

UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

mr Vesna RUBEŽIĆ

VREMENSKO-FREKVENCIJSKE REPREZENTACIJE
U DETEKCIJI HAOTIČNIH STANJA U
OSCILATORNIM KOLIMA

-doktorska disertacija-

Podgorica, 2006.

ИИВ. №

31711

№ IV 1558



УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА
ПОДГОРИЦА

Zahvaljujem se mentoru
Prof. dr Igoru ĐUROVIĆU na dragocenoj i
svesrdnoj pomoći pri izradi ovog rada.

U Podgorici, septembra 2006. godine

Autor

Sadržaj

Sažetak	i
Abstract	ii
Uvod	1
1 Osnovni pojmovi	7
1.1 Dinamički sistemi	7
1.2 Atraktori	8
1.3 Jednačine stanja, vektorsko polje i trajektorije	10
1.3.1 Ravnotežna tačka (tačke)	11
1.3.2 Linearni i afini sistemi	11
1.3.3 Linearizacija	11
1.3.4 Sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori	12
1.3.5 Stabilnost	13
1.4 Karakteristike haosa	13
1.4.1 Osjetljiva zavisnost od početnih uslova	13
1.4.2 Slučajnost u vremenskom domenu	14
1.4.3 Širokopojasni spektar snage	14
1.5 Kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa	16
1.5.1 Spektar snage i autokorelacija	16
1.5.2 Poincare-ovi presjeci	17
1.6 Kvantitativni pokazatelji determinističkog haosa	18
1.6.1 Lyapunov-ljevi eksponenti	18
1.6.2 Kolmogorov-ljeva entropija	21

1.6.3	Fraktalna dimenzija	22
1.7	Bifurkacije i scenariji prelaza u kaos	23
1.7.1	Vrste bifurkacija	25
1.7.2	Scenariji prelaza u kaos	26
1.8	Chua-ino kolo	28
1.8.1	Geneza Chua-inog kola	28
1.8.2	Jednačine stanja Chua-inog kola	29
2	Detekcija haosa	31
2.1	Lyapunov-ljevi eksponenti	34
2.2	Titracija haosa sa dodatim šumom	39
2.3	Usporedne karakteristike postojećih metoda za detekciju haosa	43
3	Signali iz nelinearnih oscilatora u frekventnom domenu	45
3.1	Fourier-ova transformacija	46
3.2	Vremensko-frekvencijska analiza signala	48
3.2.1	Kratkotrajna Fourier-ova transformacija i spektrogram	48
3.2.2	Wigner-ova distribucija	52
3.2.3	Diskretna forma vremensko-frekvencijskih distribucija	52
3.3	Spektar signala iz haotičnih oscilatora	54
4	Predloženi detektor	56
4.1	Detekcija haosa u Chua-inom oscilatoru	56
4.2	Algoritam 1 - brojanje do prvog maksimuma	59
4.3	Detekcija haosa u Colpitts-ovom oscilatoru	64
4.4	Algoritam 2 - brojanje u čitavoj ravni	67
5	Rezultati simulacija	72
5.1	Period-udvostručavajući put u kaos	72
5.2	Kvaziperiodični put u kaos	73
5.3	Intermitentni put u kaos	76
5.4	Lorenz-ov haotični sistem	78
5.5	Rossler-ov haotični sistem	79

5.6	Logističko preslikavanje	81
5.7	Detekcija više-dimenzionalnog haosa	82
5.8	Detekcija haosa u neautonomnim nelinearnim oscilatorima	85
5.9	Colpitts-ov oscilator	87
6	Uticaj šuma i širine prozora na tačnost detektora	89
6.1	Uticaj šuma na tačnost detektora	89
6.2	Uticaj širine prozora na tačnost detektora	90
6.2.1	Analiza uticaja širine prozora na tačnost detektora	91
6.2.2	Multiwindow detektor	92
6.2.3	Numerički rezultati	93
7	Primjena detektora u haotičnim komunikacijama	97
7.1	Otkrivanje haotičnih komunikacija	98
7.2	Otkrivanje komunikacija sa hiper-haotičnim predajnikom	99
	Zaključak	103
	Literatura	106

Sažetak

Teorija haosa je jedna od najinteresantnijih oblasti nauke koja se razvila u dvadesetom vijeku. Deterministički kaos zapažen je u mnogim fenomenima od kvantnog do astronomskog nivoa, u različitim disciplinama kao što su tehnika, meteorologija, ekonomija... Važan dio ove oblasti je analiza haotičnih signala, odnosno detekcija dinamike sistema na osnovu jednog niza dostupnih podataka. Od posebnog interesa je detekcija haosa u eksperimentalnim podacima. Ipak, postojeći metodi za detekciju haosa imaju mnogo nedostataka: veliku složenost računanja, nepouzdanost za kratke nizove kontaminirane šumom, neprimjenljivost na široku klasu sistema... S obzirom na raznolikost haotičnih sistema i nedostatke postojećih tehnika za detekciju haosa, problem detekcije se smatra otvorenim.

Glavna tema ove teze je detekcija haotičnih odnosno periodičnih stanja u nelinearnim oscilatornim kolima. Razvijen je metod za detekciju haosa na osnovu vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz haotičnog oscilatora.

Predloženi detektor je primijenjen na haotična oscilatorna kola (Chua-ino, Colpitts-ovo) za nekoliko različitih scenarija prelaza u kaos. Takođe, pokazano je da njegova primjena nije ograničena samo na oscilatorna kola. Naime, uspješno je primijenjen u detekciji haosa u poznatim haotičnim sistemima kao što su Lorenz-ov, Rossler-ov i Duffing-ov sistem i logističko preslikavanje.

Analiziran je uticaj šuma i širine upotrijebljenog prozora u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji na tačnost detektora. Na osnovu ove analize predložen je multiwindow pristup, koji daje bolje rezultate nego verzija detektora sa jednim prozorom konstantne širine.

Na kraju, pokazano je da metod može biti primijenjen za otkrivanje haotičnih sigurnih komunikacija.

Abstract

Chaos theory is one of the most interesting fields in science, developed in the 20-th century. Deterministic chaos can be observed in many phenomena from the quantum to astronomical level, in the different disciplines like for example technics, metrology, economics... Important part of this field is chaotic signal analysis, i.e. system dynamics detection based on one of the available data. One particularly important issue is detection of chaos in experimental series. However, existing methods for chaos detection have many drawbacks: high numerical complexity, long series required for reliable detection, absence of techniques that can be used in arbitrary system... Considering the chaotic systems variety and drawbacks of the existing techniques for chaos detection, detection problem can be assumed to be open.

The main subject of this thesis is chaotic states detection in nonlinear oscillator circuits. The time-frequency representation based chaos detection of the signals from chaotic oscillator circuits is developed.

The proposed detector has been applied on the chaotic circuits (Chua's and Colpitts) in some common routes to chaos. In addition, it has been shown that application of the proposed detector is not limited to the chaotic oscillatory circuits. Namely, it has been successfully applied on some common chaotic systems (Lorenz's, Rossler's, Duffing's system and logistic map). For this systems the proposed detector could be used as an additional (auxiliary) tool for chaos detection to some exist tools.

Influence of noise and the window width used in time-frequency representation to the detector accuracy is analyzed. Based of this analysis a multiwindow approach, producing better results than a single window counterpart, has been proposed.

Finally, it has been shown that this method can be applied to the breaking chaotic secure communication.

Uvod

U osnovi nauke je pretpostavka da su eksperimenti predvidljivi i ponovljivi. Prema tome, mnoge naučnike je iznenadilo kad su otkrili da prosti deterministički sistemi nisu ni predvidljivi ni ponovljivi. Umjesto toga, oni ispoljavaju kaos, u kojem najfinija promjena početnih uslova izaziva vrlo različite izlaze, čak i kad su jednačine koje opisuju dinamiku tačno poznate.

Aspekti haosa su poznati stotinu godina unazad. Isaac Newton je naišao na teškoće u razumijevanju gravitacionog problema tri tijela kao što su Sunce, Mjesec i Zemlja. Jules Henri Poincare se bavio rješavanjem ovog problema. Nije ga riješio, ali je zapazio izuzetnu osjetljivost ovog sistema na promjenu početnih uslova i nemogućnost njegove dugotrajne predikcije. Uveo je u suštini geometrijske metode kao što su fazni tokovi, periodične orbite i njihove presječne površi, homokliničke tačke..., koji su nezamjenljivi u razumijevanju haotične dinamike. Poincare je predvidio većinu od modernog haosa, ali njegova otkrića su više od pola vijeka čekala na razvoj kompjutera koji prate naučnike u rješavanju problema sa haotičnim rešenjima i omogućavaju njihovu vizuelizaciju.

Teorija haosa je napredovala u poslednjih trideset godina. Ona je istakla interdisciplinarnu prirodu problema na frontu nauke. Mnoge od novih ideja o haosu pojavile su se nezavisno jedna od druge i praktično istovremeno u više oblasti. Metode teorije haosa ušle su u veći broj naučnih disciplina. Deterministički kaos je zapažen u mnogim fenomenima od kvantnog do astronomskog nivoa, u različitim disciplinama kao što su meteorologija, psihologija, ekologija, ekonomija... Haotična atmosferska strujanja onemogućavaju dugotrajnu predikciju vremena i ilustruju osjetljivu zavisnost od promjene početnih uslova poznatu kao efekat leptira [1]. Činjenica je da jednačine dinamike populacije, na primjer jednačine "lovca i divljači", koje je izveo Volterra [2], pokazuju znatno bogatije ponašanje nego što su to biolozi ranije pretpostavljali, i da je haotično

ponašanje sastavni, čak esencijalni dio tih modela. U ekonomiji tok novca od kupca do prodavca, zakoni ponude i potražnje i druga kretanja na tržištu mogu ispoljavati haos [3]. U novije vrijeme, naučnici su pokazali da i signali iz srca i mozga, EKG [4], [5] i EEG [6] mogu biti haotični. Haos je zapažen u informacionim tokovima u mozgu, unutar kompjutera, u Internet komunikaciji i u relacijama unutar socijalnih grupacija. Drugi primjeri dinamičkih sistema koji mogu ispoljavati haos uključuju kretanje elektrona u atomima, prostiranje zemljotresnih talasa, širenje epidemije, rast kancera... Haos u električnim kolima, naročito u nelinearnim oscilatornim kolima predmet je analize u ovom radu.

Jednostavne jednačine dinamičkih sistema mogu imati komplikovana rešenja koja uključuju osjetljivu zavisnost od početnih uslova, čudne atraktore i bifurkacione sekvence. Razmatranje inverznog problema je veoma interesantno. Naime, zapaženo je kompleksno ponašanje, i traži se njegova što je moguće jednostavnija karakterizacija. Samo na osnovu eksperimentalnih podataka trebalo bi odgovoriti da li je dinamika deterministička i haotična ili nedeterministička i slučajna. U ekstremnom slučaju, dostupna je samo jedna sekvenca mjerene veličine u sukcesivnim trenucima - jedan vremenski niz. U rješavanju ovog problema ide se od teorijskog prema više eksperimentalnom pristupu. Naglasimo da je analiza haotičnih podataka manje napredovala nego teorija haotičnih sistema. Analiza vremenskih nizova je stara i razvijena oblast o kojoj je mnogo pisano. Međutim, nove tehnike razvijene su specijalno za karakterizaciju haotičnih sistema. Mogućnost razumijevanja i karakterizacije kompleksnih sistema iz varijacije jedne promjenljive stanja dobija ogroman značaj u poslednje vrijeme i otvara široke mogućnosti za primjenu u svim oblastima nauke.

Postoji više tehnika za detekciju haotičnih stanja. Glavno obilježje haotičnih sistema je njihova izuzetna osjetljivost na promjenu početnih uslova i označena je prisustvom bar jednog pozitivnog Lyapunov-ljevog eksponenta - mjere eksponencijalnog razdvajanja bliskih stanja. Ako su poznate jednačine koje opisuju dinamički sistem, za njegovu karakterizaciju najviše je korišćeno upravo računanje Lyapunov-ljevih eksponenata. Osnovni algoritam za njihovo računanje je saopštio Benettin [7]. Naravno, u literaturi postoji mnogo varijacija ovog algoritma. Za sve njih karakteristična je velika računaska složenost.

Ipak, mnogo složeniji problem je karakterizacija eksperimentalnih nizova podataka. Metodi detekcije haotičnih stanja u vremenskim nizovima mogu se podijeliti u četiri velike grupe:

1. Računanje Lyapunov-ljevih eksponenata
2. Računanje informacionih i topoloških mjera atraktora rekonstruisanih iz podataka
3. Posredna detekcija nelinearnog determinizma u šumnom signalu
4. Ostali metodi zasnovani na različitim tehnikama.

Mada je postojanje jednog pozitivnog Lyapunov-ljevog eksponenta definitivni dokaz haosa u idealnim modelima sistema, njihova primjena u realnim sistemima ima nekoliko ograničenja. Lyapunov-ljevi eksponenti mogu pouzdano detektovati kaos samo u slučaju izuzetno dugačkih nizova podataka bez šuma. Za većinu empirijskih podataka ove zahtjeve je teško zadovoljiti. Najpoznatije algoritme za računanje Lyapunovljevih eksponenata iz eksperimentalnih podataka dali su Wolf [8] i Rosenstein [9]. Informacija o sistemu izvlači se iz geometrije atraktora u faznom prostoru, pa je u osnovi ovih algoritama rekonstrukcija atraktora iz dostupnih podataka. Algoritmi su osjetljivi na šum, zahtjevni u pogledu računanja i neupotrebljivi za kratke nizove podataka.

Drugu grupu metoda za detekciju haosa čine metodi za računanje informacionih i topoloških mjera atraktora rekonstruisanih iz dostupnih podataka. Najpoznatiji iz ove grupe je Grassberger-Procaccia algoritam za računanje korelacione dimenzije [10] i Kolmogorov-ljeve entropije [11]. I u osnovi ovih metoda je rekonstrukcija atraktora iz jednog niza podataka i osjetljivi su na promjenu dužine niza, ugrađenu dimenziju, rekonstruktivno kašnjenje i slično. Takođe su veoma složeni za računanje i osjetljivi na šum.

Potpuno različit pristup promoviše treća grupa metoda za detekciju haosa. U osnovi ovih metoda je detekcija nelinearnog determinizma u datom vremenskom nizu. Ova detekcija može biti izvršena na više različitih načina. Najčešće se prisustvo nelinearnog determinizma u šumnom signalu vrši na osnovu njegove kratkotrajne predikcije kroz statističko upoređenje sa slučajno generisanim "surogat" nizom. Sugihara [12], Theiler [13] i Kennel [14] su neki od autora koji predlažu ove metode. Ovi metodi su opterećeni velikom složnošću računanja, i što je važnije, činjenicom da su nelinearnost i determinizam samo neophodni uslovi za kaos, pa prema tome, ne predstavljaju dovoljan dokaz haotične

dinamike. Da bi bili sigurni u validnost dobijenih rezultata potrebno ih je kritički sagledati i uporediti sa rezultatima dobijenim primjenom neke druge tehnike.

Glavni problem leži u činjenici da su eksperimentalni podaci neizbježno kontaminirani šumom. Klasični testovi koji mogu obezbijediti dovoljan dokaz haosa, kao što su Lyapunov-ljevi eksponenti, su izuzetno osjetljivi na šum. Noviji algoritmi koji su robustni na šum mogu u najboljem slučaju potvrditi samo djelimične (neophodne) uslove haosa. Ni jedna od ovih tehnika, sama ili u kombinaciji, ne obezbjeđuje definitivan test haosa u eksperimentalnim podacima.

S obzirom na raznovrsnost sistema koji ispoljavaju haotično ponašanje i nedostatke postojećih tehnika za detekciju haosa, problem detekcije se smatra otvorenim.

Osnovni cilj istraživanja objedinjenih u ovoj tezi je formiranje jednog novog algoritma za detekciju haotičnih, odnosno periodičnih stanja u nelinearnim oscilatornim kolima. Nelinearna oscilatorna kola su važna grupa električnih kola sa širokom primjenom, haos je u njima davno zapažen, a jednačine koje opisuju njihovu dinamiku predstavljaju model mnogih nelinearnih fenomena u prirodi. Glavni rezultat istraživanja je metod detekcije haotičnih stanja razvijen na osnovu vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz oscilatora. Metod je primjenljiv na signale iz nelinearnih oscilatora, ali spektar mogućih primjena nije ograničen samo na te signale.

Rezultati istraživanja su u tezi izloženi kroz osam poglavlja i zaključak.

U uvodnom poglavlju definisani su osnovni pojmovi iz teorije haotičnih sistema.

U drugom poglavlju dat je pregled postojećih metoda za detekciju haotičnih stanja sa detaljnim opisom nekih od njih.

Osnovne definicije signala i Fourier-ove transformacije kao i osnovni pojmovi vremensko-frekvencijske analize dati su u trećem poglavlju.

Originalni doprinosi autora saopšteni su u četvrtom poglavlju disertacije. Formiran je, opisan i detaljno razmatran metod za detekciju haotičnih stanja na osnovu specifične mjere koncentracije vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz oscilatora.

Naime, nelinearni haotični oscilatori ispoljavaju bogato dinamičko ponašanje. Zavisno od vrijednosti parametara u faznom prostoru zapažaju se ravnotežna tačka, periodični, kvaziperiodični i haotični atraktori. Promjena vrijednosti parametara dovodi do bifurkacija, poslije kojih nastaje promjena u karakteru rješenja haotičnih jednačina.

Različitim oblicima signala u vremenskom domenu odgovaraju različiti oblici u frekventnom domenu. Postoje bitne razlike u spektrima signala koji odgovaraju različitim ustaljenim stanjima. Spektri periodičnih i haotičnih signala se kvalitativno razlikuju. Spektar periodičnog signala je diskretan, a haotičnog signala je kontinualan i liči na šum.

U ovom radu razmatramo šta se dešava tokom promjena stanja sistema u vremenu, odnosno pratimo spektralni sadržaj signala tokom vremena. Najprirodniji način da to uradimo je da koristimo vremensko-frekvencijsku reprezentaciju signala od interesa. Činjenica da postoje bitne kvalitativne razlike u spektru periodičnih i haotičnih signala je polazna tačka u razvijanju predloženog detektora haosa u nelinearnim oscilatornim kolima. Ako je na neki način moguće kvantifikovati tu razliku, onda se ta mjera ili kvantifikacija može iskoristiti u detekciji haotičnih odnosno periodičnih stanja u nelinearnim oscilatorima. Upravo to je urađeno u predloženom detektoru haosa. Naime, formirane su specifične mjere koncentracije vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz haotičnog oscilatora, na osnovu kojih se uz izbor odgovarajućeg praga može procijeniti stanje sistema. Razvijena su dva algoritma za detekciju haosa. Algoritam 1 se primjenjuje kada se u periodičnom režimu, u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji signala između jednosmjerne i spektralne komponente sa maksimalnom amplitudom ne zapažaju subharmonici značajne amplitude, a Algoritam 2 u slučaju kada se zapažaju subharmonici značajne amplitude.

U petom poglavlju prikazani su rezultati simulacija. Simulacije pokazuju značaj i univerzalnost predloženog metoda. Prvo, predstavljamo rezultate dobijene u slučaju period-udvostručavajućeg, kvaziperiodičnog i intermitentnog puta u kaos na primjeru Chua-inog oscilatora. Izabrali smo Chua-in oscilator, jer je to odavno poznato i dobro proučeno kolo, pa je i rezultate lako porediti sa odgovarajućom teorijom.

Da bi pokazali da primjena predloženog detektora nije ograničena samo na oscilatorna kola, analizirani su dobro poznati Lorenz-ov i Rossler-ov haotični sistem i logističko preslikavanje.

Uspješna primjena detektora u hiper-haotičnim sistemima, kao što je lanac od tri Chua-ina oscilatora, potvrđuje značaj predloženog detektora.

Zatim, detektor je primijenjen i za detekciju haosa u neautonomnim dinamičkim sistemima.

Na kraju je detekcija haosa u Colpitts-ovom oscilatoru ostvarena primjenom Algoritma 2.

Analiza uticaja šuma i uticaja primijenjene širine prozora u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji na tačnost detektora, tema je kojom se bavi šesto poglavlje.

Moguća primjena ovog detektora u otkrivanju haotičnih komunikacija opisana je u sedmom poglavlju. Rezultati prikazani u tezi sumirani su u zaključku.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Izraz haos označava neuređeno ili neregularno stanje ili kretanje nekog sistema. Deterministički haos označava neuređeno (aperiodično) kretanje izazvano determinističkim dinamičkim zakonima, odnosno nekom unaprijed zadanom tačno definisanom procedurom. Izgleda paradoksalno, ali je tačno da opštepoznati deterministički zakoni fizike, kao što su Newton-ovi zakoni ili Navier-Stokes-ove jednačine, mogu da izazovu kod nekih sistema poslije dovoljno dugog vremena neregularno i nepredvidljivo kretanje. Pri tome nije riječ o velikom broju molekula koji zahtijevaju statističke metode opisivanja, niti o sistemima sa šumom, već o krajnje jednostavnim sistemima sa jednim ili nekoliko stepeni slobode.

1.1 Dinamički sistemi

Razmatramo stacionarno ponašanje dinamičkih sistema. Pojam stacionarno (ustaljeno) označava asimptotsko ponašanje kad $t \rightarrow \infty$. I haotično ponašanje je oblik ustaljenog ponašanja [15]- [18]. Sva ostala kretanja, tzv. tranzijentna ili prelazna kretanja su od manjeg značaja u teoriji dinamičkih sistema. Ovdje su, dakle, od interesa ustaljena kretanja dinamičkih sistema zadata pomoću običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)) \quad (1.1)$$

ili pomoću iterativnih preslikavanja:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.2)$$

gdje je vektor x iz faznog prostora (prostora stanja) R^m , $m \geq 1$. To su sistemi sa kontinuiranom ili diskretnom vremenskom zavisnošću. Pri tome primjećujemo da u jednačini (1.1) nema eksplicitne vremenske zavisnosti - riječ je o autonomnim diferencijalnim jednačinama [15]-[18]. Neautonomni sistemi mogu se shvatiti kao specijalan slučaj autonomnih ukoliko se vrijeme definiše kao nova promjenljiva, a broj jednačina proširi sa $t = 1$. Međutim, neautonomni sistemi i preslikavanja imaju svojih osobenosti koje zahtijevaju analizu, nezavisno od opšte teorije autonomnih dinamičkih sistema.

Dalje, interesuju nas dinamički sistemi kod kojih su funkcije $F(x)$ ili $f(x_n)$ nelinearne funkcije svog argumenta. Takvi sistemi su predmet interesovanja oblasti koja se zove nelinearna dinamika. Neuređeno ili haotično kretanje može nastati samo kod nelinearnih dinamičkih sistema [15]-[18].

Rješenje jednačine (1.1) sa početnim uslovom x_0 , $x(t) = \phi_t(x_0)$, generiše trajektoriju diferencijalne jednačine (1.1).

Globalno vremensko ponašanje nekog dinamičkog sistema u faznom prostoru opisuje Liouville-ova teorema [17]: Neka skup svih početnih uslova definiše neku faznu zapreminu. Jednačine vremenske evolucije zadaju kretanje te zapremine u faznom prostoru. Ukoliko se tokom kretanja fazna zapremina kontrahuje (tj. divergencija od F je negativna), riječ je o disipativnom sistemu; ukoliko ona ostaje konstantna, riječ je o konzervativnom sistemu. Zanimljivo je pitanje šta sve može da se desi kada $t \rightarrow \infty$.

1.2 Atraktori

U slučaju disipativnih sistema fazna zapremina teži nuli kada $t \rightarrow \infty$. Dolazi do zgušnjavanja trajektorija i njihovog privlačenja ka nekom geometrijskom objektu. Skup tačaka na kojima se akumuliraju trajektorije kada $t \rightarrow \infty$, za svako x iz domena atrakcije, naziva se atraktor [17]. Njegova geometrijska struktura može biti vrlo jednostavna (fiksna ili ravnotežna tačka), a može biti i vrlo složena, kao što će se to vidjeti na različitim primjerima čudnih atraktora. Važno je naglasiti da stabilni atraktori disipativnih sistema ne moraju da budu samo ravnotežne tačke.

Naime, iako se ukupna fazna zapremina smanjuje, ona ne mora da se smanjuje u svim pravcima. Na primjer, ukoliko se u zapremina kontrahuje u dva pravca, a u trećem se ne

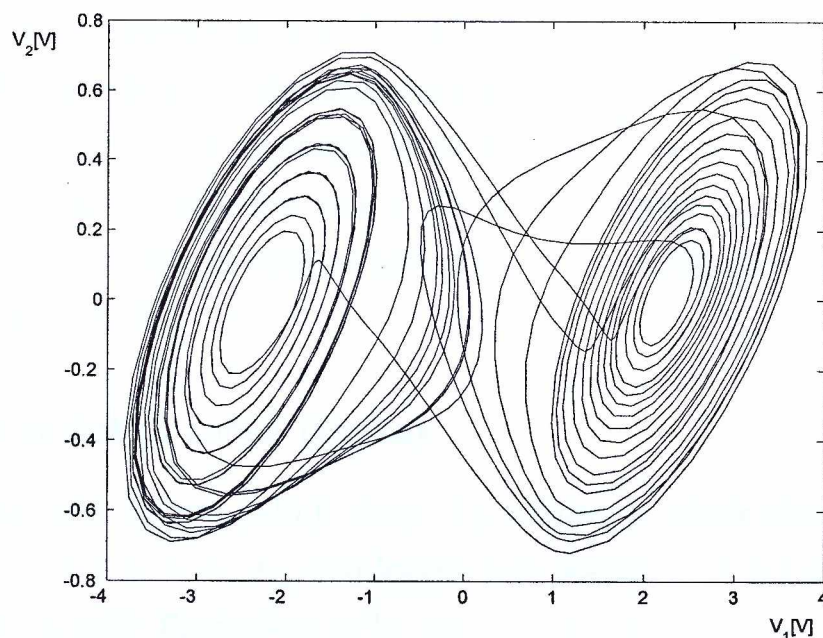
mijenja, onda je jasno da će lokalno atraktor biti sličan duži. Najjednostavniji geometrijski objekat koji je kompaktan, ograničen i lokalno liči na duž je krug, pa se takav atraktor i naziva graničnim krugom [17]. Pojava graničnog kruga u faznom prostoru označava pojavu jednostavnog periodičnog (cikličnog) kretanja u dinamici sistema.

Ravnotežne tačke se nalaze u nulama funkcije iz jednačine (1.1), odnosno u nepokretnim tačkama preslikavanja iz jednačine (1.2). Ravnotežna tačka može biti stabilna ili nestabilna. Stabilna je ukoliko privlači sve trajektorije u nekoj oblasti faznog prostora (domena atrakcije). Ona tada predstavlja ponor strujnica u R^m . Ukoliko nije stabilna, fiksna tačka je nestabilna. Nestabilna fiksna tačka može biti izvor u faznom prostoru ili sedlasta tačka. Jedan od načina na koji se može objasniti pojava graničnog ciklusa je gubitak stabilnosti fiksne tačke. Kad zbog nekog razloga (o kojima će biti riječi kasnije) ponor lokalno postane izvor, onda se oko njega formira granični krug [15]-[18].

Granični krug je najjednostavniji primjer periodičnog kretanja kada postoji samo jedna perioda i jedna frekvencija. Dešava se, međutim, da dinamički sistem može da osciluje i na dvjema nezavisnim frekvencijama. Sistem tada izvodi kvaziperiodično kretanje na torusu.

Složenom haotičnom kretanju odgovaraju posebni atraktori čudnih osobina, takozvani čudni atraktori. Čudni atraktor je ograničeni dio faznog prostora zapremine nula koji privlači sebi sve trajektorije iz domena atrakcije. On je kompaktan - ne može se razbiti na odvojene dijelove. Tipična trajektorija mora tokom vremenske evolucije da posjeti svaku tačku atraktora. Da bi korektno opisao fizičku realnost, čudni atraktor mora biti strukturno stabilan i generičan. To znači da male promjene kontrolnih parametara treba da izazovu male promjene na atraktorima, a zatim da skup parametara za koje je atraktor opservabilan nije mjere nula [15]-[18]. Haotični atraktor iz poznatog Chua-inog kola prikazan je na Slici 1.1.

No, osnovna karakteristika čudnih atraktora je osjetljivost na početne uslove, koja je posledica anizotropne kontrakcije faznog prostora [15]-[18]. Ukoliko bar u jednom pravcu umjesto kontrakcije dolazi do istezanja i zatim preklapanja, onda će se bliske tačke naći tokom vremena proizvoljno daleko jedne od drugih, što dovodi do principijelne neodredljivosti njihovog položaja, do porasta entropije u sistemu, pozitivnih koeficijenata ekspanzije (tzv. Lyapunov-ljevih eksponenata) i haosa.



Slika 1.1: Duplo spiralni haotični atraktor iz Chua-inog kola.

1.3 Jednačine stanja, vektorsko polje i trajektorije

Kolo sa koncentrisanim parametrima koje sadrži rezistivne elemente (otpornici i naponski i strujni izvori) i n elemenata sa akumulisanjem energije (kondenzatori i/ili kalemovi) može biti opisan sistemom običnih diferencijalnih jednačina oblika [21],[22]:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

gdje je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$ vektor stanja i $F(x(t), t) = (F_1(x(t), t), F_2(x(t), t), \dots, F_n(x(t), t))^T$ n -dimenzionalno preslikavanje $F : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$. x_0 je početni uslov, $\dot{x}(t)$ je izvod $x(t)$ u odnosu na vrijeme. $x(t)$ je trajektorija.

U nelinearnoj dinamičkoj literaturi [16]-[18], $F(x(t), t)$ se često naziva vektorsko polje pošto definiše pravac i brzinu trajektorije u bilo kojoj tački prostora stanja i u bilo kojem vremenskom trenutku. Ako vektorsko polje zavisi samo od stanja i ne zavisi od vremena, sistem je autonoman i možemo pisati [16]-[18]:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1.4)$$

ili prosto:

$$\dot{x}(t) = F(x), \quad x(0) = x_0. \quad (1.5)$$

U ovom radu razmatramo autonomne sisteme.

Prema definiciji, vektorsko polje autonomnog kola je funkcija i prema tome jedinstveno je u svakoj tački x u prostoru stanja. Iz ovog proizilazi da trajektorija sistema ne može prolaziti kroz istu tačku dva puta u dva različita pravca. Specijalno, trajektorije dvo-dimenzionalnih sistema ne mogu se sjeći, što je važna implikacija za moguća rešenja u ovim sistemima [16]-[21].

1.3.1 Ravnotežna tačka (tačke)

Ravnotežna tačka sistema (1.5) je stanje X_Q u kojem je vektor polja nula [16]-[21]. Dakle, $F(X_Q) = 0$ i $x_Q(t) = X_Q$; trajektorija koja počinje iz ravnotežne tačke ostaje beskonačno u toj tački. Ravnotežna tačka elektronskog kola je dc rešenje (rešenje koje odgovara konstantnoj pobudi).

1.3.2 Linearni i afini sistemi

Vektorsko polje $F(x)$ jednog autonomnog linearnog dinamičkog sistema ima specijalnu formu $F(x) = Ax$ gdje je A matrica sistema. Za linearni sistem (1.5) ima prostu formu:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (1.6)$$

U bliskom odnosu sa linearnim sistemom i posebno interesantan za analizu nelinearnih kola sa izlomljenom linearnom karakteristikom nelinearnog elementa je afini sistem [16]-[21] Opisan je sa:

$$\dot{x} = Ax + b, \quad x(0) = x_0, \quad (1.7)$$

gdje je b konstantni vektor.

Ako postoji, ravnotežna tačka afine sistema je definisana sa:

$$X_Q = -A^{-1}b. \quad (1.8)$$

1.3.3 Linearizacija

Da bi analizirali ponašanje dinamičkog sistema u okolini ravnotežne tačke X_Q mi pišemo $x = X_Q + \xi$, zamjenjujemo u (1.5) i dobijamo [16]-[22]:

$$\dot{X}_Q + \dot{\xi} = F(X_Q + x_1) \approx F(X_Q) + J_F(X_Q)\xi, \quad (1.9)$$

gdje su data prva dva člana Taylor-ovog razvoja oko tačke X_Q .

Jacobian $J_F(x)$ je matrica parcijalnih izvoda $F(x)$:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Oduzimajući $F(X_Q)$ od obje strane izraza (1.9), dobijamo linearan sistem:

$$\dot{\xi} = J_F(X_Q)\xi, \quad (1.11)$$

gdje je Jacobian matrica razvijena u tački X_Q .

Linearizacija opisuje ponašanje kola u blizini X_Q ; to je lokalno ponašanje. Linearizacija je ekvivalentno kolo za male signale u okolini tačke X_Q . Generalno, lokalno ponašanje sistema zavisi od radne tačke. Za linearni ili affine sistem, međutim, Jacobian matrica ne zavisi od X_Q ; to je prosto matrica sistema A .

1.3.4 Sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori

Razmatrajmo tro-dimenzionalni autonomni afini dinamički sistem (1.7).

Ako su sopstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ od J_F različite, onda svako rešenje od (1.11) može biti izraženo u formi [24]:

$$x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{\eta}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) \vec{\eta}_2 + c_3 \exp(\lambda_3 t) \vec{\eta}_3, \quad (1.12)$$

gdje su $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3$ (moguće kompleksni) sopstveni vektori pridruženi sopstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ respektivno i gdje su c_k -ovi (moguće kompleksne) konstante koje zavise od početnog stanja x_0 .

U specijalnom slučaju kad J_F ima jednu realnu sopstvenu vrijednost γ i par konjugovano kompleksnih vrijednosti $\sigma \pm j\omega$, rešenja od (1.11) imaju oblik [24]:

$$x(t) = c_r \exp(\gamma t) \vec{\eta}_\gamma + 2c_c \exp(\sigma t) [\cos(\omega t + \phi_c) \vec{\eta}_r - \sin(\omega t + \phi_c) \vec{\eta}_i], \quad (1.13)$$

gdje su $\vec{\eta}_r$ i $\vec{\eta}_i$ realni i imaginarni djelovi sopstvenih vektora pridruženih konjugovano kompleksnom paru sopstvenih vrijednosti, $\vec{\eta}_\gamma$ je sopstveni vektor definisan sa $J_F \vec{\eta}_\gamma = \gamma \vec{\eta}_\gamma$ i c_r, c_c i ϕ_c su realne konstante određene početnim uslovima.

Oblik rešenja dat jednačinom (1.13) odgovara signalima iz nelinearnih haotičnih oscilatora, koji će biti analizirani u ovom radu.

1.3.5 Stabilnost

Kvalitativno, ravnotežna tačka je stabilna ako trajektorije koje počinju u njenoj blizini ostaju uvijek bliske [16]-[22].

Ako je X_Q ravnotežna tačka sistema (1.5), kompletan opis stabilnosti je sadržan u sopstvenim vrijednostima linearizacije jednačine (1.5) oko X_Q . One su definisane kao korijeni λ karakteristične jednačine:

$$\det(\lambda I - J_F(X_Q)) = 0, \quad (1.14)$$

gdje je I matrica identiteta.

Ravnotežna tačka je hiperbolička ako ni jedna od sopstvenih vrijednosti nema realan dio jednak nuli [16].

Ravnotežna tačka X_Q je stabilna ako ni jedna od sopstvenih vrijednosti od $J_F(X_Q)$ nema pozitivan realan dio, i one koje imaju realan dio jednak nuli su proste nule jednačine (1.14). Ako su realni djelovi svih sopstvenih vrijednosti striktno negativni, ravnotežna (hiperbolička) tačka je asimptotski stabilna i zove se stabilan čvor ili ponor zato što sve bliske trajektorije konvergiraju ka njoj [16].

Ako bilo koja sopstvena vrijednost ima pozitivan realan dio, ravnotežna tačka je nestabilna; ako sve sopstvene vrijednosti imaju pozitivan realan dio, ravnotežna (hiperbolička) tačka se zove nestabilan čvor ili izvor [16].

Hiperbolička fiksna tačka je sedlo ako neke, ne sve, sopstvene vrijednosti pridružene linearizaciji imaju realan dio veći od nule, a ostale sopstvene vrijednosti imaju realan dio manji od nule [16].

Ako su sopstvene vrijednosti čisto imaginarne tačka je nehiperbolička i zove se centar [16].

1.4 Karakteristike haosa

1.4.1 Osjetljiva zavisnost od početnih uslova

Karakteristična osobina haotičnih dinamičkih sistema je izuzetna osjetljivost na početne uslove. Meteorolog Lorenz nazvao je ovu osjetljivost efektom leptira: dovoljno je da negdje na nekom cvijetu zaleprša leptir, pa da ova promjena tri dana kasnije na

nekom drugom mjestu izazove oluju. Drugim riječima, ukoliko se u evoluciji ovakvih sistema pođe od dvije bliske tačke, odnosno trajektorije u faznom prostoru, onda će se one posle dovoljno dugog vremena naći proizvoljno daleko jedna od druge. Postoji neki mehanizam u dinamici ovih sistema koji dovodi do eksponencijalnog razdvajanja bliskih tačaka i ponovnog njihovog vraćanja u određeni dio faznog prostora, a poznat pod imenom mehanizam istežanja i preklapanja.

