconnected dynamical systems", Automatica, 11, 1975, 331-350

/67/ M. Hassan, M. Singh,"A two-level costate prediction algorithm for nonlinear systems", Automatica, 13, 1977, 629-634

/68/ G. Cohen,"Optimization by decomposition and coordination", IEEE Trans. on AC, Apr. 1978, 222-232

/69/ M. Hassan, M. Singh, A. Titly,"Near-optimal decentralized control with a prespecified degree of stabilizy", Automatica, 15, 1979, 438-488

/70/ M. Singh, *Decentralized control*, North Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1981

/71/ M. Athans,"The role and use of the stochastic LQG problem in control system design", IEEE Trans. on AC, AC-16, 1971,529-552

/72/ B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Linear optimal control*, Prentice-Hall, New York, 1971

/73/ H. Kwackernak, R. Sivan, *Optimal linear control systems*, Wiley, New York, 1974

/74/ M. G. Safonov, M. Athans,"Gan and phase margins for multiloop LQG regulators, IEEE Trans. on AC, Apr. 1977, 173-179

/75/ B. D. O. Anderson,"The inverse problem of optimal control", 4th Ann. Allerton Conf. on Circ. and Sys. Theory, Urbana, Ill., Oct. 1966

/76/ M. J. Grimble,"Recent trends in the design of multivariable control systems by optimal methods", Plenary paper presented at ACI83, IASTED Conf. on Appl. Cont. and Ident., Copenhagen, June 1983

/77/ A. J. Laub,"A Shur method for solving algebraic Riccati equation", IEEE Trans. on AC, Dec. 1979, 913-921

/78/ D. G. Luenberger,"An introduction to observers", IEEE Trans. on AC, Dec. 1971, 596-602

/79/ R. E. Kalman, R. S. Bucy,"New results in linear filtering and prediction theory", Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng., vol. 83, March 1961, 95-108

/80/ N. R. Sandell, P. Varaiya, M. Athans, M. G. Safonov,"Survey of decentralized control methods for large scale systems", IEEE Trans. on AC, AC-13, Apr. 1978

/81/ M. Athans, "Advances and open problems on the control of large scale systems", Plenary paper at the VII World Congress of IFAC, Helsinki, June 1978, Pergamon Press

/82/ M. Javdan, R. Richards,"Decentralized control systems theory: a critical survey", Int. J. Control, vol. 26, 1977, 129-144

/83/ Dj. Petkovski, *Savremene metode automatskog upravljanja složenim sistemima- teorija i primena*, Privredni Pregled,Beograd, 1983

/84/ J. Medanić,"On stabilization and optimization by output feedback", XII Ann. Asilomar Conf. on Circ. and Sys., Pacific Grove, USA, Nov. 1978

/85/ J. Medanić,"Design of low-order dynamic regulators for linear time-invariant systems", Conf. on Inf. Sci. and Sys.,John Hopkins University, March 1979

/86/ W. Hopkins, Jr., J. Medanić, W. R, Perkins,"Output feedback pole placement in the design of suboptimal quadratic regulators", Int. J. Control, vol. 34, 1981, 593-612

/87/ S. H. Javid, A. Murdoch, J. R. Winkelman,"Control design for a wind turbine generator using output feedback", Control System Magazine, vol. 2, Sept. 1982, 23-29

/88/ S. H. Javid, at. al.,"Control of cogeneration systems", IEEE Summer Power Meeting, San Francisco, USA, June 1982

/89/ J. Medanić, Z. Usković,"The design of optimal output regulators for linear multivariable systems with constant disturbances", Int. J. Control, vol. 37, 1983, 809-830

/90/ J. Medanić, Z. Usković,"Design of optimal output feedback controllers for linear multivariable systems subject to constant disturbances", MELECON 83, Atina, June 1983

/91/ J. Medanić,"Decentralized control of linear systems with respect to quadratic criteria", Proc. II IFAC Symp. on Optimiz. Methods- Applied Aspects, Varna, Bugarska, Oct. 1979

/92/ J. Medanić,"Synthesis of decentralized output regulators", Systems Eng. for Power, vol. II, Davos, Švajcarska,Sep.-Oc. 1979

