UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA MATEMATIKU I RAČUNARSKE NAUKE

mr Romeo Meštrović

DOKTORSKA DISERTACIJA

TOPOLOŠKE I F-ALGEBRE HOLOMORFNIH FUNKCIJA

mentor: prof.dr
Žarko Pavićević

Podgorica 1998.

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA MATEMATIKU I RAČUNARSKE NAUKE

mr Romeo Meštrović

DOKTORSKA DISERTACIJA

TOPOLOŠKE I F-ALGEBRE HOLOMORFNIH FUNKCIJA

mentor: prof.dr
Žarko Pavićević

Podgorica 1998.

Posebnu zahvalnost izražavam prof. dr V. I. Gavrilovu sa Moskovskog državnog Univerziteta "M. V. Lomonosov", koji je svojim korisnim sugestijama, mnogobrojnim idejama i primjedbama u znatnoj mjeri doprinio realizaciji ovog rada.

Veliku zahvalnost želim da izrazim prof. dr Stevanu Pilipoviću na korisnim komentarima, uputstvima i interesovanju za moj rad.

Neizmjernu zahvalnost izražavam prof. dr Žarku Pavićeviću koji mi je kao mentor ove disertacije pružao dragocjenu pomoć i podršku i čitavim nizom ideja i zapažanja doprinio njenom konačnom oblikovanju.

SADRŽAJ

4. Struktura ideala u algebrama N^p i F^p

5. Aproksimativne teoreme za klase N^p

6. F-algebre M^p

Pregled oznaka korišćenih u ovom radu

$\mathbf{N}$: skup prirodnih brojeva.
$\mathbf{R}$: polje realnih brojeva.
$\mathbf{C}$: polje kompleksnih brojeva.
D: otvoren jedinični krug $|z| < 1$.
T: jedinična kružnica $|z| = 1$.
$\overline{D}$: zatvoren jedinični krug $|z| \leq 1$.
$\Re$: realni dio kompleksnog broja.
$d\theta/2\pi = dm$: normalizovana Lebesgueova mjera na T.
μ: Borelova mjera na T.
$|E| = m(E)$: Lebesgueova mjera mjerljivog skupa $E \subset T$.
$\omega(t, \mu) = \omega_\mu(t)$: modul neprekidnosti mjere μ.
$\int_0^{2\pi} = \int_T$: Lebesgueov integral na T ($[0, 2\pi]$).
$\int_E$: Lebesgueov integral po mjerljivom skupu $E \subset T$.
$\int_D$: površinski Lebesgueov integral po krugu D.
$\log^+$, $\log^-$: pozitivni logaritam, negativni logaritam.
sup, inf: supremum, infimum.
lim sup, lim inf: limes superior, limes inferior.
$\{f_n\}$: niz funkcija.
f^*: granična (radijalna) funkcija funkcije $f \in N$.
$\hat{f}(k)$: k-ti Taylorov koeficijent funkcije f holomorfne na D.
$L^p(T)$ $(0 < p \leq \infty)$: uobičajeni Lebesgueov prostor na kružnici T.
N: Nevanlinnina klasa.
N^+: klasa Smirnova.
N^p $(1 < p < \infty)$: klase proučavane u ovom radu.
M^p $(1 < p < \infty)$: klase proučavane u ovom radu.
H^q $(0 < q \leq \infty)$: Hardyjeve klase.
M: klasa proučavana od strane Hong Oh Kima.
$Hol(D)$: klasa svih funkcija holomorfnih na D.
F^p $(1 < p < \infty)$: Fréchetov omotač prostora N^p.
F^+: Fréchetov omotač prostora N^+.
$(N^p)^{-1}$: skup svih invertibilnih elemenata prostora N^p.
$(N^+)^{-1}$: skup svih invertibilnih elemenata prostora N^+.
$\mathcal{P}$: skup svih polinoma nad poljem $\mathbf{C}$.
$\mathcal{P}_0$: skup svih polinoma $P \in \mathcal{P}$ za koje je $P(0) = 1$.
$L \log L$: Zygmondova klasa.
$L^2(w\, d\theta)$: težinski Lebesgueov prostor.
$H^2(w)$: težinski Hardyjev prostor.
$A_p^\infty(D)$: klasa holomorfnih funkcija na D čiji Taylorovi koef. imaju oblik $O\left(e^{-cn^{1/(p+1)}}\right)$.
S_p: klasa svih nizova $\{\gamma_n\}$ kompleksnih brojeva za koje je $\gamma_n = O\left(e^{-cn^{1/(p+1)}}\right)$.
$M(N^p, S)$: skup svih množitelja iz prostora N^p u prostor S.
$B(z)$: Blaschkeov proizvod.
$S_\mu(z)$: singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom mjerom μ.

$F(z)$: vanjska funkcija.
$I_f = BS_\mu$: unutrašnji faktor funkcije $f \in N$.
$H(t,z)$: Herglotzovo jezgro.
$P(r, \theta - t) = P_r(\theta, t)$: Poissonovo jezgro.
d_p: metrika prostora N^p.
ρ_p: metrika prostora M^p (F^p).
$d = d_1$: metrika prostora N^+.
ϕ_ω : "težinska" N^p F-norma.
d_ω: "težinska" metrika na prostoru N^p.
N^p_ω: težinski metrički prostor (N^p, d_ω).
$\|\cdot\|_{p,c}$, $|||\cdot|||_{p,c}$, $\|\cdot\|^{\sim}_{c}$: norme na prostoru F^p.
$\|\cdot\|$: kvazinorma u prostoru N^p.
$\|\cdot\|_{L^p}$: norma u prostoru $L^p(T)$ $(0 < p \leq \infty)$.
$\|\cdot\|_{L^2(w)}$: norma u prostoru $L^2(w\,d\theta)$.
$\|\cdot\|_{H^2(w)}$: norma u prostoru $H^2(w)$.
$\mathcal{I}^p$: induktivna limes topologija prostora N^p.
$\mathcal{H}^p$: Helsonova topologija prostora N^p.
$\mathrm{cl}(L)$: zatvorenje skupa $L \subset N^p$ u prostoru N^p.
$\mathcal{P}[f]$: zatvoren potprostor od N^p generisan funkcijama $z^n f(z)$, $n = 0, 1, \ldots$.
X: topološki vektorski prostor.
X^*: topološki dual prostora X.
X^{**}: drugi dual prostora X.
$\tau^c = \tau^c(X)$: Mackeyeva topologija para (X, X^*).
$\hat{X}$: Fréchetov omotač prostora X.
ker: jezgra funkcionala iz X^*.
η^*: adjungovano preslikavanje sa X^* u X^*.
η^{**}: drugo adjungovano preslikavanje.
$[E]$: zatvorenje skupa $E \subset N^p$ u prostoru N^p.
$[E]_\omega$: zatvorenje skupa $E \subset N^p$ u odnosu na slabu topologiju od N^p.
$[E]_{F^p}$: zatvorenje skupa $E \subset F^p$ u prostoru F^p.
I_ω: unutrašnja funkcija za koju važi $[IN^p]_\omega = I_\omega N^p$.
$\mathcal{W}^p$ $(1 \leq p < \infty)$: klasa svih težinskih funkcija w za koje je $\log w \in L^p(T)$.
C_φ: kompozicioni operator generisan holomorfnim preslikavanjem $\varphi : D \to D$.
l^p $(0 < p \leq \infty)$: uobičajeni Lebesgueovi prostori nizova.
l^p_z $(1 < p < \infty)$, l^+_z, $\tilde{l}^q_z$ $(0 < q < \infty)$: prostori nizova koji se odnose na interpolacije u prostorima N^p, N^+ i H^q.
$(f_1, \ldots, f_n)$: ideal od N^p generisan funkcijama $f_1, \ldots, f_n \in N^p$.

Uvod

U ovom radu se proučava linearno-topološka, funkcionalna i algebarska struktura podklasa N^p $(1 < p < \infty)$ Nevanlinnine klase N. Klasa N^p $(1 < p < \infty)$ se sastoji od svih funkcija f holomorfnih u jediničnom krugu $D : |z| < 1$ kompleksne ravni $\mathbf{C}$ za koje važi

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})| \right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty. \tag{0.1}$$

Te klase su uvedene u prvom izdanju monografije I. I. Privalova [P1], u kojoj je dokazana pripadna kanonska faktorizaciona teorema (vidj. [P1], str. 98).

Funkcija f holomorfna u jediničnom krugu D, pripada *Nevanlinninoj klasi* N ako važi

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Za funkciju $f \in N$ kažemo da je funkcija *ograničene karakteristike.*

Klasu Smirnova N^+ čine sve funkcije $f \in N$ za koje je familija $\{\log^+ |f(re^{i\theta})| : 0 \le r < 1\}$ ravnomjerno integrabilna na jediničnoj kružnici T, tj. za koju važi: za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da je ispunjeno

$$\int_E \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon, \quad 0 \le r < 1,$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ sa osobinom čija je *Lebesgueova mjera* $m(E) < \delta$.

Napomenimo da se *Hardyjev prostor* H^p $(0 < p \le \infty)$ definiše kao skup svih funkcija f holomorfnih u D, koji zadovoljavaju uslov

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$

za $0 < p < \infty$, odnosno koje su ograničene za $p = \infty$:

$$\sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Slijedeći [K2], označimo sa M klasu svih funkcija f holomorfnih u D, za koje važi

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

gdje je

$$Mf(\theta) = \sup_{0 \le r < 1} |f(re^{i\theta})|.$$

Klase N, N^+ i H^p $(0 < p \leq \infty)$ su istraživane od strane mnogih autora. Najveći dio referenci korišćen u ovom radu upravo se odnosi na rezultate o linearno-topološkoj, funkcionalnoj i algebarskoj strukturi tih klasa. Ti su rezultati zapravo i bili polazište za formulaciju analognih rezultata dobijenim u ovom radu, a koji se odnose na klase N^p $(1 < p < \infty)$. Klasa M, istraživana od strane korejanskog matematičara Hong Oh Kima u [K1] i [K2] bila je motiv za njenu generalizaciju datu u gl. 6 ovog rada. U prvoj glavi dajemo najprije neke bazične činjenice koje se odnose na naprijed navedene klase. To su teorema Fatoua, Rieszova teorema jedinstvenosti i kanonska faktorizaciona teorema za naprijed navedena klase. Dalje dokazujemo slijedeće stroge inkluzije medju različitim klasama funkcija: (i) $\cup_{q>1} N^q \subset M \subset N^+ \subset N$, (ii) $\cup_{s>0} H^s \subset \cap_{q>1} N^q$, (iii) $\cup_{q>p} N^q \subset N^p \subset \cap_{1<q<p} N^q$, za svako $p > 1$.

Takodje, dajemo neophodne i dovoljne uslove pripadnosti klasama N^p u smislu graničnih relacija koji se odnose na funkcije pripadnih klasa. Još dajemo kratak dokaz kanonske faktorizacione teoreme za klase N^p $(1 < p < \infty)$. Kao neposrednu posljedicu toga dokaza dobijamo kriterijum pripadnosti klasi N^p. Dokaz se zasniva na dobro poznatoj kanonskoj faktorizaciji za klasu Smirnova N^+.

Svi naprijed navedeni rezultati, počevši od gornjih inkluzija, dobijeni su u radu [2]. Poznato je (vidj. [D2]) da je svaki Hardyjev prostor H^q $(q \geq 1)$ *Banachov prostor* sa pripadnom normom $\|\cdot\|_q$ definisanom kao

$$(\|f\|_q)^q = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^q.$$

Nadalje, dobro je poznato (vidj. [D2]) da je svaki Hardyjev prostor H^q $(0 < q < 1)$ q-Banachov prostor sa pripadnom q-normom. Štaviše, dokazano je (vidj. [DRS]) da ti prostori nisu *lokalno konveksni*. Još napomenimo da prostor H^∞ holomorfnih i ograničenih na D funkcija čini Banachovu algebru. N. Yanagihara u svom radu [Y3] uvodi linearno-topološku strukturu na klasi Smirnova N^+ preko invarijantne metrike d koja je data preko (0.2) za $p = 1$.

Napomenimo da je *vektorski topološki prostor* L nad poljem $\mathbf{C}$ zapravo vektorski prostor nad $\mathbf{C}$ u kome su operacije $(f, g) \mapsto f + g$ i $(c, f) \mapsto cf$ neprekidna preslikavanja sa $L \times L \to L$, odnosno sa $\mathbf{C} \times L \to L$ u pripadnim *proizvod-topologijama*. Ukoliko je topologija na takvom prostoru L indukovana aditivno-invarijantnom metrikom u odnosu na koju je L kompletan metrički prostor, kažemo da L obrazuje F-prostor. F-prostor koji je *lokalno konveksan* naziva se *Fréchetovim*. *F-algebra* je algebra koja je F-prostor i u kojoj je množenje neprekidna operacija u pripadnoj proizvod-topologiji. Lokalno konveksna F-algebra se naziva *Fréchetovom*. Yanagihara je u ([Y3], teorema 1) dokazao da N^+ obrazuje *F-prostor* u odnosu na topologiju odredjenu metrikom d datom pomoću (0.2) za $p = 1$. C. S. Davis je u svojoj disertaciji [Da] dokazao da je množenje u algebri N^+ neprekidno, što zajedno sa prethodno pomenutim rezultatom Yanagihare daje slijedeći rezultat. Prostor N^+ sa topologijom odredjenom pomoću metrike d obrazuje F-algebru. Yanagihara pokazuje u ([Y3], komentar 1) da Nevanlinnina klasa N u odnosu na metriku d nije kompletan metrički prostor, a samim tim ni F-prostor.

Po analogiji sa metrikom d Stoll u ([St2], teorema 4.2) uvodi metriku d_p na prostoru N^p i dokazuje da prostor N^p, $p > 1$, sa topologijom odredjenom pomoću te metrike čini jednu F-algebru. Za funkcije $f, g \in N^p$ važi

$$(0.2) \qquad d_p(f,g) = \left(\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \log^p(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|) \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}.$$

Istaknimo da je svojstvo biti F-prostor i te kako značajno za istraživanje linearno-topološke strukture takvih prostora, najviše iz razloga što su za F−prostore važeće neke osnovne teoreme iz funkcionalne analize. To su posebno *teorema o zatvorenom grafiku, princip ravnomjerne ograničenosti i teorema o otvorenom preslikavanju* (vidj. [R1]), dok *Hahn-Banachova teorema* uopšte ne mora da vrijedi za F-prostore. Istaknimo da prve tri teoreme bitno koristimo u ovom radu pri istraživanju linearno-topološke, funkcionalne i algebarske strukture prostora N^p $(1 < p < \infty)$.

Kanonske faktorizacione teoreme za klase N^+ i N^p pokazuje da se klasa N^+ može razmatrati kao "prirodan limes" prostora N^p kada $p \to 1$. Isto tvrdjenje u metričkom (topološkom) smislu dobijamo poredeći pripadne metrike d i d_p prostora N^+ i N^p definisane pomoću (0.2).

U drugoj glavi istražujemo linearno-topološku strukturu prostora N^p $(1 < p < \infty)$. Glavni rezultat daje potpunu karakterizaciju neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p u odnosu na topologiju uvedenu na N^p pomoću metrike d_p definisane sa (0.2). U prvom poglavlju dajemo ocjenu Taylorovih koeficijenata funkcija iz prostora N^p, za koju kasnije (u četvrtom poglavlju) pokazujemo da je najstroža u asimptotskom smislu. U slijedećem poglavlju dokazujemo više lema koje su nam neophodne za ocjenu množitelja iz prostora N^p u Hardyjeve prostore H^q $(0 < q \le \infty)$ koju dobijamo u trećem poglavlju. Pokazuje se da taj skup množitelja ne zavisi o q. Iz tog rezultata dobijamo činjenicu da nijedan prostor N^p nije lokalno ograničen.

Koristeći navedene rezultate, u narednom poglavlju dajemo reprezentaciju neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p. Pokazuje se da se topološki dual od N^p može identifikovati sa cijelom klasom holomorfnih na D funkcija koje su klase C^∞ na T. Iz dobijenog rezultata lako se izvodi da topološki dual od N^p razdvaja tačke. S druge strane, iako je topološki dual od N^p "bogat" funkcionalima, u slijedećem poglavlju dokazujemo činjenicu da nijedan prostor N^p nije lokalno konveksan. Iz dokaza tog rezultata dobijamo klasu količničkih F-prostora od N^p koji imaju trivijalan dual. Otuda neposredno slijedi da Hahn-Banachova teorema o proširenju linearnih funkcionala nije primjenljiva na prostore N^p. Štaviše, u posljednjem poglavlju pokazujemo da prostori N^p ne posjeduju Banachovo separativno, a samim tim ni aproksimativno svojstvo. Medjutim, dokazujemo da svaki prostor N^p ima tačkovno separativno svojstvo. Napomenimo da je većina glavnih rezultata ove glave dobijena u radu [5], dok ih je prvi autor saopštio na Medjunarodnom Kurepinom simpozijumu, Beograd, 1996.

U trećoj glavi definišemo i poredimo razne topološke strukture na prostorima N^p $(1 < p < \infty)$ kao i na njihovim Fréchetovim omotačima F^p. U prvom poglavlju dajemo pregled poznatih i nama neophodnih rezultata koji se odnose na prostore F^p $(0 < p < \infty)$ uvedene u [St.2]. Topologija na prostoru F^p definisana je pomoću dvije ekvivalentne familije (polu)normi u odnosu na koje je F^p prebrojivo normirana

Fréchetova algebra. Zato je ta topologija metrizabilna pomoću metrike ρ_p koja se na uobičajen način uvodi kao na svakom prebrojivo-normiranom prostoru. Osim toga, N^p je gust potprostor od F^p, a indukovana topologija na N^p je slabija od inicijalne metričke d_p-topologije. Koristeći rezultat Eoffa da se svaki prostor N^p može prikazati kao unija izvjesnih *težinskih Hardyjevih prostora* $H^2(w)$, u drugom poglavlju definišemo dvije topologije na N^p kao induktivne limese pripadnih prostora $H^2(\omega)$. Za prvu topologiju, koja nije lokalno konveksna, izvjesno je da se podudara sa metričkom topologijom d_p na N^p. Druga topologija na N^p je uobičajena lokalno konveksna induktivna-limes topologija $\mathcal{H}^p$ koju ćemo nazivati *Helsonovom*. Koristeći činjenicu da je po definiciji $\mathcal{H}^p$ najjača lokalno konveksna topologija na N^p, kao i da metričke topologije d_p i ρ_p odredjuju isti topološki dual na N^p, u narednom poglavlju dokazujemo da se topologija $\mathcal{H}^p$ podudara sa metričkom topologijom ρ_p.

U četvrtom poglavlju dokazujemo da je svaki prostor F^p *Montelov*, kao i da se duali prostora N^p i F^p podudaraju u skupovnom i topološkom smislu. Pri tome se duali od N^p (odnosno F^p) identifikuju sa prostorom S_p svih nizova kompleksnih brojeva $\{\gamma_n\}$ za koji je $\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$, sa *topologijom ravnomjerne konvergencije na slabo ograničenim podskupovima* od N^p (odnosno sa *topologijom ravnomjerne konvergencije na ograničenim podskupovima* od F^p). Kao posljedicu dobijamo činjenicu da su prostori F^p i njegov dual refleksivni. U slijedećem poglavlju dokazujemo da Taylorov red svake funkcije iz prostora F^p konvergira ka toj funkciji u odnosu na metričku topologiju ρ_p, a samim tim i u odnosu na topologiju $\mathcal{H}^p$. Osim toga, lako se dokazuje da su metričke topologije d_p i ρ_p Szegöove. Obratno, dokazujemo da ako je τ *barelisana* Szegöova topologija na prostoru N^p u odnosu na koju Taylorov red svake funkcije iz N^p konvergira, tada se τ podudara sa ρ_p (odnosno sa $\mathcal{H}^p$). U šestom poglavlju dajemo asimptotsku verziju Szegöove teoreme koja se odnosi na prostore $H^2(w)$ sa *težinskim funkcijama* w na T za koje je $\log w \in L^p(T)$. Ta teorema daje najbolju gornju granicu za norme funkcionala na tim prostorima koji predstavljaju n-ti Taylorov koeficijent u nuli. Dokazujemo da je ta granica za proizvoljno $c > 0$ data sa $e^{cn^{1/(p+1)}}$, kao i da ona ne može biti poboljšana u opštem slučaju. Dokaz tog rezultata se zasniva na asimptotskoj verziji Helson-Szegöove teoreme koju dajemo na kraju šestog poglavlja. Većinu rezultata iz treće glave autor je izložio na Medjunarodnoj matematičkoj konferenciji, Berlin, 1998.

Kako prostori N^p $(1 < p < \infty)$ obrazuju F-algebre, a samim tim i topološke algebre, interesantno je isražiti strukturu ideala u tim prostorima. To činimo u četvrtoj glavi ovog rada. Problemi vezani sa tom tematikom motivisani su poznatim odgovarajućim rezultatima koji se odnose na *Banachove algebre*. Medjutim, standardna tehnika korišćena u istraživanjima Banachovih algebri nije primjenljiva generalno za topološke algebre. Stoga će dokazi rezultata dobijenih u ovoj glavi zavisiti isključivo o funkcionalnoj linearno-topološkoj strukturi prostora N^p i pripadnih Fréchetovih omotača F^p, kao i kanonske faktorizacione teoreme za klase N^p.

Poznato je (vidj. [Gam]) da je u Banachovoj algebri svaki multiplikativan linearan funkcional neprekidan i da je svaki maksimalan ideal jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala. U prvom poglavlju pokazujemo da je u prostorima N^p svaki netrivijalan multiplikativan linearan funkcional ujedno i neprekidan, ali da maksimalni ideali u

N^p ne moraju biti jezgre multiplikativnih linearnih funkcionala. Nadalje, u drugom poglavlju pokazujemo da ako je $\mathcal{M}$ netrivijalan prost ideal od N^p koji nije gust podskup od N^p, tada je $\mathcal{M}$ jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala na N^p. Kao posljedicu dobijamo činjenicu da je svaki zatvoren maksimalan ideal jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala. Ti rezultati su motivisani odgovarajućim rezultatima dobijenim za klasu Smirnova N^+ u [RS1], odnosno za klasu M u [K1]. Istaknimo da u njihovim dokazima koristimo tzv. *radijalno-maksimalnu metriku* ρ_p uvedenu u šestoj glavi ovog rada, za koju je dokazano da je ekvivalentna sa inicijalnom metrikom d_p.

U narednom poglavlju pokazujemo da su prsteni N^p zapravo *prsteni tipa Nevanlinna-Smirnova* u smislu definicije R. Mortinija uvedene u [Mor]. Kao posljedice te činjenice i rezultata iz [Mor] dobijenih za proizvoljne prstene tipa Nevanlinna-Smirnova, dobijamo tri rezultata koji daju neophodne i dovoljne uslove da bi dati ideal algebre H^∞ bio trag nekog ideala u algebri N^p. Osim toga uočavamo da je svaki prsten N^p $(1 < p < \infty)$ *koherentan* u smislu da je presjek bilo koja dva konačno generisana ideala prstena N^p takodje konačno generisan ideal od N^p. Nadalje, u četvrtom poglavlju dokazujemo da svaka algebra N^p ima *svojstvo korone*, koje je inače za algebre H^∞ dokazao Carleson (vidj. [D2] ili [Ko]). U istom poglavlju još dokazujemo dvije teoreme koje se odnose redom na konačno generisane ideale od H^∞, odnosno od N^p.

U petom poglavlju dajemo karakterizaciju maksimalnih ideala i multiplikativnih linearnih funkcionala algebri F^p $(1 < p < \infty)$. Ti su rezultati, kao i njihovi dokazi analogni istima dobijenim u prvom poglavlju za algebre N^p. Konačno, u šestom poglavlju dajemo karakterizaciju homomorfizama algebri F^p, koja je sasvim analogna odgovarajućoj dobijenom u [Moc] za algebre N^p. Napomenimo da su svi rezultati iz trećeg i četvrtog poglavlja ove glave dobijeni u radu [4].

U petoj glavi dajemo N^p-verzije poznatih aproksimativnih teorema koje se odnose na Hardyjeve prostore. Ti rezultati su motivisani činjenicama da prostori N^p imaju dosta sličnih svojstava sa prostorima H^q $(0 < q < \infty)$ koje se inače koriste u dokazima odgovarajućih teorema. To su posebno, unutrašnjo-vanjska faktorizacija za funkcije pripadnih klasa, gustoća polinoma i kompletnost prostora H^q i N^p. Činjenica da prostori N^p nisu Banachovi, niti p-Banachovi, onemogućava primjenu istih H^q-tehnika u dokazima odgovarajućih teorema za te prostore. Zapravo, odsustva svojstava homogenosti i p-homogenosti pripadnih (kvazi)normi prostora N^p komplikuju te dokaze. S druge strane, činjenica da su klase N^p algebre u kojima je množenje neprekidna operacija je u biti dovoljna zamjena za odsustvo navedenih svojstava pri dokazu glavnih rezultata. To se posebno odnosi na N^p-varijantu *Beurlingove teoreme* koju dajemo u prvom poglavlju, kao i logaritamski analogon *Szegöove teoreme* koji dajemo u petom poglavlju. Istaknimo da dokaz prve teoreme bitno koristi rezultat N. Mochizukija iz [Moc] koji karakteriše vanjske funkcije iz N^p pomoću pojma aproksimativnog inverza. Posljedica 1.8 N^p-varijante *Beurlingove teoreme* tvrdi da se skup slabo invertibilnih elemenata od N^p sastoji upravo od svih vanjskih funkcija pripadnih prostora. U slijedećem poglavlju dajemo opis *invarijantnih potprostora* od N^p. Preciznije, dokazujemo da je svaki invarijantan potprostor od N^p zapravo njegov glavni ideal generisan nekom unutrašnjom funkcijom. U slijedećem poglavlju dajemo za takve ideale dva kriterijuma da oni budu *slabo gusti* u pripadnom prostoru N^p. U vezi s tim, u četvrtom poglavlju dajemo karakterizaciju zatvorenih ideala koji su slabo gusti u N^p. Pokazujemo da su to glavni ideali generisani singularnim unutrašnjim funkcijama čije pridružene mjere imaju modul neprekidnosti jednak $o\left(h^{(p-1)/p}\right)$. Ta karakterizacija za neposrednu posljedicu daje široku klasu F-prostora sa trivijalnim dualom.

Na aproksimativnoj verziji N^p-varijante *Beurlingove teoreme* bazira se dokaz teoreme 5.2 iz petog poglavlja koja predstavlja logaritamski analogon *Szegöove teoreme*. Ta dva rezultata su dobijena u radu [6], a takodje ih je prvi autor toga rada izlagao i na Medjunarodnoj konferenciji "GF-96", Novi Sad. Navedena teorema (respektivno Szegöova teorema) zapravo daje eksplicitni izraz za infimum "težinskih" N^p-normi (respektivno H^p-normi) uzetog nad prostorom svih (analitičkih) polinoma P sa konstantnim članom jednakim 1. Kao posljedicu te teoreme, u posljednjem poglavlju dajemo neophodne i dovoljne uslove da *težinske* metrike d_ω budu ekvivalentne sa polaznom metrikom d_p na prostoru N^p.

U šestoj glavi istražujemo linearno-topološku strukturu prostora M^p $(1 < p < \infty)$ koji predstavljaju generalizaciju prostora M proučavanog u [K1] i [K2]. Po analogiji sa metrikom na M, na svakom prostoru M^p definiše se metrika ρ_p. U prvom poglavlju dajemo integralni kriterijum pripadnosti klasama M^p. Osim toga, pokazuje se da je M^p zatvoren u odnosu na integraciju. Koristeći teoremu o maksimalnosti Hardy-Littlewooda, u drugom poglavlju dokazujemo da se za svako $p > 1$ prostori M^p i N^p podudaraju u skupovnom smislu. Osim toga, dokazujemo neke tvrdnje koje se odnose na konvergenciju u prostoru M^p. U narednom poglavlju dokazujemo da polinomi čine gust skup u M^p, pa je stoga prostor M^p separabilan. U trećem poglavlju dokazujemo da prostor M^p obrazuje F-prostor u odnosu na metriku ρ_p. Koristeći tu činjenicu, kao i uzimajući u obzir da je $M^p = N^p$, na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju lako slijedi da se prostori M^p i N^p podudaraju i u topološkom smislu. Dakle, sva linearno-topološka svojstva dobijena za prostore N^p odnose se i na prostore M^p. Još je dokazano da je metrička d_p $(= \rho_p)$ topologija jedina od svih "težinskih" d_ω topologija $(\log^+ \omega \in L^p(T))$ u odnosu na koju je N^p $(= M^p)$ F-prostor. U četvrtom poglavlju dajemo karakterizaciju ograničenih skupova u prostorima M^p. Prvi rezultat daje u terminima ravnomjerne integrabilnosti neophodne i dovoljne uslove da bi podskup od M^p bio ograničen. Drugi dobijeni rezultat daje samo neophodan uslov za isto tvrdjenje. Osim toga, u smislu aproksimacije polinomima, dajemo kriterijum da bi se mjerljiva na skupu $E \subset T$ funkcija podudarala skoro svuda na E sa graničnom (radijalnom) funkcijom neke funkcije iz klase M^p.

U petom poglavlju definišemo prostore l_z^p $(1 < p < \infty)$ kompleksnih nizova koji predstavljaju diskretne verzije prostora N^p. Po analogiji sa metrikom d_p na prostoru l_z^p uvodi se metrika σ_p u odnosu na koju se dokazuje da je l_z^p F-prostor. Nadalje dajemo kriterijum ograničenosti u prostoru l_z^p koji je zapravo l_z^p-analogon istog dobijenog u prethodnom poglavlju za prostor N^p. Prostori l_z^p su tijesno povezani sa problemima interpolacije u N^p. U vezi s tim, u zadnjem poglavlju pokazujemo da ako je niz $\{z_n\} \subset D$ ravnomjerno razdvojen, tada je $\{z_n\}$ ujedno univerzalni interpolacioni niz za uredjen par (N^p, l_z^p). Isti rezultat kao i njegova obratna tvrdnja dokazuje se za pridruženi uredjeni par prostora $(\tilde{N}^p, \tilde{l}_z^p)$. Te interpolacione teoreme autor ovog rada saopštio je na 4. Simpozijumu iz matematičke analize i njenih primjena, Arandjelovac, 1997.

1. RAZNE KLASE HOLOMORFNIH FUNKCIJA

1. Razne klase holomorfnih funkcija

1.1. Nevanlinnina klasa i njene podklase

Kao što je u uvodu istaknuto, u ovom radu se proučavaju podklase N^p $(1 < p < \infty)$ Nevanlinnine klase N. Klasa N^p $(1 < p < \infty)$ se sastoji od svih funkcija f holomorfnih u jediničnom krugu $D : |z| < 1$ kompleksne ravni $\mathbf{C}$ za koje važi

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty. \tag{1.1}$$

Te klase su uvedene u prvom izdanju monografije I. I. Privalova [P1], u kojoj je dokazana pripadna kanonska faktorizaciona teorema (vidj. [P1], str. 98). Osim toga, dokazuje se kriterijum pripadnosti klasama N^p. Mi u ovoj glavi dokazujemo isti rezultat na kraći način. Pri tome se bitno koriste analogni rezultati za klasu Smirnova N^+. Nadalje, dajemo inkluzije medju različitim klasama funkcija, holomorfnih u jediničnom krugu D. Takodje, dajemo neophodne i dovoljne uslove pripadnosti klasama N^p u smislu graničnih relacija koji se odnose na funkcije pripadnih klasa.

Neka D označava jedinični krug kompleksne ravni $|z| < 1$ $\mathbf{C}$ i neka T označava granicu od D (jediničnu kružnicu). Radi jednostavnosti, stavimo $dm = d\theta/2\pi$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Neka je $L^p = L^p(T)$ $(0 < p \le \infty)$ uobičajeni *Lebesgueov prostor* na jediničnoj kružnici T.

Neka je $p > 1$ proizvoljan realan broj. Slijedeći I. I. Privalova (vidj. [P1], str. 93, gdje je N^p označeno sa A^q), funkcija f holomorfna u D pripada klasi N^p, ako važi

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

gdje je $\log^+ a = \max(\log a, 0)$, za $a \ge 0$.

Funkcija f holomorfna u jediničnom krugu D, pripada *Nevanlinninoj klasi* N ako važi

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Za funkciju $f \in N$ kažemo da je funkcija *ograničene karakteristike.*

Klasu Smirnova N^+ čine sve funkcije $f \in N$ za koje je familija $\{\log^+ |f(re^{i\theta})| : 0 \le r < 1\}$, ravnomjerno integrabilna na jediničnoj kružnici T, tj. za koju važi: za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da je ispunjeno

$$\int_E \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon, \quad 0 \le r < 1,$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ sa osobinom $m(E) < \delta$.

Napomenimo da se *Hardyjev prostor* H^p $(0 < p \leq \infty)$ definiše kao skup svih funkcija f holomorfnih u D, koji zadovoljavaju uslov

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$

za $0 < p < \infty$, odnosno koje su ograničene za $p = \infty$:

$$\sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Slijedeći [K2], označimo sa M klasu svih funkcija f holomorfnih u D, za koje važi

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

gdje je

$$Mf(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|.$$

Klase N, N^+ i H^p $(0 < p \leq \infty)$ su istraživane od strane mnogih autora. Najveći dio referenci korišćen u ovom radu upravo se odnosi na rezultate o linearno-topološkoj, funkcionalnoj i algebarskoj strukturi tih klasa. Ti su rezultati zapravo i bili polazište za formulaciju analognih rezultata dobijenih u ovom radu, a koji se odnose na klase N^p $(1 < p < \infty)$. Klasa M, istraživana od strane korejanskog matematičara Hong Oh Kima u [K1] i [K2] bila je motiv za njenu generalizaciju datu u gl. 6 ovog rada.

Mi navodimo najprije neke bazične činjenice koje se odnose na naprijed navedene klase. Svaka od njih, izuzev tvrdjenja (c) iz teoreme 1.5, dokazana je u ([P1], str. 79–101), gdje su klase N, N^+ i N^p označene redom sa A, B i A^q. Iste činjenice, osim za klase N^p i M, date su i u Durenovoj knjizi [D2].

Teorema 1.1. (Fatou). *Za svaku funkciju $f \in N$, postoje njene granične ugaone vrijednosti skoro svuda na jediničnoj kružnici T. To posebno znači da radijalni limes*

$$f^*\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right)$$

postoji za skoro svako $e^{i\theta} \in T$. Osim toga, ako je dodatno $f \not\equiv 0$, tada je $\log|f^*| \in L^1(T)$

Slijedeći rezultat je poznat kao Rieszova teorema jedinstvenosti.

Teorema 1.2. (F. i M. Riesz). *Pretpostavimo da je $f \in N$. Ako postoji podskup E od T čija je Lebesgueova mjera $m(E)$ veća od nule tako da je radijalni limes od f jednak nuli u svakoj tački skupa E, tada je funkcija $f(z)$ identički jednaka nuli na krugu D.*

Teorema 1.3. (Kanonska faktorizaciona teorema za klasu N). *Svaka funkcija $f \in N$ može se faktorisati kao*

$$f(z) = B(z)\left(S_1(z)/S_2(z)\right)F(z),$$

gdje je $B(z)$ Blaschkeov proizvod u odnosu na nule $\{z_k\} \subset D$ funkcije $f(z)$, $S_k(z)$, $k = 1,2$, su singularne unutrašnje funkcije koje nemaju zajednički faktor, a $F(z)$ je vanjska funkcija za klasu N; tj.

$$B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z},$$

pri čemu je $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) < \infty$, a m nenegativan cijeli broj,

$$S_k(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_k(t)\right)$$

sa pozitivnim singularnim mjerama μ_k, $k = 1,2$, i

$$F(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt\right),$$

sa konstantom ω jediničnog modula je vanjska funkcija.

Koristeći naprijed navedenu faktorizaciju, imamo slijedeće tvrdjenje.

Teorema 1.4. *Za svaku singularnu funkciju $S(z)$ i svaki Blaschkeov proizvod $B(z)$ važi $|S(z)| < 1$ i $|B(z)| < 1$ za svako $z \in D$. Osim toga, važi $|S^*(e^{i\theta})| = 1$ i $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ za skoro svako $e^{i\theta} \in T$.*

Teorema 1.5. *Za bilo koju funkciju $f \in N$ sa faktorizacijom iz teoreme* 1.3 *važi:*

(a) *f pripada klasi N^+ ako i samo ako je $S_2 \equiv 1$.*

(b) *f pripada klasi N^p ako i samo ako je $S_2 \equiv 1$ i $\left(\log^+ |f^*|\right)^p \in L^1(T)$.*

(c) *f pripada klasi M ako i samo ako je $S_2 \equiv 1$ i $\log^+ |f^*| \in \Re H^1$. Obratno tvrdjenje od* (c) *nije tačno (vidj.* [K2], *teorema* 2.2*). $\Re H^1$ označava klasu svih funkcija koje zapravo predstavljaju realne dijelove funkcija iz klase H^1, pri čemu se H^1 identifikuje sa pripadnim prostorom graničnih (radijalnih) funkcija na T (vidj.* [K2]*).*

(d) *f pripada klasi H^p $(0 < p < \infty)$ ako i samo ako je $S_2 \equiv 0$ i $|f^*| \in L^p(T)$.*

(e) *f pripada klasi H^∞ ako i samo ako je $S_2 \equiv 0$ i osim toga vanjski faktor F od f pripada klasi H^∞.*

Teorema 1.6. (Privalov [P1], str. 93). *Funkcija f holomorfna u D pripada klasi N^p ako i samo ako za dato $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da važi*

$$\int_E \left(\log^+ \left|f(re^{i\theta})\right|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon, \quad 0 \le r < 1,$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$, za koji važi $m(E) < \delta$, tj. $f \in N^p$ ako i samo ako skup $\left\{\left(\log^+ \left|f(re^{i\theta})\right|\right)^p : 0 \le r < 1\right\}$ čini ravnomjerno integrabilnu familiju.

Komentar. Dok je uslov ravnomjerne integrabilnosti sadržan u definiciji klase Smirnova N^+, taj uslov za klase N^p na osnovu teoreme 1.6 je posljedica definicionog uslova (1.1) tih klasa. Otuda slijedi da je $N^p \subset N^+$ za svako $p > 1$. Kako nam je ta inkluzija bitna u novom dokazu teorema 1.5 (b) i 1.6 (to su redom teoreme 5.3 i 5.4) tu inkluziju izvodimo neposredno na osnovu leme 5.1.

Teorema 1.7. (Privalov [P1], gl. 2, pogl. 13). *Funkcija f holomorfna u D pripada klasi N^p ako i samo ako subharmonijska funkcija $z \mapsto (\log^+ |f(z)|)^p$ $(z \in D)$ ima harmonijsku majorantu.*

1.2. Inkluzije medju izučavanim klasama

Teorema 2.1. *Važe slijedeće inkluzije:*
(i) $\bigcup_{q>1} N^q \subset M \subset N^+ \subset N$,
(ii) $\bigcup_{s>0} H^s \subset \bigcap_{q>1} N^q$,
(iii) $\bigcup_{q>p} N^q \subset N^p \subset \bigcap_{1<q<p} N^q$, *za svako* $p > 1$.
Sve navedene inkluzije su stroge.

Dokaz. (i) Stroge relacije inkluzije $M \subset N^+ \subset N$ su dokazane u ([K2], teorema 2.1). Uzmimo proizvoljnu funkciju $f \in N^q$, za neko $q > 1$. Za dokaz inkluzije $N^q \subseteq M$, dovoljno je na osnovu teoreme 1.5 (b) i (c) pokazati da funkcija $h = \log^+ |f^*|$ pripada klasi $\Re H^1$. Na osnovu teoreme 1.5 iz [K2] taj uslov je ekvivalentan sa uslovom $h \in L\log L$, odnosno $h \log^+ h \in L^1(T)$, gdje $L \log L$ označava *Zygmundovu klasu.* Takodje vidjeti ([Ko], str. 135–136). Kako je $h^q \in L^1(T)$, koristeći nejednakost $\log^+ x \leq x^\alpha/\alpha$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, imamo

$$h(\theta) \log^+ h(\theta) \leq \frac{2}{q-1} (h(\theta))^{\frac{q+1}{2}} \in L^1(T).$$

Prema tome, $h \in L \log L$, što povlači $\bigcup_{q>1} N^q \subseteq M$. Sada razmotrimo funkciju

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \psi(t)\, dt\right),$$

gdje je $\psi(t)$ stepenasta funkcija definisana kao

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t \in (\pi, 2\pi] \\ n^{1-(\log n)^{-1/2}}, & \text{za } t \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right],\ n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Za fiksno $q > 1$, možemo odabrati $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da važi $q - q(\log n)^{-1/2} \geq 1$, za svako $n \geq n_0$. Otuda dobijamo

$$\int_0^{2\pi} \psi^q(t) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{q-q(\log n)^{-1/2}}}{n(n+1)} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Dakle, za svako $q > 1$ $(\psi^+)^q = \psi^q \notin L^1(T)$, pa na osnovu teoreme 1.5 (b) slijedi da $f \notin \bigcup_{q>1} N^q$.

S druge strane, kako je $n^{-(\log n)^{-1/2}} = \exp\big(-\sqrt{\log n}\big)$, imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \psi(t)\log^+\psi(t)\,\frac{dt}{2\pi} &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{(n+1)\exp\left(\sqrt{\log n}\right)}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\\ &< \sum_{n=3}^{\infty}\frac{6!\log n}{n\log^3 n} < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, $\psi = \log|f^*|$ pripada Zygmundovoj klasi $L\log L$. Na osnovu teoreme 1.5 iz [K2] i teoreme 1.5 (c), zaključujemo da je $f \in M$. Otuda slijedi $\bigcup_{q>1} N^q \neq M$.

(ii) Za svako $s > 0$ i za svako $q > 1$ inkluziju $H^s \subseteq N^q$ dobijamo neposredno na osnovu nejednakosti $(\log^+ x)^q \leq (q/s)^q x^s$, $x \geq 0$. Stoga važi $\bigcup_{s>0} H^s \subseteq \bigcap_{q>1} N^q$. Da bismo dokazali da je $\bigcup_{s>0} H^s \neq \cap_{q>1} N^q$, razmotrimo funkcija g funkciju $g(z)$ definisanu pomoću formule

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\chi(t)\,dt\right),$$

pri čemu je $\chi(t)$ stepenasta funkcija definisana kao

$$\chi(t) = n^{\log n}, \quad \text{za svako} \quad t \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tada za svako $q \geq 1$, imamo

$$\int_0^{2\pi} \log^q \chi(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{2q} n}{n(n+1)} < \infty,$$

uzimajući u obzir da je $\log^{2q} n < \sqrt{n}$ za dovoljno veliko n. Dakle, na osnovu teoreme 1.5 (b), vidimo da je $g \in \bigcap_{q>1} N^q$.

S druge strane, za svako $s > 0$ imamo

$$\int_0^{2\pi} |\chi(t)|^s\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s\log n}}{n(n+1)} = \infty,$$

uvažavajući da je $s\log n > 1$ za svako $n > \exp(1/s)$. Otuda je $\chi \notin L^s(T)$ za svako $s > 0$, pa na osnovu teoreme 1.5 (d), $f \notin \bigcup_{p>0} H^p$. To dokazuje tvrdjenje (ii).

(iii) Ulaganje $N^q \subseteq N^p$, za $q > p > 1$, je očigledno. To povlači

$$\bigcup_{q>p} N^q \subseteq N^p \subseteq \bigcap_{1<q<p} N^q.$$

Stavimo

$$F_p(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\xi_p(t)\,dt\right),$$

gdje je

$$\xi_p(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t \in (\pi, 2\pi] \\ n^{\frac{1}{p}\left(1-(\log n)^{-1/2}\right)}, & \text{za } t \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right], \quad n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}. \end{cases}$$

Postupajući na isti način kao u dokazu inkluzije (i) dobijamo $\xi_p \in L^p(T) \setminus \bigcup_{q>p} L^q(T)$, što povlači

$$F_p \in N^p \setminus \bigcup_{q>p} N^q.$$

Za proizvoljno $p > 1$, definišimo

$$G_p(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi_p(t)\,dt\right),$$

gdje je

$$\varphi_p(t) = n^{1/p} \text{ za } t \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Otuda slijedi

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_p(t)|^q \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{q}{p}}}{n(n+1)}.$$

Odavde vidimo da je $\varphi_p \in \bigcap_{1<q<p} L^q(T) \setminus L^p(T)$. Dakle, na osnovu teoreme 1.5 (b) dobijamo $G_p \in \bigcap_{1<q<p} N^q \setminus N^p$. Time je (iii) dokazano, a samim tim i teorema 2.1.

Komentar. U gl. 6 uvodimo klase M^p $(1 < p < \infty)$ kao uopštenja klase M i dokazujemo da važi $M^p = N^p$ za svako $p > 1$ i u skupovnom i u pripadnom topološkom smislu.

1.3. Kriterijumi pripadnosti klasama N^p

Teorema 3.1. *Neka je $p > 1$ i neka je $f \in N$ proizvoljna funkcija. Tada su slijedeća tvrdjenja ekvivalentna.*

(i) *f pripada klasi N^p.*

(ii) $\lim\limits_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} (\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} (\log^+ |f^*(e^{i\theta})|)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$

(iii) *f pripada klasi N^+ i* $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$.

(iv) $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$ *i*

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(v) *f pripada klasi M i* $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$.

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Kako je $f \in N$, na osnovu teoreme 1.1 radijalni limes $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ postoji za skoro svako $e^{i\theta} \in T$. Na osnovu teoreme 1.6, f pripada klasi N^p ako i samo ako je familija $\{(\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p : 0 \le r < 1\}$ *ravnomjerno integrabilna* na T. To je na osnovu ([P2], str. 13) ekvivalentno sa relacijom (ii) i uslovom $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) slijedi na potpuno isti način kao ekvivalencija (i)$\Leftrightarrow$(ii), uzimajući u obzir definiciju klase N^+.

(i)$\Leftrightarrow$(iii) je neposredna posljedica kanonske faktorizacije opisane teoremom 1.5 (a) i (b).

(v)$\Rightarrow$(iii) je očigledno, uzimajući u obzir da je $M \subset N^+$.

(i)$\Rightarrow$(v). Na osnovu teoreme 1.5 (b) vidimo da je $\log^+|f^*| \in L^p(T)$, dok na osnovu teoreme 2.1 (i) važi $N^q \subset M$; stoga je $f \in M$. Time je dokaz teoreme završen.

Komentar. Uočimo da su relacije (ii) i (iv) iz teoreme 3.1 N^p-analogoni Rieszove teoreme (vidj. [Ko], str. 61) koja se odnosi na klase H^p $(0 < p < \infty)$.

Kao posljedicu teoreme 3.1 dobijamo slijedeći rezultat koji je zapravo N^p-analogon teoreme Smirnova za Hardyjeve klase H^p (vidj. [Ko]).

Posljedica 3.2. *Neka su p i q realni brojevi takvi da je $1 < p < q$ i neka je $f \in N^p$-proizvoljna funkcija. Tada f pripada klasi N^q ako i samo ako je $\log^+|f^*| \in L^q(T)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\log^+|f^*| \in L^q(T)$. Kako je $f \in N^p \subset N^+$, na osnovu implikacije (iii) $\Rightarrow$ (i) iz teoreme 3.1, zaključujemo da je $f \in N^q$. Obratno, ako je $f \in N^q$, tada na osnovu (i) $\Rightarrow$ (iv), slijedi da je $\log^+|f^*| \in L^q(T)$. Time je posljedica dokazana.

1.4. Kanonska faktorizaciona teorema za klase N^p

U ovom poglavlju dajemo dokaz kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (b) za klase N^p $(1 < p < \infty)$. Kao neposrednu posljedicu toga dokaza dobijamo kriterijum pripadnosti klasi N^p opisan teoremom 1.6. Dokaz se zasniva na dobro poznatoj kanonskoj faktorizaciji za klasu Smirnova N^+ (teorema 1.5 (a)). U vezi s tim neophodna nam je slijedeća lema.

Lema 4.1. *Neka je $p > 1$ i neka je K ograničen podskup od $L^p(T)$, tj. neka važi*

$$\sup_{f \in K} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Tada skup K čini ravnomjerno integrabilnu familiju, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\int_E |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \delta \quad \textit{za svako} \quad f \in K,$$

za bilo koji skup $E \subset T$ čija je Lebesgueova mjera $m(E) < \delta$.

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz ([Gam], gl. 5, teorema 1.1 i posljedica 1.2, str. 121).

Lema 4.2. *$N^p \subset N^+$ za svako $p > 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f \in N^p$ za neko $p > 1$. Na osnovu definicije od N^p, familija $\{\log^+ |f(re^{i\theta})| : 0 \leq r < 1\}$ je ograničena u prostoru $L^p(T)$. Stoga na osnovu leme 4.1, to je ujedno i ravnomjerno integrabilna familija. Dakle, $f \in N^+$, odnosno $N^p \subset N^+$.

Teorema 4.3. (Kanonska faktorizaciona teorema 1.5 (b)). *Svaka funkcija $f \in N^p$ $(1 < p < \infty)$ koja nije identički jednaka 0 može se faktorisati na slijedeći način:*

$$f(z) = B(z)S(z)F(z), \tag{4.1}$$

gdje je $B(z)$ Blaschkeov proizvod u odnosu na nule funkcije $f(z)$, $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija i $F(z)$ vanjska funkcija za klasu N^p, tj.

$$F(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt\right), \tag{4.2}$$

pri čemu je $|\omega| = 1$, dok funkcije $\log|f^*|$ i $(\log^+ |f^*|)^p$ pripadaju prostoru $L^1(T)$. Obratno, svaki proizvod $B(z)S(z)F(z)$ opisanog oblika pripada klasi N^p.

Dokaz. Uzmimo $f \in N^p$. Tada je na osnovu leme 4.1 $f \in N^+$. Teorema 1.5 (a) pokazuje da se f može prikazati u obliku (4.1), gdje je $F(z)$ dato sa (4.2) i $\log|f^*| \in L^1(T)$. Koristeći Fatouovu lemu, dobijamo

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ \left|f^*(e^{i\theta})\right|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \liminf_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ \left|f(re^{i\theta})\right|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty, \tag{4.3}$$

odakle slijedi da je $\left(\log^+ |f^*|\right)^p \in L^1(T)$.

Obratno, pretpostavimo da je $f(z)$ funkcija data sa (4.1) i da je pri tome $\log|f^*|$, $\left(\log^+ |f^*|\right)^p \in L^1(T)$. Neka je

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}$$

Poissonovo jezgro. Radi jednostavnosti stavimo $\psi(t) = \log\left|f^*(e^{it})\right|$. Tada iz (4.2) dobijamo

$$\begin{aligned} \log^+ \left|F(re^{i\theta})\right| &= \left(\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\psi(t)\, \frac{dt}{2\pi}\right)^+ \\ &\leq \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\psi^+(t)\, \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Kako je $|f(z)| \leq |F(z)|$ za svako $z \in D$, nejednakost (4.4) i Hölderova integralna nejednakost daju za svako $0 \leq r < 1$

$$\left(\log^+ \left|f(re^{i\theta})\right|\right)^p \leq \left(\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\psi^+(t)\, \frac{dt}{2\pi}\right)^p$$

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} &\le \left(\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{p-1} \left(\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,(\psi^+(t))^p\,\frac{dt}{2\pi}\right) \\ &= \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\left(\log^+|f^*(e^{it})|\right)^p\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Koristeći (4.5), na osnovu Fubinijeve teoreme dobijamo

$$(4.6) \qquad \int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi}\left(\log^+|f^*(e^{it})|\right)^p\frac{dt}{2\pi} \quad (0\le r<1).$$

Prema tome i s obzirom da je $\left(\log^+|f^*|\right)^p \in L^1(T)$, zaključujemo da je $f\in N^p$. Time je teorema u potpunosti dokazana.

Posljedica 4.4. (Teorema 1.6). *Funkcija f, holomorfna na D, pripada klasi N^p ako i samo ako je familija $\left\{\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p : 0\le r<1\right\}$ ravnomjerno integrabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f\in N^p$. Na osnovu (4.6) i (4.3) dobijamo

$$\limsup_{r\to1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} \le \liminf_{r\to1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Otuda slijedi da postoji

$$\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Konačno, na osnovu (4.6) i (4.3), neposredno dobijamo

$$\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\left(\log^+|f^*(e^{i\theta})|\right)^p\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Gornja relacija je na osnovu ([P2], str. 25) ekvivalentna sa činjenicom da je familija $\left\{\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p : 0\le r<1\right\}$ ravnomjerno integrabilna. Obratno tvrdjenje posljedice je očigledno, pa je time njen dokaz završen.

1.5. F-algebre N^p

Poznato je (vidj. [D2]) da je svaki Hardyjev prostor H^q $(q\ge1)$ *Banachov prostor* sa pripadnom normom $\|\cdot\|_q$ definisanom kao

$$(\|f\|_q)^q = \sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})|^q\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad f\in H^q.$$

Preciznije, za normu $\|\cdot\|_q$ na prostoru H^q važe slijedeća svojstva.

(i) $\|f\|_q\ge0$ za svako $f\in H^q$.