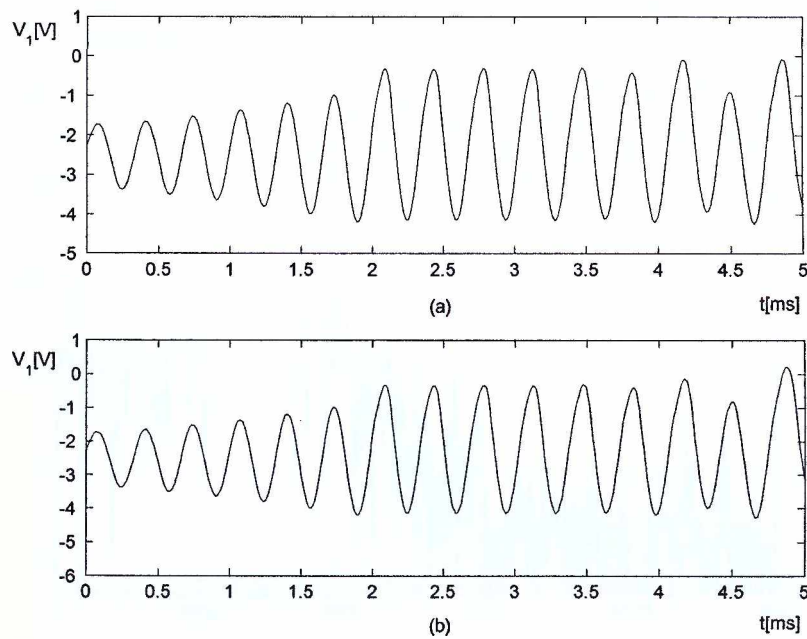
Veliki broj simulacija u ovom radu urađen je na primjeru Chua-inog oscilatora, koji će biti opisan na kraju ovog poglavlja. Takođe, ovo kolo koristimo i za ilustraciju osjetljivosti na početne uslove. Na Slici 1.2 pokazana su rješenja za Chua-in oscilator sa istim parametrima i početnim uslovima koji se razlikuju za manje od 0.01% u komponenti $v_2(t)$. Trajektorije divergiraju i postaju nekorelirane nakon 5 ms. Ova brza dekorelacija trajektorija koje počinju u bliskim inicijalnim stanjima uzrok je dugotrajnoj nepredvidivosti haotičnih signala. Prema tome, iznenađujuće je da dva haotična sistema mogu biti sinhronizovana u smislu da stanja jednog asimptotski dostižu stanja drugog. Radovi Pecora, Carolla [23] i drugih pokazuju da je moguća sinhronizacija dva haotična sistema tako da njihove trajektorije ostanu bliske. Ova ideja se sada koristi u komunikacionim sistemima.

1.4.2 Slučajnost u vremenskom domenu

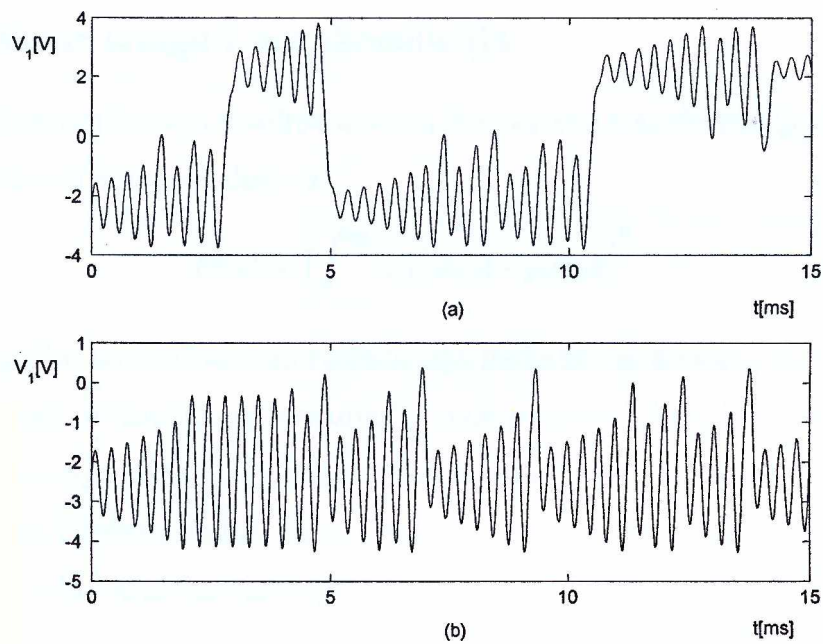
Vremenski talasni oblici za haotični atraktor su sasvim iregularni i ne javlja se ponavljanje u bilo kom periodu posmatranja konačne dužine. Mada je proizvedeno determinističkim diferencijalnim jednačinama trećeg reda, rješenje izgleda "slučajno" (Slika 1.3).

1.4.3 Širokopojasni spektar snage

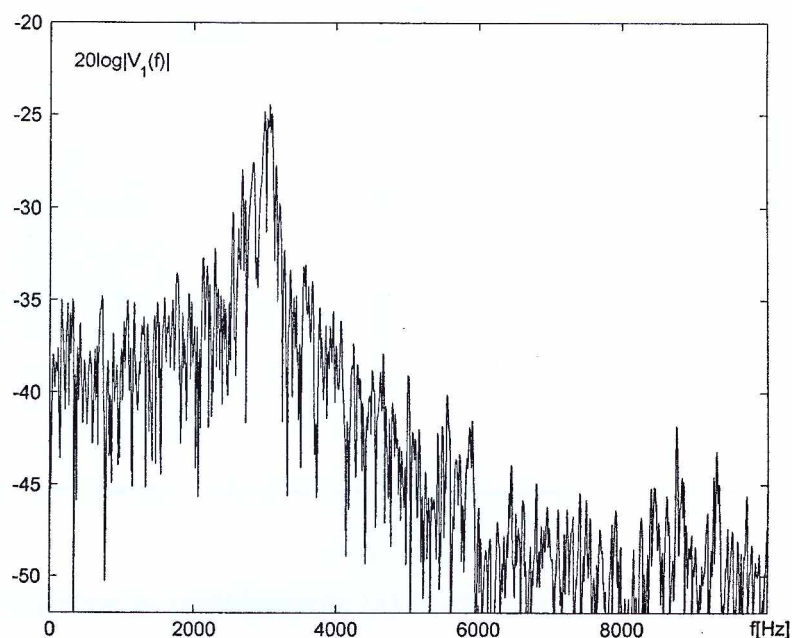
Aperiodična priroda vremenskog talasnog oblika haotičnog signala reflektovana je u širokopojasnom šumu sličnom spektru snage. Snaga signala je distribuirana na širokom opsegu frekvencija i na Slici 1.4 prikazana je za signal $v_1(t)$ iz Chua-inog oscilatora.



Slika 1.2: Osjetljivost na početne uslove. Vremenski talasni oblici za napon $v_1(t)$ iz Chua-inog kola za iste parametre i sledeće početne uslove: (a) $(v_1, v_2, i_3) = (-2.286\text{V}, 222.014\text{mV}, 1.810\text{mA})$; (b) $(v_1, v_2, i_3) = (-2.286\text{V}, 222\text{mV}, 1.810\text{mA})$.



Slika 1.3: Vremenski talasni oblik haotičnog signala $v_1(t)$ iz Chua-inog kola. (a) spiralni atraktor; (b) duplo-spiralni atraktor.



Slika 1.4: Spektar snage koji odgovara vremenskom talasnom obliku napona $v_1(t)$ za duplo spiralni atraktor iz Chua-inog kola.

1.5 Kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa

1.5.1 Spektar snage i autokorelacija

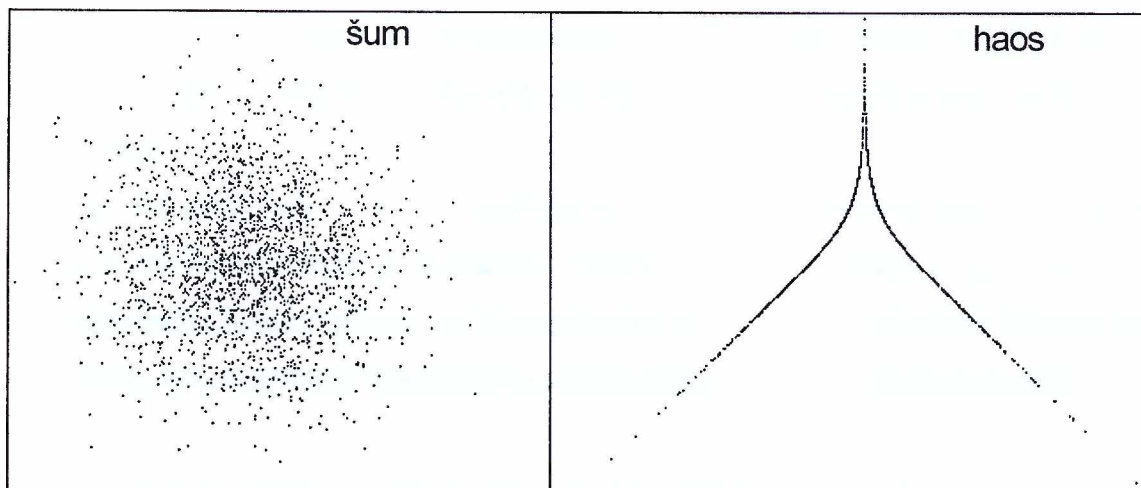
Spektar snage predstavlja kvadrat modula Fourier-ove transformacije duž trajektorije i poznat je pod nazivom periodogram:

$$P(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2. \quad (1.15)$$

Spektar je pogodan za kvalitativno razlikovanje periodičnog kretanja sa više frekvencija (kvaziperiodičnog) od haotičnog kretanja. U spektru periodičnog kretanja vide se samo linije koje odgovaraju određenim frekvencijama, dok u spektru haosa preovladava širok ravan kontinuum. Spektri, budući da su kvadrati modula, više ne posjeduju informaciju o fazama, koja je vrlo važna za razumijevanje onoga što se dešava na čudnim atraktorima [17].

Kao sledeće pogodno sredstvo u ispitivanju haosa koristi se autokorelaciona funkcija:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(t) \bar{x}(t + \tau) dt, \quad (1.16)$$



Slika 1.5: Poincare-ovo preslikavanje: (a) slučajno kretanje; (b) haotično kretanje.

gdje je $\bar{x}(t)$ odstupanje signala $x(t)$ od srednje vrijednosti. Autokorelaciona funkcija mjeri korelaciju (sličnost) signala sa samim sobom u različitim intervalima vremena. Korelacija je visoka (konstantna ili oscilirajuća) za regularna kretanja, dok za haotična kretanja ona brzo (eksponencijalno) opada na nulu. Opadanje autokorelacione funkcije na nulu je jedan od kvalitativnih pokazatelja determinističkog haosa [17].

1.5.2 Poincare-ovi presjeci

Poslednje sredstvo koje zaslužuje poseban osvrt i koje se često koristi u analizi dinamičkih sistema je Poincare-ov presjek. Posmatrajmo neku trajektoriju u m -dimenzionalnom faznom prostoru i presjecimo je nekom $(m - 1)$ dimenzionalnom hiperpovrši (ne mora biti ravan; važno je da je transversalna na tok). Skup tačaka u presjeku, pri čemu se u obzir uzimaju samo ulazne tačke trajektorije sa jedne strane površi, zove se Poincare-ov presjek. Preslikavanje koje nas vodi od jedne tačke presjeka do druge duž trajektorije zove se Poincare-ovo preslikavanje. Ono zamjenjuje vremenski kontinuiranu evoluciju diskretnim preslikavanjem [15]-[18].

Pogodnost Poincare-ovog presjeka ogleda se u tome što se iz njegovog izgleda može odrediti karakter kretanja koje ga generiše. Granični ciklus generiše samo jednu tačku u Poincare-ovom presjeku, a ciklus udvojene periode generiše dvije tačke. Kvaziperiodično kretanje sa dvije nesamerljive frekvencije na torusu ostavlja otisak kruga, itd. Kod

haotičnog kretanja (i to je još jedna njegova kvalitativna karakteristika) nikakve figure se ne mogu razaznati u presjeku. Haotične tačke manje-više ravnomjerno ispunjavaju cijelu ravan presjeka.

Na Slici 1.5 prikazana je jedna vrsta Poincare-ovog preslikavanja. Svaka tačka presjeka zavisi samo od tačke koja joj je neposredno prethodila. Dakle, crta se X_{n+1} u funkciji od X_n . Preslikavanje koje odgovara haotičnom kretanju karakteriše određeni determinizam (slika desno), dok se nikakva uređenost ne zapaža kad je u pitanju slučajno kretanje (slika lijevo).

Ovo su bili kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa. Međutim, za njegovo kvantitativno opisivanje potrebni su novi pojmovi.

1.6 Kvantitativni pokazatelji determinističkog haosa

1.6.1 Lyapunov-ljevi eksponenti

Mada ne postoji univerzalno prihvaćena definicija haosa, većina istraživača se slaže da je haos aperiodično, ustaljeno ponašanje ograničenog determinističkog sistema koje je izuzetno osjetljivo na početne uslove. Relativno je lako dokazati da je deterministički sistem aperiodičan i ograničen, dok je teže dokazati osjetljivost na početne uslove. Zato je potrebno kvantifikovati tu osjetljivost. Ovaj dio rada je posvećen računanju i osobinama najvećeg Lyapunov-ljevog eksponenta (ili preciznije spektru Lyapunov-ljevih eksponenata), čiji znak označava haos i čija vrijednost mjeri haotičnost. Dinamički sistem sa jednim pozitivnim Lyapunov-ljevim eksponentom je haotičan i eksponent opisuje srednju brzinu kojom se gubi predvidljivost. U ovom dijelu pretpostavljamo da znamo jednačine koje stvaraju dinamiku. Važan, ali teži problem računanje Lyapunovljevih eksponenata za eksperimentalne podatke biće obrađen u poglavlju o detekciji haotičnih signala.

Jednostavnosti radi, počnimo sa jedno-dimenzionalnim preslikavanjem tipa $x_{n+1} = f(x_n)$. Lyapunov-ljev eksponent mjeri razdvajanje dviju bliskih početnih tačaka tokom iteracija. Ukoliko se početno rastojanje ε mijenja po zakonu $\varepsilon \exp(N\lambda)$, gdje je N broj

primijenjenih iteracija, onda je po definiciji Lyapunov-ljev eksponent:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx} \right|. \quad (1.17)$$

Ukoliko je $\lambda > 0$, onda je razdvajanje eksponencijalno, postoji velika osjetljivost na početne uslove i u ponašanju sistema pojaviće se kaos. S obzirom na to da je kod uzastopnih iteracija $d(f \circ f)/dx|_{x=x_0} = df/dx|_{x=x_1} \cdot df/dx|_{x=x_0}$, gdje je $x_1 = f(x_0)$ i $f \circ f$ označava kompoziciju funkcija, tj. $f \circ f = f(f(x))$, korišćenjem lančanog pravila izraz za λ može se napisati kao:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \ln |f'(x_i)|. \quad (1.18)$$

Izraz (1.18) predstavlja globalni Lyapunov-ljev eksponent, dok je $\ln |f'(x_i)|$ lokalni Lyapunov-ljev eksponent, to jest mjera istezanja u tački x_i . Kao što se vidi globalni eksponent je srednja vrijednost svih lokalnih eksponenata duž trajektorije.

U više-dimenzionalnom slučaju sličnu proceduru potrebno je sprovesti za svaki od nezavisnih (ortogonalnih) pravaca. U tom slučaju Lyapunov-ljevi eksponenti će biti povezani sa sopstvenim vrijednostima matrice prostornih izvoda $D_x F(x)$ [15]-[18].

Naime, posmatrajmo kako se ponašaju trajektorije $\phi = \phi_t(x)$, koje se nalaze u blizini trajektorije $\phi_t(x_0) = \phi_0$, koja prolazi kroz x_0 . Linearizacijom $F(\phi)$ oko ϕ_0 , dobija se:

$$F(\phi) = F(\phi_0) + D_\phi F(\phi)|_{\phi=\phi_0}(\phi - \phi_0). \quad (1.19)$$

S obzirom na to da je $d\phi_0/dt = F(\phi_0)$, za vremensku evoluciju razmaka između trajektorija $\delta\phi = \phi - \phi_0$ dobija se:

$$\frac{d(\delta\phi)}{dt} = D_x F(x)|_{x=x_0} \delta\phi. \quad (1.20)$$

U principu ne zanima nas rješenje ove jednačine već globalno ponašanje razlike $\delta\phi$. To ponašanje zavisi od sopstvenih vrijednosti matrice $A(x_0) = D_x F(x_0)$. Obilježimo te sopstvene vrijednosti sa $\{a_i(x_0) | i = 1, \dots, m\}$. Tada se Lyapunov-ljevi eksponenti definišu sa:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |a_i(x_0, t)| \quad (1.21)$$

i pri tome se obično podrazumijeva da su poređani u silaznom nizu, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. Lyapunov-ljevih eksponenata ima onoliko koliko ima dimenzija u faznom prostoru i oni sačinjavaju Lyapunov-ljev spektar dinamičkog sistema. Eksponenti se računaju za $t \rightarrow \infty$,

te tranzijenti nemaju uticaja na njihove vrijednosti. Drugim riječima, Lyapunov-ljev spektar je isti u svim tačkama atraktora kao i u svim tačkama iz domena atrakcije. Međutim, ovaj spektar može da se mijenja sa promjenom kontrolnog parametra.

Lyapunov-ljevi eksponenti su blisko povezani sa sopstvenim vrijednostima i računaju se na sličan način, ali između njih postoje neke važne razlike. Sopstvene vrijednosti se računaju za jednu tačku u prostoru stanja, kao što je ravnotežna tačka, a Lyapunov-ljevi eksponenti su obično računaju kao srednja vrijednost duž orbite ili trajektorije. Lyapunov-ljevi eksponenti su uvijek realni brojevi i njima pridruženi pravci su međusobno normalni, mada se pravci mijenjaju kad se orbita kreće kroz prostor. Obije veličine su određene iz Jacobian-a pretpostavljajući linearnu lokalnu dinamiku. Sistem sa n dimenzija ima n Lyapunov-ljevih eksponenata, upravo kao i n sopstvenih vrijednosti u svakoj tački.

Brzinu povećanja nekog infinitezimalnog razmaka između trajektorija $\delta\phi$, prema jednačini (1.20) kontroliše najveći Lyapunov-ljev eksponent λ_1 . Povećanje nekog elementa površine kontroliše suma $\lambda_1 + \lambda_2$. Povećanje (odnosno smanjenje) elementa zapremine faznog prostora dato je sumom svih Lyapunov-ljevih eksponenata. Za disipativne sisteme, prema tome, mora biti $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m < 0$, mada neki od λ_i mogu biti pozitivni. Ukoliko je makar jedan od eksponenata pozitivan, sistem je haotičan.

Lyapunov-ljevi eksponenti pogodni su za klasifikaciju ustaljenih ponašanja i atraktora. Za bilo koji atraktor ukupna kontrakcija mora biti veća od ukupne ekspanzije, $\sum \lambda_i < 0$. Za granični krug $\lambda_1 = 0$, dok su ostali $\lambda_i < 0$; za torus $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i ostali $\lambda_i < 0$. U slučajevima čudnih atraktora mora bar jedan eksponent biti veći od nule.

Naglasimo da pozitivan Lyapunov eksponent može u nekim slučajevima predstavljati lažnu indikaciju haosa. Naime, neograničene orbite mogu imati $\lambda_1 > 0$, bijeli šum ima $\lambda_1 \rightarrow \infty$, orbite se mogu razdvajati, ali ne eksponencijalno, a postoji i kaos kao prelazni proces.

Jedinica za Lyapunov-ljev eksponent je $(\text{sec})^{-1}$ za tokove i $(\text{iteracija})^{-1}$ za preslikavanja ako se koristi logaritam osnove-e ili bit/sec i bit/iteraciji ako se koristi osnova-2. U literaturi se, pored navedenih jedinica, još mogu sresti za osnovu-e shannon (Sh), a za osnovu-10 prirodna jedinica (nats).

Interesantno je pitanje koja je najniža dimenzija faznog prostora potrebna za pojavu čudnih atraktora.



U jednoj dimenziji, čudni atraktori se ne mogu pojaviti zbog ukupne kontrakcije (međutim, kod jedno-dimenzionalnih preslikavanja ih ima jer su ona diskretna). U dvije dimenzije ih takođe nema u skladu sa Poincare-Bendixon-ovom teoremom. Ova teorema tvrdi da haotičnih kretanja ne može biti u ograničenom dijelu dvo-dimenzionalnog faznog prostora. Dokaz ove teoreme prilično je komplikovan i može se naći u [16]. Ravan je suviše restriktivan ambijent za pojavu čudnih atraktora. Naime, u dvije dimenzije nije moguće pomiriti uslove neprekidnosti trajektorija i njihovo eksponencijalno odbijanje, neophodno za pojavu haosa. Trajektorija u principu dijeli ravan na dva dijela i eksponencijalno odbijanje i preklapanje u bilo kom konačnom dijelu ravni primorava, prije ili kasnije, trajektoriju na "uvrtanje". Uvrtanje dovodi do samozarobljavanja trajektorije, koja onda samo može da padne na ravnotežnu tačku (ili ciklus) ili da se "odvrne". Samopresecanje trajektorije nije moguće zbog uslova neprekidnosti i jedinstvenosti rješenja diferencijalnih jednačina [15]-[18].

Problema sa samozarobljavanjem nema u tri dimenzije i čudni atraktori se pojavljuju tek u tro-dimenzionalnim faznim prostorima. U tim prostorima, vodeći računa o tome da mora biti $\sum \lambda_i < 0$, jedina mogućnost za pojavu čudnog atraktora je kombinacija eksponenata $(+, 0, -)$, odnosno $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$. U četvorodimenzionalnim prostorima moguće su kombinacije $(+, 0, -, -)$, $(+, 0, 0, -)$ i $(+, +, 0, -)$. Slučaj sa dva pozitivna eksponenta zove se hiper-haos [15]-[18].

1.6.2 Kolmogorov-ljeva entropija

Kolmogorov-ljeva ili K-entropija mjeri koliko je haotičan odnosno neuređen neki sistem [15]-[18]. Ona, dakle, mjeri količinu informacije potrebnu za precizno određivanje trajektorije u faznom prostoru. K-entropija se može shvatiti i kao brzina gubljenja neke početne informacije o položaju sistema u faznom prostoru. Kod jedno-dimenzionalnih haotičnih preslikavanja K-entropija jednaka je Lyapunov-ljevom eksponentu. U više dimenzija, ukoliko je više od jednog Lyapunov-ljevog eksponenta pozitivno važi Pesin-ova formula, po kojoj je K jednako sumi pozitivnih eksponenata.

1.6.3 Fraktalna dimenzija

U svakodnevnom životu pojam dimenzije je intuitivno jasan. Živimo u tro-dimenzionalnom svijetu, znamo da ravan ima dvije dimenzije. Dosta toga u fizici dešava se u četvorodimenzionalnom prostor-vremenu itd. Strožije matematički možemo reći da je to broj nezavisnih komponenti vektora u nekom linearnom vektorskom prostoru ili kod dinamičkih sistema broj nezavisnih konstanti potreban za potpuno zadavanje početnih uslova. Ovakvo shvatanje prejudicira cjelobrojnost dimenzije. Međutim, postoje geometrijski objekti čija je dimenzija necjelobrojna. To su fraktali. Odgovarajuću definiciju dimenzije ponudio je Hausdorff [15]-[18]. Posmatrajmo proizvoljan geometrijski predmet smješten u m -dimenzionalni euklidski prostor. Prekrijmo dati predmet malim m -dimenzionalnim sferama prečnika l ; neka nam je potrebno M sfera. Broj sfera potrebnih za potpuno prekrivanje predmeta zavisi od njenih linearnih dimezija tj. od l . Ukoliko taj broj $M(l)$ raste kao $1/l^D$ kako se l smanjuje, onda je Hausdorff-ova dimenzija predmeta zadata sa:

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln M(l)}{\ln l}. \quad (1.22)$$

Najjednostavniji geometrijski objekat koji ima necjelobrojnu dimenziju je tzv. Cantor-ov skup [15]-[18]. Po načinu konstrukcije, polazi se od jedinične duži, pa se u prvom koraku odsjeca srednja trećina te duži. Početnu duž moguće je pokriti jednim krugom prečnika l , dok su za prekrivanje objekta nastalog poslije prvog koraka potrebna $M = 2$ kruga prečnika $l = 1/3$. Sada se na svakoj od nastalih duži ponavlja isti postupak. Poslije m koraka dobija se $M = 2^m$ odsječaka dužine $l = (1/3)^m$. Objekat koji se dobija poslije beskonačno mnogo ponovljenih koraka zove se Cantor-ov skup. Njegova dimenzija je prema formuli (1.22) manja od 1 i iznosi približno 0.631.

Ispostavlja se da su dimenzije čudnih atraktora, slično K-entropijama i Lyapunov-ljevim eksponentima, jedno od osnovnih kvantitativnih obilježja koja razlikuju haotična kretanja od regularnih ili slučajnih. Različita haotična kretanja imaju različite dimenzije. Dimenzija atraktora je prvi i osnovni podatak koji se može o njemu dati: fiksna tačka ima dimenziju nula, granični ciklus 1, a kvaziperiodični ciklus - dimenziju 2. Dimenzije određuju i donju granicu minimalnog broja varijabli potrebnih za opisivanje nekog dinamičkog sistema. Ukoliko atraktor lokalno liči na R^m , onda je najmanji broj varijabli upravo m .

Čudni atraktori, po pravilu, imaju komplikovanu finu strukturu koja lokalno ne liči ni na jedan Euklidski prostor. Njihova dimenzija, dakle, ne može biti cjelobrojna i oni predstavljaju prirodan primjer fraktala [15]-[18]. U tipičnom eksperimentu ili numeričkoj simulaciji atraktor se nikada ne vidi kao geometrijski objekat, već se obično prate eksperimentalne tačke mjerenja i njihova distribucija na atraktoru. Stoga je za potpunije opisivanje atraktora potrebno uzeti u obzir ne samo geometrijsku dimenziju već i pojmove odnosno dimenzije zasnovane na probabilističkim koncepcijama mjera definisanih na atraktorima. Te dimenzije kao što je, na primjer informaciona dimenzija atraktora uzimaju u obzir različitu učestalost posjete različitih djelova atraktora. Ukoliko su eksperimentalne ili numeričke tačke ravnomjerno raspoređene po atraktorima onda razlike nema i relevantna je samo geometrijska (Hausdorff-ova) dimenzija. Pored već pomenutih često se koristi i korelaciona dimenzija [15]-[18].

Lyapunov-ljevu dimenziju definisali su Kaplan i Yorke:

$$D_L = k + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{|\lambda_{k+1}|}, \quad (1.23)$$

gdje je k najveći prirodan broj za koji još uvijek važi $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq 0$. U tro-dimenzionalnom haotičnom slučaju, sa Lyapunov-ljevim eksponentima λ_+ , 0 , λ_- dobija se:

$$D_L = 2 + \frac{\lambda_+}{|\lambda_-|},$$

gdje je $\lambda_+ + \lambda_- < 0$. Dakle, kod kontinuiranih vremenskih modela u tri dimenzije D_L mora biti između 2 i 3 [15]-[18].

Korisnost različitih dimenzija ogleda se u tome što su one invarijante dinamičkih sistema i njihovih atraktora, koje se ne mijenjaju tokom bilo kakvih glatkih transformacija u faznom prostoru. To su nepromjenljive kvantitativne karakteristike haotičnih dinamičkih sistema i mogu se direktno odrediti iz eksperimentalnog, mjerenog vremenskog signala.

1.7 Bifurkacije i scenariji prelaza u haos

U ovom dijelu razmotreni su različiti načini na koje dinamički sistem može da pređe u haos. U mehanizmu prelaska osnovnu ulogu igraju bifurkacije, odnosno način na koji prilikom promjene kontrolnog parametra jedne fiksne tačke postaju nestabilne, a druge

stabilne [16],[17]. Zato je prije opisa različitih načina prelaska u haos, tj. haotičnih scenarija potrebno opisati kako sve dinamički sistemi mogu da pređu sa jednog tipa atraktora na drugi. Takvi prelazi u dinamici sistema nazivaju se bifurkacijama. Izraz bifurkacija prvi je upotrijebio Poincare da bi opisao grananje stacionarnih rješenja kod diferencijalnih jednačina tipa (1.1).

Bifurkacije predstavljaju kvalitativne, topološke promjene na atraktorima dinamičkih sistema koje se dešavaju tokom varijacije kontrolnog parametra [16],[17]. Vrijednosti kontrolnog parametra pri kojima dolazi do bifurkacija zovu se bifurkacione vrijednosti parametra μ_B , a tačka (x, μ_B) je bifurkaciona tačka. Grafik svih ravnotežnih tačaka u funkciji kontrolnog parametra zove se bifurkacioni dijagram. Postoji više vrsta bifurkacija koje se mogu desiti u sistemima tipa (1.1) ili (1.2). Nas interesuju lokalne bifurkacije kodimenzije 1. Lokalne bifurkacije označavaju promjene u ograničenom dijelu parametarskog prostora [16],[17], odnosno u blizini bifurkacionih tačaka i stacionarnih rješenja jednačina (1.1) i (1.2). Nasuprot lokalnim su globalne bifurkacije, gdje se promjene (kao što je, na primjer pojava homokliničnih orbita) tiču toka kao cjeline. Takve cjelovite promjene u toku češće se dešavaju u više-dimenzionalnim parametarskim prostorima.

Kodimenzije 1 znači da se posmatraju bifurkacije u jedno-dimenzionalnom parametarskom prostoru. Kod lokalnih bifurkacija, dakle, promjene na atraktoru dešavaju se u određenim tačkama bifurkacije na parametarskoj osi, dok se između tih tačaka atraktor mijenja postepeno, ostajući uvijek u istoj topološkoj klasi. Postoje četiri osnovne vrste bifurkacija dinamičkih sistema [16],[17]: tangentne, transkritične, viljuškaste i Hopf-ove. Njih je najjednostavnije uvesti pomoću četiri tipična primjera, koja su data u tzv. normalnoj formi (u kojoj je fiksna tačka smještena u $x = 0, \mu = 0$). Za svaki od primjera izvršena je tipična analiza tačke bifurkacije, koja obuhvata: određivanje ravnotežnih tačaka, određivanje linearnog rješenja u okolini ravnotežnih tačaka i određivanje stabilnosti ravnotežnih tačaka.

1.7.1 Vrste bifurkacija

Tangentna bifurkacija

Tangentna ili sedlasta bifurkacija se u najjednostavnijem obliku javlja kod sistema opisanih jednačinom [16],[17]:

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2. \quad (1.24)$$

Ravnotežne tačke u ovom sistemu nalaze se u $x^* = \pm\sqrt{\mu}$, tj. za $\mu < 0$ ravnotežnih tačaka nema, dok za $\mu > 0$ postoje dvije. U okolini ravnotežne tačke $x = x^* + \xi$ jednačina kretanja dobija oblik:

$$\frac{d\xi}{dt} = -2x^*\xi \quad (1.25)$$

sa rješenjem $\xi = \xi(0) \exp(-2x^*t)$. Prema tome, $x^* = -\sqrt{\mu}$ je nestabilna fiksna tačka, a $x^* = \sqrt{\mu}$ stabilna.

Transkritična bifurkacija

Primjer transkritične bifurkacije pojavljuje se u jednačini [16],[17]:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2. \quad (1.26)$$

Ravnotežne tačke nalaze se u $x^* = 0$ i $x^* = \mu$. Linearizovana jednačina kretanja je:

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{cases} \mu\xi & x^* = 0 \\ -\mu\xi & x^* = \mu, \end{cases} \quad (1.27)$$

pa je za $\mu < 0$ stabilna ravnotežna tačka $x^* = 0$, a nestabilna $x^* = \mu$, i obrnuto za $\mu > 0$.

Viljuškasta bifurkacija

Viljuškaste bifurkacije javljaju se u sistemima opisanim jednačinom [16],[17]:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3. \quad (1.28)$$

Ravnotežne tačke nalaze se u $x^* = 0, \pm\sqrt{\mu}$, a jednačina kretanja u okolini je:

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{cases} \mu\xi & x^* = 0 \\ -2\mu\xi & x^* = \pm\sqrt{\mu}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Za $\mu < 0$ postoji samo jedna ravnotežna tačka ($x^* = 0$), a pri $\mu > 0$ postoje tri, od kojih su $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ stabilne a $x^* = 0$ je nestabilna.

Hopf-ova bifurkacija

Poslednji primjer je Hopf-ova bifurkacija. Ova bifurkacija pojavljuje se u sistemima sa najmanje dvije komponente [16],[17]:

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + j\omega)z - |z|^2 z, \quad (1.30)$$

gdje je z kompleksna promjenljiva. Ravnotežna tačka nalazi se u $z_0 = 0$ i stabilna je za $\mu < 0$, a nestabilna za $\mu > 0$. Karakter rješenja u okolini fiksne tačke lakše se određuje ukoliko se pređe na nove promjenljive, "amplitudu" $I = |z|$ i "fazu" $\varphi = \arg z$. Jednačina (1.30) tada postaje:

$$\frac{dI}{dt} = I(\mu - I^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (1.31)$$

Osim već pomenute fiksne tačke u $I_0 = 0$, nastaje nova u $I_0 = \sqrt{\mu}$. Ona ne postoji za $\mu < 0$, ali je stabilna za $\mu > 0$, kada prethodna fiksna tačka u $z_0 = 0$ gubi stabilnost. Pri tome, faza se mijenja ravnomjerno, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ i za rješenje imamo fazor koji se u ravni obrće ugaonom brzinom ω . To rješenje odgovara graničnom ciklusu. Granični ciklus nastaje kada kroz mehanizam Hopf-ove bifurkacije fiksna tačka izgubi stabilnost pri prolasku kroz bifurkacionu vrijednost parametra $\mu = 0$.

Pored ovih opisanih tipova bifurkacija, koje se zovu normalne ili direktne bifurkacije, postoje i inverzne bifurkacije, koje se dobijaju kada u sva četiri primjera nelinearni član promijeni znak.

1.7.2 Scenariji prelaza u haos

Sledeće pitanje koje treba razmotriti je veza između ovih osnovnih tipova bifurkacija i scenarija prelaska u haos. U tom smislu može se odmah zanemariti kao neinteresantna za pojavu haosa transkritična bifurkacija. Naime, pri transkritičnoj bifurkaciji nema topološke promjene u izgledu atraktora; dolazi samo do zamjene stabilnih i nestabilnih fiksni tačaka [16],[17]. Nema pojave novih stabilnih ravnotežnih tačaka, niti sudara stabilnih sa nestabilnim tačkama, koje dovode do dramatičnih promjena kod atraktora.

Period-udvostručavajući ili Feigenbaum-ov scenario

Ponavljanjem viljuškastih bifurkacija sa povećanjem kontrolnog parametra udvostručava se broj fiksni tačaka posle svake bifurkacije i u konačnoj vrijednosti

dostiže aperiodično kretanje, tj. kaos [16],[17],[24]-[27].

Scenario intermitencija ili Pomeau-Manneville-ov prelaz u kaos

Intermitencije su naizmjenične periodično-haotične faze u dinamici sistema koje postoje za istu vrijednost kontrolnog parametra. One su karakteristične za intermitentni ili Pomeau-Manneville-ov prelaz u kaos. Kako se sistem približava tački prelaza, intervali regularnog kretanja postaju sve kraći, a haotični udari sve duži, dok ne ostane samo kaos [16],[17],[24]-[27].

Intermitentni prelaz u kaos izazvan je trima vrstama inverznih bifurkacija. Stoga postoje i tri vrste intermitentnog prelaza, koje se jednostavno zovu tip I, tip II, tip III. Tip I intermitentnog prelaza u kaos uslovljen je inverznom tangentnom bifurkacijom u kojoj se dvije fiksne tačke, jedna stabilna i jedna nestabilna, spajaju i nestaju, a na istom mjestu ostaje duh fiksne tačke. Intermitencije tipa I se najčešće sreću u teoriji i eksperimentu. Tangentne ili sedlaste bifurkacije su karakteristične samo za ovu vrstu prelaza u kaos. Često se pod pojmom intermitentnog prelaza podrazumijeva samo ovakav način prelaska u kaos. Ova vrsta prelaza u kaos zapažena je kod nelinearnih RLC kola. Tip II i tip III intermitencija su od manjeg značaja.

Kvaziperiodični scenario ili Ruelle-Takens-ov prelaz u kaos

Kvaziperiodični put u kaos ima istorijsku važnost. Dok se nije znalo za čudne atraktore, bila je prihvaćena teorija turbulencije po kojoj fluid sadrži mnogo oscilacija sa nesamjerljivim frekvencijama koje su uzastopno pobuđivane kad se sistemu dodaje energija (Landau). Prema ovoj teoriji dinamika se razvija od ravnotežne tačke prema graničnom krugu, prema 2-torusu, 3-torusu, i tako dalje, dok frekvencijski spektar postane kontinualan. Međutim, Ruelle i Takens su 1971. godine pokazali da su torusi stabilni samo sa dimenzijama manjim od 3. To znači da je dovoljno da se u sistemu pojave oscilacije na 3 nezavisne frekvencije, pa da već dođe do prelaska u kaos. Njihova početna šema mogla se prikazati kao proces:

- fiksna tačka $\rightarrow$ granični krug $\rightarrow$ 2-torus $\rightarrow$ 3-torus $\rightarrow$ čudni atraktor.

U saradnji sa Newhouse-om nekoliko godina kasnije oni su poboljšali svoje rezultate i redukovali na šemu [16],[17],[24]-[27]:

- fiksna tačka $\rightarrow$ granični krug $\rightarrow$ 2-torus $\rightarrow$ čudni atraktor.

Dakle, već poslije kvaziperiodičnog kretanja sa dvije nesamjerljive frekvencije sistem može da pređe u haos. Ovakav prelaz nazvan je kvaziperiodični scenario ili Ruelle-Takens-ov prelaz u haos. U osnovi prelaza je Hopff-ova bifurkacija koja generiše granični krug iz nestabilne fiksne tačke.

Opisane puteve prelaska u haos ne treba smatrati konačnom listom. Sasvim je moguće da postoje i drugi putevi, pogotovu u komplikovanijim slučajevima kodimenzije veće od 1, zatim kod dinamičkih sistema koji su opisani jednačinama sa vremenskim kašnjenjem ili parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

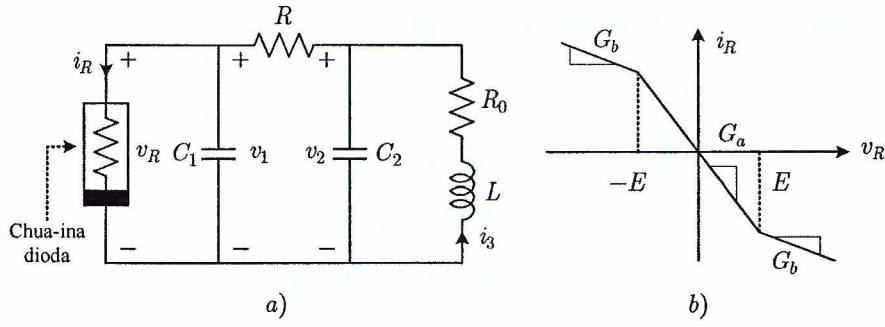
1.8 Chua-ino kolo

Da bi ispoljavalo haos, autonomno elektronsko kolo sastavljeno od otpornika, kondenzatora i kalemova mora sadržati [24],[28]: najmanje jedan nelinearni element, najmanje jedan lokalno aktivan otpornik i najmanje tri elementa sa akumulisanjem energije.