/93/ J. Medanić, Z. Usković,"Design of decentralized static and low-order dynamic output regulators for large scale systems", Conf. on Decision and Control, San Antonio, USA, Dec. 1983

/94/ Z. Usković, J. Medanić,"Sequential design of decentralized low-order dynamic regulators", poslato na recenziju

/95/ Z. Usković, J. Medanić,"Sinteza decentralizovanih regulatora za složene linearne sisteme", XXVII Jug. konf. ETAN-a, Struga, Jun 1983

/96/ J. Medanić, Z. Usković,"Computer-aided design for large scale systems via projective controls", ACI´ 83, IASTED Conf. on Appl. Contr. and Identification, Kopenhagen, Jun 1983

/97/ Z. Usković, J. Medanić,"Design of decentralized controllers incorporating integral action for large scale linear systems", poslato na recenziju

/98/ J. Medanić, Z. Usković,"Metod projekcionih upravljanja u projektovanju regulatora", XXVII Jug. konf. ETAN-a, Struga,Jun 1983

/99/ J. Medanić, Z. Usković,"Design of coupled decentralized controllers", poslato na recenziju

/100/ C. A. Harvey, G. Stein,"Quadratic weights for asymptotic regulator properties", IEEE Trans. on AC, AC-23, June 1978

/101/ G. Stein,"Generalized quadratic weights for asymptotic regulator properties", IEEE Trans. on AC, AC-24, Aug. 1979

/102/ J. G. Truxal, *Automatic feedback control synthesis*, McGrow-Hill, New York, 1955

/103/ W. R. Evans,"Control systems synthesis by root locus method", AIEE Trans, vol. 69, 1950, 2

/104/ G. F. Franklin, J. D. Powell, *Digital control of dynamic systems*, Addison-Wesley Pub. Comp., Reading, Mass., 1980

/105/ G. Bengtsson, S. Lindahl,"A design scheme for incomplete state or output feedback with applications to boiler and power system control", Automatica, 10, 1974, 15-30

/106/ K. Martensson,"On the matrix Riccati equation", Information Sciences, vol. 3, Jan. 1971, 17-49

/107/ J. Medanić i grupa saradnika, *Projektovanje regulatora u složenim dinamičkim sistemima*, Izještaj za RSIZ za naučne delatnosti SR Srbije, Mart 1983

/108/ W. M. Wonham, *Linear multivariable control, a geometric approach*, Springer Verlag, Berlin, 1974

/109/ C. D. Johnson,"Optimal control of the linear regulator with constant disturbances", IEEE Trans. on AC, Aug. 1968, 416-421

/110/ H. Seraji, M. Tarokh,"Design of PID controllers for multivariable systems", Int. J. Control, vol. 26, 1977, 75-83

/111/ H. Seraji,"Design of proportional-plus-integral controllers for multivariable systems", Int. J. Control, vol. 29, 1979, 49-63

/112/ H. Seraji,"Design of multivariable PID controllers for pole placement", Int. J. Control, 32, 1980, 661-668

/113/ S. Novin-Hirbod,"Pole assignement using proportional-plus-integral output feedback control", Int. J. Control, vol. 29, 1979, 1035-1046

/114/ S. Porter,"Optimal control of linear multivariable systems incorporating integral feedback", Elec. Letters, 7, 1971,170-172

/115/ H. W. Smith, E. J. Davison,"Design of industrial regulators, Integral feedback and feedforward control", Proc. IEE, vol. 119, Aug. 1972, 1210-1216

/116/ E. J. Davison, H. W. Smith,"A note on the design of industrial regulators: integral feedback and feedforward controllers", Automatica,19, 1971, 329-332