(ii) $\|f\|_q=0$ samo ako je $f(z)\equiv0$.

(iii) $\|\lambda f\|_q = |\lambda| \|f\|_q$ za svako $\lambda \in \mathbf{C}$ i svako $f \in H^q$ (*svojstvo homogenosti*).

(iv) $\|f + g\|_q \leq \|f\|_q + \|g\|_q$ (*nejednakost trougla*).

(v) H^q je kompletan metrički prostor sa pripadnom metrikom ρ_q definisanom kao $\rho_q(f, g) = \|f - g\|_q$.

Napomenimo da se svaki *vektorski prostor* nad poljem $\mathbf{C}$ sa pripadnom normom koja zadovoljava svojstva (i)–(v) zove *Banachov prostor* nad poljem $\mathbf{C}$. Nadalje, dobro je poznato (vidj. [D2]) da je svaki Hardyjev prostor H^q $(0 < q < 1)$ *q-Banachov prostor* sa pripadnom normom $\| \cdot \|_q$ definisanom na H^q kao

$$(\|f\|_q) = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^q \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^q.$$

Preciznije, gornja norma na H^q $(0 < q < 1)$ zadovoljava sva svojstva (i)–(v), izuzev svojstva (iii) koje se može zamijeniti tzv. svojstvom q-homogenosti definisanim preko uslova

(iii)' $\|\lambda f\|_q = |\lambda|^q \|f\|_q$ za svako $\lambda \in \mathbf{C}$ i svako $f \in H^q$.

Prostor H^q $(0 < q < 1)$ je u stvari kompletan metrički prostor sa pripadnom aditivno invarijantnom metrikom ρ_q definisanom kao $\rho_q(f, g) = \|f - g\|_q$. Ali poznato je da nijedan prostor H^q $(0 < q < 1)$ nije *normizabilan* u smislu da se na tom prostoru ne može zadati norma koja bi na H^q indukovala istu topologiju kao inicijalna norma $\| \cdot \|_q$. Štaviše, dokazano je (vidj. [DRS]) da ti prostori nisu *lokalno konveksni*. Još istaknimo da prostor H^∞ ograničenih na D holomorfnih funkcija čini Banachovu algebru u odnosu na normu $\| \cdot \|_\infty$ definisanu kao

$$\|f\|_\infty = \max_{|z|<1} |f(z)|, \quad f \in H^\infty.$$

N. Yanagihara u radu [Y3] uvodi linearno-topološku strukturu na klasi Smirnova N^+ generisanu metrikom d definisanom kao

$$d(f, g) = \|f - g\|, \quad f, g \in N^+, \tag{5.1}$$

gdje je

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} \log(1 + |f^*(e^{i\theta})|) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N^+.$$

Napomenimo da je *vektorski topološki prostor* L nad poljem $\mathbf{C}$ zapravo vektorski prostor nad $\mathbf{C}$ u kome su operacije $(f, g) \mapsto f + g$ i $(c, f) \mapsto cf$ neprekidna preslikavanja sa $L \times L \to L$, odnosno sa $\mathbf{C} \times L \to L$ u pripadnim *proizvod-topologijama*. Ukoliko je topologija na takvom prostoru L indukovana aditivno-invarijantnom metrikom u odnosu na koju je L kompletan metrički prostor, kažemo da L obrazuje F-prostor. F-prostor koji je *lokalno konveksan* naziva se *Fréchetovim*. Napomenimo da je vektorski topološki prostor L lokalno konveksan ako postoji *baza okolina nule* koja se sastoji od otvorenih apsolutno konveksnih podskupova od L. *F-algebra* je algebra koja čini F-prostor i u kojoj je množenje neprekidna operacija u pripadnoj proizvod-topologiji. Lokalno konveksna F-algebra naziva se *Fréchetovom*. Yanagihara je u ([Y3], teorema 1) dokazao da N^+ čini *F-prostor* u odnosu na topologiju odredjenu metrikom d. C. S–

Davis je u svojoj disertaciji [Da] dokazao da je množenje u algebri N^+ neprekidno, što zajedno sa prethodno pomenutim rezultatom Yanagihare daje slijedeći rezultat.

Teorema 5.1. *Prostor N^+ sa topologijom odredjenom pomoću metrike d obrazuje F-algebru, tj. F-prostor u kome je množenje neprekidna operacija.*

Komentar. Yanagihara pokazuje u ([Y3], komentar 1) da Nevanlinnina klasa N u odnosu na metriku datom sa (5.1) nije kompletan metrički prostor, a samim tim ni F-prostor. J. H. Shapiro i A. L. Shields u radu [SS2] uvode metriku d' na N stavljajući $d'(f,g) = \|f-g\|'$, gdje je

$$\|f\|' = \lim_{r\to 1-} \int_0^{2\pi} \log(1+|f(re^{i\theta})|)\,\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad f \in N.$$

U ([SS2], propozicija 1.1) pokazano je da je (N,d') kompletan metrički prostor čija je topologija jača od topologije ravnomjerne konvergencije na kompaktnim podskupovima od D. Odavde i iz činjenice da se metrike d i d' podudaraju na prostoru N^+ (vidj. [SS2], propozicija 1.2 (c)) neposredno slijedi da je N^+ zatvoren vektorski potprostor od N u odnosu na metričku topologiju d' (vidj. [SS2], posljedica propozicije 1.2). Iako je zbog subaditivnosti (kvazi)norme $\|\cdot\|'$ N ujedno i topološka grupa u odnosu na sabiranje, množenje skalarom nije neprekidno na N, pa samim tim (N,d') nije topološki vektorski prostor (vidj. [SS2], posljedica 1 teoreme 2.1). Štaviše, prostor N je nepovezan ([SS2], teorema 2.1), dok je količnički prostor N/N^+ totalno nepovezan u odnosu na uobičajenu infimum normu $\|\tilde{f}\|' = \inf\{\|g\|' : g \in \tilde{f}\}$ ($\tilde{f}$ je razred $f + N^+$ u N/N^+) (vidj. [SS2], teorema 2.1'). Te činjenice daju sugestiju da je N^+ upravo *komponenta povezanosti* od N. Medjutim, J. W. Roberts u radu [Ro] pokazuje da to nije tačno. Naime, u ([Ro], teorema 3.3) je dokazano da je komponenta povezanosti od N skup $K \subset N$ definisan kao

$$K = \left\{ \frac{f}{S_\mu} : f \in N^+, \mu \text{ je neprekidna nenegativna singularna mjera na } T \right\},$$

gdje je S_μ singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom mjerom μ.

Po analogiji sa metrikom d, na N^+ se definiše topološka struktura na prostoru N^p $(1 < p < \infty)$ preko invarijantne metrike d_p definisane kao

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p, \qquad f,g \in N^p, \tag{5.2}$$

gdje je

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \log^p(1+|f^*(e^{i\theta})|)\,\frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p}, \qquad f \in N^p.$$

Teorema 5.2. ([St2], teorema 4.2). *Prostor N^p, $p > 1$, sa topologijom odredjenom pomoću metrike d_p čini jednu F-algebru, tj. F-prostor u kome je množenje neprekidna* *operacija.*

Teorema 5.3. ([1], str. 25, teorema 1). *Za svaku funkciju $f \in N^p$ važi*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \log^p(1+|f(re^{i\theta})|)\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \\ &= \left(\sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi} \log^p(1+|f(re^{i\theta})|)\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Teorema 5.4. ([1], str. 43, teorema 1). *Skup svih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva čini gust podskup u svakom prostoru N^p, $p > 1$. Dakle, N^p je separabilan metrički prostor.*

Na kraju uočimo da je svojstvo biti F-prostor i te kako značajno za istraživanje linearno-topološke strukture takvih prostora, najviše iz razloga što su za $F-$prostore važeće neke osnovne teoreme iz funkcionalne analize. To su posebno *teorema o zatvorenom grafiku, princip ravnomjerne ograničenosti i teorema o otvorenom preslikavanju* (vidj. [R1]), dok *Hahn-Banachova teorema* uopšte ne mora da vrijedi za F-prostore. Istaknimo da prve tri teoreme bitno koristimo u ovom radu pri istraživanju linearno-topološke, funkcionalne i algebarske strukture prostora N^p $(1 < p < \infty)$.

Komentar. Kanonska faktorizaciona teorama 1.5 (a), (b) za klase N^+ i N^p pokazuje da se klasa N^+ može razmatrati kao "prirodan limes" prostora N^p kada $p \to 1$. Istu tvrdnju u metričkom (topološkom) smislu dobijamo poredeći pripadne metrike prostora N^+ i N^p definisane redom pomoću (5.1) i (5.2).

2. MNOŽITELJI I LINEARNI FUNKCIONALI NA PROSTORIMA N^p

2. Množitelji i linearni funkcionali na prostorima N^p

U ovoj glavi istražujemo linearno-topološku strukturu prostora N^p $(1 < p < \infty)$. U vezi s tim glavni rezultat daje potpunu karakterizaciju neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p u odnosu na topologiju uvedenu na N^p pomoću metrike d_p definisane kao

$$(0.1) \qquad d_p(f,g) = \|f-g\|_p, \quad f,g \in N^p,$$

gdje je

$$(0.2) \qquad \|f\|_p := \left(\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \log^p(1+|f(re^{i\theta})|) \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in N^p.$$

Na osnovu teoreme 5.2, gl. 1, svaki prostor N^p $(1 < p < \infty)$ obrazuje F-prostor u odnosu na metričku topologiju odredjenu metrikom d_p. Osim toga, množenje u algebri N^p je neprekidna operacija, tj. N^p obrazuje F-algebru.

Za opis topološkog duala od N^p bitno koristimo princip ravnomjerne ograničenosti koji je primjenljiv pošto je N^p F-prostor. U prvom poglavlju dajemo ocjenu Taylorovih koeficijenata funkcija iz prostora N^p, za koju kasnije (u četvrtom poglavlju) pokazujemo da je najstroža u asimptotskom smislu. U slijedećem poglavlju dokazujemo više lema koje su nam neophodne za karakterizaciju množitelja iz prostora N^p u Hardyjeve prostore H^q $(0 < q \le \infty)$ koju dobijamo u trećem poglavlju. Pokazuje se da taj skup množitelja ne zavisi od q. Za posljedicu toga rezultata dobijamo činjenicu da nijedan prostor N^p nije lokalno ograničen.

Koristeći navedene rezultate, u narednom poglavlju dajemo reprezentaciju neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p. Pokazuje se da se topološki dual od N^p može identifikovati sa cijelom klasom holomorfnih na D funkcija koje su klase C^∞ na T. Iz dobijenog rezultata lako se izvodi da topološki dual od N^p razdvaja tačke. S druge strane, iako je topološki dual od N^p "bogat" funkcionalima, u slijedećem poglavlju dokazujemo činjenicu da nijedan prostor N^p nije lokalno konveksan. Iz dokaza tog rezultata dobijamo klasu količničkih F-prostora od N^p koji imaju trivijalan dual. Otuda neposredno slijedi da Hahn-Banachova teorema o proširenju linearnih funkcionala nije primjenljiva na prostore N^p. Štaviše, u posljednjem poglavlju pokazujemo da prostori N^p ne posjeduju Banachovo separativno, a samim tim ni aproksimativno svojstvo. Medjutim, dokazujemo da svaki prostor N^p ima tačkovno separativno svojstvo.

2.1. Taylorovi koeficijenti funkcija iz prostora N^p

U ovom poglavlju, kao i ubuduće sa $P_r(\theta, t)$ ćemo označavati Poissonovo jezgro, tj.

$$P_r(\theta,t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}.$$

Za funkciju f holomorfnu na D, uvedimo slijedeće oznake:

$$M_\infty(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$M_q(r,f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/q}, \quad 0<q<\infty,$$

koje ćemo i ovdje koristiti.

Lema 1.1. *Za proizvoljnu funkciju f iz prostora N^p važe slijedeće nejednakosti.*

(i) $$(\log^+|f(re^{i\theta})|)^p \le \int_0^{2\pi} P_r(\theta,t)\left(\log^+|f^*(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(ii) $$\log(1+|f(z)|) \le 2^{1/p} d_p(f,0)(1-|z|)^{-1/p}, \quad z\in D,$$

gdje d_p označava inicijalnu metriku na N^p definisanu pomoću (0.1).

Dokaz. (i) slijedi neposredno iz činjenice da je funkcija $z \mapsto (\log^+|f(z)|)^p$ subharmonjska na D (vidj. [P1], str. 42, primjeri). Zbog subharmoničnosti funkcije $z \mapsto \log^p(1+|f(z)|)$ na D (vidj. [1], str. 24, lema 1), neposredno dobijamo

$$\begin{aligned}\log^p(1+|f(re^{i\theta})| &\le \int_0^{2\pi} P_r(\theta,t)\log^p(1+|f^*(e^{i\theta})|)\frac{dt}{2\pi}\\ &\le \frac{2}{1-r}(d_p(f,0))^p,\end{aligned}$$

što predstavlja nejednakost (ii).

Teorema 1.2. *Neka je $f\in N^p$ funkcija sa Taylorovim razvojem $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Tada važi*

(i) $$\log M_q(r,f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{1/q}}\right) \quad \textit{za svako} \quad 0<q\le\infty.$$

(ii) $$|a_n| = O\left(\exp\left(o(n^{1/(p+1)})\right)\right).$$

Dokaz. (i) Kako na osnovu Hölderove nejednakosti za svako $0 < p < q < \infty$ važi

$$M_p(r, f) \leq M_q(r, f) \leq M_\infty(r, f),$$

dovoljno je dokazati (i) za $q = \infty$. U dokazu koji slijedi koristimo činjenicu da je Poissonovo jezgro *aproksimativna jedinica* (vidj. dokaz teoreme 1 iz [Y2]). Označimo sa $u(r, \theta)$ harmonijsku majorantu funkcije $(\log^+ |f(z)|)^p$, predstavljene pomoću Poissonovog integrala granične funkcije $h(t) = (\log^+ |f^*(e^{it})|)^p$. Tada na osnovu leme 1.1 (i), imamo

$$\log M_\infty(r, f) \leq \max_{0 \leq \theta < 2\pi} u(r, \theta). \tag{2.1}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Odaberimo za K dovoljno veliki pozitivan broj, tako da za funkciju $h_K(t) = \min(K, h(t))$ važi

$$\int_0^{2\pi} (h(t) - h_K(t)) \frac{dt}{2\pi} < \varepsilon.$$

Tada dobijamo

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} P_r(\theta, t) h_K(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &+ \int_0^{2\pi} P_r(\theta, t) (h(t) - h_K(t)) \frac{dt}{2\pi} \\ &= u_0(r, \theta) + u_1(r, \theta), \end{aligned}$$

gdje je $P_r(\theta, t)$ Poissonovo jezgro.

Kako je $0 \leq h_K(t) \leq K$, dobijamo

$$0 \leq u_0(r, 0) \leq K.$$

S druge strane, kako je $P_r(\theta, t) \leq (1 + r)(1 - r)^{-1}$, neposredno slijedi

$$u_1(r, \theta) \leq \frac{1 + r}{1 - r} \int_0^{2\pi} (h(t) - h_K(t)) \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{2\varepsilon}{1 - r}.$$

Prema tome, važi

$$u(r, \theta) \leq K + \frac{2\varepsilon}{1 - r}.$$

Otuda slijedi

$$\overline{\lim_{r \to 1}} (1 - r) \big(\max_{0 \leq \theta < 2\pi} u(r, t) \big) \leq 2\varepsilon. \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) neposredno dobijamo

$$(1 - r)^{1/p} \log^+ M_\infty(r, f) \leq (2\varepsilon)^{1/p}$$

odakle slijedi (i), uzimajući u obzir da je ε proizvoljno.

(ii) Na osnovu Cauchyjeve formule, koeficijent a_n funkcije f može se prikazati kao

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad 0 \le r < 1,$$

odakle dobijamo

$$|a_n| \le \inf_{0\le r<1}\left(\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}\right) = \inf_{0\le r<1}\left(\frac{1}{r^n}M_1(r,f)\right). \tag{2.3}$$

Koristeći ocjenu (i) iz naše leme, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji r_0, $0 < r_0 < 1$, koje zavisi od ε tako da važi

$$M_1(r,f) \le \exp\left(\frac{\varepsilon}{(1-r)^{1/p}}\right) \quad \text{za svako} \quad r \ge r_0.$$

Tada na osnovu (2.3) imamo

$$|a_n| \le \inf_{r_0\le r<1}\left(\frac{1}{r^n}\exp\left(\frac{\varepsilon}{(1-r)^{1/p}}\right)\right) \quad \text{za svako} \quad r \ge r_0. \tag{2.4}$$

Stavimo

$$r_n = 1 - \left(\frac{\epsilon}{n}\right)^{p/(p+1)},$$

i odaberimo prirodan broj n_0 za koji je $r_n \ge r_0$ za svako $n \ge n_0$. Tada za svako takvo n imamo

$$r_n^{-n} = \left(1-\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{p/(p+1)}\right)^{-\left(\frac{n}{\epsilon}\right)^{p/(p+1)}\left(\frac{\epsilon}{n}\right)^{p/(p+1)}n} = e^{\epsilon^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}(1+o(1))},$$

odakle na osnovu (2.4) slijedi

$$|a_n| \le e^{\varepsilon^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}(1+o(1))+\varepsilon^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}} \quad \text{za svako} \quad n \ge n_0.$$

Otuda dobijamo

$$|a_n| \le \exp\left(2\varepsilon^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}(1+o(1))\right) \quad \text{za svako} \quad n \ge n_0,$$

čime je i (ii) dokazano. Time je teorema dokazana.

Primjer. Neka je $p > 1$ proizvoljno i neka je f_p holomorfna na D funkcija definisana kao

$$f_p(z) = \exp\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/p}\right), \quad z \in D.$$

Tada je

$$M_\infty(r, f_p) \ge \exp\left(\left(\frac{2}{1-r}\right)^{1/p}\right) \quad \text{za svako} \quad 0 \le r < 1,$$

odakle dobijamo

$$\overline{\lim_{r\to 1}}(1-r)\left(\log^+ M_\infty(r,f_p)\right)^p \geq 2.$$

Otuda i na osnovu relacije (i) teoreme 2.2 slijedi da $f_p \notin N^p$. S druge strane, poznato je da je $(1+z)/(1-z) \in H^s$ za svako $0 < s < 1$ (vidj. [D2], str. 13, vježbanje 1). Koristeći tu činjenicu i očiglednu nejednakost

$$\left(\log^+ |f_p(z)|\right)^q \leq \left(\frac{2}{|1-z|}\right)^{q/p}, \quad z \in D,$$

vidimo da je $f_p \in \bigcap\limits_{1<q<p} N^q$. Dakle, važi

$$f_p \in \bigcap_{1<q<p} N^q \setminus N^p.$$

2.2. Množitelji iz prostora N^p u Hardyjeve prostore H^q

Neka je $p > 1$ i $0 < q \leq \infty$. Za niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}$ kažemo da je *množitelj* iz prostora N^p u Hardyjev prostor H^q ako za svaku funkciju $f \in N^p$ s Taylorovim razvojem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ slijedi da funkcija g definisana na D kao $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ pripada prostoru H^q. U skladu s tom definicijom, svaki množitelj $\{\lambda_n\}$ iz N^p u H^q možemo razmatrati kao indukovani linearan operator Λ sa N^p u H^q definisan kao

$$\Lambda : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n. \tag{2.1}$$

Lema 2.1. ([1], str. 60, posljedica 1). *Ako je niz funkcija iz prostora N^p konvergentan u odnosu na metriku d_p prostora N^p, tada taj niz konvergira na svakom kompaktnom podskupu jediničnog kruga D.*

Lema 2.2. ([D2], teorema 6.4, str. 98). *Neka je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q, \quad 0 < q \leq 1.$$

Tada važi

$$a_n = o(n^{1/q-1}), \tag{2.2}$$

kao i

$$|a_n| \leq C n^{1/q-1} \|f\|_q. \tag{2.3}$$

Teorema 2.3. Pretpostavimo da je $\{\lambda_n\}$ množitelj iz prostora N^p u Hardyjev prostor H^q $(0 < q \leq \infty)$. Tada je linearan operator Λ definisan sa N^p u H^q pomoću

(2.1) neprekidan. Stoga Λ preslikava ograničene podskupove od N^p u ograničene podskupove od H^q.

Dokaz. Na osnovu leme 2.1 slijedi da $f_n \to f$ u N^p povlači ravnomjernu konvergenciju niza $\{f_n(z)\}$ ka $f(z)$ na svakom zatvorenom krugu $|z| \leq r < 1$. Dakle, ako je $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k$ i $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, dobijamo

$$a_k^{(n)} \to a_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \quad \text{ako } f_n \to f \text{ u } N^p \text{ kada } n \to \infty. \tag{2.4}$$

Neka je $g_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k$ niz u prostoru H^q i neka je $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ funkcija iz H^q takva da $g_n \to g$ u H^q. Na osnovu nejednakosti (9) iz teoreme 6.4 u [D2], vidimo da $b_k^{(n)} \to b_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ kada $n \to \infty$. Otuda i iz (2.4) lako se vidi da je Λ zatvoren operator. Prema tome, na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku, Λ je neprekidan operator, pa stoga Λ preslikava ograničene podskupove od N^p na ograničene podskupove od H^q.

Slijedeća teorema u potpunosti opisuje množitelje iz prostora N^p u H^q.

Teorema 2.4. *Neka je $0 < q \leq \infty$ i $1 < p < \infty$. Da bi niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_k\}$ bio množitelj iz prostora N^p u H^q, neophodno je i dovoljno da važi*

$$\lambda_k = O \exp(-ck^{1/(p+1)}) \tag{2.5}$$

za neku pozitivnu konstantu c.

Komentar. Uočimo da dok pretpostavka teoreme sadrži q, uslov (2.5) ne sadrži q.

Za dokaz teoreme 2.4 neophodno nam je nekoliko lema. Dokaz slijedeće leme je sasvim analogan lemi 1 iz [Y3]).

Lema 2.5. *Pretpostavimo da niz kompleksnih brojeva $\{\lambda_k\}$ zadovoljava uslov*

$$\lambda_k = O \exp(-c_k k^{1/(p+1)}) \tag{2.6}$$

za bilo koji niz $\{c_k\}$ pozitivnih brojeva za koji važi $c_k \downarrow 0$. Tada važi

$$\lambda_k = O \exp(-ck^{1/(p+1)}),$$

za neku konstantu $c > 0$.

Dokaz. Ako niz $\{\lambda_k\}$ zadovoljava (2.6), tada je očigledno $\lambda_k \to 0$ kada $k \to \infty$ i $\overline{\lim}_{k\to\infty}((1/k^{1/(p+1)}) \log |\lambda_k|) \leq 0$. Za dokaz naše leme dovoljno je dokazati da važi

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}((1/k^{1/(p+1)}) \log |\lambda_k|) < 0.$$

Pretpostavimo da je

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}((1/k^{(1/(p+1)}) \log |\lambda_k|) = 0. \tag{2.7}$$

Bez smanjenja opštosti možemo uzeti da važi

$$(2.8) \qquad b_k = -(1/k^{1/(p+1)})\log|\lambda_k| \downarrow 0 \quad \text{kada} \quad k \to \infty,$$

uzimajući podniz od $\{\lambda_k\}$ ukoliko je to neophodno. Na osnovu pretpostavke (2.6), za bilo koji niz $\{c_k\}$ za koji je $c_k \downarrow 0$, postoji konstanta A koja zavisi od $\{c_k\}$ takva da je

$$|\lambda_k| \le A\exp(-c_k k^{1/(p+1)}),$$

tj.

$$(2.9) \qquad (c_k - b_k)k^{1/(p+1)} \le \log A.$$

Stavimo $c_k^* = \max(2b_k, 1/k^{1/2(p+1)})$. Tada iz (2.8) dobijamo $c_k^* \downarrow 0$, pa zamjenjujući c_k sa c_k^*, odnosno A sa A^* koje zavisi od c_k^*, iz (2.9) dobijamo $k^{1/2(p+1)}/2 \le \log A^*$, kada $k \to \infty$, što je kontradikcija. Time je lema dokazana.

Lema 2.6. (Vidjeti [Y3], lema 2 i komentar 3). *Neka je*

$$\exp\left(\frac{c}{2}\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c)z^n, \quad 0 < c \le 1.$$

Tada važi

$$\log|a_n(c)| \ge \sqrt{cn} + O(\log n) + O(\log c)$$

Posebno, ako je $\{c_k^*\}$ *niz pozitivnih brojeva takav da je* $\frac{1}{k^{1/(p+1)}} \le c_k^* \le 1$, *tada važi*

$$(2.10) \qquad \log|a_k(c_k^*)| \ge \sqrt{c_k^* k}(1 + o(1)).$$

Napomenimo da je podskup L vektorskog topološkog prostora X *ograničen* ako za svaku okolinu nule V postoji $\alpha_0 > 0$ tako da važi $\alpha L \subset V$ za svako $\alpha \in \mathbb{C}$ za koje je $|\alpha| \le \alpha_0$.

Lema 2.7. *Neka je* $\{c_k\}$ *niz pozitivnih brojeva takav da je* $c_k \downarrow 0$ *i* $r_k \uparrow 1$, $r_k \ge 1/2$, $k = 1, 2, \ldots$. *Stavimo*

$$f_k(z) = \exp\left(c_k(1 - r_k)^{1-1/p}\frac{1 + r_k z}{1 - r_k z}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tada niz $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, *čini ograničen podskup od* N^p.

Dokaz. Odaberimo pozitivne nizove $\{\varepsilon_k\}$ i $\{\delta_k\}$, za koje je $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$ i takve da važi

$$(2.11) \qquad \frac{1 - r_k^2}{1 + r_k^2 - 2r\cos\theta} \le 1 \quad \text{za} \quad |\theta| \ge \varepsilon_k \quad \text{i} \quad r \ge r_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Za datu okolinu

$$V = \{g \in N^p : d_p(g, 0) < \eta\}$$

nule u prostoru N^p, odaberimo prirodan broj m za koji važi

$$\log^p(1+\delta_m) + 2^p\pi^{-1}\varepsilon_m \log^p 2 + 2^{p-1}Cc_m^p < \eta^p, \tag{2.12}$$

gdje je konstanta C tada pomoću (2.13). Odaberimo α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, tako da važi

$$\alpha_0 \exp\frac{1+r_m}{1-r_m} \le \delta_m, \quad \text{stoga je unaprijed} \quad \alpha_0 e \le \delta_m.$$

Tada za svako $k \le m$,

$$|\alpha_0 f_k^*(e^{i\theta})| \le |\alpha_0| \exp\frac{1+r_k}{1-r_k} \le \delta_m,$$

odakle na osnovu (2.11), za $0 < \alpha \le \alpha_0$ dobijamo

$$d_p(\alpha f_k, 0) \le \log(1+\delta_m) < \eta.$$

Dakle, $\alpha f_k \in V$ za svako $k \le m$ i $0 < \alpha \le \alpha_0$. Iz nejednakosti $\sin x \ge (2/\pi)x$ za $0 \le x \le \pi/2$, slijedi

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2} \ge (1-r)^2 + (4r/\pi^2)\theta^2.$$

Stoga, za $r_k \ge 1/2$ imamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\theta|<\varepsilon_k} \left(\log^+ |f_k^*(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} &= c_k^p(1-r_k)^{p-1} \int\limits_{|\theta|<\varepsilon_k} \left(\frac{1-r_k^2}{1+r_k^2-2r_k\cos\theta}\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} \\
&< 2^p\pi^{-1}c_k^p \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+2\pi^{-2}t^2)^p} \qquad \left(t = \frac{\theta}{1-r_k}\right) \qquad (2.13)\\
&= Cc_k^p,
\end{aligned}$$

pri čemu konstanta C ne zavisi od k. Koristeći (2.11), (2.12), (2.13), relaciju (5.3) iz teoreme 5.3, pogl. 1 i nejednakost $\log^p(1+|x|) \le 2^{p-1}\left((\log 2)^p + (\log^+|x|)^p\right)$, dobijamo za svako $k > m$ i $0 < \alpha \le \alpha_0$,

$$\begin{aligned}
\left(d_p(\alpha f_k, 0)\right)^p &= \int\limits_0^{2\pi} \log^p(1+|\alpha f_k^*(e^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_{|\theta|\ge\varepsilon_k} + \int\limits_{|\theta|<\varepsilon_k} \\
&\le \log^p(1+\alpha e) + 2^{p-1}\int\limits_{|\theta|<\varepsilon_k} \left(\log^p 2 + \left(\log^+|f_k^*(e^{i\theta})|\right)^p\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\le \log^p(1+\delta_m) + 2^p\pi^{-1}\varepsilon_m\log^p 2 + 2^{p-1}Cc_m^p \\
&< \eta^p.
\end{aligned}$$

Dakle, važi $\{\alpha f_k\} \subset V$ za svako $0 < \alpha < \alpha_0$. To pokazuje da je niz $\{f_k\}$ ograničen u N^p.

Komentar. Na sličan način može se dokazati obrat leme 2.7, tj. ako je niz $\{f_k\}$ ograničen u N^p i $r_k \uparrow 1$, $c_k > 0$, tada $c_k \to 0$.

Lema 2.8. ([D2], teorema 6.1, str. 94). *Neka je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q, \quad 1 \le q \le 2.$$

Tada je $\{a_n\} \in l^p$ $(1/q + 1/p = 1)$ *i pri tome važi*

$$\|\{a_n\}\|_p \le \|f\|_q, \tag{2.14}$$

gdje je $\|\{a_n\}\|_p$ *uobičajena* l^p*-norma niza* $\{a_n\}$.

2.3. Dokaz i primjena teoreme o množiteljima

Dokaz teoreme 2.4. *Neophodnost.* Pretpostavimo da je $\{\lambda_k\}$ množitelj iz N^p u H^q. Neka za dati pozitivan niz $\{c_k\}$ važi $c_k \downarrow 0$. Stavimo

$$c_k' = \min\left(1/2, \max(1/k^{1/2(p+1)}, c_k)\right).$$

Ako je (2.6) zadovoljeno za taj niz $\{c_k'\}$, tada (2.6) takodje važi za niz $\{c_k\}$. Stoga, mi možemo pretpostaviti da važi

$$\frac{1}{k^{1/2(p+1)}} \le c_k \le 1/2. \tag{3.1}$$

Tada niz $\{c_k^*\}$ definisan kao $c_k^* = 2c_k^2$ zadovoljava (2.10). Na osnovu leme 2.5 dovoljno je dokazati da važi

$$\lambda_k = O\exp(-c_k k^{1/(p+1)}) \quad \text{kada} \quad k \to \infty.$$

Neka je $\{r_k\}$ proizvoljan niz pozitivnih brojeva za koji važi $r_k \uparrow 1$. Tada na osnovu leme 2.7 niz $\{f_k\}$ definisan kao

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \exp\left(c_k(1-r_k)^{1-1/p}\frac{1+r_k z}{1-r_k z}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} r_k^n z^n, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

čini ograničen podskup od N^p. Kako je na osnovu teoreme 2.3 operator Λ neprekidan, to niz $\{\Lambda(f_k)\}$ mora biti ograničen u prostoru H^q. Uzmimo da je ograničen sa konstantom L. Kako je

$$\Lambda(f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n^{(k)} r_k^n z^n,$$

na osnovu leme 2.2 i ([D2], teorema 6.1, str. 94), važi

$$
(3.2) \qquad |\lambda_n a_n^{(k)}| r_k^n \leq \begin{cases} C_q L n^{-1+1/q} & \text{ako je } 0 < q < 1, \\ C_q L & \text{ako je } 1 \leq q \leq \infty, \end{cases}
$$

gdje je C_q konstanta koja zavisi samo od q. Stavljajući $r_k = 1 - \frac{c_k^{p/(p-1)}}{k^{p/(p+1)}}$, tada $f_k(z)$ može biti napisano kao

$$
f_k(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{c_k^2}{k^{\frac{p-1}{p+1}}} \frac{1 + r_k z}{1 - r_k z} \right).
$$

Tada na osnovu (3.2) i leme 2.6, imamo

$$
\begin{aligned}
O(\log k) &\geq \log |\lambda_k a_k^{(k)}| (r_k)^k \\
(3.3) \qquad &= \log |\lambda_k| + k \log r_k + \log |a_k^{(k)}| \\
&\geq \log |\lambda_k| + k \log r_k + \sqrt{\frac{c_k^2}{k^{\frac{p-1}{p+1}}}} k + O(\log k) + O\left(\log \frac{c_k^2}{k^{\frac{p-1}{p+1}}} \right).
\end{aligned}
$$

Iz (3.1) vidimo da važi $\log k = o(c_k k^{1/(p+1)})$ i

$$
O\left(\log \frac{c_k^2}{k^{\frac{p-1}{p+1}}}\right) = O(\log k) = o\left(c_k k^{1/(p+1)}\right),
$$

kao i

$$
c_k^{p/(p-1)} k^{1/(p+1)} = o\left(c_k k^{1/(1+p)}\right).
$$

Osim toga, vrijedi

$$
\begin{aligned}
k \log r_k &= k \log(1 - (1 - r_k)) \\
&\geq -k(1 - r_k) - k \frac{(1 - r_k)^2}{2} \\
&= -k^{1/(p+1)} c_k^{p/(p-1)} + O(1) \quad \text{kada} \quad k \to \infty.
\end{aligned}
$$

Iz gornjih ocjena i (3.3) neposredno slijedi

$$
\log |\lambda_k| \leq -c_k k^{1/(p+1)} + o(c_k k^{1/(p+1)}) \quad \text{kada} \quad k \to \infty.
$$

Dakle, postoji $n_0 \in \mathrm{N}$ tako da je ispunjeno

$$
\log |\lambda_k| \leq -\frac{1}{2} c_k k^{1/(p+1)} \quad \text{za svako} \quad k \geq k_0.
$$

Konačno, ako stavimo $A = \max_{1 \leq k \leq k_0} \{\log |\lambda_k| + \frac{1}{2} c_k k^{1/(p+1)}\}$, tada dobijamo

$$
\log |\lambda_k| \leq A - \frac{1}{2} c_k k^{1/(p+1)} \quad \text{za svako} \quad k \in \mathrm{N}.
$$

Otuda i na osnovu leme 2.5 zakjučujemo da niz $\{\lambda_k\}$ zadovoljava uslov (2.5) naše teoreme.

Dovoljnost. Pretpostavimo da niz $\{\lambda_k\}$ zadovoljava (2.5) za pozitivnu konstantu c. Ako je $f \in N^p$ funkcija s Taylorovim razvojem $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, tada na osnovu teoreme 1.2 (ii), postoji niz $\{\eta_k\}$ pozitivnih brojeva takav da je $\eta_k \downarrow 0$ i za koji važi

$$|a_k| \le A_1 \exp\left(\eta_k k^{1/(p+1)}\right), \tag{3.4}$$

gdje je A_1 pozitivna konstanta. Odaberimo prirodan broj k_0 tako da je $\eta_k < c/2$ za $k \ge k_0$. Tada mi imamo

$$|\lambda_k a_k| \le A_2 \exp(-ck^{1/(p+1)}/2) \quad \text{za svako} \quad k \ge k_0, \tag{3.5}$$

za pozitivnu konstantu A_2. Kako je očito $\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-ck^{1/(p+1)}) < +\infty$, slijedi da je funkcional $\Lambda[f](z)$ neprekidan na zatvorenom jediničnom krugu $\bar{D} = \{|z| \le 1\}$. Stoga je $\Lambda[f] \in H^q$, čime je teorema u potpunosti dokazana.

Komentar. Označimo sa A_p^{∞} klasu svih funkcija holomorfnih u krugu D čiji Taylorovi koeficijenti imaju oblik $O\left(e^{-cn^{1/(p+1)}}\right)$ za neko $c > 0$. Tada iz dokaza teoreme 2.4 vidimo da za proizvoljno fiksno q, $0 < q \le \infty$, svaki množitelj iz prostora N^p u prostor H^q preslikava sve elemente od N^p u klasu A_p^{∞}.

Napomenimo da je vektorski topološki prostor *lokalno ograničen* ako ne sadrži bazu okolina nule koja se sastoji od ograničenih skupova.

Posljedica 3.1. *Za svako $p > 1$ prostor N^p nije lokalno ograničen. Drugim riječima, nijedna lopta $B(c) = \{f \in N^p : d_p(f, 0) < c\}$ nije ograničen skup u prostoru N^p.*

Dokaz. Iz dokaza nejednakosti (2.13) leme 2.7 vidimo da postoji pozitivna konstanta b, koja zavisi samo od p, tako da za Poissonovo jezgro $P_r(\theta, t)$ važi

$$\int_0^{2\pi} (P_r(\theta, t))^p \frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{b}{(1-r)^{p-1}}. \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da neka lopta $B(c)$ poluprečnika c čini ograničen skup u N^p. Odaberimo brojeve $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ i $a > 0$ tako da važi

$$0 < \varepsilon^p + 2^{p-1}(\log 2)^p \varepsilon \pi^{-1}(1 + 2^{p-1}) + 4^{p-1} a^{2p} b < c^p, \tag{3.7}$$

$$|e^{\xi} - 1| < \epsilon \quad \text{ako je} \quad |\xi| < \delta, \tag{3.8}$$

$$\frac{2a^2}{\sin \varepsilon} < \delta. \tag{3.9}$$

Definišimo funkciju f_r na D kao

$$f_r(z) = \exp\left(a^2 (1-r)^{\frac{p-1}{p}} \frac{1+rz}{1-rz}\right) - 1 \quad \text{za svako} \quad 0 < r < 1. \tag{3.10}$$

Očigledno je svaka funkcija f_r ograničena na D, pa stoga ona pripada prostoru N^p. Osim toga, ako je $z = \rho e^{i\theta}$ za $|\theta| \geq \varepsilon$, tada je $|1 - rz| \geq \sin|\theta| \geq \sin\varepsilon$, pa stoga na osnovu (3.8) dobijamo

$$
\begin{aligned}
a^2(1-r)^{\frac{p-1}{p}}\left|\frac{1+rz}{1-rz}\right| &< \frac{2a^2}{|1-rz|} \\
&\leq \frac{2a^2}{\sin\varepsilon} < \delta. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Koristeći nejednakost $(\log^+|x-1|)^p \leq 2^{p-1}((\log^+|x|)^p + (\log 2)^p)$ i činjenicu da je

$$
\Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = P_r(\theta, 0),
$$

dobijamo

$$
(\log^+|f_r(e^{i\theta})|)^p \leq 2^{p-1}\left(a^{2p}(1-r)^{p-1}(P_r(\theta,0))^p + (\log 2)^p\right). \qquad (3.12)
$$

Koristeći (3.6)-(3.12) i nejednakost $\log^p(1+|x|) \leq 2^{p-1}\left((\log 2)^p + (\log^+|x|)^p\right)$, redom dobijamo

$$
\begin{aligned}
(d_p(f_r, 0))^p &= \int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + |f_r(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{|\theta|\geq\varepsilon} + \int_{|\theta|<\varepsilon} \\
&< \log^p(1+\varepsilon) + 2^{p-1}\left(\int_{|\theta|<\varepsilon}(\log 2)^p \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{|\theta|<\varepsilon}(\log^+|f_r(e^{i\theta})|)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\
&\leq \varepsilon^p + 2^{p-1}(\log 2)^p \varepsilon\pi^{-1} \\
&+ 2^{p-1}2^{p-1}\left(a^{2p}(1-r)^{p-1}\int_{|\theta|<\varepsilon}(P_r(\theta,0))^p \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{|\theta|<\varepsilon}(\log 2)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\
&\leq \varepsilon^p + 2^{p-1}(\log 2)^p \varepsilon\pi^{-1}(1 + 2^{p-1}) + 4^{p-1}a^{2p}b < c^p.
\end{aligned}
$$

Otuda vidimo da je $\{f_r : 0 \leq r < 1\} \subset B(c)$. Prema tome, iz pretpostavke da je $B(c)$ ograničen skup u N^p, na osnovu teoreme 2.3 svaki množitelj $\Lambda = \{\lambda_n\}$ mora preslikavati skup $\{f_r : 0 \leq r < 1\}$ u ograničen podskup od H^∞. Dakle, ako je $f_r(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n r^n z^n$, iz (3.2) dobijamo

$$
|\lambda_n a_n r^n| \leq L = L(\Lambda) \qquad (3.13)
$$

za svako r, $0 \leq r < 1$, gdje je L konstanta koja zavisi od Λ. Koristeći oznaku iz leme 2.6, na osnovu iste leme slijedi

$$
|a_n| = a_n\left(2a^2(1-r)^{\frac{p-1}{p}}\right) \geq \exp\left(a(1-r)^{\frac{p-1}{2p}}\sqrt{2n}\,(1+o(1))\right) \qquad (3.14)
$$

za konstantu a, koja je odredjena sa (3.7)-(3.9). Stoga, iz (3.13) i (3.14) neposredno slijedi

$$
|\lambda_n| \leq Lr^{-n}\exp\left(-a(1-r)^{\frac{p-1}{2p}}\sqrt{2n}(1+o(1))\right) \quad \text{za svako} \quad 0 \leq r < 1.
$$

Stavljajući $r = 1 - a^2/n^{\frac{p}{p+1}}$, iz zadnje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
|\lambda_n| &\leq L\left(1 - \frac{a^2}{n^{\frac{p}{p+1}}}\right)^{-n} \exp\left(-a\frac{a\sqrt{2}}{n^{\frac{p-1}{2(p+1)}}}\sqrt{n}(1+o(1))\right) \\
&\leq L\left(\left(1 - \frac{a^2}{n^{\frac{p}{p+1}}}\right)^{-\frac{n^{\frac{p}{p+1}}}{a^2}}\right)^{a^2 n^{\frac{1}{p+1}}} \exp\left(-a^2\sqrt{2}n^{\frac{1}{p+1}}\right) \\
&\leq L\exp\left(a^2 n^{\frac{1}{p+1}(1+o(1))}\right)\exp\left(-a^2\sqrt{2}n^{\frac{1}{p+1}}\right) \\
&= L\exp\left(-a^2(\sqrt{2}-1)n^{\frac{1}{p+1}}(1+o(1))\right) \\
&< L\exp\left(-0.3a^2 n^{\frac{1}{p+1}}\right).
\end{aligned}$$

Otuda zaključujemo da svaki množitelj $\Lambda = \{\lambda_n\}$ mora zadovoljavati uslov

$$\lambda_n = O\left(\exp\left(-0.3a^2 n^{\frac{1}{p+1}}\right)\right). \tag{3.15}$$

S druge strane, $\Lambda^* = \{\lambda_n^*\}$ za $\lambda_n^* = \exp\left(-0.2a^2 n^{\frac{1}{p+1}}\right)$ je na osnovu teoreme 2.4 takodje množitelj iz N^p u H^q, što je kontradikcija sa (3.15). Time je teorema dokazana.

2.4. Reprezentacija neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p

Lema 4.1. *Neka je $f \in N^p$. Stavimo $f_r(z) = f(rz)$ za $0 < r < 1$. Tada važi*

$$f_r \to f \quad \text{u prostoru} N^p \quad \text{kada} \quad r \to 1^-.$$

Dokaz. Neka je $E \subset [0, 2\pi)$ proizvoljan podskup od T. Kombinujući nejednakost $\log(1+|a+b|) \leq \log(1+|a|) + \log(1+|b|)$ sa integralnom nejednakošću Minkowskog dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left(\int_E \log^p(1+|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\int_E \log^p(1+|f(re^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} + \left(\int_E \log^p(1+|f^*(e^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \\
&\leq 2^{p-1}\left(\int_E (\log^+|f(re^{i\theta})|)^p\frac{d\theta}{2\pi} + \int_E (\log^+|f^*(e^{i\theta})|)^p\frac{d\theta}{2\pi}\right) + 2^p\log^p 2m(E)
\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 1.6, gl. 1 i gornje nejednakosti neposredno slijedi da je familija

$$\{\log^p(1 + |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|)\, 0 \le r < 1\}$$

ravnomjerno integrabilna. Stoga, na osnovu ([P2], str. 25) vrijedi

$$d_p(f_r, f) = \left(\int_0^{2\pi} \log^p(1 + |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|)\, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{kada} \quad r \to 1^-,$$

tj. $f_r \to f$ u prostoru N^p.

Lema 4.2. *Za svaku funkciju $f \in N^p$ skup $\{f_\xi(z) = f(\xi z) : \xi \in D\}$ je ograničen u prostoru N^p.*

Dokaz. Neka je $V = \{g \in N^p : d_p(g, 0) < \eta\}$ okolina nule u prostoru N^p. Iz neprekidnosti množenja $c \mapsto cf$, $c \in \mathbf{C}$, u N^p slijedi da postoji α', $0 < \alpha' < 1$, tako da je $d_p(\alpha' f, 0) < \eta/2$. Stavimo $f_{(\theta)}(z) = f(e^{i\theta}z)$, $f_{r(\theta)}(z) = f_r(e^{i\theta}z) = f(re^{i\theta}z)$. Na osnovu leme 4.1 postoji r_0 dovoljno blizu 1 tako da važi $d_p(f, f_r) < \eta/2$ za $r_0 \le r < 1$. Tada je

$$d_p(\alpha' f_{(\theta)}, 0) = d_p(\alpha' f, 0) < \eta/2,$$

kao i

$$\begin{aligned} d_p(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) &= d_p(\alpha' f_r, \alpha' f) \\ &\le d_p(f_r, f) < \eta/2. \end{aligned}$$

Za $\xi = re^{i\theta}$ imamo $f_\xi = f_{r(\theta)}$. Tada za $r \ge r_0$ dobijamo

$$\begin{aligned} d_p(\alpha' f_\xi, 0) &= d_p(\alpha' f_{r(\theta)}, 0) \\ &\le d_p(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) + d_p(\alpha' f_{(\theta)}, 0) \\ &= d_p(\alpha' f_r, \alpha' f) + d_p(\alpha' f, 0) < \eta. \end{aligned}$$

Za svako $0 \le r \le r_0$ možemo odabrati dovoljno malo $\alpha"$ tako da je $d_p(\alpha" f_\xi, o) = d_p(\alpha" f_r, 0) < \eta$. Dakle, ako stavimo $\alpha = \min(\alpha', \alpha")$, iz gornje nejednakosti dobijamo $\{\alpha f_\xi\}_{|\xi|<1} \subset V$. Time je lema dokazana.

Sada smo u mogućnosti da damo potpunu karakterizaciju neprekidnih linearnih funkcionala na prostorima N^p. Podsjetimo se da smo sa $A_p^\infty(D)$ označili klasu svih holomorfnih funkcija na D čiji Taylorovi koeficijenti imaju rast $O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$ za neko $c > 0$. Očito je svaka funkcija iz prostora $A_p^\infty(D)$ neprekidna na zatvorenom krugu $\bar{D} : |z| \le 1$, i štaviše ona je klase C^∞ na T. Tada iz dokaza teoreme 2.4 vidimo da za fiksno $0 < q \le \infty$, svaki množitelj iz N^p u H^q mora preslikavati svaku funkciju iz N^p u neki element iz $A_p^\infty(D)$.

Teorema 4.3. *Ako je ϕ neprekidan linearan funkcional na N^p, tada postoji jedinstvna funkcija $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A_p^{\infty}(D)$ tako da važi*

$$\phi(f) = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n, \tag{4.1}$$

za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p$, pri čemu red na desnoj strani od (4.1) apsolutno konvergira. Drugim riječima, Taylorovi koeficijenti b_n funkcije $g(z)$

$$b_n = O\big(\exp(-cn^{1/(p+1)})\big) \tag{4.2}$$

za neku pozitivnu konstantu c. Obratno, ako funkcija $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pripada klasi $A_p^{\infty}(D)$, tada ona odredjuje funkcional $\phi(f)$ definisan pomoću (4.1) koji je linearan i neprekidan na prostoru N^p.

Dokaz. Jedinstvenost je očigledna. Pretpostavimo da je ϕ neprekidan linearan funkcional na N^p i neka je

$$b_k = \overline{\phi(z^k)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Kako je niz $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}$ ograničen u N^p i ϕ neprekidan funkcional na N^p, zaključujemo da je niz $\{b_k\}$ ograničen, pa je stoga funkcija g definisana kao

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad z \in D,$$

holomorfna na D. Neka je $f \in N^p$ funkcija definisana kao

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad z \in D.$$

Pošto je na osnovu leme 4.2 $\{f_\xi\}_{\xi\in D}$ ograničen podskup od N^p, to je $\{\phi(f_\xi)\}_{\xi\in D}$ ograničen podskup od $\mathbf{C}$. Stoga je,

$$\phi(f_\xi) = \lim_{n\to\infty} \phi\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k z^k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k \xi^k$$

ograničena holomorfna na D funkcija u ξ, $|\xi| < 1$. Prema tome, $\{\bar{b}_k\}$ je množitelj iz prostora N^p u prostor H^{∞}. Na osnovu teoreme 2.4 važi

$$|b_k| = O\big(\exp(-ck^{1/(p+1)})\big)$$

za neku pozitivnu konstantu c. Otuda slijedi da je $g \in A_p^{\infty}(D)$. Uzmimo da je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in N^p$. Tada važi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k z^k \to f_r \quad \text{u prostoru} \quad N^p \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Na osnovu leme 4.1, $f_r \to f$ u N^p kada $r \to 1^-$. Otuda slijedi

$$\begin{aligned}\phi(f_r) &= \lim_{n\to\infty} \phi(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k z^k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k \bar{b}_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k r^k.\end{aligned}$$

Dakle, važi

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \lim_{r\to 1} \phi(f_r) = \lim_{r\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

Osim toga, na osnovu (4.2) i teoreme 1.2 (ii) slijedi da je red

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k \tag{4.3}$$

apsolutno konvergntan.

Obratno, pretpostavimo da funkcija $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ zadovoljava uslov (4.2). Tada je za fiksno r, $0 < r < 1$, funkcional

$$\phi_r(f) = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N^p, \quad 0 < r < 1, \tag{4.4}$$

korektno definisan i osim toga lako se vidi da je ϕ_r linearan. Osim toga važi $\phi_r(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k r^k$. Pokazaćemo da je funkcional ϕ_r neprekidan za svako $0 < r < 1$. Stavimo $M_\infty(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Tada na osnovu (4.4) očito važi $|\phi_r(f)| \le M_\infty(r, f) M_\infty(1, g)$. Otuda i iz činjenice da na osnovu leme 1.1 (ii) važi

$$M_\infty(r, f) \le \exp\left(2^{1/p}(1-r)^{-1/p} d_p(f, 0)\right) - 1$$

zaključujemo da $|\phi_r(f)| \to 0$ kada $f \to 0$ u prostoru N^p. Otuda slijedi da je ϕ_r neprekidan linearan funkcional na N^p. Kako za svako fiksno $f \in N^p$ postoji $\lim_{r\to 1} \phi_r(f)$, na osnovu principa ravnomjerne ograničenosti (vidj. [DS], str. 52), slijedi da je familija $\{\phi_r\}_{0<r<1}$ podjednako neprekidna; tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi

$$\sup_{0<r<1} |\phi_r(f)| < \varepsilon$$

kad god je $d_p(f, 0) < \delta$. Odavde slijedi

$$|\phi(f)| \le \overline{\lim_{r\to 1}} |\phi_r(f)| < \varepsilon$$

čim je $d_p(f,0) < \delta$. To znači da je ϕ neprekidan funkcional. Kako funkcija $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zadovoljava uslov (4.2), to analogno kao u dokazu drugog dijela teoreme 2.4 dobijamo da red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$ konvergira apsolutno za bilo koju funkciju $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in N^p$. To povlači da za svaku funkciju $f \in N^p$ važi

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \lim_{r\to 1} \phi_r(f) \\ &= \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \end{aligned}$$

Dakle, funkcional ϕ definisan pomoću (4.1) koristeći datu funkciju $g(z)$, pripada (topološkom) dualu od N^p. Time je teorema u potpunosti dokazana.

Komentar. Neka E označava prostor svih redova koji su sumabilni u Abelovom smislu, tj. prostor svih funkcija holomorfnih na D koje imaju radijalne granične vrijednosti u tački $\xi = 1$. Tada se skup $M(N^p, E)$ svih množitelja iz N^p u E naziva dualni prostor od N^p u Abelovom smislu (vidj. [Le], gdje je $M(N^p, E)$ označeno sa $(N^p)^A$). U vezi sa naprijed rečenim, kao neposrednu posljedicu teorema 2.4 i 4.3 dobijamo slijedeći rezultat.

Posljedica 4.4. *Ako sa $M(N^p, S)$ označimo skup svih množitelja iz prostora N^p u prostor S holomorfnih funkcija, tada za svako $1 < p < \infty$ i $0 < q \le \infty$ važi*

$$M(N^p, A_p^{\infty}) = M(N^p, H^q) = M(N^p, E) = A_p^{\infty}, \quad \text{ali je} \quad M(N^p, N^p) \neq A_p^{\infty}.$$

Posljedica 4.5. *Za svako $\xi \in D$, funkcional δ_ξ definisan na N^p kao*

$$\delta_\xi(f) = f(\xi), \quad f \in N^p, \tag{4.5}$$

je multiplikativan neprekidan linearan funkcional na N^p.