Chua-ino kolo je najprostije elektronsko kolo koje zadovoljava ova tri kriterijuma. Ovo kolo je jedini fizički sistem za koji je postojanje haosa dokazano matematički. Kolo je lako konstruisati upotrebom standardnih elektronskih komponenti. Zanimljivo je jer ispoljava bogatu raznovrsnost bifurkacija i haosa [24], [29].

1.8.1 Geneza Chua-inog kola

Chua je smatrao da bi haos mogao biti proizveden u nelinearnom elektronskom kolu (sa izlomljenom linearnom karakteristikom nelinearnog elementa) ako ono posjeduje najmanje dvije nestabilne ravnotežne tačke - jedna da obezbjeđuje rastezanje, a druga previjanje trajektorija. Sa ovim shvatanjem, on sistematski identifikuje ovo nelinearno kolo trećeg reda koje sadrži jedan naponom kontrolisani nelinearni otpornik sa izlomljenom linearnom karakteristikom. Haotičnu prirodu Chua-inog kola prvi je zapazio Matsumoto 1983. upotrebom kompjuterske simulacije. Rezultati su saopšteni u radu "A chaotic attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. Circuits Syst. 1984. godine [30]. Uskoro poslije njegovog koncipiranja, bogato dinamičko ponašanje Chua-inog kola potvrđeno je kompjuterskom



Slika 1.6: (a) Chua-in oscilator; (b) nelinearna $v - i$ karakteristika Chua-ine diode.

simulacijom i eksperimentom [24]. Od tada, bilo je intenzivnih napora u razumijevanju svakog aspekta dinamike ovog kola.

1.8.2 Jednačine stanja Chua-inog kola

Ovo kolo sastoji se od četiri linearna elementa (dva kondenzatora, jednog kalema i jednog otpornika) i jednog nelinearnog (lokalno aktivnog) otpornika nazvanog Chua-ina dioda. Dodajući linearni otpornik u seriju sa kalemom kolo se generalizuje u kanonični Chua-in oscilator [24] prikazan na Slici 1.6a. Ovo kolo je kanonično u smislu da svako kontinualno tro-dimenzionalno neparno-simetrično izlomljeno linearno vektorsko polje može biti preslikano na njega. Kolo može, prema tome, ispoljavati svako dinamičko ponašanje koje je moguće u sistemima opisanim kontinualnim neparno-simetričnim tro-regionim izlomljenim linearnim vektorskim poljem.

Jednačine stanja Chua-inog oscilatora su:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - f(v_1)] \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] \\ \frac{di_3}{dt} &= \frac{1}{L} (-v_2 - R_0 i_3),\end{aligned}\tag{1.32}$$

gdje je $G = 1/R$ i $f(v_1)$ je izlomljena linearna $v - i$ karakteristika Chua-ine diode (Slika 1.6b), data kao

$$f(v_R) = G_b v_R + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|v_R + E| - |v_R - E|),\tag{1.33}$$

gdje je E prelomni napon Chua-ine diode.

Ponašanje oscilatora u linearnim dijelovima funkcije $f(v_1)$ može biti opisano sopstvenim vrijednostima od

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a_i & G/C_1 & 0 \\ G/C_2 & -G/C_2 & 1/C_2 \\ 0 & -1/L & -R_0/L \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

gdje $i = 1, 2, 3$, određuju linearne dijelove funkcije $f(v_1)$, $a_1 = a_3 = -(G + G_b)/C_1$ i $a_2 = -(G + G_a)/C_1$. Karakteristični polinom od $\mathbf{J}_i$ ima tri korijena: γ_i koji odgovara jednosmjernoj komponenti oblika $c_{i1} \exp(\gamma_i t)$, i konjugovano kompleksni par $\sigma \pm j\omega$ koji odgovara prigušenim sinusoidalnim komponentama $c_{i2} \exp(\sigma_i t) \exp(j\omega_i t)$.

Za fiksirani skup parametara, jednačine Chua-inog oscilatora (1.32) definišu dinamički sistem koji se ponaša na određeni način. Na primjer, trajektorije mogu konvergirati ka ravnotežnoj tački, graničnom krugu ili čudnom atraktoru. Ravnotežna tačka može biti stabilna ili nestabilna. Sa odgovarajućim izborom parametara u kolu može biti zapažen period-udvostručavajući, period-uvećavajući, intermitentni i kvaziperiodični put u kaos. Interesuju nas kvalitativne promjene u ponašanju ovog sistema ili bifurkacije kad se parametri mijenjaju tokom vremena.

Naše istraživanje će biti uglavnom sprovedeno na signalima iz Chua-inog oscilatora za slučajeve različitih prelaza u kaos. Ovaj sistem je široko teorijski razmatran, pa je dobijene rezultate lako porediti sa onima iz dostupne literature. Takođe, razmatraćemo signale iz Colpitts-ovog oscilatora, kao i iz drugih haotičnih sistema: Lorenz-ovog, Rossler-ovog, Duffing-ovog i logističkog preslikavanja.

Poglavlje 2

Detekcija haosa

Razlikovanje determinističkog haosa od drugih oblika determinističkog ponašanja i od šuma je važan problem u mnogim oblastima. Od velikog je interesa pouzdana detekcija i kvantifikacija haosa u uslovima relativno niskog odnosa signal/šum. Ona otvara praktične načine za identifikaciju, predviđanje i kontrolu kompleksnih ponašanja u raznovrsnim fizičkim, biomedicinskim i socioekonomskim sistemima.

Zahvaljujući razvoju tehnike, danas su nam na raspolaganju nizovi mjerenih podataka za različite veličine. Navešćemo primjere samo nekih od njih.

Meteorološke observacije obezbjeđuju dobre primjere za analizu vremenskih nizova. Pored temperature, dostupni su podaci za brzinu i pravac vjetra, barometarski pritisak, oblačnost i mnoge druge veličine za hiljade lokacija širom svijeta, često u satnim intervalima, ponekad za stotinu godina unazad. Klimatske promjene zahtijevaju duži vremenske intervale za posmatranje. Praćenje globalnog zagrijavanja i koncentracije ugljen dioksida, ozona i drugih gasova od naročitog je interesa. Značajni su i primjeri kao što su nivo plime i seizmički talasi koji mogu biti korisni za predviđanje zemljotresa.

Finansijski zapisi uključuju praćenje cijene individualnih roba, brzinu razmjene i slično. Veliki pomaci u analizi vremenskih nizova motivisani su predikcijom tržišta, gdje detekcija determinizma može donijeti veliku korist [3].

Biološki primjeri uključuju dinamiku populacije biljnih i životinjskih vrsta, uključujući i čovjeka, fiziološke zapise kao što su elektrokardiogram (EKG) i elektroencefalogram (EEG) i epidemiološke podatke. EKG zdravog srca mogao bi biti haotičan, budući da je u fibrilaciji slučajan, a za bolesno srce skoro periodičan [4], [5]. Fraktalna dimenzija EEG

snimka se povećava sa kompleksnošću zadataka stavljenih pred pacijenta, a smanjuje se prije i tokom epileptičkih napada, mirnog spavanja i duboke meditacije [6]. Mogućnost predikcije srčanih i epileptičkih napada kao i širenja zaraze imala bi veliki značaj u medicini.

Potreba za analizom i razumijevanjem komplikovanih haotičnih signala koji se srijeću u svim oblastima podstakla je razvoj numeričkih algoritama za kvantifikaciju haosa na osnovu eksperimentalnih nizova podataka. Naglasimo da se svi metodi za detekciju haosa dijele u dvije osnovne grupe. To su metodi za detekciju haosa u sistemima čije su jednačine poznate i metodi za detekciju haosa u eksperimentalnim nizovima podataka. Ako su tačno poznate jednačine koje opisuju dinamiku sistema detekcija stanja sistema vrši se na osnovu računanja Lyapunov-ljevih eksponenata. Jedan pozitivan Lyapunov-ljev eksponent predstavlja definitivni dokaz haosa u sistemu.

Metodi za detekciju haosa u nizovima eksperimentalnih podataka ima više i dijele se u četiri osnovne grupe:

1. Računanje Lyapunov-ljevih eksponenata
2. Računanje informacionih i topoloških mjera atraktora rekonstruisanih iz podataka
3. Posredna detekcija nelinearnog determinizma u šumnom signalu
4. Metodi zasnovani na različitim tehnikama, od kojih je najznačajnija titracija haosa sa dodatim šumom.

Egzistencija jednog pozitivnog Lyapunov-ljevog eksponenta predstavlja definitivni dokaz haosa u idealnim modelima sistema, ali primjena u realnim sistemima ima nekoliko ograničenja. Lyapunov-ljevi eksponenti su vrlo osjetljivi na šum i ne mogu detektovati haos pouzdano sem kad je niz podataka izuzetno dugačak i sasvim bez šuma. Ove zahtjeve je vrlo teški (ako ne i nemogući) ispuniti za većinu empirijskih podataka. Ipak, oni se najčešće koriste, pa će im i u ovom radu biti posvećeno još pažnje.

Posebni metodi postoje za računanje korelacione dimenzije [10] i Kolmogorov-ljeve entropije [11]. Dimenzije daju procjenu kompleksnosti sistema, a entropija i Lyapunov-ljevi eksponenti daju procjenu nivoa haosa u dinamičkom sistemu. Grassberger-Procaccia algoritam (GPA) [10] je bio dosta zastupljen metod upotrijebljen za kvantifikaciju haosa do devedesetih godina prošlog vijeka. Ovo je vjerovatno proisteklo iz relativne jednostavnosti algoritma i činjenice da su ista računanja korišćena za procjenu obje dimenzije i entropije.

Međutim GPA je osjetljiv na varijacije parametara, to jest, broj podataka u nizu, ugrađene dimenzije, rekonstrukcionog kašnjenja, i obično je nepouzdan izuzev za duge nizove bez šuma. Pošto je praktični značaj GPA doveden u pitanje, više pažnje posvećeno je Lyapunov-ljevim eksponentima koji obezbjeđuju korisniju karakterizaciju haotičnih sistema. Slični problemi pouzdanosti, takođe, prate i druge pristupe detekciji haosa koji koriste određene topološke ili informacione mjere atraktora rekonstruisanih iz dostupnih podataka [32],[31].

Različita strategija koja je široko primijenjena u praksi i opisana u literaturi je detekcija prisustva nelinearnog determinizma u šumnom signalu na osnovu njegove kratkotrajne nelinearne predvidljivosti [12], [13], [14]. Ukratko, formira se ansambl slučajnih vremenskih nizova koji ima istu srednju gustinu spektralne snage i istu autokorelaciju kao originalni niz podataka. Ovaj niz se naziva surogat niz. Upoređuje se greška predikcije datog vremenskog niza sa greškom predikcije surogat niza, koja se računa na isti način. Ako je greška predikcije stvarnog niza podataka dovoljno manja od one za slučajni niz, odbacuje se nulta hipoteza da je ulazni vremenski niz šum. Odnosno, prihvata se da je vremenski niz deterministički ako se u faznom prostoru zapaža bolja predikcija, u statistički značajnom smislu, nego u slučaju ansambla slučajnih vremenskih nizova sa istim spektrom snage. Međutim, ovi pristupi su limitirani velikom složenošću računanja i, što je važnije, činjenicom da su nelinearnost i determinizam samo neophodni uslovi za haos, ali nisu dovoljan dokaz haotične dinamike. Da ne bi bilo sumnji u validnost zaključaka, preporučuje se upotreba ovih tehnika u kombinaciji sa nekim drugim tehnikama za detekciju haosa u eksperimentalnim podacima.

U nastavku su opisani metodi za računanje Lyapunov-ljevih eksponenata, kao i jedna sasvim nova analitička tehnika koja obezbjeđuje dovoljan i robustan numerički test haosa i relativne mjere intenziteta haosa, čak i u prisustvu značajnog nivoa šuma. Radi se o titraciji haosa sa dodatim šumom. Ovaj metod koristi detekciju nelinearnosti, ali se bitno razlikuje od ostalih metoda iz treće grupe i zato ga svrstavamo u četvrtu grupu metoda.

2.1 Lyapunov-ljevi eksponenti

Za vremenske nizove stvorene u dinamičkim sistemima, prisustvo jednog pozitivnog Lyapunov-ljevog eksponenta potvrđuje kaos. U mnogim primjenama dovoljno je računati samo najveći Lyapunov-ljev eksponent λ_1 .

Za dinamički sistem, osjetljiva zavisnost od početnih uslova kvantifikovana je pomoću Lyapunov-ljevih eksponenata. Na primjer, razmatrajmo dvije trajektorije sa bliskim početnim uslovima u domenu atrakcije. Kad je atraktor haotični, trajektorije divergiraju eksponencijalnom brzinom karakterizovanom najvećim Lyapunov-ljevim eksponentom. Ova koncept je generalizovan za spektar Lyapunov-ljevih eksponenata, λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), razmatrajući malu n -dimenzionalnu sferu početnih uslova, gdje je n broj jednačina (ili, ekvivalentno, broj promjenljivih stanja) upotrijebljenih da opišu sistem. Kako vrijeme t protiče, sfera evoluiru u elipsoid čije se osnovne ose šire (ili skupljaju) brzinom datom Lyapunov-ljevim eksponentima. Očekuje se (sa vjerovatnoćom 1) da će dva slučajno izabrana početna uslova divergirati eksponencijalno brzinom datom najvećim Lyapunov-ljevim eksponentom. Prema tome najveći Lyapunov eksponent može biti definisan sledećom jednačinom, gdje je $d(t)$ srednja vrijednost divergencije u trenutku t i C konstanta koja normalizuje početno razdvajanje [8], [9]:

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t}. \quad (2.1)$$

Prisustvo jednog pozitivnog eksponenta je dovoljno za potvrdu haosa i predstavlja lokalnu nestabilnost u datom pravcu. Naglasimo da za postojanje atraktora, kompletna dinamika mora biti disipativna, to jest, globalno stabilna i ukupna kontrakcija mora biti veća od ukupne ekspanzije. Prema tome, čak i kad postoji nekoliko pozitivnih Lyapunov-ljevih eksponenata, zbir cijelog spektra je negativan.

Postoji više metoda za računanje Lyapunov-ljevih eksponenata kad su dostupne jednačine koje opisuju dinamički sistem. U jednom metodu računa se spektar lokalnih Lyapunov-ljevih eksponenata u svakoj tački orbite, a zatim srednja vrijednost svakog eksponenta duž orbite [7]. Alternativno, množene su Jacobian matrice u svim vremenskim koracima duž orbite i onda računate sopstvene vrijednosti rezultujućeg proizvoda matrica [33]. Ova metoda je konceptualno ekvivalentna sa praćenjem razvoja početne hiper-sfere početnih uslova, koja se pretvara u elipsoid sa najdužom osnovnom osom koja odgovara

λ_1 , sledećom po dužini koja odgovara λ_2 , i tako dalje. Radi se o metodi koji je izuzetno zahtijevan kad je u pitanju računanje. U praksi, on ne radi dobro sa haotičnim sistemom iz dva razloga. Prvo, individualni članovi kumulativnog proizvoda matrica rastu eksponencijalno. Drugo, svi sopstveni vektori teže da se postave u pravcu maksimalnog rasta i prema tome, ne razapinju tačno prostor. Oba ova problema, prevaziđena su upotrebom Gram-Schmidt-ove reortonormalizacije [34], ali je povećana računska složenost. Detalji teorije, implementacije i numerički algoritmi mogu se naći u [8].

Najviše korišćeni metodi za izračunavanje Lyapunov-ljevih eksponenata za nizove eksperimentalnih podataka su metodi koji su predložili Wolf [8] i Rosestein. [9]. Ovdje će biti detaljno opisan Rosenstein-ov metod. Geometrija atraktora u n -dimenzionalnom faznom prostoru može biti iskorišćena za traženje potencijalnog haotičnog kretanja. Za eksperimentalne nizove podataka n je nepoznato u većini slučajeva i broj promjenljivih dostupnih za mjerenje je samo jedna. Tada je neophodno rekonstruisati geometriju u faznom prostoru iz jednog vremenskog niza podataka. To je prvi korak u ovom pristupu. Geometrijski metodi za rekonstrukciju atraktora iz jednog mjerenog niza podataka počinju sa pionirskim radom Takens-a [35]. Takens-onova "embedding" teorema tvrdi da, kada je dostupna samo jedna promjenljiva iz dinamičkog sistema (što je najčešći slučaj u praksi), moguće je rekonstruisati prostor stanja koji je ekvivalentan originalnom (ali nepoznatom) prostoru stanja sastavljenom od svih dinamičkih varijabli. Za rekonstrukciju faznog prostora upotrijebljen je metod kašnjenja. To znači, konstruisan je m -dimenzionalni fazni prostor koristeći odbirke eksperimentalnog vremenskog niza koji su međusobno pomjereni za J . Rekonstruisana trajektorija, X , može biti izražena kao matrica gdje je svaki red jedan vektor iz faznog prostora. Prema tome,

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_M]^T, \quad (2.2)$$

gdje je X_i stanje sistema u diskretnom trenutku i . Za vremenski niz dužine N , $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, svako X_i je dato kao:

$$X_i = [x_i \ x_{i+J} \ x_{i+(m-1)J}], \quad (2.3)$$

gdje je J dužina rekonstrukcionog kašnjenja, a m ugrađena dimenzija, to jest broj nezavisnih geometrijskih koordinata u prostoru stanja potrebnih da obuhvate atraktor.

Prema tome, X je $M \times m$ matrica, a konstante M , J , N su povezane kao:

$$M = N - (m - 1)J. \quad (2.4)$$

Ugrađena dimenzija se obično procjenjuje u skladu sa Takens-onovom teoremom, to jest, $m > 2n$, mada ovaj algoritam često radi bolje kad je m niže od Takens-onovog kriterijuma. Takens-onova teorema tvrdi da ako sistem u originalnom prostoru stvara orbitu koja leži na geometrijskom objektu dimenzije n (koja ne mora biti cio broj), onda objekat može biti nedvosmisleno viđen bez lažnih presjeka orbita u drugom prostoru cjelobrojne dimenzije $m > 2n$. Koordinate tačke u ovom prostoru su nelinearna transformacija koordinata originalnog prostora stanja. Odsustvo presjeka u drugom prostoru znači da je orbita predstavljena bez dvosmislenosti kad je m dovoljno veliko. Preklapanje orbita se javlja u nižim dimenzijama i dvosmislenost u presjecima narušava mogućnost predikcije razvoja sistema.

Veoma je važno dobro izabrati kašnjenje J . Za male vrijednosti J (gdje svaka komponenta vektora ne dodaje značajnu novu informaciju o dinamici) rekonstruisani atraktor se svodi na dijagonalu rekonstruisanog prostora, a za veliko J uzastopne vrijednosti vektora novog, više-dimenzionalnog signala su nekorelisane i gubi se haotična struktura atraktora. Dobra aproksimacija za J jednaka je kašnjenju za koje autokorelaciona funkcija opadne na $1 - 1/e$ od svoje početne vrijednosti. Međutim određivanje odgovarajućeg J je još otvoren problem.

Poslije rekonstrukcije dinamike, algoritam locira najbližeg susjeda svake tačke na trajektoriji. Najbliži susjed, X_j , je nađen tražeći tačku koja minimizuje rastojanje do referentne tačke, X_j . Ovo je izraženo kao:

$$d_j(0) = \min_{X_j} \|X_j - X_j\|, \quad (2.5)$$

gdje je $d_j(0)$ početna udaljenost j -te tačke do njenog najbližeg susjeda, i $\|\dots\|$ označava Euclid-ovu normu. Dodatni uslov je da najbliži susjedi imaju privremeno razdvajanje veće od glavnog perioda vremenskog niza, (glavni period se procjenjuje kao recipročna vrijednost glavne frekvencije u spektru snage):

$$|j - \hat{j}| > \text{glavnog perioda}. \quad (2.6)$$

Ovo znači da se razmatra svaki par susjeda kao bliski početni uslovi za različite

trajektorije. Najveći Lyapunov-ljev eksponent je, onda, procijenjen kao srednja brzina razdvajanja najbližih susjeda.

Do ove tačke, prilaz koji predlaže Rossenstain za računanje λ_1 je sličan sa ostalim metodima koji prate eksponencijalnu divergenciju najbližih susjeda. Međutim važno je naglasiti neke razlike:

1. Algoritam koji je predložio Wolf [8] ne koristi prednost svih dostupnih podataka, zato što se fokusira na jednu trajektoriju. Wolf predlaže da se jedan najbliži susjed prati i zamjenjuje kad njegovo razdvajanje od referentne trajektorije poraste iznad zadate granice. Dodatna računanja su potrebna i zato što ovaj model koristi Gram-Schmidt-ovu proceduru zamjene susjeda sa onim koji čuva orijentaciju faznog prostora. Međutim, ovo čuvanje orijentacije faznog prostora nije neophodno kad se računa samo najveći Lyapunov-ljev eksponent.

2. Ako najbliži susjed prednjači (privremeno) njegovoj referentnoj tački, onda ovaj algoritam može biti shvaćen kao predikcioni pristup. U tom slučaju, prediktivni model je prosto linija kašnjenja, predikcija je lokacija najbližeg susjeda i predikciona greška je jednaka razdvajanju između najbližeg susjeda i njegove referentne tačke. Naravno, postoje drugi modeli za predikciju, kao što su polinomijalno preslikavanje, adaptivni filtri i neuralne mreže, koji zahtijevaju složenija računanja.

3. Ovaj pristup je zasnovan na radu [36] koji procjenjuje λ_1 kao:

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i\Delta t} \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}, \quad (2.7)$$

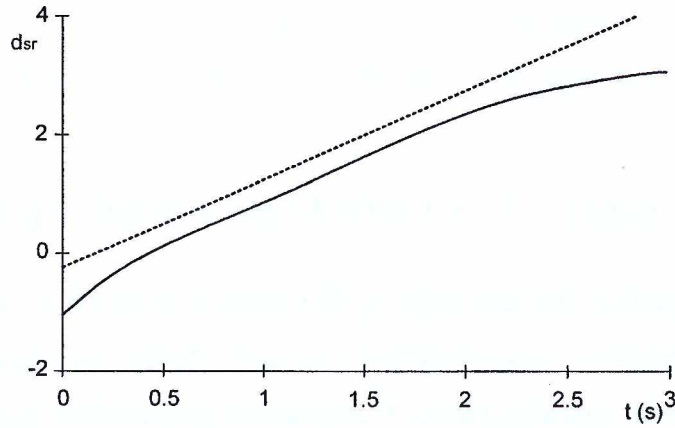
gdje je Δt period odabiranja vremenskog niza, a $d_j(i)$ je rastojanja između j -tog para najbližih susjeda poslije i -tog koraka, to jest, poslije $i\Delta t$ sekundi. (Ponovimo da je M broj rekonstruisanih tačaka.)

Na osnovu definicije λ_1 date u jednačini (2.1), pretpostavljeno je da j -ti par najbližih susjeda divergira aproksimativno brzinom datom najvećim Lyapunov-im eksponentom:

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, \quad (2.8)$$

gdje je C_j početno razdvajanje. Logaritmujući obje strane jednačine (2.8), dobijamo:

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t). \quad (2.9)$$



Slika 2.1: Tipična kriva $d_{sr}(i)$ u zavisnosti od vremena za Lorenz-ov atraktor. Puna linija je rezultat dobijen primjenom Rosenstein-ovog metoda; nagib tačkaste linije je očekivani rezultat.

Jednačina predstavlja skup gotovo paralelnih linija (za $j = 1, 2, \dots, M$), od kojih svaka ima pad proporcionalan sa λ_1 . Najveći Lyapunov eksponent je, onda, računat upotrebom metode najmanjih kvadrata u cilju praćenja srednje linije definisane kao:

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} d_{sr}(i), \quad (2.10)$$

gdje $d_{sr}(i) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \ln d_j(i)$. Ovaj proces usrednjavanja je ključ za računanje tačne vrijednosti λ_1 za male i skupove podataka u šumu. Naglasimo da u jednačini (2.8), C_j vrši funkciju normalizacije razdvajanja susjeda, ali kao što je to pokazano u jednačini (2.9), ova normalizacija nije naophodna za procjenu λ_1 . Izbjegavajući normalizaciju, ovaj prilaz postaje lakši za računanje od metoda iz [36].

Na Slici 2.1 je prikazan tipičan izgled $d_{sr}(i)$ u funkciji $i\Delta t$ (puna linija); tačkasta linija ima nagib jednak teorijskoj vrijednosti λ_1 . Poslije kratkog prelaznog procesa, uočava se dugi linearni region koji je korišćen za ekstrakciju najvećeg Lyapunov-ljevog eksponenta. Poslije dužeg vremena kriva ulazi u zasićenje, pošto je sistem ograničen u faznom prostoru i srednja vrijednost divergencije ne može prevazići "dužinu" atraktora.

Postoji mnogo praktičnih poteškoća u realizaciji ovog metoda kao što su izbor odgovarajuće ugrađene dimenzije ili određivanje broja parova koji moraju biti praćeni. Postavlja se pitanje koliko blisko moraju biti tačke i šta ako su one lažno bliske zbog prisustva šuma? Takođe, postoji problem u vezi sa njihovom orijentacijom.

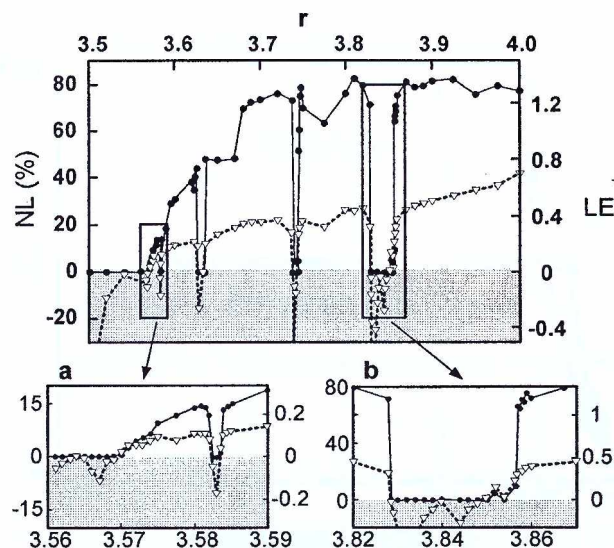
Sve postojeće metode za estimaciju λ_1 prati najmanje jedan od sledećih nedostataka: nepouzdanost za mali skup podataka, računaska složenost, relativno teška implementacija.

2.2 Titracija haosa sa dodatim šumom

Titracija haosa sa dodatim šumom [37] je relativno nov i drugačiji pristup detekciji haosa od svih do sada navedenih. Radi se o kontrolisanom dodavanju šuma podacima uz kontinualno praćenje nelinearnog indikatora. U ovom pristupu dodati šum je numerički titrant, za razliku od konvencionalnih metoda sa surogat nizom gdje je šum korišćen za statističko upoređivanje rezultata nelinearne detekcije. Umjesto odstranjivanja ili izdvajanja šuma iz podataka, dodaju se male vrijednosti šuma, koje se u svakom sledećem koraku povećavaju. U suštini, ovaj prilaz je analogan procesu hemijske titracije u kojem je koncentracija kiseline određena neutralizacijom kiseline sa dodatom bazom, bolje nego direktnom ekstrakcijom kiseline. Osnovna komponenta u takvoj titraciji je osjetljivi hemijski indikator koji pokazuje promjene pH vrijednosti oko ekvivalentne tačke u neutralizaciji kiseline-baza. U slučaju signala u šumu, "indikator" za numeričku titraciju haosa sa slučajnim šumom, može biti bilo koja tehnika tolerantna na šum, koja može pouzdano detektovati nelinearnu dinamiku u kratkom nizu podataka. Upotrijebljena na ovaj način, numerička titracija, opisana u nastavku, omogućava ovim tehnikama da obezbijede pouzdan test za kaos.

Suština navedene tehnike može biti shvaćena kao numerička titracija podataka. Naime, podacima se dodaje bijeli (ili linearno korelirani) šum standardne devijacije σ koja se povećava u svakom sledećem koraku i njihova nelinearnost se prati posebnim indikatorom nelinearnosti. Standardna devijacija šuma σ se povećava sve dok indikator detektuje nelinearnost. Ona vrijednost standardne devijacije σ pri kojoj se nelinearnost ne može više detektovati ovim indikatorom (unutar određenog nivoa statističkog povjerenja) zove se granična vrijednost σ , odnosno granica šuma (NL). Ova vrijednost je označena kao maksimum šuma ("noise ceiling") i odgovarajući granični uslov "ekvivalentne tačke".

Prema ovoj šemi numeričke titracije, $NL > 0$, ukazuje na kaos i vrijednost NL daje procjenu njegovog relativnog intenziteta. Suprotno, ako je $NL = 0$, može se izvesti zaključak da niz ili nije haotični ili je haotična komponenta već neutralizovana postojećim

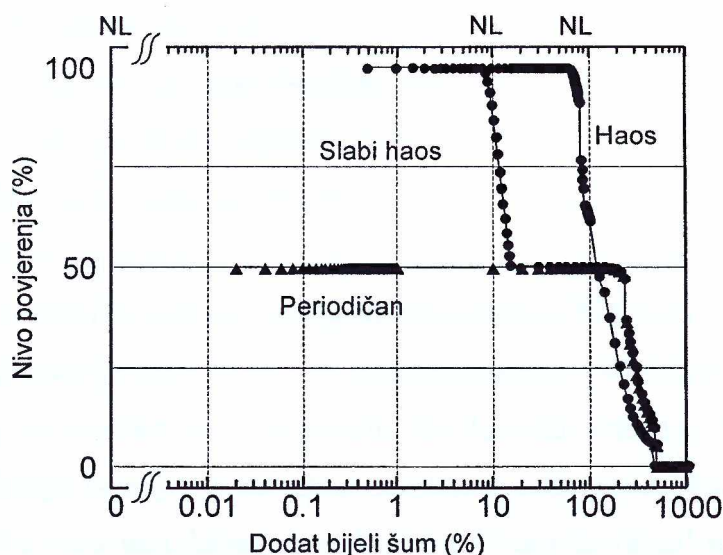


Slika 2.2: Titracija haosa sa dodatim šumom za logističko preslikavanje $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$. Horizontalna osa: bifurkacioni parametar A . Puna linija (lijeva skala): minimalna vrijednost dodatog bijelog šuma koja onemogućava detekciju nelinearnosti u podacima (NL). Isprekidana linija (desna skala): Lyapunov-ljev eksponent (LE).

šumom u podacima ("noise floor"). Uslov $NL > 0$, prema tome, predstavlja dovoljan test za kaos.

U radu [37] je demonstrirana validnost ove tehnike numeričke titracije na primjeru logističkog preslikavanja. Na Slici 2.2 na horizontalnoj osi su prikazane vrijednosti bifurkacionog parametra A . Punom linijom na grafiku (lijeva skala) prikazana je minimalna vrijednost dodatog bijelog šuma NL koja onemogućava detekciju nelinearnosti u podacima. Vrijednost maksimalnog Lyapunov-ljevog eksponenta prikazana je isprekidanom linijom (desna skala). Pokazano je da je evidentna bliska korelacija između NL i najvećeg Lyapunovljevog eksponenta λ_1 na cijelom bifurkacionom opsegu. Naime, $NL > 0$ svuda gdje je $\lambda_1 > 0$.

Ključno pitanje je zašto uslov $NL > 0$, predstavlja dovoljan test za kaos, kad nelinearna dinamika u signalu može, takođe, značiti druge (manje komplikovane) dinamike oscilatornog tipa, kao što su granični krug ili kvaziperiodičnost. Kao odgovor na ovo pitanje razmatrana je kriva numeričke titracije gdje je vremenski niz podataka povezan sa kiseline-baza rješenjima - čisti kaos je najviše "kiseo", a bijeli šum je najviše "alkalan". Po ovoj analogiji, deterministički podaci kao što su periodični i kvaziperiodični signali ili



Slika 2.3: Titraciona kriva za logističko preslikavanje za tri vrijednosti bifurkacionog parametra koje odgovaraju periodičnom ponašanju, slabom haosu i jakom haosu.

slučajni podaci takvi kao što je linearno koreliran šum su neutralni, zato što leže između haosa i bijelog šuma na kiselobaznoj skali koja grubo odgovara stepenu predvidljivosti sistema. Na Slici 2.3 prikazana je titraciona kriva za logističko preslikavanje za tri vrijednosti bifurkacionog parametra koje odgovaraju periodičnom ponašanju, slabom haosu i jakom haosu. Šumni limit NL (prikazan na vrhu) pokazuje kad titraciona kriva prolazi kroz zacrtani nivo povjerenja za statističko odbijanje linearne hipoteze. U ovom slučaju $NL \sim 75\%$ za strogi haotični signal, $NL \sim 9\%$ za slabi haotični niz i $NL \sim 0\%$ za periodični signal. Detalji o određivanju nivoa povjerenja prikazanog na ordinati mogu se naći u radu [37]. Prema upotrijebljenom nelinearnom indikatoru, samo haotična dinamika ima mjerljivu titracionu snagu. NL test je, prema tome, visoko selektivan za haotičnu dinamiku i efikasno razlikuje kaos od svih drugih oblika linearne i nelinearne dinamike koje imaju malu ili uopšte nemaju otpornost na dodati šum u ovom ogledu numeričke titracije.

Kvalitet procedure numeričke titracije bitno zavisi od izbora odgovarajućeg nelinearnog indikatora. Takav indikator mora biti specifičan za nelinearnu dinamiku (nasuprot linearnoj dinamici) i tolerantan na mjerni šum, to jest, on treba biti sposoban da obezbijedi pouzdanu nelinearnu detekciju pod štetnim uticajem značajne šumne kontaminacije. Autori su u radu [37] predstavili primjenu Volterra-Wiener-ovog

nelinearnog identifikacionog metoda. Detalji Volterra-Wiener-ovog metoda opisani su u [38]. Ukratko, ovaj model daje familiju polinomijalnih (linearnih i nelinearnih) autoregresivnih modela sa promjenljivom memorijom i dinamičkim redom optimalno podešenim za predviđanje podataka. Najbolji linearni i nelinearni modeli su izabrani u skladu sa informaciono-teoretskim (Akaike) kriterijumom, i nakon toga nulta hipoteza (najbolji linearni model) je testiran nasuprot alternativne hipoteze (najbolji nelinearni model) koristeći parametarski (F-test) ili neparametarsku (Whitney-Mann) statistiku. Naglašeno je da, za razliku od nelinearnih detekcionih tehnika, Volterra-Wiener-ov algoritam obezbjeđuje osjetljiv i robustan indikator nelinearne dinamike u kratkim, šumnim vremenskim nizovima, koja je neophodan (ali ne i dovoljan) uslov za kaos.

Da bi pokazali univerzalnost ovog algoritma, autori primjenjuju proceduru titracije na nekoliko modela sistema koji predstavljaju četiri standardna puta u kaos: period-udvostručavajući (Mackey-Glass-ova diferencijalna jednačina), intermitentni (tro-dimenzionalni model Belousov-Zhabotinsky reakcije), "subcritical" (Lorenz-ov model) i kvaziperiodični (Currey-Yorke diskretno preslikavanje). Primjeri uključuju i diskretne i kontinualno-vremenske modele. Ovi primjeri su relativno niske dimenzije, sa atraktorima dimenzije manje od 3. Sugerisano je da povećanje dimenzionalnosti dinamike ima štetan efekat, slično slučaju kad se povećava šum, u kojem oba teže da naruše pouzdanost nelinearne detekcije. Pokazano je da titracioni algoritam sa Volterra-Wiener-ovim detektorom nelinearnosti detektuje kaos samo u nekim sistemima sa dinamikom višeg reda, to jest, hiper-kaotičnim sistemima. Autori smatraju da se problem u budućnosti može prevazići upotrebom nekog drugog detektora.

Naglašeno je da NL obezbjeđuje samo relativnu mjeru intenziteta haosa. Njegova apsolutna vrijednost zavisi od karakteristika signala (kao što su dužina podataka i šumni pod) ili osobina sistema (kao što su njegova nelinearna dimenzija i distribucija njegovog Lyapunov-ljevog spektra). Sa druge strane, za bilo koji skup podataka, magnituda NL je određena osjetljivošću i robustnošću nelinearnog indikatora koji se koristi. Prema tome, važan otvoren problem je usavršavanje tekućeg algoritma za nelinearnu detekciju ili razvoj drugih algoritama, u cilju maksimiziranja vrijednosti NL za generalnu klasu nelinearnih sistema, na taj način povećavajući maksimum šumne tolerancije za detekciju haosa.

U praksi, podaci su neizbježno pomiješani sa šumom, to jest, kaos je a priori titriran

pratećim šumom i taj fenomen autori zovu autotitracija. Ako u ovom slučaju, nelinearna detekcija sa odgovarajućim robustnim indikatorom implicira $NL > 0$, znači da je stvarna vrijednost NL veća od vrijednosti koju pokazuje indikator zbog prisustva nenultog šuma. U slučaju da je $NL = 0$, to jest da nelinearnost nije detektovana, to ne znači da ne postoji kaos, imajući u vidu prirodu NL testa. Čak i sa haotičnim podacima, ako je šumni minimum blizu ili iznad ekvivalentne tačke indikator neće detektovati nelinearnost.

Predloženi detektor nije primijenjen na neautonomne sisteme. Autori smatraju da je moguć dalji razvoj ovog NL testa tako da on može karakterizovati kompleksna ponašanja (uključujući i kaos) u generalnoj klasi autonomnih i neautonomnih sistema. Za pomjeranje granica njegove primjenljivosti potrebna su dalja istraživanja.