/117/ M. Ćalović, N. Ćuk, S. P. Bingulac,"The compensatin of immeasurable disturbances via optimum output feedback",Int. J. Control,

vol. 19, 1974, 1005-1020
/ 118/ T. Yahagi,"Optimal output feedback control in the presence of step disturbances", Int. J. Control, 26, 1977, 753-762
/ 119/ S. Fukata, A. Mohri, M. Takata,"On the determination of the optimal feedback gains foe multivariable linear systems incorporating integral action", Int. J. Control, vol. 31, 1980, 1027-1040
/120/ C. Liou, W. Weigand, H. Lim,"Integral action in the optimal control of linear systems with some inaccessable state variables", Int. J. Control, vol. 17, 1973, 1029-1039
/121/ H. Seraji,"A note on pole assignement with output feedback", Int. J. Control, vol. 27, 1978, 141-142
/122/ M. Athans",The matrix minimum principle", Inform. Control, vol. 11,1968, 552-606
/123/ W. T. Reid, *Riccati differential equations*, Academic Press, New York, 1972
/124/ J. H. Chow, P. V. Kokotović,"A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes", IEEE Trans. on AC, AC-21, Oct. 1976, 701-705
/125/ J. Medanić,"Geometric properties and invariant manifolds of the Riccati equation", IEEE Trans. on AC, June 1982, 670-677
/126/ D. J. Clements, B. D. O. Anderson,"Polynomial factorization via the Riccati equation", SIAM J. Appl. Math., July 1976
/127/ D. K. Lindner, *Zeroes of multivariable systems: Definitions and algorithms*, MS Thesis, University of Illinois, Urbana,1979
/128/ C. A. Desoer, J. D. Schulman"Zeroes and poles of matrix transfer functions and their dynamic interpretation", IEEE Trans. on Circ. and Sys.,SAC-21, 1974, 3-7
/129/ F. Fallside, Ed., *Control system design by pole-zero assignement*, Academic Press, New York, 1977
/130/ S. P. Bingulac, N. Gluhajić,"Computer aided design of control systems using LAS language", IFAC Symp. on CAD of Multivariable Technological Systems,Purdue University, USA, Sept. 1982
/131/ S. P. Bingulac, M. A. Farias,"LAS language and its use in control system education and research", Computing, 23,1979, 1-23
/132/ S. Bingulac,"An algorithm for pole placement by a constant output feedback", in *Advances in control*, D. K. Laintoitis,

N. S. Tzanes, Ed., D. Reidel Pub. Com., 1980
/133/ G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, New York, 1976
/134/ B. Noble, J. W. Daniel, *Applied linear algebra*, Prentice-Hall, 1977
/135/ G. W. Stewart, *Introduction to matrix computations*, Academic Press, 1973
/136/ M. Stojić, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 197
/137/ N. Gluhajić, J. Medanić, D. Petranović, "Computer-aided design of digital control using projective controls", XXI Ann. Allerton Conf. on Comm. Contr. and Computing, Oct 1983
/138/ J. Medanić, D. Petranović, N. Gluhajić, "Design of static regulators for digital control systems with one-step delay information structure", poslato na recenziju

PRILOG A

Posmatrajmo detaljnije matricu regulisanog sistema A_{ce} iz (4.19)

$$A_{ce}=A_e-\sum_{i=1}^{k} B_{ie}R_{ii}^{-1}B_{ie}^{T}M_eP_{ie}=A_e-\sum_{i=1}^{k} S_{ie}M_eP_{ie}=$$

$$=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_p^i & W_r^i \\ X_p^i & X_r^i \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_p^i & W_r^i \\ X_p^i & X_r^i \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} J_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

Uvodeći notaciju

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_iW_p^i & J_iW_r^i \\ C_iX_p^i & C_iX_r^i \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} W_{pi} & W_{ri} \\ X_{pi} & X_{ri} \end{bmatrix}^{-1}, \quad i=1,\dots,k \qquad (A.2)$$

gdje su W_{pi}, W_{ri}, X_{pi}, X_{ri} kao u (4.15), imamo

$$A_{ce}=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_iM_cX_p^i & S_iM_cX_r^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{11}^iJ_i & K_{12}^iC_i \\ K_{21}^iJ_i & K_{22}^iC_i \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} H & DC \\ 0 & A \end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_iM_c(X_p^iK_{11}^i+X_r^iK_{21}^i)J_i & S_iM_c(X_p^iK_{12}^i+X_r^iK_{22}^i)C_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H & DC \\ E & \bar{A} \end{bmatrix} \qquad (A.3)$$