Dokaz. Za dato $\xi \in D$ i ograničenu holomorfnu funkciju g definisanu na D kao

$$g(z) = (1 - \xi z)^{-1}, \quad z \in D,$$

integral iz (4.1) svodi se jednostavno na $f(r\xi)$. Stoga je $\phi(f) = f(\xi)$, pa na osnovu teoreme 4.3 slijedi da je $\phi = \delta_\xi$ neprekidan funkcional na N^p. Svojstva linearnosti i multiplikativnosti od δ_ξ su očigledna, pa je time dokaz završen.

Komentar. Posljedica 4.5 može biti dokazana direktno. Zapravo, na osnovu Hölderove integralne nejednakosti (sa indeksom p), dobijamo

$$d(f,0) \le d_p(f,0), \quad f \in N^p, \tag{4.6}$$

gdje d označava uobičajenu metriku u prostoru Smirnova N^+ (vidj. [Y3], odnosno gl. 1, pogl. 5). Otuda i na osnovu nejednakosti 1.3 iz [SS2] neposredno dobijamo

$$\log(1+|f(\xi)|) \le \frac{2d(f,0)}{1-|\xi|} \le \frac{2d_p(f,0)}{1-|\xi|}, \quad \xi \in D.$$

Odavde vidimo da je $\delta_\xi(f) = f(\xi)$ neprekidan funkcional.

Posljedica 4.6. *Prostor N^p ima razdvajajući dual. To znači da za svake dvije funkcije $f, g \in N^p$ postoji neprekidan linearan funkcional ϕ na N^p takav da važi $\phi(f) \neq \phi(g)$.*

Dokaz. Odaberimo $\xi \in D$ tako da važi $f(\xi) \neq g(\xi)$. Tada za funkcional δ_ξ definisan pomoću (4.5) važi $\delta_\xi(f) \neq \delta_\xi(g)$. Kako je na osnovu posljedice 4.5 δ_ξ neprekidan linearan funkcional, to je ujedno traženi funkcional za funkcije f i g.

Posljedica 4.7. *Ocjena o Taylorovim koeficijentima funkcija iz prostora N^p data pomoću teoreme 2.2 (ii) je stroga u asimptotskom smislu. Preciznije govoreći, to znači da za proizvoljan niz $\{c_n\}$ pozitivnih realnih brojeva koji konvergira nuli, postoji funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p$ tako da važi*

$$a_n \neq O\left(\exp\left(c_n n^{1/(p+1)}\right)\right).$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji niz $\{c_n\}$ pozitivnih brojeva takav da za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p$ važi

$$a_n = O\left(\exp\left(c_n n^{1/(p+1)}\right)\right). \tag{4.7}$$

Definišimo linearan funkcional ϕ na prostoru svih polinoma kao

$$\phi\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(n+1)^2} e^{-c_n n^{1/(p+1)}}.$$

Budući da na osnovu pretpostavke Taylorovi koeficijenti svake funkcije iz N^p zadovoljavaju (4.7), vidimo da je red $\sum_{n=0}^{\infty}(1/(n+1)^2)a_n e^{-c_n n^{1/(p+1)}}$ apsolutno konvergentan. Stoga funkcional ϕ može biti proširen na cijeli prostor N^p pomoću formule

$$\tilde{\phi}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^2} e^{-c_n n^{1/(p+1)}} \quad \text{za} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p.$$

Očito je $\tilde{\phi}$ linearan funkcional na N^p. Postupajući na potpuno isti način kao u dokazu drugog dijela teoreme 4.3, možemo zaključiti da je funkcional $\tilde{\phi}$ neprekidan. Zato niz $\{b_n\} = \{(1/(n+1)^2)e^{-c_n n^{1/(p+1)}}\}$ mora zadovoljavati uslov (4.2) iz teoreme 4.3. Za takvo $c > 0$ odaberimo prirodan broj n_0 takav da važi $c_n \le c/2$ za svako $n > n_0$. Tada iz (4.2) slijedi

$$\frac{e^{cn^{1/(p+1)}/2}}{(n+1)^2} \le K,$$

za neku konstantu K koja ne zavisi od n. Time je dobijena kontradikcija, što dokazuje našu tvrdnju.

Komentar. Odgovarajući rezultat za klasu Smirnova N^+ je dobijen u ([Y2], teorema 4). Naime, za proizvoljan dati niz $\{\delta_n\}$ pozitivnih brojeva za koji je $\delta_n \downarrow 0$ kada $n \to \infty$, Yanagihara konstruiše funkciju $f \in N^+$ čiji Taylorovi koeficijenti zadovoljavaju uslov $a_n \neq O(\exp(\delta_n\sqrt{n}))$.

Posljedica 4.8. *Za proizvoljno $\xi \in D$ i za svako $k \in \mathbf{N}$, definišimo funkcional $\delta_\xi^{(k)}$ na N^p kao*

$$\delta_\xi^{(k)}(f) = f^{(k)}(\xi), \quad f \in N^p, \tag{4.8}$$

gdje $f^{(k)}(\xi)$ označava k-ti izvod funkcije f u tački ξ. Tada je $\delta_\xi^{(k)}$ neprekidan multiplikativan linearan funkcional na N^p.

Dokaz. Očito je funkcional $\delta_\xi^{(k)}$ linearan i multiplikativan na N^p za svako $\xi \in D$. Još preostaje dokazati da je $\delta_\xi^{(k)}$ neprekidan na N^p. Za dato $\xi \in D$ definišimo niz kompleksnih brojeva $\{b_n\}$ kao

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \le n < k, \\ n(n-1)\cdots(n-k+1)\bar{\xi}^{n-k} & \text{za} \quad n \ge k. \end{cases} \tag{4.9}$$

Pretpostavimo da je $\xi \neq 0$. Tada kako je $|\xi| < 1$, za fiksno $k \in \mathbf{N}$ postoje pozitivne konstante c i C koje zavise samo od ξ i k takve da važi

$$n^k \le C\left(\frac{1}{|\xi|}\right)^{n/2} \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N},$$

kao i

$$e^{cn^{1/(p+1)}} \le \left(\frac{1}{|\xi|}\right)^{n/2-k} \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tada množeći gornje dvije nejednakosti dobijamo

$$n^k|\xi|^{n-k} \le Ce^{-cn^{1/(p+1)}} \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Na osnovu (4.9) iz zadnje nejednakosti koja očito važi i za $\xi = 0$, neposredno dobijamo

$$\begin{aligned} |b_n| &= n(n-1)\cdots(n-k+1)|\xi^{n-k}| \le n^k|\xi^{n-k}| \\ &\le n^k|\xi|^{n-k} \\ &\le Ce^{-cn^{1/(p+1)}}, \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Dakle, ako definišemo funkciju g na D kao

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} b_n z^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\bar{\xi}^{n-k}z^n, \quad z \in D, \end{aligned}$$

tada je g holomorfna na D funkcija čiji Taylorovi koeficijenti zadovoljavaju ocjenu iz teoreme 2.2 (ii). Stoga na osnovu teoreme 4.3 zaključujemo da je funkcional ϕ definisan na N^p kao

$$\phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p,$$

neprekidan na N^p. S druge strane, za svako $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in N^p$ imamo

$$\begin{aligned}
\delta_\xi^{(k)}(f) &= f^{(k)}(\xi) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\xi^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n \\
&= \phi(f), \quad \text{za svako,}
\end{aligned}$$

pa je stoga $\delta_\xi^{(k)} = \phi$. Dakle, ϕ je neprekidan funkcional na N^p, čime je tvrdjenje dokazano.

Posljedica 4.9. *Za svako $f \in N^p$ i $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ neka $\hat{f}(k)$ označava k-ti Taylorov koeficijent funkcije f. Tada je za svako $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ linearan funkcional ϕ_k definisan na N^p kao*

$$\phi_k(f) = \hat{f}(k), \quad f \in N^p,$$

neprekidan na N^p. To znači da metrika d_p odredjuje na prostoru N^p topologiju koja je Szegöova.

Dokaz. Na osnovu posljedice 4.8 za fiksno $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, funkcional $\delta_0^{(k)}$ definisan na N^p kao

$$\delta_0^{(k)}(f) = f^{(k)}(0), \quad f \in N^p,$$

je neprekidan multiplikativan linearan funkcional na N^p. Kako za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^n \in N^p$ važi

$$\delta_0^{(k)}(f) = k(k-1)\cdots 1\hat{f}(k) = k!\phi_k(f),$$

slijedi da je $\phi_k = \delta_0^{(k)}/k!$. Dakle, ϕ_k je neprekidan funkcional, čime je posljedica dokazana.

2.5. Odsustvo lokalne konveksnosti za prostore N^p

Kao primjenu teoreme 4.3 u ovom poglavlju dokazujemo da prostori N^p nisu lokalno konveksni. Analogan rezultat za prostor N^+ je dobijen u [Da], odnosno za klasu M u ([K2], teorema 5.4).

Lema 5.1. *Za proizvoljnu nekonstantnu singularnu unutrašnju funkciju S skup $SN^p = \{Sf : f \in N^p\}$ je zatvoren ideal od N^p.*

Dokaz. Kako S nije invertibilan element u N^p, to je SN^p svojstven ideal od N^p. Neka je $\{f_n\}$ niz u N^p i $g \in N^p$ tako da je $Sf_n \to g$ u N^p. Budući da je $|S^*(e^{it})| = 1$ skoro svuda na T, dobijamo

$$d_p(f_n - f_m, 0) = d_p(Sf_n - Sf_m, 0), \quad \text{za svako} \quad n, m \in \mathrm{N}.$$

Prema tome, $\{f_n\}$ je Cauchyjev niz u N^p i stoga $f_n \to f$ u N^p za neku funkciju $f \in N^p$. Otuda i zbog neprekidnosti množenja u N^p slijedi da $Sf_n \to Sf$ u N^p, pa je stoga $g = Sf$. Time je dokazano da je SN^p zatvoren ideal od N^p.

Za proizvoljnu pozitivnu Borelovu mjeru μ na jediničnoj kružnici T *modul neprekidnosti* $\omega(t, \mu)$ definisan je kao funkcija

$$\omega(t, \mu) = \sup_{|I| \le t} \mu(I), t > 0,$$

gdje se supremum uzima po svim lukovima od T čija je Lebesgueova mjera $m(I) = |I| \le t$.

Teorema 5.2. *Nijedan prostor N^p nije lokalno konveksan.*

Dokaz. Na osnovu ([D2], str. 121, teorema 7.6) postoji singularna unutrašnja funkcija S sa slijedećim svojstvom: Ako je funkcija

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^2$$

ortogonalna na SH^2, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma} |b_n|^2 = \infty \quad \text{za svako} \quad \gamma > 0. \tag{5.1}$$

Zapravo, ako je μ singularna mjera sa modulom neprekidnosti

$$\omega(t, \mu) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$$

tada singularna funkcija

$$S_\mu(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right)$$

ima navedeno svojstvo.

Pretpostavimo da je prostor N^p lokalno konveksan. Na osnovu leme 5.1, SN^p

je zatvoren podskup od N^p. Tada na osnovu Hahn-Banachove teoreme (vidj. [R1]) postoji netrivijalan linearan funkcional ϕ na N^p takav da važi

$$\phi(Sf) = 0 \quad \text{za svako} \quad f \in N^p.$$

Na osnovu teoreme 4.3, postoji funkcija $g \in A_p^\infty(D)$ za koju važi

$$\phi(f) = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N^p.$$

Otuda dobijamo

$$\phi(z^n S) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} S(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Odavde vidimo da je funkcija g, razmatrana kao element *Hilbertovog prostora* H^2, ortogonalna na SH^2. Ako je $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\gamma |b_n|^2 = \infty \quad \text{za svako} \quad \gamma > 0,$$

što je kontradikcija sa činjenicom da je $g \in A_p^\infty(D)$. Dakle, prostor N^p nije lokalno konveksan.

Posljedica 5.3. *Neka je S_μ singularna unutrašnja funkcija čiji je modul neprekidnosti $\omega(t,\mu) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$. Tada je nula-funkcional jedini od svih neprekidnih linearnih funkcionala na N^p koji se anulira na cijelom prostoru $S_\mu N^p$.*

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz dokaza teoreme 5.2.

Posljedica 5.4. *Neka je S_μ singularna unutrašnja funkcija čiji je modul neprekidnosti $\omega(t,\mu) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$. Tada količnički prostor $N^p/S_\mu N^p$ nema nijedan neprekidan linearan funkcional izuzev nula funkcionala. Dakle, $N^p/S_\mu N^p$ je F-prostor sa trivijalnim dualom.*

Dokaz. Označimo sa π projekciju sa N^p u količnički prostor $N^p/S_\mu N^p$. Pretpostavimo da je Φ neprekidan linearan funkcional na $N^p/S_\mu N^p$. Tada je $\Phi \circ \pi$ neprekidan linearan funkcional na N^p koji se poništava na $S_\mu N^p$. Na osnovu posljedice 5.3 $\Phi \circ \pi$ je nula-funkcional, što dokazuje našu tvrdnju.

Komentar. U radu ([DRS], posljedica 1 teoreme 13) navodi se klasa količničkih prostora u odnosu na Hardyjeve prostore H^q, $0 < q < 1$, koji imaju trivijalan dual. Preciznije govoreći, teorema 13 i njena posljedica iz [DRS] zapravo predstavljaju preformulaciju gornjih posljedica 5.3 i 5.4, samo ako zamijenimo N^p sa H^q. U gl. 5, pogl.

4 dajemo širu klasu singularnih funkcija od istih navedenih u prethodnim rezultatima, a za koje takodje važe gornje posljedice 5.3 i 5.4.

2.6. Odsustva Hahn-Banachovih svojstava za prostore N^p

Neka je X vektorski topološki prostor sa topološkim dualom X^*. Tada definišemo slijedeća svojstva.

a) Kažemo da X ima *tačkovno separativno svojstvo* ako X^* razdvaja tačke od X; ili ekvivalentno da za svaku tačku $x \neq 0$ iz X postoji netrivijalan neprekidan linearan funkcional ϕ iz X^* za koji je $\phi(x) \neq 0$.

b) Kažemo da X ima *Hahn-Banachovo separativno svojstvo* ako svaka tačka $x \in X$ može biti razdvojena od bilo kojeg zatvorenog potprostora $E \subset X$ koja ne sadrži x; tj. ako postoji $\phi \in X^*$ tako da $\phi(E) = 0$, ali $\phi(x) \neq 0$. To je ekvivalentno sa činjenicom da je svaki zatvoren potprostor od E ujedno i slabo zatvoren.

c) Kažemo da X ima *Hahn-Banachovo aproksimativno svojstvo* ako se svaki pravi zatvoren potprostor od X može anulirati nekim netrivijalnim funkcionalom iz X^*; to je ekvivalentno sa činjenicom da je svaki slabo gust potprostor od X ujedno gust potprostor.

Napomenimo da je *slaba topologija* na X definisana na uobičajen način (vidj. gl. 5, pogl. 2). Jasno je da Hahn-Banachovo separativno svojstvo povlači i dva prethodno navedena svojstva. Osim toga, za lokalno konveksne (Hausdorffove) prostore Hahn-Banachova teorema garantuje svaka od tri navedena svojstva, ali prostor koji nije lokalno konveksan može da ne posjeduje nijedno od tih svojstava. Takav primjer su Lebesgueovi prostori $L^q = L^q([0,1])$ sa malim eksponentom $0 < q < 1$. Naime, dobro je poznato (vidj. [R1]) da svaki prostor L^q, $0 < q < 1$, ima trivijalan dual u odnosu na topologiju odredjenu metrikom ρ_q definisanom kao

$$\rho_q(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^q \, dt, \qquad f, g \in L^q.$$

Drugim riječima, nula-funkcional je jedini neprekidan linearan funkcional na prostoru L^q. Dakle, prostori L^q, $0 < q < 1$, ne posjeduju niti jedno od svojstava a), b), c).

Komentar. Gore navedena svojstva b) i c) mogu biti karakterisana terminologijom količničkih prostora. Naime, lako se vidi da vektorski topološki prostor X ima Hahn-Banachovo separativno svojstvo ako i samo ako svaki količnički prostor od X po zatvorenom potprostoru ima tačkovno separativno svojstvo. Isto tako X ima Hahn-Banachovo aproksimativno svojstvo ako i samo ako ne postoji netrivijalan količnički prostor od X po zatvorenom potprostoru koji ima trivijalan dual.

Teorema 6.1. *Svaki prostor N^p, $p > 1$, ima tačkovno separativno svojstvo.*

Dokaz. Na osnovu posljedice 4.5, za svako $\xi \in D$ linearan funkcional δ_ξ definsan na prostoru N^p kao

$$\delta_\xi(f) = f(\xi), \quad f \in N^p,$$

je neprekidan. Neka je $f \in N^p$ funkcija koja nije identički jednaka nuli. Tada postoji $\xi \in D$ takvo da važi $f(\xi) \neq 0$, a samim tim i $\delta_\xi(f) = f(\xi) \neq 0$. To ujedno i dokazuje naše tvrdjenje.

Teorema 6.2. *Prostori N^p nemaju Hahn-Banachovo separativno, a samim tim ni aproksimativno svojstvo.*

Dokaz. Neka je S_μ singularna unutrašnja funkcija čiji je modul neprekidnosti $\omega(t,\mu) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$. Tada je na osnovu leme 5.1 S_μ zatvoren potprostor od N^p. Ako bi ϕ bio neprekidan funkcional koji se poništava na cijelom prostoru $S_\mu N^p$, tada bi na osnovu posljedice 5.3 ϕ bio nula-funkcional, što dokazuje da se nijedna tačka izvan $S_\mu N^p$ ne može razdvojiti od toga skupa. Time je naše tvrdjenje dokazano.

3. RAZNE TOPOLOGIJE NA PROSTORIMA N^p

3. Razne topologije na prostorima N^p

U ovoj glavi definišemo i poredimo razne topološke strukture na prostorima N^p $(1 < p < \infty)$ kao i na njihovim Fréchetovim omotačima F^p. U prvom poglavlju dajemo pregled poznatih i nama neophodnih rezultata koji se odnose na prostore F^p $(0 < p < \infty)$. Topologija na prostoru F^p je definisana pomoću dvije ekvivalentne familije (polu)normi u odnosu na koje je F^p prebrojivo normirana Fréchetova algebra. Zato je ta topologija metrizabilna pomoću metrike ρ_p koja se na uobičajen način uvodi kao na svakom prebrojivo-normiranom prostoru. Osim toga, N^p je gust potprostor od F^p, a indukovana topologija na N^p je slabija od inicijalne metričke d_p-topologije. Koristeći rezultat Eoffa da se svaki prostor N^p može prikazati kao unija izvjesnih *težinskih Hardyjevih prostora* $H^2(w)$, u drugom poglavlju definišemo dvije topologije na N^p kao induktivne limese pripadnih prostora $H^2(\omega)$. Za prvu topologiju, koja nije lokalno konveksna, izvjesno je da se podudara sa metričkom topologijom d_p na N^p. Druga topologija na N^p je uobičajena lokalno konveksna induktivna-limes topologija $\mathcal{H}^p$ koju ćemo nazivati *Helsonovom*. Koristeći činjenicu da je po definiciji $\mathcal{H}^p$ najjača lokalno konveksna topologija na N^p, kao i da metričke topologije d_p i ρ_p odredjuju isti topološki dual na N^p, u narednom poglavlju dokazujemo da se topologija $\mathcal{H}^p$ podudara sa metričkom topologijom ρ_p.

U četvrtom poglavlju dokazujemo da je svaki prostor F^p *Montelov*, kao i da se duali prostora N^p i F^p podudaraju u skupovnom i topološkom smislu. Pri tome se duali od N^p (odnosno F^p) identifikuju sa prostorom S_p svih nizova $\{\gamma_n\}$ kompleksnih brojeva za koje je $\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$, za neko $c > 0$, sa *topologijom ravnomjerne konvergencije na slabo ograničenim podskupovima* od N^p (odnosno sa *topologijom ravnomjerne konvergencije na ograničenim podskupovima* od F^p). Kao posljedicu dobijamo činjenicu da je prostor F^p i njegov dual refleksivni. U slijedećem poglavlju dokazujemo da Taylorov red svake funkcije iz prostora F^p konvergira ka toj funkciji u odnosu na metričku topologiju ρ_p, a samim tim i u odnosu na topologiju $\mathcal{H}^p$. Osim toga, lako se dokazuje da su metričke topologije d_p i ρ_p Szegöove. Obratno, dokazujemo da ako je τ *barelisana* Szegöova topologija na prostoru N^p u odnosu na koju Taylorov red svake funkcije iz N^p konvergira, tada se τ podudara sa ρ_p (odnosno sa $\mathcal{H}^p$). U šestom poglavlju dajemo asimptotsku verziju Szegöove teoreme koja se odnosi na prostore $H^2(w)$ sa *težinskim funkcijama* w na T za koje je $\log w \in L^p(T)$. Ta teorema daje najbolju gornju granicu za norme funkcionala na tim prostorima koji predstavljaju n-ti Taylorov koeficijent u nuli. Dokazujemo da je ta granica za proizvoljno $c > 0$ data sa $O\left(e^{cn^{1/(p+1)}}\right)$, kao i da ona ne može biti poboljšana u opštem slučaju. Dokaz tog rezultata se zasniva na asimptotskoj verziji Helson-Szegöove teoreme koju dajemo na kraju šestog poglavlja.

3.1. Fréchetove algebre F^p

U radu [Y5] N. Yanagihara definiše klasu F^+ kao skup svih funkcija f holomorfnih na D za koje važi

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\log^+(\max_{|z|\le r}|f(z)|)=0. \tag{1.1}$$

U [Y5] je pokazano da je $N^+\subset F^+$ i da je zapravo F^+ prebrojivo normirani Fréchetov prostor u odnosu na familiju polunormi $\{\|f\|_c\}_{c>0}$ definisanu sa

$$\|f\|_c=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\left(-c\sqrt{n}\right)<+\infty,\qquad f\in F^+. \tag{1.2}$$

Osim toga, Yanagihara je dokazao da je u odnosu na topologiju odredjenom familijom polunormi $\{\|f\|_c\}_{c>0}$, N^+ gust potprostor od F^+ koji ima isti topološki dual kao F^+ (vidj. [Y5], teoreme 3 i 4). Otuda neposredno slijedi da je F^+ sadržavajući Fréchetov prostor od N^+ u smislu opisanom u narednom poglavlju.

Koristeći (1.1) za motivaciju, M. Stoll u radu [St2] definiše prostor F^p, $p>0$, (sa oznakom F_β, $\beta>0$ u [St2]) kao klasu svih funkcija f holomorfnih u jediničnom krugu D za koje važi

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{1/p}\log^+(\max_{|z|\le r}|f(z)|)=0.$$

Uočimo da je za $p=1$ $F^1=F^+$, kao i $F^p\subset F^q$ za $0<q<p$, a na osnovu ([Pr 2], str. 106) važi $N\subset F^p$ za svako $0<p<1$. Napomenimo da je nezavisno od Stolla klase F^p proučavao A. Zayed u [Z1] i [Z2], ali na opštijem nivou.

Ovdje navodimo neke rezultate iz [St M] koji se odnose na prostore F^p, a koji će nam biti neophodni u narednim poglavljima kao i u glavama 4 i 5. Za funkciju f holomorfnu u D označimo:

$$M_q(r,f)=\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\,\frac{d\theta}{2\pi},\quad 0<q<\infty,$$

$$M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Tada važi

Teorema 1.1. ([St2], teorema 2.1). *Neka je $p>0$ fiksirano. Za bilo koju funkciju f holomorfnu u D slijedeći uslovi su ekvivalentni.*

(a) $f\in F^p$.

(b) *Za svako q, $0<q\le\infty$, važi*

$$\lim(1-r)^{1/p}\log^+ M_q(r,f)=0.$$

(c) *Za svako q, $0<q\le\infty$, i svako $c>0$ važi*

$$\int_0^1\exp\left(-c(1-r)^{-1/p}\right)M_q(r,f)\,dr<\infty.$$

(d) *Za neko q, $0 < q \leq \infty$, važi*

$$\int_0^1 \exp\left(-c(1-r)^{-1/p}\right) M_q(r,f)\, dr < \infty \quad \text{za svako} \quad c > 0.$$

Teorema 1.2. ([St2], teorema 2.2). *Neka je $p > 0$ i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ funkcija holomorfna na D. Tada su slijedeći uslovi za funkciju f ekvivalentni.*

(a) $f \in F^p$.

(b) *Postoji niz c_n pozitivnih realnih brojeva koji konvergira nuli i za koji važi*

$$|a_n| \leq \exp\left(c_n n^{1/(p+1)}\right).$$

(c) *Za svako $c > 0$ važi*

$$\|f\|_{p,c} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right) < \infty.$$

Imajući u obzir teoremu 1.2 (c), po analogiji sa familijom polunormi $\{\|\cdot\|_c\}_{c>0}$ definiše se familija polunormi $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$ na prostoru F^p, $p > 0$, kao

$$\|f\|_{p,c} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right), \quad f \in F^p. \tag{1.3}$$

Osim toga, teorema 1.1 (c) omogućuje definiciju druge familije polunormi $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ na prostoru F^p, $p > 0$, pomoću formule

$$|||f|||_{p,c} = \int_0^1 \exp\left(-c(1-r)^{-1/p}\right) M_p(r,f)\, dr, \quad f \in F^p. \tag{1.4}$$

Napomenimo da se na svakom vektorskom prostoru E sa prebrojivom familijom normi $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ topološka struktura zadaje na uobičajen način. Naime, za bazu okolina nule uzimaju se svi mogući skupovi $V(k,\varepsilon)$ oblika

$$V(k,\varepsilon) = \{x \in E : \|x\|_{i_1} < \varepsilon, \ldots, \|x\|_{i_k} < \varepsilon\},$$

gdje je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, a $\{i_1, \ldots, i_k\}$ prolazi svim konačnim podskupovima skupa N. Pri tome se prostor E naziva *prebrojivo-normiranim*.

Teorema 1.3. ([St2], propozicija 3.1). *Neka je $p > 0$ proizvoljno fiksirano. Tada za svako $c > 0$ postoji konstanta $A = A(p,c)$ koja zavisi samo od p i c, tako da važi*

$$|||f|||_{p,c} \leq \|f\|_{p,c_1}, \quad \|f\|_{p,c} \leq A|||f|||_{p,c_2}, \tag{1.5}$$

za konstante $c_1 = c^{p/(p+1)}$ i $c_2 = \left(\frac{c}{12}\right)^{p/(p+1)}$. Dakle, familije normi $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$ i $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ su ekvivalentne.

Napomenimo da se lokalno konveksan F-prostor naziva *Fréchetovim*, dok je *Fréchetova algebra* algebra koja je Fréchetov prostor u kome je množenje zatvorena i neprekidna operacija. Istaknimo još da se pod množenjem u F^p podrazumijeva obično množenje funkcija po tačkama.

Teorema 1.4. ([St2], teorema 3.2). *Za svako $p > 0$ u odnosu na topologiju definisanom familijom polunormi $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$, ili $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$, F^p obrazuje prebrojivo-normiranu Fréchetovu algebru. Osim toga važi*

$$\|fg\|_{p,c} \leq \|f\|_{p,c'}\|g\|_{p,c'}, \quad \text{za svako} \quad f, g \in F^p, \tag{1.6}$$

gdje je $c' = c2^{-p/(p+1)}$. Osim toga, ako je $f \in F^p$, tada $f_r \to f$ kada $r \to 1$ u odnosu na topologiju od F^p, pri čemu je $f_r(z) = f(rz)$ $(0 < r < 1)$.

Na osnovu teoreme 5.2, gl. 1, za svako $p > 1$ prostor N^p (sa oznakom $(\log^+ H)^\alpha$ u [St2]) u odnosu na topologiju odredjenu metrikom d_p definisanom kao

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^{2\pi} \left(\log(1 + |f^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \quad f, g \in N^p, \tag{1.7}$$

čini F-algebru. Slijedeći rezultat daje vezu izmedju prostora N^p i F^p.

Teorema 1.5. ([St2], teorema 4.3). *Neka je $p > 1$ proizvoljan realan broj. Tada važe slijedeća tvrdjenja.*

(a) *N^p je gust podskup od F^p.*

(b) *Topologija od F^p indukovana na N^p pomoću familije polunormi* (1.3) *ili* (1.4) *slabija je od iste definisane na N^p pomoću metrike d_p date sa* (1.7).

(c) *Za svako $q > p$ postoji funkcija $f_q \in N^p$ za koju važi*

$$\limsup_{r \to 1}(1 - r)^{1/q} \log^+ M_\infty(r, f_q) > 0,$$

tj. prostor N^p nije sadržan u prostoru F^q ni za jedno $q > p$.

3.2. Helsonove topologije $\mathcal{H}^p$ i Fréchetovi omotači prostora N^p

Na osnovu faktorizacione teoreme 1.5 (a), gl. 1, funkcija f holomorfna na D pripada klasi Smirnova N^+ ako i samo ako se f može prikazati kao $f = IF$, gdje je I unutrašnja funkcija, a F vanjska funkcija data sa

$$F(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log|F^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}\right), \tag{2.1}$$

pri čemu je $\log|F^*| \in L^1(T)$.

Na osnovu teoreme 1.5 (b), gl. 1, funkcija $f \in N^+$ pripada klasi N^p, $p > 1$, ako i samo ako je $f = IF$, gdje je I unutrašnja funkcija na D , a F vanjska funkcija definisana pomoću (2.1) za koju važi $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$.

Lema 2.1. *Skup* $(N^p)^{-1}$ *svih invertibilnih elemenata prostora* N^p *sastoji se od svih vanjskih funkcija* F *za koje važi* $\log|F^*| \in L^p(T)$.

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (b), gl. 1, za klase N^p, odnosno iz njene jedinstvenosti.

Na osnovu gornjeg rezultata lako se dokazuje (vidj. [E2] ili teorema 3.1, gl. 4 ovog rada) da funkcija f pripada prostoru N^p ako i samo ako se ona može prikazati u obliku razlomka g/h, gdje funkcije g i h pripadaju Hardyjevom prostoru H^2, a h je vanjska funkcija i to iz skupa $(N^p)^{-1}$. Koristeći tu činjenicu, kao i Beurlingovu teoremu za prostor H^2, u [E2] dokazano je da se N^p može prikazati kao unija izvjesnih *težinskih Hardyjevih prostora* $H^2(w)$. U vezi s tim svaku nenegativnu i u Borelovom smislu mjerljivu i integrabilnu na jediničnoj kružnici T funkciju w nazivamo *težinskom.* Svakoj težinskoj funkciji w pridružen je težinski Hardyjev prostor $H^2(w)$. Prostor $H^2(w)$ definiše se kao zatvorenje skupa svih *analitičkih polinoma* u prostoru $L^2(wd\theta)$. Napomenimo da svaki polinom uzet u varijabli $e^{i\theta}$ zovemo *analitičkim,* a polinom u varijabli $e^{-i\theta}$ *koanalitičkim.* Za težinsku funkciju w prostor $L^2(wd\theta)$ sastoji se od svih na T mjerljivih funkcija f za koje važi

$$\left(\|f\|_{L^2(wd\theta)}\right)^2 := \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2\, w \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Napomenimo da ćemo umjesto norme $\|\cdot\|_{L^2(wd\theta)}$ koja se odnosi na pripadni prostor $H^2(w)$ često pisati $\|\cdot\|_{H^2(w)}$. Prethodno pomenuti rezultat iz [E2] sada možemo precizno izraziti u slijedećem obliku.

Teorema 2.2. ([E2]). *Za svako* $p > 1$ N^p *se može prikazati kao unija*

$$N^p = \bigcup_{h \in (N^p)^{-1}} H^2\left(|h^*|^2\right), \tag{2.2}$$

gdje se unija uzima po svim prostorima $H^2\left(|h^*|^2\right)$ *pridruženim graničnim funkcijama* h^* *vanjskih funkcija iz* $(N^p)^{-1}$.

Komentar. Analogan rezultat za prostor Smirnova dokazan je u [Mc2], a na opštijem nivou, tj. za *Hardyjeve algebre* u odnosu na konačnu pozitivnu Borelovu mjeru, dokaz je dat u ([Gam], V. 4.4). Zapravo, za prostor N^+ važi ista teorema 2.2, uzimajući u obzir činjenicu da se skup $(N^+)^{-1}$ sastoji od svih vanjskih funkcija.

Reprezentacija (2.2) iz teoreme 2.2 omogućava nam da na svakom prostoru N^p definišemo dvije topologije kao *induktivni limes* pripadnih prostora $H^2(w)$. Prva topologija $\mathcal{I}^p$ je definisana u [E2] kao induktivni limes prostora $H^2(w)$. Preciznije, u topologiji $\mathcal{I}^p$ je baza okolina nule sastavljena od svih podskupova od N^p čiji je presjek sa svakim prostorom $H^2\left(|h^*|^2\right)$ $(h \in (N^p)^{-1})$ okolina nule u tom prostoru. Druga topologija na

N^p je uobičajena lokalno konveksna topologija na N^p koju ćemo zvati *Helsonovom topologijom* i označavati sa $\mathcal{H}^p$. Zapravo, u topologiji $\mathcal{H}^p$ za bazu okolina nule uzimaju se svi balansirani konveksni podskupovi od N^p čiji je presjek sa svakim prostorom $H^2(|h^*|^2)$ $(h \in (N^p)^{-1})$ okolina nule u tom prostoru. Napomenimo da je podskup V od N^p *balansiran* ako iz $f \in V$ i $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| \leq 1$, slijedi da je $\lambda f \in V$. Zapravo, topologija $\mathcal{I}^p$ (respektivno $\mathcal{H}^p$) je najjača topologija (respektivno najjača lokalno konveksna topologija) na prostoru N^p u odnosu na koju su sva ulaganja $i_h : H^2(|h^*|^2) \to N^p$ $(h \in (N^p)^{-1}$ neprekidna u pripadnim topologijama. Više informacija o definiciji i svojstvima prethodno definisanih induktivnih-limes topologija može se naći u ([KN], str. 10-12, str. 121. i str. 148.) Glavni rezultat iz [E2] sastoji se u slijedećem.

Teorema 2.3. ([E2]). *Za svako $p > 1$ topologija $\mathcal{I}^p$ na prostoru N^p podudara se sa pripadnom metričkom topologijom d_p.*

Posljedica 2.4. *Metrička topologija d_p na N^p je strogo jača od pripadne Helsonove topologije $\mathcal{H}^p$.*

Dokaz. Na osnovu definicije slijedi da je topologija $\mathcal{H}^p$ slabija od topologije $\mathcal{I}^p$, koja se na osnovu teoreme 2.3 podudara sa d_p-topologijom na N^p. Kako na osnovu teoreme 7.2, gl. 2, metrička topologija d_p nije lokalno konveksna, dok je $\mathcal{H}^p$ lokalno konveksna, zaključujemo da je metrička topologija d_p strogo jača od topologije $\mathcal{H}^p$.

Komentar. N^+-analogon teoreme 2.3 je dokazao J. E. McCarthy u [Mc1].

Sada ćemo ukratko opisati pojam *Fréchetovog omotača* proizvoljnog F-prostora. Neka je (X, τ) proizvoljan F-prostor čiji topološki dual X^* u odnosu na topologiju τ razdvaja tačke od X. Pretpostavimo da je topologija τ odredjena aditivno-invarijantnom metrikom d i neka je V_n d-lopta sa središtem u nuli poluprečnika n^{-1}, $n = 1, 2, \ldots$. Familija $\{V_n\}$ je prebrojiva baza okolina nule u (X, τ). Označimo sa $\tilde{V}_n$ apsolutno konveksan omotač od V_n, a sa $\|\cdot\|_n$ Minkowskijev funkcional od $\tilde{V}_n$. Napomenimo da je funkcional Minkowskog $\|\cdot\|_n$ definisan na X kao

$$\|x\|_n = \inf\left\{a : \frac{1}{a}x \in \tilde{V}_n, a > 0\right\}, \quad x \in X.$$

Izvjesno je da je svaki funkcional $\|\cdot\|_n$ polunorma (vidj. [KN], str. 15), pri čemu familija $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definiše lokalno konveksnu topologiju na X koja je očito slabija od topologije τ. Ta konstrukcija opisuje *Mackeyevu topologiju* $\tau^c = \tau^c(X)$ para (X, X^*). Za datu topologiju ξ na X označimo sa X_ξ^* *topološki dual* od X u odnosu na ξ. Ako se ξ podudara sa Mackeyevom topologijom para (X, X_ξ^*), kažemo da je (X, ξ) *Mackeyev prostor*. Važe slijedeća tvrdjenja.

Teorema 2.5. ([S2], teorema 1). *Neka je (X, τ) F-prostor čiji dual X^* razdvaja tačke. Tada je Mackeyeva topologija τ^c jedinstvena maksimalna lokalno konveksna topologija na X u odnosu na koju X ima isti topološki dual X^*.*

Ako dual X^* prostora (X, τ) razdvaja tačke, tada je topologija τ^c Hausdorffova, a samim tim i metrizabilna. Tada je kompletiranje (upotpunjenje) prostora (X, τ^c) Fréchetov prostor koji se naziva *Fréchetov omotač* od X i označava sa $\hat{X}$.

Slijedeći rezultat daje vezu izmedju prostora N^p i F^p.

Teorema 2.6 ([E1], teorema 4.2, slučaj $\alpha > 1$). *Za svako $p > 1$, prostor F^p je Fréchetov omotač prostora N^p.*

Komentar. Teorema 4.2 iz [E1] za $\alpha = 1$ zapravo tvrdi da je prostor $F^+ = F^1$ Fréchetov omotač prostora Smirnova N^+.

Teorema 2.7. ([W], 21, 10-1.9). *Ako je topologija ξ na F-prostoru X lokalno konveksna i metrizabilna i u odnosu na koju X ima isti topološki dual, tada je ξ Mackeyeva topologija. Ako je topologija ξ na F-prostoru X barelisana i u odnosu na koju X ima isti topološki dual, tada je ξ Mackeyeva topologija.*

3.3. Karakterizacija topoloških duala $(N^p, \mathcal{H}^p)^*$

Koristeći činjenicu iz prethodnog poglavlja da je za svako $p > 1$ F^p Fréchetov omotač prostora N^p u pridruženom smislu, u ovom poglavlju dajemo karakterizaciju pripadne Helsonove topologije $\mathcal{H}^p$ na N^p, kao i (topološkog) duala od $(N^p, \mathcal{H}^p)$. Za bilo koje dvije norme iz familije normi $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$ definisane na F^p preko (1.2), pogl. 3.1, očito važi

$$\|f\|_{p,c} \leq \|f\|_{p,c'} \quad \text{čim je} \quad c' < c \quad (f \in F^p).$$

Stoga se topološka struktura na F^p $(0 < p < \infty)$ može zadati pomoću metrike ρ_p definisane kao

$$\rho_p(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{p,1/n^{p/(p+1)}}}{1 + \|f-g\|_{p,1/n^{p/(p+1)}}}, \quad f, g \in F^p. \tag{3.1}$$

Dakle, svaki prostor F^p je metrizabilan.

Teorema 3.1. ([St2], teorema 3.3). *Neka je $p > 0$ i γ neprekidan linearan funkcional na prostoru F^p. Tada postoji pozitivna konstanta c i niz $\{\gamma_n\}$ kompleksnih brojeva za koji je $\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$ i takav da važi*

$$\Gamma(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n, \tag{3.2}$$

gdje je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in F^p$, a konvergencija u (3.2) je apsolutna. Obratno, ako je $\{\gamma_n\}$ niz kompleksnih brojeva za koji je $\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$, tada (3.2) definiše neprekidan linearan funkcional na F^p.

Teorema 3.2. *Za svako $p > 1$ prostori N^p i F^p imaju isti (topološki) dual. Preciznije, restrikcija na N^p bilo kojeg neprekidnog linearnog funkcionala na F^p pripada* *dualu od N^p, a svaki neprekidan linearan funkcional na N^p može se po linearnosti i neprekidnosti proširiti na prostor F^p.*

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz teoreme 3.1 i teoreme 4.3, gl. 2, koje zapravo daju istu karakterizaciju duala prostora F^p i N^p respektivno.

Teorema 3.3. *Neka je $p > 1$ i γ linearan funkcional, definisan na prostoru svih polinoma kao*

$$\gamma(\sum_{n=0}^{m} a_n z^n) = \sum_{n=0}^{m} a_n \gamma_n.$$

Tada se γ može po linearnosti i neprekidnosti proširiti na N^p ako i samo ako za neko $c > 0$ važi $\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)$.

Dokaz. Na osnovu leme 4.1, gl. 2, za funkciju $f \in N^p$ $f(rz)$ teži ka $f(z)$ u N^p kada $r \to 1^-$. Stoga je skup polinoma gust u N^p, odakle slijedi da je svaki linearan funkcional jednoznačno odredjen djelovanjem na skupu svih monoma z^k, $k = 0, 1, \ldots$. Stoga, tvrdjenje neposredno slijedi iz teoreme 4.3, gl. 2.

Teorema 3.4. *Helsonova topologija $\mathcal{H}^p$ definisana na N^p podudara se sa metričkom topologijom ρ_p datom sa (3.1). Osim toga, $\mathcal{H}^p$ je ujedno Mackeyeva topologija za par $(N^p, (N^p)^*)$, a dual od $(N^p, \mathcal{H}^p)$ je karakterisan pomoću teoreme 3.3.*

Dokaz. U cijelom dokazu sa $(X, \xi)^*$ ćemo označavati topološki dual od X u odnosu na topologiju ξ. Tada na osnovu teoreme 3.2 važi $(N^p, d_p)^* = (F^p, \rho_p)^*$. Na osnovu teoreme 1.5 (b) važi $(N^p, \rho_p)^* \subseteq (N^p, d_p)^*$, što zajedno sa prethodnom jednakošću duala daje

$$(F^p, \rho_p)^* \subseteq (N^p, \rho_p)^* \subseteq (N^p, d_p)^* = (F^p, \rho_p)^*.$$

Iz gornjih inkluzija očito slijedi

$$(N^p, \rho_p)^* = (N^p, d_p)^*. \tag{3.3}$$

Kako je na osnovu teoreme 2.3 $\mathcal{I}^p = d_p$, a $\mathcal{H}^p$ je najjača lokalno konveksna topologija na N^p koja je slabija od metričke topologije d_p, na osnovu (3.3) dobijamo

$$(N^p, d_p)^* = (N^p, \rho_p)^* \subseteq (N^p, \mathcal{H}^p)^* \subseteq (N^p, d_p)^*.$$

Dakle, važi

$$(N^p, \mathcal{H}^p)^* = (N^p, \rho_p)^* = (N^p, d_p)^*. \tag{3.4}$$

Iz (3.4) i činjenice da je metrička topologija ρ_p na osnovu teoreme 2.6 lokalno konveksna, na osnovu teoreme 2.7 zaključujemo da je ρ_p Mackeyeva topologija. S druge strane, iz (3.4) i činjenice da je na osnovu teoreme 5.6 topologija $\mathcal{H}^p$ barelisana, isto na osnovu teoreme 2.7 slijedi da je $\mathcal{H}^p$ Mackeyeva topologija. Kako na osnovu teoreme 6.1, gl. 2, dual $(N^p, d_p)^*$ razdvaja tačke, na osnovu teoreme 2.5 slijedi da se topologija

$\mathcal{H}^p$ podudara sa metričkom topologijom ρ_p. Time je teorema dokazana.

3.4. Drugi dual prostora N^p i F^p

Na osnovu teoreme 3.2 za svako $p > 1$ prostori N^p i F^p imaju isti topološki dual u skupovnom smislu. Tačnije, na osnovu teoreme 3.1 taj se dual može poistovjetiti sa familijom S_p svih nizova $\{\gamma_n\}$ kompleksnih brojeva za koje važi

$$\gamma_n = O\left(\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right).$$

Ovdje dokazujemo da se za svako $p > 1$ duali $(N^p)^*$ i $(F^p)^*$ redom prostora N^p i F^p podudaraju i u pridruženom topološkom smislu. Koristeći tu činjenicu dobijamo da su prostori F^p i $(F^p)^*$ refleksivni. Napomenimo da je topološka struktura na F^p data metrikom ρ_p definisanom sa (3.1). U vezi s tim, radi kratkoće zapisa ovdje, a i ubuduće ćemo pisati F^p umjesto (F^p, ρ_p), kao i N^p umjesto (N^p, d_p). Slijedeća teorema daje karakterizaciju ograničenih skupova prostora F^p.

Teorema 4.1. *Neka je $p > 1$ i neka je E podskup od F^p. Tada su slijedeća tvrdjenja o skupu E ekvivalentna.*

(i) *E je ograničen skup u prostoru F^p.*

(ii) *E je predkompaktan skup u prostoru F^p.*

(iii) *Postoji konstanta $A > 0$ koja zavisi o E i niz $\{c_n\}$ pozitivnih brojeva tako da važi $c_n \downarrow 0$ i*

$$|a_n| \leq A\exp\left(c_n n^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E. \tag{4.1}$$

Dokaz. (ii)$\Rightarrow$(i) slijedi očigledno iz činjenice da svaki predkompaktan skup u topološkom prostoru mora biti ograničen.

(iii)$\Rightarrow$(i) Za dati broj $c > 0$ odaberimo prirodan broj m za koji važi $c_n < c/2$ za svako $n > m$. Tada na osnovu uslova (iii) za svaku funkciju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E$ imamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,c} &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right) \\
&\leq A\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left((c_n - c)\, n^{1/(p+1)}\right) \\
&\leq A\left(\sum_{n=0}^{m} \exp\left((c_n - c)\, n^{1/(p+1)}\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{2} n^{1/(p+1)}\right)\right) \\
&= K(c) = K,
\end{aligned}$$

gdje konstanta K zavisi samo od c. Dakle, skup E je ograničen u svakom normiranom prostoru $(F^p, \|\cdot\|_{p,c})$, $c > 0$, a samim tim je ograničen i u F^p.

(i)$\Rightarrow$(iii) Pretpostavimo da je E ograničen skup u prostoru F^p. Za proizvoljno $c > 0$ i $\eta > 0$ skup V definisan kao

$$V = \{g \in F^p : \|g\|_{p,c} < \eta\}$$

predstavlja okolinu nule u F^p. Kako je E po pretpostavci ograničen skup u F^p , to postoji $\alpha > 0$ tako da važi $\alpha E \subset V$. To znači da važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha a_n| \exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right) < \eta \quad \text{za svako} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E.$$

Otuda slijedi

$$|a_n| \leq |\eta/\alpha| \exp\left(cn^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Odavde stavljajući

$$a_n^* = \{\sup |a_n(f)| : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E\}$$

dobijamo

$$a_n^* \leq |\eta/\alpha| \exp\left(cn^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4.2}$$

Budući da je $c > 0$ proizvoljno, iz (4.2) neposredno imamo

$$a_n^* = O\left(\exp\left(o(n^{1/(p+1)})\right)\right),$$

odakle neposredno slijedi (4.1).

(iii)$\Rightarrow$(ii). Treba pokazati da je E predkompaktan podskup od F^p, odnosno da za svaki niz $\{f_n\} \subset E$ postoji podniz tog niza koji je konvergentan u F^p. Takav podniz datog niza $\{f_n\}$ konstruišemo induktivno na slijedeći način. Neka je

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^k \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Kako je na osnovu pretpostavke

$$|a_{0n}| \leq A \exp(c_0) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N},$$

to postoji podniz $\{f_n^{(0)}\}$ od $\{f_n\}$ tako da pripadni podniz $\{a_{0n}^{(0)}\}$ niza $\{a_{0n}\}$ bude konvergentan; uzmimo

$$\lim_{n \to \infty} a_{0n}^{(0)} = a_0.$$

Stavimo $f_{i_0} = f_0^{(0)}$, tj. označimo sa f_{i_0} prvi član dobijenog podniza $\{f_n^{(0)}\}$.

Budući da je na osnovu pretpostavke

$$|a_{1n}| \leq A \exp(c_1) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N},$$

to postoji podniz $\{f_n^{(1)}\}$ od $\{f_n^{(0)}\}$ tako da odgovarajući podniz $\{a_{1n}^{(1)}\}$ niza $\{a_{0n}^{(0)}\}$ konvergira; uzmimo

$$\lim_{n\to\infty} a_{1n}^{(1)} = a_1.$$

Stavimo $f_{i_1} = f_1^{(1)}$, tj. označimo sa f_{i_1} prvi član dobijenog podniza $\{f_n^{(1)}\}$ koji je različit od f_{i_0}.

Nastavljajući ovaj dijagonalni postupak, uzimajući u obzir da je

$$|a_{kn}| \le A\exp\left(c_k k^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}, \tag{4.3}$$

nakon $s+1$ koraka dobijamo podniz $\{f_n^{(s)}\}$ od $\{f_n^{(s-1)}\}$ takav da odgovarajući podniz $\{a_{sn}^{(s)}\}$ niza $\{a_{(s-1)n}^{(s-1)}\}$ konvergira; uzmimo

$$\lim_{n\to\infty} a_{sn}^{(s)} = a_s. \tag{4.4}$$

Stavimo $f_{i_s} = f_s^{(s)}$, tj. označimo sa f_{i_s} prvi član dobijenog podniza $\{f_n^{(s)}\}$ koji je različit od $\{f_n^{(j)}\}$ za svako $j = 0, 1, \cdots, s-1$.

Na ovaj način smo očito konstruisali podniz $\{f_{i_n}\}$ niza $\{f_n\}$ za koji je

$$f_{i_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}^{(n)} z^k \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4.5}$$

Pri tome, na osnovu opisane konstrukcije, za svako fiksno $n \in \mathbf{N}$ niz $\{a_{kn}^{(k)}\}$ konvergira; uzmimo

$$\lim_{n\to\infty} a_{kn}^{(k)} = a_k \quad \text{za svako fiksno} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4.6}$$

Definišimo funkciju f kao

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{4.7}$$

Kako je zbog (4.3) i (4.4)

$$|a_k| \le A\exp\left(c_k k^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N}, \tag{4.8}$$

na osnovu teoreme 1.2 vidimo da funkcija f pripada prostoru F^p. Još dokažimo da $f_{i_n} \to f$ u F^p kada $n \to \infty$.

Neka je $c > 0$ proizvoljan pozitivan realan broj. Odaberimo nenegativan cijeli broj $k_1 = k_1(c)$ tako da važi

$$c_k < c/2 \quad \text{za svako} \quad k > k_1, \tag{4.9}$$

kao i $k_2 = k_2(c)$ tako da je

$$\sum_{k=k_2+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\right) < \frac{\varepsilon}{4A}. \tag{4.10}$$

Stavimo $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Za svako $k \in \{0, 1, \cdots, k_0\}$ odaberimo $n_k \in \mathbf{N}$ tako da važi

$$(4.11) \qquad |a_{kn}^{(n)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2(k_0+1)} \exp\left(ck^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad n > n_k.$$

Stavimo $m = \max\{n_k : k = 0, 1, \cdots, k_0\}$. Tada na osnovu (4.6), (4.7), (4.9), (4.10) i (4.11) dobijamo da za svako $n > m$ važi

$$\begin{aligned}
\|f_{i_n} - f\|_{p,c} &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{kn}^{(n)} - a_k| \exp\left(-ck^{1/(p+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{k_0} |a_{kn}^{(n)} - a_k| \exp\left(-ck^{1/(p+1)}\right) \\
&+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{kn}^{(n)} - a_k| \exp\left(-ck^{1/(p+1)}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(k_0+1)}(k_0+1) + 2A\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \exp\left((c_k - c)k^{1/(p+1)}\right)\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2A\left(\sum_{k=k_2+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{2}k^{1/(p+1)}\right)\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $f_{i_n} \to f$ u prostoru $(F^p, \|\cdot\|_{p,c})$. Otuda i zbog proizvoljnosti $c > 0$ zaključujemo da $f_{i_n} \to f$ u prostoru F^p. Dakle, E je predkompaktan podskup od F^p. Time je teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 4.2. *Neka je E podskup od N^p. Tada je E slabo ograničen podskup od N^p ako i samo ako postoji konstanta $A > 0$ koja zavisi o E i niz $\{c_n\}$ pozitivnih brojeva tako da važi $c_n \downarrow 0$ i*

$$|a_n| \leq A \exp\left(c_n n^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E.$$

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz teoreme 4.1 i činjenice da je u svakom lokalno konveksnom prostoru skup ograničen ako i samo ako je slabo ograničen (vidj. [R1], str. 68).

Napomenimo da se *Montelov prostor* definiše kao Hausdorffov barelisan topološki prostor u kome je svaki zatvoren ograničen skup kompaktan.

Teorema 4.3. *Za svako $p > 1$, prostor F^p je Montelov prostor.*

Dokaz. Kako je na osnovu teoreme 4.1 svaki zatvoren ograničen podskup od F^p kompaktan, a na osnovu teoreme 5.6 prostor F^p je barelisan, to zaključujemo da je F^p

Montelov prostor.

Označimo sa $(N^p)^*$ prostor S_p prethodno definisanih nizova kompleksnih brojeva sa pripadnom topologijom ravnomjerne konvergencije na slabo ograničenim podskupovima od N^p. Napomenimo da se za proizvoljnu nepraznu familiju $\mathcal{A}$ podskupova vektorskog topološkog prostora X, topologija ravnomjerne konvergencije na članovima od $\mathcal{A}$ definiše kao najslabija topologija na X u odnosu na koju je konvergencija jača od ravnomjerne konvergencije na A, za svako $A \in \mathcal{A}$ (vidj. [KN], str. 69). Za proizvoljni podskup S od X, topologija ravnomjerne konvergencije na elementima familije $\mathcal{A} = \{\{t\} : t \in S\}$ naziva se *tačkovna topologija* ili topologija tačkovne konvergencije.