2.3 Uporedne karakteristike postojećih metoda za detekciju haosa

Srž tekućih problema leži u neizbježnoj šumnoj kontaminaciji eksperimentalnih podataka. Na jednoj strani, klasični testovi koji obezbjeđuju dovoljan dokaz za kaos, kao što su Lyapunov-ljevi eksponenti, su izuzetno osjetljivi na šum. Na drugoj strani, algoritmi koji su robustni na šum verifikuju samo parcijalne (neophodne) uslove za kaos. Ni jedna od ovih tehnika, sama ili u kombinaciji, ne obezbjeđuje konačan test za kaos u empirijskim podacima. Osim toga, ovaj problem ne može biti riješen filtriranjem prisutnog šuma, jer je nejasno da li osnovna dinamika (haotična ili druga) ostaje dobro očuvana nakon takvih procedura za redukciju šuma.

U Tabeli 2.1 su objedinjene glavne karakteristike postojećih metoda za detekciju. Kolone I, II i III odnose se na metode iz odgovarajućih grupa, a kolona IV na opisani metod titracije haosa. Metode iz I, II, III grupe karakteriše velika računaska složenost i osjetljivost na promjenu parametara algoritma. Nepouzdati su za kratke nizove podataka i signale u šumu. Primjenljivi su na neautonomne i hiper-haotične sisteme ukoliko je dostupan dovoljno dugačak niz. Sa druge strane, tehnika titracije nije primjenljiva za ove dvije vrste sistema, ali je pouzdana za kratke nizove podataka u šumu. Prati je računaska složenost i osjetljivost na promjenu parametara algoritma.

Tehnika koja će biti predložena u ovom radu ima neke dobre osobine i metoda iz grupa

	I	II	III	IV
Velika računaska složenost	*	*	*	*
Pouzdanost za kratke nizove podataka				*
Pouzdanost za signale u šumu				*
Osjetljivost na promjene parametara algoritma	*	*	*	*
Primjenjivost na hiper-haotične sisteme	*	*	*	
Primjenjivost na neautomne sisteme	*	*	*	

Tabela 2.1: Osobine metoda za detekciju haosa.

I, II, III, i metoda numeričke titracije.

Nedostatak definitivnog testa haosa u eksperimentalnim vremenskim nizovima otežava primjenu nelinearne dinamičke teorije u različitim fizičkim, biomedicinskim i socioekonomskim sistemima, gdje se smatra da kaos igra značajnu ulogu. Prevazilaženje ovih teškoća otvorilo bi mogućnosti za praktične primjene kao što su predviđanje vremena i ekonomskih kretanja, nove strategije za dijagnozu i kontrolu patoloških stanja u biomedicini ili otkrivanje haotičnih elektronskih ili optičkih komunikacionih signala.

Svi navedeni i mnogi drugi primjeri signala koje bi trebalo klasifikovati i detektovati, kao i nedostaci postojećih metoda za detekciju, ostavljaju dovoljno prostora za razvoj novih tehnika. U nastavku ovog rada naročita pažnja je posvećena signalima iz nelinearnih oscilatornih kola i njihovoj detekciji. Nelinearni oscilatori su važna grupa nelinearnih kola i njihova dinamika predstavlja model mnogih nelinearnih procesa u prirodi i društvu.

Poglavlje 3

Signali iz nelinearnih oscilatora u frekventnom domenu

Pod pojmom signala podrazumijeva se fizički proces koji se mijenja u prostoru ili vremenu. Pojam signala usko je vezan sa pojmom informacije. Informacija može biti na različite načine sadržana u signalu. Potrebno je na neki način izdvojiti karakteristike signala koje nose informaciju. Zato su razvijeni metodi za analizu signala: Fourier-ova analiza, posmatranje vremenskog oblika signala, vremensko-frekvencijska analiza, statistička analiza parametara signala... Ove metode predstavljaju matematički model analize signala, pa da bi se primijenile na konkretnom signalu mora i taj signal biti matematički modelovan. Signal predstavljamo na način koji će nam omogućiti lako izdvajanje informacija iz njega, pa one predstavljaju transformaciju signala. Osnovna ideja za uvođenje i korišćenje transformacija u obradi signala je mogućnost rješavanja određene klase problema na jednostavan način upotrebom transformisanog oblika signala u odnosu na njegov originalni oblik. Signal zadat u vremenskom domenu najčešće se smatra originalnom verzijom signala.

U ovoj tezi razmatrano je ponašanje signala iz nelinearnih haotičnih oscilatora koji se mogu svrstati u klasu jedno-dimenzionalnih kontinualnih signala. Želimo da na osnovu jednog signala iz sistema procijenimo stanje sistema. Informacija o stanju sistema sadržana je signalu. Signali iz nelinearnih oscilatora mogu biti vrlo složeni u vremenskom domenu i kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, tehnike za izdvajanje informacija o stanju sistema na osnovu njihove vremenske reprezentacije su vrlo

komplikovane. Zato smo mi odlučili da koristimo druge reprezentacije signala. Naime, u frekventnom domenu postoji značajna razlika između signala u periodičnom i haotičnom stanju. Pri promjeni kontrolnog parametra u vremenu sistem prelazi iz jednog u drugo stanje. Da bi pratili promjenu spektralnog sadržaja signala tokom vremena potrebno je formirati vremensko-frekvencijsku (time-frequency (TF)) reprezentaciju signala. Zato će u nastavku ovog poglavlja pažnja biti posvećena Fourier-ovoj transformaciji (FT) i TF reprezentacijama kao osnovnom alatu koji koristimo u razvoju detektora stanja sistema.

3.1 Fourier-ova transformacija

Fourier-ova transformacija [39], [40] definiše se za slučaj kontinualnog signala $x_a(t)$ kao:

$$F[x_a(t)] = X_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1)$$

Dovoljan uslov da je transformacija (3.1) dobro definisana je da energija posmatranog signala bude konačna. U svim praktičnim slučajevima ovaj uslov je ispunjen, jer karakteristike prirodnih pojava moraju uzimati samo konačne vrijednosti i mogu biti praćene, to jest definisane na konačnom vremenskom intervalu. Pored toga, većina fizičkih veličina može se opisati neprekidnom funkcijom ili funkcijom koja ima konačan (u najgorem slučaju prebrojiv) skup tačaka prekida, te je ona integrabilna i integral (3.1) postoji i konačan je.

Bitna osobina Fourier-ove transformacije je njena reverzibilnost. Na osnovu reverzibilnosti transformacije možemo biti sigurni da reprezentacija signala u novom, transformacionom domenu sadrži sve informacije koje se nalaze u originalnom signalu. Ukoliko nam je poznata Fourier-ova transformacija signala $x_a(t)$, označimo je sa $X_a(\omega)$, tada možemo na osnovu nje rekonstruisati signal $x_a(t)$ na sledeći način:

$$F^{-1}[X_a(\omega)] = x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Od velikog teoretskog interesa su određeni matematički definisani signali, koji se ne mogu pojaviti u praksi, kao što je, na primjer, sinusoidalni signal definisan za svaku vrijednost varijable t . U realnim slučajevima signal možemo posmatrati samo u konačnom vremenskom intervalu.

Fourier-ova transformacija diskretnog signala $x(n)$ je definisana kao:

$$F[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}. \quad (3.3)$$

Funkcija $X(e^{j\omega})$ je periodična po ω sa periodom 2π . Dovoljan uslov za egzistenciju $X(e^{j\omega})$ je:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty. \quad (3.4)$$

Inverzna Fourier-ova transformacija diskretnog signala je definisana izrazom

$$F^{-1}[x(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (3.5)$$

Teorema o odabiranju kaže da se analogni signal $x_a(t)$ ograničenog opsega, $X_a(\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_m$, može rekonstruisati na osnovu odbiraka $x(n) = \Delta t x_a(n\Delta t)$ uzetih sa korakom Δt ako je $\Delta t < \pi/\omega_m = 1/(2f_m)$.

Prilikom numeričkog izračunavanja Fourier-ove transformacije analognih signala neophodno je izvršiti njenu diskretizaciju. Primjenom pravougaonog pravila integral kojim je definisano $X_a(\omega)$ (3.1) postaje:

$$X_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta t x_a(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t}. \quad (3.6)$$

Diskretna Fourier-ova transformacija (DFT) se može definisati kao odabrane vrijednosti Fourier-ove transformacije diskretnog signala $x(n)$ sa korakom $\Delta\omega = 2\pi/N$:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = X_p(k), \quad (3.7)$$

pri čemu je $x_p(n) = x(n)$ za $0 \leq n \leq N-1$, tj. trajanje signala $x(n)$ je manje od N . Diskretna Fourier-ova transformacija $X_p(k)$ je kao i $x_p(n)$ periodična sa periodom N .

Sažeti oblik prikazivanja DFT je dat sa:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{nk}, \quad (3.8)$$

gdje je $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$.

Inverzna diskretna Fourier-ova transformacija (IDFT) je data izrazom:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W_N^{-nk}. \quad (3.9)$$

3.2 Vremensko-frekvencijska analiza signala

Fourier-ova transformacija je pogodna za analizu signala čiji je spektar stacionaran (vremenski nepromjenljiv). Signali sa brzim promjenama spektra se često javljaju u slučajevima biomedicinskih signala, signala iz haotičnih sistema, signali sonara i radara... U svim ovim slučajevima odvojene analize (samo u vremenskom, odnosno samo u frekvencijskom domenu) ne daju potpunu informaciju, te su u tom cilju razvijeni posebni metodi za združenu TF analizu signala.

Osnovna ideja TF analize je preslikavanje, odnosno transformacija signala iz jedno-dimenzionalnog vremenskog u dvo-dimenzionalni TF domen – vremensko-frekvencijsku (TF) ravan. Na taj način se definiše transformacija signala, a predstavu signala u novom domenu nazivamo vremensko-frekvencijskom reprezentacijom (TFR) signala. Najčešći slučaj je posmatranje raspodjele energije u TF domenu, i u takvim slučajevima korišćenu transformaciju nazivamo TF distribucijom (TFD). TF analiza signala detaljno je obrađivana u [41]-[43].

3.2.1 Kratkotrajna Fourier-ova transformacija i spektrogram

Najjednostavniji način proširivanja mogućnosti Fourier-ove transformacije u smislu vremenske lokalizacije pojedinih komponenti signala je kratkotrajna Fourier-ova transformacija (STFT). Osnovna ideja je odsjeći dio signala, funkcijom prozora $w(t)$ i zatim naći njegovu Fourier-ovu transformaciju. Pomjeranjem prozora $w(t)$ po vremenskoj osi dobija se dvo-dimenzionalna reprezentacija signala $x(t)$, koja se naziva kratkotrajna Fourier-ova transformacija.

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.10)$$

gdje je $w^*(\tau)$ označava konjugovanu funkciju prozora. Drugi oblik STFT je:

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.11)$$

Množenjem signala odgovarajućom funkcijom prozora potisnute su sve komponente signala van vremenskog opsega određenog trajanjem upotrijebljene funkcije prozora oko nekog trenutka t . Funkcija prozora kontroliše relativan udio odgovarajućeg signala prilikom računanja ove TF reprezentacije signala za određeni trenutak. Sve osobine signala u

uskom opsegu oko posmatranog trenutka pojaviće se u trenutku t u STFT. Dakle, dobra vremenska rezolucija postiže se uzimanjem što je moguće manjih djelova signala, to jest, upotrebom prozora kratkog trajanja.

Ukoliko se STFT izrazi u zavisnosti od Fourier-ove transformacije funkcije prozora i samog signala dobija se za izraz (3.10):

$$STFT(t, \omega) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \theta) W(\theta) e^{-j\theta t} d\theta, \quad (3.12)$$

a za izraz (3.11):

$$STFT(t, \omega) = e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\theta) W(\theta - \omega) e^{j\theta t} d\theta. \quad (3.13)$$

Izuzimajući $e^{-j\omega t}$, STFT se može predstaviti kao inverzna FT skraćenog spektra $X(\theta)W(\theta - \omega)$. Inverzna FT skraćenog spektra $X(\theta)W(\theta - \omega)$ može se posmatrati kao rezultat prolaska signala kroz filter propusnik opsega čiji je frekvencijski odziv $W(\theta)$. Obzirom da je $W(\theta)$ FT funkcije prozora $w(t)$ i predstavlja frekvencijski odziv niskopropusnog filtra, $W(\omega - \theta)$ će biti frekvencijski odziv filtra propusnika opsega sa centralnom učestanošću ω . Dakle, STFT na nekoj učestanosti ω biće rezultat prolaska signala kroz filter propusnik opsega centriranog oko te učestanosti, pa će frekvencijska rezolucija biti utoliko bolja ukoliko je propusni opseg posmatranog filtra manji. Princip neodređenosti govori nam o tome da nije moguće da funkcija prozora i njena FT budu ograničenog trajanja. Glavna mana STFT je da je nemoguće proizvesti istovremeno dobru i vremensku i frekvencijsku rezoluciju, već je potrebno praviti kompromis između njih. U prvom slučaju gdje je $w(t) = \delta(t)$, pa je $STFT(t, \omega) = x(t)e^{-j\omega t}$, postiže se idealna vremenska rezolucija. U ovom slučaju se STFT u suštini svodi na posmatrani signal, zadržavajući sve vremenske varijacije signala, ali ne obezbjeđujući nikakve informacije o frekvencijskom sadržaju. Drugi slučaj je dobijanje idealne frekvencijske rezolucije kada se koristi funkcija prozora neograničenog trajanja, koja je konstantna i jednaka je $w(t) = 1$. Sada je $STFT(t, \omega) = X(\omega)$, dakle, svodi se na FT i ne obezbjeđuje nikakvu vremensku rezoluciju. Nema informacije o trenutku pojavljivanja pojedinih komponenti u spektru signala.

STFT je linearna transformacija. STFT linearne kombinacije signala $z(t) = ax(t) +$

$by(t)$ jednaka je linearnoj kombinaciji STFT pojedinačnih signala:

$$STFT_z(t, \omega) = aSTFT_x(t, \omega) + bSTFT_y(t, \omega). \quad (3.14)$$

Ova transformacija zadovoljava osobinu pomjeranja po vremenu. Ova osobina ukazuje na očekivanu činjenicu da ako analiziramo dva signala koji su istog oblika, ali pomjereni po vremenskoj osi, odnosno locirani u različitim vremenskim intervalima, dobijamo STFT koje su takođe istog oblika, uz isto pomjeranje po vremenskoj osi. Analitički ovu osobinu možemo zapisati kao:

$$STFT_y(t, \omega) = STFT_x(t - t_0, \omega) \text{ za } y(t) = x(t - t_0). \quad (3.15)$$

STFT zadovoljava i osobinu pomjeranja po frekvenciji. Ova osobina je dualna osobini pomjeranja po vremenu. Naime, ukoliko se posmatraju dva signala čiji su spektri dobijeni FT pomjereni jedan u odnosu na drugi, odnosno ako je jedan signal modulisan sa $e^{j\omega_0 t}$, tada se STFT jednog signala može dobiti od STFT drugog signala transliranjem po frekvencijskoj osi. Ova osobina ukazuje na to da STFT tretira ravnopravno sve komponente signala, bez obzira na njihov položaj na frekvencijskoj osi. Analitički ovu osobinu iskazujemo formulom:

$$STFT_y(t, \omega) = STFT_x(t, \omega - \omega_0) \text{ za } y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (3.16)$$

Ova transformacija je reverzibilna. Originalni signal $x(t)$ se lako može rekonstruisati na osnovu STFT (3.10) primjenom inverzne FT, pa se dobija:

$$x(t + \tau) = \frac{1}{2\pi w(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.17)$$

Sada se može izračunati vrijednost $x(t + \tau)$ za odgovarajuće t i vrijednosti τ za koje je funkcija prozora znatno veća od nule. Pošto se prozori biraju tako da im se sa povećanjem τ vrijednost približava nuli, rekonstrukcija signala se vrši tako što se izračuna vrijednost $x(t + \tau)$ za vrijednosti τ do polovine trajanja funkcije prozora. Nakon toga se posmatra $STFT(t + T, \omega)$, izračuna njena inverzna FT i ponovi isti postupak.

U specijalnom slučaju za $\tau = 0$ dobija se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \omega) d\omega. \quad (3.18)$$

Veliki nedostatak STFT je to što njene vrijednosti nisu realne. Stoga se često koristi spektrogram.

Spektrogram je energetska verzija kratkotrajne Fourier-ove transformacije. Definiše se kao:

$$SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2. \quad (3.19)$$

Iz definicije se vidi da spektrogram uzima samo realne nenegativne vrijednosti. Spektrogram zadovoljava osobine vremenskog i frekvencijskog pomjeranja. Glavni nedostatak spektrograma u odnosu na STFT je gubitak osobine linearnosti i nemogućnost rekonstrukcije signala na osnovu njegovog spektrograma. Jednostavno računanje STFT, a samim tim i spektrograma, čini ovu distribuciju jednom od najčešće korišćenih.

Analizirajmo signal sastavljen od n komponenti:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (3.20)$$

koje se nalaze u različitim djelovima TF ravni. STFT ovog signala jednaka je odgovarajućoj sumi STFT pojedinih komponenti:

$$STFT(t, \omega) = \sum_{i=1}^n STFT_i(t, \omega), \quad (3.21)$$

gdje $STFT_i(t, \omega)$ predstavlja STFT i -te komponente.

Spektrogram ne sadrži kros-članove ukoliko se komponente $STFT_i(t, \omega)$ ne poklapaju u TF ravni, to jest ukoliko je zadovoljeno:

$$STFT_m(t, \omega)STFT_n^*(t, \omega) = 0 \text{ za } m \neq n, \quad (3.22)$$

pa važi:

$$SPEC(t, \omega) = \sum_{i=1}^n |STFT_i(t, \omega)|^2. \quad (3.23)$$

Generalno, spektrogram višekomponentnog signala će biti:

$$SPEC(t, \omega) = \sum_{i=1}^n |STFT_i(t, \omega)|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^n STFT_i(t, \omega)STFT_k^*(t, \omega). \quad (3.24)$$

gdje drugi član predstavlja kros-članove. Detaljna analiza osobina kratkotrajne Fourier-ove transformacije može se naći u [44]. Spektrogram je osnovni alat koji smo koristili u razvoju našeg detektora.

3.2.2 Wigner-ova distribucija

Pošto spektrogram ne može dati idealnu vremensku i frekvencijsku koncentraciju, druge, sofisticiranije nelinearne reprezentacije su razvijene u poslednjih 20 godina. Wigner-ova distribucija $WD(t, \omega)$ predstavlja najznačajniju kvadratnu TF distribuciju. Ona se definiše kao Fourier-ova transformacija lokalne autokorelacione funkcije $R(t, \tau)$ posmatranog signala, po promjenljivoj τ [43]:

$$R(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (3.25)$$

$$WD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.26)$$

Kod Wigner-ove distribucije zapaža se poboljšanje vremenske i frekvencijske rezolucije. Međutim, nedostatak Wigner-ove distribucije su jako izraženi kros-članovi. Na primjer, za signal sa dvije komponente $z(t) = x(t) + y(t)$ slijedi:

$$WD_z(t, \omega) = WD_x(t, \omega) + WD_y(t, \omega) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) y^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}. \quad (3.27)$$

Treća komponenta je neželjeni oscilatorni kros-član između komponenti signala. U slučaju M -komponentnog signala, broj kros-članova je $M(M - 1)/2$. Napomenimo da se ne mora raditi o multikomponentnom signalu, jer i kod monokomponentnog signala dolazi do interferencije komponenti signala lociranih u različitim vremenskim trenucima na različitim frekvencijama. Ovi kros-članovi su veoma izraženi i mogu pokriti korisne TF komponente. Dizajn TF transformacija koje redukuju kros-članove je težak zadatak [42].

Signali koje produkuju nelinearni haotični oscilatori mogu imati mnogo komponenti. Zato, da bi izbjegli jak uticaj kros-članova, koristimo STFT (to jest spektrogram) za TF reprezentaciju signala. Naglasimo da su efikasne softverska i hardverska realizacija STFT i spektrograma široko primijenjene u praksi. Dalje, pošto su STFT i spektrogram vremensko promjenljivi oblici spektra signala, mi pretpostavljamo da svi zaključci u vezi sa FT i periodogramom u različitim bifurkacionim režimima izvedeni u [24] mogu biti primjenjeni i ovdje.

3.2.3 Diskretna forma vremensko-frekvencijskih distribucija

Primjena TF distribucija u konkretnim slučajevima, kada signal nije dat analitički, zahtijeva upotrebu računara, pa je neophodno izvršiti odgovarajuću diskretizaciju signala

i distribucija. Kako je većina distribucija zasnovana na Fourier-ovoj transformaciji, to se na osnovu teoreme o odabiranju i dobro poznatih metoda za diskretizaciju ove transformacije mogu izvesti uslovi pod kojima posmatrani signal može biti diskretizovan.

U definicionom izrazu (3.10) zapažamo Fourier-ovu transformaciju proizvoda signala i funkcije prozora. Da bismo mogli izvršiti diskretizaciju, tako da ne dođe do preklapanja spektralnih komponenti neophodno je da ovaj složeni signal bude signal sa ograničenim frekvencijskim opsegom i tada možemo definisati maksimalni korak odabiranja kao

$$\Delta t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_{\max}}, \quad (3.28)$$

gdje je sa $\omega_{\max}$ označena maksimalna frekvencija (po apsolutnoj vrijednosti) prisutna u složenom signalu. Da bi proizvod signala bio ograničenog opsega, moraju oba činioca biti ograničenog opsega, to jest mora biti zadovoljeno: $X(\omega) = 0$ za $|\omega| > B_x$ i $W(\omega) = 0$ za $|\omega| > B_w$, gdje je sa $X(\omega)$ označena Fourier-ova transformacija signala, a $W(\omega)$ Fourier-ova transformacija prozorske funkcije. Spektar proizvoda ova dva signala je ograničen, odnosno jednak je nuli za $|\omega| > B_x + B_w$. Dakle, korak odabiranja biramo tako da zadovoljava:

$$\Delta t < \frac{\pi}{(B_x + B_w)}, \quad (3.29)$$

što je nešto manja vrijednost u odnosu na maksimalni period odabiranja signala $x(t)$. Diskretizacija se vrši po promjenljivoj τ , integral prelazi u sumu, ali granice sume su beskonačne. Svi realni signali su konačnog trajanja, a nema smisla uzimati funkciju prozora beskonačnog trajanja, tako da se u konkretnim slučajevima mogu primijeniti konačne granice sume, pa izraz (3.10) postaje:

$$STFT(t, \omega) \approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=N_1}^{N_2} x(t + m\Delta t) w^*(m\Delta t) e^{-j\omega m\Delta t}. \quad (3.30)$$

Na osnovu gornje formule možemo koristeći se računarom sračunati vrijednost STFT u proizvoljnoj tački TF ravni, odnosno za proizvoljno zadate vrijednosti promjenljivih t i ω . Treba naglasiti da je usled diskretizacije STFT postala periodična funkcija po promjenljivoj ω sa periodom $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$, tako da ima smisla tražiti vrijednosti STFT samo na osnovnom periodu te funkcije po ω osi. S druge strane signal $x(t)$ je vremenski ograničen, pa je i interval po vremenskoj osi od interesa za računanje STFT konačan. Uobičajeno je da se ova dva intervala podijele na konačan broj tačaka, odnosno

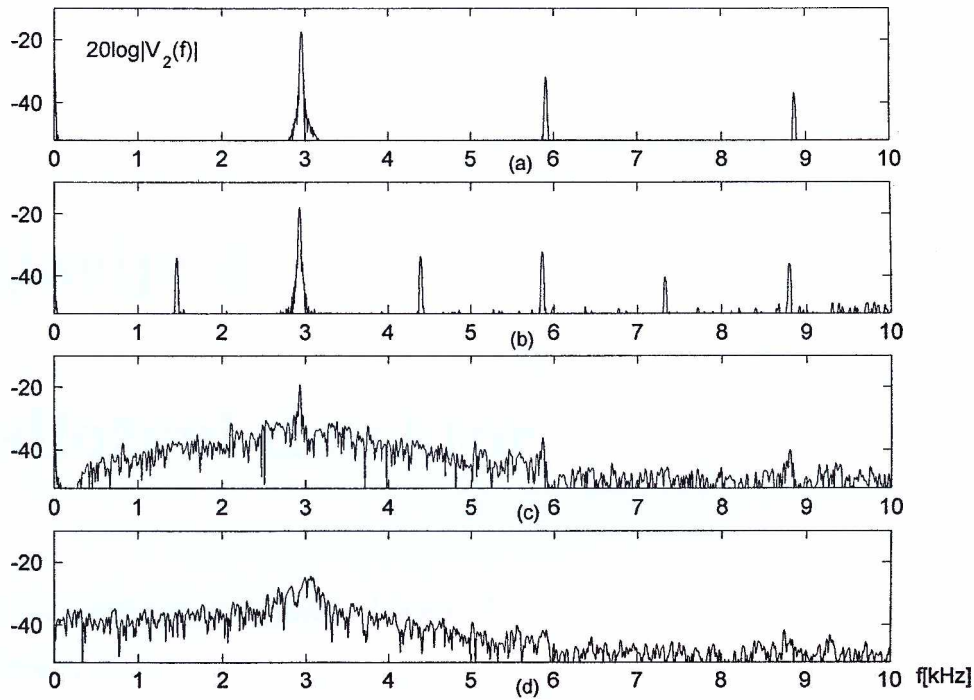
formiramo mrežu u TF ravni i računamo vrijednost distribucije samo u čvorovima mreže kojih je konačno mnogo, pa kompletnu operaciju određivanja TF distribucije možemo obaviti primjenom računara. Za računanje Fourier-ove transformacije pogodno je koristiti algoritme FFT čime se uveliko smanjuje broj potrebnih računskih operacija.

3.3 Spektar signala iz haotičnih oscilatora

Tema ove teze je otkrivanje haotičnih stanja u nelinearnim oscilatornim kolima. Nelinearni haotični oscilatori ispoljavaju za različite vrijednosti parametara različite oblike ponašanja. U dinamici ovih sistema zapažaju se ravnotežna tačka, periodični, kvaziperiodični i haotični atraktori. Različitim oblicima signala u vremenskom domenu odgovaraju različiti oblici u frekventnom domenu. Spektri periodičnih i haotičnih signala se kvalitativno razlikuju. Spektar periodičnog signala je diskretan, a haotičnog signala je kontinualan. Da bi opisali spektar signala iz haotičnih oscilatora razmatramo Chua-ino oscilatorno kolo sa Slike 1.6 sa sledećim skupom parametara: $L = 18\text{mH}$, $C_1 = 10\text{nF}$, $C_2 = 100\text{nF}$, $G_a = -757.576\mu\text{S}$, $G_b = -409.091\mu\text{S}$, $E = 1\text{V}$, $R_0 = 12.5\Omega$. Parametar G je bifurkacioni parametar i može uzimati vrijednosti iz opsega $G \geq 500\mu\text{S}$. Chua-in oscilator sa ovim vrijednostima parametara detaljno je analiziran u [24]. Napomenimo da je većina simulacija u ovom radu izvedena na primjeru Chua-inog oscilatora. To je poznato i dobro proučeno kolo, pa je dobijene rezultate lako provjeriti i porediti sa odgovarajućom teorijom i već objavljenim radovima u naučnim časopisima.

Kad je provodnost $G = 530\mu\text{S}$ Chua-in oscilator je u periodičnom režimu. Talasni oblici napona i struja su gotovo sinusoidalni, a u faznom prostoru se zapaža atraktor sličan krugu - takozvani period 1 granični ciklus. Spektar snage signala $v_1(t)$ prikazan je na Slici 3.1a. Spektar je diskretan, sadrži oštar pik na frekvenciji koja približno iznosi 3kHz i komponente koje odgovaraju višim harmonicima. Većina snage skoncentrisana je u glavnoj spektralnoj komponenti, dok viši harmonici imaju snagu koja je preko 30dB manja od snage fundamentalne komponente.

Kad je $G = 537\mu\text{S}$ talasni oblici napona i struje se ponavljaju poslije približno 0.67ms, a u faznom prostoru se uočava period 2 granični ciklus. Ovaj periodični signal ima osnovnu frekvencijsku komponentu na približno 1.5kHz. Naglasimo, međutim, da je većina snage



Slika 3.1: Spektar snage za talasni oblik napona $v_2(t)$ iz Chua-inog oscilatora. (a) $G = 530\mu\text{S}$ (period 1 granični ciklus) - diskretan spektar snage; (b) $G = 537\mu\text{S}$ (period 2 granični ciklus) - diskretan spektar snage; (c) $G = 550\mu\text{S}$ (spiralni Chua-in haotični atraktor) - širokopojasni spektar snage; (d) $G = 565\mu\text{S}$ (duplo - spiralni Chua-in haotični atraktor) - širokopojasni spektar snage.

signala skoncentrisana na frekvenciji 3kHz (Slika 3.1b).

Spiralni Chua-in atraktor ($G = 550\mu\text{S}$) je kvalitativno različit od ovih periodičnih signala. Aperiodična priroda talasnih oblika napona i struje u vremenskom domenu reflektovana je u širokopojasnom spektru snage koji liči na šum. Snaga signala nije više skoncentrisana u malom broju frekvencijskih komponenti, nego je raspodijeljena na široki opseg frekvencija (Slika 3.1c).

Za $G = 565\mu\text{S}$ uočava se duplo spiralni Chua-in haotični atraktor u faznom prostoru. Odgovarajući talasni oblici imaju, takođe, širokopojasni spektar snage koji liči na šum, kao što se vidi na Slici 3.1d.

Dakle, spektar snage periodičnog i haotičnog signala se bitno razlikuju. Ova činjenica je polazna tačka u razvijanju predloženog detektora haosa [45] u nelinearnim oscilatorima.

Poglavlje 4

Predloženi detektor

Haotični oscilatori ispoljavaju bogato dinamičko ponašanje. Zavisno od vrijednosti parametara u faznom prostoru zapaža se ravnotežna tačka, periodični, kvaziperiodični ili haotični atraktor. Promjena vrijednosti parametara dovodi do bifurkacija, poslije kojih nastaje promjena u karakteru rješenja haotičnih jednačina. Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, postoje bitne razlike u spektru signala koji odgovaraju različitim ustaljenim stanjima. Ako je na neki način moguće kvantifikovati tu razliku, onda se ta mjera ili kvantifikacija može iskoristiti u detekciji haotičnih odnosno periodičnih stanja u nelinearnim oscilatorima. Zanimljivo je razmatrati šta se dešava tokom ovih promjena u vremenu, odnosno pratiti spektralni sadržaj signala tokom vremena. Najprirodniji način da to uradimo je da koristimo TF reprezentaciju signala od interesa.

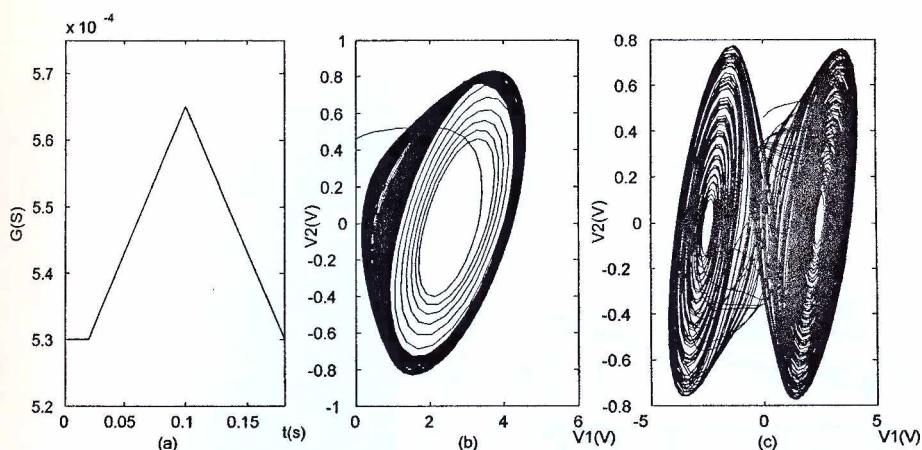
4.1 Detekcija haosa u Chua-inom oscilatoru

Da bi objasnili osnovnu motivaciju za predloženi detektor haotičnog stanja, razmatramo Chua-in oscilator sa sledećim skupom parametara: $L = 18\text{mH}$, $C_1 = 10\text{nF}$, $C_2 = 100\text{nF}$, $G_a = -757.576\mu\text{S}$, $G_b = -409.091\mu\text{S}$, $E = 1\text{V}$, $R_0 = 12.5\Omega$. Parametar G može uzimati vrijednosti iz opsega $G \geq 500\mu\text{S}$. Naglasimo da je globalno ponašanje ovog kola analizirano u [24] za isti skup parametara. Promjenljiva provodnost G , prikazana na Slici 4.1a, je bifurkacioni parametar. Promjena vrijednosti parametra G dovodi do takozvanog period-udvostručavajućeg puta u haos. Ovaj način prelaska dinamičkih sistema iz periodičnog stanja u haos je najviše zapažen i dobro proučen.

Logaritam magnitude STFT za ovaj put u kaos je prikazan u TF ravni na Slici 4.2a. Za vizuelizaciju je upotrijebljen logaritam magnitude STFT da bi se jasno vidjele brojne slabe komponente signala. Signal od interesa je $v_1(t)$. Slični rezultati su dobijeni za $v_2(t)$ i $i_3(t)$. Za razvoj STFT upotrijebljen je Hanning-ov prozor širine $T = 3\text{ms}$.

Za $t \in [0, 20\text{ms}]$ provodnost G je konstantna i jednaka $530\mu\text{S}$. U ovom intervalu kolo ispoljava kretanje po stabilnom period 1 graničnom krugu. U TF ravni signal ima jednosmjernu (DC) komponentu i komponente koje odgovaraju glavnoj frekvenciji na približno 3kHz i višim harmonicima. Za $t \in [20\text{ms}, 100\text{ms}]$ vrijednost provodnosti G linearno raste prema $565\mu\text{S}$. Period-udvostručavajuća ili viljuškasta bifurkacija javlja se kad G dostigne vrijednost $537\mu\text{S}$. Onda, period 1 ciklus gubi stabilnost i potrebno je dvostruko više vremena da se zatvori nakon što dva puta okruži ravnotežnu tačku. Ovaj atraktor naziva se period 2 granični ciklus. Odgovarajući periodični signal ima glavnu frekvenciju na približno 1.5kHz (pola od frekvencije glavne komponente za period 1 ciklus). Dalje povećanje provodnosti G dovodi do kaskade period-udvostručavajućih bifurkacija: period 4, period 8, period 16, i tako dalje, dok orbita beskonačnog perioda bude dostignuta, poslije koje imamo kaos. U TF ravni može se vidjeti mnogo novih komponenti koje se javljaju na frekvencijama proporcionalnim frekvenciji glavne komponente i umnošcima frekvencija uvedenih kroz bifurkacioni režim. U haotičnom režimu samo se dominantna frekvencijska komponenta može lako uočiti, dok se ostale komponente javljaju u vidu strukture koja liči na šum. Ove strukture su u stvari suma beskonačno mnogo sinusoidalnih komponenti sa frekvencijama jednakim umnošcima dijelova glavne frekvencijske komponente u period 1 ciklusu. U [24] je pokazano da haotični režim počinje od $G = 541\mu\text{S}$ (u našem slučaju to je za $t = 44\text{ms}$). Ovaj tip haosa okarakterisan je spiralnim Chua-nim čudnim atraktorom prikazanim na Slici 4.1b. Kad provodnost G raste dalje, duplo-spiralni Chua-in čudni atraktor se javlja za $G = 552\mu\text{S}$. Ova vrsta atraktora je data na Slici 4.1c. Između haotičnih regiona u parametarskom prostoru Chua-inog kola, postoje opsezi bifurkacionog parametra G za koje se javlja periodično kretanje. Ovi regioni periodičnosti zovu se periodični prozori. U našem eksperimentu poslije $t = 100\text{ms}$, G linearno opada i kolo se vraća iz haotičnog u periodični režim.

Logaritam magnituda STFT za neke karakteristične trenutke je dat na desnoj strani Slike 4.2. Za $t = 20.8\text{ms}$ (Slika 4.2e) kolo je u period 1 stabilnom režimu. Zapažaju



Slika 4.1: (a) Promjenljiva provodnost G ; (b) spiralni Chua-in čudni atraktor $G = 541\mu\text{S}$; (c) duplo-spiralni Chua-in čudni atraktor $G = 552\mu\text{S}$.

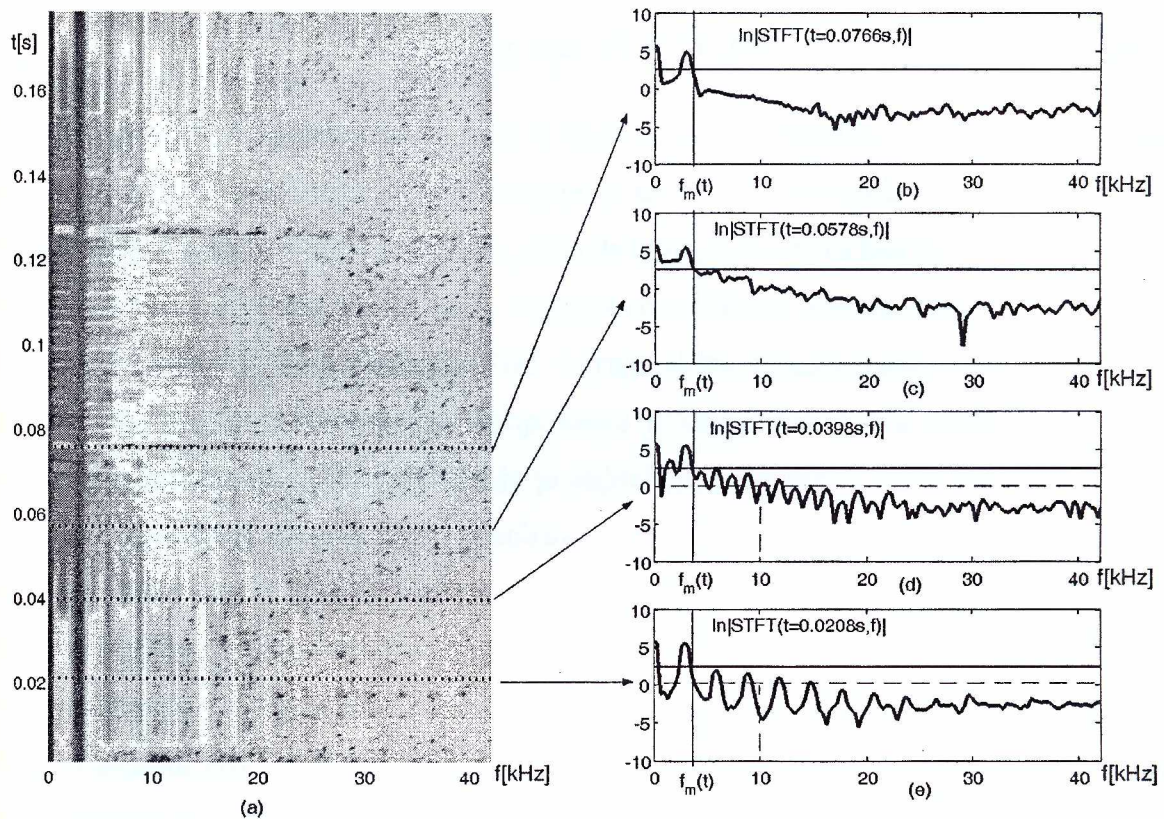
se dominantne spektralne komponente (DC i glavna sinusoidalna komponenta) i viši harmonici.