pri čemu je

$$\bar{A}=A-\sum_{i=1}^{k} S_iM_c(X_p^iK_{12}^i+X_r^iK_{22}^i)C_i$$

$$E=-\sum_{i=1}^{k} S_iM_c(X_p^iK_{11}^i+X_r^iK_{21}^i)J_i \qquad (A.4)$$

Iz (A.3) primjećujemo da gornje blok-matrice H, DC iz matrice A_{ce} nijesu promijenjene projekcionim upravljanjem. Takodje, zbog strukture J_i, $i=1,\dots,k$, član $E_i=S_iM_c(X_p^iK_{11}^i+X_r^iK_{21}^i)J_i$ utiče samo na blok-matricu u i-toj blok-koloni matrice E, dok član $G_i=S_iM_c(X_p^iK_{12}^i+X_r^iK_{22}^i)C_i$, $i=1,\dots,k$, utiče samo na matricu $\bar{A}$ iz (A.3). Sada je matricu A_{ce} pogodno napisati u dekomponovanom obliku, kao

$$A_{ce}=\begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 & D_{21} & D_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_k & D_{k1} & D_{k2} \\ E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1k} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2k} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

pri čemu su

$\bar{A}_{11}\varepsilon R^{r_{min}\times r_{min}}$, $\bar{A}_{12}\varepsilon R^{r_{min}\times(n-r_{min})}$, $\bar{A}_{21}\varepsilon R^{(n-r_{min})\times r_{min}}$,

$\bar{A}_{22}\varepsilon R^{(n-r_{min})\times(n-r_{min})}$, $E_{1i}\varepsilon R^{r_{min}\times p_i}$, $E_{2i}\varepsilon R^{(n-r_{min})\times p_i}$, $i=1,\dots,k$

a D_{i1}, D_{i2}, $i=2,3,\dots,k$, su definisani sa (4.9), a zatim permutovati prošireni sistem tako da su prvih r, $r=r_i+p_i$, stanja u novom vektoru z_1 i y_1, tj. stanja asocirana sa prvim regulatorom. Matrica regulisanog sistema asocirana sa permutovanim vektorom stanja ima oblik

$$\hat{A}_{ce}=\begin{bmatrix} H_1 & D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E_{11} & \bar{A}_{11} & E_{12} & E_{13} & \dots & E_{1k} & \bar{A}_{12} \\ 0 & D_{12} & H_2 & 0 & \dots & 0 & D_{22} \\ 0 & D_{31} & 0 & H_3 & \dots & 0 & D_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & D_{k1} & 0 & 0 & \dots & H_k & D_{k2} \\ E_{21} & \bar{A}_{21} & E_{22} & E_{23} & \dots & E_{2k} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

tako da su $\hat{A}_{ij}$, i,j=1,2, iz izraza (4.21) dati sa

$$\hat{A}_{11}=\begin{bmatrix} H_1 & D_1 \\ E_{11} & \bar{A}_{11} \end{bmatrix} \in R^{r\times r},\quad \hat{A}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{13} & \cdots & E_{1k} & \bar{A}_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E^o_{12} & A^o_{12} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & D_{21} \\ 0 & D_{31} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & D_{k1} \\ E_{21} & \bar{A}_{21} \end{bmatrix},\quad \hat{A}_{22}=\begin{bmatrix} H_o & D_o \\ E_o & A_o \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

pri čemu je

$$H_o=\begin{bmatrix} H_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_k \end{bmatrix},\quad D_o=\begin{bmatrix} D_{22} \\ D_{32} \\ \vdots \\ D_{k2} \end{bmatrix},\quad E_o=\begin{bmatrix} E_{22} & E_{23} & \cdots & E_{2k} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

$$A_o=\bar{A}_{22},\quad A^o_{12}=\bar{A}_{12},\quad E^o_{12}=\begin{bmatrix} E_{12} & E_{13} & \cdots & E_{1k} \end{bmatrix}$$