Takodje, označimo sa $(F^p)^*$ prostor S_p sa topologijom indukovanom preko F^p, tj. sa topologijom ravnomjerne konvergencije na ograničenim podskupovima od F^p. Tada imamo slijedeći rezultat.

Teorema 4.4. *Za svako $p > 1$ prostori $(F^p)^*$ i $(N^p)^*$ podudaraju se i u skupovnom i u topološkom smislu.*

Dokaz. Dokaz direktno slijedi iz teorema 4.1 i 4.2.

Za vektorski topološki prostor X, *drugi dual* $(X)^{**}$ od X se definiše kao prostor svih strogo neprekidnih linearnih funkcionala definisanih na $(X)^*$. Pri tome se kanonsko ulaganje I sa prostora X u $(X)^{**}$ definiše u $x \in X$ kao linearan funkcional na $(X)^*$ čija je vrijednost za svako $f \in (X)^*$ jednaka $f(x)$, tj. $I(x)(f) = f(x)$ (vidj. [KN], str. 189). Napomenimo da se X naziva *refleksivnim* ako je kanonsko ulaganje I sa X u $(X)^{**}$ *topološki izomorfizam*, tj. izomorfizam prostora X na $(X)^{**}$ koji je ujedno i *homeomorfizam* u odnosu na pripadne topologije (vidj. [KN], str. 191).

Teorema 4.5. *Za svako $p > 1$ F^p je refleksivan prostor. Stoga je i $(F^p)^*$ refleksivan prostor.*

Dokaz. Dokaz prvog tvrdjenja neposredno slijedi iz teoreme 4.3 i činjenice da je svaki Montelov prostor refleksivan (vidj. [KN], str. 196). Drugo tvrdjenje slijedi iz prvog tvrdjenja i činjenice da je dual refleksivnog prostora u odnosu na pripadnu strogu topologiju takodje refleksivan (vidj. [KN], str. 194, 20.7 (i)).

Teorema 4.6. *Za svako $p > 1$ važi $(N^p)^{**} = (F^p)^{**} = F^p$.*

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz teorema 4.4 i 4.5.

3.5. Konvergencija Fourierovih redova u prostorima $(N^p, \mathcal{H}^p)$

Teorema 5.1. *Taylorov red svake funkcije $f \in F^p$ $(1 < p < \infty)$ konvergira ka* *toj funkciji u odnosu na metričku topologiju ρ_p datom sa (3.1). S druge strane, to nije slučaj za inicijalnu metričku topologiju d_p na N^p; odnosno postoje funkcije iz N^p čiji Taylorov red ne konvergira pripadnim funkcijama u odnosu na metriku d_p.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu funkciju $f \in F^p$ sa Taylorovim razvojem $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, čiju ćemo n-tu parcijalnu sumu označavati sa f_n. Za proizvoljno fiksno $c > 0$ na osnovu teoreme 1.2 možemo odabrati $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za neku pozitivnu konstantu c_1 važi

$$|a_k| \leq c_1 \exp\left(\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\right) \quad \text{za svako} \quad k > n_0.$$

Odaberimo još $n_1 \in \mathbf{N}$ tako da važi

$$\exp\left(\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\right) \geq k^2 \quad \text{za svako} \quad k \geq n_1.$$

Stavljajući $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, tada koristeći gornje dvije ocjene, na osnovu (1.3) dobijamo

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_c &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\left(-ck^{1/(p+1)}\right) \\
&\leq c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\right) \leq c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{za svako} \quad n \geq n_2.
\end{aligned}$$

Odavde neposredno slijedi $\|f_n - f\|_c \to 0$ kada $n \to \infty$. Stoga, zbog proizvoljnosti $c > 0$ zaključujemo da $\rho_p(f_n, f) \to 0$ kada $n \to \infty$, tj. $f_n \to f$ u F^p, čime je prvo tvrdjenje teoreme dokazano.

Za dokaz drugog tvrdjenja razmotrimo funkciju $f(z) = 1/(1-z)$, $z \in D$. Tada na osnovu ([1], str. 14, primjer 1) f pripada svakom prostoru N^p, $p > 1$. Kako je $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ n-ta parcijalna suma Taylorovog razvoja funkcije f, to za svako $\theta \in (0, 2\pi)$ važi

$$\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

odakle dobijamo

$$(d_p(f_n, f))^p = \int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right) \frac{d\theta}{2\pi} > 0.$$

Dakle, Taylorov red funkcije $f(z)$ ne konvergira funkciji $f(z)$ u prostoru (N^p, d_p). Time je teorema dokazana.

Posljedica 5.2. *Konvergencija u odnosu na metriku d_p na N^p je strogo jača od iste u odnosu na metriku ρ_p.*

Dokaz. Da je d_p-konvergencija jača od indukovane ρ_p-konvergencije na N^p slijedi neposredno iz teoreme 1.5 (b). Činjenica da te konvergencije nisu jednake (ekvivalentne) slijedi iz teoreme 5.1.

Posljedica 5.3. *Za svako $p > 1$ N^p je pravi podskup od F^p. Dakle, postoji funkcija čiji Taylorovi koeficijenti a_k zadovoljavaju uslov $a_k = O\left(\exp\left(o\left(k^{1/(p+1)}\right)\right)\right)$, a koja ne pripada prostoru N^p.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.5 (a) važi $N^p \subseteq F^p$. Razmotrimo identično preslikavanje j sa metričkog prostora (N^p, d_p) u metrički prostor (F^p, ρ_p). Na osnovu teoreme 5.2 j je neprekidno preslikavanje. Ukoliko bi bilo $N^p = F^p$, tada bi j bila bijekcija pripadnih F-prostora. Stoga, na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju (vidj. [R1], str. 60, posljedica 2.12) zaključujemo da je j otvoreno preslikavanje. Drugim riječima, to znači da je inverzno preslikavanje j^{-1} neprekidno, što povlači da metričke topologije d_p i ρ_p moraju biti jednake. To na osnovu posljedice 5.2 daje kontradikciju. Stoga je $N^p \neq F^p$ za svako $p > 1$. Konačno, uzimajući funkciju $f \in F^p \setminus N^p$, na osnovu teoreme 1.2 (b) njeni Taylorovi koeficijenti a_k zadovoljavaju uslov $a_k = O\exp\left(o\left(k^{1/(p+1)}\right)\right)$. Time je teorema dokazana.

Komentar. Iako na osnovu gornje posljedice postoji funkcija $f \notin N^p$ čiji Taylorovi koeficijenti a_k zadovoljavaju uslov $a_k = O\left(\exp\left(o\left(k^{1/(p+1)}\right)\right)\right)$, taj se uslov za klasu N^p na osnovu posljedice 4.7, gl. 2, ne može poboljšati u asimptotskom smislu.

Posljedica 5.4. (teorema 5.2, gl. 2). *Prostor (N^p, d_p) nije lokalno konveksan.*

Dokaz. Ako bi prostor (N^p, d_p) bio lokalno konveksan, tada bi metrička topologija bila Mackeyeva topologija za par $(N^p, (N^p)^*)$. Kako je na osnovu teoreme 3.4 metrička topologija ρ_p zapravo Mackeyeva, to bi zbog njene jedinstvenosti moralo biti $d_p = \rho_p$. To je kontradikcija sa tvrdjenjem posljedice 5.2.

Lokalno konveksni vektorski topološki prostor X naziva se *barelisan* ako svaki zatvoreni, apsolutno konveksni apsorbirajući podskup od X predstavlja okolinu nule u tom prostoru. Pri tome se za pripadnu topologiju na barelisanom prostoru X kaže da je *barelisana*. Napomenimo da je podskup $E \subset X$ *apsolutno konveksan* ako iz $x_i \in E$ za $i = 1, \dots, n$ slijedi da je $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in E$ za svaki izbor skalara a_i takvih da važi $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le 1$. Skup $E \subset X$ naziva se *apsorbirajući* ako za proizvoljni vektor $x \in X$ postoji skalar $\lambda > 0$ takav da važi $x \in \lambda E$. Poznato je da je svaki Banachov prostor barelisan i da je induktivni limes barelisanih prostora takodje barelisan. Osim toga, svaki barelisan prostor je Mackeyev prostor (vidj. [KN], teorema 18.9 (iii), str. 173). Najvažnije svojstvo barelisanih prostora je sadržano u slijedećem rezultatu koji predstavlja jednu od verzija principa ravnomjerne ograničenosti. Napomenimo da za familiju $\mathcal{M}$ funkcija sa topološkog prostora X u vektorski topološki prostor Y kažemo da je *podjednako neprekidna* u tački $x \in X$ ako i samo ako za svaku okolinu U od 0 u Y postoji okolina V od x u X tako da je $(f(t) - f(x)) \in U$ za svako $t \in V$ i za svako $f \in \mathcal{M}$. Kažemo da je familija $\mathcal{M}$ podjednako neprekidna ako je podjednako neprekidna u svakoj tački $x \in X$ (vidj. [KN], str. 73).

Teorema 5.5. ([Köt], str. 141). *Metrizabilan vektorski topološki prostor X je barelisan ako i samo ako svaki po tačkama ograničen niz neprekidnih linearnih operatora sa X u proizvoljni F-prostor obrazuje podjednako neprekidnu familiju.*

Za neposrednu posljedicu gornje teoreme dobijamo slijedeći rezultat.

Teorema 5.5'. ([KN], str. 171, 18.7). *Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih linearnih funkcionala na barelisanom prostoru X, koja je ograničena u odnosu na topologiju tačkovne konvergencije na X. Tada je familija $\mathcal{F}$ podjednako neprekidna.*

Teorema 5.6. *Helsonova topologija $\mathcal{H}^p$, a samim tim i metrička topologija ρ_p na N^p su barelisane.*

Dokaz. Kako je po definiciji lokalno konveksni topološki prostor $(N^p, \mathcal{H}^p)$ induktivni limes izvjesnih Hilbertovih prostora $H^2(w)$, taj je prostor barelisan (vidj. [KN]).

Za funkciju f iz prostora N^p, ovdje i nadalje pisaćemo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$, tj. sa $\hat{f}(k)$ ćemo označavati k-ti Taylorov koeficijent funkcije f. Za topologiju τ na prostoru N^p kažemo da je *Szegöova* ako je za svaki nenegativni cijeli broj k funkcional

$$f \mapsto \hat{f}(k), \quad f \in N^p,$$

neprekidan na topološkom prostoru (N^p, τ).

Teorema 5.7. *Neka je τ topologija na N^p koja je jača od topologije ravnomjerne konvergencije na kompaktnim podskupovima jediničnog kruga D. Tada je τ Szegöova topologija. Posebno, metričke topologije d_p i ρ_p, a samim tim i Helsonova topologija $\mathcal{H}^p$ su Szegöove.*

Dokaz. Uzmimo da je $f \in N^p$ i $\{f_n\}$ niz u N^p tako da $f_n \to f$ u odnosu na topologiju τ. Stavimo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ i $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k$. Kako po pretpostavci niz $\{f_n\}$ ujedno konvergira ka f ravnomjerno na zatvorenim krugovima $|z| \leq r < 1$, neposredno slijedi da za svako k $a_k^{(n)} \to a_k$ kada $n \to \infty$. To znači da je τ Szegöova topologija.

Slijedeći rezultat je N^p-analogon teoreme 2.1 iz [Mc2] koja se u istoj formulaciji odnosi na prostor Smirnova N^+.

Teorema 5.8. *Neka je τ barelisana Szegöova topologija na prostoru N^p. Tada su slijedeća tvrdjenja ekvivalentna.*

(i) $\tau = \mathcal{H}^p$.

(ii) $\tau = \rho_p$.

(iii) *Taylorov (Fourierov) red svake funkcije iz N^p konvergira u prostoru (N^p, τ).*

Dokaz. (ii)$\Leftrightarrow$(i) slijedi neposredno iz teoreme 3.4.

(i)$\Rightarrow$(iii) Neka je

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in N^p.$$

Za svako $m \in \mathbf{N}$ stavimo

$$S_m = m \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k. \tag{5.1}$$

Neka je ϕ bilo koji funkcional iz duala $(N^p, \mathcal{H}^p)^*$. Kako je na osnovu teoreme 3.4 $(N^p, \mathcal{H}^p)^* = (N^p, d_p)^*$, to na osnovu teoreme 3.3 zaključujemo da postoje pozitivne konstante c i C_1 takve da važi

$$|\phi(z^k)| \leq C_1 \big(\exp\big(-ck^{1/(p+1)}\big)\big) \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.2}$$

Na osnovu teoreme 1.2 (ii), gl. 2, postoji $m_0 \in \mathbf{N}$ i $C_2 > 0$ tako da važi

$$|a_k| \leq C_2 \exp\Big(\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\Big) \quad \text{za svako} \quad k \geq m_0. \tag{5.3}$$

Odaberimo $m_1 \in \mathbf{N}$ takvo da važi

$$\exp\Big(\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\Big) \geq k^3 \quad \text{za svako} \quad k \geq m_1. \tag{5.4}$$

Stavljajući $m_2 = \max\{m_0, m_1\}$, na osnovu (5.1)-(5.4) za svako $m \geq m_2$ neposredno dobijamo

$$\begin{aligned}
|\phi(S_m)| &= m \Big| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \phi(z^k) \Big| \leq m \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| |\phi(z^k)| \\
&\leq mC_1C_2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{c}{2} k^{1/(p+1)}\Big) \leq mC_1C_2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \\
&\leq C_1C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C_1C_2C_3 = C,
\end{aligned}$$

gdje konstanta C ne zavisi od m. Odavde vidimo da je skup

$$\{\phi(S_m)\}_{m=0}^{\infty}$$

ograničen, te je stoga skup $\{(S_m)\}_{m=0}^{\infty}$ slabo ograničen. Kako je $(N^p, \mathcal{H}^p)$ lokalno konveksan prostor, na osnovu ([R1], str. 68) zaključujemo da $\{(S_m)\}_{m=0}^{\infty}$ mora biti ujedno ograničen i u prostoru $(N^p, \mathcal{H}^p)$. Dakle, $(1/m)S_m \to 0$ u prostoru $(N^p, \mathcal{H}^p)$ kada $m \to \infty$, što je na osnovu (5.1) ekvivalentno sa

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k \to g \quad \text{kada} \quad m \to \infty,$$

u prostoru $(N^p, \mathcal{H}^p)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Pretpostavimo da je ϕ iz $(N^p, \tau)^*$ i stavimo $\phi(z^k) = \alpha_k$. Ako funkcija $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ pripada prostoru N^p, tada imamo

$$\begin{aligned}\phi(g) &= \phi\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_k.\end{aligned}$$

Prema tome, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k$ konvergira za svaku funkciju $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in N^p$. Stoga, na osnovu Banach-Steinhausove teoreme (vidj. [W], 21, 9-3.7) zaključujemo da ϕ pripada dualu $(N^p, \mathcal{H}^p)^*$, što povlači $(N^p, \tau)^* \subseteq (N^p, \mathcal{H}^p)^*$.

Obratno, uzimajući u obzir da je τ barelisana i Szegöova topologija, opet primjenjujući istu Banach-Steinhausovu teoremu dobijamo da je $(N^p, \mathcal{H}^p)^* \subseteq (N^p, \tau)^*$. Stoga mora biti $(N^p, \tau)^* = (N^p, \mathcal{H}^p)^*$. Dakle, topologija τ koja je po pretpostavci barelisana, indukuje isti dual na N^p kao Mackeyeva topologija $\mathcal{H}^p$. Stoga je na osnovu teoreme 2.7 i τ Mackeyeva topologija, pa zbog jedinstvenosti Mackeyeve topologije (vidj. teoremu 2.5) mora biti $\tau = \mathcal{H}^p$. Time je teorema u potpunosti dokazana.

3.6. Asimptotska verzija Szegöove teoreme

Označimo sa $\mathcal{W}$ klasu svih nenegativnih i u Borelovom smislu mjerljivih funkcija w na jediničnoj kružnici T tako da su w i $|\log w|$ integrabilne na T, tj. za koje važe uslovi

$$\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty, \tag{6.1}$$

i

$$\int_0^{2\pi} \left|\log\left(w(e^{i\theta})\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty,$$

Nenegativnu funkciju w na T za koju važi samo (6.1) zvaćemo *težinskom*. Napomenimo da za svako $w \in \mathcal{W}$ označavamo sa $H^2(w)$ težinski Hardyjev prostor (sa težinom w) koji se može identifikovati do na izomorfizam sa zatvorenjem skupa svih analitičkih polinoma u Lebesgueovom prostoru $L^2(w\, d\theta)$.

Neka $\mathcal{P}$ označava prostor svih polinoma nad C. Tada se na osnovu čuvene Szegöove teoreme (vidj. teorema 5.1, gl. 5) linearan funkcional $P \mapsto P(0)$ $(P \in \mathcal{P})$, može po neprekidnosti proširiti na cijeli prostor $H^2(w)$ ako i samo ako je $w \in \mathcal{W}$. U tom slučaju, lako se dokazuje da norme tih funkcionala imaju slabiji rast od e^{cn} za bilo koju pozitivnu konstantu c. J. E. McCarthy u radu ([Mc2], teorema 3.1) dokazuje da ta granica može biti zamijenjena sa $e^{c\sqrt{n}}$, i da ona ne može u asimptotskom smislu biti popravljena generalno za $w \in \mathcal{W}$. Istaknimo da se ta ocjena može popraviti za neke posebne težinske funkcije w; npr. $w = 1$. Teorema 6.3 predstavlja generalizaciju tog rezultata za jednu užu klasu težinskih funkcija od klase $\mathcal{W}$. U vezi s tim, za svako

$p \geq 1$ označimo sa $\mathcal{W}^p$ klasu svih nenegativnih i u Borelovom smislu mjerljivih funkcija w na jediničnoj kružnici T tako da su funkcije w i $|\log w|^p$ integrabilne na T. Uočimo da važi $\mathcal{W}^1 = \mathcal{W}$ i $\mathcal{W}^p \subset \mathcal{W}^q$ za $p > q \geq 1$. Osim toga, očito funkcija $w \in \mathcal{W}$ pripada klasi $\mathcal{W}^p$ ako i samo ako važi

$$\int_0^{2\pi} \left|\log\left(w(e^{i\theta})\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

Lema 6.1. *Težinska funkcija w pripada klasi $\mathcal{W}^p$ ako i samo ako postoji (vanjska) funkcija F iz skupa $H^2 \bigcap (N^p)^{-1}$ za koju važi $|F^*(e^{i\theta})|^2 = w(e^{i\theta})$ skoro svuda na T.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $w \in \mathcal{W}^p$. Definišimo vanjsku funkciju F kao

$$F(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\sqrt{w(e^{it})}\,\frac{dt}{2\pi}\right), \quad z \in D.$$

Tada na osnovu leme 2.1 F pripada skupu $(N^p)^{-1}$, a kako je $\sqrt{w} \in L^2(T)$, na osnovu faktorizacione teoreme 1.5 (d), gl. 1, vidimo da F pripada Hardyjevom prostoru H^2. Obrnuto, pretpostavimo da postoji funkcija F iz $H^2 \bigcap (N^p)^{-1}$ za koju važi $|F^*(e^{i\theta})|^2 = w(e^{i\theta})$ skoro svuda na T. Tada je na osnovu leme 6.1 F vanjska funkcija za koju je $\log|F^*| \in L^p(T)$. To znači da važi $\log w \in L^p(T)$, odnosno $w \in \mathcal{W}^p$. Time je lema dokazana.

Lema 6.2. *Topološki dual od $(N^p, \mathcal{H}^p)$ sastoji se od svih funkcionala koji pripadaju dualu svakog prostora $H^2(w)$ $(w \in \mathcal{W}^p)$.*

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz leme 6.1 i reprezentacije od N^p date preko (2.2), teorema 2.2.

Teorema 6.3. *Neka je w težinska funkcija iz $\mathcal{W}^p$ za neko $p > 1$ i neka je $c > 0$ proizvoljna konstanta. Tada postoji pozitivna konstanta C_1 koja zavisi samo od p takva da važi*

$$\sup_{\int_0^{2\pi} |p|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} \leq 1} |\hat{p}(n)| \leq C_1 e^{cn^{1/(p+1)}}, \tag{6.2}$$

gdje se supremum uzima u skupu analitičkih polinoma p. Osim toga, gornja granica je najbolja u smislu da $e^{cn^{1/(p+1)}}$ ne može biti zamijenjeno sa $e^{c_n n^{1/(p+1)}}$ ni za jedan pozitivan niz $\{c_n\}$ koji konvergira nuli.

Dokaz. Definišimo niz linearnih funkcionala $\{f_n\}$ na skupu svih polinoma $\mathcal{P}$ kao

$$f_n(z^k) = \hat{f}_n(k) = \delta_{nk} e^{-cn^{1/(p+1)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je δ_{nk} Kroneckerov simbol (tj. $\delta_{nn} = 1$ za svako $n \in \mathrm{N}$, a $\delta_{nk} = 0$ za $n \neq k$). Tada se na osnovu teorema 3.3 i 3.4 , svaki funkcional f_n može po linearnosti i neprekidnosti proširiti na cijeli prostor $(N^p, \mathcal{H}^p)$, i pri tome za svaku funkciju $f \in N^p$ sa razvojem $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ važi

$$(6.3) \qquad f_n(f) = f_n(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta_{nk} e^{-cn^{1/(p+1)}} = a_n e^{-cn^{1/(p+1)}}.$$

Kako na osnovu teoreme 1.2 (ii), gl. 2, postoji konstanta $c' > 0$ koja ovisi o f takva da za Taylorove koeficijente a_n od f važi $|a_n| \le c' e^{\frac{c}{2} n^{1/(p+1)}}$ za svako $n = 1, 2, \ldots$, iz (6.3) dobijamo

$$|f_n(f)| \le c' e^{-\frac{c}{2} n^{1/(p+1)}} \quad \text{za svako} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Odavde vidimo da je niz funkcionala $\{f_n\}$ po tačkama ograničen na N^p, pa kako je na osnovu teoreme 5.6 $(N^p, \mathcal{H}^p)$ barelisan prostor, na osnovu teoreme 5.5' zaključujemo da niz $\{f_n\}$ obrazuje podjednako neprekidnu familiju. To znači da postoji okolina nule U u $(N^p, \mathcal{H}^p)$ takva da je $|f_n(g)| < 1$ za svako $g \in U$ i za svaki funkcional f_n. Za proizvoljnu težinsku funkciju $w \in \mathcal{W}$, $U \cap H^2(w)$ sadrži neku otvorenu loptu oko nule; uzmimo radijusa ε. Stavljajući $C_1 = 1/\varepsilon$, otuda neposredno slijedi

$$\sup_{\int_0^{2\pi} |p|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} \le 1} |\hat{p}(n)| \le C_1 e^{cn^{1/(p+1)}},$$

što predstavlja relaciju (6.2).

Da je gornja granica najbolja moguća, slijedi neposredno iz činjenice (vidj. posljedicu 4.7, gl. 2) da za svaki pozitivan niz $\{c_n\}$ realnih brojeva takav da $c_n \downarrow 0$ postoji funkcija f iz N^p, a samim tim i iz nekog prostora $H^2(w)$, za čije Taylorove koeficijente $\hat{f}(n)$ važi $\hat{f}(n) \ne O\left(e^{c_n n^{1/(p+1)}}\right)$.

Komentar. Neka je F proizvoljna vanjska funkcija, pri čemu je Taylorov razvoj od $1/F$ $1/(F(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$. Tada teorema 3.8 iz [Mc3] tvrdi da je lijeva strana od (6.2) sa $|F^*|^2$ umjesto w, jednaka $\left[\sum_{j=0}^{n} |\alpha_j|^2\right]^{1/2}$. Primijetimo da je ta ocjena kvalitativno poboljšanje teoreme 3.1 iz [Mc2].

Komentar. Napomenimo da u gl. 5 formulišemo i dokazujemo teoremu 5.2 koja predstavlja logaritamsku verziju Szegöove teoreme 5.1. Ta teorema se odnosi na širu od $\mathcal{W}$ klasu pozitivnih na T funkcija w za koje važi $\log^+ w \in L^p(T)$ $(1 \le p < \infty)$.

3.7. Množitelji prostora $\left(H^2(w)\right)^*$ i asimptotska verzija Helson-Szegöove teoreme

Na osnovu teorema 3.3 i 3.4 topološki dual od N^p u odnosu na pripadnu Helsonovu topologiju $\mathcal{H}^p$ može se identifikovati sa klasom $\Lambda_p^{\infty}(D)$ holomorfnih na D funkcija čiji Taylorovi koeficijenti a_n imaju oblik $O\left(e^{-cn^{1/(p+1)}}\right)$ za neko $c > 0$. Za proizvoljnu težinsku funkciju $w \in \mathcal{W}^1$, označimo sa $(H^2(w))^*$ dual prostora $H^2(w)$. Za svako $f \in$

$(H^2(w))^*$ pisaćemo $f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$. Pri tome za svaki polinom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, djelovanje funkcionala f na p dato je sa

$$< p, f > := \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})}\, d\theta = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\hat{f}(k)}.$$

Pri tome je očito $< z^k, f > = \overline{\hat{f}(k)}$.

Kažemo da je funkcija g holomorfna na D *množitelj* od $(H^2(w))^*$ ako za svaki funkcional f iz $(H^2(w))^*$, funkcija gf takodje pripada dualu $(H^2(w))^*$. Teorema 3.2 iz [Mc2] tvrdi da se skup univerzalnih množitelja svih duala $(H^2(w))^*$, kada w pripada klasi $\mathcal{W}^1$, upravo podudara sa skupom svih holomorfnih na D funkcija za čije Taylorove koeficijenti a_n važi $a_n = O\left(e^{-c\sqrt{n}}\right)$ za neko $c > 0$. Taj se skup zapravo može poistovjetiti sa dualom prostora Smirnova N^+ (vidj. [Y3], teorema 3). Slijedeća teorema predstavlja N^p-analogon toga rezultata. Napomenimo da se njegov dokaz zasniva na teoremi 7.2 koja predstavlja asimptotsku verziju Helson-Szegöove teoreme.

Teorema 7.1. *Za bilo koji fiksni broj $p > 1$, slijedeći uslovi o funkciji g holomorfnoj na D su ekvivalentni.*

(i) *Funkcija g je množitelj od $(H^2(w))^*$ za svako w iz $\mathcal{W}^p$.*

(ii) *g pripada dualu od N^p u odnosu na topologiju $\mathcal{H}^p$.*

(iii) *Taylorovi koeficijenti $\hat{g}(n)$ od g zadovoljavaju uslov $\hat{g}(n) = O\left(e^{-cn^{1/(p+1)}}\right)$ za neku pozitivnu konstantu c.*

Dokaz. Radi kraćeg zapisa, u dokazu teoreme, kao i do kraja ovog poglavlja pisaćemo $\int_T F\, d\theta$ umjesto $\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\, d\theta$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) slijedi neposredno iz teorema 3.3 i 3.4.

(i)$\Rightarrow$(ii) Pretpostavimo da je g množitelj od $(H^2(w))^*$ za svako w iz $\mathcal{W}^p$. Kako je očito 1 u svakom dualu, tada i g kao množitelj mora biti u svakom dualu od $(H^2(w))^*$ za svako w iz $\mathcal{W}^p$. Stoga, na osnovu leme 6.2 zaključujemo da g pripada dualu od N^p u odnosu na topologiju $\mathcal{H}^p$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Fiksirajmo $w \in \mathcal{W}^p$ i $f \in H^2(w)^*$. Po pretpostavci za Taylorove koefici- fici-
jente funkcije g važi $|\hat{g}(k)| \le C_1 e^{-ck^{1/(p+1)}}$ za neke pozitivne konstante c i C_1. Treba dokazati da fg pripada dualu $H^2(w)^*$, odnosno da postoji konstanta K takva da za svaki polinom p važi

$$\left| \int_T p\overline{(gf)}\, d\theta \right|^2 \le K \int_T |p|^2 w\, d\theta. \tag{7.1}$$

Stavljajući $p(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k z^k$, lijeva strana od (7.1) postaje

$$\begin{aligned} \left| \int_T p\overline{(gf)}\, d\theta \right|^2 &= \sum_{j,k=0}^{s} a_k \bar{a}_j \overline{\widehat{gf}(k)} \widehat{gf}(j) \\ &= \sum_{j,k=0}^{s} a_k \bar{a}_j \overline{\sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}(l) \hat{f}(k-l)} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m) \hat{f}(j-m) \qquad (7.2) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\hat{g}(l)}\hat{g}(m)\sum_{j,k=0}^{s} a_k\bar{a}_j\overline{\hat{f}(k-l)}\hat{f}(j-m),$$

pri čemu je zamjena indeksa u gornjim sumama korektna zbog toga što je $\hat{f}(k-l)=0$ za $l>k$, pa su pripadne sume konačne.

Lako se provjeri da važi

$$\sum_{k=0}^{s} a_k\overline{\hat{f}(k-l)} = \int_T \bar{z}^l p(z)\bar{f}(z)\,d\theta. \tag{7.3}$$

Ako definišemo broj $k(w,l,f)$ kao

$$k(w,l,f) = \sup\left\{\left|\int_T \bar{z}^l p(z)\bar{f}(z)\,d\theta\right| : p \quad \text{je polinom za koji je} \int_T |p|^2 w\,d\theta \le 1\right\}, \tag{7.4}$$

tada na osnovu (7.2) i (7.3) dobijamo

$$\left|\int_T p\overline{(gf)}\,d\theta\right|^2 \le \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\hat{g}(l)}\hat{g}(m)k(w,l,f)k(w,m,f)\int_T |p|^2 w\,d\theta. \tag{7.5}$$

Izraz $\bar{z}^l p(z)$ se očito može prikazati kao $\bar{z}^l p(z) = F(z) + P(z)$, gdje je F polinom u z, a P polinom u $\bar{z}$ bez konstantnog člana čiji je stepen manji ili jednak od l u odnosu na varijablu $\bar{z}$. Tada na osnovu (7.4) važi

$$\begin{aligned}(k(w,l,f))^2 &= \sup_P \frac{\left|\int_T (F+P)\bar{f}\,d\theta\right|^2}{\int_T |F+P|^2 w\,d\theta}\\ &= \sup_P \frac{\left|\int_T F\bar{f}\,d\theta\right|^2}{\int_T |F+P|^2 w\,d\theta},\end{aligned}$$

gdje se supremum uzima po svim polinomima P u $\bar{z}$ bez konstantnog člana čiji je stepen manji ili jednak od l u odnosu na varijablu $\bar{z}$. Kako je po pretpostavci $f \in H^2(w)^*$, to postoji pozitivna konstanta C_2 takva da važi

$$\begin{aligned}|<F,f>|^2 &= \left|\int_T F\bar{f}\,d\theta\right|^2 \le C_2\left(\|F\|_{H^2(w)}\right)^2\\ &= C_2\int_T |F|^2 w\,d\theta,\end{aligned}$$

pa na osnovu prethodne relacije dobijamo

$$(k(w,l,f))^2 \le C_2 \sup_P \frac{\int_T |F|^2 w\,d\theta}{\int_T |F+P|^2 w\,d\theta}. \tag{7.6}$$

Odavde i na osnovu teoreme 7.2 dobijamo

$$(k(w,l,f))^2 \le C_2C_3e^{cl^{1/(p+1)}}. \tag{7.7}$$

Kako je po pretpostavci $|\hat{g}(k)| \leq C_1 e^{-ck^{1/(p+1)}}$ za pozitivnu konstantu C_1 i za svako $k \in \mathbf{N}$, na osnovu (7.7) neposredno dobijamo

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\hat{g}(l)}\hat{g}(m)k(w,l,f)k(w,m,f)$$

$$\leq (C_1)^2 C_2 C_3 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-cl^{1/(p+1)}} e^{-cm^{1/(p+1)}} e^{(c/2)l^{1/(p+1)}} e^{(c/2)m^{1/(p+1)}}$$

$$= (C_1)^2 C_2 C_3 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(c/2)l^{1/(p+1)}} e^{-(c/2)m^{1/(p+1)}} = C_4 < +\infty,$$

jer je dvostruka suma na desnoj strani očito konačna. Konačno, na osnovu gornje nejednakosti iz (7.5) neposredno slijedi

$$\left| \int_T p\overline{(gf)}\, d\theta \right|^2 \leq C_4 \int_T |p|^2 w\, d\theta.$$

Dakle, fg pripada dualu $(H^2(w))$, čime je teorema dokazana.

Još preostaje dokazati teoremu 7.2 koja predstavlja uopštenje leme 3.3 iz [Mc2]. Ta lema zapravo predstavlja asimptotsku verziju Helson-Szegöove teoreme date u [HS]. Teorema 7.2 daje neophodne i dovoljne uslove da težinska funkcija $w \in W$ zadovoljava uslov

$$\sup_{F,P} \frac{\int_T |F|^2 w\, d\theta}{\int_T |F+P|^2 w\, d\theta} < +\infty,$$

gdje je F analitički polinom, a P koanalitički polinom bez konstantnog člana. Taj Helson-Szegöov uslov se sastoji u činjenici da se funkcija $\log(w)$ može prikazati u obliku zbira $u + \tilde{v}$, gdje funkcije u i v pripadaju prostoru $L^\infty(T)$, $\|v\|_\infty < \pi/2$, a $\tilde{v}$ je harmonijski konjugovana funkcija od v. Za težine w koje ne zadovoljavaju Helson-Szegöov uslov slijedeća teorema zapravo može biti smatrana asimptotskom verzijom Helson-Szegöove teoreme.

Teorema 7.2. *Pretpostavimo da je $p > 1$ i w težinska funkcija iz $\mathcal{W}^p$. Neka je l prirodan broj i $c > 0$ proizvoljna konstanta. Tada postoji konstanta C_3, koja zavisi od c, p i w, tako da za svaki analitički polinom F i za svaki koanalitički polinom P bez konstantnog člana čiji je stepen l važi*

$$\frac{\int_T |F|^2 w\, d\theta}{\int_T |F+P|^2 w\, d\theta} \leq C_3 e^{cl^{1/(p+1)}}.$$

Dokaz. Bez smanjenja opštosti, možemo uzeti da je $\int_T |F|^2 w\, d\theta = 1$, $\int_T |F + P|^2 w\, d\theta \leq \frac{1}{4}$, kao i da je $\int_T |P|^2 w\, d\theta \geq \frac{1}{4}$.

Stavimo $P(z) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \bar{z}^k$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\left(\|P\|_{H^2(w)}\right)^2 &= \int_T |P|^2 w \, d\theta = \sum_{j,k=1}^{l} \alpha_k \bar{\alpha}_j \int_T z^{k-j} w \, d\theta \\
&\leq \sum_{j,k=1}^{l} |\alpha_k||\alpha_j| \int_T w \, d\theta = \sum_{j,k=1}^{l} |\alpha_k||\alpha_j| \|w\|_1.
\end{aligned}$$

Dakle, postoji prirodan broj m takav da je $1 \leq m \leq l$ i za koji važi

$$|\alpha_m| \geq \frac{\|P\|_{H^2(w)}}{l\sqrt{\|w\|_1}} \geq \frac{1}{2l\|w\|_1}. \tag{7.8}$$

Očigledno je $\int_T |F + P|^2 w \, d\theta = \int_T |z^l(F + P)|^2 w \, d\theta$ i $z^l(F + P)$ je analitički polinom čijih je prvih l koeficijenata redom jednako $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Kako iz (7.8) vidimo da za koeficijent α_m važi $|\alpha_m| \geq 1/2l\|w\|_1$, na osnovu teoreme 6.3 postoji pozitivna konstanta C_1 takva da važi

$$\int_T |z^l(F + P)|^2 w \, d\theta \geq C_1 e^{-cl^{1/(p+1)}},$$

što na osnovu pretpostavke $\int_T |F|^2 w \, d\theta = 1$ daje

$$\frac{\int_T |F|^2 w \, d\theta}{\int_T |F + P|^2 w \, d\theta} \leq \frac{1}{C_1} e^{cl^{1/(p+1)}}.$$

Time je teorema dokazana.

4. STRUKTURA IDEALA U ALGEBRAMA N^p I F^p

4. Struktura ideala u algebrama N^p i F^p

Kako prostori N^p $(1 < p < \infty)$ obrazuju F-algebre, a samim tim i topološke algebre, interesantno je isražiti strukturu ideala u tim prostorima. Problemi vezani sa tom tematikom su motivisani poznatim odgovarajućim rezultatima koji se odnose na *Banachove algebre*. Medjutim, standardna tehnika korišćena u istraživanjima Banachovih algebri nije primjenljiva generalno za topološke algebre. Stoga će dokazi rezultata dobijenih u ovoj glavi ovisiti isključivo o funkcionalnoj linearno-topološkoj strukturi prostora N^p i pripadnih Fréchetovih omotača F^p, kao i kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (b) za klase N^p.

Poznato je (vidj. [Gam]) da je u Banachovoj algebri svaki multiplikativan linearan funkcional neprekidan i da je svaki maksimalan ideal jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala. U prvom poglavlju pokazujemo da je u prostorima N^p svaki netrivijalan multiplikativan linearan funkcional ujedno i neprekidan, ali da maksimalni ideali u N^p ne moraju biti jezgre multiplikativnih linearnih funkcionala. Nadalje, u drugom poglavlju pokazujemo da ako je $\mathcal{M}$ netrivijalan prost ideal od N^p koji nije gust podskup od N^p, tada je $\mathcal{M}$ jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala na N^p. Kao posljedicu dobijamo činjenicu da je svaki zatvoren maksimalan ideal jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala. Ti rezultati su motivisani odgovarajućim rezultatima dobijenim za klasu Smirnova N^+ u [RS1], odnosno za klasu M u [K1]. Istaknimo da u njihovim dokazima koristimo tzv. *radijalno-maksimalnu metriku* ρ_p uvedenu u šestoj glavi ovog rada, za koju je dokazano da je ekvivalentna sa inicijalnom metrikom d_p.

U narednom poglavlju pokazujemo da su prsteni N^p zapravo *prsteni tipa Nevanlinna-Smirnova* u smislu definicije R. Mortinija uvedene u [Mor]. Kao posljedice te činjenice i rezultata iz [Mor] dobijenih za proizvoljne prstene tipa Nevanlinna-Smirnova, dobijamo tri rezultata koji daju neophodne i dovoljne uslove da bi dati ideal algebre H^∞ bio trag nekog ideala u algebri N^p. Osim toga uočavamo da je svaki prsten N^p $(1 < p < \infty)$ *koherentan* u smislu da je presjek bilo koja dva konačno generisana ideala prstena N^p takodje konačno generisan ideal od N^p. Nadalje, u četvrtom poglavlju zapažamo da svaka algebra N^p ima *svojstvo korone*, koje je inače za algebre H^∞ dokazao Carleson (vidj. [D2] ili [Ko]). U istom poglavlju još dokazujemo dvije teoreme koje se odnose redom na konačno generisane ideale od H^∞, odnosno od N^p.

U petom poglavlju dajemo karakterizaciju maksimalnih ideala i multiplikativnih linearnih funkcionala algebri F^p $(1 < p < \infty)$. Ti su rezultati, kao i njihovi dokazi analogni istima dobijenim u prvom poglavlju za algebre N^p. Konačno, u šestom poglavlju dajemo karakterizaciju homomorfizama algebri F^p, koja je sasvim analogna odgovarajućoj dobijenom u [Moc] za algebre N^p.

4.1. Multiplikativni linearni funkcionali na prostorima N^p

Za proizvoljnu tačku $\lambda \in D$, definišimo funkcional γ_λ na prostoru N^p kao

$$\gamma_\lambda(f) = f(\lambda), \quad f \in N^p.$$

Očito je γ_λ multiplikativan linearan funkcional na N^p. Na osnovu posljedice 4.5, gl. 2, γ_λ je neprekidan funkcional u odnosu na topologiju od N^p odredjenu metrikom d_p.

Za svako $\lambda \in D$, definišimo

$$\mathcal{M}_\lambda = \{f \in N^p : f(\lambda) = 0\}. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1. *$\mathcal{M}_\lambda$ je zatvoren maksimalan ideal od N^p za svako $\lambda \in D$.*

Dokaz. Na osnovu posljedice 4.5, gl. 2, γ_λ je neprekidan funkcional u odnosu na topologiju od N^p odredjenu metrikom d_p. Pošto je $\mathcal{M}_\lambda$ jezgra neprekidnog multiplikativnog linearnog funkcionala na N^p, slijedi da je $\mathcal{M}_\lambda$ zatvoren maksimalan ideal od N^p.

Slijedeći rezultat karakteriše multiplikativne linearne funkcionale na N^p.

Teorema 1.2. *Ako je γ netrivijalan multiplikativan linearan funkcional na N^p, tada postoji $\lambda \in D$ tako da je $\gamma(f) = f(\lambda)$ za svako $f \in N^p$, te je stoga γ neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Stavimo $\lambda = \gamma(z)$. Tada je $\gamma(z-\lambda) = 0$. Ako pretpostavimo da je $\lambda \notin D$, tada je na osnovu ([1], str. 14, primjer 1) $z - \lambda$ invertibilan element od N^p. Kako je $1 = \gamma(1) = \gamma(f)\gamma(f^{-1})$, slijedi da je $\gamma(f) \neq 0$ za svaki invertibilni element f od N^p. Dakle, mora biti $\lambda \in D$.

Razmotrimo skup $(z-\lambda)N^p = \{(z-\lambda)f(z) : f \in N^p\}$. Ako je $f \in N^p$ takvo da je $f(\lambda) = 0$, tada pošto je N^p algebra, postoji $g \in N^p$ takvo da je $f(z) = (z-\lambda)g(z)$. Stoga je

$$\mathcal{M}_\lambda = (z-\lambda)N^p \subset \ker\gamma, \tag{1.2}$$

gdje je $\ker\gamma$ jezgra funkcionala γ. Na osnovu teoreme 1.1 $\mathcal{M}_\lambda$ je zatvoren maksimalan ideal od N^p. Stoga, na osnovu (1.2) zaključujemo da je $\mathcal{M}_\lambda = \ker\gamma$. Osim toga, γ je neprekidno i $\gamma(f) = f(\lambda)$ za svako $f \in N^p$. Time je teorema dokazana.

Za razliku od Banachovih algebri u kojima je svaki maksimalan ideal jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala (vidj. [Gam]), slijedeće tvrdjenje pokazuje da to nije slučaj sa algebrama N^p.

Teorema 1.3. *Postoji maksimalan ideal $\mathcal{M}$ od N^p koji nije jezgra multiplikativnog linearnog funkcionala.*

Dokaz. Neka je

$$S(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right), \quad z \in D,$$

proizvoljna singularna unutrašnja funkcija. Na osnovu faktorizacione teoreme 1.5 (b), gl. 1, funkcija S nije invertibilan element algebre N^p. Stoga je $1 \notin SN^p = \{Sf : f \in N^p\}$, što povlači da je SN^p pravi ideal od N^p. Na osnovu Zornove leme, postoji maksimalan ideal $\mathcal{M}$ koji sadrži ideal SN^p. Ako bi bilo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$ za neko $\lambda \in D$, tada na osnovu teoreme 1.2 slijedi da je $Sf(\lambda) = 0$ za svako $f \in N^p$. Kako je $S(\lambda) \neq 0$ za svako $\lambda \in D$, dobijamo kontradikciju. Dakle, mora biti $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_\lambda$ za bilo koje $\lambda \in D$. Time je teorema dokazana.

Posljedica 1.4. *Ne postoji norma definisana na prostoru N^p koja indukuje na N^p istu topologiju kao metrika d_p, a u odnosu na koju bi N^p bila Banachova algebra.*

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz teoreme 1.2 i činjenice da se u Banachovoj algebri maksimalan ideal može predstaviti kao jezgra nekog multiplikativnog linearnog funkcionala.

Komentar. Uočimo da posljedicu 1.4 neposredno dobijamo iz činjenice da prostor N^p nije normizabilan na osnovu posljedice 7.3, gl. 2.

4.2. Prosti ideali algebri N^p

Slijedeća teorema daje karakterizaciju prostih idala od N^p koji nisu gusti podskupovi od N^p. U dokazu te teoreme ne možemo koristiti istu metodu kao u dokazu odgovarajuće teoreme za algebru N^+ date u ([RS], teorema 1). Naime, ovdje je dokaz komplikovaniji, jer za razliku od prostora N^+ postoje vanjske funkcije od N^p koje nisu invertibilne u N^p. Istaknimo da dokaz slijedeće teoreme izvodimo koristeći činjenicu da je topološka struktura prostora N^p ujedno indukovana metrikom ρ_p definisanom pomoću (1.6), gl. 6. kao

$$\rho_p(f,g) = \left(\int_0^{2\pi} \log^p(1 + Mf(\theta))\, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \quad f,g \in N^p,$$

gdje je

$$Mf(\theta) = \sup_{0 \le r < 1} |f(re^{i\theta})|.$$

Preciznije govoreći, na osnovu teoreme 3.4, gl. 6 prostori N^p i M^p se podudaraju i u skupovnom i u topološkom smislu. Pri tome ćemo pisati M^p umjesto metričkog prostora (M^p, ρ_p).

Napomenimo da je ideal P komutativnog prstena R *prost*, ako iz $f, g \in R$, $fg \in P$, slijedi da ili f ili g pripada idealu P.

Teorema 2.1. *Neka je $\mathcal{M}$ prost ideal od N^p koji nije identički jednak nuli i koji nije gust podskup od N^p. Tada je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$ za neko $\lambda \in D$.*

Dokaz gornje teoreme se zasniva na slijedećih pet lema.

Lema 2.2. *Neka je $\mathcal{M}$ netrivijalan ideal od $N^p (= M^p)$. Tada $\mathcal{M}$ sadrži ograničenu holomorfnu funkciju na D koja nije identički jednaka nuli.*

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{M}$ i $f \not\equiv 0$. Na osnovu teoreme 1.5 (b), gl. 1, f se može faktorisati kao:

$$f(z) = B(z)S(z)F(z),$$

gdje je B Blaschkeov proizvod pridružen nulama funkcije f, S singularna unutrašnja funkcija i

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f^*(e^{it})|\,dt\right), \quad z \in D,$$

je vanjska funkcija pripadne kanonske faktorizacije funkcije f. Ako stavimo

$$g(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log^+|f^*(e^{it})|\,dt\right), \quad z \in D,$$

tada je očito $g \in N^p$. Štaviše, g je ograničena na D holomorfna funkcija. Pošto je $\mathcal{M}$ ideal od $M^p = N^p$, slijedi da je $fg \in \mathcal{M}$. S druge strane je

$$f(z)g(z) = B(z)S(z)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_O^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log^-|f^*(e^{it})|\,dt\right), \quad z \in D,$$

gdje je $\log^-|x| = \log^+|x| - \log|x|$. Iz gornje faktorizacije vidimo da je $|f(z)g(z)| < 1$ za svako $z \in D$, odnosno $fg \in H^\infty$. Dakle, fg je tražena funkcija.

Lema 2.3. *Pretpostavimo da je $F \in M^p$ takva funkcija da je $F(z) \neq 0$ za svako $z \in D$. Tada postoji niz $\{F_n\}$ funkcija iz N^p takav da je $(F_n)^n = F$ za svako $n \in \mathrm{N}$ i da važi $F_n \to 1$ u prostoru M^p kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Kako se funkcija F ne anulira ni u jednoj tački kruga D, to postoji realna neprekidna funkcija $R(z)$ na D i pozitivna neprekidna funkcija $\Theta(z)$ na D tako da važi

$$F(z) = R(z)e^{i\Theta(z)}, \quad z \in D.$$

Definišimo niz funkcija $\{F_n\}$ kao:

$$F_n(z) = R(z)^{1/n}e^{i(1/n)\Theta(z)}, \quad z \in D. \tag{2.1}$$

Tada je svaka funkcija F_n holomorfna na D i vrijedi $(F_n)^n = F$. Kako je $F \in M^p \subset N$ funkcija koja nije identički jednaka nuli na D, na osnovu teoreme 2.2, gl. 1, F posjeduje radijalne granične vrijednosti koje su različite od nule za skoro svako $e^{i\theta} \in T$.

Fiksirajmo proizvoljno takvo θ. Tada je $R(re^{i\theta})$ pozitivna neprekidna funkcija po r na segmentu $[0,1]$. Stoga postoje pozitivni brojevi l_θ i L_θ za koje važi

$$0 < l_\theta \leq R(re^{i\theta}) \leq L_\theta < \infty, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

$\Theta(re^{i\theta})$ je takodje neprekidna funkcija po r na segmentu $[0,1]$, te je stoga i ograničena na $[0,1]$. Otuda zaključujemo da važi

$$F_n(re^{i\theta}) \to 1 \quad \text{kada} \quad n \to \infty,$$

ravnomjerno po r $(0 \leq r \leq 1)$. Dakle, imajući u obzir da je

$$Mf(\theta) = \sup_{0\leq r<1} |f(re^{i\theta})|,$$

tada slijedi

$$M(F_n - 1)(\theta) \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

za skoro svako $\theta \in [0, 2\pi)$. Na osnovu (2.1) važi

$$\log^+ MF_n(\theta) \leq \frac{1}{n} \log^+ MF(\theta) \leq \log^+ MF(\theta), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}
(\log(1 + M(F_n - 1)(\theta)))^p &\leq (\log(2 + Mf(\theta)))^p \\
&\leq (2\log 2 + \log^+ MF(\theta))^p \\
&\leq 2^{p-1}\left((2\log 2)^p + (\log^+ MF_n(\theta))^p\right) \\
&\leq 2^{p-1}\left((2\log 2)^p + (\log^+ MF(\theta))^p\right), \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Na osnovu gornjih nejednakosti i činjenice da je $F \in M^p$ zaključujemo da je $F_n \in M^p$ za svako $n = 1, 2, \ldots$. Konačno, na osnovu gornje nejednakosti i (2,2), primjenom Lebesgueove teoreme o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\int_0^{2\pi} (\log(1 + M(F_n - 1)(\theta)))^p \frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty,$$

što je ekvivalentno sa $\rho_p(F_n, 1) \to 0$ kada $n \to \infty$. Time je dokaz leme završen.

Slijedeća lema je poznata kao kompleksna maksimalna teorema Hardy- Littlewooda.

Lema 2.4. ([Gar]). *Za svaki realan broj p, $0 < p < \infty$, postoji pozitivna konstanta C_p koja zavisi samo od p takva da za svaku funkciju f holomorfnu na D važi*

$$\int_0^{2\pi} (Mf(\theta))^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq C_p \sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi},$$

gdje je

$$Mf(\theta) = \sup_{0\leq r<1} |f(re^{i\theta})|.$$

Posebno, ako f pripada Hardyjevom prostoru H^p, gornja nejednakost postaje

$$\int_0^{2\pi} (Mf(\theta))^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq C_p \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2.3}$$

Lema 2.5. ([H], str. 66). *Neka je B beskonačan Blaschkeov proizvod sa nulama $\{a_k\}$ i neka je niz funkcija $\{B_n\}$ definisan kao*

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Tada $B_n \to B$ u prostoru H^2, što je ekvivalentno sa

$$\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta}) - B_n(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Lema 2.6. *Neka je B beskonačan Blaschkeov proizvod sa nulama $\{a_k\}$. Stavimo $B(z) = B_n(z) g_n(z)$, gdje je*

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z},$$

i

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Tada $g_n \to 1$ u prostoru M^p kada $n \to \infty$.

Dokaz. Koristeći redom nejednakost $\log(1 + x) \leq x^s/s$ $(0 < s \leq 1,\ x \geq 0)$ ([1], str. 65, lema 1) za $s = 1/p$ i Schwarzovu integralnu nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned}
\rho_p(g_n, 1) &= \left(\int_0^{2\pi} (\log(1 + M(g_n - 1)(\theta)))^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} \\
&\leq p \left(\int_0^{2\pi} M(g_n - 1)(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} \\
&\leq p \left(\int_0^{2\pi} (M(g_n - 1)(\theta))^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2p}.
\end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (2.3) iz leme 2.4 i činjenicu da je $|B_n(e^{i\theta})| = 1$ skoro svuda na T (teorema 1.4, gl. 1), iz gornje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
\rho_p(g_n, 1) &\leq p(C_2)^{1/2p} \left(\int_0^{2\pi} |g_n(e^{i\theta}) - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2p} \\
&= p(C_2)^{1/2p} \left(\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta}) - B_n(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2p}
\end{aligned}$$

Na osnovu leme 2.5, zadnji član u gornjoj nejednakosti konvergira nuli kada $n \to \infty$, što povlači $\rho_p(g_n, 1) \to 0$ kada $n \to \infty$. Dakle, $g_n \to 1$ u prostoru M^p.