Za $t = 39.8\text{ms}$ kolo je u regionu kaskade period-udvostručavajućih bifurkacija i može se vidjeti mnogo spektralnih maksimuma u frekventnom domenu (Slika 4.2d). Pored subharmonika $f = 1.5\text{kHz}$ (period 2 kretanje) koji se sada javlja, spektar sadrži pikove na frekvencijama koje odgovaraju linearnoj kombinaciji subharmonika i glavne frekvencije. Potrebno je naglasiti da su svi "novi" spektralni pikovi mali u poređenju sa DC i glavnom spektralnom komponentom. Prema tome, komponente nastale period-udvostručavajućim bifurkacijama su sinusoide u regionu iznad glavne spektralne komponente i između DC i glavne spektralne komponente.

Za $t = 57.8\text{ms}$ kolo je u haotičnom režimu. DC i glavna spektralna komponenta nisu više dominantne kao u prethodna dva slučaja (Slika 4.2c). Važno je naglasiti da je spektralni sadržaj u oblasti između dva dominantna pika povećan i istog je reda magnitude kao dominantne komponente.

TF reprezentacija za trenutak unutar periodičnog prozora je prikazana na Slici 4.2b. Spektralni sadržaj je sličan onom u slučaju stabilne periodične orbite (Slika 4.2e).

Iz ovog eksperimenta zaključujemo da se spektralni sadržaj signala između DC i glavne spektralne komponente veoma razlikuje za periodične i haotične signale. To znači da se ovaj dio TF reprezentacije signala može koristiti u formiranju odgovarajuće mjere, koja



Slika 4.2: Period-udvostručavajući put u kaos: (a) STFT; (b) logaritam magnitude STFT za $t = 76.8\text{ms}$ - periodični prozor; (c) logaritam STFT za $t = 57.8\text{ms}$ - kaos; (d) logaritam magnitude STFT za $t = 39.8\text{ms}$ - period-udvostručavajući interval; (e) logaritam magnitude STFT za $t = 20.8\text{ms}$ - period 1 orbita.

će kvantifikovati tu razliku. Dakle, specifična mjera koncentracije dijela TF reprezentacije signala između DC i glavne spektralne komponente može biti upotrijebljena kao detektor haotičnog stanja.

4.2 Algoritam 1 - brojanje do prvog maksimuma

Prvi korak u detekciji haosa je procjena frekvencije glavne spektralne komponente. U periodičnom regionu, frekvencija može biti procijenjena, na jednostavan način, kao

pozicija maksimuma u STFT, isključujući region oko DC komponente:

$$f_m(t) = \arg \max_{f > \varphi} |STFT(t, f)|, \quad (4.1)$$

gdje je φ region DC komponente koji je širok samo nekoliko odbiraka frekvencije (detalji su dati kasnije u radu). Međutim, ova frekvencija ne može biti data na isti način ako su DC i glavna spektralna komponenta vrlo blizu jedna drugoj. Onda mora biti upotrijebljena neka preciznija tehnika, kao što je ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [46]. Pošto ESPRIT i druge slične tehnike mogu biti osjetljive na aditivni šum, procjena dominantne komponente je ostvarena u dva koraka. U prvom, dominantna frekvencijska komponenta je procijenjena primjenom dvije procedure. Izlaz iz ESPRIT algoritma se uzima kao preciznija procjena frekvencije ako obje procedure daju slične rezultate. Međutim, ako se rezultati značajno razlikuju, uzima se procijenjena frekvencija iz prethodnog trenutka, pretpostavljajući da se glavna spektralna komponenta ne može značajno mijenjati unutar uskog intervala. Naglasimo da u našem eksperimentu, osim kod signala gdje se dvije spektralne komponente razlikuju za manje od jednog ili dva spektralna odbirka, nismo koristili ESPRIT algoritam. Takođe, frekvencija glavne spektralne komponente nije računata u svakom trenutku, nego samo u ekvidistantnim intervalima.

U sledećem koraku, tekuće stanje kola je procijenjeno na osnovu spektralnog sadržaja između DC i glavne spektralne komponente. Mjera haotičnog ponašanja je definisana kao:

$$m(t) = \int_0^{f_m(t)} u_{\Omega(t)}(t; f) df, \quad (4.2)$$

gdje je funkcija $u_{\Omega(t)}(t; f)$ data kao

$$u_{\Omega(t)}(t; f) = \begin{cases} 1 & |STFT(t, f)| \geq \Omega(t) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Parametar $\Omega(t)$ je izabran na takav način da odbirci STFT sa magnitudom većom od $\Omega(t)$ sadrže gotovo svu energiju signala, to jest, energija koja ostaje izvan ovog regiona je vrlo mala:

$$(1 - \varepsilon) \int_0^\infty |STFT(t, f)|^2 df = \int_0^\infty |STFT(t, f)|^2 u_{\Omega(t)}(t; f) df. \quad (4.4) \quad f. \quad (4.4)$$

U našim eksperimentima izabrano je $\varepsilon = 0.0025$, to jest., 99.75% energije signala unutar razmatranog prozora je sadržano u regionu koji ima vrijednosti veće od $\Omega(t)$. Naglasimo

da naš algoritam radi dobro za relativno širok opseg parametra ε . Izbor $\Omega(t)$ može biti ostvaren na jednostavan način. Magnitude odbiraka STFT u razmatranom trenutku su sortirane u opadajući poredak i $\Omega(t)$ je izabran kao pozicija gdje preostali dio sortirane sekvence ima energiju manju ili jednaku $\varepsilon \int_0^\infty |STFT(t, f)|^2 df$. Za navedeni primjer na Slici 4.2b-e, $\Omega(t)$ je dat kao puna horizontalna linija.

Predloženi detektor haos $m(t)$ mjeri region između DC i glavne spektralne komponente sa relativno visokom energijom. U periodičnom režimu $m(t)$ je relativno mali, jednak širini DC i glavne spektralne komponente, dok je u haotičnom regionu viši zahvaljujući dodatnim komponentama.

Naglasimo da je dobijeni odziv detektora $m(t)$ usrednjen unutar kratkog intervala oko razmatranog trenutka u cilju izbjegavanja uticaja šuma i drugih grešaka:

$$m'(t) = \frac{1}{p} \int_{t-p/2}^{t+p/2} m(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Na osnovu $m'(t)$, donosimo sledeću odluku:

$$\begin{aligned} m'(t) &\geq C(t) && \text{haotični režim} \\ m'(t) &< C(t) && \text{periodični režim.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Prag detekcije $C(t)$ može biti određen na sledeći način. U haotičnom režimu, očekivano je da je spektrogram u cijelom regionu $[0, f_m(t)]$ iznad praga detekcije. U tom slučaju, očekivana vrijednost $m'(t)$ u haotičnom režimu je blizu $f_m(t)$. Međutim, u periodičnom režimu (ili u dijelu period-udvostručavanja) vrijednosti STFT između DC i glavne spektralne komponente su male. Pretpostavljamo da su samo jednosmjerna i glavna spektralna komponenta iznad praga $\Omega(t)$ u razmatranom intervalu. Tako da je očekivani odziv detektora jednak $1.5F_w(T)$ (polovina DC komponente je u regionu negativnih frekvencija), gdje je $F_w(T)$ širina glavne latice funkcije prozora u spektralnom domenu, koja zavisi od tipa upotrijebljenog prozora i njegove širine T . Prag detekcije je tada jednak aritmetičkoj sredini između očekivanih vrijednosti odziva detektora u periodičnom i haotičnom regionu:

$$C(t) = \frac{f_m(t) + 1.5F_w(T)}{2}. \quad (4.7)$$

Pretpostavljamo da je širina komponenti signala poznata i određena upotrijebljenom funkcijom prozora. U slučaju diskretizovanog signala upotrijebljenog u numeričkim kalkulacijama, primjena Hanning-ovog prozora daje tri nenulta odbirka frekvencije.

Pretpostavimo da očekivana vrijednost $m'(t)$ u periodičnom režimu, za Hanning-ov prozor širine T , jednaka 5 frekvencijskih odbiraka ($5/T$): 3 od glavne komponente i 2 od DC komponente. Tada je prag detekcije:

$$C(t) = \frac{f_m(t) + \frac{5}{T}}{2}. \quad (4.8)$$

Algoritamski koraci su dati u preglednom obliku u Tabeli 4.1. Odzivi detektora ($m(t)$ i $m'(t)$) kao i prag detekcije $C(t)$ mjereni su u Hz.

U našim simulacijama korišćen je Hanning-ov prozor. Naglasimo, međutim, da se može koristiti bilo koji prozor koji zadovoljava osobinu da su u frekventnom domenu bočne latice potisnute što je više moguće.

Komentari na algoritam. 1. Najvažnija detalj u algoritmu je izbor parametra ε . Ako je izabrano ε veoma malo, funkcija odziva detektora će procijeniti da je cijeli interval haotičan. Međutim, magnitude odbiraka TF reprezentacije između DC i glavne spektralne komponente su najmanje jedan red veličine veće u haotičnom nego u periodičnom režimu. Ovo obezbjeđuje sigurnu granicu za određivanje tekućeg stanja u kolu.

2. Region period-udvostručavajućih sekvenci je zahtjevniji za procjenu. Za period 2, period 4, period 8 orbite može biti sprovedena ista procedura. Nakon što je detektovan haotični režim, $\Omega(t)$ može biti smanjen za jedan red magnitude, dok frekvencijski opseg, nad kojim je odziv računat, može biti povećan (na primjeru datom na Slici 4.2d, frekvencijski region za razvoj druge mjere može biti proširen do 10kHz). U slučaju stabilnih periodičnih orbita (uključujući periodične prozore) očekivana vrijednost za $m'(t)$ je povećana za širinu jedne ili dvije spektralne komponente, u poređenju sa slučajem kad je računanje izvršeno u intervalu $[0, f_m(t)]$. Međutim, u period-udvostručavajućem regionu on će biti povećan nekoliko puta, pošto će biti detektovane brojne dodatne sinusoidalne komponente. Ova vrijednost je označena isprekidanom linijom na Slikama 4.2c i 4.2d. U oba slučaja, prvi korak će detektovati da je signal periodičan ili u period-udvostručavajućem intervalu. Period-udvostručavajući interval će biti detektovan u drugom koraku. Naglasimo da period 16 i druge orbite višeg reda ne mogu biti detektovane ovom procedurom i one će biti detektovane kao haotični režim. Ovo nije ozbiljan nedostatak, pošto takve periodične orbite su veoma slične haotičnom ponašanju.

3. U osnovnom obliku algoritma parametar $\Omega(t)$ je izabran na takav način da odbirci STFT sa magnitudom većom od $\Omega(t)$ sadrže gotovo svu energiju signala. Umjesto

Korak 1. Računanje STFT koristeći (3.10).

Korak 2. Procjena frekvencije dominantne spektralne komponente.

2a. Pozicija maksimuma TF reprezentacije je izabrana kao dominantna frekvencija u početnom trenutku $t = t_0$.

2b. Za sledeće trenutke, frekvencija glavne spektralne komponente $f_m(t)$ je procijenjena upotrebom ESPRIT, $f'_m(t)$, i pozicija maksimuma (4.1), $f''_m(t)$, respektivno.

2c. Rezultati dobijeni ESPRIT algoritmom su uzeti kao frekvencija dominantne spektralne komponente ako $|f'_m(t) - f''_m(t)| \leq \rho$, gdje je $\rho = 2/T$ (dva frekvenzijska odbirka). Inače, biramo vrijednost koja je bliža procijenjenoj frekvenciji za prethodni trenutak:

$$f_m(t) = \begin{cases} f'_m(t) & \text{za } |f'_m(t) - f_m(t-1)| < |f''_m(t) - f_m(t-1)| \\ f''_m(t) & \text{inače} \end{cases}$$

Korak 3. Određivanje $\Omega(t)$.

3a. Sortiranje odbiraka STFT u cilju dobijanja sekvence opadajuće magnitude.

3b. Parametar $\Omega(t)$ je izabran kao vrijednost STFT takva da ostatak (manjih) odbiraka STFT u posmatranom trenutku ima energiju manju od $\varepsilon \int_0^\infty |STFT(t, f)|^2 df$.

Korak 4. Računanje funkcije odziva detektora.

4a. Računanje $m(t)$ pomoću (4.2).

4b. Usrednjavanje odziva u lokalnom susjedstvu, (4.5). U našem eksperimentu lokalno susjedstvo je 5% od širine korišćenog prozora.

Korak 5. Određivanje tekućeg stanja prema (4.8).

Tabela 4.1: Algoritam za detekciju haotičnog stanja.

ukupne energije u algoritmu se može koristiti dio energije signala između DC i glavne spektralne komponente. Ako je većina energije signala smještena upravo u ovoj oblasti neće doći do promjene ni u rezultatima ni u parametrima algoritma. Takvi su primjeri period-udvostručavajućeg i kvaziperiodičnog puta u kaos kod Chua-inog oscilatora. Ako je značajan dio energije u drugom dijelu TF ravni (primjer intermitentnog puta u kaos kod Chua-inog oscilatora) isti odziv detektora dobija se za različite vrijednosti parametra ε . Naime da bi dobili isti odziv detektora i kod primjene ukupne energije i kod primjene samo dijela energije mora da bude izabrana ista vrijednost parametra $\Omega(t)$. To znači da je ε manje ako se u račun uzima dio energije, a veće ako se uzima ukupna energija. Odnosno, za istu vrijednost ε parametar $\Omega(t)$ je veći kad se koristi dio energije i vrijednost odziva $m(t)$ je manja.

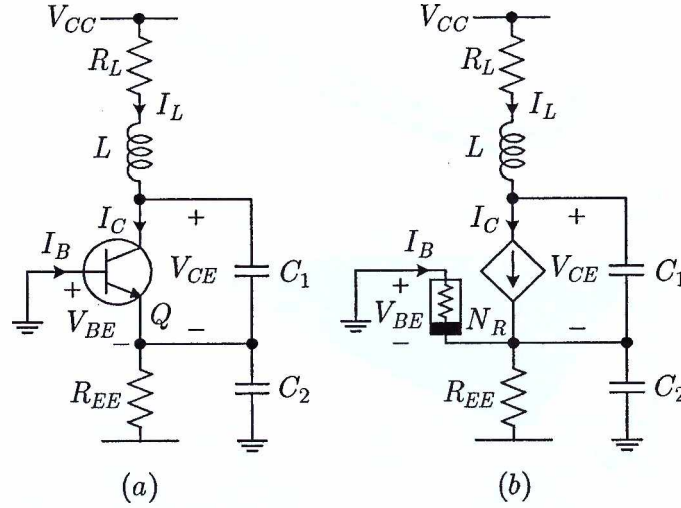
4. Odluka da se usvoji ova vrsta procedure donijeta je nakon nekoliko pokušaja procjene ponašanja kola zasnovanih na nekim klasičnim mjerama koncentracije TF reprezentacije [47], [48], koje nisu dale tačne rezultate. Postoji nekoliko razloga za to, a glavni je vrlo komplikovana struktura signala sa brojnim sinusoidalnim komponentama različite magnitude i sa strukturom sličnom šumu. Većina mjera koncentracije daju istu ili sličnu koncentraciju za haotični interval i za interval sa brojnim komponentama harmonika koji se javljaju u period-udvostručavajućim bifurkacijama. Prema tome, one ne mogu biti upotrijebljene za razlikovanje ova dva regiona.

U sledećem poglavlju, razmatrana je primjena predloženog detektora u slučaju nekoliko najzastupljenijih puteva u kaos na primjerima poznatih haotičnih sistema. Takođe, u nastavku će biti data i analiza predloženog algoritma u slučaju signala zahvaćenog šumom.

4.3 Detekcija haosa u Colpitts-ovom oscilatoru

Colpitts-ov oscilator je jednostavno električno kolo koje se često koristi u komunikacijama. Tranzicija u kaos u ovom oscilatoru praćena je pojavom više periodičnih regiona različite periode. TF reprezentacija ove tranzicije u kaos razlikuje se u odnosu na slučaj razmatran u prethodnoj sekciji, kao što ćemo vidjeti u nastavku.

Colpitts-ov oscilator koji mi razmatramo prikazan je na Slici 4.3a. Ako pretpostavimo, kao u [52], da bipolarni tranzistor radi u direktnom aktivnom režimu i u zakočenju,



Slika 4.3: (a) Colpitts-ov oscilator sa bipolarnim tranzistorom; (b) njegovo ekvivalentno kolo.

možemo modelovati tranzistor kao naponom kontrolisani otpornik N_R (struja kroz otpornik je linearna izlomljena funkcija napona na otporniku) i linearni strujom kontrolisani strujni izvor, kao na Slici 4.3b. Onda, kolo može biti opisano sistemom od tri autonomne jednačine stanja:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{CE}}{dt} &= i_L - I_C \\ C_2 \frac{dv_{BE}}{dt} &= -\frac{V_{EE} + v_{BE}}{R_{EE}} - i_L - I_B \\ L \frac{di_L}{dt} &= V_{CC} - v_{CE} + v_{BE} - i_L, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdje je karakteristika nelinearnog otpornika N_R data sa:

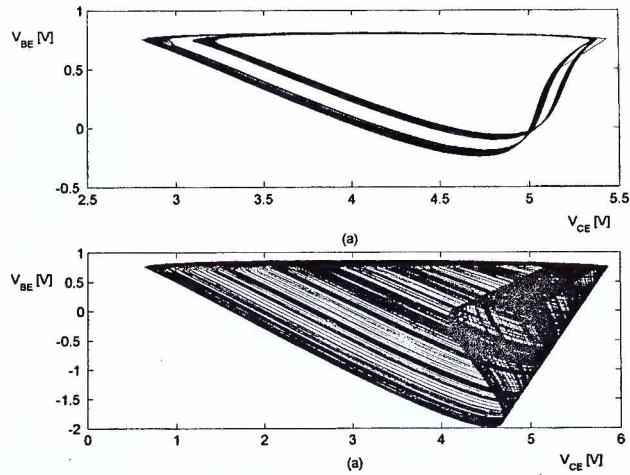
$$I_B = \begin{cases} 0 & \text{ako } v_{BE} \leq V_{TH} \\ \frac{v_{BE} - V_{TH}}{R_{0N}} & \text{ako } v_{BE} > V_{TH} \end{cases}$$

$$I_C = \beta_F I_B. \quad (4.10)$$

V_{TH} je napon praga, R_{0N} otpornost spoja baza-emitor za male signale i β_F direktno strujno pojačanje.

Sa odgovarajućim izborom parametara ovaj oscilator ispoljava haotično ponašanje.

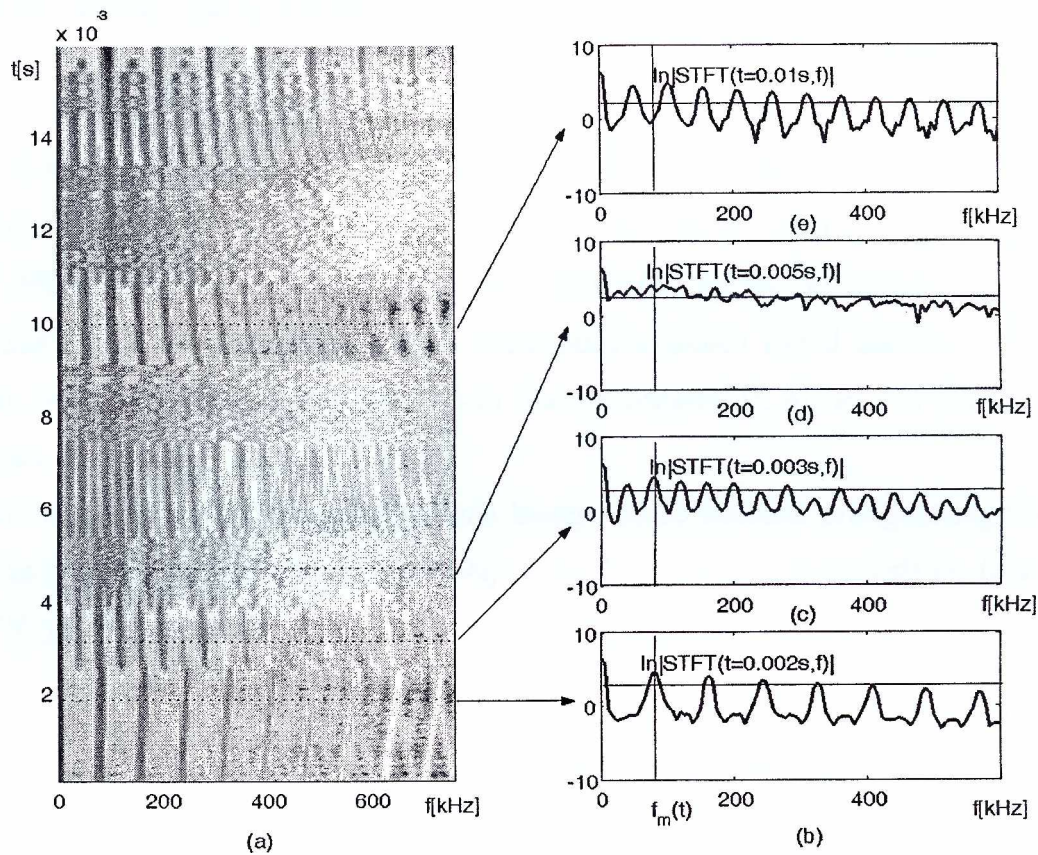
Razmatramo ponašanje Colpitts-ovog oscilatora sa parametrima kao u [52]: $C_1 = 54\text{nF}$, $C_2 = 54\text{nF}$, $L = 98.5\mu\text{H}$, $R_{EE} = 400\Omega$, $V_{EE} = -5\text{V}$, $V_{CC} = 5\text{V}$, $\beta_F = 255$,



Slika 4.4: (a) Period 2 atraktor ($R_L = 57\Omega$); (b) haotični atraktor ($R_L = 35\Omega$).

$R_{0N} = 100\Omega$, $V_{TH} = 0.75V$ i otpornošću R_L koja se linearno mijenja u opsegu od 67Ω do 5Ω . Otpornost R_L je bifurkacioni parametar, a scenario prelaza u kaos je period-udvostručavajući. Promjenom parametra R_L u vremenu mijenja se stanje sistema, a time i spektralni sadržaj signala [53],[54].

Razmatrana je STFT signala $v_{BE}(t)$ i prikazana je na Slici 4.5a. Slični rezultati dobijaju se i za ostale signale iz kola. Za R_L od 67Ω do 57Ω oscilator ispoljava periodično kretanje sa osnovnom frekvencijom $88kHz$. U TF ravni vide se jednosmjerna komponenta, osnovna frekvencija i njeni umnošci. Logaritam magnitude STFT signala za $R_L = 59\Omega$ ($t = 2ms$) prikazan je na Slici 4.5b. Smanjivanjem otpornosti dolazi do period-udvostručavajuće bifurkacije. U faznom prostoru pojavljuje se periodični atraktor kome je potrebno dvostruko više vremena da se zatvori na samog sebe (Slika 4.4a). U TF ravni sada se vidi i subharmonik (intenziteta manjeg od intenziteta osnovnog harmonika) i njegovi umnošci (Slika 4.5c). Nakon više period-udvostručavajućih bifurkacija sistem ulazi u kaos (Slika 4.4b). U TF ravni između jednosmjerne komponente i osnovnog harmonika postoji mnogo komponenti čiji je intenzitet približno jednak intenzitetu ove dvije. Logaritam magnitude STFT signala za $R_L = 48\Omega$ ($t = 5ms$) vidi se na Slici 4.5d. Daljim smanjivanjem parametra, uočava se da za određene opsege vrijednosti tog parametra oscilator ispoljava periodično kretanje. To su periodični prozori (Slika 4.5e). Poslije njih opet se javlja kaos. Konačno, pri $R_L = 9\Omega$, oscilator se vraća u periodičan režim.



Slika 4.5: (a) STFT; (b) logaritam magnitude STFT za $t = 2\text{ms}$ - period 1 ciklus; (c) Logaritam magnitude STFT za $t = 3\text{ms}$ - period 2 ciklus; (d) logaritam magnitude STFT za $t = 5\text{ms}$ - kaos; (e) logaritam magnitude STFT za $t = 10\text{ms}$ - periodični prozor.

Posmatrajmo Sliku 4.5a. U pojedinim periodičnim režimima između DC komponente i spektralne komponente sa maksimalnom magnitudom postoji više subharmonika značajne magnitude. U takvoj situaciji, odziv detektora $m(t)$ će imati visoku vrijednost i za periodični region. Dakle, predloženi algoritam ne obezbjeđuje korektnu detekciju u ovom slučaju. Potrebno je izvršiti modifikaciju algoritma. Odnosno, formirati mjeru koja će dati različite vrijednosti u periodičnom i haotičnom regionu.

4.4 Algoritam 2 - brojanje u čitavoj ravni

Ako je u razmatranom trenutku signal periodičan, sastoji se od nekoliko sinusoida, u nizu $|STFT(t, f)|$ za svaki trenutak t , kao rezultat primjene Hanning-ovog prozora u

numeričkim simulacijama, postoji kombinacija odbiraka

$$[1/4 \ 1/2 \ 1/4]AN, \quad (4.11)$$

gdje je A amplituda sinusoide, a N širina upotrijebljenog prozora u odbircima. Naime, postojanje sinusoide u frekvencijskoj mreži rezultovaće sa tri odbirka amplitude $AN/4$, $AN/2$, $AN/4$. Amplitude ostalih odbiraka su značajno manje od amplitude odbiraka koji predstavljaju sinusoidu. Ako je u razmatranom trenutku signal haotičan amplitude odbiraka su velike (istog reda veličine kao one za sinusoidu), ali su sve približno iste vrijednosti.

U prvom koraku predloženog algoritma iskoristićemo osobinu prilagođenog filtra da odredi da li u datom nizu postoji signal čiji je oblik poznat i konvoluirati po frekvenciji $|STFT(t, f)|$ sa sekvencom:

$$B(f) = \begin{cases} 1/2 & \text{za } f = 0 \\ 1/4 & \text{za } f = \pm 1/T \\ -1/4 & \text{za } f = \pm 2/T, \pm 3/T \\ 0 & \text{za ostale } f, \end{cases} \quad (4.12)$$

za svaki trenutak t . Formiramo, dakle, konvoluciju:

$$G(t, f) = |STFT(t, f)| *_{\text{f}} B(f). \quad (4.13)$$

Oznaka $*_{\text{f}}$ označava konvoluciju po frekvenciji.

Optimalni filter za signal $\xi(t)$ koji je zahvaćen Gauss-ovim šumom je $\varphi(t) = \xi(\tau - t)$ gdje je τ dužina od $\xi(t)$. U našem slučaju izabrali smo $B(t)$ sa još četiri odbirka zato što ne želimo da razdvojimo signal od Gauss-ovog šuma, već želimo da razdvojimo signal oblika (4.11) od haotičnog režima za koji su odbirci STFT slični na bliskim frekvencijama.

Stoga će $G(t, f)$ za sinusoidu sa amplitudom A koju okružuju odbirci slične amplitude na bliskim frekvencijama sinusoide biti približno $G(t, f') = 3AN/8$, (f' je frekvencija sinusoide), dok će za haotični režim koji ima slične amplitude STFT-a na bliskim frekvencijama biti $G(t, f) \approx 0$. Kao prag detekcije $\Omega_1(t)$ uzimamo vrijednost $G(t, f)$ koja iznosi $3AN/16$, što je $3|STFT(t, f)|/8$ za frekvenciju sinusoide.

U sledećem koraku mjerimo region sa frekvencijskim sadržajem većim od praga $\Omega_1(t)$.

$$m_1(t) = \int_0^{f_{\max}(t)} u_{\Omega_1(t)}(t; f) df, \quad (4.14)$$

gdje je funkcija $u_{\Omega_1(t)}(t; f)$ data kao

$$u_{\Omega_1(t)}(t; f) = \begin{cases} 1 & G(t, f) \geq \Omega_1(t) \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \quad (4.15)$$

a $f_{\max}(t)$ je maksimalna frekvencija u datom trenutku.

Naglasimo da je dobijeni odziv detektora $m_1(t)$ usrednjen unutar kratkog intervala oko razmatranog trenutka u cilju izbjegavanja uticaja šuma i drugih grešaka:

$$m'_1(t) = \frac{1}{p} \int_{t-p/2}^{t+p/2} m_1(\tau) d\tau. \quad (4.16)$$

Odziv detektora $m'_1(t)$ ima veliku vrijednost u periodičnom regionu sa velikim brojem sinusoida, a malu vrijednost u haotičnom regionu. Međutim, u periodičnom regionu sa malim brojem sinusoida ona, takođe, ima malu vrijednost. Da bi se izbjegla mogućnost greške i donijela konačna, ispravna, odluka o stanju sistema, potrebno ju je istovremeno koristiti sa još jednom mjerom $m_2(t)$.

Funkcija $m_2(t)$ određuje frekvencijski sadržaj koji ima amplitudu veću od $\varepsilon \max |STFT(t, f)|$:

$$m_2(t) = \int_0^{f_{\max}(t)} u_{\Omega_2(t)}(t; f) df, \quad (4.17)$$

gdje je funkcija $u_{\Omega_2(t)}(t; f)$ data kao

$$u_{\Omega_2(t)}(t; f) = \begin{cases} 1 & |STFT(t, f)| \geq \Omega_2(t) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.18)$$

$f_{\max}(t)$ je maksimalna frekvencija u datom trenutku, $\Omega_2(t) = \varepsilon \max |STFT(t, f)|$. Uobičajena vrijednost za ε je 0.001. Naglasimo da algoritam dobro radi i za druge vrijednosti parametra ε .

Nakon usrednjavanja mjere $m_2(t)$ unutar kratkog intervala oko razmatranog trenutka u cilju izbjegavanja uticaja šuma i drugih grešaka, dobija se:

$$m'_2(t) = \frac{1}{p} \int_{t-p/2}^{t+p/2} m_2(\tau) d\tau. \quad (4.19)$$

Mjera $m'_2(t)$ ima veliku vrijednost u haotičnom regionu, a ima približno istu vrijednost kao $m'_1(t)$ u periodičnom regionu. Dakle, u periodičnim intervalima mjere $m'_1(t)$ i $m'_2(t)$ imaju približno iste vrijednosti, a u haotičnim intervalima njihove se vrijednosti značajno razlikuju.

Korak 1.	Računanje STFT koristeći (3.10).
Korak 2.	Računanje konvolucije $G(t, f)$ prema (4.13).
Korak 3.	Određivanje praga $\Omega_1(t)$.
Korak 4.	Računanje mjere $m'_1(t)$.
	4a. Računanje $m_1(t)$ pomoću (4.14).
	4b. Usrednjavanje odziva u lokalnom susjedstvu, (4.16). U našem eksperimentu lokalno susjedstvo je 5% od širine korišćenog prozora.
Korak 5.	Određivanje praga $\Omega_2(t)$.
Korak 6.	Računanje mjere $m'_2(t)$.
	6a. Računanje $m_2(t)$ pomoću (4.17).
	6b. Usrednjavanje odziva u lokalnom susjedstvu, (4.19).
Korak 7.	Računanje funkcije odziva detektora prema (4.20).
Korak 8.	Određivanje tekućeg stanja prema (4.21).

Tabela 4.2: Algoritam za detekciju haotičnog stanja u Colpitts-ovom oscilatoru.

Nađimo odnos ove dvije mjere:

$$m(t) = \frac{m'_2(t)}{m'_1(t)}. \quad (4.20)$$

Mjera $m(t)$ ima malu vrijednost za periodični region, a veliku vrijednost u trenucima koji pripadaju haotičnom regionu.

Odluka o stanju sistema donosi se nakon upoređenja odziva detektora $m(t)$ sa odgovarajućim pragom $C(t)$:

$$\begin{aligned} m(t) &\geq C(t) && \text{haotični režim} \\ m(t) &< C(t) && \text{periodični režim.} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Prag $C(t)$ određujemo iskustveno. U periodičnom regionu odnos dat relacijom (4.20) je približno jednak jedinici, a u haotičnom režimu je deset i više puta veći. Prag $C(t)$, prema tome, može uzimati vrijednosti iz širokog opsega, a u našim eksperimentima je $C(t) = 2$.

Koraci algoritma su prikazani u Tabeli 4.2.

Komentar na algoritam. Mjera $m'_1(t)$ može da služi i za određivanje broja sinusoida u datom signalu u određenom trenutku. Pokazuje se da dijeljenjem njene vrijednosti sa 5 dobijamo približno broj sinusoida koje čine signal u datom trenutku. Ova činjenica se

u daljim istraživanjima može iskoristiti za precizniju karakterizaciju periodičnih ciklusa (period 1, period 2, period 3,...).

Poglavlje 5

Rezultati simulacija

U ovom dijelu razmatramo odziv detektora u slučaju različitih puteva u kaos. Prvo, predstavljamo rezultate dobijene u slučaju period-udvostručavajućeg puta u kaos (već korišćen u prethodnim simulacijama). Zatim su analizirana dva druga puta u kaos: kvaziperiodični i intermitentni, takođe na primjeru Chua-inog oscilatora.

Da bi pokazali da primjena predloženog detektora nije ograničena samo na oscilatorna kola, analizirani su dobro poznati Lorenz-ov i Rossler-ov haotični sistem i logističko preslikavanje.

Uspješna primjena detektora u hiper-haotičnim sistemima, kao što je lanac od tri Chua-ina oscilatora, potvrđuje značaj predloženog detektora.

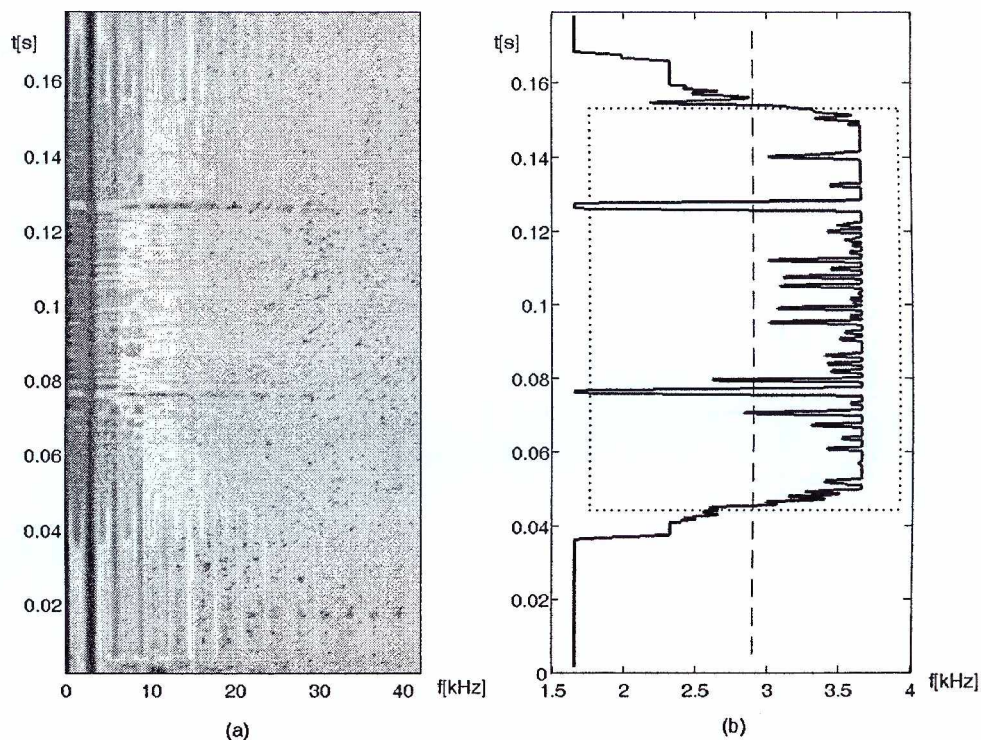
Zatim, detektor je primijenjen i za detekciju haosa u neautonomnim dinamičkim sistemima.

Na kraju je detekcija haosa u Colpitts-ovom oscilatoru ostvarena primjenom Algoritma 2.

Naglasimo da su diferencijalne ili diferencne jednačine korišćene samo za produkovanje dinamičke promjenljive, koja je onda tretirana kao eksperimentalni niz podataka.