U skladu sa ovom reprezentacijom izvršimo dekompoziciju

$X^1_p=\begin{bmatrix} X_{p1} \\ \bar{X}^1_p \end{bmatrix}$, $X^1_r=\begin{bmatrix} X_{r1} \\ \bar{X}^1_r \end{bmatrix}$ pri čemu smo sa $\bar{X}^1_p$ i $\bar{X}^1_r$ označili matrice sopstvenih vektora komplementarne X_{pi} i X_{ri} respektivno u X^1, gdje je $F_e X^1 = X^1 \Lambda_r$, i uvedimo transformaciju sličnosti

$$\hat{T}=\begin{bmatrix} \hat{X}_e & \hat{Y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U & 0 \\ Z & I_q \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} W_{p1} & W_{r1} \\ X_{p1} & X_{r1} \end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix} W^i_{p2} & W^i_{r2} \\ \vdots & \vdots \\ W^i_{pk} & W^i_{rk} \\ \bar{X}^1_p & \bar{X}^1_r \end{bmatrix},\quad q=n+\sum_{i=1}^{k} p_i - r \tag{A.9}$$

sa $\hat{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{U}\\ \hat{V}\end{bmatrix}$, koja služi da definiše pogodne $\hat{Y}$ i $\hat{V}$.
Definišimo $\hat{N}=ZU^{-1}$ pa imamo $\hat{V}=\begin{bmatrix}-\hat{N} & I_q\end{bmatrix}$. Izvršimo zatim dekompoziciju matrice $\hat{N}$ na blokove kao

$$\hat{N}=\begin{bmatrix}W_{p2} & W_{r2}\\ \vdots & \vdots\\ W_{pk} & W_{rk}\\ \bar{X}_p^1 & \bar{X}_r^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_{p1} & W_{r1}\\ X_{p1} & X_{r1}\end{bmatrix}^{-1}\equiv\begin{bmatrix}M_{p2} & M_{r2}\\ \vdots & \vdots\\ M_{pk} & M_{rk}\\ N_p & N_r\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}M_p & M_r\\ N_p & N_r\end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Sa uvedenim oznakama imamo

$$A_{re}=\hat{V}A_{ce}\hat{Y}=\hat{A}_{22}-\hat{N}\hat{A}_{12}=\begin{bmatrix}H_o & D_o\\ E_o & A_o\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}M_p & M_r\\ N_p & N_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ E_{12}^o & A_{12}^o\end{bmatrix}, \text{ tj.}$$

$$A_{re}=\begin{bmatrix}H_o-M_rE_{12}^o & D_oM_rA_{12}^o\\ E_o-N_rE_{12}^o & A_o-N_rA_{12}^o\end{bmatrix} \quad (A.11)$$

Vidimo da oblikovanje spektra A_{re}, koje nas ovdje najviše interesuje, podrazumijeva kompleksnu zavisnost od nepoznatih parametara W_{pi}, W_{ri}, H_i, D_i, $i=1,\dots,k$. Ovu zavisnost ćemo sada donekle uprostiti tako da rezultujući rezidualni spektar bude funkcija samo od pomoćnih varijabli L_i, $i=1,\dots,k$, definisanih sa (4.25). U tom smislu, primijetimo da su A^o i A_{12}^o nezavisni od W_{pi}, izuzev preko L_i, i da su

$$K_{12}^i=-L_iK_{22}^i,\ K_{22}^i=(X_{ri}-X_{pi}L_i)^{-1}$$
$$K_{21}^i=-X_{ri}^{-1}X_{pi}K_{11}^i,\ K_{11}^i=(I-L_iX_{ri}^{-1}X_{pi})^{-1}W_{pi}^{-1} \quad (A.12)$$

Uvodeći sada blok- dijagonalnu matricu $W_p=dg\{W_{p2},\dots,W_{pk}\}$, iz (A.4) i (A.12) slijedi

$$E_o=E_{oo}W_p^{-1} \quad (A.13)$$

pri čemu je E_{oo} nezavisno od W_{pi}, izuzev kroz L_i, $i=2,\ldots,k$.

Na sličan način, uzimajući u obzir strukturu pojedinih članova, vidimo da je $E_{12}^{o}=E_{12}^{oo}W_p^{-1}$ sa E_{12}^{oo} nezavisnim od W_{pi}, izuzev preko L_i. Štaviše, iz (A.10) se može lako pokazati da je N_r takodje nezavisno od W_{pi}, izuzev preko L_i, dok je $M_r=W_pM_{ro}$, pri čemu M_{ro} zavisi samo od L_i. Konačno, iz (4.26) se može zaključiti da je $H_o=W_pH_{oo}W_p^{-1}$ i $D_o=W_pD_{oo}$, pri čemu su H_{oo} i D_{oo} samo u funkciji od L_i.