Dokaz teoreme 2.1. Pretpostavimo da je $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_\lambda$ za svako $\lambda \in D$. Na osnovu leme 2.2 $\mathcal{M}$ sadrži neku ograničenu funkciju f. Tada se f može faktorisati kao $f = BF$, gdje je B Blaschkeov poizvod pridružen nulama od f, a F je ograničena funkcija bez nula u D. Kako je $\mathcal{M}$ prost ideal, to je ili $F \in \mathcal{M}$, ili $B \in \mathcal{M}$. Uzmimo da je $F \in \mathcal{M}$ i neka je niz $\{F_n\}$ definisan preko (2.1), lema 2.3. Kako je $(F_n)^n = f$ za svako n i uzimajući u obzir da je $\mathcal{M}$ prost ideal, vidimo da je $F_n \in \mathcal{M}$ za svako n. Stoga na osnovu leme 2.3 slijedi da je $1 \in \mathrm{cl}(\mathcal{M})$ (zatvorenje od $\mathcal{M}$ u M^p). Otuda slijedi $\mathrm{cl}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da $\mathcal{M}$ nije gust u M^p. Zato mora biti $B \in \mathcal{M}$. Neka je

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Ako bi bilo $(a_k - z)/(1 - \bar{a}_k z) \in \mathcal{M}$, tada bi važilo

$$\mathcal{M}_{a_k} = \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} M^p \subset \mathcal{M},$$

odakle zbog maksimalnosti ideala $\mathcal{M}_{a_k}$ (vidj. teorema 1.1) slijedi $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{a_k}$. Ta kontradikcija sa polaznom pretpostakom pokazuje da mora biti

$$\frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \notin \mathcal{M}, \quad \text{za svako} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Stoga, uzimajući u obzir da je $\mathcal{M}$ prost ideal, zaključujemo da B mora biti beskonačan Blaschkeov proizvod. Ako stavimo

$$g_n(z) = \prod_{k \geq n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

tada je $g_n \in \mathcal{M}$ opet na osnovu činjenice da je $\mathcal{M}$ prost ideal i da je $B \in M^p$. Na osnovu leme 2.6, $g_n \to 1$ u prostoru M^p kada $n \to \infty$. Dakle, mora biti $1 \in \mathrm{cl}(\mathcal{M})$, što je kontradikcija. Stoga zaključujemo da mora biti $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$, za neko $\lambda \in D$. Time je teorema 2.1 dokazana.

Posljedica 2.7. *Svaki zatvoren maksimalan ideal od $N^p (= M^p)$ je jezgra nekog multiplikativnog linearnog funkcionala na tom prostoru.*

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz teorema 2.1 i 1.1, uzimajući u obzir činjenicu da je svaki maksimalan ideal ujedno i prost.

4.3. Algebre N^p kao prsteni tipa Nevanlinna-Smirnova

Napomenimo da smo u gl. 1 sa H^∞ označili skup svih holomorfnih i ograničenih funkcija na krugu D, a sa N Nevanlinninu klasu. Slijedeći R. Mortinija [Mor], prsten R koji se sastoji od funkcija holomorfnih u D i za koji važi $H^\infty \subset R \subset N$ se naziva prstenom tipa *Nevanlinna–Smirnova* ako se svaka funkcija $f \in R$ može izraziti u obliku g/h, pri čemu g i h pripadaju klasi H^∞ i osim toga h je invertibilan element u R. Na osnovu faktorizacionih teorema 1.3 i 1.5 (a), gl. 1, redom za funkcije iz Nevanlinnine klase N i klase Smirnova N^+ vidimo da su te dvije klase zapravo prsteni navedenog tipa. Ta činjenica opravdava naziv tih prstena. Nadalje, Mortini primjećuje da na osnovu faktorizacije date u [St1] neposredno slijedi da je prsten $F^+ \cap N$ tipa Nevanlinna–Smirnova. Napomenimo da se prostor F^+, koji je Fréchetov omotač od N^+ (vidj. komentar iza teoreme 2.7, gl. 3), sastoji od svih funkcija f holomorfnih u D za koje važi

$$\limsup_{r\to 1}(1-r)\log M(r,f) = 0,$$

gdje je $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ (vidj. [Y5]).

Naime, u [St1] je dokazano da važi $F^+ \cap N = \{f/S_\mu : f \in N^+,\ S_\mu$ je singularna unutrašnja funkcija za koju je μ nenegativna neprekidna singularna mjera$\}$.

Teorema 3.1. *Za svako $p > 1$ N^p je prsten tipa Nevanlinna–Smirnova.*

Dokaz. Neka je f proizvoljna funkcija iz N^p. Kako je $H^\infty \subset N^p \subset N$, dovoljno je dokazati da se f može prikazati u obliku g/h, gdje funkcije g i h pripadaju algebri H^∞, a osim toga h je invertibilan element od N^p. Na osnovu teoreme 1.5 (b), gl. 1, f se može faktorisati kao

$$f(z) = B(z)S(z)F(z), \quad z \in D,$$

pri čemu je B Blaschkeov proizvod u odnosu na nule od f, S singularna unutrašnja funkcija, a F vanjska funkcija za klasu N^p, tj.

$$F(z) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|\,dt\right),$$

gdje je $|\lambda| = 1$, $\log|f^*|$ i $\left(\log^+|f^*|\right)^p$ pripadaju prostoru $L^1(T)$. Uočimo da se F može prikazati u obliku $F = F_1/F_2$, pri čemu su F_1 i F_2 vanjske funkcije definisane kao

$$F_1(z) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log^-|f^*(e^{it})|\,dt\right),$$

odnosno

$$F_2(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\left(-\log^+|f^*(e^{it})|\right)dt\right),$$

Tada su očito F_1 i F_2 ograničene na D vanjske funkcije i osim toga, zbog $\log^+|f^*| \in L^p(T)$, vidimo da je funkcija F_2 invertibilna u N^p. Konačno, ako stavimo $g = BSF_1$

i $h = F_2$, tada je $g \in H^\infty$, pa je $f = g/h$ traženi prikaz funkcije f. Time je dokaz teoreme završen.

Koristeći teoremu 3.1, kanonsku faktorizacionu teoremu za N^p i neke rezultate Mortinija iz [Mor], možemo dobiti neke činjenice o strukturi ideala od N^p vezane za ideale algebre H^∞.

Kažemo da je ideal I algebre H^∞ *trag* ideala J algebre N^p ako važi $I = J \bigcap H^\infty$.

Teorema 3.2. *Ideal I od H^∞ je trag nekog ideala J od N^p ako i samo ako je slijedeći uslov ispunjen:*

(3.1) *Ako je $f \in I$, te ako je F vanjska funkcija za koju je $\log|F^*| \in L^p(T)$, i ako je još $fF \in H^\infty$, tada je $fF \in I$.*

U tom slučaju, J je jedinstven ideal od N^p za koji je $I = J \bigcap H^\infty$ i osim toga vrijedi $J = IN^p$.

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz teoreme 1 iz [Mor] koja se zapravo odnosi na proizvoljni prsten R tipa Nevanlinna–Smirnova. Preciznije, naša teorema je preformulacija navedene teoreme za prsten N^p, s jedinom razlikom što je uslov $F \in R^{-1}$ zamijenjen sa uslovom da je F vanjska funkcija za koju je $\log|F^*| \in L^p(T)$. To možemo učiniti imajući u vidu da su takve vanjske funkcije upravo invertibilni elementi iz N^p (vidj. lema 2.1, gl.3).

Posljedica 3.3. *Pretpostavimo da je I ideal od H^∞ takav da je zadovoljen uslov:*

(3.2) *$f \in I$ povlači da unutrašnji faktor of f takodje pripada idealu I.*

Tada je I trag nekog ideala J od N^p i osim toga važi $J = IN^p$.

Dokaz. Neposredno se provjerava da iz uslova (3.2) slijedi uslov (3.1) iz prethodne teoreme, a samim tim i njeno tvrdjenje.

Komentar. Ostaje otvoreno pitanje da li je tačan obrat posljedice 3.3. Dok je analogno tvrdjenje tačno za klase Nevanlinne i Smirnova ([Mor], posljedice 1 i 2), ovdje je odgovarajući problem zakomplikovan činjenicom da postoje vanjske funkcije koje nisu invertibilni elementi od N^p. Obrat posljedice 3.3 važi uz dodatni uslov o idealu I, kao što pokazuje slijedeći rezultat.

Teorema 3.4. *Prost ideal P od H^∞ čini trag nekog prostog ideala Q od N^p ako i samo ako P ne sadrži nijednu vanjsku funkciju F za koju je $\log|F^*| \in L^p(T)$. Ukoliko je to slučaj, Q je jedinstven prost ideal od N^p sa tim svojstvom i pri tome važi $Q = PN^p$.*

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz ([Mor], teorema 3) i činjenice da su u prstenu N^p invertibilni elementi upravo vanjske funkcije F za koje važi $\log|F^*| \in L^p(T)$.

Komentar. Na osnovu teoreme 2.1, svaki prost ideal od N^p koji nije gust u N^p jednak je skupu svih funkcija iz N^p koje se poništavaju u nekoj fiksnoj tački od D.

Ideal J prstena R, za koji je $H^\infty \subset R \subset N$, naziva se *konačno generisanim* ako postoje elementi $f_1, \ldots, f_n \in R$ takvi da važi

$$J = (f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i : g_i \in R \right\}.$$

Ako n može biti odabrano da bude jednako 1 , tada se J naziva *glavnim* idealom.

Prsten R naziva se *koherentnim* ako je presjek bilo koja dva konačno generisana ideala od R i sam konačno generisan. Koristeći rezultat iz [MR] da je H^∞ koherentan prsten, u ([Mor], teorema 7) dokazana je ista tvrdnja za proizvoljni prsten tipa Nevanlinna-Smirnova. Posebno, na osnovu teoreme 3.1 mi dobijamo slijedeći rezultat.

Teorema 3.5. *N^p je koherentan prsten za svako $p > 1$.*

4.4. Svojstvo korone za algebre N^p

Kažemo da komutativan prsten R sa jedinicom, čiji su elementi holomorfne funkcije na D, posjeduje *svojstvo korone* ako važi slijedeće tvrdjenje:

Ideal generisan sa $f_1, \ldots, f_n \in R$ jednak je R ako i samo ako postoji invertibilni element f od R tako da je

$$|f(z)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(z)| \quad (z \in D).$$

Ta definicija je motivisana čuvenom teoremom o koroni Carlesona (npr. vidj. [Gar], str. 324, ili [D2], str. 202), koja tvrdi da algebra H^∞ svih ograničenih holomorfnih funkcija na D ima svojstvo korone. Mortini ([Mor], teorema 4) ističe da je na osnovu rezultata Wolffa iz ([Gar], str. 329) lako pokazati da svaki prsten tipa Nevanlinna-Smirnova ima svojstvo korone. Stoga, mi imamo slijedeći rezultat.

Teorema 4.1. *Algebra N^p ima svojstvo korone.*

Komentar. Kako su Nevanlinnina klasa i klasa Smirnova prsteni tipa Nevanlinna-Smirnova, obje te algebre posjeduju svojstvo korone. U ([M], teorema 7) je konstruisana podalgebra od N koja sadrži N^+, a koja ne posjeduje svojstvo korone.

Niz $\{z_k\} \subset D$ se naziva *interpolacioni niz* (za H^∞) ako za svaki ograničen niz $\{\omega_k\}$ kompleksnih brojeva postoji funkcija f iz H^∞ takva da je $f(z_k) = \omega_k$ za svako $k \in \mathrm{N}$. *Interpolacioni Blaschkeov proizvod* je Blaschkeov proizvod čije (proste) nule čine interpolaconi niz.

Slijedeće dvije teoreme su zapravo generalizacija teorema 5 i 6 iz [Mor], respektivno. Mi pratimo metode iz [Mor] za dokaze slijedećih teorema.

Teorema 4.2. *Neka je $0 < q < \infty$ i neka je $I = (f_1, \ldots, f_n)$ konačno generisan ideal od H^∞. Pretpostavimo da ideal I sadrži holomorfnu funkciju F na D koja nema* *nula u D i takvu da je* $\log F \in H^q$. *Tada je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) |\log (|f_1(z_k)| + \cdots + |f_n(z_k)|)|^q < \infty.$$

Dokaz. Neka su $g_1, \ldots, g_n$ funkcije iz H^∞ takve da je $F = \sum_{k=1}^n f_k g_k$. Tada postoji pozitivna konstanta C_1 takva da je

$$|F(z)| \le C_1 \sum_{k=1}^{n} |f_k(z)| \quad \text{za svako} \quad z \in D.$$

Stavimo $S(z) = \sum_{k=1}^n |f_k(z)|$ i pretpostavimo da je $S(z) \le C_2$ za svako $z \in D$, gdje je C_2 pozitivna konstanta . Koristeći činjenicu da je $\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|) = C_3 < \infty$, te primjenjujući nejednakost $(a+b)^q \le C_4(a^q + b^q)$ za $C_4 = 2^{\max(q,1)-1}$, $a, b \ge 0$, kao i glavnu interpolacionu teoremu za Hardyjevu klasu H^q (vidj. [D2], str. 149, teorema 9.1; odnosno teorema 6.2, gl. 6), redom dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) |\log S(z_k)|^q \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) \left(\log^+ S(z_k) + \log^+ \frac{1}{S(z_k)}\right)^q \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) C_4 \left((\log^+ S(z_k))^q + \left(\log^+ \frac{1}{S(z_k)}\right)^q \right) \\
&\le C_4 (C_2)^q \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) \left(\log^+ \frac{C_1}{|F(z_k)|}\right)^q \\
&\le 2C_3 C_4 (C_2)^q + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) \left|\log \frac{F(z_k)}{C_1}\right|^q < \infty.
\end{aligned}$$

Napomenimo da zadnja nejednakost $< \infty$ upravo slijedi iz prethodno navedene interpolacione teoreme. To daje željeni rezultat.

Teorema 4.3. *Pretpostavimo da je I ideal od N^p generisan sa unutrašnjim funkcijama $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, i pretpostavimo da I sadrži interpolacioni Blaschkeov proizvod B sa nulama $\{z_k\}$ tako da je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) \, |\log (|\varphi_1(z_k)| + \cdots |\varphi_n(z_k)|)|^p < \infty.$$

Tada važi $I = N^p$.

Dokaz. Stavimo $c_k = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|^2$ za svako k. Koristeći nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|\right)^2}{n} \leq c_k \leq \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|\right)^2,$$

odakle neposredno slijedi

$$|\log c_k| \leq 2 \left|\log \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|\right)\right| + \log n.$$

Kombinujući gornju nejednakost sa nejednakošću $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $a, b \geq 0$, dobijamo

$$|\log c_k|^p \leq 2^{p-1}\left(2^p \left(\left|\log \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|\right)\right|\right)^p + \log^p n\right).$$

Na osnovu gornje nejednakosti i pretpostavke teoreme, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|\log c_k|^p &\leq 2^{2p-1}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\left|\log\left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|\right)\right|^p \\ &+ 2^{p-1}(\log^p n)\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2) < \infty.\end{aligned}$$

Stoga, na osnovu teoreme Shapiroa i Shieldsa ([D2], str. 149, teorema 9.1; odnosno teorema 6.2, gl. 6), postoji funkcija $g \in H^p$ takva da je $g(z_k) = \log c_k$ za svako $k \in \mathbf{N}$. Lako se provjeri (vidj. [St2], teorema 4.4) da je funkcija $F = \exp g$ invertibilna u N^p, kao i da važi $F(z_k) = c_k$ za svako $k \in \mathbf{N}$. Pošto je $\{z_k\}$ interpolacioni niz, na osnovu Carlesonove teoreme ([D2], str. 149; odnosno teorema 6.1, gl. 6), znamo da postoje funkcije $f_i \in H^\infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ takve da za svako $i = 1, \ldots, n$ važi

$$f_i(z_k) = \overline{\varphi_i(z_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Primijetimo da funkcija $F - \sum_{i=1}^n f_i\varphi_i$ pripada prostoru N^p, kao i da važi

$$F(z_k) - \sum_{i=1}^n f_i(z_k)\varphi_i(z_k) = c_k - \sum_{i=1}^n |\varphi_i(z_k)|^2 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Stoga, na osnovu kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (b), gl. 1, postoji funkcija $h \in N^p$ za koju vrijedi

$$F - \sum_{i=1}^n f_i\varphi_i = Bh.$$

To neposredno pokazuje da F pripada idealu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, B) = I$. Kako je F invertibilan element u N^p, slijedi da je

$$I = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = N^p.$$

Time je dokaz teoreme kompletiran.

4.5. Ideali i homomorfizmi prstena F^p $(1 < p < \infty)$

U ovom poglavlju dajemo karakterizaciju maksimalnih ideala i multiplikativnih linearnih funkcionala algebri F^p uvedenih u gl. 3. Napomenimo da na osnovu teoreme 1.4, gl. 3, prostor F^p u odnosu na familiju (polu)normi $\{|||\cdot|||\}_{p,c>0}$ definisanih kao

$$
(5.1)\qquad |||f|||_{p,c} = \int_0^1 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) M(r,f)\,dr, \qquad f \in F^p,
$$

gdje je $M(r,f) = \max_{|z|\le r} |f(z)|$, čini Fréchetovu algebru. Osim toga na osnovu teoreme 2.7, gl. 3, F^p je sadržavajući Fréchetov prostor prostora N^p u smislu opisanom u pogl. 3.2.

Lema 5.1. *Za svaku funkciju $f \in F^p$ i za proizvoljno $c > 0$ važi*

$$
(5.2)\qquad |f(z)| \le (2/pc^p)\,((p+1)/e)^{p+1} \exp\left(\frac{2c}{(1-r)^{1/p}}\right) ||f||_{p,c}, \qquad |z| \le r.
$$

Dokaz. Za proizvoljno fiksno $R < 1$ imamo

$$
(5.3)\qquad \begin{aligned}
||f||_{p,c} &= \int_0^1 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) M(r,f)\,dr \\
&\ge \int_R^1 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) M(r,f)\,dr \\
&\ge M(R,f) \int_R^1 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) dr.
\end{aligned}
$$

Lako se provjeri da funkcija $t \mapsto t^{1+1/p} e^{-ct^{1/p}}$ $(0 \le t < \infty)$, dostiže maksimum u tački $t = ((p+1)/c)^p$, tj. da važi

$$
t^{1+1/p} e^{-ct^{1/p}} \le ((p+1)/ce)^{p+1}, \quad 0 \le t < \infty,
$$

odakle slijedi

$$
e^{-ct^{1/p}} t^{-1+1/p} \ge (ce/(p+1))^{p+1}\, e^{-2ct^{1/p}}.
$$

Odavde dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_R^1 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) dr &= \int_T^\infty e^{-ct^{1/p}} t^{-2}\,dt \quad \left(t = \frac{1}{1-r},\ T = \frac{1}{1-R}\right) \\
&\ge \frac{pc^p}{2}\left(\frac{e}{p+1}\right)^{p+1} \int_T^\infty \left(e^{-2ct^{1/p}}\right)' dt \\
&= \frac{pc^p}{2}\left(\frac{e}{p+1}\right)^{p+1} e^{-\frac{2c}{(1-R)^{1/p}}}.
\end{aligned}
$$

Koristeći zadnju relaciju i (5.3) neposredno dobijamo

$$|f(z)| \leq M(R, f) \leq (2/pc^p)((p+1)/e)^{p+1} \exp\left(\frac{2c}{(1-R)^{1/p}}\right) ||f||_{p,c}, \quad |z| \leq R,$$

što i predstavlja relaciju (5.1) naše leme.

Lema 5.2. ([1], str. 14, primjer 1). *Ako kompleksan broj λ ne pripada jediničnom krugu D, tada funkcija $1/(z-\lambda)$ pripada svakom prostoru N^p $(1 < p < \infty)$.*

Kao u prvom poglavlju ove glave, za proizvoljnu tačku $\lambda \in D$ definišimo funkcional γ_λ na prostoru F^p kao

$$\gamma_\lambda(f) = f(\lambda), \quad f \in F^p.$$

Očito je γ_λ multiplikativan linearan funkcional na F^p. Na osnovu (5.2) iz leme 5.1, vidimo da je γ_λ neprekidan funkcional u odnosu na topologiju od F^p odredjenu familijom (polu)normi $\{||\cdot||_{p,c}\}_{c>0}$.

Za svako $\lambda \in D$, definišimo

$$\mathcal{M}_\lambda = \{f \in F^p : f(\lambda) = 0\}.$$

Slijedeća tri rezultata su potpuno analogna teoremama 1.1, 1.2 i posljedici 2.7, respektivno.

Teorema 5.3. *$\mathcal{M}_\lambda$ je zatvoren maksimalan ideal od F^p za svako $\lambda \in D$.*

Dokaz. Pošto je $\mathcal{M}_\lambda$ jezgra neprekidnog multiplikativnog linearnog funkcionala na F^p, slijedi da je $\mathcal{M}_\lambda$ zatvoren maksimalan ideal od F^p.

Slijedeći rezultat karakteriše multiplikativne linearne funkcionale na F^p.

Teorema 5.4. *Ako je γ netrivijalan multiplikativan linearan funkcional na F^p, tada postoji $\lambda \in D$ tako da je $\gamma(f) = f(\lambda)$ za svako $f \in F^p$, te je stoga γ neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Stavimo $\lambda = \gamma(z)$. Tada je $\gamma(z-\lambda) = 0$. Ako pretpostavimo da je $\lambda \notin D$, tada je na osnovu leme 5.2 $1/(z-\lambda) \in N^p \subset F^p$, odakle vidimo da je $z-\lambda$ invertibilan element u F^p. Ostatak dokaza je potpuno isti kao dokaz teoreme 1.2 i zbog toga ga izostavljamo.

Komentar. Von Renteln u radu ([Re], teorema 4.1) dokazuje tvrdjenje teoreme 5.4 za šire klase funkcija holomorfnih u jediničnom krugu D i primjećuje da u takve klase spadaju algebre N^+, F^+ i N. Lako se provjeri da ista činjenica važi i za sve algebre N^p i F^p $(1 < p < \infty)$.

Teorema 5.5. *Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren maksimalan ideal od F^p. Tada postoji $\lambda \in D$ takvo da je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$.*

Dokaz. Stavimo $X = F^p/\mathcal{M}$. Tada je u smislu Arensa [A] X kompletna metrizabilna, separabilna, konveksna kompleksna topološka algebra s dijeljenjem. Stoga je na osnovu [A], $X \cong \mathbf{C}$. Zato postoji multiplikativan linearan funkcional γ na F^p za koji je $\mathcal{M} = \ker\gamma$. Na osnovu teoreme 5.4, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$ za neko $\lambda \in D$, što dokazuje našu tvrdnju.

Da bismo dali karakterizaciju maksimalnih ideala algebri F^p u odnosu na *topologiju ravnomjerne konvergencije na kompaktima* od D neophodna nam je lema 10 iz ([Y8], str. 41) koja se odnosi na topološke algebre koje ovdje opisujemo.

Neka je A *topološka algebra* nad poljem $\mathbf{C}$, koja je lokalno konveksna i komutativna i s jedinicom 1. Topologiju na A definišemo pomoću prebrojive familije polunormi $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ($S = \mathbf{N}$ ili je S konačan podskup od $\mathbf{N}$) za koju važi $\|1\|_\alpha = 1$ i

$$\|ab\|_\alpha \le \|a\|_\alpha \|b\|_\alpha \quad \text{za svako } a, b \in A,\ \alpha \in S. \tag{5.4}$$

Za $\alpha \in S$ stavimo $E_\alpha = \{a \in A : \|a\|_\alpha = 0\}$. E_α je očito ideal algebre A. Za svako $a \in A$ definišimo klasu $\tilde{a}$ kao skup $\tilde{a} = a + E_\alpha \in A/E_\alpha$. Tada je količnički prostor A/E_α normiran prostor sa pridruženom normom $\|\tilde{a}\|_\alpha = \|a\|_\alpha$, $\alpha \in S$. Na osnovu (5.4) imamo

$$\|\tilde{a}\tilde{b}\|_\alpha \le \|\tilde{a}\|_\alpha \|\tilde{b}\|_\alpha \quad \text{za svako } \tilde{a}, \tilde{b} \in A/E_\alpha,\ \alpha \in S. \tag{5.4'}$$

Kompletiranje (upotpunjenje) prostora A/E_α u odnosu na normu $\|\cdot\|_\alpha$ označimo sa A_α^*. Tada važi slijedeća lema.

Lema 5.6. ([Y8], str. 41, lema 10). *Neka je A prethodno opisana algebra. Tada za svako $f \in A$, postoji kompleksan broj λ_f koji zavisi od f tako da $\lambda_f - f = (\lambda_f 1 - f)$ nije invertibilan element u algebri A.*

Slijedeća karakterizacija zatvorenih maksimalnih ideala od F^p je dobijena po analogiji sa teoremom Iguse iz [I].

Teorema 5.7. *Neka je $\mathcal{M}$ maksimalan ideal algebre F^p. Tada su slijedeća tvrdjenja o idealu $\mathcal{M}$ ekvivalentna.*

(i) *$\mathcal{M}$ je zatvoren ideal u odnosu na topologiju ravnomjerne konvergencije na kompaktima od D.*

(ii) $F^p/\mathcal{M} \cong \mathbf{C}$.

(iii) *Postoji $\lambda \in D$ takvo da je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$.*

(iv) *$\mathcal{M}$ je zatvoren ideal od F^p u odnosu na topologiju indukovanu pripadnom familijom polunormi $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ definisanih pomoću (3.1).*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Očigledno važi $F^p/\mathcal{M} \supset \mathbf{C}$. Za svako $f \in F^p$ označimo

$$[f] = f + \mathcal{M} \in F^p/\mathcal{M}.$$

U prostoru $F^p/\mathcal{M}$ uvodimo familiju polunormi $\{\|\cdot\|_r\}$ $(0 \le r < 1)$ kao što slijedi:

$$\|[f]\|_r = \inf_{h\in\mathcal{M}} \big(\max_{|z|=r} |f(z) + h(z)|\big), \quad 0 \le r < 1.$$

Tada se lako provjeri da važi

$$\|[fg]\|_r \leq \|[f]\|_r \|[g]\|_r, \quad 0 \leq r < 1.$$

Na osnovu leme 5.6, za svaki element $[f] \in F^p/\mathcal{M}$ postoji $\lambda \in \mathbf{C}$ tako da $\lambda - [f]$ nije invertibilan element u $F^p/\mathcal{M}$. Zbog maksimalnosti ideala $\mathcal{M}$ zaključujemo da je $F^p/\mathcal{M}$ polje, pa stoga $\lambda - f$ mora pripadati idealu $\mathcal{M}$, odnosno $\lambda \in [f]$. Dakle, važi

$$F^p/\mathcal{M} \cong \mathbf{C}.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Označimo sa z_0 klasu $[z] \in F^p/\mathcal{M}$. Tada je $z - z_0 \in \mathcal{M}$, odakle slijedi $z_0 \in D$.

Za svako $f \in F^p$ imamo

$$f(z) - f(z_0) = A(z)(z - z_0).$$

Lako se vidi da je $A(z) \in F^p$, i stoga je $f(z) - f(z_0) \in \mathcal{M}$. Dakle, ako je $f(z) \in \mathcal{M}$, tada je i $f(z_0) \in \mathcal{M}$, odnosno $f(z_0) = 0$. To znači da je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{z_0}$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Ta inkluzija neposredno slijedi iz teoreme Hurwitza.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Ova implikacija direktno slijedi iz teoreme 5.3.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Neposredno slijedi iz teoreme 5.5. Time je teorema dokazana.

4.6. Homomorfizmi algebri F^p

Neka je $\varphi : D \to D$ holomorfna funkcija na D i neka $Hol(D)$ označava klasu svih holomorfnih na D funkcija. Za neku podklasu $H \subseteq Hol(D)$ definišimo operator $C_\varphi : H \to Hol(D)$ kao

$$(6.1) \qquad C_\varphi(f)(z) = f(\varphi(z)), \quad z \in D,\ f \in H.$$

$C_\varphi(f)$ se uobičajeno naziva *kompozicioni operator* sa klase H u prostor $Hol(D)$. Od posebnog su interesa izučavanja kompozicionih operatora na vektorskim prostorima funkcija H na kojima su oni zatvorena i neprekidna preslikavanja. Takvi su npr. Hardyjevi prostori H^p $(0 < p \leq \infty)$ (vidj. [D2]), prostor Smirnova N^+ i njegov Fréchetov omotač F^+ (vidj. [RS2]), kao i klase N^p $(1 < p < \infty)$ (vidj. [Moc] i [KC]). Formulacija slijedeće teoreme koja se odnosi na kompozicioni operator na algebrama F^p $(1 < p < \infty)$ je motivisana rezultatom iz [Moc], koji nam je ujedno i neophodan u njenom dokazu.

Teorema 6.1. ([Moc], teorema 1). *Važe slijedeća tvrdjenja.*

(i) *Neka je $\varphi : D \to D$ holomorfno preslikavanje. Ako su q i p realni brojevi takvi da je $q \geq p > 1$, tada linearan operator $C_\varphi : N^q \to N^p$ definisan sa (6.1) predstavlja neprekidan homomorfizam algebre N^q u N^p.*

(ii) *Pretpostavimo da je $\eta : N^q \to N^p$ netrivijalan homomorfizam algebri. Tada postoji holomorfna funkcija $\varphi : D \to D$ takva da je $\eta(f) = C_\varphi(f)$ za svako $f \in N^q$. Dakle, ako je $q \geq p$, tada je η neprekidan operator.*

(iii) *Pretpostavimo da je $\eta : N^q \to N^p$ epimorfizam algebri (tj. surjektivni homomorfizam na N^p). Tada je $p = q$ i η je izomorfizam. Osim toga, preslikavanje $\varphi : D \to D$ odredjeno sa η je konformno preslikavanje kruga D i važi $\eta^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$.*

Slijedeća teorema je analogon prethodne teoreme za klase F^p.

Teorema 6.2. *Važe slijedeća tvrdjenja.*

(i) *Neka je $\varphi : D \to D$ holomorfno preslikavanje. Ako su q i p realni brojevi takvi da je $q \geq p > 1$, tada operator $C_\phi : F^q \to F^p$ definisan sa (6.1) predstavlja neprekidan homomorfizam algebre F^q u F^p.*

(ii) *Pretpostavimo da je $\eta : F^p \to F^p$ netrivijalan homomorfizam algebre F^p. Tada postoji holomorfna funkcija $\varphi : D \to D$ takva da je $\eta(f) = C_\varphi(f)$ za svako $f \in F^p$. Dakle, operator η je neprekidan.*

(iii) *Pretpostavimo da je $\eta : F^p \to F^p$ endomorfizam algebre F^p (tj. surjektivni homomorfizam na F^p). Tada je η automorfizam od F^p. Osim toga, preslikavanje $\varphi : D \to D$ odredjeno sa η je konformno preslikavanje kruga D i važi $\eta^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$.*

Dokaz. (i) Kako je za $q \geq p > 1$ $F^q \subset F^p$ i na osnovu (5.1) $|||f|||_{p,c} \leq |||f|||_{q,c}$ za svako $f \in F^q$ i za svako $c > 0$, dovoljno je tvrdjenje (i) dokazati za slučaj $q = p$. Za dati kompozicioni operator $C_\phi : F^p \to Hol(D)$ razmotrimo njegovu restrikciju $\eta = C_{\phi|N^p}$ na N^p. Na osnovu tvrdjenja (i) teoreme 6.1 η je neprekidan linearan operator sa N^p u N^p. Neka kao u pogl. 3.4 ovog rada $(N^p)^*$ i $(F^p)^*$ označavaju prostore neprekidnih linearnih funkcionala redom na prostorima N^p i F^p sa pripadnim *topologijama ravnomjernih konvergencija na slabo ograničenim podskupovima* od N^p i F^p. Na osnovu teoreme 4.4, gl. 3 važi $(N^p)^* = (F^p)^*$ u skupovnom i topološkom smislu. Definišimo *adjungovano preslikavanje* $\eta^* : (N^p)^* \to (N^p)^*$ kao kompoziciju $\eta^*(\gamma) = \gamma \circ \eta$, $\gamma \in (N^p)^*$. Tada je η^* neprekidno preslikavanje sa $(N^p)^*$ u $(N^p)^*$, a samim tim i sa $(F^p)^*$ u $(F^p)^*$. Pošto je na osnovu teoreme 4.5, gl. 3 F^p refleksivan prostor, to je drugo adjungovano preslikavanje η^{**} od η neprekidno sa F^p u F^p. Neka je $f \in F^p$ proizvoljno. Kako je na osnovu teoreme 1.5 (a), gl. 3 N^p gust podskup od F^p, to postoji niz $\{f_n\}$ iz N^p takav da $f_n \to f$ u F^p. Otuda slijedi $\eta^{**}(f_n) \to \eta^{**}(f)$ i $\eta^{**}(f_n)(z) \to \eta^{**}(f)(z)$ za svako $z \in D$. Kako je $\eta^{**}_{|N^p} = \eta = C_\varphi$, dobijamo

$$\eta^{**}(f)(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(\varphi(z)) = f(\varphi(z)) \quad \text{za svako } z \in D.$$

Otuda zaključujemo da je C_φ neprekidan linearan operator sa F^p u F^p, čime je tvrdjenje (i) dokazano.

(ii) Neka je $\eta : F^p \to F^p$ netrivijalan homomorfizam algebre F^p. Stavimo $\varphi = \eta(z)$, tj. $\varphi(\xi) = \eta(z)(\xi)$, $\xi \in D$. Za $\lambda \in D$, definišimo $\gamma(f) = \eta(f)(\lambda)$, $f \in F^p$. Kako je očito γ multiplikativan linearan funkcional na F^p, na osnovu teoreme 5.4 zaključujemo da postoji $\beta \in D$ tako da je $\eta(f)(\lambda) = f(\beta)$ za svako $f \in F^p$. Posebno, za $f(z) \equiv z$ dobijamo $\beta = \eta(z)(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Dakle, za svako $\lambda \in D$ je $\varphi(\lambda) \in D$ i za svako $f \in F^p$ važi $\eta(f)(\lambda) = f(\varphi(\lambda))$. Stoga je $\phi : D \to D$ holomorfno preslikavanje i važi $\eta(f) = C_\varphi(f)$ za svako $f \in F^p$.

(iii) Na osnovu tvrdjenja (ii) naše teoreme, $\eta = C_\varphi$ za neku holomorfnu funkciju $\varphi : D \to D$. Kako je η surjektivno, φ ne može identički biti jednako konstanti. Dakle,

$\varphi(D)$ je otvoren otvoren podskup od D, i stoga je C_φ bijekcija nad D. Zato postoji η^{-1}. Kako je očito η^{-1} i homomorfizam prstena F^p, opet na osnovu tvrdjenja (ii) naše teoreme slijedi da je $\eta^{-1} = C_\zeta$ za neku holomorfnu funkciju $\zeta : D \to D$. Tada je za svako $z \in D$, $z = C_\varphi \circ C_\zeta(z) = C_{\varphi\circ\zeta}(z) = (\varphi \circ \zeta)(z)$. Slično dobijamo $(\zeta \circ \varphi)(z) = z$. Stoga je φ konformni automorfizam kruga D i vrijedi $\varphi^{-1} = \zeta$, čime je tvrdjenje dokazano.

Komentar. Dok dokaz tvrdjenja (i) gornje teoreme koristi metode funkcionalne analize, ista se tvrdjenje može dokazati i direkto koristeći sredstva klasične analize i svojstva prostora F^p.

5. APROKSIMATIVNE TEOREME ZA KLASE N^p

5. Aproksimativne teoreme za klase N^p

U ovoj glavi dajemo N^p-verzije poznatih aproksimativnih teorema koje se odnose na Hardyjeve prostore. Ti rezultati su motivisani činjenicama da prostori N^p imaju dosta sličnih svojstava sa prostorima H^q $(0 < q < \infty)$ koje se inače koriste u dokazima odgovarajućih teorema. To su posebno unutrašnjo-vanjska faktorizacija za funkcije pripadnih klasa, gustoća polinoma i kompletnost prostora H^q i N^p. Činjenica da prostori N^p nisu Banachovi, niti p-Banachovi, onemogućava primjenu istih H^q-tehnika u dokazima odgovarajućih teorema za te prostore. Zapravo, odsustva svojstava homogenosti i p-homogenosti pripadnih (kvazi)normi prostora N^p komplikuju te dokaze. S druge strane, činjenica da su klase N^p algebre u kojima je množenje neprekidna operacija je u biti dovoljna zamjena za odsustvo navedenih svojstava pri dokazu glavnih rezultata. To se posebno odnosi na N^p-varijantu *Beurlingove teoreme* koju dajemo u prvom poglavlju, kao i logaritamski analogon *Szegöove teoreme* koji dajemo u petom poglavlju. Istaknimo da dokaz prve teoreme bitno koristi rezultat N. Mochizukija iz [Moc] koji karakteriše vanjske funkcije iz N^p pomoću pojma aproksimativnog inverza. Posljedica 1.8 N^p-varijante *Beurlingove teoreme* tvrdi da se skup slabo invertibilnih elemenata od N^p sastoji upravo od svih vanjskih funkcija pripadnih prostora. U slijedećem poglavlju dajemo opis *invarijantnih potprostora* od N^p. Preciznije, dokazujemo da je svaki invarijantan potprostor od N^p zapravo njegov glavni ideal generisan nekom unutrašnjom funkcijom. U slijedećem poglavlju dajemo za takve ideale dva kriterijuma da oni budu *slabo gusti* u pripadnom prostoru N^p. U vezi s tim, u četvrtom poglavlju dajemo karakterizaciju zatvorenih ideala koji su slabo gusti u N^p. Pokazujemo da su to glavni ideali generisani singularnim unutrašnjim funkcijama čije pridružene mjere imaju modul neprekidnosti jednak $o\left(h^{(p-1)/p}\right)$. Ta karakterizacija za neposrednu posljedicu daje široku klasu F-prostora sa trivijalnim dualom.

Na aproksimativnoj verziji N^p-varijante *Beurlingove teoreme* bazira se dokaz teoreme 5.2 iz petog poglavlja koja predstavlja logaritamski analogon *Szegöove teoreme*. Ta teorema (respektivno Szegöova teorema) zapravo daje eksplicitni izraz za infimum "težinskih" N^p-normi (respektivno H^p-normi) uzetog nad prostorom svih (analitičkih) polinoma P sa konstantnim članom jednakim 1. Kao posljedicu te teoreme, u posljednjem poglavlju dajemo neophodne i dovoljne uslove da *težinske* metrike d_ω budu ekvivalentne sa polaznom metrikom d_p na prostoru N^p.

5.1. Beurlingova teorema za klase N^p

Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih polinoma sa kompleksnim koeficijentima. Neka $\mathcal{F}$ označava topološki prostor čiji su elementi funkcije f holomorfne u jediničnom krugu D kompleksne ravni. Pretpostavimo da je $1 \in \mathcal{F}$ i da iz $f \in \mathcal{F}$ slijedi da je i $Pf \in \mathcal{F}$ za svaki polinom $P \in \mathcal{P}$. Za funkciju $f \in \mathcal{F}$ označimo sa $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$ zatvorenje skupa $\mathcal{P}f := \{Pf : P \in \mathcal{P}\}$ u odnosu na topologiju prostora $\mathcal{F}$.

Kažemo da je funkcija $f \in \mathcal{F}$ *slabo invertibilan element* ili *ciklički element* od $\mathcal{F}$ ako postoji niz polinoma $\{P_n\}$ takav da važi $P_n f \to 1$ kada $n \to \infty$ u odnosu na topologiju prostora $\mathcal{F}$. Ta definicija je motivisana čuvenom Beurlingovom teoremom o polinomijalnoj aproksimaciji u prostorima Hardyja H^p $(0 < p < \infty)$. Dokaz te teoreme pripada Beurlingu (vidj. [B]) za slučaj *Hilbertovog prostora* H^2, a za slučaj $p > 0$ Srinivasanu i Wangu (vidj. [Ko]). Napomenimo da se na osnovu teoreme 1.5 (a), gl. 1, svaka funkcija $f \in N^+$ može faktorisati kao

$$f(z) = B(z)S(z)F(z) = I_f(z)F(z), \tag{1.1}$$

gdje je $B(z)$ Blaschkeov proizvod u odnosu na nule od $f(z)$, $S(z)$ je singularna unutrašnja funkcija, a $F(z)$ vanjska funkcija, tj.

$$S(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} H(z, e^{it})\, d\mu(t)\right)$$

pri čemu je $H(z, e^{it}) = (e^{it} + z)(e^{it} - z)^{-1}$, a μ pozitivna singularna Borelova mjera na T i

$$F(z) = \lambda \exp\left(\int_0^{2\pi} H(z, e^{it}) \log|f^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}\right),$$

gdje je $|\lambda| = 1$, $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ skoro svuda na T, $\log|f^*|$ i $(\log^+|f^*|)^p$ pripadaju prostoru $L^1(T)$.

Obrnuto, svaki takav proizvod $B(z)S(z)F(z)$ pripada prostoru Smirnova N^+. Ako je pri tome $(\log^+|f^*|)^p \in L^1(T)$, tada je $f \in N^p$. Ukoliko je $|f^*|^p \in L^1(T)$, tada je $f \in H^p$.

Po Beurlingovoj terminologiji funkciju $I_f(z) = B(z)S(z)$ nazivamo *unutrašnjom*, a funkciju $F(z)$ *vanjskom*.

Teorema 1.1. (Beurling [Ko], gl. 4, pogl. 3). *Neka je* $0 < p < \infty$ *i* $f \in H^p$ *bilo koja funkcija s pripadnom faktorizacijom* $f(z) = I_f(z)F(z)$ *opisanom sa* (1.1). *Tada važi* $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f) = I_f H^p$. *Dakle, skup svih slabo invertibilnih elemenata u prostoru* H^p *sastoji se upravo od svih vanjskih funkcija.*

Radi jednostavnosti, u cijeloj ovoj glavi najčešće ćemo pisati N^1 umjesto N^+. U skladu s tim oznakama, napomenimo da na osnovu teorema 5.1 i 5.2, gl. 1, u odnosu na metriku d_p definisanom na N^p $(1 \le p < \infty)$ kao

$$d_p(f, g) = \left(\int_0^{2\pi} \left(\log\left(1 + |f^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|\right)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \quad f, g \in N^p,$$

N^p obrazuje F-algebru. Osim toga, za svako $f \in N^p$ važi
(2.1)

$$(d_p(f,0))^p = \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left(\log(1+|f(re^{i\theta})|)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} = \sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi}\left(\log(1+|f(re^{i\theta})|)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

U prostoru $N^1(=N^+)$ su na osnovu gornje faktorizacije invertibilni elementi upravo sve vanjske funkcije, dok na osnovu faktorizacione teoreme 1.5 (b) za klase N^p $(1<p<\infty)$ vidimo da to ne mora biti slučaj za te prostore. Slijedeći rezultat Mochizukija daje karakterizaciju vanjskih funkcija u smislu aproksimativnog inverza. Neka je $f \in N^p$ $(1<p<\infty)$. Ako postoji niz $\{f_n\} \subset N^p$ takav da $f_n f \to 1$ u prostoru N^p, tada ćemo $\{f_n\}$ zvati *aproksimativnim inverzom* funkcije f. Tada važi slijedeći rezultat.

Teorema 1.2. ([Moc], teorema 2). *Neka je $f \in N^p$ $(1<p<\infty)$. Tada je f vanjska funkcija ako i samo ako f ima aproksimativni inverz.*

Sada smo u mogućnosti da dokažemo N^p-analogon Beurlingove teoreme 5.1 za prostore N^p.

Teorema 1.3. (Beurlingova teorema za klase N^p). *Neka je $1\le p<\infty$ i $f\in N^p$ sa faktorizacijom $f = BSF = I_f F$ opisanom sa (1.1). Tada važi $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f) = BSF = I_f H^p$. Preciznije, skup $BSN^p = I_f N^p = \{Ig : g \in N^p\}$ čini zatvorenje skupa $\mathcal{P}f$ u N^p u odnosu na topologiju od N^p odredjenu pripadnom metrikom d_p.*

Dokaz. Stavimo $f_r(z) = f(rz)$ za $0\le r<1$. Tada na osnovu leme 4.1, gl. 2, $f_r \to f$ u prostoru N^p kada $r\to 1^-$. Odatle i iz činjenice da se f_r može na osnovu Rungeove teoreme ravnomjerno aproksimirati polinomima na zatvorenom krugu $\bar{D}$: $|z|\le 1$, neposredno slijedi da skup svih polinoma $\mathcal{P}$ čini gust podskup od N^p (vidj. teorema 5.4, gl. 1).

Uzmimo $g \in \mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$. To znači da postoji niz $\{P_n\}$ polinoma takav da $P_n f \to g$ u N^p kada $n\to\infty$. Kako je na osnovu teoreme 1.4, gl. 1, $|I^*(e^{i\theta})| = 1$ skoro svuda na T, slijedi da je $d_p(P_nF, P_kF) = d_p(P_nf, P_kf) \to 0$ kada $n,k\to\infty$. Prema tome, zbog kompletnosti prostora N^p, P_nF konvergira ka nekoj funkciji $h\in N^p$. Dakle, zbog neprekidnosti množenja u N^p, vidimo da je $P_nFI \to hI$ u N^p kada $n\to\infty$. Stoga funkcija $g = hI$ pripada prostoru IN^p, odakle slijedi $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f)\subseteq IN^p$. Obratno, pretpostavimo da je $g\in IN^p$, pa uzmimo $g = hI$ za neko $h\in N^p$. Ako je $p>1$, na osnovu teoreme 1.2 postoji niz $\{f_n\}\subset N^p$ takav da $f_nF\to 1$ u N^p. Ako je $p=1$, stavimo $f_n = 1/F \in N^+$ za svako $n\in \mathbb{N}$. Zatim odaberimo dva niza $\{R_n\}$ i $\{Q_n\}$ polinoma iz $\mathcal{P}$ tako da $R_n - f_n \to 0$ i $Q_n \to h$ u N^p kada $n\to\infty$. Opet na osnovu neprekidnosti množenja u N^p slijedi da $R_nF\to 1$ i $R_nQ_nf = R_nQ_nFI \to hI$ u N^p kada $n\to\infty$. To pokazuje da g pripada skupu $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$, što povlači $IN^p\subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$. Stoga je $IN^p = \mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$, čime je teorema dokazana.

Za bilo koju funkciju $f\in N^p$, označimo sa $\mathcal{P}[f]$ zatvorenje vektorskog potprostora od N^p generisanog funkcijama $z^nf(z)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Teorema 1.4. *Za svako* $1 \leq p < \infty$ *važi* $\mathcal{P}[f] = \mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$. *Dakle, skup* $\mathcal{P}[f]$ *sastoji se od svih funkcija iz* N^p *koje se mogu aproksimirati polinomijalnim višekratnicima od* f.

Dokaz. Očito je $\mathcal{P}[f] \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$. S druge strane, kako je $\mathcal{P}[f]$ vektorski prostor, važi $\mathcal{P}f \subseteq \mathcal{P}[f]$, odnosno zbog zatvorenosti od $\mathcal{P}[f]$, imamo $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f) \subseteq \mathcal{P}[f]$. To dokazuje tvrdjenje teoreme.

Za unutrašnju funkciju I_1 s pridruženom singularnom mjerom $\nu(t)$ kažemo da je *djelilac* druge unutrašnje funkcije I_2 sa pridruženom singularnom mjerom $\mu(t)$ ako je funkcija I_2/I_1 takodje unutrašnja funkcija. Na osnovu jedinstvenosti faktorizacija unutrašnjih funkcija, to je očito slučaj ako i samo ako je svaka nula od I_1 ujedno i nula od I_2 (sa istom ili većom kratnošću) i osim toga mjera $\nu(t) - \mu(t)$ je pozitivna. Koristeći navedene oznake i pojmove dobijamo dvije neposredne posljedice teoreme 1.3.

Posljedica 1.5. *Za svaku funkciju* $f \in N^p$ *s pridruženim unutrašnjim faktorom* I_f *važi* $\mathcal{P}[f] = \mathcal{P}[I_f]$. *Ako važi* $\mathcal{P}[I_f] = \mathcal{P}[I_g]$ *za neke dvije funkcije* $f, g \in N^p$, *tada je* $I_f = I_g$.

Dokaz. Prvo tvrdjenje neposredno slijedi iz teorema 1.3 i 1.4 Ako važi $\mathcal{P}[I_f] = \mathcal{P}[I_g]$, tada opet na osnovu teorema 1.3 i 1.4 slijedi $I_f N^p = I_g N^p$. Odavde, na osnovu jedinstvenosti faktorizacije za klase N^p, zaključujemo da je $I_f = I_g$.

Posljedica 1.6. *Neka je* $1 \leq p < \infty$ *i neka su* $f, g \in N^p$ *funkcije sa unutrašnjim faktorima* I_f *i* I_g, *respektivno. Tada je* $g \in \mathcal{P}[f]$ *ako i samo ako je* I_f *djelilac od* I_g.

Dokaz. Iz pretpostavke $g \in \mathcal{P}[f]$ i na osnovu teorema 1.3 i 1.4 dobijamo $g \in \mathrm{cl}(\mathcal{P}f) = I_f H^p$, odakle slijedi da postoji funkcija $h \in N^p$ takva da važi $g = I_f h$. Stavimo $h = I_h H$ i $g = I_g G$, gdje su H i G redom vanjski faktori funkcija h i g. Odavde slijedi da je $I_g G = I_f I_h H$. Na osnovu jedinstvenosti faktorizacije dobijamo $I_g = I_f I_h$, odakle vidimo da je I_f djelilac od I_g. Obrnuto, neka su $f, g \in N^p$ tako da je I_f djelilac od I_g. To znači da postoji unutrašnja funkcija I takva da je $I_g = I_f I$. Stavimo $g = I_g G$, gdje je G vanjski faktor od g. Tada je $g = I_f I G$, pa na osnovu teoreme 1.3 vidimo da g pripada skupu $\mathrm{cl}(\mathcal{P}f)$, odnosno skupu $\mathcal{P}[f]$. Time je tvrdjenje dokazano.

Posljedica 1.7. *Neka je* $1 \leq p < \infty$. *Tada za svaku unutrašnju funkciju* I *važi* $\mathcal{P}[I] = IN^p$.

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz teoreme 1.3 i posljedice 1.5.

Posljedica 1.8. *Funkcija* $f \in N^p$ *je slabo invertibilan (ciklički) element od* N^p *ako i samo ako je* f *vanjska funkcija. Drugim riječima, glavni ideal* fN^p *generisan sa* $f \in N^p$ *je gust u* N^p *ako i samo ako je* f *vanjska funkcija.*

Dokaz. Neposredno slijedi iz teoreme 1.3 i jedinstvenosti faktorizacije za funkcije iz klase N^p.

5.2 Invarijantni potprostori prostora N^p

Neka S označava *operator množenja sa* z na prostoru N^p $(1 < p < \infty)$, tj.

$$(Sf)(z) = zf(z), \quad f \in N^p, z \in D.$$

Operator S naziva se *desni šift* ili *unilateralni šift*. Naziv potiče iz razloga što taj šift pomjera za jedno mjesto udesno Taylorove koeficijente funkcije f. Za zatvoren potprostor E od N^p se kaže da je *invarijantan* (u odnosu na S) ako iz $f \in E$ slijedi da je $zf(z) \in E$, tj. ako važi $zE \subset E$. Beurlingova teorema o invarijantnim potprostorima za Hardyjeve prostore H^p $(0 < p < \infty)$ (vidj. [Gam], str. 132) tvrdi da svaki invarijantan potprostor od H^p ima oblik IH^p, gdje je I unutrašnja funkcija. Dakle, postoji uzajamno jednoznačna korespodencija izmedju unutrašnjih funkcija i invarijantnih potprostora od H^p. Koristeći taj rezultat, u ([RS1], teorema 2) je dokazan analogan rezultat za klasu Smirnova N^+. Odgovarajući rezultat za prostore N^p $(1 < p < \infty)$ će neposredno biti dobijen iz slijedećeg rezultata Mochizukija i naredne leme.

Za funkciju $f \in N^p$ označimo sa fN^p glavni ideal generisan sa f, tj.

$$fN^p = \{fg : g \in N^p\}.$$

Teorema 2.1. ([Moc], teorema 4). *Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren ideal od N^p koji nije identički jednak nuli. Tada postoji jedinstvena (modulo konstanta) unutrašnja funkcija I takva da je $\mathcal{M} = IN^p$.*

Lema 2.2. *Zatvoren potprostor E od N^p je invarijantan ako i samo ako je on ideal.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}E = \{Pf : P \in \mathcal{P}, f \in N^p\}$. Ako je zatvoren potprostor E ujedno ideal, tada očito iz $f \in E$ slijedi da je $zf(z) \in E$, tj. važi $zE \subset E$. Dakle, E je invarijantan potprostor od N^p. Obratno, pretpostavimo da je E invarijantan potprostor od N^p. Uzmimo proizvoljne $f \in N^p$ i $g \in E$. Pošto su na osnovu teoreme 5.3, gl. 1, polinomi gusti u N^p, to postoji niz polinoma $\{P_n\} \subset \mathcal{P}$ takav da $P_n \to f$ u N^p. Odatle i iz neprekidnosti množenja u N^p, slijedi $P_n g \to fg$ u N^p. Dakle, $fg \in \text{cl}(\mathcal{P}E)$, što zbog invarijantnosti od E daje $fg \in E$. Stoga je E ideal od N^p, čime je dokaz leme završen.