5.1 Period-udvostručavajući put u kaos

U ovom primjeru primijenjen je već korišćen skup parametara u prethodnom poglavlju za ilustrovanje tačnosti detektora u slučaju period-udvostručavajućeg puta u kaos. Ilustracija TF reprezentacije je ponovljena na Slici 5.1a, dok je funkcija odziva detektora

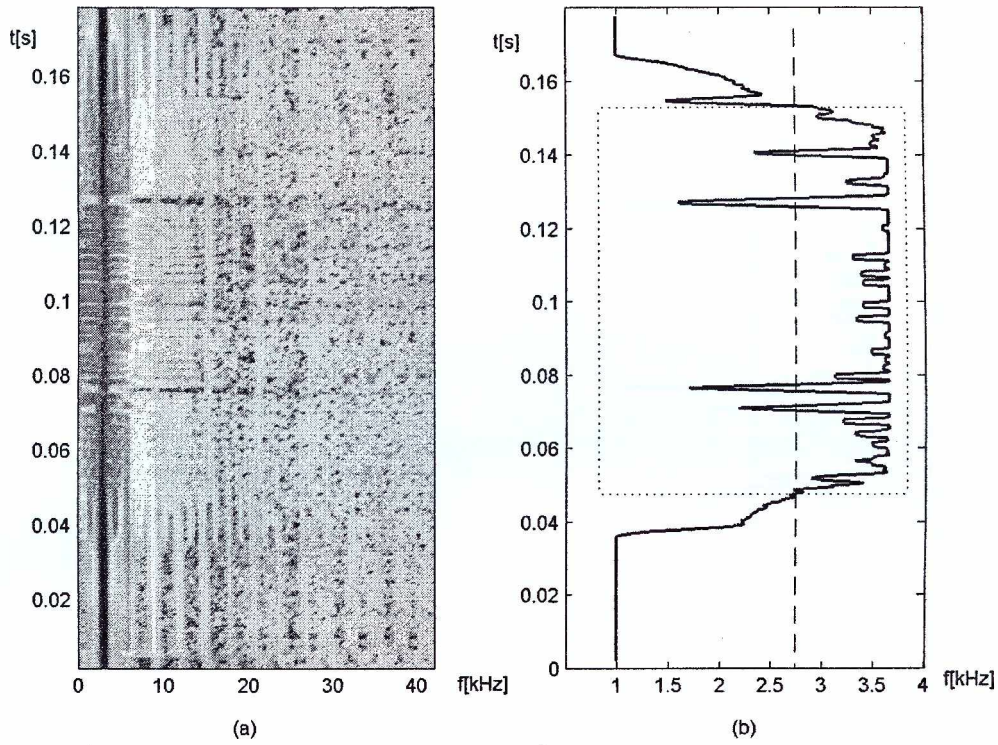


Slika 5.1: Period-udvostručavajući put u kaos za signal $v_1(t)$ iz Chua-inog oscilatora: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; tačkasti pravougaonik - region haosa u skladu sa teorijskim pretpostavkama; isprekidana linija - prag.

data na Slici 5.1b [45], [49]. U simulacijama je korišćeno $\varepsilon = 0.0025$. Vrijednost praga detekcije je $C(t) = 2.75\text{kHz}$. U primjeru na Slici 5.1 radi se o signalu napona $v_1(t)$ iz Chua-inog oscilatora. Slični rezultati se dobijaju i za signal napona $v_2(t)$ i struje $i_3(t)$ (Slike 5.2 i 5.3). Tačkasti pravougaonik predstavlja region sa haotičnim ponašanjem u skladu sa [24]. Vidi se da region gdje je odziv predloženog detektora iznad praga dobro odgovara teorijskim očekivanjima. Takođe, dva periodična prozora su korektno detektovana.

5.2 Kvaziperiodični put u kaos

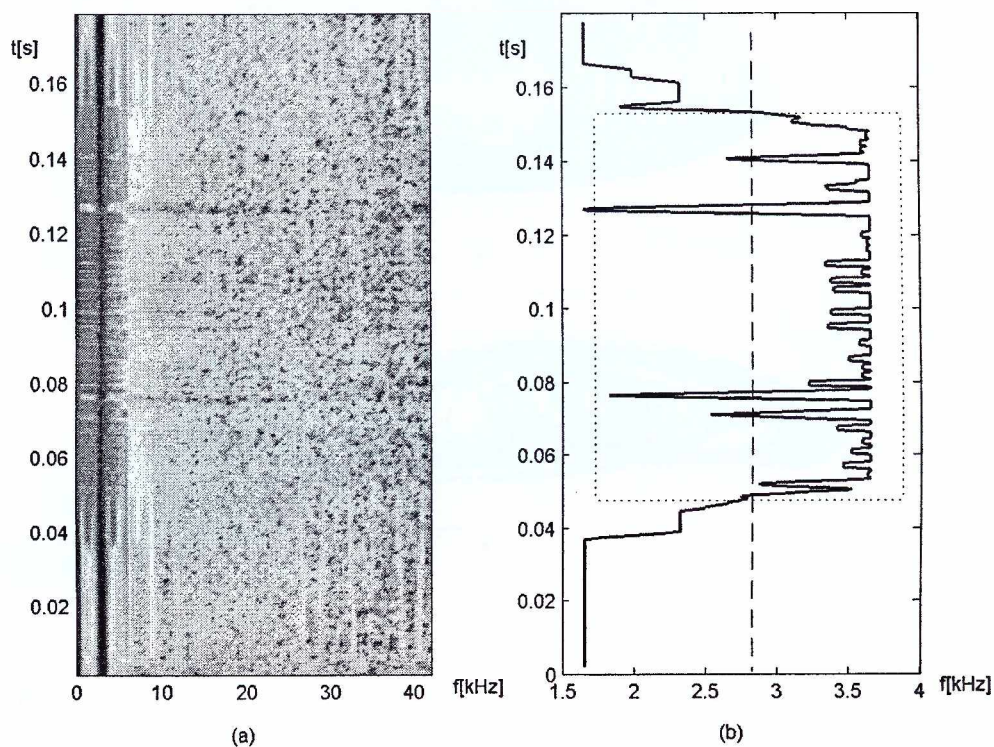
Drugi razmatrani put u kaos je kvaziperiodični ili torus breakdown put. To je najranije primijećen put u kaos, ali još uvijek nedovoljno proučen. Ovaj tip bifurkacija može biti detektovan u mnogim tipovima realnih fizičkih sistema - od strujanja u fluidima



Slika 5.2: Period-udvostručavajući put u kaos za signal $v_2(t)$ iz Chua-inog oscilatora: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; tačkasti pravougaonik - region haosa u skladu sa teorijskim pretpostavkama; isprekidana linija - prag.

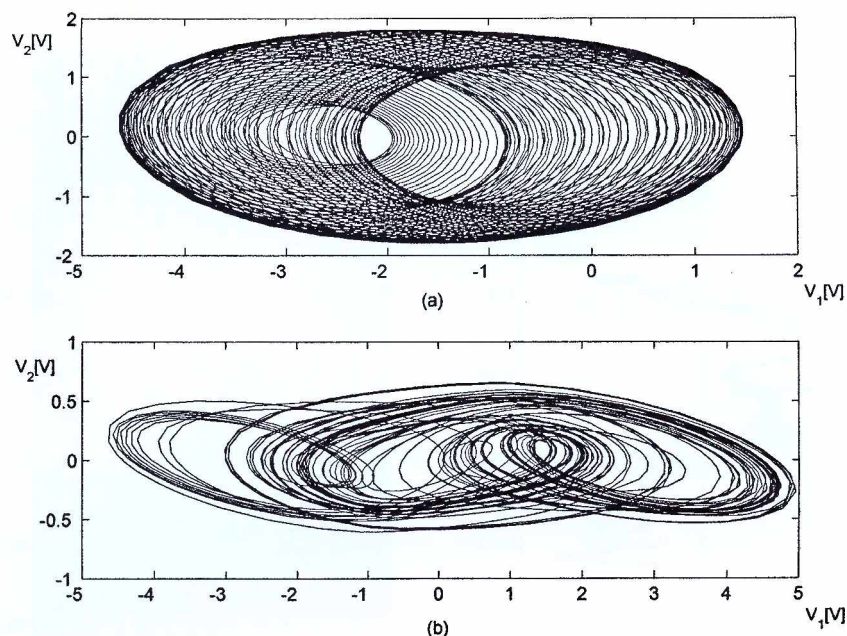
opisanih Navier-Stokes-ovim jednačinama do optičkih rezonatora opisanih talasnom jednačinom [50]. U osnovi prelaza je Hopf-ova bifurkacija koja generiše granični krug iz fiksne tačke. Granični krug postaje torus kroz sekundarnu Hopf-ovu bifurkaciju, poslije koje se torus obično uvija i postaje haotičan. U ovom putu u kaos, od torusnog atraktora poslije bifurkacija nastaju periodične orbite opadajućih perioda, to jest, prozori kvaziperiodičnog i periodičnog ponašanja se naizmjenično smjenjuju sa promjenom parametra. U kvaziperiodičnom putu u kaos sistem preživljava nekoliko Andronov-Hopf-ovih bifurkacija. Poslije jedne od njih, periodična orbita prelazi u haotični atraktor kroz niz period-udvostručavajućih bifurkacija.

Da bi razmotrili kvaziperiodični put u kaos u Chua-inom kolu, parametri $L = 7.682\text{mH}$, $C_2 = 0.3606\mu\text{F}$, $G_a = 0.599\text{mS}$, $G_b = 0.77\text{mS}$, $E = 1\text{V}$, $R_0 = 13.4\Omega$, $G = -0.7\text{mS}$ su fiksirani [25]. Parametar koji se mijenja je kapacitivnost C_1 . Ona se



Slika 5.3: Period-udvostručavajući put u kaos za signal $i_3(t)$ iz Chua-inog oscilatora: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; tačkasti pravougaonik - region haosa u skladu sa teorijskim pretpostavkama; isprekidana linija - prag.

linearno smanjuje od $C_1 = 0.0297\mu\text{F}$ ka $C_1 = 0.008\mu\text{F}$, a poslije toga povećava nazad prema početnoj vrijednosti. Ovaj put u kaos za signal napona $v_1(t)$ je prikazan na Slici 5.5, sa TF reprezentacijom na lijevoj strani i odgovarajućim odzivom detektora datim na desnoj strani [45]. Trajektorija u ustaljenom stanju za $C_1 = 0.0297\mu\text{F}$ je torus (Slika 5.4(a)), i dvije nesamjerljive frekvencije mogu biti zapažene u spektru. Tokom smanjivanja C_1 od $C_1 = 0.02\mu\text{F}$ ($t = 0.035\text{s}$) ka $C_1 = 0.0157\mu\text{F}$ ($t = 0.05\text{s}$), nastaje sekvenca periodičnih prozora opadajuće periode. Između periodičnih prozora može biti zapažen torusni atraktor. Ako se parametar C_1 i dalje smanjuje ka $C_1 = 0.0127\mu\text{F}$ ($t = 0.062\text{s}$) dobija se jedna sekvenca period-udvostručavajućih bifurkacija koja završava nastankom haotičnog atraktora (Slika 5.4b). Mnogo novih frekvencijskih komponenti zapaža se u TF ravni. U ovoj simulaciji vrijednost praga detekcije je $C(t) = 2.75\text{kHz}$, a $\varepsilon = 0.0033$. Isprekidana linija na Slici 5.5b označava aproksimativno region haosa zasnovan

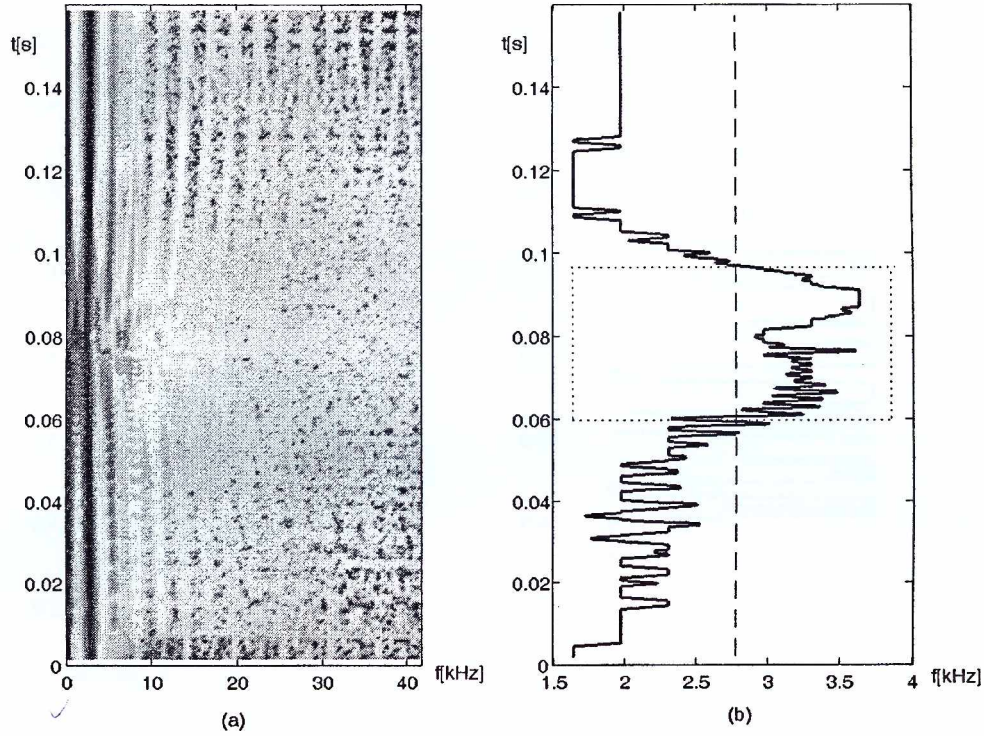


Slika 5.4: Kvaziperiodični put u kaos: (a) $C_1 = 0.0297\mu\text{F}$ - torusni atraktor; (b) $C_1 = 0.0008\mu\text{F}$ - haotični atraktor.

na teorijskim razmatranjima [25]. Vidi se da ovaj region dobro odgovara onom regionu u kojem je odziv detektora iznad praga.

5.3 Intermitentni put u kaos

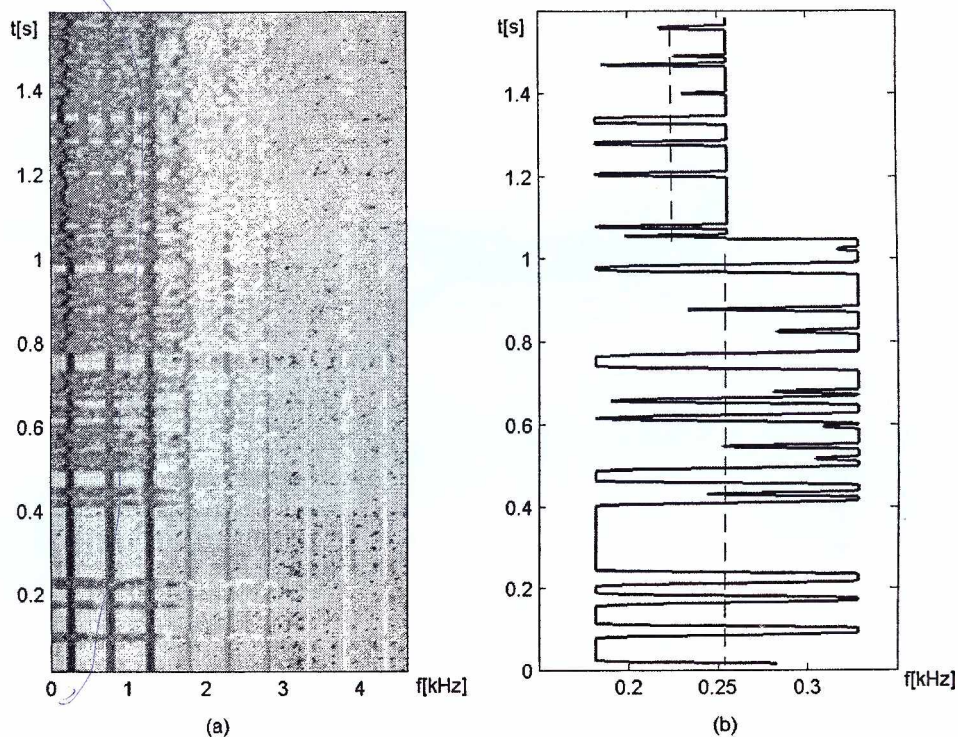
Treći put u kaos je Pomeau-Manneville-ov intermitentni put [27]. Intermitencija je fenomen gdje je signal virtualno periodičan, izuzev za neke neregularne (nepredvidive) kratke intervale. Drugim riječima, postoje naizmjenično periodični i regioni aperiodičnog ponašanja. Dinamički sistem ima periodičnu orbitu za određeni opseg nekog parametra koji se mijenja (bifurkacioni parametar). Kad se bifurkacioni parametar kreće prema kritičnoj vrijednosti, kratki neregularni intervali javljaju se između dugih regularnih intervala. Sa daljom promjenom vrijednosti parametra iregularni intervali javljaju se češće i srednje vrijeme između dva uzastopna neregularna intervala se skraćuje. Konačno, periodično kretanje se sasvim gubi i ostaje samo haotično kretanje. Fenomen pridružen ovom putu u kaos je tangentna (saddle-node) bifurkacija, koji ga čini kvalitativno različitim od druga dva puta.



Slika 5.5: Kvaziperiodični put u kaos: (a) logaritam $|STFT(t, f)|$; (b) odziv detektora-puna linija; prag detekcije - isprekidana linija; haotični region definisan prema teoriji - tačkasta linija.

U našem eksperimentu parametri $G_a = -0.756\text{mS}$, $G_b = -0.409\text{mS}$, $E = 1\text{V}$, $L = 37.56\text{mH}$, $C_2 = 215\text{nF}$, $R_0 = 30\Omega$, $G = 0.648\text{mS}$ su konstantni [51]. Parametar C_1 se linearno mijenja od $C_1 = 19.28\text{nF}$ do $C_1 = 19.246\text{nF}$. Sa smanjenjem C_1 , periodični prozori postaju sve uži.

STFT signala dobijenog za ovaj put u kaos je data na Slici 5.6, lijeva kolona, dok je odgovarajući odziv detektora dat na desnoj strani iste slike [45]. Prag detekcije je označen isprekidanom vertikalnom linijom. U ovom slučaju, frekvencija glavne spektralne komponente je računata svakih 200ms. Glavna frekvencija je 0.32kHz u intervalu $0 \leq t \leq 1\text{s}$ i 0.25kHz u intervalu $1 \leq t \leq 1.6\text{s}$. Ovo za posledicu ima različite vrijednosti praga u ova dva regiona (isprekidana linijana Slici 5.6b). U periodičnom režimu funkcija odziva detektora je mala, ispod praga, pošto detektor broji samo odbirke koji pripadaju sinusoidalnim komponentama. Međutim, u haotičnom regionu, zbog prisustva dodatnih komponenti, funkcija odziva detektora je iznad praga detekcije. Naglasimo da su svi



Slika 5.6: Interimntni put u kaos: (a) logaritam $|STFT(t, f)|$; (b) odziv detektora - puna linija; prag detekcije - isprekidana linija.

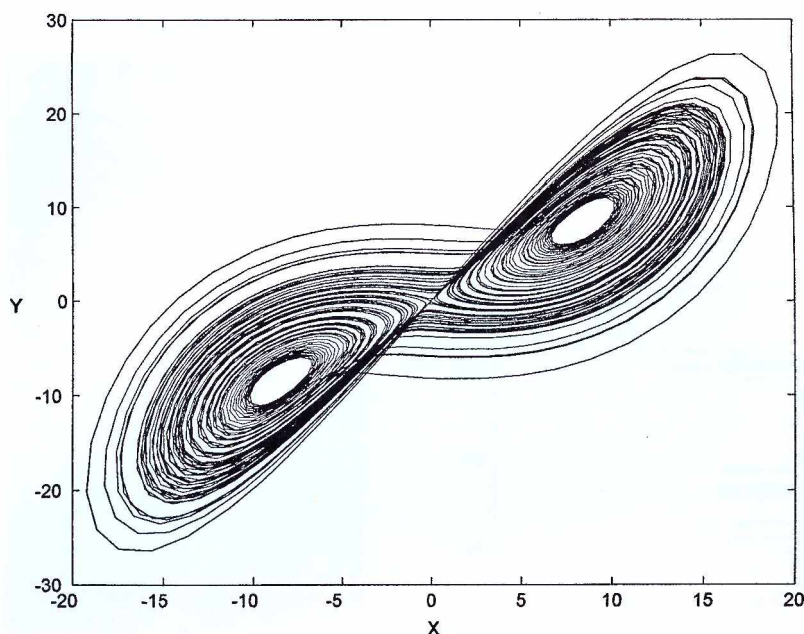
vidljivi periodični prozori detektovani.

5.4 Lorenz-ov haotični sistem

Prvi čudni atraktor otkrio je i opisao Eduard Lorenz 1963 godine [55]. Ispitujući jednačine dinamike fluida, a u cilju boljeg razumijevanja procesa u atmosferi, on je redukovao Navier-Stokes-ove jednačine na tri obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{5.1}$$

sa tri kontrolna parametra σ , r , b . Za vrijednosti parametara $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, i bez pomoći računara, Lorenz je ustanovio da trajektorije u faznom prostoru konvergiraju



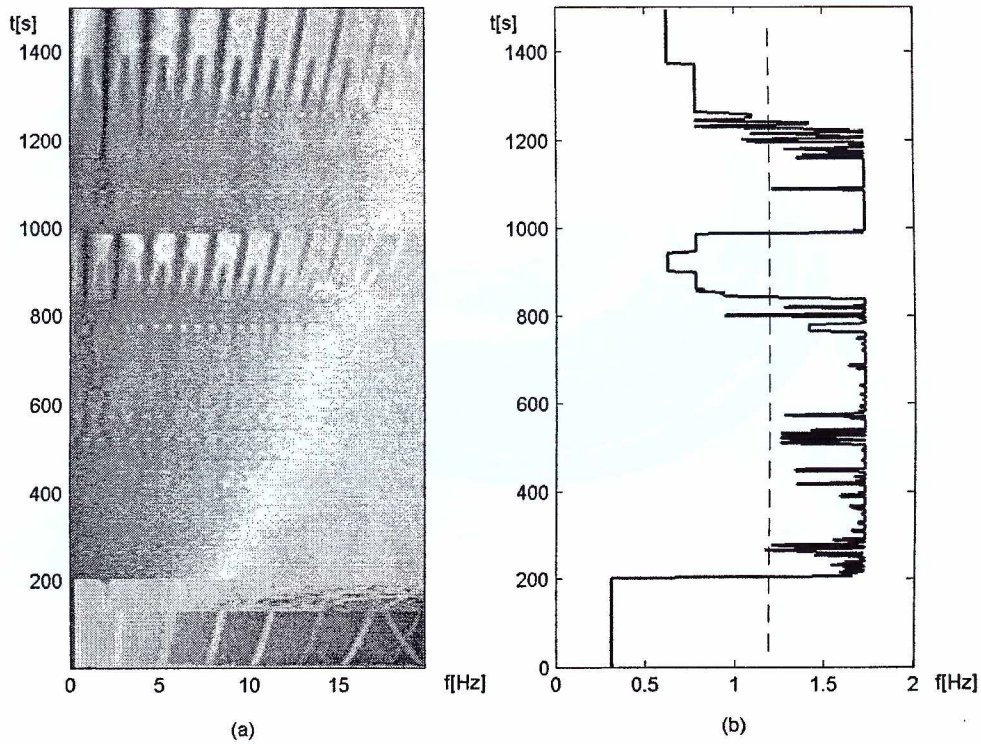
Slika 5.7: Lorenz-ov atraktor.

objektu prikazanom na Slici 5.7. Ovaj atraktor je u literaturi poznat kao "butterfly" atraktor. Naglasimo, da Lorenz-ove jednačine dobro aproksimiraju brojne druge haotične sisteme. Takođe, postoji električno oscilatorno kolo koje opisuju Lorenz-ove jednačine.

Zanimljivo je pogledati šta se dešava sa Lorenz-ovim modelom ako se dva parametra fiksiraju, a treći varira. U našim simulacijama je $\sigma = 10$ i $b = 8/3$, a parametar r linearno raste u opsegu $10 < r < 110$. U Lorenz-ovom sistemu zapaža se takozvani "subcritical" put u kaos [19]. Haos se javlja direktno iz fiksne tačke ili graničnog kruga. Predloženi detektor detektuje "subcritical" bifurkaciju u Lorenz-ovom sistemu za $r = 24.74$ ($t = 200s$). Sva rješenja Lorenz-ovih jednačina za $r > 24.74$ su haotična, ali postoje opsezi stabilnih periodičnih orbita. Predloženi detektor ih, takođe, vrlo tačno detektuje. Vizuelizacija ovog puta u kaos je za signal $x(t)$ data na Slici 5.8 sa TF reprezentacijom na lijevoj strani i odgovarajućim odzivom detektora na desnoj strani.

5.5 Rossler-ov haotični sistem

U ovom dijelu razmatramo dobro poznati Rossler-ov haotični sistem. Otto Rossler, ljekar, 1970. godine postaje zainteresovan za kaos i "otkriva" tro-dimenzionalni autonomni



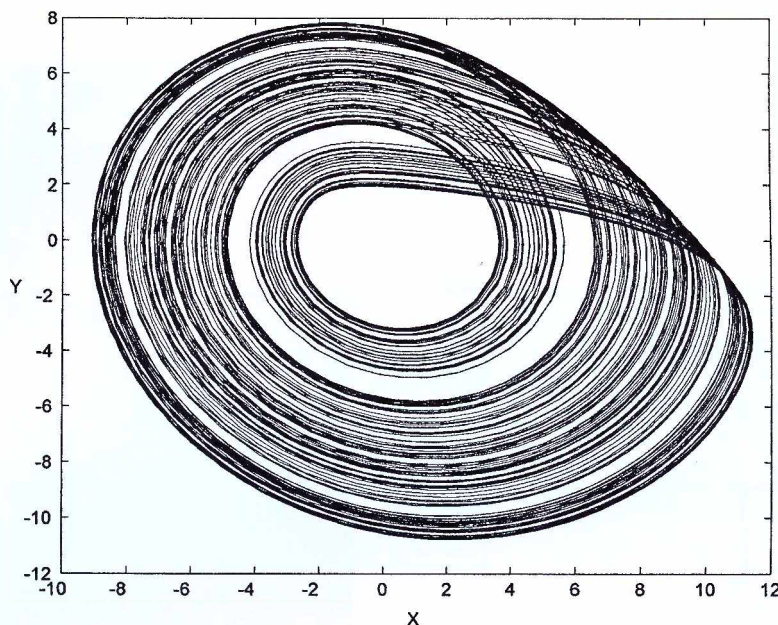
Slika 5.8: Subcritical put u kaos za Lorenz-ov sistem: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; isprekidana linija - prag detekcije.

sistem jednostavniji od Lorenz-ovog [56]. Rossler-ov sistem može biti opisan sa tri diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{5.2}$$

sa haotičnim rešenjima za $a = b = 0.2$ i $c = 5.7$. Rossler-ov sistem ima isti broj članova kao i Lorenz-ov sistem, ali samo jednu kvadratnu nelinearnost (zx). Projekcija Rossler-ovog atraktora u xy ravni za ove parametre prikazan je na Slici 5.9. Sistem ima period-udvostručavajući put u kaos.

U našim simulacijama izabrane su sledeće vrijednosti parametara: $a = b = 0.2$, dok se parametar c povećava od 2 do 5.7 za vrijeme $0 < t < 15000$ s. Vrijednost parametra ε je 0.0025, a prag detekcije je $C(t) = 0.125$ Hz. Poslije period 1 graničnog ciklusa, koji



Slika 5.9: Rossler-ov atraktor.

postoji za $0 < t < 600s$, sistem doživljava period-udvostručavajuću bifurkaciju ($t = 600s$, $c = 3.26$). Dalje povećanje c proizvodi period-udvostručavajuću sekvencu, dok se haotični atraktor javlja za $c = 4.31$. U našem eksperimentu poslije $t = 1500s$ parametar c linearno opada i sistem se vraća u periodično stanje. Ovaj put u kaos je vizuelizovan za signal $x(t)$ na Slici 5.10 sa TF reprezentacijom na lijevoj strani i odgovarajućim odzivom detektora na desnoj strani. Region u tačkastom pravougaoniku se dobro slaže sa teorijskim razmatranjima iz [56]. Predloženi detektor daje tačne rezultate, vrlo bliske teorijskim.

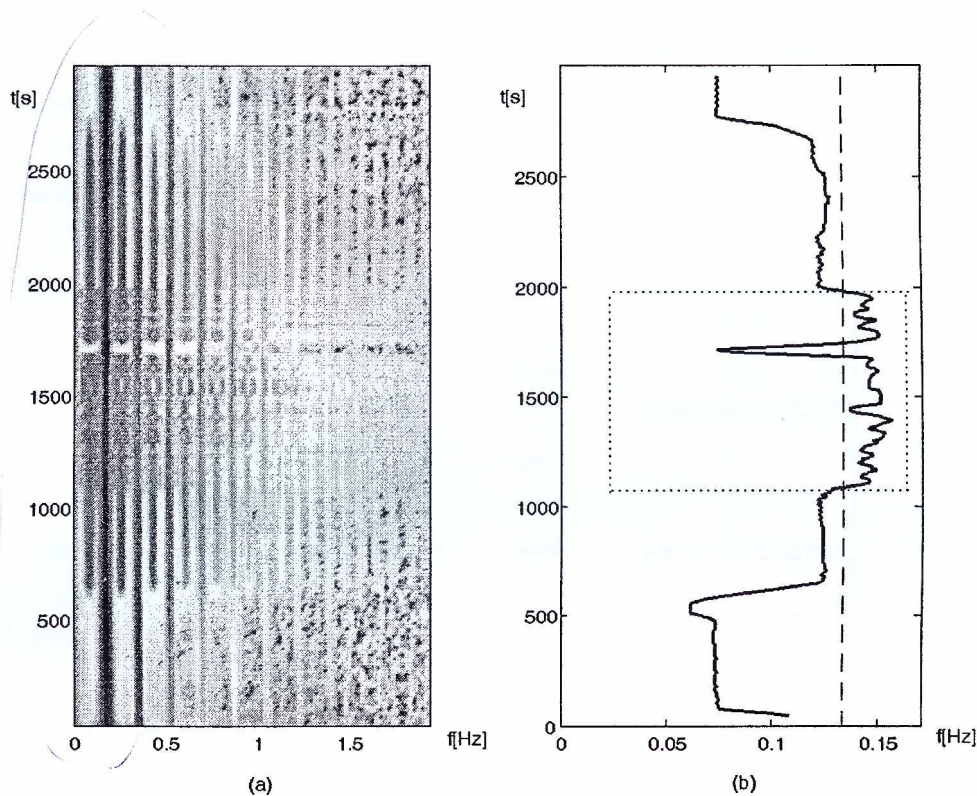
5.6 Logističko preslikavanje

Logističko preslikavanje je jedan od najprostijih poznatih haotičnih sistema opisan diferencnim jednačinama [19]:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n). \quad (5.3)$$

Ova vrlo prosta forma sa jednom promjenljivom i kontrolnim parametrom A može proizvesti haotično ponašanje slično kao i komplikovaniji haotični sistemi. Ovaj sistem je iskorišćen kao model za mnoge fenomene u praksi.

U našem eksperimentu parametar A mijenja se linearno u opsegu od 3.5 do 4. Početni

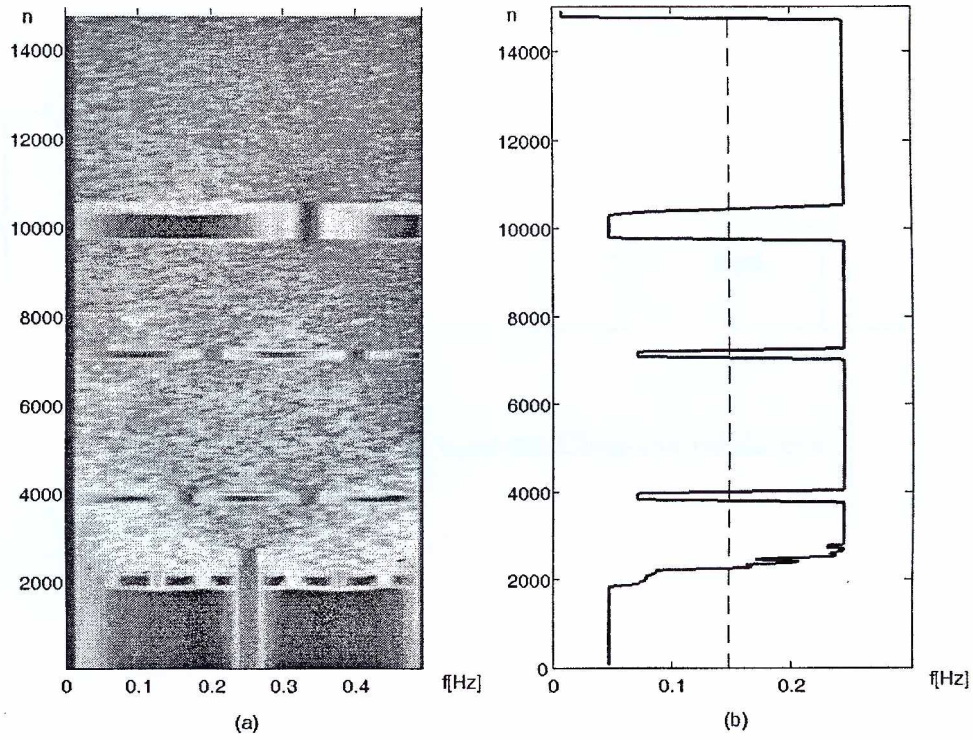


Slika 5.10: Period-udvostručavajući put u kaos za Rossler-ov sistem: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; tačkasti pravougaonik - region haosa u skladu sa teorijskim analizama; isprekidana linija - prag detekcije.

uslov je $x_0 = 0.1$. Za $A = 3.57$ ($n = 2200$) dostignuta je akumulaciona tačka i poslije tog trenutka imamo kaos. Međutim, u haotičnom režimu postoji mnogo periodičnih prozora. Odgovarajuće simulacije su urađene sa $\varepsilon = 0.001$. Predloženi metod tačno detektuje haotični režim i tri relativno duga periodična prozora. TF reprezentacija se vidi na Slici 5.11a. Odziv detektora je dat na Slici 5.11b.

5.7 Detekcija više-dimenzionalnog haosa

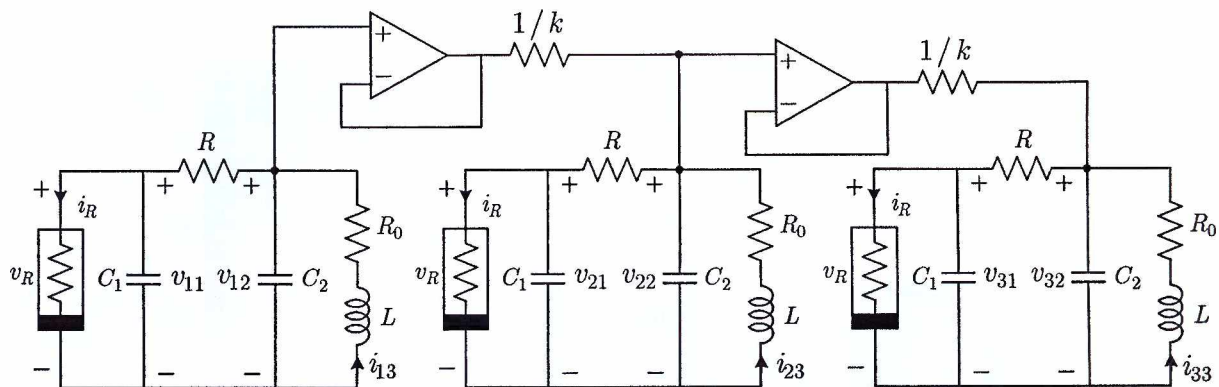
Prethodni primjeri su relativno male dimenzije, sa atraktorima dimenzije manje od 3. Smatra se da povećanje dimenzionalnosti dinamike ima negativan efekat sličan onom koji prati povećanje šuma, u smislu da oba teže da degradiraju pouzdanost nelinearne detekcije. Da bi pokazali da predloženi detektor radi jednako dobro i za sisteme koji



Slika 5.11: Period-udvostručavajući put u kaos za logističko preslikavanje: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora, isprekidana linija - prag.

ispoljavaju više-dimenzionalni kaos, to jest hiper-kaos, razmatrali smo lanac od tri uparena Chua-ina oscilatora (Slika 5.12) [57]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_{11}}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_{12} - v_{11}) - f(v_{11})] \\
 \frac{dv_{12}}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_{11} - v_{12}) + i_{13} + k(v_{22} - v_{12})] \\
 \frac{di_{13}}{dt} &= \frac{1}{L} [-v_{12} - R_0 i_{13}] \\
 \frac{dv_{21}}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_{22} - v_{21}) - f(v_{21})] \\
 \frac{dv_{22}}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_{21} - v_{22}) + i_{23} + k(v_{32} - v_{22})] \\
 \frac{di_{23}}{dt} &= \frac{1}{L} [-v_{22} - R_0 i_{23}] \\
 \frac{dv_{31}}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_{32} - v_{31}) - f(v_{31})]
 \end{aligned}$$



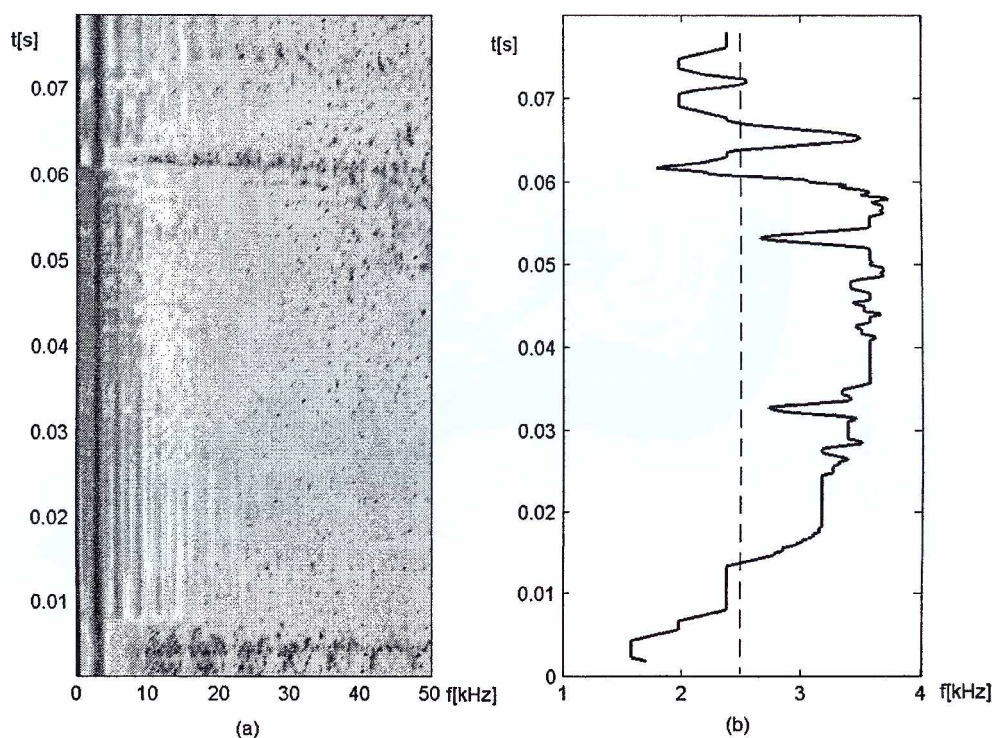
Slika 5.12: Lanac od tri uparena Chua-ina oscilatora.

$$\begin{aligned}\frac{dv_{32}}{dt} &= \frac{1}{C_2}[G(v_{31} - v_{32}) + i_{33}] \\ \frac{di_{33}}{dt} &= \frac{1}{L}[-v_{32} - R_0 i_{33}],\end{aligned}\quad (5.4)$$

gdje je $f(\dots)$ izlomljena linearna karakteristika data relacijom (1.33) i provodnost $k = 10^{-4}\text{S}$. Ovo je sistem devetog reda i sa odgovarajućim vrijednostima parametara ima tri pozitivna Lyapunov-ljeva eksponenta. Našao je primjenu u haotičnim komunikacijama [67],[68].