Iz ovog razmatranja slijedi da se A_{re} može izraziti u obliku

$$A_{re}=\begin{bmatrix} W_pH_{oo}W_p^{-1}-W_pM_{ro}E_{12}^{oo}W_p^{-1} & W_pD_{oo}-W_pM_{ro}A_{12}^{o} \\ E_{oo}W_p^{-1}-N_rE_{12}^{oo}W_p^{-1} & A_o-N_rA_{12}^{o} \end{bmatrix}$$

koji se, uvodjenjem $T_1=\begin{bmatrix} W_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, može svesti na

$$A_{re}=\begin{bmatrix} W_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{oo}^{-1}-M_{ro}E_{12}^{oo} & D_{oo}-M_{ro}A_{12}^{o} \\ E_{oo}-N_rE_{12}^{oo} & A_o-N_rA_{12}^{o} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_p^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Znači, spektar matrice A_{re} je identičan spektru matrice

$$A_{re}^{o}=\begin{bmatrix} H_{oo}-M_{ro}E_{12}^{oo} & D_{oo}-M_{ro}A_{12}^{o} \\ E_{oo}-N_rE_{12}^{oo} & A_o-N_rA_{12}^{o} \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

Prema tome, pokazali smo da spektar rezidualne matrice A_{re} zavisi samo od pomoćnih varijabli L_i, $i=1,\ldots,k$. Nažalost ova zavisnost nije linearna a ni analitički jednostavna. Ustvari, iz strukture raznih članova uočavamo da su A^{o} i A_{12}^{o} nelinearne funkcije od $L_1,\ldots,L_k$, zatim da su H_{oo}, D_{oo}, E_{oo} i E_{12}^{oo} nelinearne funkcije od $L_2,\ldots,L_k$, dok je M_{ro} nelinearna funkcija od L_1 i linearna funkcija od $L_2,\ldots,L_k$, a N_r nelinearna funkcija od L_1.

PRILOG B

```
;-------Program--PR  6.USK;1-------------
;-------Program na LAS-u za primjer 6----
(INP)=AT,BT,CT,T
(INP)=Q,R
AT,BT,CT,T(STR)=A,B,C
B(T)=BTR
R(-1)=RI
B,RI,BTR(*)=S
A,Q,S(RIC)=MC
S,MC(*)=SM
A,SN(-)=F
F(JFN,T)=U,J
(INP)=P
U,P(*)=X
2,2(DZM)=Z
B,Z(CTC)=B1,B2
C,Z(CTR)=C1,C2
(INP)=J1,J2,H20,D20,LP,LR
X,Z(CTC)=XP,XR
XP,Z(CTR)=XP1,Y
Y,Z(CTR)=XP2,XP3
XR,Z(CTR)=XR1,Y
Y,Z(CTR)=XR2,XR3
D20,XP2(*)=Y
D20,XR2(*)=Y1
H20,LP,Y(SYL)=WP20
H20,LR,Y1(SYL)=WR20
WP20,WR20,XP2,XR2(IZ K,SUB)=K11D,K21D,K12D,K22D
A,B2,MC,XP,K12D,XR,K22D,C2(IZ AI,SUB)=A1
B2,MC,XP,K11D,XR,K21D,J2(IZ EI,SUB)=E2
A1,Z(CTR)=Y,Y1
Y,Z(CTC)=T,A1J
Y1,Z(CTC)=T,A2J
E2,Z(CTR)=E12,EJ
1,3(DZM)=Z2
H20,D20,Z2(CTI)=Y
EJ,A2J(CTI)=Y1
Y,Y1(RTI)=A22
E12,A1J(CTI)=CJ
1,1(DZM)=Z1
XP,Z1(CTR)=XP1,Y
WP20,Y(RTI)=U10
WR20,Y1(RTI)=Z10
A22,Z10,XR1,CJ(IZ AB,SUB)=AJ
U10,Z10,XR1,XP1(IZ AB,SUB)=BJ
AJ,BJ,CJ(POL,SUB)=AR1,P1*
```