Teorema 2.3. *Svaki invarijantan potprostor E od N^p ima oblik $E = IN^p$ za neku unutrašnju funkciju I. Obrnuto, za bilo koju unutrašnju funkciju I, skup IN^p čini invarijantan potprostor prostora N^p.*

Dokaz. Prvi dio tvrjenja slijedi neposredno iz teoreme 2.1 i leme 2.2. S druge strane, ako je I unutrašnja funkcija, budući da je na osnovu teoreme 1.4, gl. 1, $|I^*(e^{i\theta})| = 1$ skoro svuda na T, dobijamo $d_p(If, 0) = d_p(f, 0)$ za svako $f \in N^p$. Dakle, množenje sa

I je *izometrija* prostora N^p, te je stoga IN^p zatvoren ideal od N^p. Odatle i na osnovu leme 2.2, zaključujemo da je IN^p invarijantan potprostor od N^p.

Napomenimo da se *slaba topologija* u prostoru N^p uvodi na uobičajen način. Za bazu okoline nule u N^p uzimaju se svi mogući skupovi oblika

$$B(\phi_1,\ldots,\phi_n;\varepsilon)=\{f\in N^p : |\phi_i(f)|<\varepsilon,\, i=1,\ldots,n\},$$

gdje su $n\in \mathrm{N}$ i $\varepsilon>0$ proizvoljni, a $\phi_1,\ldots,\phi_n\in (N^p)^*$ bilo koji neprekidni linearni funkcionali na prostoru N^p. Za proizvoljan podskup E od N^p, označimo sa $[E]$ zatvorenje od E u N^p, a sa $[E]_\omega$ zatvorenje od E u odnosu na slabu topologiju od N^p. Lako se pokazuje da je slaba topologija slabija od inicijalne topologije indukovane na N^p metrikom d_p i da je $[E]_\omega$ zatvoren podskup od N^p. Osim toga, kako na osnovu posljedice 4.6, gl. 2, N^p ima *separativno svojstvo* (razdvajajući dual), slaba topologija na N^p je *lokalno konveksna* i takodje Hausdorffova (vidj. [DRS], str. 58).

Za vektorske prostore (još uopštenije za *konveksne podskupove* od N^p) postoji druga ekvivalentna karakterizacija slabog zatvorenja koju ćemo mi ovdje koristiti (vidj. [DRS], str. 54). Slaba topologija na N^p je lokalno konveksna i na osnovu ([KN], str. 154, posljedica 17.3) linearan funkcional na N^p je slabo neprekidan ako i samo ako je on neprekidan u odnosu na metričku topologija na N^p datu metrikom d_p. Stoga se $[E]_\omega$ sastoji od svih funkcija $f\in N^p$ koje ne mogu biti razdvojene od E nijednim linearnim funkcionalom iz (topološkog duala) $(N^p)^*$. Naime, na osnovu ([KN], str. 154, tvrdjenje 17.1) u svakom lokalno konveksnom topološkom vektorskom prostoru konveksan skup E je zatvoren ako i samo ako je slabo zatvoren, ili ekvivalentno, ako i samo ako svaka tačka koja mu ne pripada može biti razdvojena od toga skupa pomoću nekog linearnog funkcionala. U slučaju da je E vektorski potprostor, to znači: $f\in [E]_\omega$ ako i samo ako je $\phi(f)=0$ za svaki funkcional $\phi\in E^\perp$, gdje je $E^\perp$ skup svih funkcionala $\phi\in (N^p)^*$ koji se anuliraju na E. Otuda neposredno dobijamo slijedeći rezultat.

Lema 2.4. *Zatvoren potprostor od N^p ima separativno svojstvo ako i samo ako je slabo zatvoren.*

Lema 2.5. *Za svaku unutrašnju funkciju I, slabo zatvorenje invarijantnog potprostora IN^p je takodje invarijantan potprostor.*

Dokaz. Pretpostavimo $f\in [IN^p]_\omega$ i $\phi\in (IN^p)^\perp$. Potrebno je dokazati da funkcija $zf(z)$ pripada slabom zatvorenju od IN^p, tj. da je $\phi(zf)=0$. Definišimo linearan funkcional ϕ_1 na N^p kao

$$\phi_1(f)=\phi(zf),\quad f\in N^p.$$

Kako je $\phi_1(Ig)=\phi(Izg)=0$ za svako $g\in N^p$, vidimo da je $\phi_1\in (IN^p)^\perp$. Otuda slijedi da je $\phi_1(f)=0$, odnosno $\phi(zf)=0$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.6. *Neka je $1<p<\infty$. Za svaku unutrašnju funkciju I postoji jednoznačno odredjena unutrašnja funkcija I_ω za koju važi*

$$[IN^p]_\omega = I_\omega N^p.$$

Osim toga, $J = I/I_\omega$ je takodje unutrašnja funkcija.

Dokaz. Na osnovu leme 2.5, $[IN^p]_\omega$ je invarijantan potprostor za bilo koju unutrašnju funkciju I. Otuda i iz teoreme 2.3 slijedi da postoji unutrašnja funkcija I_ω takva da važi

$$(2.1) \qquad [IN^p]_\omega = I_\omega N^p.$$

Jednoznačnost pripadne funkcije I_ω slijedi neposredno iz jedinstvenosti faktorizacije za klasu N^p. Konačno, uzimajući u obzir da je slaba topologija slabija od inicijalne na N^p, dobijamo $IN^p = [IN^p] \subseteq [IN^p]_\omega$, što na osnovu (2.1) daje $IN^p \subseteq I_\omega N^p$. Iz te inkluzije neposredno slijedi da je $J = I/I_\omega$ unutrašnja funkcija, čime je teorema dokazana.

5.3. Slabo zatvorenje ideala u prostorima N^p

Na osnovu teoreme 2.1 svaki zatvoren ideal od N^p koji nije identički jednak nuli je glavni ideal generisan nekom unutrašnjom funkcijom. U ovom poglavlju pokazujemo da postoje takvi ideali čije je slabo zatvorenje u N^p jednako cijelom tom prostoru. Dajemo tri ekvivalentna kriterijuma da bi slabo zatvorenje ideala od N^p generisanog unutrašnjom funkcijom bilo jednako N^p. Osim toga, za posebne klase takvih unutrašnjih funkcija pokazujemo da njima generisan ideal ima separativno, odnosno i Hahn-Banachovo svojstvo.

Napomenimo da prostor F^p funkcija holomorfnih na D, uveden u gl. 3, pogl. 1, sa pripadnom familijom polunormi $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ definisanom sa

$$(3.1) \qquad |||f|||_{p,c} = \int_0^1 \exp\left(-c(1-r)^{-1/p}\right) \max_{|z|\le r} |f(z)|\, dr, \qquad f \in F^p, \qquad c > 0,$$

čini Fréchetovu algebru i osim toga F^p je Fréchetov omotač prostora N^p (vidj. teoreme 1.4 i 2.7 iz gl. 3). Nadalje, na osnovu teoreme 4.4, gl. 3, prostori N^p i F^p imaju isti dual $(N^p)^* = (F^p)^*$ u skupovnom i topološkom smislu.

Za bilo koji podskup E od N^p označimo sa $[E]$ zatvorenje od E u N^p, sa $[E]_\omega$ zatvorenje od E u odnosu na slabu topologiju od N^p, a sa $[E]_{F^p}$ zatvorenje od E u odnosu na topologiju od F^p datu familijom polunormi (3.1). Tada važi slijedeće tvrdjenje.

Teorema 3.1. *Ako je E vektorski potprostor (ili konveksan podskup) od N^p, tada važi*

$$(3.2) \qquad [E]_\omega = [E]_{F^p} \cap N^p.$$

Dokaz. Na osnovu ([KN], str. 154, tvrdjenje 17.1) potprostor (ili konveksan podskup) lokalno konveksnog topološkog vektorskog prostora je zatvoren ako i samo ako je slabo zatvoren. Stoga se $[E]_{F^p}$ sastoji od svih funkcija $f \in F^p$ koje ne mogu biti razdvojene od E nijednim neprekidnim linearnim funkcionalom iz $(F^p)^*$. Kako je na osnovu teoreme 4.4, gl. 3 $(N^p)^* = (F^p)^*$, zaključujemo da se skup $[E]_{F^p} \cap N^p$ sastoji od svih funkcija $f \in N^p$ koje ne mogu biti razdvojene od E nijednim neprekidnim linearnim funkcionalom iz $(N^p)^*$. To je upravo skup $[E]_\omega$, što je i trebalo dokazati.

Posljedica 3.2. *Ako je $\mathcal{M}$ proizvoljan ideal u N^p, tada su $[\mathcal{M}]$ i $[\mathcal{M}]_\omega$ takodje ideali u N^p.*

Dokaz. Da je $[\mathcal{M}]$ ideal u N^p slijedi neposredno iz neprekidnosti množenja u N^p. Takodje, kako je množenje u F^p neprekidno i kako je na osnovu teoreme 1.5 (a), gl. 3, N^p gust potprostor od F^p, zaključujemo da je $[\mathcal{M}]_{F^p}$ isto ideal u F^p. Dakle, na osnovu (3.2), teorema 3.1, slijedi da je $[\mathcal{M}]_\omega$ ideal od N^p.

Iako slaba topologija od N^p nije metrizabilna, slijedeća posljedica pokazuje da barem za vektorske potprostore (više uopšteno za konveksne podskupove) od N^p njihovo slabo zatvorenje može biti opisano preko *adjungovanih graničnih vrijednosti nizova.*

Posljedica 3.3. *Ako je E vektorski potprostor (ili konveksan podskup) od N^p, tada se svaka funkcija iz slabog zatvorenja od E može prikazati kao slaba granična vrijednost nekog niza elemenata iz E.*

Dokaz. Uzmimo $f \in [E]_\omega$. Tada je na osnovu teoreme 3.1 $f \in [E]_{F^p}$, pa stoga postoji niz $\{f_n\}$ u E takav $f_n \to f$ u prostoru F^p. Otuda slijedi da $f_n \to f$ slabo u prostoru F^p, a samim tim i $f_n \to f$ slabo u prostoru N^p.

Posljedica 3.4. *Neka je I unutrašnja funkcija. Za svako fiksno $p > 1$ slijedeća tri tvrdjenja su ekvivalentna.*
(i) $[IN^p]_\omega = N^p$.
(ii) *IN^p je gust podskup od F^p.*
(iii) *IF^p je gust podskup od F^p.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii) slijedi neposredno iz teoreme 3.1.
(ii)$\Rightarrow$(iii) je očito, uzimajući u obzir da je $IN^p \subset IF^p$
(iii)$\Rightarrow$(ii). Uzmimo $f \in F^p$. Tada na osnovu (ii) postoji niz $\{f_n\}$ u F^p takav da da $If_n \to f$ u prostoru F^p. Budući da je na osnovu teoreme 1.5 (a), gl. 3 N^p gust podskup od F^p, to postoji niz $\{g_n\}$ u N^p takav da $f_n - g_n \to 0$ u prostoru F^p. Odatle, na osnovu neprekidnosti množenja u F^p zaključujemo da $If_n - Ig_n \to 0$ u F^p, odnosno $Ig_n \to f$ u F^p. Dakle, f pripada zatvorenju od IN^p u F^p, odakle slijedi (ii).

Ako je T neprekidan linearan operator na prostoru N^p, tada se *adjungovani operator* T^* definiše na prostoru $(N^p)^*$ na uobičajen način kao

$$(T^*\varphi)(f) = \varphi(Tf), \quad \varphi \in (N^p)^*, f \in N^p.$$

Lema 3.5. *Svaki neprekidan linearan operator L na N^p je ujedno i slabo neprekidan.*

Dokaz. Pretpostavimo $f_\alpha \to f$ slabo, tj. $\psi(f_\alpha) \to \psi(f)$ za svako $\psi \in (N^p)^*$. Tada imamo

$$\varphi(Lf_\alpha) = (L^*\varphi)(f_\alpha) \to (L^*\varphi)(f) = \varphi(Lf),$$

što dokazuje tvrdjenje naše leme.

Sada smo u mogućnosti da dokažemo slijedeći rezultat. Prethodno napomenimo da potprostor od N^p ima separativno svojstvo ako i samo ako je slabo zatvoren. Osim toga, kažemo da zatvoren potprostor od E od N^p ima *Hahn-Banachovo svojstvo* ako se svaki neprekidan linearan funkcional definisan na proizvoljnom zatvorenom potprostoru od E može po neprekidnosti proširiti na cijeli prostor E. Na osnovu posljedice 5.3, gl. 2, nijedan prostor N^p nema Hahn-Banachovo svojstvo.

Teorema 3.6. *Neka je I proizvoljna unutrašnja funkcija. Tada važe slijedeća tvrdjenja.*

(i) *Ako je I konačan Blaschkeov proizvod, tada prostor IN^p posjeduje i separativno i Hahn-Banachovo svojstvo.*

(ii) *Ako je I proizvoljan Blaschkeov proizvod, tada prostor IN^p posjeduje separativno svojstvo.*

(iii) *Ako prostor IN^p ne posjeduje separativno svojstvo i ako je J bilo koja unutrašnja funkcija, tada ni prostor IJN^p ne posjeduje separativno svojstvo.*

Dokaz. (i) Ako je I konačan Blaschkeov proizvod, tada prostor IN^p ima konačnu kodimenziju. Stoga, (i) neposredno slijedi iz trivijalne činjenice da u proizvoljnom topološkom vektorskom prostoru svaki zatvoren potprostor konačne kodimenzije posjeduje i separativno i Hahn-Banachovo svojstvo.

(ii) Ako je I Blaschkeov proizvod i $f \notin IN^p$, tada se ili funkcija f ne poništava u nekoj od nula od I, ili f ima nulu od I koja je veće kratnosti od iste u I. Uzmimo u oba slučaja da se radi o nuli $\xi \in D$, s time da je u drugom slučaju ξ nula od I kratnosti n, a samim tim kratnosti $\geq n+1$ za funkciju f. U prvom slučaju definišimo linearan funkcional δ_ξ na N^p kao $\delta_\xi(f) = f(\xi)$, $f \in N^p$. Tada je na osnovu posljedice 4.5, gl. 2, funkcional δ_ξ neprekidan na N^p. Osim toga, očito važi $\delta_\xi(g) = 0$ za svako $g \in IN^p$ i $\delta_\xi(f) \neq 0$, pa otuda slijedi da je δ_ξ traženi razdvajajući linearan funkcional. U drugom slučaju definišimo linearan funkcional $\delta_\xi^{(n)}$ na N^p kao $\delta_\xi^{(n)}(f) = f^{(n)}(\xi)$, $f \in N^p$. Tada je na osnovu posljedice 4.8, gl. 2, funkcional $\delta_\xi^{(n)}$ neprekidan na N^p. Dalje, potpuno istovjetno kao u prvom slučaju zaključujemo da je $\delta_\xi^{(n)}$ željeni razdvajajući funkcional.

(iii) Pretpostavimo da za neku unutrašnju funkciju J prostor IJN^p ima separativno svojstvo, tj. da važi

$$[IJN^p]_\omega = IJN^p.$$

Na osnovu pretpostavke, prostor IN^p nema separativno svojstvo, odnosno nije slabo zatvoren. To znači da je $I \neq I_\omega$, gdje je I_ω unutrašnja funkcija iz teoreme 2.6 ove glave pridružena funkciji I za koju važi

$$[IN^p]_\omega = I_\omega N^p.$$

Dakle, IN^p je slabo gust potprostor od $I_\omega N^p$, pa na osnovu leme 3.5 zakjučujemo da je JIN^p slabo gust potprostor od $JI_\omega N^p$. Stoga dobijamo

$$IJN^p = [IJN^p]_\omega = [I_\omega JN^p]_\omega \supset I_\omega JN^p \supset IJN^p.$$

Kako je zbog $I \neq I_\omega$ zadnja inkluzija prava, dobijamo kontradikciju, što dokazuje tvrdjenje (iii). Time je teorema u potpunosti dokazana.

5.4. Slabo gusti ideali u prostorima N^p

Posljedica 1.8 iz ove glave tvrdi da glavni ideal fN^p, generisan funkcijom $f \in N^p$ čini gust podskup od N^p ako i samo ako je f vanjska funkcija. Motivisani tom činjenicom, za unutrašnju funkciju I kažemo da je *slabo vanjska funkcija* ako je ideal IN^p slabo gust podskup od N^p. To je na osnovu teoreme 2.6 ispunjeno ako i samo ako je $I_\omega \equiv 1$, gdje je I_ω jednoznačno odredjena unutrašnja funkcija za koju važi $[IN^p]_\omega = I_\omega N^p$. Na osnovu teoreme 2.1 ove glave, za svaki zatvoren ideal $\mathcal{M}$ od N^p koji nije identički jednak nuli postoji jedinstvena (modulo konstanta) unutrašnja funkcija I takva da je $\mathcal{M} = IN^p$. Dakle, zatvoreni ideali u N^p su upravo glavni ideali generisani unutrašnjim funkcijama. Budući da na osnovu teoreme 5.2, gl. 2, prostor N^p nije lokalno konveksan, moguće je da neki zatvoreni ideali od N^p čine slabo guste podskupove od N^p. U vezi s tim, za unutrašnju funkciju I kažemo da je *slabo unutrašnja funkcija* ako je ideal IN^p slabo zatvoren u N^p. To je na osnovu teoreme 2.1 ispunjeno ako i samo ako je $I \equiv I_\omega$. U ovom poglavlju dokazujemo da je svaka singularna unutrašnja funkcija ujedno i slabo vanjska funkcija. Za dokaz glavnog rezultata uvodimo treću familiju polunormi u prostoru F^p $(1 < p < \infty)$.

Napomenimo da je za dato $p > 1$, na osnovu teoreme 1.3, gl. 3, familija polunormi $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ definisana pomoću (3.1) ove glave ekvivalentna sa familijom $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$ datom na F^p pomoću formula

$$\|f\|_{p,c} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right), \quad f \in F^p,\ c > 0. \tag{4.1}$$

U ovom poglavlju, radi kratkoće zapisa, pisaćemo $|||\cdot|||_c$ umjesto $|||\cdot|||_{p,c}$. Za svako $c > 0$ definišimo na prostoru F^p funkciju $\|\cdot\|_c^\sim$ kao

$$\|f\|_c^\sim = \left(\frac{1}{\pi}\int\!\!\int_D |f(re^{i\theta})|^2 \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) r\,dr\,d\theta\right)^{1/2}, \quad f \in F^p. \tag{4.2}$$

Koristeći integralnu nejednakost Minkowskog, lako se dobija da za svako $c > 0$ funkcija $\|\cdot\|_c^\sim$ zadovoljava nejednakost trougla. Kako je osim toga svojstvo homogenosti očigledno, slijedi da je $\|\cdot\|_c^\sim$ norma na prostoru F^p. Slijedeća lema pokazuje da je familija (polu)normi $\{\|\cdot\|_c^\sim\}_{c>0}$ na prostoru F^p ekvivalentna sa familijom $\{\|\cdot\|_{p,c}\}_{c>0}$ datom sa (4.1), a samim tim i sa familijom $\{|||\cdot|||_{p,c}\}_{c>0}$ datom sa (3.1).

Lema 4.1. *Neka su $p>1$ i $c>0$ proizvoljni fiksirani realni brojevi. Tada postoje konstante $A=A(c,p)$ i $B=B(c,p)$ koje zavise samo od p i c takve da važi*

$$\|f\|_c^{\sim} \le A\|f\|_{c_1}, \quad f\in F^p, \tag{4.3}$$

i

$$\|f\|_c \le B\|f\|_{c_2}^{\sim}, \quad f\in F^p, \tag{4.4}$$

gdje je $c_1=\frac{c^{p/(p+1)}}{2}$ i $c_2=\left(\frac{c^{p+1}}{3(6^{p+1})}\right)^{1/p}$. Dakle, familije $\{\|\cdot\|_c\}_{c>0}$ i $\{\|\cdot\|_c^{\sim}\}_{c>0}$ definišu istu topološku strukturu na prostoru F^p.

Dokaz. Neka je $f\in F^p$ funkcija s Taylorovim razvojem

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Stavimo

$$u(\theta)=\int_0^1 f(re^{i\theta})\exp\left(\frac{-\lambda}{(1-r)^{1/p}}\right) r\,dr.$$

Tada na osnovu ([St2], str. 146), postoji $n_0\in\mathbf{N}$ takvo da za svako $n\ge n_0$ važi

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{-\lambda}{(1-r)^{1/p}}\right) r^n\,dr \ge \exp\left(-6\lambda^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}\right). \tag{4.5}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
(\|f\|_c^{\sim})^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) r\,dr\,d\theta\\
&= \frac{2\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\left(\int_0^1 r^{2n+1}\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right)\right)dr,
\end{aligned}$$

to na osnovu (4.5) za $c_2>0$ dobijamo

$$\begin{aligned}
(\|f\|_{c_2}^{\sim})^2 &\ge 2\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\exp\left(-6(c_2)^{p/(p+1)}(2n+1)^{1/(p+1)}\right)\\
&\ge 2\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\exp\left(-6(c_2)^{p/(p+1)}(3n)^{1/(p+1)}\right).
\end{aligned}$$

Budući da je na osnovu Cauchyjeve nejednakosti

$$\begin{aligned}
(\|f\|_c)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)^2\\
&\le \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right)\\
&= D\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\exp\left(-cn^{1/(p+1)}\right)\right),
\end{aligned}$$

gdje je je $D < +\infty$, pa stavljajući $c = 6\,(3(c_2)^p)^{1/(p+1)}$, na osnovu gornje dvije nejednakosti dobijamo

$$\left(\|f\|_{c_2}^{\sim}\right)^2 \geq \frac{2}{D}\left(\|f\|_c\right)^2.$$

Dakle, za konstante $B = \sqrt{D/2}$ i $c_2 = \left(\frac{c^{p+1}}{3(6^{p+1})}\right)^{1/p}$ koje zavise samo o c i p važi

$$\|f\|_c \leq B\|f\|_{c_2}^{\sim}.$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}
\left(\|f\|_c^{\sim}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) r\,dr\,d\theta\right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n|^2\left(\int_0^1 r^{2n+1}\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right)\right)dr\right)
\end{aligned}$$

Kako je na osnovu ([St2], str. 145)

$$r^n\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{1/p}}\right) \leq \exp\left(-c^{p/(p+1)}n^{1/(p+1)}\right), \quad 0 < r < 1,$$

iz gornje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
\left(\|f\|_c^{\sim}\right)^2 &\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n|\exp\left(-\frac{c^{p/(p+1)}}{2}n^{1/(p+1)}\right)\right)^2 \\
&= 2\left(\|f\|_{c_1}\right)^2,
\end{aligned}$$

za konstantu $c_1 = c^{p/(p+1)}/2$. Stavljajući $A = \sqrt{2}$, gornja nejednakost postaje

$$\|f\|_c^{\sim} \leq A\|f\|_{c_1} \quad \text{za svako} \quad f \in F^p.$$

Time je dokaz leme završen.

Napomenimo da je *modul neprekidnosti* ω_μ konačne Borelove singularne mjere μ na jediničnoj kružnici T definisan kao funkcija

$$\omega_\mu(\delta) = \sup_{|I|\leq\delta}\mu(I) \quad (\delta > 0),$$

gdje se supremum uzima po svim lukovima od T čija je Lebesgueova mjera (dužina) $m(I) = |I| \leq \delta$.

Primijetimo da iz uslova $\omega_\mu(\delta) = O(\delta)$ slijedi da je mjera μ *apsolutno neprekidna* u odnosu na standardizovanu Lebesgueovu mjeru m na T. Osim toga, poznato je da postoje pozitivne singularne mjere sa unaprijed zadanim modulom neprekidnosti višeg reda od $O(\delta)$; npr. s modulom neprekidnosti $\omega_\mu(\delta) = o(\delta\log\frac{1}{\delta})$, koji je korišćen u dokazu teoreme 5.2, gl. 2. Slijedeća lema nam je neophodna u dokazu teoreme 4.3.

Lema 4.2. *Neka je*

$$S(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} H(z, e^{it})\, d\mu(t)\right)$$

singularna unutrašnja funkcija, gdje je $H(z, e^{it}) = (e^{it} + z)(e^{it} - z)^{-1}$, *a* μ *pozitivna singularna Borelova mjera čiji je modul neprekidnosti* $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$. *Tada važi*

$$|S(re^{i\theta})| \geq \exp\left(-o\left(\frac{1}{(1-r)^{1/p}}\right)\right), \quad 0 \leq r < 1. \tag{4.6}$$

Dokaz. Očito važi relacija

$$-\log|S(re^{i\theta})| = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t), \tag{4.7}$$

gdje je

$$P(r, \theta - t) = \Re H(z, e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}, \quad z = re^{i\theta},$$

Poissonovo jezgro. Kako je $\sin x \geq (2/\pi)x$ za svako $0 \leq x \leq \pi/2$, imamo

$$\begin{aligned} 1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2 &= (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta - t}{2} \\ &\geq (1-r)^2 + (4/\pi^2)\, r(\theta - t)^2. \end{aligned}$$

Pošto je za $r \geq \frac{2}{33}$ očito $(472/\pi^2)r(\theta - t)^2 \geq 2(1-r)(\theta - t)^2$, a za $r < \frac{2}{33}$ zbog $|\theta - t| \leq 2\pi$ očito $91(1-r)^3 \geq 2(1-r)(\theta - t)^2$, dobijamo da je

$$2\left((1-r)^3 + (1-r)(\theta - t)^2\right) \leq 93\left((1-r)^3 + 4/\pi^2 r(\theta - t)^2\right),$$

što na osnovu gornje nejednakosti daje

$$\begin{aligned} P(r, \theta - t) &\leq \frac{2(1-r)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \\ &\leq \frac{93(1-r)}{(1-r)^2 + (\theta - t)^2}, \quad z = re^{i\theta}. \end{aligned}$$

Za korak $h = 2\pi/n$ na osnovu zadnje nejednakosti, (4.7) i uslova $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$ naše leme dobijamo

$$-\log|S(re^{i\theta})| \leq C_1 o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \max_{kh \leq t \leq (k+1)h} \left\{\frac{1-r}{(1-r)^2 + (\theta - t)^2}\right\}. \tag{4.8}$$

Budući da se za svako $\theta \in [0, 2\pi]$, sa izuzetkom početne vrijednosti od k, gornji maksimumi dostižu u krajnjim tačkama pripadnih intervala $[kh, kh + h]$, desna strana od (4.8) je odozgo ograničena sa

$$C_2 o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)\left(\frac{1}{1-r} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-r}{(1-r)^2 + k^2h^2}\right). \tag{4.9}$$

Uzimajući $\delta = 1 - r$, $n = [\delta^{-1}]$ (najveće cijelo od δ), imamo $C_3\delta < h < C_4\delta$ i stoga je izraz (4.9) manji ili jednak od

$$C_5 o\left(\delta^{\frac{p-1}{p}}\right)\left(\delta^{-1} + \delta^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\right) \leq C_6 o\left(\delta^{-\frac{1}{p}}\right),$$

odakle na osnovu (4.8) neposredno slijedi

$$|S(re^{i\theta})| \geq \exp\left(-o\left(\frac{1}{(1-r)^{1/p}}\right)\right),$$

što i predstavlja relaciju (4.6) naše leme.

Na osnovu teoreme 2.1 glavni ideal od N^p je gust u N^p ako i samo ako je generisan vanjskom funkcijom. Slijedeća teorema daje nepotpunu karakterizaciju slabo gustih ideala prostora N^p. Napomenimo da za podskup od N^p kažemo da je slabo gust u N^p ako je gust u odnosu na slabu topologiju od N^p.

Teorema 4.3. *Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren ideal od N^p koji je slabo gust podskup od N^p. Tada je $\mathcal{M}$ glavni ideal generisan nekom singularnom funkcijom. Obratno, ako je S_μ singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom mjerom μ čiji je modul neprekidnosti $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$, tada je ideal $S_\mu N^p$ slabo gust u N^p, tj. S_μ je slabo vanjska funkcija od N^p.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren ideal u odnosu na metričku topologiju od N^p koji je slabo gust podskup od N^p. Tada na osnovu teoreme 2.1 postoji jedinstvena (modulo konstanta) unutrašnja funkcija I takva da je $\mathcal{M} = IN^p$. Pretpostavimo da funkcija I ima barem jednu nulu, tj. da je $I(z) = B(z)S(z)$, gdje je $B(z)$ netrivijalan Blaschkeov faktor od $I(z)$, a $S(z)$ singularni unutrašnji faktor od $I(z)$. Neka je ξ proizvoljna nula od $B(z)$. Kako je na osnovu teoreme 4.5, gl. 2, funkcional δ_ξ definisan kao $\delta_\xi(f) = f(\xi)$ ($f \in N^p$), neprekidan na N^p, to zbog slabe gustoće od $\mathcal{M}$ mora postojati niz $\{f_n\} \subset N^p$ takav da važi $\delta_\xi(Bf_n) \to \delta_\xi(1)$ kada $n \to \infty$. To drugim riječima znači $B(\xi)f_n(\xi) \to 1$ kada $n \to \infty$, što zbog uslova $B(\xi) = 0$ daje $0 = 1$. Ta kontradikcija pokazuje da I mora biti singularna unutrašnja funkcija, tj. $I(z) \equiv S(z)$.

Obratno, pretpostavimo da je S_μ singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom singularnom mjerom μ čiji je modul neprekidnosti jednak $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$. Na osnovu (i)$\Leftrightarrow$(ii), posljedica 3.4, dovoljno je dokazati da je IN^p gust podskup od F^p. Uzimajući u obzir da je F^p Fréchetova algebra u kojoj je skup svih polinoma $\mathcal{P}$ gust, to je ekvivalentno sa činjenicom da je skup $\mathcal{P}N^p = \{Pf : P \in \mathcal{P}, f \in N^p\}$ gust podskup od F^p. Kako su na osnovu leme 4.1 familije (polu)normi $\{\|\cdot\|_c^\sim\}_{c>0}$ i $\{\|\cdot\|_c\}_{c>0}$ definisane pomoću (4.1) i (4.2) respektivno, medjusobno ekvivalentne, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{P}N^p$ gust podskup u svakom normiranom prostoru $(F^p, \|\cdot\|_c^\sim)$ za $c > 0$. Uzmimo proizvoljnu konstantu $c > 0$. Na osnovu pretpostavke teoreme postoji $0 < \rho < 1$ tako da za minimum modula $m(|z|) = \min_{|z|=r} |S_\mu(z)|$ od S_μ vrijedi

$$m(|z|) \geq |S(z)| \geq \exp\left(-\frac{c}{4(1-|z|)^{1/p}}\right), \quad \text{za } |z| \geq \rho. \tag{4.10}$$

Označimo sa p_n $n-$te *Cesàrove sume* (n-te aritmetičke sredine) parcijalnih suma Taylorovog reda funkcije $1/S_\mu(z)$. Tada $p_n(z) \to 1/S_\mu(z)$ ravnomjerno na kompaktnim podskupovima od D, pa tim više važi $p_n(z) \to 1/S_\mu(z)$ za svako $z \in D$. Na osnovu ([L]; Kap.1, teorema 1, str. 22]) važi

$$\max_{|z|=r} |p_n(z)| \le \max_{|z|=r} \frac{1}{|S_\mu(z)|},$$

odakle na osnovu (4.10) neposredno dobijamo

$$\max_{|z|=r} |p_n(z)| \le \frac{1}{m(|z|)} \le \exp\left(\frac{c}{4(1-|z|)^{1/p}}\right) \quad \text{za} \quad |z| \ge \rho, \tag{4.11}$$

odnosno

$$\max_{|z|=r} |p_n(z)| \le \frac{1}{m(|z|)} \le \exp\left(\frac{c'}{(1-|\rho|)^{1/p}}\right) \quad \text{za} \quad |z| \le \rho \tag{4.12}$$

i za neku pozitivnu konstantu c'. Kako je na osnovu teoreme 1.4, gl. 1, $|S_\mu(z)| \le 1$ za svako $z \in D$, na osnovu nejednakosti (4.11) i nejednakosti $(x+y)^2 \le 2\left(|x|^2 + |y|^2\right)$ dobijamo

$$\begin{aligned} &|1 - p_n(z)S_\mu(z)|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) \\ &\le\ 2|p_n(z)|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) + 2\exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) \\ &\le\ 2\exp\left(-\frac{c}{2(1-|z|)^{1/p}}\right) + 2\exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) \quad \text{za} \quad |z| \ge \rho, \end{aligned}$$

odnosno na osnovu nejednakosti (4.12)

$$\begin{aligned} &|1 - p_n(z)S_\mu(z)|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) \\ &\le\ 2(|p_n(z)|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) + 2\exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right) \\ &\le\ 2\exp\left(-\frac{c-2c'}{(1-|\rho|)^{1/p}}\right) + 2\exp\left(-\frac{c}{(1-|\rho|)^{1/p}}\right) \quad \text{za} \quad |z| \le \rho. \end{aligned}$$

Iz gornje dvije nejednakosti zaključujemo da je niz funkcija $\{f_n\}$ definisan kao

$$f_n(z) = |1 - p_n(z)S_\mu(z)|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1-|z|)^{1/p}}\right), \quad z \in D$$

odozgo ograničen sa funkcijom koja je integrabilna na D u odnosu na normalizovanu površinsku Lebesgueovu mjeru $rdrd\theta/\pi$. Budući da za svako $z \in D$ važi $f_n(z) \to 0$

kada $n \to \infty$, na osnovu Lebesgueove teoreme o dominiranoj konvergenciji za konstantu $c" = \min\{\frac{c}{2}, c'\}$ dobijamo da niz

$$(\|p_n S_\mu - 1\|_c^\sim)^2$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |1 - p_n(re^{i\theta}) S_\mu(re^{i\theta})|^2 \exp\left(-\frac{c}{(1 - |re^{i\theta}|)^{1/p}} \right) r dr d\theta$$

konvergira nuli kada $n \to \infty$. Dakle, $\|p_n S_\mu - 1\|_c^\sim \to 0$ kada $n \to \infty$, odnosno $p_n S_\mu \to 1$ kada $n \to \infty$. To pokazuje da je skup $S_\mu N^p$ gust u normiranom prostoru $(F^p, \|\cdot\|_c^\sim)$, čime je teorema dokazana.

Komentar. U ([S1], teorema na str. 122) J. H. Shapiro daje skraćeni dokaz tvrdjenja da je zatvoren ideal prostora Smirnova N^+ slabo zatvoren ako i samo ako je generisan singularnom unutrašnjom funkcijom. U radu ([S], teorema 3) F. A. Shamoyan dokazuje jaču tvrdnju, odnosno dokazuje da je svaka singularna unutrašnja funkcija S ujedno i *slabociklički element* prostora N^+. To znači da postoji niz polinoma $\{P_n\}$ takav da važi

$$\lim_{n \to \infty} \phi(P_n S) = \phi(1) \tag{4.10}$$

za svaki neprekidan linearan funkcional ϕ na prostoru N^+. Dok niz $\{P_n\}$ ne zavisi pojedinačno od funkcionala ϕ, pojam slabo gustog ideala podrazumijeva da za svaki linearan funkcional ϕ na N^+ postoji niz funkcija $\{f_n\}$ koji zavisi od ϕ za koji vrijedi (4.10) (sa f_n umjesto P_n).

Posljedica 4.4. *Neka je S_μ netrivijalna singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom mjerom μ čiji je modul neprekidnosti $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$. Tada za zatvoren ideal $S_\mu N^p$ od N^p važe slijedeća tvrdjenja.*

(i) *Ako je ϕ neprekidan linearan funkcional na N^p koji se anulira na prostoru $S_\mu N^p$, tada je ϕ identički jednak nuli na cijelom prostoru N^p.*

(ii) *Količnički prostor $N^p / S_\mu N^p$ nema neprekidne linearne funkcionale izuzev nula funkcionala.*

(iii) *Prostor $S_\mu N^p$ nema separativno, a samim tim ni Hahn-Banachovo svojstvo.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.3 prostor $S_\mu N^p$ je slabo gust u N^p, pa su sva tri svojstva (i), (ii) i (iii) neposredne posljedice te činjenice. (vidj. [DRS], teorema 16, str. 59, gdje se analogno tvrdjenje navodi za bilo koji topološki vektorski prostor sa pripadnim topološkim dualom koji razdvaja tačke tog prostora).

Posljedica 4.5. *Neka je $p > 1$ i S_μ netrivijalna singularna unutrašnja funkcija sa pridruženom singularnom mjerom μ čiji je modul neprekidnosti $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$. Tada je količnički prostor $N^p / S_\mu N^p$ F-prostor sa trivijalnim dualom.*

Dokaz. Pošto je $S_\mu N^p$ zatvoren ideal, a samim tim i potprostor od N^p, to je

$N^p/S_\mu N^p$ F-prostor sa infimum F-normom $\|\cdot\|$ definisanom kao

$$\|\tilde{f}\| = \inf_{f\in\tilde{f}} \|f\|, \quad \tilde{f} \in N^p/S_\mu N^p.$$

Na osnovu tvrdjenja (ii) prethodne teoreme slijedi da prostor $N^p/S_\mu N^p$ ima trivijalan dual.

Komentar. Duren, Romberg i Shields su dokazali u ([DRS], posljedica 1, str. 53) da za svaku singularnu unutrašnju funkciju S_μ čiji je modul neprekidnosti jednak $\omega_\mu(h) = O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$ količnički prostor $H^p/S_\mu H^p$ ima trivijalan dual za svaki Hardyjev prostor H^p $(0 < p < 1)$. Autori ističu da takve neopadajuće singularne funkcije μ mogu biti konstruisane kao *Lebesgueove funkcije* nad *Cantorovim skupom*. Drugi primjer se bazira na tzv. *Rieszovom proizvodu* datom u [D1]. Iz ocjene $t = o(e^{\frac{t}{p}})$ zaključujemo da je klasa pozitivnih singularnih mjera μ čiji je modul neprekidnosti jednak $\omega_\mu(h) = o\left(h^{\frac{p-1}{p}}\right)$ šira od klase istih čiji je modul neprekidnosti jednak $\omega_\mu(h) = O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$ uvedenih u pogl. 5, gl. 2. Dakle, posljedica 4.5 daje u odnosu na posljedicu 5.3, gl. 2 širu klasu F-prostora sa trivijalnim dualom.

5.5. Logaritamski analogon Szegöove teoreme

Szegöova teorema daje eksplicitni izraz za infimum težinskih L^p-normi nad jediničnom kružnicom T za normalizirane holomorfne funkcije na jediničnom disku D. Glavni rezultat ovog poglavlja daje u terminima metrika Smirnovljeve klase N^+ i klasa N^p $(1 < p < \infty)$, logaritamsku verziju Szegöove teoreme.

Neka je $L^p(T)$ $(1 \le p < \infty)$ uobičajeni Lebesgueov prostor na jediničnoj kružnici T. Neka $\mathcal{P}_0$ označava klasu svih polinoma P nad poljem $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva za koje važi $P(0) = 1$. Slijedeća Szegöova teorema predstavlja izraz za infimum normi elemenata iz prostora $\mathcal{P}_0$ u *težinskim* L^p-prostorima.

Teorema 5.1. (Szegö). *Neka je $p > 0$ i neka je $\omega \in L^1(T)$ nenegativna funkcija. Tada važi:*

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^p \omega(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \log\omega(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\right). \tag{5.1}$$

Ovu teoremu je inače formulisao i dokazao G. Szegö u svom radu [Sz] još 1920. godine za slučaj $p = 2$. Dokaz čuvene Szegöove teoreme (slučaj $p \ge 1$), koji je dat u Koosisovoj knjizi ([Ko], gl. VII, pogl. 2 C) bazira se na nekim svojstvima Hardyjevih prostora H^p; posebno unutrašnjo-vanjskoj faktorizaciji (vidj. teorema 1.5 (d), gl. 1), gustoći polinoma u H^p i Beurlingovoj teoremi za klase H^p (vidj. teorema 1.1). Motivisani činjenicom da su ta svojstva slična odgovarajućim za $F-$algebre N^+ i N^p $(1 < p < \infty)$, mi ovdje formulišemo i dokazujemo logaritamsku verziju Szegöove teoreme. Primijetimo da relacija (5.3) za $p = 1$ i $K = \exp\left(\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ može biti napisana u obliku

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0} \|\omega P\|_{L^1} = \|K\|_{L^1},$$

gdje $\|\cdot\|_{L_1}$ označava normu u prostoru $L^1(T)$. Zamjenjujući u gornjoj jednakosti $\|\cdot\|_{L^1}$ sa pripadnim metrikama $d_1(\cdot,0)$ na N^+, odnosno $d_p(\cdot,0)$ na N^p, dobijamo relaciju (5.3) iz teoreme 5.2.

Kao primjenu tog rezultata, u narednom poglavlju dajemo neophodne i dovoljne uslove da bi inicijalna metrička topologija d_p bila ekvivalentna sa "težinskom metričkom topologijom" d_ω definisanom na N^p (ili na N^+), gdje je ω pozitivna mjerljiva funkcija na T za koju je $\log^+\omega \in L^p(T)$.

Neka je $p \geq 1$ realan broj i neka je ω mjerljiva u Borelovom smislu na T nenegativna funkcija za koju je $\log^+\omega \in L^p(T)$. Razmotrimo funkcional ϕ_ω na N^p definisan kao

$$(5.2) \qquad \phi_\omega(f) = \left(\int_0^{2\pi} \left(\log\left(1+|f^*(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \quad f \in N^p.$$

Kombinujući nejednakost $\log(1+|a+b|) \leq \log(1+|a|)+\log(1+|b|)$ sa Minkowskijevom integralnom nejednakošću zaključujemo da je funkcional ϕ_ω subaditivan na N^p, tj. važi

$$\phi_\omega(f+g) \leq \phi_\omega(f) + \phi_\omega(g), \quad f, g \in N^p.$$

Stoga, ako funkcija ω nije identički jednaka nuli skoro svuda na T, na osnovu Riesz-ove teoreme jedinstvenosti (vidj. teorema 1.2, gl. 1), vidimo da je ϕ_ω F-norma na N^p. Postupajući sasvim analogno kao u dokazu teoreme 4.2 iz [St2] dobijamo da je funkcional ϕ_ω neprekidan na N^p. Slijedeći rezultat daje eksplicitni izraz za infimum funkcionala ϕ_ω ("težinske N^p F–norme") uzetog nad svim polinomima P za koje važi $P(0)=1$.

Teorema 5.2. *Neka je $p \geq 1$ i neka je ω nenegativna mjerljiva funkcija definisana skoro svuda na T, za koju važi $\log^+\omega \in L^p(T)$. Tada važi*

$$(5.3) \quad \inf_{P\in\mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p\left(1+|P(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right)\frac{d\theta}{2\pi} = \log^p\left(1+\exp\left(\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right)\right).$$

Dokaz. Podsjetimo se da sa N^1 označavamo prostor N^+. Razmotrićemo dva moguća slučaja.

Slučaj 1. $\log\omega \in L^1(T)$. Kako je $\log^+\omega \in L^p(T)$, vidimo na osnovu faktorizacione teoreme 1.5 (a), (b), gl. 1, da je funkcija $F(z)$ definisana pomoću formule

$$F(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} H(z,e^{it})\log\omega(e^{it})\frac{dt}{2\pi}\right), \quad z \in D,$$

vanjska u prostoru N^p i pri tome važi $|F^*(e^{i\theta})| = \omega(e^{i\theta})$ skoro svuda na T. Stavimo

$$K = \exp\left(\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right).$$

Za proizvoljni polinom $P \in \mathcal{P}_0$ funkcija $G = PF$ pripada klasi N^p. Stoga, na osnovu relacije (5.3), teorema 5.3, gl. 1, imamo

$$\int_0^{2\pi}\log^p(1+|G(e^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_0^{2\pi}\log^p(1+|G(0)|)\frac{d\theta}{2\pi} = \log^p(1+K),$$

što povlači da je infimum u (5.3) veći ili jednak od $\log^p(1+K)$.

Preostaje dokazati da je infimum u (5.3) manji ili jednak od $\log^p(1+K)$. Na osnovu teoreme 1.3 postoji niz polinoma $\{Q_n\}$ takav da $Q_nF \to K$ u prostoru N^p kada $n \to \infty$. Iz te činjenice i relacije (5.3), teorema 5.3, gl. 1, zaključujemo da $Q_n(0)F(0) \to K$, tj. $Q_n(0) \to 1$ kada $n \to \infty$. Stoga, koristeći činjenicu da je na osnovu teoreme 5.2, gl. 1, množenje u F−prostoru N^p neprekidna operacija, dobijamo $\frac{1}{Q_n(0)}Q_nF \to K$ u N^p kada $n \to \infty$. Zbog toga za niz $\{P_n\} = \left\{\frac{Q_n}{Q_n(0)}\right\} \subset \mathcal{P}_0$, dobijamo $d_p(P_nF, 0) \to d_p(K, 0)$ kada $n \to \infty$, što je ekvivalentno sa

$$\int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + |P_n(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \to \log^p(1+K) \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

To pokazuje da je infimum u (5.3) manji ili jednak od $\log^p(1+K)$. Time je (5.3) dokazano za prvi slučaj.

Slučaj 2. $\log\omega \notin L^1(T)$. U tom slučaju, s obzirom da je $\log^+\omega \in L^1(T)$, imamo

$$\int_0^{2\pi} \log\omega(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = -\infty.$$

Dakle, treba pokazati da je infimum na lijevoj strani u (5.3) jednak 0. Definišimo niz funkcija $\{\omega_n\}$ na T kao

$$\omega_n(e^{i\theta}) = \max\left\{\omega(e^{i\theta}), \frac{1}{n}\right\}.$$

Tada je očigledno $\log\omega_n \in L^1(T)$ za svako $n \in \mathrm{N}$. Osim toga, očito važi

$$\int_0^{2\pi} \log\omega_n(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \to -\infty \quad \text{kada} \quad n \to \infty. \tag{5.4}$$

Budući da je $\omega_n(e^{i\theta}) \geq \omega(e^{i\theta})$, na osnovu prvog slučaja dobijamo

$$\begin{aligned}
&\inf_{P\in\mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + |P(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leq \inf_{P\in\mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + |P(e^{i\theta})|\omega_n(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \log^p\left(1 + \exp\left(\int_0^{2\pi} \log\omega_n(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\right)\right).
\end{aligned}$$

Na osnovu gornje relacije i (5.4), puštajući da $n \to \infty$, neposredno slijedi

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p\left(1 + |P(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Time je dokaz teoreme kompletiran.

Komentar. (Približavanje dokazu Szegöove teoreme). Pretpostavimo da je $\omega \in L^1(T)$ i da je $\log\omega \in L^1(T)$. Iz nejednakosti $\log^+ x \le x^q/qe$, $x \ge 0, q > 0$, slijedi da je $\log^+\omega \in L^p(T)$. Na osnovu teoreme 5.2, za svako $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0}\int_0^{2\pi}\log^p\left(1+\frac{|P(e^{i\theta})|\left(\omega(e^{i\theta})\right)^{1/p}}{n}\right)\frac{d\theta}{2\pi}=\log^p\left(1+\frac{M}{n}\right),$$

za konstantu $M=\exp\left(p^{-1}\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right)$. Množenjem gornje relacije sa n^p dobijamo

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0}\int_0^{2\pi}\log^p\left(1+\frac{|P(e^{i\theta})|\left(\omega(e^{i\theta})\right)^{1/p}}{n}\right)^n\frac{d\theta}{2\pi}=\log^p\left(1+\frac{M}{n}\right)^n$$

Prelaskom na limes $n\to\infty$, iz gornje relacije neposredno dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{P\in\mathcal{P}_0}\int_0^{2\pi}\log^p\left(1+\frac{|P(e^{i\theta})|\left(\omega(e^{i\theta})\right)^{1/p}}{n}\right)^n\frac{d\theta}{2\pi}=M^p.$$

Ako bi bilo moguće zamijeniti limes i infimum u lijevoj strani gornje jednakosti, tada bismo mogli primijeniti Lebesgueovu teoremu o monotonoj konvergenciji koja direktno daje

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_0}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^p\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}=\exp\left(\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right).$$

Ta relacija faktički predstavlja Szegöovu teoremu 5.1 za slučaj $p\ge 1$.

5.6. Težinski N^p prostori

Kako je funkcional ϕ_ω definisan pomoću relacije (5.2) prethodnog poglavlja subaditivan na prostoru N^p, funkcija d_ω definisana na N^p pomoću formule

$$d_\omega(f,g)=\phi_\omega(f-g),\quad f,g\in N^p,$$

je očito aditivno invarijantna metrika na N^p. Radi jednostavnosti zapisa, u ovom poglavlju označavaćemo sa N^p_ω (respektivno N^p) metrički prostor (N^p_ω, d_ω) (respektivno (N^p, d_p)). Napomenimo da je $p\ge 1$, kao i da je $N^1=N^+$. Prostor (N^p_ω, d_ω) ćemo zvati *težinskim* N^p prostorom sa težinom ω.

Teorema 6.1. *Pretpostavimo da je ω pozitivna mjerljiva funkcija na T za koju je $\log^+\omega\in L^p(T)$. Neka $\tilde{\mathcal{P}}$ označava skup svih polinoma P za koje važi $P(0)=0$. Tada 1 pripada zatvorenju skupa $\tilde{\mathcal{P}}$ u prostoru N^p_ω ako i samo ako je $\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}=-\infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\int_0^{2\pi}\log\omega(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}=-\infty$. Tada na osnovu teoreme 5.2 postoji niz polinoma $\{P_n\}\subset\mathcal{P}_0$ za koji važi

$$\int_0^{2\pi}\log^p\left(1+|P_n(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right)\frac{d\theta}{2\pi}\to 0\quad\text{kada}\quad n\to\infty,$$

što je ekvivalentno sa $d_\omega(P_n, 0) \to 0$. Otuda, ako definišemo niz polinoma $\{Q_n\}$ kao $Q_n = 1 - P_n$, vidimo da je $\{Q_n\} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ i da $d_\omega(1 - Q_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$. To znači da 1 pripada zatvorenju skupa $\tilde{\mathcal{P}}$ u prostoru N^p_ω.

Obrnuto, pretpostavimo da 1 pripada zatvorenju skupa $\tilde{\mathcal{P}}$ u prostoru N^p_ω. To znači da postoji niz polinoma $\{Q_n\} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ takav da važi $d_\omega(1 - Q_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$. Otuda, stavljajući $P_n = 1 - Q_n$, slijedi da je $\{P_n\} \subset \mathcal{P}_0$ niz polinoma za koji važi $d_\omega(P_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$, što je ekvivalentno sa

$$\int_0^{2\pi} \log^p \left(1 + |P_n(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Otuda direktno slijedi

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p \left(1 + |P(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} = 0,$$

što na osnovu relacije (5.3) iz teoreme 5.2 povlači da mora biti

$$\int_0^{2\pi} \log \omega(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = -\infty.$$

Time je dokaz teoreme kompletiran.

Teorema 6.2. *Pretpostavimo da je ω pozitivna mjerljiva funkcija na T za koju je $\log^+ \omega \in L^p(T)$. Tada važe slijedeća tvrdjenja.*

(i) *Topologija na N^p indukovana pomoću metrike d_p je jača od topologije indukovane na N^p pomoću metrike d_ω.*

(ii) *Ako metrike d_p i d_ω odredjuju istu topologiju na prostoru N^p, tada je $\log \omega \in L^1(T)$. Obratno tvrdjenje je istinito ako dodatno pretpostavimo da je $\log \omega \in L^p(T)$.*

Dokaz. (i) Uzmimo da je $\{f_n\}$ niz u N^p i da je $f \in N^p$ funkcija takva da važi $f_n \to f$ u N^p kada $n \to \infty$. Koristeći standardan argument primijenjen u dokazu teoreme 4.2 iz [St2] možemo zaključiti da važi

$$\int_0^{2\pi} \log^p \left(1 + |f_n^*(e^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty,$$

što je ekvivalentno sa $f_n \to f$ u prostoru N^p_ω kada $n \to \infty$. Time je (i) dokazano.

(ii) Pretpostavimo da je $\log \omega \notin L^1(T)$. Otuda i iz činjenice da je $\log^+ \omega \in L^p(T) \subseteq L^1(T)$ slijedi da je $\int_0^{2\pi} \log \omega(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = -\infty$. Stoga, na osnovu teoreme 5.2 postoji niz polinoma $\{P_n\}$ za koje je $P_n(0) = 1$ i takav da $P_n \to 0$ u prostoru N^p_ω. S druge strane, na osnovu iste teoreme dobijamo

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_0} \int_0^{2\pi} \log^p \left(1 + |P(e^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi} = (\log 2)^p,$$

te stoga $\{P_n\}$ ne konvergira ka 0 u prostoru N^p. Time je dobijena kontradikcija.

Obrnuto, pretpostavimo da važi $\log \omega \in L^p(T)$. Tada na osnovu implikacije (i)$\Rightarrow$(ii) iz teoreme 6.3, imamo $\omega(e^{i\theta}) = F^*(e^{i\theta})$ skoro svuda na T za neku vanjsku funkciju F koja je invertibilna u N^p. Uzmimo da je $\{f_n\}$ niz u N^p i da je $f \in N^p$ tako da važi $f_n \to f$ u prostoru N^p_ω kada $n \to \infty$. To drugim riječima znači da $f_nF \to fF$ u N^p. Dakle, na osnovu neprekidnosti množenja u prostoru N^p, slijedi da $f_n \to f$ u N^p kada $n \to \infty$. Otuda i na osnovu tvrdjenja (i), zaključujemo da se metrička topologija d_ω podudara sa metričkom topologijom d_p. Time je dokaz teoreme završen.