U našim simulacijama vrijednosti svih parametara su iste kao u simulacijama koje su rađene u analizi period-udvostručavajućeg puta u haos za jedan Chua-in oscilator. Bifurkacioni parametar je, takođe, G , i mijenja se u opsegu $G > 530\mu\text{S}$. Parametar $\varepsilon = 0.0025$, a prag detekcije je $C(t) = 2.5\text{kHz}$. Sistem kroz niz period udvostručavajućih bifurkacija ulazi u haos. Na Slici 5.13 vidi se TF reprezentacija signala $v_{11}(t)$ i odgovarajući odziv detektora. Poslije $t = 0.015\text{s}$ ($G > 540\mu\text{S}$) sistem ulazi u haos, a između regiona haosa zapažaju se periodični prozori. Simulacioni rezultati se dobro slažu sa teorijskim.

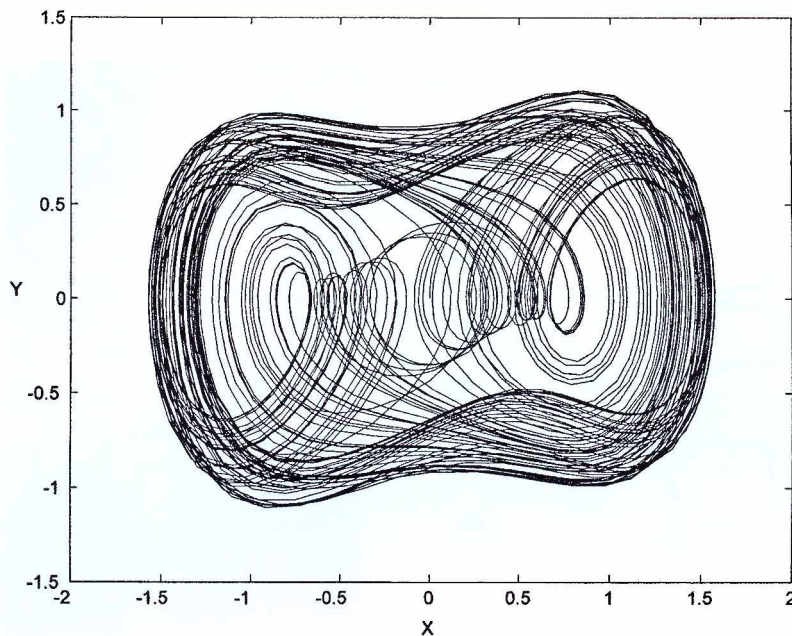
Naglasimo da većina postojećih metoda za detekciju haosa, među kojima i titracija haosa sa dodatim šumom, ima problema sa detekcijom haosa u hiper-haotičnim sistemima.



Slika 5.13: Period-udvostručavajući put u kaos za lanac od tri Chua-ina oscilatora za signal $v_{11}(t)$: (a) TF reprezentacija; (b) puna linija - odziv detektora; isprekidana linija - prag.

5.8 Detekcija haosa u neautonomnim nelinearnim oscilatorima

U ovom radu do sada su razmatrani samo autonomni dinamički sistemi. U jednačinama koje opisuju ove sisteme nema eksplicitne vremenske zavisnosti. Neautonomni sistemi mogu se shvatiti kao specijalan slučaj autonomnih ako se vrijeme definiše kao nova promjenljiva, a broj jednačina proširi sa $t = 1$. Zbog svojih specifičnih osobina neautonomni sistemi i preslikavanja analiziraju se posebno, nezavisno od opšte teorije autonomnih dinamičkih sistema. Da bi sistem ispoljavao kaos on mora biti opisan sa najmanje dvije neautonomne jednačine prvog reda. Prevedeno na jezik električnih kola, ovo znači da je neophodno prisustvo najmanje dva reaktivna elementa i jednog vremenski-zavisnog izvora.



Slika 5.14: Duffing-ov haotični atraktor.

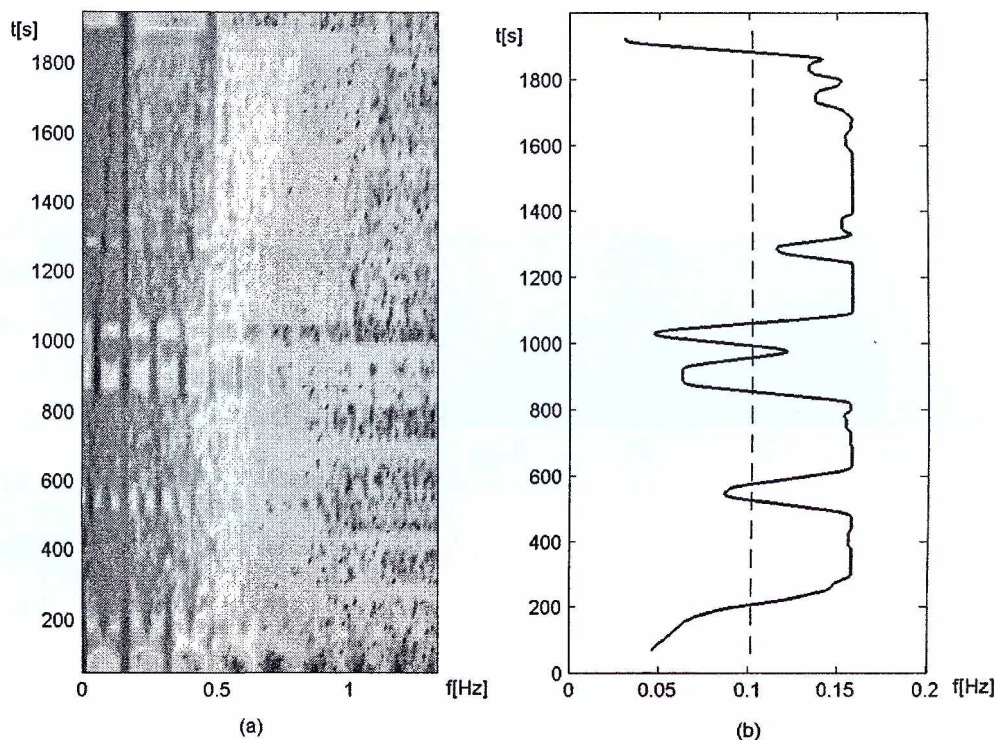
Na primjeru poznatog Duffing-ovog oscilatora [58] pokazaćemo da predloženi detektor uspješno razlikuje kaos od periodičnog kretanja i u slučaju neatomnih sistema. Ovaj oscilator je opisan sistemom od dvije diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Jednačine ovog oblika koriste se i za modelovanje ekoloških i finansijskih sistema sa eksternim, sezonskim uticajem, kao što je na, primjer, populacija komaraca [19] ili cijena uređaja za rashlađivanje.

Duffing-ov oscilator zavisno od vrijednosti parametara δ i γ ispoljava periodično ili haotično ponašanje. Na Slici 5.14 prikazan je Duffing-ov haotični atraktor za $\delta = 0.5$ i $\gamma = 0.7$.

Da bi pratili prelazak ovog oscilatora iz periodično u haotično stanje, smanjivali smo vrijednost parametra γ počev od $\gamma = 0.88$. Za $\gamma = 0.7$ ($t = 200s$) sistem ulazi u kaos. Između regiona haosa pojavljuju se periodični prozori. U simulacijama smo koristili $\varepsilon = 0.0035$. Kao što se vidi na Slici 5.15 odziv detektora dobro se slaže sa teorijskim vrijednostima koje se mogu naći u literaturi. Ovaj rezultat dobija na važnosti, ako znamo

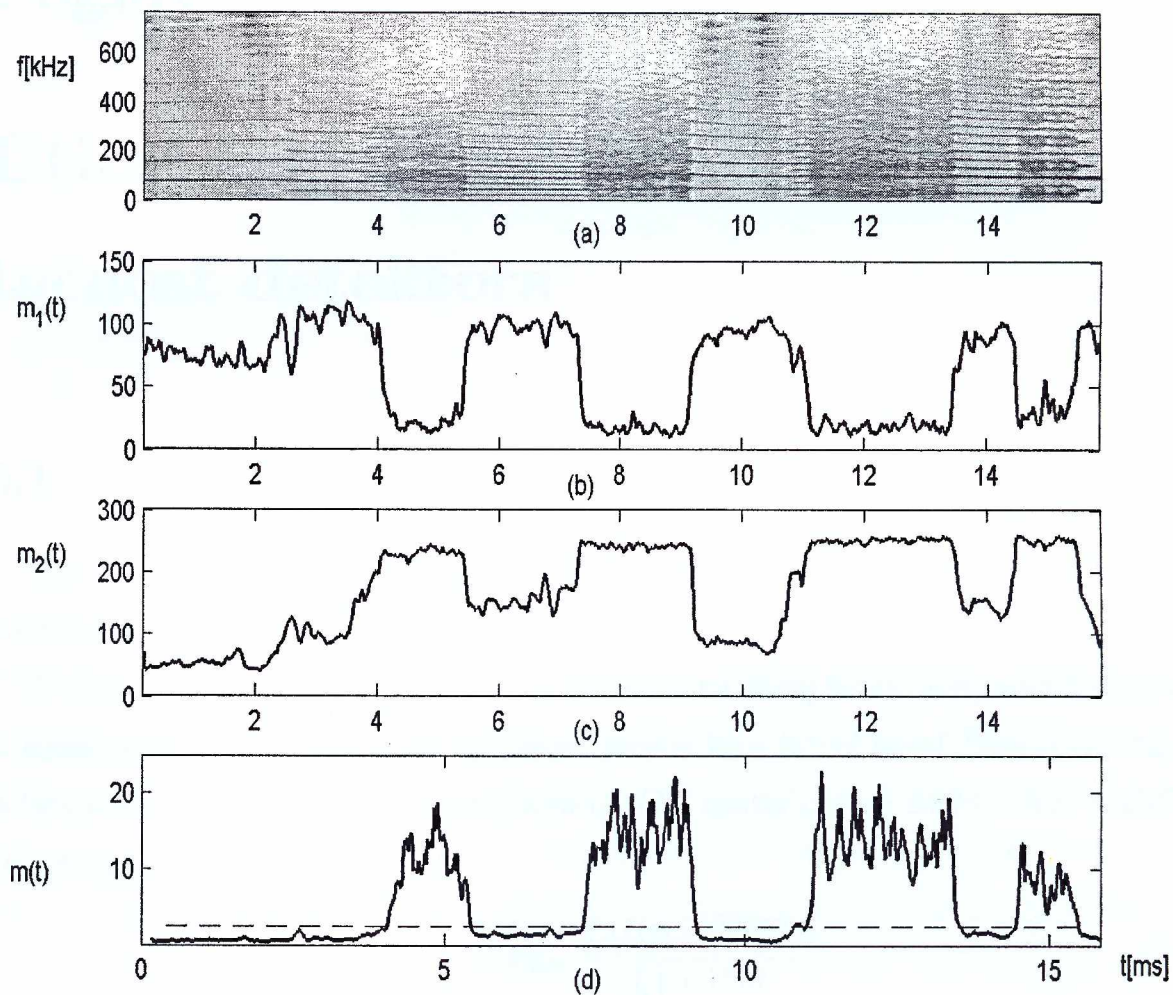


Slika 5.15: Duffing-ov oscilator - tranzicija u kaos: (a) TF reprezentacija signala $x(t)$; (b) puna linija - odziv detektora; isprekidana linija - prag.

da većina postojećih metoda za detekciju haosa ne daje zadovoljavajuće rezultate u radu sa neautonomnim sistemima.

5.9 Colpitts-ov oscilator

Algoritam 2 primijenjen je na signal napona $v_{BE}(t)$ iz Colpitts-ovog oscilatora. Rezultati simulacija prikazani su na Slici 5.16. TF reprezentacija signala prikazana je na vrhu slike, a ispod nje redom $m'_1(t)$, $m'_2(t)$ i $m(t)$. Prag $C(t)$ prikazan je isprekidanom horizontalnom linijom i u ovom slučaju ima vrijednost 2. Kad je odziv detektora iznad praga $C(t)$ sistem je u haotičnom stanju. Kad su vrijednosti odziva $m(t)$ manje od praga sistem ispoljava periodično kretanje. Dobijeni rezultati se veoma dobro slažu sa uporednim rezultatima koji se mogu naći u literaturi.



Slika 5.16: Colpitts-ov oscilator - tranzicija u kaos. (a) logaritam $|STFT(t, f)|$; (b) mjera $m_1(t)$; (c) mjera $m_2(t)$; (d) odziv detektora $m(t)$ - puna linija; prag detekcije - isprekidana linija.

Poglavlje 6

Uticaj šuma i širine prozora na tačnost detektora

6.1 Uticaj šuma na tačnost detektora

Šum je neizbježan pratilac realnih signala. Zato je bitno analizirati ponašanje predloženog detektora haosa u prisustvu šuma.

U cilju analize robustnosti predloženog detektora na uticaj šuma, pretpostavljeno je da se signal proizveden u Chua-inom oscilatoru prenosi kroz šumni kanal. Šumno okruženje je Gauss-ovo. Mijenjamo odnos signal/šum (SNR) unutar opsega $8\text{dB} \leq SNR \leq 20\text{dB}$. Odnos signal/šum je razvijen kao:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\int_t |f(t) - \bar{f}(t)|^2 dt}{\int_t |\nu(t)|^2 dt}, \quad (6.1)$$

gdje je $\bar{f}(t)$ srednja vrijednost signala u uskom intervalu oko razmatranog trenutka:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Parametar T je jednak širini upotrijebljenog prozora u STFT ($T = 3\text{ms}$). Definicija odnosa signal/šum je u skladu sa Donoho-vim radom [59]. Odziv detektora za dva različita odnosa signal/šum u period-udvostručavajućem putu u kaos je prikazan na Slici 6.1. U ovom eksperimentu promijenjeni su početni uslovi u odnosu na eksperiment iz dijela o period-udvostručavajućem putu u kaos, u cilju formiranja više periodičnih prozora unutar intervala od interesa. Za $SNR = 20\text{dB}$ detektor nalazi 4 prozora označena sa w_i , $i =$

SNR	A	B
20dB	0.4%	4.70%
17dB	0.95%	6.31%
14dB	2.04%	9.51%
12dB	3.37%	17.74%
10dB	5.98%	38.09%
8dB	23.68%	61.51%

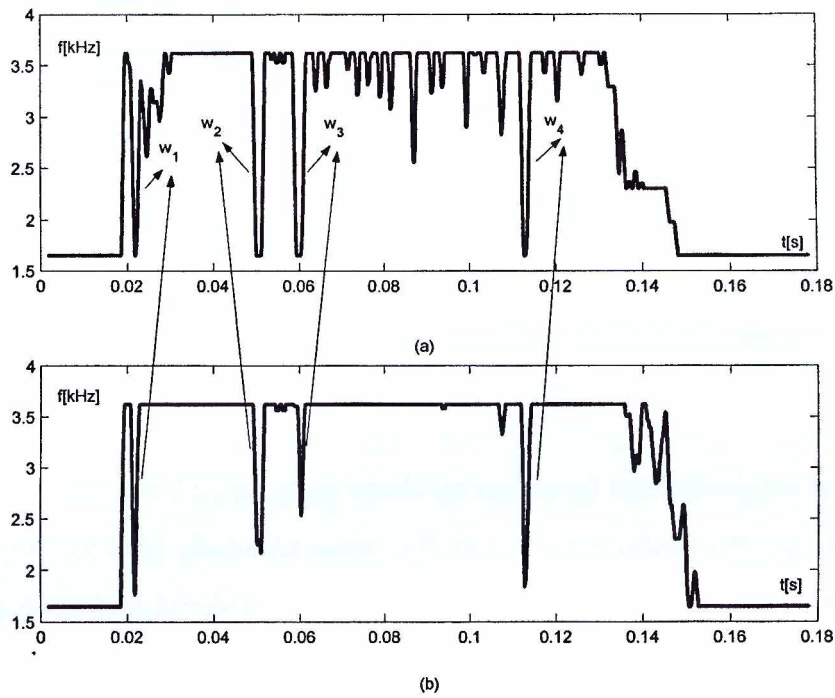
Tabela 6.1: Procenat greške detekcije za signal zahvaćen Gauss-ovim šumom za period-udvostručavajući put u kaos. A - greške u periodičnom režimu; B - greške unutar periodičnih prozora.

1, ..., 4 na Slici 6.1a. Međutim, detektor za $SNR = 10\text{dB}$ detektuje svaki od njih, ali prozori w_2 i w_3 su oštećeni u poređenju sa prethodnim slučajem, Slika 6.1b. Ova dva prozora neće biti detektovana za niže SNR vrijednosti.

Tačnost predloženog detektora je testirana u Monte-Carlo simulacijama u 100 pokušaja. Kao mjera tačnosti uzet je procenat odbiraka iz periodičnog režima koji su prepoznati kao haotični odbirci (A) i procenat odbiraka iz periodičnih prozora koji su detektovani kao haotični (B). Rezultati su objedinjeni u Tabeli 6.1. Procenat pogrešno identifikovanih odbiraka iz periodičnog režima je mali čak i za relativno visok šum sa $SNR = 10\text{dB}$. Ovo se ne može reći za uske periodične prozore. Naime, STFT razvijena za trenutak unutar uskog periodičnog prozora računata je upotrebom odbiraka i iz periodičnog prozora i iz susjednog haotičnog regiona. Za šumno okruženje ovo prouzrokuje da odbirci blizu granica periodičnih prozora budu pogrešno identifikovani kao haotični. Pošto je haotični režim detektovan kao region sa strukturom koja liči na šum, detektovani haotični region je proširen za signale zahvaćene Gauss-ovim šumom značajne vrijednosti.

6.2 Uticaj širine prozora na tačnost detektora

TF reprezentacija - STFT je glavni alat koji smo koristili u razvoju predloženog detektora haosa. Širina prozora koji je upotrijebljen u računanju STFT značajno utiče na



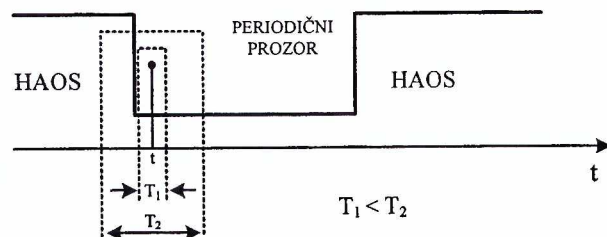
Slika 6.1: Odziv detektora: (a) $SNR = 20\text{dB}$; (b) $SNR = 10\text{dB}$.

tačnost odziva detektora u šumnom okruženju, kao što će biti pokazano u nastavku ovog poglavlja.

Širi prozor u STFT daje rezultate robustnije na uticaj šuma. Međutim, širok prozor može proizvesti pogrešnu identifikaciju trenutaka blizu granica periodičnog režima. Uži prozor proizvodi suprotno ponašanje. Ovo sugerše postojanje prozora optimalne širine za dato kolo i šumno okruženje. Međutim, umjesto komplikovane procedure za određivanje optimalne širine prozora, ovdje je predložen višeprozorski (multiwindow) pristup za detekciju haotičnih stanja, odnosno, modifikovana verzija originalnog algoritma. Radi se o tome da se kvalitetna detekcija može obezbijediti ponavljanjem postupka detekcije sa različitim prozorima i odgovarajućim tumačenjem dobijenih rezultata.

6.2.1 Analiza uticaja širine prozora na tačnost detektora

Posmatrajmo vremenski trenutak t_0 koji je blizu granica periodičnog režima na Slici 6.2. Širok prozor (T_2) obuhvata odbirke i iz periodičnog i iz haotičnog režima. Ovo prouzrokuje da funkcija odziva detektora $m_T(t)$ raste i kad postane veća od praga detekcije $C_T(t)$ ovaj odbirak će biti pogrešno identifikovan kao haotični. Indeks T je upotrijebljen



Slika 6.2: Ilustracija računanja STFT za jedan trenutak vremena t_0 unutar periodičnog režima i dvije različite širine prozora.

da bi naglasili da odziv detektora i prag detekcije zavise od upotrijebljene širine prozora. Međutim, uzak prozor (T_1) obuhvata samo odbirke iz periodičnog režima. Tada, za uski prozor trenutak t_0 će biti korektno identifikovan kao periodični. Iz gornje analize slijedi da je uzak prozor optimalan za detekciju periodičnog režima. Međutim, ovaj zaključak je validan samo za okruženje bez šuma. Naime, kako je pokazano u [60], mogućnost ekstrakcije osobina iz STFT za šumno okruženje raste sa povećanjem širine prozora.

Naglasimo da je vrlo važna osobina sistema za detekciju haotičnih stanja mogućnost detekcije periodičnog režima u uslovima jakog šuma, odnosno razlikovanje posmatranog slučaja od haotičnog režima. Na osnovu ove kratke analize zaključujemo da za šumno okruženje postoji širina prozora koja predstavlja kompromis između robustnosti na uticaj šuma i odgovarajuće identifikacije stanja kola. Međutim, određivanje optimalne širine prozora za procjenu stanja kola je vrlo teško. Umjesto direktnog traženja optimalne širine prozora, u nastavku je predložen multiwindow pristup.

6.2.2 Multiwindow detektor

Oba razmatrana efekta, šum i zahvatanje haotičnih odbiraka prozorom, povećavaju funkciju odziva detektora $m_T(t)$ u periodičnom režimu. Oni mogu prouzrokovati da periodični odbirci budu pogrešno identifikovani kao haotični. Međutim, ovi efekti daju suprotno ponašanje za vrlo uske i vrlo široke prozore. Očekujemo da za prozore čija je širina bliska optimalnoj ovi efekti neće narušiti tačnost detektora i da će stanje sistema biti korektno identifikovano. Na osnovu ove analize možemo pretpostaviti da je razmatrani trenutak u periodičnom režimu ako za makar jednu širinu prozora funkcija odziva detektora ukazuje na periodično stanje. U tom cilju razmatramo skup širina

prozora:

$$\mathbf{T} = \{T_i = a^i T_0 \mid i \in [0, Q]\}, \quad (6.3)$$

gdje je $a > 1$ i T_0 je vrlo uzak prozor (tačan blizu ivica režima, ali sa izraženim uticajem šuma), dok najširi prozor iz skupa T_Q ima potisnut uticaj šuma. U zadacima procjene u procesiranju signala najčešće je korišćena je geometrijska progresija širina prozora [61]. Najuzi prozor može biti izabran na takav način da DC i glavna spektralna komponenta budu odvojene u razmatranom trenutku, to jest, $f_m(t) > 1.5F_w(T)$. Najširi prozor je izabran tako da je magnituda komponenta signala najmanje jedan red veličine veća od varijanse uticaja šuma. Detalji vezani za uticaj šuma na STFT mogu se naći u [60]. Za svaki prozor iz skupa računata je STFT i odgovarajuća funkcija odziva detektora $m_{T_i}(t)$, $i \in [0, Q]$. Naredni korak je klasifikacija zasnovana na funkciji $d_{T_i}(t)$, koja je formirana na sledeći način:

$$d_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } m_T(t) \geq C_T(t) & \text{haotični režim} \\ 0 & \text{for } m_T(t) < C_T(t) & \text{periodični režim.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Na kraju, odluka da li tekući trenutak pripada haotičnom ili periodičnom režimu donijeta je kao:

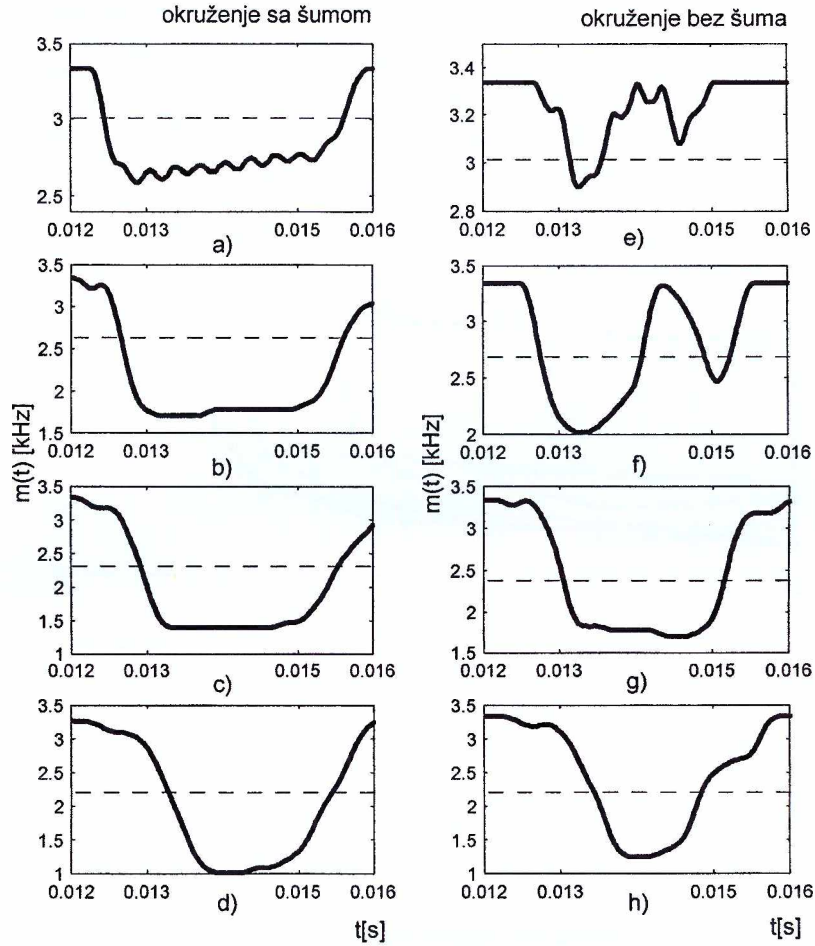
$$d(t) = \begin{cases} 0 & \sum_{i=0}^Q (1 - d_{T_i}(t)) \geq p & \text{periodični režim} \\ 1 & \text{inače} & \text{haotični režim,} \end{cases} \quad (6.5)$$

gdje je p cijeli broj i $1 \leq p < Q$. Da bi izbjegli situaciju da jedan prozor iz skupa indicira periodični režim u našem eksperimentu je uzeto $p > 1$. Ovo je vrlo važno za očuvanje tačnosti detektora u procjeni haotičnih stanja, kao što ćemo vidjeti u nastavku.

6.2.3 Numerički rezultati

Razmatramo Chua-ino kolo sa period-udvostručavajućim putem u kaos. Ovaj put u kaos je proizveden promjenom parametra G . Povećanje parametra G prouzrokuje prelazak kola iz periodičnog u haotični režim. Međutim, brojni periodični regioni mogu postojati unutar haotičnog režima.

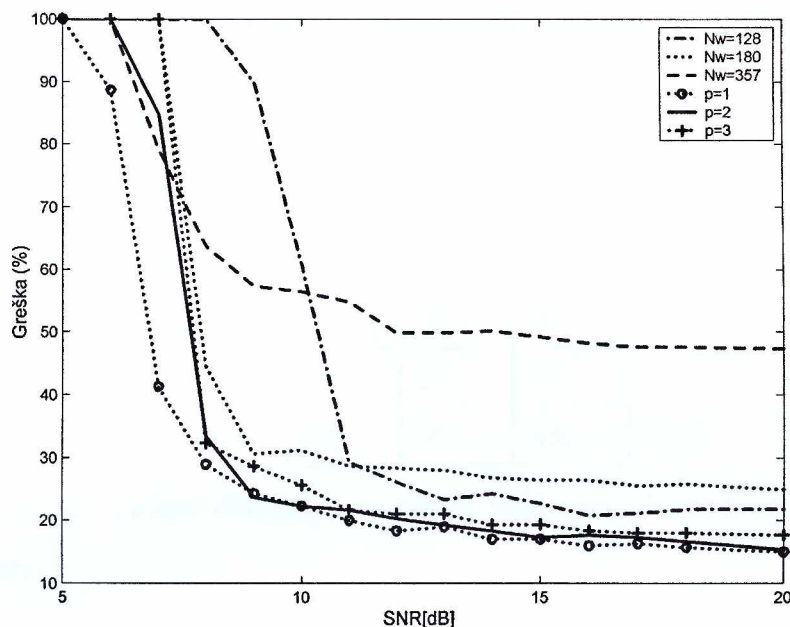
U našim simulacijama razmatramo periodične regione različite dužine od 81 do 1552 odbirka (period odabiranja je $\Delta t = 12.6 \mu s$). Skup širina prozora razmatran u našem eksperimentu ima sledeće parametre: $T_0 = N_0 \Delta t$ sa $N_0 = 128$, $a = 1.121$, i $Q = 9$.



Slika 6.3: Odziv detektora u slučaju periodičnog regiona sa $N = 311$ odbiraka ($N \Delta t = 0.004s$): lijeva kolona - okruženje bez šuma; desna kolona - šumno okruženje ($SNR = 10dB$); a), e) $N_W = 128$; b), f) $N_W = 180$; c), g) $N_W = 254$; i d), h) $N_W = 357$.

Na Slici 6.3, lijeva kolona, predstavljeni su rezultati dobijeni sa 4 prozora iz razmatranog skupa za slučaj bez šuma i za periodični region dužine 311 odbiraka. Isprekidana linija predstavlja prag detekcije $C_{T_i}(t)$.

Naglasimo da bi idealni detektor klasifikovao cijeli razmatrani interval kao periodični (funkcija odziva detektora ispod praga). Međutim, ovdje se vidi da su trenuci blizu ivica periodičnog prozora pogrešno identifikovani kao haotično stanje. Najuzi prozor daje najbolje rezultate u ovom slučaju sa najmanjim brojem pogrešno identifikovanih odbiraka. Ovaj efekat je najizraženiji (rezultati su najlošiji) za najširi prozor. Slika 6.3, desna kolona, prikazuje funkciju odziva detektora za Gauss-ovo šumno okruženje sa $SNR = 10 dB$ (ovdje



Slika 6.4: Procenat greške detekcije za predloženi algoritam ($p = 1$, $p = 2$, $p = 3$) i za algoritam sa konstantnom širinom prozora.

je, takođe, primijenjena definicija SNR iz [59]). U ovom slučaju vidi se da najuži prozor (koji je najbolji u slučaju bez šuma) daje najlošije rezultate.

Upoređujemo tačnost predloženog algoritma sa $p = 1$, $p = 2$ i $p = 3$ sa osnovnim algoritmom iz Poglavlja IV sa konstantnom širinom prozora u STFT. Rezultati su prikazani na Slici 6.4. Vidi se da za visok SNR najuži prozor produkuje bolje rezultate nego drugi (konstantne širine) prozori. Međutim, performanse ovih prozora značajno opadaju sa povećanjem uticaja šuma. Predloženi algoritam ima bolje performanse od algoritma sa konstantnom širinom prozora na gotovo cijelom razmatranom intervalu SNR . Najbolji rezultati su dobijeni za $p = 1$ i oni su neznatno bolji od onih sa $p = 2$ i $p = 3$.

Na kraju je razmatran procenat pogrešno identifikovanih odbiraka u haotičnom režimu za različite vrijednosti p i SNR i prikazan u Tabeli 6.2. Može se vidjeti da predloženi detektor daje bolje rezultate za ovaj režim za veće p .

Naglasimo da je šum "pogodan" za identifikaciju haotičnog režima pošto on povećava funkciju odziva detektora. Iz Tabele 6.2 se vidi da za $p = 3$ i $SNR < 18dB$ nismo napravili ni jednu grešku u identifikaciji haotičnog režima. Pošto $p=3$ daje slične rezultate kao $p = 1$ i $p = 2$ za periodični režim, mi preporučujemo da $p = 3$, kao kompromis između tačnosti

SNR	p=1	p=2	p=3
20dB	5.9%	4.42%	1.89%
18dB	4.7%	4.1%	1.26%
16dB	4.1%	2.52%	0%
14dB	3.15%	0.63%	0%
12dB	1.89%	0%	0%
10dB	0%	0%	0%
8dB	0%	0%	0%

Tabela 6.2: Procenat greške detekcije za signal zahvacen Gauss-ovim šumom unutar haotičnog regiona.

u periodičnom i haotičnom režimu, bude upotrijebljen u ovom i sličnim eksperimentima.

Dakle, predložena tehnika ima dobre osobine oba i uskog i širokog prozora koji se koriste u STFT. Ona daje bolju tačnost od bilo kog detektora zasnovanog na STFT sa konstantnom širinom prozora. Ova tačnost plaćena je povećanjem složenosti računanja. Usmjerićemo naše buduće napore za nalaženje načina za smanjivanje broja STFT u algoritmu. Takođe, biće razmatrana optimizacija nivoa praga $C_T(t)$ u cilju daljeg smanjenja greške detekcije u oba, haotičnom i periodičnom režimu.

Poglavlje 7

Primjena detektora u haotičnim komunikacijama

Upotreba haosa u komunikacijama je vrlo interesantna oblast u poslednje vrijeme [62],[63]. Pošto su haotični signali širokopojasni, liče na šum i teški su za predikciju, smatra se da su dobri za maskiranje signala u sigurnim komunikacijama. Haotični signali mogu biti na različite načine upotrijebljeni u komunikacijama. Ovdje ćemo ukratko opisati jednu od tehnika za prenos binarne poruke.

Chaotic shift keying, takođe poznat kao chaotic switching, široko je razmatran kao metod na haosu zasnovanih sigurnih komunikacija [64]-[68]. U ovom metodu, binarni informacioni signal je kodiran u dva skupa parametara haotičnog predajnika, to jest, dva različita haotična atraktora. U prijemniku, signal je rekonstruisan upotrebom sinhronizacione greške. Iako su izabrani dva skupa parametara tako da haotični signali u dva haotična atraktora imaju gotovo iste statističke osobine u faznom prostoru, to ne znači da ova komunikaciona šema obezbeđuje visok stepen sigurnosti.

Postoje dvije vrste metoda za otkrivanje haotičnih komunikacija: metodi zasnovani na karakteristikama i metodi zasnovani na identifikaciji. Metodi zasnovani na identifikaciji rekonstruišu dinamiku predajnika iz signala koji se prenosi [64]. Onda se rekonstruisana dinamika koristi za prepoznavanje informacionog signala. Ovi metodi su pogodni za otkrivanje onih haotičnih komunikacionih šema gdje je predajnik nižeg reda i stacionarni, kontinualni haotični signal upotrijebljen kao signal koji se prenosi. Metodi zasnovani na karakteristikama koriste različite osobine haotičnih sistema za otkrivanje sigurnih

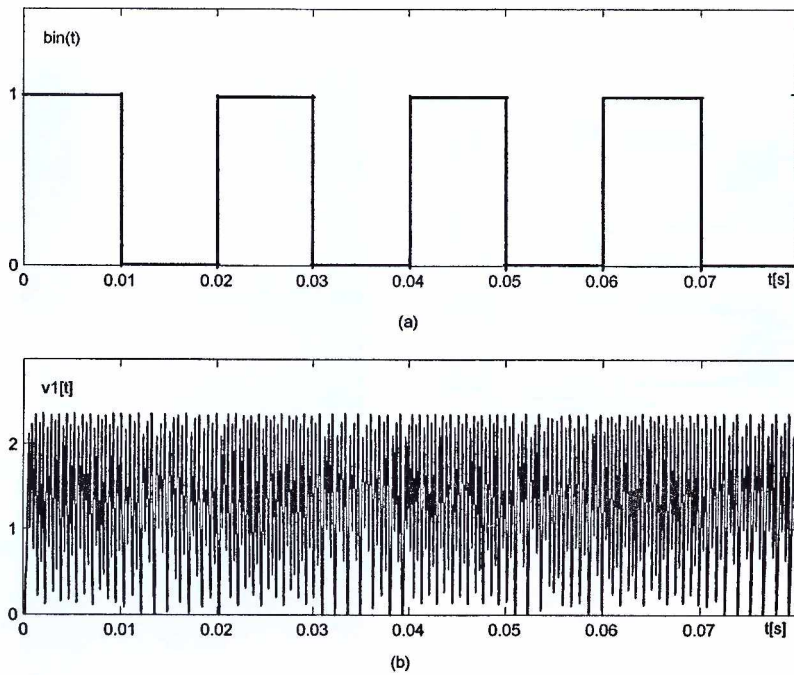
haotičnih komunikacija. Postoji nekoliko različitih metoda iz ove grupe. Rezultati predstavljeni u [65] pokazuju da chaotic switching ima nizak nivo sigurnosti pošto binarni signal može biti rekonstruisan iz prenošenog haotičnog signala upotrebom samo short-time zero-crossing rate. U radu [66] za otkrivanje haotičnih komunikacija koristi se Poincare-ovo preslikavanje, a u [67] generalizovana sinhronizacija haotičnih signala. Autori u [68] koriste spektrogram i matematičke morfološke filtre da bi otkrili binarnu poruku koja je poslata.