*Subroutine za postavljanje polova posredstvom izlaza uradjena na LAS-u prema proceduri iz /132/.

```
1,1(DIM)=I
I,P1,XP1,XR1(IZ LI,SUB)=L1
LP,L1,LR,XR1,XP1(IZ H,SUB)=H1
L1,LP,LR,XR1,XP1(IZ D,SUB)=D1
I,L1,XP1,XR1(IZ K,SUB)=K11J,K21J,K12J,K22J
A,B1,MC,XP,K12J,XR,K22J,C1(IZ AI,SUB)=A2
B1,MC,XP,K11J,XR,K21J,J1(IZ EI,SUB)=E1
A2,Z(CTR)=Y,Y1
Y1,Z(CTR)=Y2,Y3
Y,Z1(CTC)=A11,Y4
Y4,Z1(CTC)=A12,A13
Y2,Z1(CTC)=A21,Y4
Y4,Z1(CTC)=A22,A23
Y3,Z1(CTC)=A31,Y4
Y4,Z1(CTC)=A32,A33
E1,Z1(CTR)=E11,Y1
Y1,Z1(CTR)=E12,E13
E21,A21,A23(CTI)=CD
1,5(DZM)=Z0
H1,D1,Z0(CTI)=Y
E11,A11,A13(CTI)=Y1
E31,A31,A33(CTI)=Y2
Y,Y1,Y2(RTI)=A2D
I,XP1,XP3(RTI)=U20
L1,XR1,XR3(RTI)=Z20
WP20(-1)=Y
XP2,Y,WR20(*)=Y1
XR2,Y1(-)=Y2
Y2(-1)=Y1
Y,WR20,Y1(*)=P20
A2D,Z20,XR2,C2D(IZ AB,SUB)=AK
U20,Z20,XR2,XP2(IZ AB,SUB)=BD
BD,P20,C2D(*)=G
AK,G(+)=AR20
AR20,BD,CD(POL,SUB)=AR2,DP2
P20,DP2(+)=P2
I,P2,XP2,XR2(IZ LI,SUB)=L2
LP,L2,LR,XR2,XP2(IZ H,SUB)=H2
L2,LR,LP,XR2,XP2(IZ D,SUB)=D2
B1(T)=B1T
B2(T)=B2T
XR,XP,L1,XR1,XP1,B1T,MC(IZ KY,SUB)=KY1
XR,XP,XR1,XP1,L1,B1T,MC,I(IZ KZ,SUB)=KZ1
XR,XP,L2,XR2,XP2,B2T,MC(IZ KY,SUB)=KY2
XR,XP,XR2,XP2,L2,B2T,MC,I(IZ KZ,SUB)=KZ2
MC,F,U,J,AR1,P1,AR20,P2,L1,L2(OUT,T)=
H1,H2,D1,D2,KY1,KY2,KZ1,KZ2(OUT,T)=
AJ,BJ,AD,BD(OUT,T)=
END
```

```
;-------Subroutine--IZ K.USK;1 -----
A,B,C,D(IZ K,SUB)=E,F,G,H
A,B(CTI)=Y
C,D(CTI)=Y1
Y,Y1(RTI)=K1
K1(-1)=KI
1,1(DZM)=Z1
KI,Z1(CTC)=L,M
L,Z1(CTR)=E,F
M,Z1(CTR)=G,H
```

```
;-------Subroutine--IZ AI.USK;1 -----
A,B,C,D,E,F,G,H(IZ AI,SUB)=AI
B(T)=BT
B,BT,C(*)=Y
D,E(*)=Y1
F,G(*)=Y2
Y1,Y2(+)=Y3
Y,Y3,H(*)=X
A,X(-)=AI
```

```
;-------Subroutine--IZ EI.USK;1 -----
A,B,C,D,E,F,G(IZ EI,SUB)=EI
A(T)=AT
A,AT,B(*)=X
C,D(*)=X1
E,F(*)=X2
X1,X2(+)=X3
X,X3,G(*)=GI
(DSC)=S
GI,S(S*)=EI
```

```
;-------Subroutine--IZ H.USK;1 -----
A,B,C,D,E(IZ H,SUB)=H
B,D,E(*)=Y
1,1(DIM)=I
I,Y(-)=Y1
Y1(-1)=Y
D(-1)=DI
B,C,DI,E(*)=Y1
A,Y1(-)=Y2
Y2,Y(*)=H
```

```
;-------Subroutine--IZ D.USK;1-----
A,B,C,N,E(IZ D,SUB)=D
A,C(*)=Y
B,A(*)=Y1
Y,Y1(-)=Y2
E,A(*)=Y
N,Y(-)=Y1
Y1(-1)=Y
Y2,Y(*)=D

;-------Subroutine--IZ AB.USK;1-----
A,B,C,D(IZ AB,SUB)=AB
C(-1)=C1
B,C1,D(*)=G
A,G(-)=AB

;-------Subroutine--IZ LI.USK;1-----
A,B,C,D(IZ LI,SUB)=LI
B,C(*)=Y
A,Y(+)=Y1
Y1(-1)=YI
YI,B,D(*)=LI

;-------Subroutine--IZ KY.USK;1-----
A,B,C,D,E,F,G(IZ KY,SUB)=KY
B,C(*)=G1
A,G1(-)=G2
E,C(*)=G1
D,G1(-)=X
X(-1)=Y
F,G,G1,Y(*)=KY

;-------Subroutine--IZ KZ.USK;1-----
A,B,C,D,E,F,G,H(IZ KZ,SUB)=KZ
C(-1)=C1
B,C1,D(*)=Y
A,Y(-)=X
E,C1,D(*)=Y1
H.Y1(-)=Y2
Y2(-1)=YI
F,G,Y,YI(*)=KZ
```

PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Zdravko Usković

Godina rođenja 1950.

E-mail zdravko@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

Naslov doktorske disertacije

Sinteza dinamickih regulatora za upravljanje slozenim sistemima sa decentralizovanom upravljackom i informacionom strukturom

Prevod naslova na engleski jezik

Design of dynamic regulators for large-scale systems with decentralized information and control structure

Datum odbrane Decembar 1983. godine

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci[1]

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

[1] Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Design of dynamic regulators for large-scale systems with decentralized information and control structure

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Prof. dr Juraj Medanić, mentor
Prof. dr Miodrag Rakić,
Prof. dr Božo Matić,
Prof. dr Stanoje Bingulac,
Prof. dr Janko Janković

Sažetak

U tezi je predložen metod sinteze regulatora u vremenskom domenu za slozene dinamicke sisteme, zasnovan na koncepciji projekcionog upravljanja. Sustina metode sastoji se u tome da se optimalno rjrsenje zasnovano na linearnom kvadratnom regulatoru stanja uzima kao eksplicitan opis referentne dinamicke performanse sistema a odabrano uptavljanje, koje se relizuje uzimajuci u obzir ogranicenja nametnuta informacionom strukturom, ima za cilj da u rezultujucem upravljanom sistemu zadrzi dominantne dinamicke karakteristike referentnog rjesenja.

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

The thesis presents a unified design methodology for computer-aided design of large-scale linear control systems, based on the concept of projective controls. The main feture of the proposed procedure is that it uses the linear state regulator solution as an explicit description of desired system performance while the selected controls, implemented according to the particular information structure, retain the dominant dynamic characteristics of the reference solution in the resulting closed loop system.

Ključne riječi Sistemi upravljanja, Optimalno upravljanje, Decetralizovana stuktura, Projekciono upravljanje

Ključne riječi na engleskom jeziku Control systems, Optimal control, Decentralized structure, Projective control

Naučna oblast/uža naučna oblast

Automatika / Optimalno upravljanje

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

Control systems / Optimal control

Ostali podaci

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Sinteza dinamickih regulatora za upravljanje slozenim sistemima sa decentralizovanom upravljackom i informacionom strukturom

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commmons), za koju sam se odlučio/la[1].

- [x] Autorstvo
- [ ] Autorstvo – bez prerada
- [ ] Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
- [ ] Autorstvo – nekomercijalno
- [ ] Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
- [ ] Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

U Podgorici 29.11.2016.

[1] Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)

Autorstvo
Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno
Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.