Teorema 6.3. *Slijedeća tvrdjenja o pozitivnoj mjerljivoj funkciji ω na T za koju je $\log^+\omega \in L^p(T)$ su ekvivalentna.*

(i) $\log\omega \in L^p(T)$.

(ii) $\omega(e^{i\theta}) = F^*(e^{i\theta})$ *skoro svuda na T za neki invertibilni element F iz N^p.*

(iii) $\log\omega \in L^1(T)$ *i* $N^p_\omega = (N^p, d_\omega)$ *je kompletan metrički prostor.*

(iv) N^p_ω *je kompletan metrički prostor i obje metričke topologije d_ω i d_p se podudaraju.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Definišimo vanjsku funkciju F kao

$$F(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} H(t,z)\log\omega(e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}\right), \quad z \in D.$$

Na osnovu leme 2.1, gl. 3, F je invertibilan element u algebri N^p i važi $|F^*(e^{i\theta})| = \omega(e^{i\theta})$ skoro svuda na T.

(ii)$\Rightarrow$(i). Na osnovu kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (a), (b), gl. 1 za klase N^p Np ($1 \le p < \infty$), vidimo da su invertibilni elementi u N^p upravo vanjske funkcije F za koje je $\log|F^*| \in L^p(T)$. To pokazuje da je $\log\omega = \log|F^*| \in L^p(T)$.

(i)$\Rightarrow$(iii) Na osnovu implikacije (i)$\Rightarrow$(ii), slijedi da je $\omega(e^{i\theta}) = F^*(e^{i\theta})$ skoro svuda na T za neku invertibilnu funkciju F iz prostora N^p. Neka je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u prostoru N^p_ω. Ta pretpostavka je ekvivalentna sa činjenicom da je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u prostoru N^p. Kako je N^p kompletan metrički prostor, to postoji funkcija $g \in N^p$ takva da $f_nF \to g$ u N^p. Odatle i na osnovu činjenice da je množenje u N^p neprekidno, zaključujemo da $f_n \to gF^{-1} = f$ u N^p kada $n \to \infty$. Prema tome, $f_nF \to fF$ u N^p, što je ekvivalentno sa $f_n \to f$ u N^p_ω kada $n \to \infty$. Dakle, N^p_ω je kompletan metrički prostor, što je i trebalo dokazati.

(iii)$\Rightarrow$(i) Definišimo vanjsku funkciju F iz N^p sa

$$F(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} H(t,z)\log\omega(e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}\right), \quad z \in D.$$

Na osnovu rezultata Mochizukija ([Moc], teorema 2; odnosno teorema 5.2 ove glave), postoji niz $\{f_n\}$ u N^p takav da $f_nF \to 1$ u prostoru N^p. Stoga je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u N^p_ω. Kako je prostor N^p_ω kompletan, postoji funkcija $f \in N^p$ takva da $f_n \to f$ u N^p_ω, te prema tome $f_nF \to fF$ u N^p kada $n \to \infty$. Otuda slijedi $fF = 1$, što povlači da je F invertibilan element algebre N^p, a samim tim da je $\log\omega = \log|F^*| \in L^p(T)$.

(i)$\Rightarrow$(iv). Ova implikacija slijedi neposredno iz implikacije (i)$\Rightarrow$(iii) i obratnog tvrdjenja od (ii) iz teoreme 6.2.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Ova implikacija slijedi neposredno iz tvrdjenja (ii) teoreme 6.2. Time je dokaz naše teoreme kompletiran.

Konačno, ostaje otvoreno pitanje da li je moguće izbaciti uslov kompletnosti od N_{ω}^{p} u tvrdjenju (iv) teoreme 6.3. U vezi s tim problemom postavljamo slijedeću hipotezu.

Hipoteza. *Ako je ω pozitivna mjerljiva na T funkcija za koju je $\log^{+}\omega \in L^{p}(T)$ i takva da su obje metričke topologije d_{ω} i d_{p} na N^{p} jednake, tada je $\log\omega \in L^{p}(T)$.*

6. F-ALGEBRE M^p

6. F-algebre M^p

U ovoj glavi istražujemo linearno-topološku strukturu prostora M^p $(1 < p < \infty)$ koji predstavljaju generalizaciju prostora M proučavanog od strane Hong Oh Kima u [K1] i [K2]. Po analogiji sa metrikom na M, na svakom prostoru M^p definiše se metrika ρ_p. U prvom poglavlju dajemo integralni kriterijum pripadnosti klasama M^p. Osim toga, pokazuje se da je M^p zatvoren u odnosu na integraciju. Koristeći teoremu o maksimalnosti Hardy-Littlewooda, u drugom poglavlju dokazujemo da se za svako $p > 1$ prostori M^p i N^p podudaraju u skupovnom smislu. Osim toga, dokazujemo neka tvrdjenja koja se odnose na konvergenciju u prostoru M^p. U narednom poglavlju dokazujemo da polinomi čine gust skup u M^p, pa je stoga prostor M^p separabilan. U trećem poglavlju dokazujemo da prostor M^p obrazuje F-prostor u odnosu na metriku ρ_p. Koristeći tu činjenicu, kao i uzimajući u obzir da je $M^p = N^p$, na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju lako slijedi da se prostori M^p i N^p podudaraju i u topološkom smislu. Dakle, sva linearno-topološka svojstva dobijena za prostore N^p odnose se i na prostore M^p. Još je dokazano da je metrička d_p $(= \rho_p)$ topologija jedina od svih "težinskih" d_ω topologija $(\log^+ \omega \in L^p(T))$ u odnosu na koju je N^p $(= M^p)$ F-prostor. U četvrtom poglavlju dajemo karakterizaciju ograničenih skupova u prostorima M^p. Prvi rezultat daje u terminima ravnomjerne integrabilnosti neophodne i dovoljne uslove da bi podskup od M^p bio ograničen. Drugi dobijeni rezultat daje samo neophodan uslov za isto tvrdjenje. Osim toga, dajemo u smislu aproksimacije polinomima, kriterijum da bi se mjerljiva na skupu $E \subset T$ funkcija podudarala skoro svuda na E sa graničnom (radijalnom) funkcijom neke funkcije iz klase M^p.

U petom poglavlju definišemo prostore l_z^p $(1 < p < \infty)$ kompleksnih nizova koji predstavljaju diskretne verzije prostora N^p. Po analogiji sa metrikom d_p na prostorima l_z^p uvodi se metrika σ_p u odnosu na koju se dokazuje da je l_z^p F-prostor. Nadalje dajemo kriterijum ograničenosti u prostoru l_z^p koji je zapravo l_z^p-analogon istoga dobijenog u prethodnom poglavlju za prostor N^p. Prostori l_z^p su tijesno povezani sa problemima interpolacije u N^p. U vezi s tim, u zadnjem poglavlju pokazujemo da ako je niz $\{z_n\} \subset D$ ravnomjerno razdvojen, tada je $\{z_n\}$ ujedno univerzalni interpolacioni niz za uredjen par (N^p, l_z^p). Isti rezultat kao i njegovo obratno tvrdjenje dokazuje se za pridruženi uredjeni par prostora $(\bar{N}^p, \bar{l}_z^p)$.

6.1. Prostori M^p

U glavi 1, pogl. 1 definisali smo klasu M kao skup svih funkcija f holomorfnih u D, za koje važi

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

gdje je

$$Mf(\theta) = \sup_{0\le r<1} \left|f(re^{i\theta})\right|.$$

Na osnovu teoreme 2.1, gl. 1 važe stroge inkluzije

$$\bigcup_{q>1} N^q \subset M \subset N^+ \subset N.$$

Napomenimo da je kanonska faktorizaciona teorema za funkcije iz klase M data teoremom 1.5 (c), gl. 1. U radu [K2] uvodi se na M topološka struktura preko aditivno-invarijantne metrike ρ (sa oznakom d u [K2]) definisane kao

$$\rho(f,g) = \int_0^{2\pi} \log(1 + M(f-g)(\theta))\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad f,g \in M. \tag{1.1}$$

U ([K2], teorema 3.1) dokazano je da u odnosu na metriku ρ M obrazuje F-prostor. Nadalje, teorema 6.1 iz [K2] tvrdi da je množenje u prostoru M neprekidna operacija, tj. da je M F-prostor. Teoreme 5.2 i 5.3 iz [K2] daju nepotpunu karakterizaciju množitelja iz M u H^∞, odnosno topološkog duala od M. Za primjenu se dobija činjenica da prostor M nije lokalno konveksan (vidj. [K2], teorema 5.4).

Po analogiji sa činjenicom da su prostori N^p $(1 < p < \infty)$ generalizacija prostora N^+, na prirodan način se nameće definicija prostora M^p $(1 < p < \infty)$. Zapravo, za proizvoljan realan broj $p > 1$ klasa M^p se definiše kao skup svih funkcija f holomorfnih u D za koje važi

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty. \tag{1.2}$$

Komentar. Za $0 < p < 1$ uslov (1.2) definiše klasu M^p svih funkcija holomorfnih na D koja je na osnovu teoreme 2.4 iz [K2] šira od Nevanlininne klase N. Dakle, za funkcije koje pripadaju tim klasama nije zagarantovano postojanje radijalnih graničnih vrijednosti skoro svuda na T (vidj. [NY]). Zbog toga klase M^p $(0 < p < 1)$ nisu od interesa za istraživanja. Stoga ćemo mi ovdje i ubuduće pretpostavljati da važi $1 < p < \infty$.

Očito važi

$$\bigcup_{p>1} M^p \subset M.$$

Kombinujući nejednakosti $\log(|a|+1) \le \log^+|a| + \log 2$ i $(|b|+|c|)^p \le 2^{p-1}(|b|^p + |c|^p)$ dobijamo nejednakost $\log^p(|a|+1) \le 2^{p-1}\left((\log^+|a|)^p + (\log 2)^p\right)$ $(a,b,c \in \mathbb{C})$. Iz te nejednakosti slijedi da je uslov (1.2) ekvivalentan sa uslovom

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} (\log(1 + Mf(\theta)))^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} < \infty. \tag{1.3}$$

Teorema 1.1. *Funkcija $\|\cdot\|_p$ definisana na M^p pomoću (1.3) zadovoljava slijedeća svojstva:*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{za svako} \quad f,g \in M^p. \tag{1.4}$$

$$\|fg\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{za svako} \quad f,g \in M^p. \tag{1.5}$$

Dakle, M^p je algebra u odnosu na obično sabiranje i množenje funkcija.

Dokaz. Kombinujući nejednakost

$$\log(1+M(f+g)(\theta)) \le \log(1+Mf(\theta)) + \log(1+Mg(\theta)), \quad f,g \in M^p,$$

i integralnu nejednakost Minkowskog (s indeksom p) dobijamo (1.4). Analogno, kombinujući nejednakost

$$\log(1+M(f+g)(\theta)) \le \log(1+Mf(\theta)) + \log(1+Mg(\theta)), \quad f,g \in M^p$$

i integralnu nejednakost Minkowskog (s indeksom p) dobijamo (1.5).

Teorema 1.2. *Funkcija ρ_p definisana na prostoru M^p kao*

$$\begin{aligned} \rho_p(f,g) &= \|f-g\|_p \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \log^p(1+M(f-g)(\theta))\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \qquad f,g \in M^p, \end{aligned} \tag{1.6}$$

je aditivno-invarijantna metrika na M^p u odnosu na koju je M^p kompletan metrički prostor.

Dokaz. Iz $\rho_p(f,g) = 0$, za neke funkcije $f,g \in M^p$, na osnovu (1.6) slijedi da je $M(f-g)(\theta) = 0$ za skoro svako $\theta \in [0,2\pi]$. Otuda dobijamo da je $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$ za skoro svako $e^{i\theta} \in T$, pa na osnovu Rieszove teoreme jedinstvenosti (teorema 1.2, gl. 1), zaključujemo da mora biti $f(z) = g(z)$ za svako $z \in D$. Kako je na osnovu (1.4) očigledno ispunjena nejednakost trougla, slijedi da je ρ_p metrika na M^p. Iz očite jednakosti

$$\rho_p(f+h, g+h) = \rho_p(f,g), \quad f,g,h \in M^p,$$

vidimo da je ρ_p aditivno-invarijantna metrika. Time je teorema dokazana.

Radi kratkoće zapisa, ovdje ćemo kao i ubuduće u cijeloj glavi pisati M^p umjesto metričkog prostora (M^p, ρ_p). Osim toga, pretpostavljamo da je $p > 1$ proizvoljni fiksni realan broj. Napomenimo da za funkciju f holomorfnu u D i za $0 \le \rho < 1$ sa f_ρ označavamo funkciju definisanu na D kao $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $z \in D$. Osim toga, za funkciju f holomorfnu u D stavimo

$$Mf_\rho(\theta) = \sup_{0\le r\le\rho} |f_r(\theta)| = \sup_{0\le r\le\rho} |f(re^{i\theta})|, \quad 0 \le \rho < 1.$$

Tada važi slijedeći rezultat.

Teorema 1.3. *Funkcija f holomorfna u jediničnom krugu D pripada klasi M^p ako i samo ako važi*

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+ Mf_\rho(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty. \tag{1.7}$$

Dokaz. Očigledno iz uslova (1.7) slijedi da je $f \in M^p$. Obratno, pretpostavimo da je $f \in M^p$. Tada važi

$$Mf_\rho(\theta) \to Mf(\theta) \quad \text{kada} \quad \rho \to 1 \quad \text{za skoro svako} \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.8}$$

Kako je po pretpostavci $f \in M^p$, odnosno $\int_0^{2\pi}\left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$, zbog (1.8) primjenjujući Lebesgueovu teoremu o monotonoj konvergenciji dobijamo

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+ Mf_\rho(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi},$$

čime je teorema dokazana.

Teorema 1.4. *Prostor M^p je zatvoren u odnosu na integraciju.*

Dokaz. Za funkciju $f \in M^p$ stavimo

$$F(z) = \int_0^z f(z)\,dz = \int_0^r f(te^{i\theta})e^{i\theta}\,dt.$$

Odavde slijedi $|F(re^{i\theta})| \le Mf(\theta)$, što povlači $MF(\theta) \le Mf(\theta)$ za skoro svako $\theta \in [0, 2\pi]$. Stoga je $F \in M^p$, što je i trebalo dokazati.

Komentar. Kako je na osnovu teoreme 2.7 $M^p = N^p$ za svako $p > 1$, to na osnovu teoreme 1.4 slijedi da su prostori N^p zatvoreni u odnosu na integraciju. Isto tvrdjenje dokazano je u ([K2], teorema 2.5) za klasu M. S druge strane, u ([Y1], teorema 2) dokazano je da postoji funkcija $f \in N^+$ čiji integral ne pripada klasi N, a samim tim ni klasi N^+.

6.2. Konvergencije u prostorima M^p

Teorema 2.1. *Za svaku funkciju $f \in M^p$ važi $f_\rho \to f$ u prostoru M^p kada $\rho \to 1^-$.*

Dokaz. Neka je $f \in M^p$. Kako je $f \in N$, na osnovu Fatouove teoreme (vidj. gl. 1, teorema 1.1) f ima radijalne granične vrijednosti za skoro svako $\theta \in [0, 2\pi]$. Zato je za svako takvo θ funkcija $t \mapsto f(te^{i\theta})$ neprekidna na segmentu $[0, 1]$, a samim tim i ravnomjerno neprekidna na $[0, 1]$. Stoga za svako takvo θ važi

$$M(f - f_\rho)(\theta) \to 0 \quad \text{kada} \quad \rho \to 1^-. \tag{2.1}$$

Iz nejednakosti

$$\begin{aligned}\log(1+M(f-f_\rho)(\theta)) &\leq \log(1+Mf(\theta))+\log(1+Mf_\rho(\theta))\\ &\leq 2\log(1+Mf(\theta)),\end{aligned}$$

uzimajući u obzir da za $f \in M^p$ važi (1.3), dobijamo

$$\log^p(1+M(f-f_\rho)(\theta)) \leq 2^p \log^p(1+Mf(\theta)) \in L^1(T).$$

Otuda i zbog (2.1) možemo primijeniti Lebesgueovu teoremu o dominiranoj konvergenciji koja daje

$$\int_0^{2\pi} (\log(1+M(f-f_\rho)(\theta))^p \frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \quad \text{kada} \quad \rho \to 1^-,$$

tj. $f_\rho \to f$ u M^p kada $\rho \to 1^-$.

Za dokaz kompletnosti metričkog prostora (M^p, ρ_p) neophodne su nam slijedeće leme.

Lema 2.2. *Ako je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u M^p, tada $(f_n)_\rho \to f_n$ u M^p kada $\rho \to 1^-$, pri čemu je ta konvergencija ravnomjerna u odnosu na n.*

Dokaz. Neka je $\{f_n\}$ proizvoljan Cauchyjev niz u prostoru M^p. Tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da važi

$$\rho_p(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako} \quad n, m \geq k.$$

Otuda koristeći nejednakost trougla dobijamo za svako $n \geq k$

$$\begin{aligned}\rho_p(f_n,(f_n)_\rho) &\leq \rho_p(f_n,f_k)+\rho_p(f_k,(f_k)_\rho)+\rho_p((f_k)_\rho,(f_n)_\rho)\\ &\leq 2\rho_p(f_n,f_k)+\rho_p(f_k,(f_k)_\rho)\\ &< \frac{2\varepsilon}{3}+\rho_p(f_k,(f_k)_\rho).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Na osnovu teoreme 2.1 postoji $0 < \rho_0 < 1$ dovoljno blizu 1 tako da važi

$$\rho_p(f_l,(f_l)_\rho) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako} \quad \rho_0 < \rho < 1 \quad \text{i za svako} \quad l = 1, \ldots, k.$$

Otuda i na osnovu (2.2) neposredno slijedi

$$\rho_p(f_n,(f_n)_\rho) < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad \rho_0 < \rho < 1 \quad \text{i za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Time je lema dokazana.

Lema 2.3. *Za svako $p > 1$ važi $M^p \subseteq N^p$ kao i*

$$d_p(f,g) \leq \rho_p(f,g) \quad \textit{za svako} \quad f, g \in M^p, \tag{2.3}$$

gdje je d_p pripadna metrika prostora N^p.

Dokaz. Inkluzija $M^p \subseteq N^p$ slijedi iz definicije ta dva prostora, a (2.3) slijedi iz definicija pripadnih metrika.

Lema 2.4. ([1], gl. 6, pogl. 2, teorema 1). *Konvergencija u odnosu na metriku d_p prostora N^p jača je od metrike ravnomjerne konvergencije na kompaktnim podskupovima kruga D.*

Lema 2.5. *Ako je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u prostoru M^p, tada niz $\{f_n\}$ konvergira ravnomjerno na kompaktnim podskupovima od D ka nekoj funkciji f holomorfnoj na D.*

Dokaz. Iz relacije (2.3) leme 2.3 slijedi da je $\{f_n\}$ ujedno Cauchyjev niz u prostoru N^p. Dakle, postoji $f \in N^p$ tako da $f_n \to f$ u prostoru N^p, pa na osnovu leme 2.4 $f_n \to f$ ravnomjerno na kompaktnim podskupovima od D.

Slijedeća lema je poznata kao teorema o maksimalnosti Hardy-Littlewooda.

Lema 2.6. ([D1], str. 11). *Neka je $1 < p \leq +\infty$ i φ funkcija iz Lebesgueovog prostora $L^p(T)$. Neka*

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\varphi(t)\,dt, \quad 0 \leq r < 1,$$

označava Poissonov integral funkcije φ. Stavimo

$$U(\theta) = \sup_{0\leq r<1} |u(r,\theta)|, \quad \theta \in [0,2\pi].$$

Tada je $U \in L^p(T)$ i postoji konstanta A_p koja zavisi samo od p takva da važi

$$\|U\|_{L^p} \leq A_p \|\varphi\|_{L^p}, \tag{2.4}$$

gdje je $\|\cdot\|_{L^p}$ pripadna norma prostora $L^p(T)$.

Teorema 2.7. *Za svako $p > 1$ važi $M^p = N^p$, tj. prostori M^p i N^p se podudaraju u skupovnom smislu.*

Dokaz. Na osnovu leme 2.3 za svako $p > 1$ važi $M^p \subseteq N^p$. Za dokaz obrnute inkluzije, uzmimo $f \in N^p$. Pokazaćemo da f pripada prostoru M^p. Na osnovu teoreme 1.5 (b), gl. 1, funkcija f se može faktorisati kao

$$f(z) = B(z)S(z)F(z), \quad z \in D,$$

gdje je $B(z)$ Blaschkeov proizvod, $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija, a $F(z)$ vanjska funkcija, tj.

$$F(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|\,dt\right) \tag{2.5}$$

za neku konstantu ω jediničnog modula. Osim toga, važi $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$. Kako je $|B(z)S(z)| \leq 1$ za svako $z \in D$, na osnovu gornje faktorizacije, iz $F \in M^p$ neposredno će slijediti da je $f \in M^p$. Kako je

$$\Re \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t)+r^2}, \quad z = re^{i\theta},$$

iz (2.5) direktno dobijamo

$$\log |F(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log |f^*(e^{it})|\, dt, \quad 0 \leq r < 1,$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\log^+ |F(re^{i\theta})| &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log |f^*(e^{it})|\, dt\right)^+ \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log^+ |f^*(e^{it})|\, dt, \quad 0 \leq r < 1.
\end{aligned}$$

Iz gornje nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
\log^+ MF(\theta) &\leq \sup_{0\leq r<1} \left(\log^+ |F(re^{i\theta})|\right) \\
&\leq \sup_{0\leq r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log^+ |f^*(e^{it})|\, dt\right)
\end{aligned}$$

Odavde, imajući u obzir da je $\log^+ |f^*| \in L^p(T)$, na osnovu leme 2.6 zaključujemo da mora biti $\log^+ MF(\theta) \in L^p(T)$. To znači da je $F \in M^p$, a samim tim i $f \in M^p$. Dakle, važi $N^p \subseteq M^p$, odnosno $M^p = N^p$, što je i trebalo dokazati.

Posljedica 2.8. *Za svaku funkciju $f \in M^p$ (N^p) važi*

$$\int_0^{2\pi} (\log^+ Mf(\theta))^p\, d\theta \leq C_p \int_0^{2\pi} (\log^+ |f^*(e^{i\theta})|)^p\, d\theta, \tag{2.6}$$

gdje konstanta C_p zavisi samo od p.

Dokaz. Neka je F vanjski faktor iz faktorizacije funkcije $f \in M^p$. Iz dokaza teoreme 2.7 vidimo da za funkcije $U(\theta) = \log^+ MF(\theta)$ i $\varphi(\theta) = \log^+ |f^*(e^{i\theta})|$ možemo primijeniti nejednakost (2.4) iz leme 2.6. Dobijena nejednakost je upravo (2.6) iz naše teoreme sa F umjesto f. Kako je $Mf(\theta) \leq MF(\theta)$, to je tim prije (2.6) ispunjeno.

6.3. F-algebre M^p

Teorema 3.1. *Polinomi čine gust podskup od M^p. Stoga je prostor M^p separabilan.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu funkciju $f \in M^p$. Kako je za svako $0 \leq \rho < 1$ f_ρ holomorfna funkcija na zatvorenom jediničnom krugu $\bar{D}$: $|z| \leq 1$, to se na osnovu Rungeove teoreme f_ρ može ravnomjerno aproksimirati polinomima na $\bar{D}$. Otuda i iz činjenice da na osnovu teoreme 2.1 $f_\rho \to f$ u M^p kada $\rho \to 1^-$, slijedi da je skup polinoma gust u prostoru M^p. Uzimajući polinome čiji su koeficijenti sa racionalnim realnim i imaginarnim dijelovima, očito dobijamo prebrojiv skup polinoma koji je gust u M^p. Time je teorema dokazana.

Teorema 3.2. *M^p je kompletan metrički prostor.*

Dokaz. Neka je $\{f_n\}$ Cauchyjev niz u prostoru M^p. Tada zbog kompletnosti prostora N^p postoji $f \in N^p$ tako da $f_n \to f$ u N^p. Kako je na osnovu teoreme 2.7 $M^p = N^p$, to je $f \in M^p$, pa još preostaje dokazati da $f_n \to f$ u prostoru M^p. Na osnovu teoreme 2.1 i leme 2.2 postoji $0 < r < 1$ i $n_1 \in \mathrm{N}$ tako da važi

$$\rho_p(f_r, f) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1}$$

i

$$\rho_p(f_n, (f_n)_r) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako} \quad n \geq n_1 \tag{3.2}$$

Pošto na osnovu leme 2.5 niz $\{f_n\}$ konvergira ravnomjerno na svakom zatvorenom krugu $|z| \leq \rho < 1$ od D ka funkciji f, to postoji $n_2 \in \mathrm{N}$ tako da važi

$$\rho_p((f_n)_r, f_r) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako} \quad n \geq n_2 \tag{3.3}$$

Stavljajući $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, iz (3.1)–(3.3) na osnovu nejednakosti trougla direktno dobijamo

$$\rho_p(f_n, f) < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n \geq n_0,$$

šo znači da $f_n \to f$ u prostoru M^p. Time je teorema dokazana.

Teorema 3.3. *Za svako $p > 1$ M^p je F- prostor u odnosu na metriku ρ_p definisanu sa* (1.6).

Dokaz. Na osnovu ([DS], str. 51) dovoljno je dokazati slijedeća svojstva:

(i) ρ_p je invarijantna metrika,

(ii) Za proizvoljnu fiksnu funkciju $f \in M^p$, $c \mapsto cf$ je neprekidno preslikavanje sa C u M^p,

(iii) Za proizvoljan fiksni broj $c \in \mathrm{C}$, $f \mapsto cf$ je neprekidno preslikavanje sa M^p u M^p,

(iv) M^p je kompletan metrički prostor.

(i) slijedi iz teoreme 1.2.

(ii) Na osnovu Lebesgueove teoreme o dominiranoj konvergenciji imamo

$$\rho_p(cf, 0) = \left(\int_0^{2\pi} \log^p(1 + |c| Mf(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{kada} \quad c \to 0.$$

(iii) Odaberimo prirodan broj k takav da je $|c| \leq k$. Tada na osnovu nejednakosti trougla dobijamo

$$\rho_p(cf, 0) \leq \rho_p(kf, 0) \leq k\rho_p(f, 0).$$

Dakle, $f \mapsto cf$ je neprekidno preslikavanje sa M^p u M^p.

(iv) To je zapravo tvrdjenje teoreme 3.2. Time je teorema dokazana.

Sada smo u mogućnosti da dokažemo da prostori (M^p, ρ_p) i (N^p, d_p) imaju istu topološku strukturu.

Teorema 3.4. *Za svako $p > 1$ prostori M^p i N^p podudaraju se u skupovnom i topološkom smislu u odnosu na topologije definisane pripadnim metrikama.*

Dokaz. Razmotrimo identično preslikavanje $j : M^p \to N^p$. Tada na osnovu nejednakosti (2.3) leme 2.3 slijedi da je j neprekidno preslikavanje. Na osnovu teoreme 2.7 važi $M^p = N^p$, pa je stoga j surjekcija. Kako je M^p na osnovu teoreme 3.3 F-prostor, a N^p takodje F-prostor možemo na j primijeniti teoremu o otvorenom preslikavanju. Zapravo, na osnovu posljedice 2.12 (b) iz [R1], slijedi da je inverzno preslikavanje j^{-1} neprekidno. Dakle, j je homeomorfizam, odakle slijedi da metrike d_p i ρ_p definišu istu topologiju na prostoru $M^p(= N^p)$.

Teorema 3.5. *Za svako $p > 1$ prostor M^p je F-algebra.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.3 M^p je F- prostor. Kako je na osnovu teoreme 5.2, gl. 1, prostor N^p F-algebra, to je na osnovu teoreme 3.4 množenje u M^p neprekidna operacija. Dakle, M^p je F-algebra.

Komentar. Kako prostori N^p i M^p nisu Banachovi (odsustvo svojstva homogenosti), to na metrike d_p i ρ_p ne možemo primijeniti tvrdjenje (c) posljedice 2.12 iz [R1]. To zapravo znači da iako metrike d_p i ρ_p definišu istu topologiju na M^p, iz te činjenice ne slijedi obavezno da postoji konstanta C_p koja zavisi samo od p takva da važi

$$\rho_p(f, 0) \leq C_p d_p(f, 0) \quad \text{za svako} \quad f \in M^p. \tag{3.4}$$

Štaviše, gornja ocjena se ne može izvesti iz nejednakosti (2.6) posljedice 2.8. Dakle, ostaje otvoreno pitanje da li su metrike d_p i ρ_p ekvivalentne u smislu valjanosti relacije (3.4). Teorema 3.4 zapravo pokazuje da se prostori N^p i M^p mogu identifikovati u linearno-topološkom smislu. To znači da su svi rezultati dobijeni u ovom radu koji se odnose na linearno-topološku strukturu prostora N^p važeći i za prostore M^p. Osim toga, napomenimo da smo u dokazu teoreme 2.1, gl. 4 i lema 2.2, 2.3, 2.6, gl. 4, upravo koristili metriku ρ_p umjesto metrike d_p. Istaknimo da smo i mnoge druge rezultate u ovom radu mogli dobiti zamjenjujući metriku d_p metrikom ρ_p na prostoru N^p.

Napomenimo da smo u pogl. 5.6 definisali "težinske" metrike d_ω na prostoru N^p na slijedeći način. Za datu pozitivnu i mjerljivu na T funkciju ω za koju je $\log^+ \omega \in L^p(T)$, funkcija d_ω definisana kao

$$d_\omega(f,g)=\left(\int_0^{2\pi}\log^p(1+|f^*(e^{i\theta})-g^*(e^{i\theta})|\omega(e^{i\theta}))\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p},\quad f,g\in N^p,$$

je aditivno-invarijantna metrika na prostoru N^p. U vezi s tim, sa N^p_ω smo označili metrički prostor (N^p,d_ω). Na osnovu teoreme 6.2, gl. 5, topologija na N^p definisana pomoću metrike d_p je jača od topologije definisane na N^p pomoću metrike d_ω. Koristeći teoremu 6.3, gl. 5, ovdje dajemo potpunu karakterizaciju "težinskih" funkcija ω za koje je N^p_ω F-prostor.

Lema 3.6. *Ako je N^p_ω kompletan metrički prostor, tada je N^p_ω F-prostor.*

Dokaz. Kako je metrika d_ω aditivno-invarijantna i po pretpostavci kompletna, na osnovu ([DS], str. 51) dovoljno je dokazati slijedeća svojstva:

(i) Za proizvoljnu fiksnu funkciju $f\in N^p$, $c\mapsto cf$ je neprekidno preslikavanje sa C u N^p,

(ii) Za proizvoljan fiksni broj $c\in$ C, $f\mapsto cf$ je neprekidno preslikavanje sa N^p u N^p.

Dokaz oba gornja tvrdjenja slijedi na potpuno isti način kao dokaz analognih tvrdjenja (ii) i (iii) teoreme 3.3 za prostor M^p.

Teorema 3.7. *Za pozitivnu mjerljivu na T funkciju ω za koju je $\log^+\omega\in L^p(T)$, slijedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) $\log\omega\in L^p(T)$.

(ii) *N^p_ω je F-prostor.*

Dokaz. Ako je $\log\omega\in L^p(T)$, tada je na osnovu ekvivalencije (i)$\Leftrightarrow$(iv) teoreme 6.3, gl. 5 N^p_ω kompletan metrički prostor. Otuda i na osnovu leme 3.6 zaključujemo da je N^p_ω F-prostor.

Obratno, pretpostavimo da je N^p_ω F-prostor. Tada razmotrimo identično preslikavanje $j: N^p\longrightarrow N^p_\omega$. Kako je na osnovu teoreme 6.2 (i), gl. 5, topologija odredjena metrikom d_p jača od topologije odredjenom na N^p pomoću metrike d_ω, to je j neprekidno preslikavanje. Postupajući dalje potpuno isto kao u dokazu teoreme 3.4, zaključujemo da obje metrike d_p i d_ω definišu istu topologiju na prostoru N^p. Otuda, opet na osnovu ekvivalencije (i)$\Leftrightarrow$(iv) teoreme 6.3, gl. 5, zakjučujemo da mora biti $\log\omega\in L^p(T)$. Time je teorema dokazana.

Posljedica 3.8. *Ako je N^p F-prostor u odnosu na neku metriku d_ω, tada se pripadna metrička d_ω-topologija podudara sa metričkom d_p-topologijom. Dakle, jedina metrička topologija od svih metričkih d_ω-topologija ($\log^+\omega\in L^p(T)$) u odnosu na koju je N^p F-prostor je upravo inicijalna metrička d_p (odnosno ρ_p)-topologija.*

Dokaz. Tvrdjenje neposredno slijedi iz dokaza tvrdjenja (ii)$\Rightarrow$(i) teoreme 3.7.

6.4. Ograničeni skupovi u prostorima M^p

U prethodnom poglavlju smo dokazali da prostori M^p i N^p imaju istu topološku strukturu (teorema 3.5). Kako prostori M^p $(= N^p)$ nisu Banachovi, to ograničeni podskup u odnosu na pripadnu metriku ρ_p (d_p) ne mora biti ograničen i u pripadnom topološkom prostoru M^p (N^p). Uzimajući u obzir tu činjenicu kao i činjenicu da prostor N^p nije lokalno ograničen (posljedica 3.1, gl. 2), od interesa je dati karakterizaciju ograničenih podskupova od M^p (N^p). Ta karakterizacija je data pomoću obje metrike d_p i ρ_p.

Uočimo da se na osnovu Rieszove teoreme jedinstvenosti (teorema 1.2, gl. 1), prostor N^p može identifikovati (do na izometrički izomorfizam) sa prostorom N^{p*} (ekvivalentnih) klasa svih mjerljivih na T funkcija koje se podudaraju skoro svuda na T sa graničnim funkcijama funkcija iz N^p. Slijedeća teorema daje karakterizaciju radijalnih (ugaonih) graničnih vrijednosti funkcija iz prostora M^p $(=N^p)$, odnosno funkcija iz N^{p*}. Taj rezultat je analogan rezultatu V. I. Gavrilova i V. S. Zaharyana dobijenom u ([GZ], teorema 2) za prostor M.

Teorema 4.1. *Neka je E proizvoljan mjerljiv podskup jedinične kružnice T i φ kompleksna mjerljiva funkcija definisana na E. Da bi se funkcija φ podudarala skoro svuda na E sa graničnom (radijalnom) funkcijom neke funkcije f iz prostora M^p potrebno je i dovoljno da postoji niz polinoma $\{P_n\}$ takav da važi:*

(i) *Niz $\{P_n(e^{i\theta})\}$ konvergira skoro svuda na E ka funkciji $\varphi(e^{i\theta})$.*

(ii) *niz $\{\log^+ MP_n(\theta)\}$ je ograničen u prostoru $L^p(T)$, tj. važi*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ MP_n(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty. \tag{4.1}$$

Dokaz. Ako u formulaciji naše teoreme samo uslov (4.1) zamijenimo slijedećim uslovom:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |P_n(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty, \tag{4.1)'$$

tada dobijamo upravo teoremu 1, pogl. 5.2, str. 48, iz [1]. Otuda i iz činjenice da su na osnovu nejednakosti (2.6) leme 2.8 uslovi (4.1) i (4.1)' ekvivalentni, neposredno slijedi tvrdjenje teoreme.

Komentar. Teoremu 4.1 možemo dokazati direktno na sličan način kao teoremu 1, pogl. 5.2, str. 48, iz [1]. S druge strane, očito se teoreme 2 i 3, pogl. 5.2, iz [1] ne mogu preformulisati u terminima metrike ρ_p prostora M^p.

Slijedeća teorema daje potpunu karakterizaciju ograničenih podskupova prostora N^p $(= M^p)$. Njeno tvrdjenje (i)$\Leftrightarrow$(iii) je potpuno analogno tvrdjenju teoreme 1 iz [Y4] koje opisuje ograničene podskupove od N^+.

Teorema 4.2. *Za skup $L \subset M^p$ slijedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) *L je ograničen podskup od M^p.*
(ii) *za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi*

$$\int_E \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad f \in L, \tag{4.2}$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ čija je Lebesgueova mjera $|E| < \delta$.
(iii) *za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi*

$$\int_E \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad f \in L, \tag{4.3}$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ čija je Lebesgueova mjera $|E| < \delta$.

Dokaz. Inkluzija (ii)$\Rightarrow$(iii) neposredno slijedi iz očite nejednakosti $|f^*(e^{i\theta})| \leq Mf(\theta)$, $f \in M^p$, za skoro svako $\theta \in [0, 2\pi]$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Neka je

$$V = \{g \in N^p : d_p(g, 0) < \eta\}$$

proizvoljna okolina nule u N^p. Odaberimo dovoljno mali pozitivan broj ε tako da važi

$$\log^p(1+\varepsilon) + 2^{p-1}\log^p 2\delta + 2^{p-1}\varepsilon < \eta^p. \tag{4.4}$$

Tada slijedi da postoji δ, $0 < \delta < \varepsilon$, tako da važi (iii). Odaberimo $n \in \mathbf{N}$ tako da važi $1/n < \delta$. Stavimo

$$E_k = \left\{e^{i\theta} : \theta \in \left[\frac{2(k-1)\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}\right)\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada je $|E_k| = 1/n < \delta$, pa na osnovu (iii) važi

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\,\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} \quad < n\varepsilon \quad \text{za svako} \quad f \in L. \tag{4.5}$$

Iz (4.5) na osnovu nejednakosti Čebiševa slijedi da za svaku funkciju $f \in N^p$ postoji mjerljiv skup $E_f \subset T$ koji zavisi od f takav da važi

$$|T \setminus E_f| < \delta \quad \text{i} \quad \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\right)^p \leq \frac{n\varepsilon}{\delta} \quad \text{na} \quad E_f. \tag{4.6}$$

Iz (4.6) imamo

$$|f^*(e^{i\theta})| \leq \exp\left(\frac{n\varepsilon}{\delta}\right)^{1/p} = K(\delta) = K \quad \text{na} \quad E_f.$$

Odaberimo α tako da važi $0 < \alpha < \varepsilon/\delta$. Tada koristeći nejednakost $\log^p(1+|a|) \leq 2^{p-1}\left((\log^+|a|)^p + \log^p 2\right)$, (4.4) i (iii) za svako $f \in L$ dobijamo

$$(d_p(\alpha f, 0))^p = \int_0^{2\pi} \log^p(1 + |\alpha f^*(e^{i\theta})|) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{E_f} + \int_{T\setminus E_f} \\
&\le \int_{E_f} \log^p(1+\varepsilon)\frac{d\theta}{2\pi} + 2^{p-1}\left(\int_{T\setminus E_f} \log^p 2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{T\setminus E_f} \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\
&\le \log^p(1+\varepsilon) + 2^{p-1}\log^p 2\delta + 2^{p-1}\varepsilon \\
&< \eta^p.
\end{aligned}
$$

Dakle, važi $d_p(\alpha f, 0) < \eta$, odakle slijedi $\alpha L \subset V$. To znači da je L ograničen podskup od N^p.

(i)$\Rightarrow$(ii) Pretpostavimo da je L ograničen podskup od M^p. Tada za dato $\eta > 0$ postoji $\alpha_0 = \alpha_0(\eta)$, $0 < \alpha_0 < 1$, tako da važi

$$
(4.7) \qquad (\rho_p(\alpha f, 0))^p = \int_0^{2\pi} \log^p(1 + |\alpha| Mf(\theta))\frac{d\theta}{2\pi} < \eta^p \quad \text{za svako} \quad f \in L, |\alpha| \le \alpha_0.
$$

Otuda slijedi

$$
(4.8) \qquad \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |\alpha| Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \eta^p \quad \text{za svako} \quad f \in L, |\alpha| \le \alpha_0.
$$

Kako je

$$
\log^+ Mf(\theta) \le \log^+ \alpha_0 Mf(\theta) + \log\frac{1}{\alpha_0},
$$

to važi

$$
(4.9) \qquad \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \le 2^{p-1}\left(\left(\log^+ \alpha_0 Mf(\theta)\right)^p + \left(\log\frac{1}{\alpha_0}\right)^p\right).
$$

Za dato $\varepsilon > 0$ odaberimo $\eta > 0$ tako da je

$$
(4.10) \qquad \eta < \varepsilon^{1/p}/2,
$$

kao i $\alpha_0 = \alpha_0(\eta)$ tako da važi (4.7), a samim tim i (4.8). Neka je $\delta > 0$ odabrano tako da je

$$
(4.11) \qquad \delta \log^p \frac{1}{\alpha_0} < \varepsilon/2^p.
$$

Tada za svaki skup $E \subset T$ za koji je $|E| < \delta$, na osnovu (4.8)-(4.11) za svako $f \in L$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_E \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} &\le 2^{p-1}\left(\int_E (\log^+ \alpha_0 Mf(\theta))^p \frac{d\theta}{2\pi} + \int_E \log^p \frac{1}{\alpha_0}\frac{d\theta}{2\pi}\right) \\
&\le 2^{p-1}\eta^p + 2^{p-1}|E|\log^p\frac{1}{\alpha_0} \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dakle, zadovoljen je uslov (ii) teoreme, čime je teorema ujedno i dokazana.

Komentar. Uočimo da uslov (ii) iz teoreme 4.2 zapravo označava da je familija $\{(\log^+ Mf(\theta))^p : f \in L\}$ ravnomjerno integrabilna na T. Analogno tvrdjenje važi i za uslov (iii). S druge strane, iz dokaza teoreme 4.2 vidimo da iz (ii) slijedi da je i familija $\{(\log^+ Mf(\theta))^p : f \in L\}$ ograničena u prostoru $L^1(T)$, tj. da važi

$$\limsup_{f\in L} \int_0^{2\pi} (\log^+ MP_n(\theta))^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

Analogno, iz uslova (iii) slijedi da je familija $\{(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|)^p : f \in L\}$ ograničena u prostoru $L^1(T)$.

Posljedica 4.3. *Ako je za neki podskup L od M^p familija*

$$\{(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|)^p : f \in L\}$$

ravnomjerno integrabilna, tada je i familija

$$\{(\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p : f \in L, 0 \le r < 1\}$$

takodje ravnomjerno integrabilna.

Dokaz. Iz uslova teoreme i inkluzije (iii)$\Rightarrow$(ii) teoreme 4.2 neposredno slijedi da je familija $\{(\log^+ Mf(\theta))^p : f \in L\}$ ravnomjerno integrabilna na T. Otuda i iz očigledne nejednakosti $|f(re^{i\theta})| \le Mf(\theta)$, $f \in M^p$, $0 \le r < 1$, za skoro svako $\theta \in [0, 2\pi]$, slijedi da je i familija $\{(\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p : f \in L, 0 \le r < 1\}$ ravnomjerno integrabilna.

Komentar. Analogan rezultat posljedici 4.3 dokazan je za klasu Smirnova N^+ u ([P2], str. 133, lema 8.3). Ta se lema tamo koristi za dokaz konformne invarijantnosti klase N^+, kao i za karakterizaciju graničnih ugaonih vrijednosti funkcija iz N^+.

Slijedeća teorema daje potreban uslov ograničenosti u prostorima M^p (N^p).

Teorema 4.4. *Neka je L podskup od M^p. Ako je L ograničen podskup od M^p, tada važi*

$$M_\infty(r, f) \le K \exp\left(\frac{\omega(r)}{(1-r)^{1/p}}\right) \quad \textit{za svako} \quad f \in L,$$

gdje je $M_\infty(r, f) = \max_{0\le\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})|$, $K > 0$ pozitivna konstanta i $\omega(r)$, $0 \le r < 1$, pozitivna neprekidna funkcija koja ne zavisi od $f \in L$ i za koju je $\omega(r) \downarrow 0$ kada $r \to 1$.

Dokaz. Iz nejednakosti (4.5) u dokazu teoreme 4.3, gl. 1 vidimo da za svaku funkciju $f \in N^p$ važi

$$(4.12) \qquad (\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} (\log^+ |f^*(e^{it})|)^p \, dt.$$

Kako je po pretpostavci L ograničen podskup od N^p, na osnovu teoreme 4.2 (iii) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\right)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad f \in L, \tag{4.13}$$

za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ čija je Lebesgueova mjera $|E| < \delta$.

Dalje iz dokaza implikacije (iii)$\Rightarrow$(i) teoreme 4.2 vidimo da za svaku funkciju $f \in N^p$ postoji mjerljiv skup $E_f \subset T$ koji zavisi od f takav da važi

$$|T \setminus E_f| < \delta \quad \text{i} \quad \left(\log^+ |f^*(e^{i\theta})|\right)^p \leq \frac{n\varepsilon}{\delta} \quad \text{za skoro svako} \quad e^{i\theta} \in E_f. \tag{4.14}$$

Iz (4.12)-(4.14) dobijamo

$$\begin{aligned} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p &= \int_{E_f} + \int_{E_f} \\ &\leq \frac{n\varepsilon}{\delta} + \frac{1}{1-r}\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$(1-r)\left(\log^+ M_\infty(r,f)\right)^p \leq \frac{(1-r)n\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Uzmimo niz $\{\varepsilon_k\}$ pozitivnih realnih brojeva takav da je $\varepsilon_k \downarrow 0$. Za svako $k \in \mathbf{N}$ neka je $r_k > 0$ broj takav da je

$$\frac{(1-r_k)n\varepsilon}{\delta_k} + \frac{\varepsilon_k}{2} < \varepsilon_k, \tag{4.16}$$

gdje je $\varepsilon_k = \delta(\varepsilon_k)$ i

$$r_{k-1} < r_k < 1, r_k \uparrow 1 \quad \text{kada} \quad k \to \infty.$$

Stavimo

$$\omega_1(r) = \varepsilon_k \quad \text{za} \quad r_k \leq r < r_{k+1}, k = 1, 2, \ldots.$$

Otuda, iz (4.15) i (4.16) dobijamo

$$\left(\log^+ M_\infty(r,f)\right)^p \leq \frac{\omega_1(r)}{1-r} \quad \text{za svako} \quad 0 \leq r < 1.$$

Budući da važi

$$\omega_1(r) \to 0 \quad \text{kada} \quad r \to 1,$$

to postoji neprekidna funkcija $\omega_2(r)$ takva da važi

$$\omega_1(r) \leq \omega_2(r) \quad \text{i} \quad \omega_2(r) \downarrow 0 \quad \text{kada} \quad r \to 1.$$

Stoga je

$$\left(\log^+ M_\infty(r,f)\right)^p \leq \frac{\omega_2(r)}{1-r} \quad \text{za svako} \quad 0 \leq r < 1.$$

Otuda stavljajući

$$\omega(r) = (\omega_2(r))^{1/p} \quad \text{za svako} \quad 0 \le r < 1,$$

dobijamo

$$M_\infty(r, f) \le \exp\left(\frac{\omega(r)}{(1-r)^{1/p}}\right) \quad \text{za svako} \quad f \in L.$$

Time je teorema dokazana.

Komentar. Uslov iz teoreme 4.4 nije ujedno i dovoljan da bi skup $L \subset M^p$ bio ograničen podskup od M^p. Zapravo, stavimo

$$f_n(z) = a_n z^n, \quad a_n = \exp(\lambda_n n^{1/(p+1)}),$$

gdje je

$$\lambda_n = n^{-1/2(p+1)}.$$

Tada se kao u dokazu leme 1 iz [Y4] lako provjeri da skup $L = \{f_n\} \subset M^p$ zadovoljava uslov iz teoreme 4.4. Ali kako je

$$\log |f_n^*(e^{i\theta})| = n^{1/2(p+1)},$$

očigledno skup L nije ograničen u M^p.

Podsjetimo se da je na osnovu teoreme 4.1, gl. 3, svaki ograničen skup u prostoru F^p-Fréchetovom omotaču od N^p, ujedno i predkompaktan (relativno kompaktan) skup u F^p. Osim toga, F^p je Montelov prostor (vidj. teorema 4.3, gl. 3). Slijedeći rezultat pokazuje da to nije slučaj ni sa jednim prostorom N^p.

Teorema 4.5. *Postoje ograničeni podskupovi od N^p koji nisu i predkompaktni u tom prostoru.*

Dokaz. Za niz funkcija $\{h_n\}$ definisan na $[0, 2\pi]$ kao

$$h_n(t) = 1 + \sin(nt),$$

stavimo

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} h_n(t)\, dt\right) = \exp(1 - iz^n), \quad z \in D. \tag{4.17}$$

Tada je očito $\{f_n\} \subset N^p$ i za svaki mjerljiv skup $E \subset T$ važi

$$\int_0^{2\pi} h_n(t)\, dt = 2\pi,$$

kao i

$$0 \le \int_E h_n(t)\, dt \le 2|E|,$$

gdje $|E|$ označava Lebesgueovu mjeru skupa E. Odavde i na osnovu teoreme 4.2 vidimo da je skup $L = \{f_n\}$ ograničen u N^p.

Pretpostavimo da je skup E predkompaktan. To znači da postoji podniz $\{f_{nk}\}$ niza $\{f_n\}$ i funkcija $f \in N^p$ tako da važi

$$d_p(f_{nk}, f) \to 0 \quad \text{kada} \quad k \to \infty, \tag{4.18}$$

pa samim tim

$$f_{nk}(z) \to f(z) \quad \text{ravnomjerno na svakom zatvorenom krugu} \quad |z| \leq r < 1.$$

Otuda i na osnovu (4.17) zaključujemo da mora biti $f(z) \equiv e$ na D. S druge strane, iz (4.18) i teoreme 4.6 slijedi da

$$f_{nk}^*(e^{i\theta}) \to f^*(e^{i\theta}) \quad \text{po mjeri na} \quad T.$$

Stoga dobijamo

$$\log^+ |f_{nk}^*(e^{i\theta})| = 1 + \sin(n_k\theta) \to \log^+ |f^*(e^{i\theta})| = 1 \quad \text{po mjeri na} \quad T.$$

Ovim je dobijena kontradikcija, pa zaključujemo da skup L nije predkompaktan u N^p.

Za karakterizaciju predkompaktnih skupova u N^p neophodan nam je slijedeći rezultat.

Teorema 4.6. ([1], pogl. 6.3, str. 62, teorema 1). *Niz $\{f_n\} \subset N^p$ je Cauchyjev u prostoru N^p ako i samo ako važe slijedeći uslovi:*

(i) *Niz $\{\log^p(1 + |f_n^*(e^{i\theta})|)\}$ čini ravnomjerno integrabilnu familiju na T.*

(ii) *niz $\{f_n^*(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri na T.*

Teorema 4.7. *Skup $K \subset N^p$ je predkompaktan podskup od N^p ako i samo ako važe slijedeći uslovi:*

(i) *K je ograničen u N^p.*

(ii) *Za svaki niz $\{f_n\} \subset K$ niz $\{f_n^*(e^{i\theta})\}$ sadrži podniz koji konvergira po mjeri na T.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K predkompaktan podskup od N^p. Stoga je K i ograničen u N^p i za svaki niz $\{f_n\} \subset K$ postoji podniz $\{f_{n_k}\}$ i funkcija $f \in N^p$ tako da $f_{n_k} \to f$ u prostoru N^p. Stoga je taj podniz Cauchyjev u N^p. Na osnovu teoreme 4.6 slijedi da podniz $\{f_{n_k}^*(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri na T.

Obratno, pretpostavimo da za skup $K \subset N^p$ važe uslovi (i) i (ii) naše teoreme. Uzmimo bilo koji niz $\{f_n\} \subset K$. Na osnovu (ii) niz $\{f_n^*(e^{i\theta})\}$ sadrži podniz $\{f_{n_k}^*(e^{i\theta})\}$ koji konvergira po mjeri na T. Iz uslova (i) i teoreme 4.2 (iii) slijedi da niz

$$\{(\log^+ |f_{n_k}^*(e^{i\theta})|)^p\}_{k\in\mathbb{N}}$$

čini ravnomjerno integrabilnu familiju na T. Otuda i iz nejednakosti $\log^p(1 + |a|) \leq 2^{p-1}\left((\log^+ |a|)^p + \log^p 2\right)$ slijedi da i niz

$$\{\log^p(1 + |f_{n_k}^*(e^{i\theta})|)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

čini ravnomjerno integrabilnu familiju na T. Dakle, niz $\{f_{n_k}\}$ zadovoljava oba uslova teoreme 4.6, na osnovu koje zaključujemo da je $\{f_{n_k}\}$ Cauchyjev niz u N^p. Konačno, zbog kompletnosti prostora N^p zaključujemo da je niz $\{f_{n_k}\}$ konvergentan u N^p. Dakle, $K \subset N^p$ je predkompaktan podskup od N^p, čime je teorema dokazana.