7.1 Otkrivanje haotičnih komunikacija

U ovom radu je razmatran jedan alternativni metod za otkrivanje sigurnih komunikacionih šema. To je metod zasnovan na specifičnoj mjeri koncentracije TF reprezentacije signala. Ako dva haotična atraktora imaju neke razlike u TF reprezentaciji koje se mogu detektovati, onda se ta reprezentacija može koristiti u otkrivanju binarne poruke koju haotični signal nosi. Ovaj metod koristi funkciju odziva detektora za otkrivanje sigurnih komunikacija koje se zasnivaju na signalu iz Chua-inog kola. Detekcija na prijemu se obavlja bez znanja dinamike i parametara predajnika.

U simulacijama, koristimo isti skup parametara kao u [66]. Parametri: $G = 1\text{mS}$, $G_a = -1.139\text{mS}$, $G_b = -0.711\text{mS}$, $E = 1\text{V}$, $R_0 = 20\Omega$ su fiksirani, dok je binarna cifra 1 kodirana sa $L = 12\text{mH}$, $C_1 = 17\text{nF}$ i $C_2 = 178\text{nF}$ (prvi skup parametara), binarna cifra 0 je kodirana sa $L = 12.4\text{mH}$, $C_1 = 17.5\text{nF}$, $C_2 = 195\text{nF}$ (drugi skup parametara). U oba slučaja, sistem proizvodi različite, ali kvalitativno slične, "Rossler-like" atraktore. Binarni informacioni signal $b_{in}(t)$ dat je na Slici 7.1a, dok je signal koji se prenosi dat na Slici 7.1b.

Umjesto upotrebe Chua-inog kola na prijemnoj strani, primjenjujemo predloženi detektor zasnovan na TF reprezentaciji. Slika 7.2a prikazuje STFT signala $v_1(t)$. Teško je zapaziti bilo kakvu razliku između STFT za različite signale. Međutim, postoji razlika u koncentraciji TF reprezentacija za signale različitih atraktora. Ova razlika može biti detektovana i upotrijebljena kao osnova za rekonstruisanje binarne poruke. Odziv detektora je određen u skladu sa predloženim algoritmom (Korak 1 do Korak 4). Razlika u koncentraciji STFT za različite haotične atraktore je očigledna (Slika 7.2b). Radi poređenja, signal binarne poruke je prikazan na istoj slici. Odziv predloženog detektora



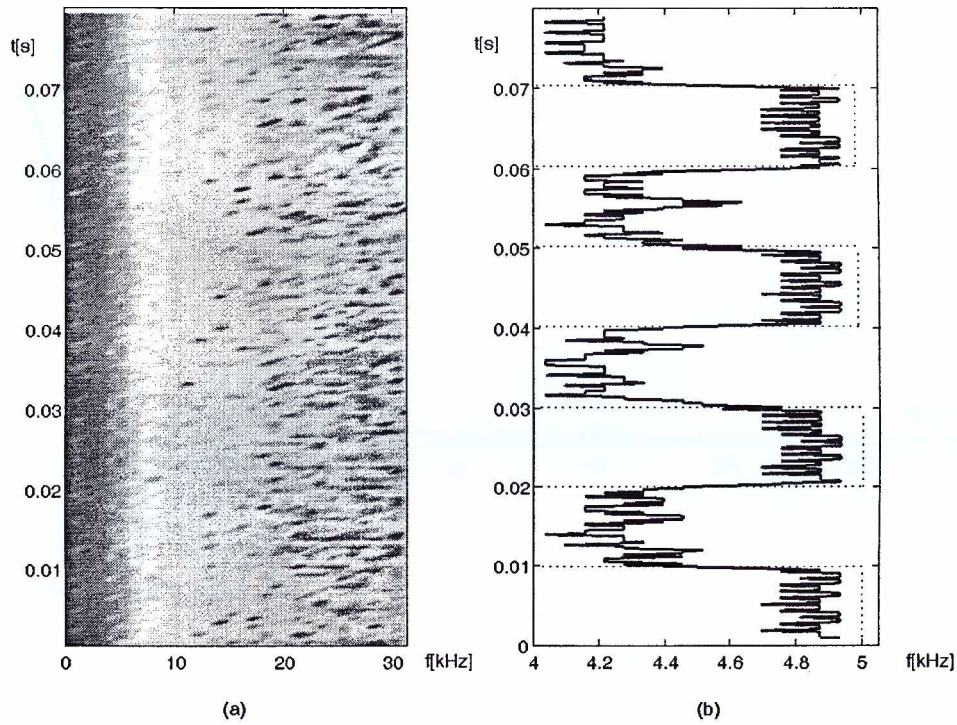
Slika 7.1: (a) Binarna poruka $b_{in}(t)$; (b) signal koji se prenosi $v_1(t)$.

može biti preslikan u binarnu formu primjenom odgovarajućeg praga.

Predložena šema za otkrivanje haotičnih komunikacija je testirana u okruženju sa aditivnim Gauss-ovim šumom $SNR \in [8, 40]$ dB. Prag detekcije je $C(t) = 4.67$ kHz. Procenat pogrešno identifikovanih odbiraka je razmatran kao mjera tačnosti i dat je na Slici 7.3. Naglasimo da jedan bit informacije ima širinu aproksimativno 160 odbiraka. U našem eksperimentu, rekonstruisali smo tačno sve bitove informacije uz procenat pogrešno identifikovanih odbiraka manji od 10% za $SNR > 12$ dB.

7.2 Otkrivanje komunikacija sa hiper-haotičnim predajnikom

Predloženi detektor može, takođe, biti upotrijebljen i za otkrivanje haotičnih komunikacija koje koriste signale iz hiper-haotičnih sistema. Tri uparena Chua-ina kola, opisana sistemom jednačina (5.4), su upotrijebljena kao predajnik kao i u radovima [67] i [68]. Ovo je sistem devetog reda sa tri pozitivna Lyapunov-ljeva eksponenta, to jest, sistem proizvodi hiper-haotično ponašanje. Za očekivati je da je teško otkriti poruku

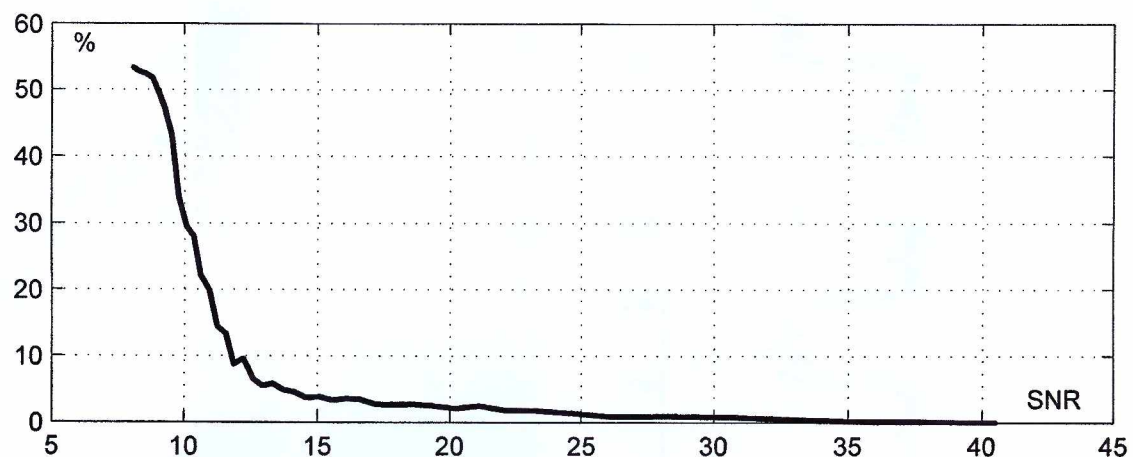


Slika 7.2: Otkrivanje haotičnih komunikacija: (a) TF reprezentacija signala koji se prenosi $v_1(t)$; (b) odziv detektora; binarna poruka - isprekidana linija.

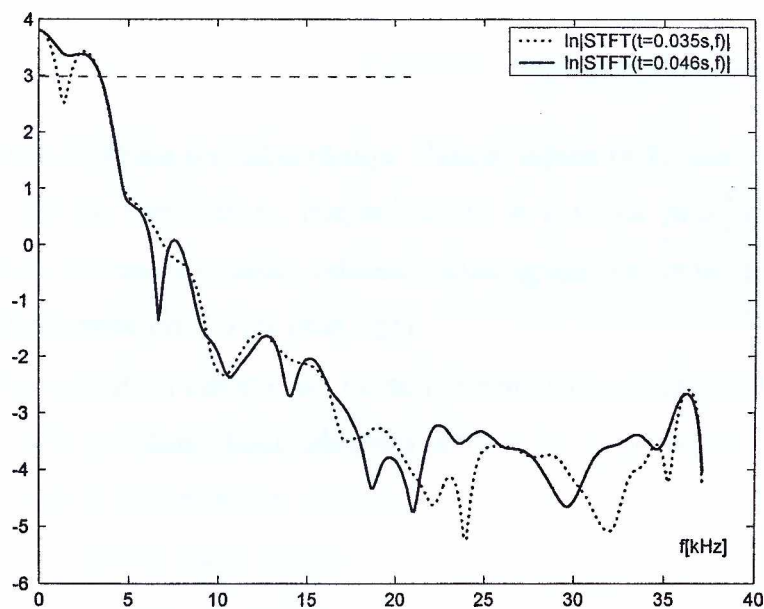
koja se prenosi ovim sistemom upotrebom algoritma koji se zasniva na TF reprezentaciji signala. Ali rezultati dati u ovoj sekciji pokazuju da to nije slučaj.

Parametri svakog Chua-inog oscilatora su isti kao oni upotrijebljeni u predajniku sa jednim Chua-inim kolom. Takođe, isti skupovi parametara su upotrijebljeni za kodiranje odgovarajućih bita. Signal koji se prenosi je $v_{11}(t)$. Ponovljena je ista procedura kao u niže-dimenzionalnom slučaju. TF reprezentacija ovog signala i odziv detektora je data na Slici 7.5. Takođe je, radi upoređenja isprekidanom linijom nacrtana binarna poruka. Naglasimo da je odziv detektora računat za različitu vrijednosti parametra ε u odnosu na slučaj sistema nižeg reda.

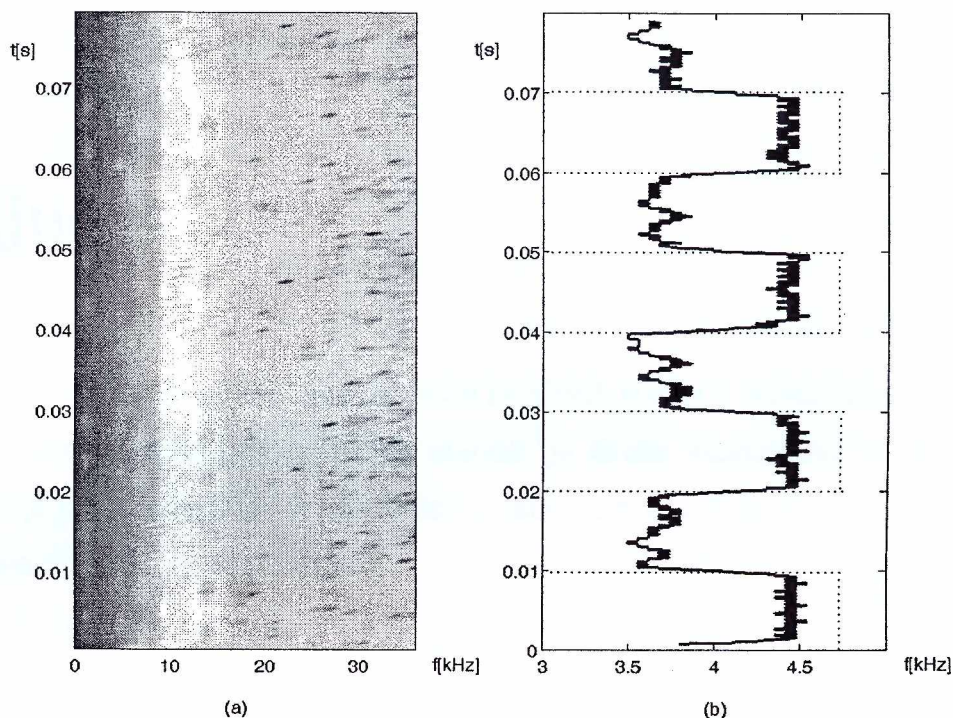
Na Slici 7.4 prikazani su logaritmi amplitude STFT za karakteristične trenutke $t_1 = 0.035s$ (tačkasta linija) i $t_2 = 0.004s$ (puna linija) koji pripadaju različitim haotičnim stanjima. Isprekidana horizontalna linija predstavlja prag $\Omega(t)$. Vidi se da $\ln |STFT|$ za trenutak t_2 u opsegu do 4kHz ima sve vrijednosti iznad praga, dok su za trenutak t_1 neke vrijednosti $\ln |STFT|$ manje od praga $\Omega(t)$. Ovo će rezultovati različitim vrijednostima



Slika 7.3: Procenat pogrešno detektovanih odbiraka u otkrivanju haotičnih binarnih komunikacija.



Slika 7.4: Logaritam amplitude STFT za karakteristične trenutke $t_1 = 0.035s$ (tačkasta linija) i $t_2 = 0.046s$ (puna linija) iz različitih haotičnih stanja. Prag $\Omega(t)$ - isprekidana linija.



Slika 7.5: Otkrivanje hiper-haotičnih komunikacija: (a) TF reprezentacija signala koji se prenosi $v_{11}(t)$; (b) odziv detektora; binarna poruka - isprekidana linija.

odziva detektora za različita haotična stanja. Naime, mjera $m(t)$ imaće manju vrijednost za trenutak t_1 nego za trenutak t_2 . Naglasimo da je u ovom primjeru mala promjena veličine praga može dovesti do greške, odnosno onemogućiti ispravnu detekciju. Potrebno je, dakle, sa velikom pažnjom birati prag $\Omega(t)$.

Vidi se da ovaj algoritam omogućava tačnu rekonstrukciju binarne poruke. Dakle, naši rezultati pokazuju da povećanje kompleksnosti predajnika ne povećava značajno sigurnost haotičnih komunikacija. Prema tome, zaključak je da dobre haotične sigurne komunikacije moraju biti dizajnirane ne samo razmatrajući moguće načine za njihovo otkrivanje u vremenskom domenu, nego i u spektralnom domenu. Ova restrikcija će njihov dizajn učiniti težim. Ali s obzirom na robustnost chaotic shift keying tehnike na šum i neidealni kanal, ona je još vrlo dobar kandidat za buduće sigurne haotične komunikacije.

Zaključak

U ovoj tezi je razmatran problem detekcije haotičnih stanja u nelinearnim oscilatornim kolima. Otkriće determinističkog haosa otvorilo je široke mogućnosti korišćenja ovog koncepta koji je godinama bio zanemarivan u nauci, inženjerstvu, medicini, matematici. Razlikovanje periodičnog od haotičnog režima je veoma bitno u mnogim oblastima i omogućava bolje razumijevanje i korišćenje sistema koji se razmatra.

U ovom radu izvršena je sistematizacija postojećih tehnika za detekciju haosa. Izdvojene su četiri velike grupe metoda: računanje Lyapunov-ljevih eksponenata, računanje informacionih i topoloških mjera atraktora rekonstruisanih iz podataka, posredna detekcija nelinearnog determinizma u šumnom signalu i ostali metodi zasnovani na različitim tehnikama. Takođe, urađena je uporedna analiza karakteristika, odnosno poređenje različitih algoritama i navedene su vrste sistema u kojima su oni primjenljivi.

Nakon sistematizacije postojećih metoda, u ovom radu razvijen je algoritam za detekciju haosa na osnovu TF reprezentacije signala iz nelinearnih oscilatora. Spektar ovih signala u periodičnom i haotičnom režimu se značajno razlikuje i ova razlika je iskorišćena kao osnova za formiranje detektora haosa. Promjenom parametara u vremenu sistem kroz niz bifurkacija mijenja stanje, prelazi iz periodičnog u haotično i obrnuto. Promjena signala u vremenu reflektuje se i na spektralni sadržaj koji se, takođe, mijenja. Promjena spektralnog sadržaja detektovana je formiranjem specifične mjere koncentracije TF reprezentacije signala. Upoređivanjem odziva detektora sa odgovarajućim pragom donosi se odluka o stanju sistema.

Formirana su dva algoritma za detekciju haosa u nelinearnim oscilatornim kolima. Algoritam 1 koristi specifičnu mjeru koncentracije TF reprezentacije signala između DC i glavne spektralne komponente. Ovaj metod daje dobre rezultate za one sisteme kod kojih u periodičnom režimu između DC komponente i spektralne komponente sa

maksimalnom magnitudom ne postoje subharmonici značajne magnitude. Takav je, na primjer, Chua-in oscilator. Za neke sisteme, kao što je Colpitts-ov oscilator, u pojedinim periodičnim režimima između DC komponente i spektralne komponente sa maksimalnom magnitudom postoji više subharmonika značajne magnitude. U takvoj situaciji, odziv detektora $m(t)$ dobijen na osnovu Algoritma 1 će imati visoku vrijednost i za periodični i za haotični region. Dakle, predloženi algoritam ne obezbjeđuje korektnu detekciju u ovom slučaju. Potrebno je izvršiti modifikaciju algoritma, odnosno, formirati mjeru koja će dati različite vrijednosti u periodičnom i haotičnom regionu. U tom cilju formiran je Algoritam 2, koji omogućava klasifikaciju signala iz haotičnih oscilatora koristeći cijeli spektralni domen i daje tačne rezultate za signale sa velikim brojem spektralnih komponenti u periodičnom režimu. Algoritam 2 koristi dvije mjere. Prva mjera broji odbirke u TF ravni koji pripadaju sinusoidalnim komponentama, dok drugi kriterijum broji odbirke STFT koji imaju značajnu energiju. Klasifikacija signala se vrši na osnovu odnosa ovih mjera i upoređivanja tako dobijenog odziva sa odgovarajućim pragom. Algoritam 2 je testiran u simulacijama sa Colpitts-ovim oscilatorom, gdje daje vrlo tačne rezultate.

Značaj ovih metoda provjeren je kroz niz simulacija.

Prvo su predstavljeni rezultati za različite (period-udvostručavajući, kvaziperiodični i intermitentni) puteve u kaos u slučaju poznatog Chua-inog oscilatora. Dobijeni rezultati dobro se slažu sa odgovarajućom teorijom.

Da bi pokazali da primjena predloženog detektora nije ograničena samo na oscilatorna kola, analizirani su dobro poznati Lorenz-ov i Rossler-ov haotični sistem i logističko preslikavanje. U svim ovim slučajevima rezultati simulacija odgovaraju rezultatima koji se mogu naći u literaturi.

Detektor je uspješno primijenjen u hiper-haotičnim sistemima, kao što je lanac od tri Chua-ina oscilatora, što potvrđuje njegov značaj. Naime, većina postojećih metoda za detekciju haosa, među kojima i titracija haosa sa dodatim šumom, ima problema sa detekcijom haosa u hiper-haotičnim sistemima.

Zatim, detektor je dao dobre rezultate i u detekciji haosa u neautonomnim dinamičkim sistemima, kao što je Duffing-ov oscilator. Ovaj rezultat dobija na važnosti, ako znamo da većina postojećih metoda za detekciju haosa ne daje zadovoljavajuće rezultate u radu sa neautonomnim sistemima.

Konačno, i u detekciji haosa u Colpitts-ovom oscilatoru primjenom Algoritma 2 dobijeni su rezultati koji se dobro slažu sa odgovarajućom teorijom.

Prisustvo šuma je neminovno u eksperimentalnim podacima. Zato je izvršena analiza uticaja šuma na tačnost detektora. Pokazano je da je i pri relativno velikom šumu ($SNR = 10\text{dB}$) greška detekcije mala, odnosno da su rezultati detekcije zadovoljavajući. Analiziran je uticaj širine upotrijebljenog prozora u STFT na tačnost detekcije u prisustvu šuma. Predložen je multiwinow algoritam koji obezbjeđuje veću tačnost nego osnovni algoritam sa konstantnom širinom prozora.

Primjeni haosa u komunikacijama posvećuje se sve veća pažnja. Predloženi detektor može biti korišćen za otkrivanje haotičnih sigurnih komunikacija. Dobri rezultati se dobijaju i u slučaju hiper-haotičnih predajnika.

Iz navedenog se vidi da je predloženi detektor haosa relativno lak za implementaciju, pouzdan u uslovima šuma, malo osjetljiv na promjenu parametara algoritma i primjenljiv na široku klasu haotičnih i hiper-haotičnih signala iz autonomnih i neautonomnih sistema.

Dio rezultata saopštenih u ovoj disertaciji nalazi se u radu "Time-frequency representations based detector of chaos in oscillatory circuits," koji je prihvaćen za objavljivanje u eminentnom naučnom časopisu Signal Processing. To su Algoritam 1 i simulacioni rezultati vezani za Chua-in oscilator, Rossler-ov sistem i logističko preslikavanje. Zatim, uticaj šuma na tačnost detektora i otkrivanje haotičnih sigurnih komunikacija.

Iz saopštenog se vidi da ova disertacija sadrži nekoliko doprinosa, od kojih kao najznačajnije navodimo sledeće:

1. Sistematizacija postojećih metoda za detekciju haosa i njihovo poređenje.
2. Formiranje novog metoda za detekciju haosa u nelinearnim oscilatornim kolima.
3. Kroz niz simulacija provjerena je primjenljivost i tačnost metoda, ne samo u slučaju nelinearnih oscilatora, nego i drugih autonomnih i neautonomnih haotičnih sistema. Dakle, pokazana je univerzalnost predloženog detektora.

Detekcija haosa je otvorena oblast i novi testovi se konstantno razvijaju. Literatura je puna "lažnih" dokaza haosa, zato treba biti vrlo kritičan pri odlučivanju. Obično je potrebno izvršiti više testova prije donošenja zaključka. Predložene tehnike predstavljaju jedan doprinos u ovoj oblasti, koji unekoliko dopunjuje postojeće metode i rezultate.

Literatura

- [1] E. N. Lorenz, "Deterministic non-periodic flow," *J. Atmospheric Sci.*, vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [2] V. Volterra, "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi," *Memorie dell'Accademia dei Lincei* 2, pp. 31-113, 1926.
- [3] W. A. Brock, D. A. Hsieh and B. LeBaron, *Nonlinear dynamics, chaos, and instability: statistical theory and economic evidence*, MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
- [4] D. T. Kaplan, R. J. Cohen, "Is fibrillation chaos?" *Circulation Research*, vol. 67, pp. 886-892, 1990.
- [5] C. S. Poon, C. K. Merrill, "Decrease of cardiac chaos in congestive heart failure," *Nature* no. 389, pp. 492-495, 1997.
- [6] K. Lehnertz, C. E. Elger, "Can epileptic seizures be predicted?" *Physical Review Letters* no. 80, pp. 5019-5022, 1998.
- [7] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. Strelcyn, "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them," *Meccanica*, vol. 15, pp.9-30, 1980.
- [8] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D*, vol. 16, 1985, pp. 285-317.
- [9] M. R. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets," *Physica D*, vol. 65, 1993, pp. 117-134.

- [10] P. Grassberger, I. Procaccia, "Characterization of strange attractors," *Phys. Rev. Lett.* no. 50, pp.346-349, 1983.
- [11] P. Grassberger, I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal," *Phys. Rev. A*, no. 28, pp.2591-2593, 1983.
- [12] G. Sugihara and R. M. May, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series," *Nature*, no. 344, pp. 734-741, 1990.
- [13] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data," *Physica D*, vol. 58, pp. 77-94, 1992.
- [14] M. B. Kennel, S. Isabelle, "Method to distinguish possible chaos from colored noise and to determine embedding parameters," *Phys. Rev. A*, vol. 46, no. 6, pp.3111-3118, 1992.
- [15] T. S. Parker, L. O. Chua, "Chaos: A tutorial for engineer," *Proceedings of the IEEE*, (Special Issue on Chaotic Systems), vol. 75, no. 8, pp. 982-1008, Dec. 1987.
- [16] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, vol. 2, *Texts in applied mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [17] M. R. Belić, *Deterministički haos*, SFIN, god III, broj 3, 1990.
- [18] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, *Nonlinear dynamics and chaos*, New York: John Wiley and Sons, 1986.
- [19] J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, New York: Oxford University Press, 2003.
- [20] P. Drazin: *Nonlinear systems*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [21] M. P. Kenedy, "Three steps to chaos-Part I: Evolution," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications*. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits), vol. 40, no.10, pp. 640-656, Oct. 1993.
- [22] L. O. Chua, P. M. Lin, *Computer- aided analysis of electronic circuits: Algorithm and Computational Techniques*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.

- [23] T. L. Carroll, L. M. Pecora, "Synchronizing chaotic circuits", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 38, no.4, pp. 453-456, April. 1991.
- [24] M. P. Kenedy, "Three steps to chaos-Part II: A Chua's circuit primer," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no.10, pp. 657-674, Oct. 1993.
- [25] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G. Q. Zhong, "A universal circuit for studying and generating chaos-Part I: Routes to chaos," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no.10, pp. 732-744, Oct. 1993.
- [26] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G. Q. Zhong, "A universal circuit for studying and generating chaos-Part II: Strange attractors," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no.10, pp. 745-761, Oct. 1993.
- [27] L. O. Chua, "Intermittency in a piecewise-linear circuit", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 38, no. 5, pp. 510-520, May 1991.
- [28] L.P. Shilnikov, "Chua's circuit: Rigorous results and future problems", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no.10, pp. 784-786, Oct. 1993.
- [29] S.Wu, " Chua's circuit family", *Proceedings of the IEEE, (Special Issue on Chaotic Systems)*, vol. 75, no. 8, pp. 1022-1032, Dec. 1987.
- [30] T. Matsumoto, "A chaotic attractor from Chua's circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst*, vol. CAS-31, pp. 1055-1058, 1984.
- [31] P. Grassberger, I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractors," *Physica D*, no. 9, pp.189-208, 1983.
- [32] A.Provenzale, L. A. Smith, R. Vio, G. Murante, "Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series," *Physica D*, no. 58, pp.31-49, 1992.

- [33] V. I. Osedelec, "A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems," *Trans. of the Moscow Math. Soc.* vol. 19, pp. 197-221, 1968.
- [34] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical recipes: the art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1992.
- [35] F. Takens, "Detecting strange attractors in turbulence," *Lecture Notes in Mathematics*, no. 898, pp. 366-381, Springer, New-York, 1981.
- [36] S. Sato, M. Sano, Y. Sawada, "Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems," *Prog. Theor. Phys.* no. 77, 1987.
- [37] C.-S. Poon and M. Barahona: "Titration of chaos with added noise," *Proc. of NAS*, vol. 98, no. 13, 2001, pp. 7107-7112.
- [38] M. Barahona, C.-S. Poon, "Detection of nonlinear dynamics in short, noisy time series," *Nature*, vol. 381, pp. 215-217, 1996.
- [39] A. W. Oppenheim, R. W. Shafer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
- [40] LJ. Stanković, *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, Beograd 1990.
- [41] LJ. Stanković, *Time-frequency signal analysis*, Podgorica 1999.
- [42] B. Boashash, ed: *Time-frequency signal analysis and applications*, Elsevier, 2003.
- [43] L. Cohen, "Time-frequency distributions-a review," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 7, pp. 941-981, July 1989.
- [44] J. B. Allen and L. R. Rabiner, "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis," *Proc. IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1558-1564, Nov. 1977.
- [45] V. Rubežić, I. Djurović and M. Daković, "Time-frequency representations based detector of chaos in oscillatory circuits," *Signal Processing*, u štampi, 2006.
- [46] P. Stoica and R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*, Prentice-Hall, 1997.

- [47] R. G. Baraniuk, P. Flandrin, A. J. E. M. Janssen and O. J. J. Michel, "Measuring time-frequency information content using the Renyi Entropies," *IEEE Trans. Inf. Th.*, vol. 47, no. 4, pp. 1391-1409, May 2001.
- [48] L.J. Stanković, "A measure of some time-frequency distributions concentration," *Sig. Proc.*, vol. 81, no. 3, pp. 621-631, Mar. 2001.
- [49] V. Rubežić, I. Đurović, M. Daković, "Detekcija haosa u Čuinom oscilatoru", *Informacione tehnologije IT '05*, Zbornik radova, Žabljak, 2005.
- [50] T. Matsumoto, L. O. Chua and R. Tokunaga, "Chaos via torus breakdown," *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. 34, no. 3, pp. 240-253, Mar. 1987.
- [51] C. W. Wu, "Studying chaos via 1-D maps-A tutorial," *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. 40, no. 10, pp. 707-721, Oct.1993.
- [52] M. P. Kennedy, "Chaos in the Colpitts oscillator," *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, vol. 41, no. 11, pp. 771-774, Nov. 1994.
- [53] I. Đurović, V. Rubežić, M. Daković, "Chaos detection in Colpitts oscillator", *Proceedings of the XL International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST 2005*, Niš, 2005.
- [54] V. Rubežić, I. Đurović, M. Daković, "Detekcija haosa u Kolpicovom oscilatoru", *XLIX Konferencija ETRAN-a*, Zbornik radova, Budva, 2005.
- [55] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of Atmospheric Sciences*, no. 20, pp. 130-141, 1963.
- [56] O. E. Rossler, "An equation for continuous chaos," *Phys. Lett. A*, vol. 57, pp. 397-398, 1976.
- [57] T. Kapitaniak, L. O. Chua, "Hyper-chaotic attractors of unidirectionally-coupled Chua's circuits," *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 4, no. 2, pp. 474-482, 1994.
- [58] F. C. Moon, W. T. Holmes, "A magnetoelastic strange attractor," *Journal of Sound Vibration*, no. 65, pp. 275-296, 1979.

- [59] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *JASA*, vol. 90, no. 432, pp. 1200-1224. 1995.
- [60] LJ. Stanković, M. Daković, and V. Ivanović, "Performance of spectrogram as IF estimator," *Electronics Letters*, vol. 37, no. 12, pp.797-799, June 2001.
- [61] V. Katkovnik, LJ. Stanković, "Periodogram with varying and data-driven window length," *Signal Processing*, Vol.67, No.3, pp.345-358, June 1998.
- [62] D. Frey, "Chaotic Digital Encoding: An Approach to Secure Communication", *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog and Digital Signal Procesing*, vol. 40, no. 10, pp. 660-666, oct.1993.
- [63] H. Leung, J. Lam, "Desing of Demodulation for the Chaotic Modulation Communication System", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 44, no. 3, pp. 262-267, March. 1997.
- [64] K. M. Short, "Unmasking a modulated chaotic communications sheme," *Int. J. Bifurcations Chaos*, vol. 6, no. 2, pp. 367-375, 1996.
- [65] T. Yang, "Recovery of digital signal from chaotic switching," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 23, no. 6, pp. 611-615, Nov.-Dec. 1995.
- [66] T. Yang, L. B. Yang and C. M. Yang, "Cryptanalyzing chaotic secure communications using return maps," *Phys. Lett. A*, vol. 245, no. 6, pp. 495-510, Aug. 1998.
- [67] T. Yang, L. B. Yang and C. M. Yang, "Breaking chaotic switching using generalized synchronization: Examples," *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. 45, no. 10, pp. 1062-1067, Oct. 1998.
- [68] B. Yang and C. M. Yang, "Breaking chaotic secure communication using a spectrogram," *Phys. Lett. A*, vol. 247, no. 1-2, pp. 105-111, Oct. 1998.



PODACI POTREBNI ZA DIGITALIZACIJU DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora Vesna Rubežić

Godina rođenja 1971.

E-mail vesnar@ac.me

Organizaciona jedinica Univerziteta Crne Gore Elektrotehnički fakultet

Naslov doktorske disertacije Vremensko-frekvencijske reprezentacije u detekciji haotičnih stanja u oscilatornim kolima

Prevod naslova na engleski jezik Time-frequency representations in the detection of chaotic states in oscillatory circuits

Datum odbrane 29. 09. 2006.

Signatura u Univerzitetskoj biblioteci

Naslov, sažeci, ključne riječi (priložiti dokument sa podacima potrebnim za unos doktorske disertacije u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore)

Izjava o korišćenju (priložiti potpisanu izjavu)

Napomena

1 Podatak o signaturi (lokaciji) može ispuniti biblioteka organizacione jedinice/Univerzitetska biblioteka

PODACI POTREBNI ZA UNOS DOKTORSKE DISERTACIJE U DIGITALNI ARHIV

UNIVERZITETA CRNE GORE

Prevod naslova disertacije na engleski jezik

Time-frequency representations in the detection of chaotic states in oscillatory circuits

Mentor i članovi komisija (za ocjenu i odbranu)

prof. dr Igor Đurović – mentor

Komisija za ocjenu

1. prof. dr Igor Đurović

2. prof. dr Branimir Reljin

3. prof. dr Ljubiša Stanković

Komisija za odbranu

1. prof. dr Zdravko Uskoković

2. prof. dr Ljubiša Stanković

3. prof. dr Branimir Reljin

4. prof. dr Igor Đurović

5. prof. dr Budimir Lutovac

Sažetak

Teorija haosa je jedna od najinteresantnijih oblasti nauke koja se razvila u dvadesetom vijeku. Deterministički haos zapažen je u mnogim fenomenima od kvantnog do astronomskog nivoa, u različitim disciplinama kao što su tehnika, meteorologija, ekonomija... Važan dio ove oblasti je analiza haotičnih signala, odnosno detekcija dinamike sistema na osnovu jednog niza dostupnih podataka. Od posebnog interesa je detekcija haosa u eksperimentalnim podacima. Ipak, postojeći metodi za detekciju haosa imaju mnogo nedostataka: veliku složenost računanja, nepouzdanost za kratke nizove kontaminirane šumom, neprimjenljivost na široku klasu sistema...S obzirom na raznolikost haotičnih sistema i nedostatke postojećih tehnika za detekciju haosa, problem detekcije se smatra otvorenim.

Glavna tema ove teze je detekcija haotičnih odnosno periodičnih stanja u nelinearnim oscilatornim kolima. Razvijen je metod za detekciju haosa na osnovu vremensko-frekvencijske reprezentacije signala iz haotičnog oscilatora. Predloženi detektor je primijenjen na haotična oscilatorna kola (Chua-ino, Colpitts-ovo) za nekoliko različitih scenarija prelaza u kaos. Takođe, pokazano je da njegova primjena nije ograničena samo na oscilatorna kola. Naime, uspješno je primijenjen u detekciji haosa u poznatim haotičnim sistemima kao što su Lorenz-ov, Rossler-ov i Duffing-ov sistem i logističko preslikavanje.

Analiziran je uticaj suma i širine upotrijebljenog prozora u vremensko-frekvencijskoj reprezentaciji na tačnost detektora. Na osnovu ove analize predložen je multiwindow pristup, koji daje bolje rezultate nego verzija detektora sa jednim prozorom konstantne širine.

Na kraju, pokazano je da metod može biti primijenjen za otkrivanje haotičnih sigurnih komunikacija.

Sažetak na engleskom (njemačkom ili francuskom) jeziku

Chaos theory is one of the most interesting fields in the science, developed in the 20-th century. Deterministic chaos can be observed in many phenomena from the quantum to astronomical level, in the different disciplines like for example technics, metrology, economics... Important part of this field is chaotic signal analysis, i.e. system dynamics detection based on one of the available data. One particularly important issue is detection of chaos in experimental series. However, existing methods for chaos detection have many drawbacks: high numerical complexity, long series required for reliable detection, absence of techniques that can be used in arbitrary system... Considering the chaotic systems variety and drawbacks of the existing techniques for chaos detection, detection problem can be assumed to be open.

The main subject of this thesis is chaotic states detection in nonlinear oscillator circuits. The time-frequency representation based chaos detection of the signals from chaotic oscillator circuits is developed.

The proposed detector has been applied on the chaotic circuits (Chua's and Colpitts) in some common routes to chaos. In addition, it has been shown that application of the proposed detector is not limited to the chaotic oscillatory circuits. Namely, it has been successfully applied on some common chaotic systems (Lorenz's, Rossler's, Duffing's system and logistic map).

Influence of the noise and the window width used in time-frequency representation to the detector accuracy is analyzed. Based of this analysis a multiwindow approach, producing better results than a single window counterpart, has been proposed.

Finally, it has been shown that this method can be applied to the chaotic secure communication.

Ključne riječi oscilatorna kola, teorija haosa, vremensko-frekvencijska reprezentacija

Ključne riječi na engleskom jeziku oscillatory circuits, chaos theory, time-frequency representation

Naučna oblast/uža naučna oblast Elektrotehnika/Električna kola

Naučna oblast/uža naučna oblast na engleskom jeziku Electrical engineering /Electric circuit

Ostali podaci

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u **Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore** unese doktorsku disertaciju pod naslovom

Vremensko-frekvencijske reprezentacije u detekciji haotičnih stanja u oscilatornim kolima

koja je moj autorski rad.

Doktorska disertacija, pohranjena u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore, može se koristiti pod uslovima definisanim licencom Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

U Podgorici ,
22. februar 2017.

Potpis doktoranda
prof. dr Vesna Rubežić

Vesna Rubežić

Autorstvo

Licenca sa najširim obimom prava korišćenja. Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Djelo se može koristiti i u komercijalne svrhe.

Autorstvo – bez prerada

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerade se moraju distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

Autorstvo – nekomercijalno

Dozvoljavaju se prerade, umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio).

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada

Licenca kojom se u najvećoj mjeri ograničavaju prava korišćenja djela. Dozvoljava se umnožavanje, distribucija i javno saopštavanje djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Djelo se ne može mijenjati, preoblikovati ili koristiti u drugom djelu.

Komercijalna upotreba djela nije dozvoljena.

Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima

Dozvoljava se umnožavanje, distribucija, javno saopštavanje i prerada djela, pod uslovom da se navede ime izvornog autora (onako kako je izvorni autor ili davalac licence odredio). Ukoliko se djelo mijenja, preoblikuje ili koristi u drugom djelu, prerada se mora distribuirati pod istom ili sličnom licencom.

Djelo i prerade se ne mogu koristiti u komercijalne svrhe.