6.5. F-prostori l_z^p

Neka je $Z = \{z_n\}$ niz kompleksnih brojeva iz jediničnog kruga D takav da je $z_n \neq z_m$ za $n \neq m$ i za koji važi *Blaschkeov uslov*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty. \tag{5.1}$$

Tretirajući interpolacione probleme za Hardyjeve klase H^q $(1 \leq q < \infty)$, Shapiro i Shields u radu [SS1] uvode slijedeću klasu nizova kompleksnih brojeva:

$$\left\{ \{c_n\} : \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)|c_n|^q < \infty \right\}, \tag{5.2}$$

gdje je $1 \leq q < \infty$. Klasu nizova $\{c_n\}$ definisanu pomoću (5.2) ovdje ćemo označavati sa $\tilde{l}_z^q$.

Razmatrajući odgovarajuće interpolacione probleme za klasu N^+, Yanagihara u radu [Y7] uvodi slijedeću klasu nizova kompleksnih brojeva:

$$l_z^+ = \left\{ \{c_n\} : \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2) \log^+ |c_n| < \infty \right\}. \tag{5.3}$$

Po analogiji sa naprijed definisanim klasama $\tilde{l}_z^q$ i l_z^+ za dati niz $Z = \{z_n\}$ koji zadovoljava uslov (5.1) i realan broj $p > 1$ sa l_z^p označimo klasu svih nizova kompleksnih brojeva $\{c_n\}$ koji zadovoljavaju uslov:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2) \left(\log^+ |c_n|\right)^p < \infty \tag{5.4}$$

Prostore l_z^p možemo na osnovu definicije smatrati diskretnim verzijama prostora N^p. U vezi s tim, po analogiji sa metrikom d_p na N^p definišemo na prostoru l_z^p funkciju σ_p kao

$$\sigma_p(u,v) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2) \log^p(1 + |c_n(u) - c_n(v)|) \right)^{1/p} \tag{5.5}$$

za nizove $u = \{c_n(u)\}, v = \{c_n(v)\} \in l_z^p$.

Teorema 5.1. *l_z^p je vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva.*

Dokaz. Uzmimo $u = \{c_n(u)\}, v = \{c_n(v)\} \in l_z^p$. Kombinujući nejednakosti $\log^+|x + y| \leq \log^+|x| + \log^+|y| + \log 2$ i nejednakost $(|a| + |b| + |c|)^p \leq 3^{p-1}(|a|^p + |b|^p + |c|^p)$ dobijamo $(\log^+|x+y|)^p \leq 3^{p-1}((\log^+|x|)^p + (\log^+|y|)^p + \log^p 2)$. Otuda, iz (5.1) i (5.4) slijedi da je $u+v \in l_z^p$. Ako je $\alpha \in \mathbf{C}$, tada iz nejednakosti $\log^+|xy| \leq \log^+|x| + \log^+|y|$ i $(|a|+|b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$ slijedi $(\log^+|xy|)^p \leq 2^{p-1}((\log^+|x|)^p + (\log^+|y|)^p)$. Otuda, opet na osnovu (5.1) i (5.4) slijedi da je $\alpha u \in l_z^p$. Time je tvrdjenje teoreme dokazano.

Teorema 5.2. *Funkcija σ_p definisana pomoću (5.5) je aditivno-invarijantna metrika na prostoru l_z^p u odnosu na koju je l_z^p kompletan metrički prostor.*

Dokaz. Očito iz $\sigma_p(u,v) = 0$ slijedi da mora biti $u = v$. Osim toga, očito važi

$$\sigma_p(u,v) = \sigma_p(u - v, 0) \tag{5.6}$$

za svako $u = \{c_n(u)\}, v = \{c_n(v)\} \in l_z^p$. To znači da je σ_p aditivno-invarijantna funkcija. Kombinujući nejednakost $\log(1 + |x + y|) \leq \log(1 + |x|) + \log(1 + |y|)$ sa nejednakošću Minkowskog za nizove $u = \{c_n(u)\}, v = \{c_n(v)\} \in l_z^p$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\sigma_p(u,v) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)\log^p(1 + |c_n(u) - c_n(v)|)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)\left((\log(1 + |c_n(u)|) + \log(1 + |c_n(v)|)\right)^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left((1 - |z_n|^2)^{1/p}\log(1 + |c_n(u)|) + (1 - |z_n|^2)^{1/p}\log(1 + |c_n(v)|)\right)^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)\log^p(1 + |c_n(u)|)\right)^{1/p} \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)\log^p(1 + |c_n(v)|)\right)^{1/p} \\
&= \sigma_p(u,0) + \sigma_p(v,0).
\end{aligned}$$

Sada iz gornje nejednakosti i (5.6) za $u, v, w \in l_z^p$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\sigma_p(u,v) &= \sigma_p(u - w, v - w) \\
&\leq \sigma_p(u - w, 0) + \sigma_p(v - w, 0) \\
&= \sigma_p(u,w) + \sigma_p(v,w).
\end{aligned}$$

Dakle, važi nejednakost trougla.

Još preostaje dokazati kompletnost prostora l_z^p. Neka je $u_k = \{c_n(u_k)\}$ Cauchyjev niz u l_z^p, tj.

$$\sigma_p(u_k, u_m) \to 0 \quad \text{kada} \quad k, m \to \infty. \tag{5.7}$$

Otuda se lako vidi da za svako $n \in \mathrm{N}$ postoji limes

$$c_n(u_k) \to c_n \quad \text{kada} \quad k \to \infty. \tag{5.8}$$

Iz (5.7) vidimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathrm{N}$ tako da važi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)\log^p(1+|c_n(u_k)-c_n(u_m)|)\right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad k, m \geq k_0.$$

Prema tome, za svaki prirodan broj l važi

$$\left(\sum_{n=1}^{l}(1-|z_n|^2)\log^p(1+|c_n(u_k)-c_n(u_m)|)\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Uzimajući da $m \to \infty$ i zatim $l \to \infty$ iz gornje nejednakosti dobijamo

$$u = \{c_n\} \in l_z^p \quad \text{i} \quad \sigma_p(u_k, u) \to 0 \quad \text{kada} \quad k \to \infty.$$

Time je teorema dokazana.

Teorema 5.3. *Za svako $p > 1$ l_z^p je F-prostor u odnosu na metriku σ_p definisanu pomoću* (5.5).

Dokaz. Na osnovu ([DS], str. 51) dovoljno je dokazati slijedeća svojstva:
(i) σ_p je invarijantna metrika,
(ii) Za proizvoljan niz $u \in l_z^p$, $\alpha \mapsto \alpha u$ je neprekidno preslikavanje sa C u l_z^p,
(iii) Za proizvoljan fiksni broj $\alpha \in \mathrm{C}$, $u \mapsto \alpha u$ je neprekidno preslikavanje sa l_z^p u u
l_z^p,
(iv) l_z^p je kompletan metrički prostor.
(i) slijedi iz (5.6) teoreme 5.2.
(ii) Pretpostavimo da $\alpha_k \to \alpha$ kada $k \to \infty$. Za dato $\varepsilon > 0$ odaberimo $n_0 \in \mathrm{N}$ tako da važi

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0}(1-|z_n|^2)\log^p(1+|c_n(u)|)\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.9}$$

Pošto $\alpha_k \to \alpha$, možemo odabrati k_0 tako da za $k \geq k_0$ važi $|\alpha_k - \alpha| < 1$ i

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0}(1-|z_n|^2)\log^p(1+|\alpha_k-\alpha||c_n(u)|)\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

Iz (5.9) i (5.10) dobijamo da za svako $m \geq k_0$ važi

$$\sigma_p(\alpha_k u, \alpha u) = \left(\left(\sum_{n=1}^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\right)(1-|z_n|^2)\log^p(1+|\alpha_k-\alpha||c_n(u)|)\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Time je (ii) dokazano.

(iii) Neka je $\alpha \in \mathbf{C}$ fiksirano. Pretpostavimo da je $u \in l_z^p$ i niz $\{u_k\} \subset l_z^p$ tako da $\sigma_p(u_k, u) \to 0$ kada $k \to \infty$. Odaberimo $m \in \mathbf{N}$ tako da važi $|\alpha| \leq m$. Tada iz nejednakosti trougla dobijamo

$$\begin{aligned} \sigma_p(\alpha u_k, \alpha u) &\leq \sigma_p(m u_k, m u) = \sigma_p(m(u_k - u), 0) \\ &\leq m\sigma_p(u_k - u, 0) = m\sigma_p(u_k, u). \end{aligned}$$

Iz gornje nejednakosti i pretpostavke $\sigma_p(u_k, u) \to 0$ slijedi $\sigma_p(\alpha u_k, \alpha u) \to 0$ kada $k \to \infty$. Time je (iii) dokazano.

(iv) Ovo tvrdjenje je dokazana u sklopu teoreme 5.2, pa je time naša teorema dokazana.

Slijedeća teorema daje potpunu karakterizaciju ograničenih podskupova prostora l_z^p. Ona zapravo predstavlja l_z^p-varijantu teoreme 4.2 ((i)$\Leftrightarrow$(iii)) koja karakteriše ograničene podskupove od N^p.

Teorema 5.4. *Neka je L podskup od l_z^p. Tada je L ograničen ako i samo ako važe slijedeća tvrdjenja:*

$$\text{(i)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) \left(\log^+ |c_n(u)|\right)^p \leq M \quad \textit{za svaki niz} \quad u = \{c_n(u)\} \in L,$$

gdje je $M = M(L)$ pozitivna konstanta, kao i
za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon, L)$ tako da važi

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{n_0+1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) \left(\log^+ |c_n(u)|\right)^p < \varepsilon \quad \textit{za svaki niz} \quad u = \{c_n(u)\} \in L.$$

Dokaz teoreme je potpuno sličan dokazu teoreme 4.2 i zato ga izostavljamo.

Slijedeća teorema predstavlja diskretan l_z^p-analogon teoreme 4.5.

Teorema 5.5. *Neka je L podskup od l_z^p. Ako je skup L ograničen, tada važi*

$$|c_n(u)| \leq K \exp\left(\frac{\lambda_n}{(1 - |z_n|)^{1/p}}\right) \quad \textit{za svaki niz} \quad u = \{c_n(u)\} \in L,$$

gdje je $K > 0$ konstanta i $\{\lambda_n\}$ pozitivan niz za koji je $\lambda_n \downarrow 0$ kada $n \to \infty$ i koji ne zavisi posebno od $u \in L$.

Dokaz teoreme je potpuno analogan dokazu teoreme 4.5 i zato ga izostavljamo.

6.6. Interpolacija u prostorima N^p

Pretpostavimo da je X neka klasa holomorfnih funkcija definisanih na jediničnom krugu D kompleksne ravni. Neka je $\{z_n\}$ niz u u krugu D. Za niz kompleksnih brojeva $\{c_n\}$ *interpolacioni problem* sastoji se u nalaženju funkcije $f \in X$ za koju važi

$$f(z_n) = c_n \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{6.1}$$

Neka je Y neka familija nizova kompleksnih brojeva. Niz $\{z_n\} \subset D$ naziva se *univerzalni interpolacioni niz za par* (X, Y) ako za svaki niz $\{c_n\} \in Y$ postoji funkcija $f \in X$ za koju važi uslov (6.1).

Na početku prethodnog poglavlja istaknuto je da su u vezi sa rješavanjem interpolacionih problema za Hardyjeve klase H^q $(1 \le q < \infty)$ Shapiro i Shields u [SS1] uveli pripadne prostore nizova $\tilde{l}^q_z$. Rješavajući analogne probleme za klase H^q $(0 < q < 1)$, Kabaila u [Ka] definiše analogne prostore nizova za $0 < q < 1$. U vezi s tim za niz $Z = \{z_n\} \subset D$ takav da je $z_n \neq z_m$ za $n \neq m$ i koji zadovoljava uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty, \tag{6.2}$$

za svako $0 < q < \infty$ označimo sa $\tilde{l}^q_z$ klasu svih nizova $\{c_n\}$ kompleksnih brojeva za koje važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)|c_n|^q < \infty. \tag{6.3}$$

Očigledno zbog uslova (6.3) mora biti $|z_n| \to 1$ kada $n \to \infty$. Za svaki niz $\{z_n\} \subset D$ u ovom poglavlju ćemo pretpostavljati da je $z_n \neq z_m$ za $n \neq m$ i da važi (6.2). Za takav niz $\{z_n\} \subset D$ i $n \in \mathbf{N}$ sa $B_n(z)$ označimo beskonačni Blaschkeov proizvod definisan kao

$$B_n(z) = \prod_{m \neq n} \frac{|z_m|}{z_m} \frac{z_m - z}{1 - \bar{z}_m z}. \tag{6.4}$$

U vezi s tim, za niz $\{z_n\} \subset D$ kažemo da je *ravnomjerno razdvojen* ako postoji strogo pozitivan broj δ takav da važi

$$|B_n(z_n)| = \prod_{m \neq n} \left| \frac{z_m - z_n}{1 - \bar{z}_m z_n} \right| \ge \delta > 0 \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{6.5}$$

Pojam ravnomjerno razdvojenog niza tijesno je povezan sa rješenjem interpolacionog problema za uredjen par (H^∞, l^∞) dobijenog od strane Carlesona u [C]. Napomenimo da H^∞ označava Hardyjev prostor ograničenih holomorfnih na D funkcija, a l^∞ prostor ograničenih nizova kompleksnih brojeva. Taj čuveni rezultat Carlesona sastoji se u slijedećem tvrdjenju.

Teorema 6.1. ([C]). *Niz $\{z_n\} \subset D$ za koji važi (6.2) je univerzalni interpolacioni niz za par (H^∞, l^∞) ako i samo ako je on ravnomjerno razdvojen.*

Komentar. U skladu sa prethodnim rezultatom, Blaschkeov proizvod sa prostim nulama koje čine univerzalni interpolacioni niz za (H^∞, l^∞) naziva se interpolacionim.

Tvrdjenje teoreme 6.1 je dokazano u [SS1] za uredjen par $(H^q, \tilde{l}^q_z)$ $(1 \le q < \infty)$, odnosno u [Ka] za uredjen par $(H^q, \tilde{l}^q_z)$ $(0 < q < 1)$. Ta dva rezultata zajedno sa teoremom 6.1 mogu se objediniti u jedinstvenu glavnu interpolacionu teoremu za klase H^q kako slijedi.

Teorema 6.2. ([D2], str. 149, teorema 9.1). *Neka je $0 < q < \infty$. Niz $\{z_n\} \subset D$ je univerzalni interpolacioni niz za par $(H^q, \tilde{l}^q_z)$ ako i samo ako je on ravnomjerno razdvojen.*

Koristeći teoremu 6.2, kao i rezultate Naftalevića iz [N] koji se odnose na interpolaciju za Nevanlinninu klasu N Yanagihara u radu [Y7] rješava interpolacione probleme za klasu N^+. Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju, u radu [Y7] definišu se klase nizova l^+_z pomoću (5.3). Napomenimo da smo u istom poglavlju za dati niz $Z = \{z_n\}$ koji zadovoljava uslov (5.1) i realan broj $p > 1$ sa l^p_z označili klasu svih nizova kompleksnih brojeva $\{c_n\}$ koji zadovoljavaju uslov (5.4). Za svako $p > 1$ i uredjen par (N^p, l^p_z) imamo slijedeći rezultat.

Teorema 6.3. *Da bi niz $\{z_n\} \subset D$ bio univerzalni interpolacioni niz za (N^p, l^p_z) dovoljno je da $\{z_n\}$ bude ravnomjerno razdvojen, a neophodno je da važi*

$$(6.5) \qquad (1 - |z_n|^2) \log^p \left(\frac{1}{|B_n(z_n)|} \right) \to 0 \quad kada \quad n \to \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je niz $\{z_n\}$ ravnomjerno razdvojen. Za dati niz $\{c_n\} \in l^p_z$ stavimo

$$(6.6) \qquad b_n = \log |c_n| \quad \text{ako je} \quad |c_n| \ge 1; \quad b_n = 0 \quad \text{ako je} \quad |c_n| < 1.$$

Tada očito niz $\{(1 - |z_n|^2)^{1/p} b_n\}$ pripada prostoru l^p, tj. niz $\{b_n\}$ pripada prostoru $\tilde{l}^p_z$. Stoga na osnovu teoreme 6.2 postoji funkcija $g \in H^p$ takva da važi $g(z_n) = b_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Definišimo funkciju f_1 kao

$$f_1(z) = \exp(g(z)), \quad z \in D.$$

Tada je očito $f_1 \in N^p$ i zbog (6.6) važi

$$(6.7) \qquad f_1(z_n) = |c_n| \quad \text{ako je} \quad |c_n| \ge 1; \quad f_1(z_n) = 1 \quad \text{ako je} \quad |c_n| < 1.$$

Stavimo

$$(6.8) \qquad c'_n = \frac{c_n}{|c_n|} \quad \text{ako je} \quad |c_n| \ge 1; \quad c'_n = c_n \quad \text{ako je} \quad |c_n| < 1.$$

Tada je $\{c_n'\} \in l^\infty$, pa na osnovu teoreme 6.1 zaključujemo da postoji funkcija $f_2 \in H^\infty$ tako da je

$$(6.9) \qquad f_2(z_n) = c_n' \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Definišimo funkciju f kao

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \quad z \in D.$$

Tada je $f \in N^p$ i iz (6.6)–(6.8) vidimo da važi $f(z_n) = c_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Time je prvo tvrdjenje teoreme dokazano.

Označimo sa K skup svih funkcija $f \in N^p$ za koje je $f(z_n) = 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Iz nejednakosti (ii) leme 2.1, gl. 2, slijedi da je K zatvoren podskup od N^p. Definišimo količnički prostor

$$\tilde{N}^p = N^p / K, \qquad \bar{f} = f + K \in \tilde{N}^p \quad \text{za} \quad f \in N^p.$$

Definišimo metriku $\bar{d}_p$ na prostoru $\tilde{N}^p$ na uobičajen način kao

$$\bar{d}_p(\bar{f}, \bar{0}) = \inf_{f \in \bar{f}} d_p(f, 0), \qquad \bar{d}_p(\bar{f}, \bar{g}) = \bar{d}_p((f-g)^-, \bar{0}).$$

Tada je $\tilde{N}^p$ F-prostor u odnosu na metriku $\bar{d}_p$.

Svakom nizu $u = \{c_n\} \in l_z^p$ očito je na jednoznačan način pridružen $\bar{f} \in \tilde{N}^p$ tako da je

$$(6.10) \qquad f(z_n) = c_n \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{i za svako} \quad f \in \bar{f}.$$

Stoga je takvo pridruživanje $\overline{T}(u) = \bar{f}$, $u \in l_z^p$ korektno definisano preslikavanje sa l_z^p na $\tilde{N}^p$. Očigledno je $\overline{T}$ linearan operator. Napomenimo da smo pomoću (5.5) definisali na prostoru l_z^p metriku σ_p. Dokazaćemo da je operator $\overline{T}$ zatvoren. Neka je niz $\{u_n\} \in l_z^p$ takav da je $\sigma_p(u_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$ i

$$(6.11) \qquad \bar{d}_p(\overline{T}(u_n), \bar{h}) \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Dokažimo da je $\bar{h} = \bar{0}$, tj.

$$h(z_k) = 0 \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{i za svako} \quad h \in \bar{h}.$$

Stavimo $\overline{T}(u_n) = \bar{h}_n$. Tada iz pretpostavke $u_n = c_k(u_n) \to 0$ kada $n \to \infty$, slijedi

$$h_n(z_k) = c_k(u_n) \to 0 \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Stavimo $\bar{h}(z_k) = c_k$ i $g_n(z) = h_n(z) - \bar{h}(z)$, $z \in D$. Tada iz (6.10) slijedi

$$(6.12) \qquad g_n(z_k) = c_k(u_n) - c_k \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{i za svako} \quad g_n \in \bar{g}_n.$$

Otuda i iz (6.11) slijedi $\bar{d}_p(\bar{g}_n, \bar{0}) \to 0$, pa za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ postoji $g_n \in \bar{g}_n$ za koje je $d_p(g_n, 0) < \varepsilon / 2^{1/p}$. Otuda i iz (6.12) na osnovu nejednakosti (ii) leme 2.1 dobijamo

$$\begin{aligned}
(1 - |z_k|)^{1/p} \log(1 + |c_k(u_n) - c_k|) &= (1 - |z_k|)^{1/p} \log(1 + |g_n(z_k)|) \\
&\leq 2^{1/p} d_p(g_n, 0) \\
&< \varepsilon \qquad \text{za svako} \quad k \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Puštajući da $n \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$, iz gornje nejednakosti slijedi $c_k = 0$ za svako $k \in \mathbf{N}$. Time je dokazano da je $\overline{T}$ zatvoren linearan operator.

Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku (vidj. [DS], str. 57) zaključujemo da je $\overline{T}$ neprekidan operator.

Neka je $u_n = \{c_k(u_n)\}_{k=1}^{\infty}$ niz takav da je

$$c_k(u_n) = 0 \quad \text{za svako} \quad k \neq n; \quad c_n(u_n) = 1.$$

Očito važi $\sigma_p(u_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$. Otuda i zbog neprekidnosti operatora $\overline{T}$ dobijamo $\bar{d}_p(\bar{h}_n, \bar{0}) \to 0$, gdje je $\bar{h}_n = \overline{T}(u_n)$. Odaberimo $h_n \in \bar{h}_n$ tako da je $d_p(h_n, 0) \to 0$ kada $n \to \infty$. Kako je $h_n \in N^p$ i na osnovu (6.10) $h_n(z_k) = 0$ za svako $k \neq n$, na osnovu teoreme 1.5 (b), gl. 1, h_n se može faktorisati kao

$$h_n(z) = B_n(z)F_n(z), \quad z \in D,$$

gdje je B_n Blaschkeov proizvod definisan pomoću (6.4) i $F_n \in N^p$. Osim toga, na osnovu teoreme 1.4, gl. 1, važi $|F_n^*(e^{i\theta})| = |h_n^*(e^{i\theta})|$ skoro svuda na T. Zbog toga važi $d_p(F_n, 0) = d_p(h_n, 0)$. Kako je na osnovu (6.10) $h_n(z_n) = 1$ za svako $n \in \mathbf{N}$, na osnovu nejednakosti (ii) leme 2.1 dobijamo

$$\begin{aligned}
(1-|z_n|)^{1/p}\log\left(\frac{1}{|B_n(z_n)|}\right) &\leq (1-|z_n|)^{1/p}\log\left(1+\frac{|h_n(z_n)|}{|B_n(z_n)|}\right)\\
&= (1-|z_n|)^{1/p}\log(1+|F_n(z_n)|)\\
&\leq 2^{1/p}d_p(F_n, 0)\\
&= 2^{1/p}d_p(h_n, 0)\\
&< \varepsilon \qquad \text{za svako} \quad n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Time je (6.5) dokazano, a samim tim i naša teorema.

Označimo sa $\bar{l}_z^p$ $(1 < p < \infty)$ skup svih strogo pozitivnih nizova $\{c_n\}$ za koje važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)|\log c_n|^p < \infty. \tag{6.13}$$

Označimo sa $\bar{N}^p$ klasu svih funkcija holomorfnih na D, koje nemaju nula u D i za koju je $\phi(z) = \log f(z) \in H^p$. Pri tome uzimamo da je $\phi(0)$ realan broj. Očigledno važi $\bar{l}_z^p \subset l_z^p$ i $\bar{N}^p \subset N^p$.

Slijedeće tvrdjenje je $\bar{N}^p$-analogon teoreme 6.2.

Teorema 6.4. *Da bi niz $\{z_n\} \subset D$ bio univerzalni interpolacioni niz za par $(\bar{N}^p, \bar{l}_z^p)$ u smislu da za bilo koji niz $\{c_n\} \in \bar{l}_z^p$ postoji funkcija $f \in \bar{N}^p$ tako da je $\log f(z_n) = \log c_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$, neophodno je i dovoljno da $\{z_n\}$ bude ravnomjerno razdvojen niz.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan niz $\{c_n\} \in \bar{l}_z^p$. Ako stavimo $b_n = \log c_n$ $(\arg(c_n) = 0)$, tada na osnovu teoreme 6.2 postoji funkcija $g \in H^p$ takva da je $g(0) = 0$ i $g(z_n) = b_n$

za svako $n \in \mathbf{N}$. Ako definišemo $f(z) = \exp(g(z))$, $z \in D$, tada je $f \in \bar{N}^p$ i $f(z_n) = c_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Za dokaz obratne tvrdnje uočimo da prostor $\bar{l}_z^p$ može biti smatran realnim Banachovim prostorom u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom definisane na slijedeći način:

(i) zbir $\{c_n\} + \{b_n\}$ je definisan kao niz $\{c_n b_n\}$.

(ii) Za realan broj λ, proizvod $\lambda\{c_n\}$ se definiše kao niz $\{(c_n)^\lambda\}$.

(iii) Norma niza $\{c_n\}$ definiše se kao

$$\|\{c_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)|\log c_n|^p\right)^{1/p} \tag{6.14}$$

Na analogan način, $\bar{N}^p$ može biti razmotren kao realan Banachov prostor u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom definisane na slijedeći način:

(i)' zbir $f + g$ je definisan kao funkcija čija je vrijednost u tački $z \in D$ jednaka $f(z)g(z)$, tj. $(f + g)(z) = f(z)g(z)$.

(ii)' Za realan broj λ, proizvod λf definiše se kao funkcija čija je vrijednost u tački $z \in D$ jednaka $(f(z))^\lambda$, tj. $(\lambda f)(z) = (f(z))^\lambda$, $(\lambda f)(0) > 0$.

(iii)' Norma od f definiše se kao

$$\|f\| = \sup_{0 \le r < 1}\left(\int_0^{2\pi}|\log f(re^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} = \left(\int_0^{2\pi}|\log f^*(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \tag{6.15}$$

gdje je logaritam odredjen uslovom $\arg(f(0)) = 0$.

Za dati niz $\{z_n\} \subset D$ označimo sa P skup svih funkcija $f \in \bar{N}^p$ za koje je $\log f(z_n) = 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. P je očigledno zatvoren potprostor od $\bar{N}^p$. Stavimo

$$N_*^p = \bar{N}^p/P \quad \text{i} \quad \bar{f} = f + P \quad \text{za} \quad f \in \bar{N}^p.$$

Tada je N_*^p realan Banachov prostor sa normom $\|\bar{f}\| = \inf_{f\in\bar{f}}\|f\|$. Svakom nizu $u = \{c_n(u)\} = \{c_n\} \in \bar{l}_z^p$ jednoznačno je pridruženo $\bar{f} \in N_*^p$ tako da je

$$\log f(z_n) = \log c_n \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{i za svako} \quad f \in \bar{f}.$$

Označimo to pridruživanje sa $\bar{S}$, tj. $\bar{f} = \bar{S}(u)$. Očito je operator $\bar{S}$ linearan. Na potpuno isti način kao u dokazu drugog dijela teoreme 6.3 možemo dokazati da je operator $\bar{S}$ zatvoren. Otuda opet na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku zaključujemo da je $\bar{S}$ neprekidan operator. Zbog toga i činjenice da su $\bar{N}^p$ i $\bar{l}_z^p$ realni Banachovi prostori slijedi da važi

$$\|f\| \le M'\|u\| \tag{6.16}$$

za neku pozitivnu konstantu M' i za neko $f \in \bar{f} = \bar{S}(u)$.

Kako je $\log f \in H^p$, iz subharmoničnosti funkcije $v(z) = |\log f(z)|^p$ na krugu D dobijamo

$$v(re^{i\theta}) \le \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)v^*(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{2}{1-r}\int_0^{2\pi}|v^*(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1,$$

odakle na osnovu (6.15) neposredno slijedi

$$(6.17) \qquad (1-|z|^2)^{1/p}|\log f(z)| \le M"\|f\|$$

za konstantu $M" = 4^{1/p}$. Neka je $u_n = \{c_k(u_n)\}_{k=1}^{\infty}$ pozitivan niz takav da je

$$c_k(u_n) = 1 \quad \text{ako je} \quad k \neq n; \quad c_n(u_n) = e.$$

Tada je na osnovu (6.14) $\|u_n\| = (1-|z_n|^2)^{1/p}$.

Neka je f_n funkcija iz $\bar{S}(u_n)$ za koju važi (6.16). Stavimo $\arg(B_n(0)) = \alpha_n$ i

$$(6.18) \qquad F_n(z) = \exp\left(\frac{\log f_n(z)}{e^{-i\alpha_n}B_n(z)}\right), \quad z \in D.$$

Tada je $F_n \in \bar{N}^p$ i važi $|\log F_n^*(e^{i\theta})| = |\log f_n^*(e^{i\theta})|$ skoro svuda na T. Stoga, na osnovu (6.16) i (6.17) dobijamo

$$\begin{aligned}(1-|z_n|^2)^{1/p}|\log F_n(z_n)| &\le M"\|F_n\| \\ &= M"\|f_n\| \\ &\le M'M"(1-|z_n|^2)^{1/p}.\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je zbog (6.18)

$$|\log F_n(z_n)| = |\log f_n(z_n)|/|B_n(z_n)| = 1/|B_n(z_n)|,$$

iz gornje nejednakosti dobijamo

$$|B_n(z_n)| \ge 1/M'M".$$

Dakle, niz $\{z_n\}$ je ravnomjerno razdvojen. Time je teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 6.5. *Pretpostavimo da je $\{z_n\} \subset D$ ravnomjerno razdvojen niz i neka je $f \in N^p$ funkcija za koju je $\log|f^*| \in L^p(T)$. Tada važi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)\left(\log^+|f(z_n)|\right)^p < +\infty.$$

Osim toga, mi možemo odabrati niz $\{z_n\} \subset D$ koji je ravnomjerno razdvojen i niz kompleksnih brojeva $\{c_n\}$ tako da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)\left(\log^+|c_n|\right)^{p-\delta} < +\infty \quad \textit{za proizvoljno} \quad 0<\delta<1,$$

a da pri tome ne postoji funkcija $f \in N^p$ za koju bi bilo $f(z_n) = c_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $f \in N^p$ funkcija za koju je $\log|f^*| \in L^p(T)$. Tada se na osnovu kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (b), gl. 1 za klase N^p, f može prikazati kao

$$f(z) = B(z)S(z)F(z), \quad z \in D,$$

gdje je $B(z)$ Blaschkeov proizvod u odnosu na nule funkcije $f(z)$, $S(z)$ singularana unutrašnja, a $F(z)$ vanjska funkcija. Ako stavimo $g(z) = S(z)F(z)$, lako se vidi da se funkcija $\log|g(z)|$ može predstaviti u obliku *Poisson-Stieltjesovog integrala*, pa na osnovu ([D2], str. 35, posljedica) slijedi da $\log g(z)$ pripada klasi H^q za svako q, $0 < q < 1$. Kako je na osnovu teoreme 1.4, gl. 1, $|g^*(e^{i\theta})| = |f^*(e^{i\theta})|$ skoro svuda na T, to je $\log|g^*| \in L^p(T)$. Stoga, na osnovu kanonske faktorizacione teoreme 1.5 (d), gl. 1 za klase H^p, zakjučujemo da funkcija $\log g(z)$ pripada klasi H^p. Na osnovu teoreme ([D2], str. 149, teorema 9.1) zaključujemo da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)|\log g(z_n)|^p < +\infty,$$

odakle slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)\left(\log^+|f(z_n)|\right)^p \le \sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)|\log g(z_n)|^p < +\infty.$$

Time je prvo tvrdjenje teoreme dokazano.

Za dokaz drugog tvrdjenja, uzmimo broj b takav da je $0 < b < 1$ i stavimo $z_n = 1 - b^n$, $c_n = \exp(1/b^{n/p})$. Tada niz $\{z_n\}$ zadovoljava uslov iz ([D2], str. 155, teorema 9.2), pa na osnovu iste teoreme zaključujemo da je $\{z_n\}$ ravnomjerno razdvojen niz. Osim toga očigledno važi

$$(1-|z_n|)\left(\log^+|c_n|\right)^p = 1 \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{6.19}$$

Kako na osnovu teoreme 2.2 (i), gl. 2, za svaku funkciju $f \in N^p$ mora važiti

$$(1-|z|)\left(\log^+|f(z)|\right)^p = o(1) \quad \text{kada} \quad |z| \to 1,$$

to zbog (6.19) zaključujemo da ne postoji funkcija $f \in N^p$ za koju važi $f(z_n) = c_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Time je teorema dokazana.

LITERATURA

[A] R. Arens, *Linear topological division algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 623–630.

[B] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[C] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.

[Da] C. S. Davis, *Ph.D. Thesis*, University of Wisconsin–Madison (1972).

[DS] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, Part I: General theory*, Pure and Appl. Math. 7, Interscience, New York, 1958.

[D1] P. L. Duren, *Smoothness of functions generated by Riesz products*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1263–1268.

[D2] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[DRS] P. L. Duren, B. W. Romberg, and A. L. Shields, *Linear functionals on H^p spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math. **238** (1969), 32–60.

[E1] C. M. Eoff, *Fréchet envelopes of certain algebras of analytic functions*, Michigan Math. J. **35** (1988), 413–426.

[E2] C. M. Eoff, *A representation of N_α^+ as a union of weighted Hardy spaces*, Complex Variables Theory and Appl. **23** (1993), 189–199.
INC.

[Gam] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[Gar] J. B.Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.

[GZ] V. I. Gavrilov and V. S. Zaharyan, *Conformal invariance and the characteristic property of boundary values of functions of the class M*, Dokl. Akad. Nauk Armyan. **93** (1992), no. 3, 105–109 (in Russian).

[HS] H. Helson and G. Szegö, *A problem in prediction theory*, Ann. Mat. Pura Appl. **51** (1960), 107–138.

[H] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

[I] J. Igusa, On a property of the domain of regularity, Mem. Coll. Sci. University of Kyoto, Ser. A, **27** (1952), 95–97.

[Ka] V. Kabaila, *Interpolation sequences for the H^p classes in the case $p < 1$*, Litov. Mat. Sb. **3** (1963) no. 1, 141–147 (in Russian).

[KN] J. E. Kelley, I. Namioka et al., *Linear topological spaces*, Princeton, 1963.

[K1] H. O. Kim, *On closed maximal ideals of M*, Proc. Japan Academy **62A** (1986), 343–346.

[K2] ________, *On an F-algebra of holomorphic functions*, Can. J. Math. **40** (1988), 718–741.

[KC] H. O. Kim and J. S. Choa, *Composition operators on some F-algebras of holomorphic functions*, Nihonkai Math. J. **7** (1996), no. 1, 29–39.

[Ko] P. Koosis *Introduction to H^p spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Series 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Köt] G. Köthe, *Topological vector spaces* I, Springer-Verlag, Heidelberg, 1969.

[L] E. Landau, *Darstellung und Begrundung einiger neurer Ergebnisse der Funktiontheorie*, Springer, Berlin, 1929.

[Le] G. D. Levšina, Mat. Zametki **52** (1992) no. 5, 68–77.

[M] R. Martin, *On the ideal structure of the Nevanlinna class*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 135–143.

[Mc1] J. E. McCarthy, *Common range of co-analytic Toeplitz' operators,* J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 793–799.

[Mc2] ________, *Topologies on the Smirnov class*, J. Funct. Anal. **104** (1992), 229–241.

[Mc3] ________, *Coefficient estimates on weighted Bergman spaces*, Duke Math. J. **76** (1994), 751–760.

[Moc] N. Mochizuki, *Algebras of holomorphic functions between H^p and N_**, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 898–902.

[Mor] R. Mortini, *Zur Idealstruktur von Unterringen der Nevanlinna-klasse N*, Sém. Math. Luxembourg **1** (1989), 81–91.

[MR] W. S. McVoy and L. A. Rubel, *Coherence of some rings of functions*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 76–87.

[N] Naftalevič, *On interpolation by functions of bounded characteristic*, Učeniye Zapiski, Vilinius, Gos. Univ. **5** (1956), 5–27 (in Russian).

[I] J. Igusa, On a property of the domain of regularity, Mem. Coll. Sci. University of Kyoto, Ser. A, **27** (1952), 95–97.

[Ka] V. Kabaila, *Interpolation sequences for the H^p classes in the case $p < 1$*, Litov. Mat. Sb. **3** (1963) no. 1, 141–147 (in Russian).

[KN] J. E. Kelley, I. Namioka et al., *Linear topological spaces*, Princeton, 1963.

[K1] H. O. Kim, *On closed maximal ideals of M*, Proc. Japan Academy **62A** (1986), 343–346.

[K2] _______, *On an F-algebra of holomorphic functions*, Can. J. Math. **40** (1988), 718–741.

[KC] H. O. Kim and J. S. Choa, *Composition operators on some F-algebras of holomorphic functions*, Nihonkai Math. J. **7** (1996), no. 1, 29–39.

[Ko] P. Koosis *Introduction to H^p spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Series 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Köt] G. Köthe, *Topological vector spaces* I, Springer-Verlag, Heidelberg, 1969.

[L] E. Landau, *Darstellung und Begrundung einiger neurer Ergebnisse der Funktiontheorie*, Springer, Berlin, 1929.

[Le] G. D. Levšina, Mat. Zametki **52** (1992) no. 5, 68–77.

[M] R. Martin, *On the ideal structure of the Nevanlinna class*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 135–143.

[Mc1] J. E. McCarthy, *Common range of co-analytic Toeplitz operators,* J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 793–799.

[Mc2] _______, *Topologies on the Smirnov class*, J. Funct. Anal. **104** (1992), 229–241.

[Mc3] _______, *Coefficient estimates on weighted Bergman spaces*, Duke Math. J. **76** (1994), 751–760.

[Moc] N. Mochizuki, *Algebras of holomorphic functions between H^p and N_**, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 898–902.

[Mor] R. Mortini, *Zur Idealstruktur von Unterringen der Nevanlinna-klasse N*, Sém. Math. Luxembourg **1** (1989), 81–91.

[MR] W. S. McVoy and L. A. Rubel, *Coherence of some rings of functions*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 76–87.

[N] Naftalevič, *On interpolation by functions of bounded characteristic*, Učeniye Zapiski, Vilinius, Gos. Univ. **5** (1956), 5–27 (in Russian).

[NY] J. Nagatomo and N. Yanagihara, *On the Riesz uniqueness theorem for functions of nearly bounded characteristics*, Math. Z. **124** (1972), 361–370.

[P1] I. I. Privalov, *Boundary properties of analytic functions*, Moscow University Press, Moscow, 1941 (Russian).

[P2] ________, *Boundary properties of analytic functions*, GITTL, Moscow, 1950; 2nd ed. (Russian); German transl., VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1956.

[Re] M. von Renteln, *Ideals in the Nevanlinna class N*, Mitt. Math. Sem. Giessen **123** (1977), 57-65.

[Ro] J. W. Roberts, *The component of the origin in the Nevanlinna class*, Illinois J. Math. **19** (1975), 553–559.

[RS1] J. W. Roberts and M. Stoll, *Prime and principal ideals in the algebra N^+*, Arch. Math. (Basel) **27** (1976), 387–393; Correction, ibid. **30** (1978), 672.

[RS2] J. W. Roberts and M. Stoll, *Composition operators on F^+*, Studia Math. **57** (1976), 217–228.

[R1] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[R2] ________, *Function theory in polydisc*, Benjamin, New York, 1969.

[Sh] H. H. Shaeffer, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[S] F. A. Shamoyan, *Description of closed ideals of the Nevanlinna-Dzhrbashyan algebras, and characterization of weakly cyclic elements of the algebra N^+*, Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat. **23** (1988), no. 6, 575–587 (in Russian).

[S1] J. H. Shapiro, *Remarks on F-spaces of analytic functions*, Lecture Notes in Math. **604**, 103–123, 1976.

[S2] ________, *Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on Hardy and Bergman spaces*, Duke Math. J. **43** (1976), 187–202.

[SS1] H. S. Shapiro and A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math. **83** (1961), 513–532.

[SS2] J. H. Shapiro and A. L. Shields, *Unusual topological properties of the Nevanlinna class*, Amer. J. Math. **97** (1975), 915-936.

[St1] M. Stoll, *A characterization of $F^+ \cap N$*, Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976), 97–98.

[St2] ________, *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions,* Ann. Polon. Math. **35** (1977), 139–158.

[Sz] G. Szegö, *Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen (Erste Mitteilung)*, Math. Z. **6** (1920), 167–202.

[W] A. Wilansky, *Modern methods in topological vector spaces*, McGraw-Hill, New York, 1978.

[Y1] N. Yanagihara, On a class of functions and their integrals, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 550–576.

[Y2] ________, *Mean growth and Taylor coefficients of some classes of functions*, Ann. Polon. Math. **30** (1974), 37–48.

[Y3] ________, *Multipliers and linear functionals for the class N^+*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 449–461.

[Y4] ________, *Bounded subsets of some spaces of holomorphic functions*, Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo **23** (1973), 19–28.

[Y5] ________, *The containing Fréchet space for the class N^+*, Duke Math. J. **40** (1973), 93–103.

[Y6] ________, *The second dual space for the space N^+*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 33–36.

[Y7] ________, *Interpolation theorems for the class N^+*, Illinois Jour. Math. **18** (1974), 427–435.

[Y8] ________, *Generators and maximal ideals in some algebras of holomorphic functions*, Tohoku Math. J. **27** (1975), 31–47.

[Z1] A. I. Zayed, *Topological vector spaces of analytic functions*, Complex Variables Theory and Appl. **2** (1983), 27-50.

[Z2] ________, *Recoverability of some classes of analytic functions from their boundary values*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 493-498.

RADOVI AUTORA

[1] Romeo Meštrović, *O nekim F-algebrama holomorfnih funkcija*, Magistarski rad, Univerzitet Crne Gore (1996).

[2] Romeo Meštrović and Žarko Pavićević, *Remarks on some classes of holomorphic functions*, Math. Montisnigri **6** (1996), 27–37.

[3] Romeo Meštrović, *A characterization of an subclass of the Smirnov class*, Math. Montisnigri **7** (1996), 29–34.

[4] Romeo Meštrović, *Ideals in some rings of Nevanlinna-Smirnov type*, Math. Montisnigri **8** (1996), 127–135.

[5] Romeo Meštrović and A. V. Subbotin, *Multipliers and linear functionals for the Privalov's spaces of functions holomorphic in the disk*, (in Russian), (rad prihvaćen za štampu u Dokl. Akad. Nauk Russian).

[6] Romeo Meštrović and Žarko Pavićević, *The logarithmic analogue of Szegö's theorem*, Acta Sci. Math. **64** (1998), 97–102.

Summary

In this dissertation we investigate linear topological and functional properties of some F-algebras of holomorphic functions on the open unit disk $D : |z| < 1$. These classes were introduced by I. I. Privalov in the first edition of [P1]. Namely, the class N^p $(1 < p < \infty)$ (with the notation A_q in [P1]) consists of those holomorphic functions f on D for which $(\log^+ |f(z)|)^p$ has a harmonic majorant on D. It is known that the class N^p with respect to the metric d_p defined by M. Stoll in [St2] becomes an F-algebra.

In Chapter 1 we give preliminary notations, definitions and results. We prove certain inclusion relations among the various classes. We also give a short proof of the canonical factorization theorem for the classes N^p.

In Chapter 2 we first obtain the estimates for the mean growth and Taylor coefficients related to the functions from the classes N^p. By using these estimates, we characterize multipliers from N^p into the Hardy class H^q $(0 < q \leq \infty)$. As an application, we obtain a complete characterization of the space of all continuous linear functionals on N^p. Further, we prove that N^p is not locally bounded, and also it is not locally convex.

In Chapter 3 we define different topologies on the spaces N^p. We first define the inductive limit topology that is equivalent with the initial d_p metric topology, and the usual locally convex inductive limit topology, which we shall call the Helson topology and denote $\mathcal{H}^p$. It is proved that the topology $\mathcal{H}^p$ coincides with the induced on N^p metric topology defined on the Fréchet envelope F^p of N^p. Further, we prove the asymptotic versions of Szegös theorem and the Helson-Szegös theorem.

In Chapter 4 we investigate the ideal structure of the algebras N^p. We prove that N^p is a ring of Nevanlinna-Smirnov type in the sense of Mortini [Mor]. As an application, we obtain the fact that the ring N^p has the Corona Property, and that N^p is a coherent ring. We give also sufficient conditions for an ideal in N^p, generated by a finite number of inner functions, to be equal to the whole algebra N^p.

In Chapter 5 we prove the N^p-variant of Beurling's theorem. Using a result of Mochizuki [Moc] we obtain a characterization of invariant subspaces of N^p. Furthermore, we give a characterization of weakly dense closed ideals in N^p. We prove the logarithmic analogue of Szegös theorem.

In Chapter 6 we investigate linear topological properties of the spaces M^p $(1 < p < \infty)$ that generalizes the space M. The main result states that $M^p = N^p$ and that these spaces have the same topological structure. Further, we characterize bounded subsets of N^p. We also define the spaces l_z^p of complex sequences as discrete versions of the spaces N^p. We define the metric σ_p on l_z^p, and we prove that l_z^p is an F-space with respect to this metric. The spaces l_z^p are in connection with the interpolation problems in N^p. Finally, we give three interpolation theorems related to the interpolation in N^p.

PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Romeo Meštrović

Godina rođenja 1960.

E-mail romeo@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore

Prirodno-matematički fakultet u Podgorici

Naslov doktorske disertacije

Topološke i F-algebre holomorfnih funkcija

Prevod naslova na engleski jezik

Topological and F-algebras of holomorphic functions

Datum odbrane Mart 1999. godine

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci[1]

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

---

[1] Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV UNIVERZITETA CRNE GORE

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Topological and F-algebras of holomorphic functions

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

Mentor prof. dr Žarko Pavićević; Komisija za ocjenu: prof. dr Žarko Pavićević, prof. dr Valerian Ivanovič Gavrilov, prof. dr Predrag Obradović i prof. dr Stevan Pilipović; Komisija za odbranu: prof. dr Žarko Pavićević (mentor), prof. dr Stevan Pilipović (predsjednik), prof. dr Predrag Obradović (član) i prof. dr Radoje Šćepanović (član).

Sažetak*

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

Ključne riječi

Ključne riječi na engleskom jeziku

Naučna oblast/uža naučna oblast

kompleksna analiza i funkcionalna analiza/topološke i F-algebre funkcija jedne kompleksne promjenljive

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku

complex analysis and functional analysis/topological and F-algebras of functions of one complex variable

Ostali podaci

* Ukoliko je predviđeni prostor za polja Sažetak, Sažetak na engleskom jeziku, Ključne riječi i Ključne riječi na engleskom jeziku nedovoljan, priložiti ih u posebnom prilogu.

Sažetak

U ovoj disertaciji istražuju se linearno topološka i funkcionalna svojstva nekih F-algebri holomorfnih funkcija na otvorenom jediničnom krugu $D:|z|<1$. Te klase je uveo I. I. Privalov u prvom izdanju od [P1]. Naime, klasa $N^p(1<p<\infty)$ sa oznakom A_q u [P1]), sastoji se od holomorfnih funkcija f na D za koje $(\log^+|f(z)|)^p$ ima harmonijsku majorantu na D. Poznato je da klasa N^p u odnosu na metriku d_p koju je definisao M. Stoll u [St2] obrazuje F-algebru.

U glavi 1 dajemo preliminarne oznake, definicije i rezultate. Dokazujemo neke relacije inkluzije među raznim klasama. Takođe, dajemo kratak dokaz kanonske faktorizacione teoreme za klase N^p.

U glavi 2 prvo dobijamo ocjene za srednji rast i Taylor-ove koeficijente u odnosu na funkcije iz klasa N^p. Koristeći te ocjene, karakterišemo množitelje iz N^p u Hardy-jevu klasu $H^q(0<q<\infty)$. Kao primjenu, dobijamo potpunu karakterizaciju prostora svih neprekidnih linearnih funkcionala na N^p. Nadalje, dokazujemo da N^p nije lokalno ograničen prostor, kao i da nije lokalno konveksan prostor.

U glavi 3 definišemo razne topologije na prostorima N^p. Najprije definišemo induktivnu limes topologiju koja je ekvivalentna sa inicijalnom d_p metričkom topologijom i uobičajenu lokalno konveksnu induktivnu limes topologiju, koju nazivamo Helson-ovom topologijom i označavamo sa H^p. Dokazano je da se topologija H^p podudara sa indukovanom na N^p metričkom topologijom definisanom na Frechet-ovoj obvojnici F^p od N^p. Nadalje, dokazujemo asimptotske verzije Szego-ove teoreme i Helson-Szego-ove teoreme.

U glavi 4 istražujemo strukturu ideala algebri N^p. Dokazujemo da je N^p prsten Nevanlinna-Smirnov-ljevog tipa u smislu Mortinija [Mor]. Kao primjenu dobijamo činjenicu da prsten N^p ima svojstvo korone i da je N^p koherentan prsten. Takođe, dajemo dovoljne uslove da bi se neki ideal od N^p, generisan pomoću konačno mnogo unutrašnjih funkcija, podudario sa cijelom algebrom N^p.

U glavi 5 dokazujemo N^p-varijante Beurling-ove teoreme. Koristeći Mochizuki-jev rezultat [Moc], dobijamo karakterizaciju invarijantnih podprostora od N^p. Osim toga, dajemo kararakterizaciju slabo gustih zatvorenih ideala od N^p. Dajemo logaritamski analogon Szego-ove teoreme.

U glavi 6 istražujemo linearno topološka svojstva prostora $M^p(1<p<\infty)$ koji su generalizacija prostora M. Glavni rezultat tvrdi da je $M^p=N^p$ i da ti prostori imaju istu topološku strukturu. Nadalje, karakterišemo ograničene podprostore od N^p. Takođe, definišemo prostore l_z^p kompleksnih nizova kao diskretne verzije prostora N^p. Definišemo metriku σ_p na l_z^p i dokazujemo da je l_z^p F-prostor u odnosu na tu metriku. Prostori l_z^p su u vezi sa interpolacionim problemima za N^p. Konačno, dajemo interpolacione teoreme u odnosu na interpolaciju u N^p.

Sažetak na engleskom jeziku

In this dissertation we investigate linear topological and functional properties of some F-algebras of holomorphic functions on the open unit disk $D:|z|<1$. These classes were introduced by I. I. Privalov in the first edition of [P1]. Namely, the class $N^p(1<p<\infty)$ (with the notation A_q in [P1]) consists of those holomorphic functions f on D for which $(\log^+|f(z)|)^p$ has a harmonic majorant on D. It is known that the class N^p with respect to the metric d_p defined by M. Stoll in [St2] becomes an F-algebra.

In Chapter 1 we give preliminary notations, definitions and results. We prove certain inclusion relations among the various classes. We also give a short proof of the canonical factorization theorem for the classes N^p.

In Chapter 2 we first obtain the estimates for the mean growth and Taylor coefficients related to the functions from the classes N^p. By using these estimates, we characterize multipliers from N^p into the Hardy class $H^q(0<q<\infty)$. As an application, we obtain a complete characterization of the space of all continuous linear functionals on N^p. Further, we prove that N^p is not locally bounded, and also it is not locally convex.

In Chapter 3 we define different topologies on the spaces N^p. We first define the inductive limit topology that is equivalent with the initial d_p metric topology, and the usual locally convex inductive limit topology, which we shall call the Helson topology and denote H^p. It is proved that the topology H^p coincides with the induced on N^p metric topology defined on the Frechet envelope F^p of N^p. Further, we prove the asymptotic versions of Szego's theorem and the Helson-Szego's theorem.

In Chapter 4 we investigate the ideal structure of the algebras N^p. We prove that N^p is a ring of Nevanlinna-Smirnov type in the sense of Mortini [Mor]. As an application, we obtain the fact that the ring N^p has the Corona Property, and that N^p is a coherent ring. We give also sufficient conditions for an ideal in N^p generated by a finite number of inner functions, to be equal to the whole algebra N^p.

In Chapter 5 we prove the N^p-variant of Beurling's theorem. Using a result of Mochizuki [Moc], we obtain a characterization of invariant subspaces of N^p. Furthermore, we give a characterization of weakly dense closed ideals in N^p. We prove the logarithmic analogue of Szego's theorem.

In Chapter 6 we investigate linear topological properties of the spaces $M^p(1<p<\infty)$ that generalizes the space M. The main result states that $M^p=N^p$ and that these spaces have the same topological structure. Further, we characterize bounded subsets of N^p. We also define the spaces l_z^p of complex sequences as discrete versions of the spaces N^p. We define the metric σ_p on l_z^p, and we prove that l_z^p is an F-space with respect to this metric. The spaces l_z^p are in connection with the interpolation problems in N^p. Finally, we give three interpolation theorems related to the interpolation in N^p.

Ključne riječi
holomorfna funkcija u otvorenom jediničnom krugu, topološka algebra, F-algebra, Nevanlinna-ina klasa, Smirnov-ljeva klasa, Privalov-ljeva klasa N^p, klasa M^p

Ključne riječi na engleskom jeziku
holomorphic function on the open unit disk, topological algebra, F-algebra, Nevanlinna class, Smirnov class, Privalov class N^p, the class M^p

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Topološke i F-algebre holomorfnih funkcija

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commmons), za koju sam se odlučio/la[1].

- ☐ Autorstvo
- ☐ Autorstvo – bez prerada
- ☐ Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
- ☐ Autorstvo – nekomercijalno
- ☐ Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
- ■ Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Potpis doktoranda

U Kotoru, 28.11.2016. g.

[1] Odabrati (čekirati) jednu od šest ponuđenih licenci (kratak opis licenci dat je na poleđini ovog priloga)

Autorstvo
Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno
Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada
Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.